

# Distribuição Gama Bivariada de Smith, Adelfang e Tubbs: Soma, Produto e Proporção das Variáveis Componentes

## Smith, Adelfang and Tubbs's Bivariate Gamma Distribution: Sum, Product and Proportion of Variables Components

**Jailson de Araujo Rodrigues**

Departamento de Ciências Exatas

Universidade Federal de Lavras – UFLA, Lavras, MG

*jailsondearaujo@yahoo.com.br*

**Ana Paula Coelho Madeira Silva**

Departamento de Ciências Exatas

Universidade Federal de Lavras – UFLA, Lavras, MG

*apcmadeira@hotmail.com*

**Lucas Monteiro Chaves**

Departamento de Ciências Exatas

Universidade Federal de Lavras – UFLA, Lavras, MG

*lucas@dex.ufla.br*

**Resumo:** O modelo gama é um dos mais utilizados na análise de processos hidrológicos. Nesse contexto, são deduzidas as distribuições exatas das importantes combinações de variáveis  $U = X + Y$ ,  $P = XY$  e  $Q = Y/(X + Y)$  juntamente com seus respectivos momentos quando  $X$  e  $Y$  seguem o modelo gama bivariado de Smith, Adelfang e Tubbs. As expressões envolvidas fazem uso de várias funções especiais. Os resultados obtidos são aplicados em dados de precipitações pluviométricas ocorridas na cidade de Passo Fundo.

**Palavras-chave:** modelagem hidrológica; momentos; produto de variáveis aleatórias;

Recebido em 20/10/2011 - Aceito em 21/11/2011.

---

RECEN      Guarapuava, Paraná      v. 13      nº 2      p. 185-200      jul/dez      2011

---

proporção de variáveis aleatórias; soma de variáveis aleatórias.

**Abstract:** The bivariate gamma distributions have been used successfully in modeling hydrological processes. In this context, we are derived the exact distributions of the important hydrological variables  $U = X + Y$ ,  $P = XY$  and  $Q = Y/(X + Y)$  together with their moments when  $X$  and  $Y$  follow the Smith, Aldelfang, and Tubbs's bivariate gamma model. The expressions involved make use of various special functions. The results are applied to data of rainfall occurred in the city of Passo Fundo.

**Key words:** hydrological modeling; moments; product of random variables; proportion of random variables; sum of random variables.

## 1 Introdução

Apesar de apresentar dificuldades de implementação na solução de problemas práticos, os modelos gama bivariados são muito utilizados no estudo de processos hidrológicos. Por exemplo, Izama [1] propôs uma distribuição gama bivariada com quatro parâmetros para estudar dados de precipitações ocorridas no Distrito de Kanto no Japão, Loaiciga e Leipnik [2] discutiram o uso de uma distribuição gama bivariada na análise de qualidade da água através da correlação entre a quantidade de coliformes fecais e a quantidade de estreptococos fecais, Yue [3] utiliza uma distribuição gama bivariada para analisar a correlação entre a duração da precipitação pluviométrica (chuva) e seu volume, Nadarajah e Gupta [4] estudaram o comportamento das secas ocorridas no Estado Norte Americano de Nebraska em um período de cento e dez anos considerando um modelo gama triparamétrico. Esse mesmo conjunto de dados foi analisado por Nadarajah [5], considerando um modelo gama bivariado mais simples com dois parâmetros.

O estudo da pluviometria das regiões tem sido uma importante fonte de pesquisa em hidrologia [6, 7]. Em particular, as precipitações pluviométricas, por se tratarem de um fenômeno climático regional de amplo impacto social que tem reflexo direto na qualidade de vida da população, apresentam-se no centro dessas pesquisas. Existe uma preocupação crescente em criar mecanismos eficazes para descrever, a contento,

esses eventos, minimizando seus efeitos. A modelagem probabilística pode ser destacada como um desses mecanismos.

O estudo das distribuições de combinações de variáveis do tipo  $U = X + Y$ ,  $P = XY$  e  $Q = Y/(X + Y)$  é importante para a descrição de fenômenos hidrológicos [6, 8–12]. Dessa forma, são deduzidas as distribuições exatas dessas combinações de variáveis quando  $X$  e  $Y$  seguem o modelo gama bivariado de Smith, Aldelfang e Tubbs [13]. Os resultados obtidos são aplicados na análise de dados reais de precipitações pluviométricas.

O texto está organizado da seguinte forma: na seção 2 será apresentado o modelo gama bivariado adotado juntamente com algumas das funções especiais empregadas, nas seções 3 e 4 serão deduzidas as funções densidade de probabilidade exatas das variáveis  $U$ ,  $P$  e  $Q$  juntamente com seus respectivos momentos. Finalmente, na seção 5 os resultados obtidos serão aplicados na modelagem de precipitações ocorridas na cidade de Passo Fundo no Rio Grande do Sul.

## 2 Modelo gama bivariado

A distribuição gama bivariada de Smith, Aldelfang e Tubbs tem função densidade de probabilidade (fdp) conjunta dada por:

$$f(x, y) = \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \exp[-(x+y)/(1-\eta)]}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k I_{\beta+k-1} \left( \frac{2\sqrt{\eta xy}}{1-\eta} \right) \quad (1)$$

em que  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $\beta > \alpha$  e

$$a_k = \frac{(\eta y)^k \Gamma(\beta - \alpha + k) (1 - \eta)^{\beta-1}}{k! (\eta xy)^{(\beta+k-1)/2}} \quad (2)$$

$$\eta = \rho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad \text{com } 1 > \eta > 0 \quad (3)$$

O parâmetro  $\rho$  denota o coeficiente de correlação linear entre  $X$  e  $Y$ ,  $\Gamma(\cdot)$  e  $I_\nu(\cdot)$  indicam a função gama e a função de Bessel do Tipo I modificada, definidas, respecti-

vamente, como segue:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} \exp(-t) dt \quad (4)$$

$$I_{\nu}(x) = \frac{x^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)_k k!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k \quad (5)$$

em que  $(\nu+1)_k = (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)$  denota o fatorial ascendente.

As marginais  $X$  e  $Y$  são gama distribuídas com fdps:

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-x) \quad (6)$$

$$f_Y(y) = \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \exp(-y) \quad (7)$$

Para o cálculo das propriedades do modelo (1) são necessárias as funções especiais:

- Função beta

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (8)$$

- Função de Macdonald

$$K_{\nu}(x) = \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)]}{2 \operatorname{sen}(\nu\pi)} \quad (9)$$

- Função hipergeométrica de Gauss

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k x^k}{(c)_k k!} \quad (10)$$

- Polinômio modificado de Laguerre

$$L_n^{\nu}(x) = \frac{x^{-\nu} \exp(x)}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\nu} \exp(-x)] \quad (11)$$

- Polinômio de Jacobi

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{a+n} (1+x)^{b+n}] \quad (12)$$

### 3 Funções densidade de probabilidade

Nos teoremas 1, 2 e 3 são deduzidas as fdps de  $U = X + Y$ ,  $P = XY$  e  $Q = Y/(X + Y)$  quando  $X$  e  $Y$  seguem o modelo (1).

**Teorema 1** Se  $X$  e  $Y$  são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$f_U(u) = \frac{u^{\alpha+\beta-1} \exp\left(-\frac{u}{1-\eta}\right)}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} u^{k+2j} \quad (13)$$

sendo que  $u > 0$  e

$$a_{kj} = \frac{\eta^{k+j} \Gamma(\beta-\alpha+k) \Gamma(\alpha+j)}{(1-\eta)^{k+2j} \Gamma(\alpha+\beta+k+2j) j! k!} \quad (14)$$

**Prova:** De (1) temos que a fdp conjunta de  $U = X + Y$  e  $Q = Y/(X + Y)$ , utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis, pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(u, q) = \frac{u^\alpha q^{(\beta-1)/2} (1-q)^{\alpha-1} \exp[u/(\eta-1)]}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* q^{k/2} \times (1-q)^{(1-\beta-k)/2} I_{\beta+k-1} \left( \frac{2u \sqrt{\eta q (1-q)}}{1-\eta} \right) \quad (15)$$

sendo que:

$$a_k^* = \frac{\eta^k \Gamma(\beta-\alpha+k) (1-\eta)^{\beta-1}}{k! \eta^{(\beta+k-1)/2}}. \quad (16)$$

A fdp de  $U$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f_U(u) = \frac{u^\alpha \exp[u/(\eta-1)]}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* I(u) \quad (17)$$

em que:

$$I(u) = \int_0^1 q^{(\beta+k-1)/2} (1-q)^{(2\alpha-\beta-k-1)/2} I_{\beta+k-1} \left( \frac{2u\sqrt{\eta q(1-q)}}{1-\eta} \right) dq \quad (18)$$

Substituindo (5) em (18) e em seguida aplicando (8), obtém-se:

$$I(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2j)j!} \left( \frac{u\sqrt{\eta}}{1-\eta} \right)^{\beta+k+2j-1} \quad (19)$$

A conclusão do teorema decorre da substituição de (19) em (17). ■

**Lema 1** (Equação (2.3.16.1) [14]). Se  $p, q > 0$ , então,

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} \exp\left(-px - \frac{q}{x}\right) dx = 2 \left(\frac{q}{p}\right)^{a/2} K_a(2\sqrt{pq}).$$

**Teorema 2** Se  $X$  e  $Y$  são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$f_P(p) = \frac{2p^{(\alpha-1)/2}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* I_{\beta+k-1} \left( \frac{2\sqrt{\eta p}}{1-\eta} \right) K_{\alpha-\beta-k} \left( \frac{2\sqrt{\eta p}}{1-\eta} \right) \quad (20)$$

sendo que  $p > 0$  e  $a_k^* = \frac{\eta^k \Gamma(\beta-\alpha+k)(1-\eta)^{\beta-1}}{k! \eta^{(\beta+k-1)/2}}$ .

**Prova:** De (1) tem-se que a fdp conjunta de  $X$  e  $P = XY$  tem a seguinte forma:

$$f(x, p) = \frac{x^{\alpha-\beta-1} p^{(\beta-1)/2}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \exp\left[-\frac{p+x^2}{x(1-\eta)}\right] \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* x^{-k} p^{k/2} \\ \times I_{\beta+k-1} \left( \frac{2\sqrt{\eta p}}{1-\eta} \right)$$

Assim, pode-se escrever a fdp da variável  $P$  da seguinte maneira:

$$f_P(p) = \frac{p^{(\beta-1)/2}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* p^{k/2} I_{\beta+k-1} \left( \frac{2\sqrt{\eta p}}{1-\eta} \right) I(p) \quad (21)$$

sendo que:

$$I(p) = \int_0^\infty x^{\alpha-\beta-k-1} \exp\left[-\frac{p+x^2}{x(1-\eta)}\right] dx. \quad (22)$$

Aplicando o lema 1 em (22) obtém-se:

$$I(p) = 2p^{(\alpha-\beta-k)/2} K_{\alpha-\beta-k}\left(\frac{2\sqrt{p}}{1-\eta}\right). \quad (23)$$

A conclusão do teorema decorre da substituição de (23) em (21). ■

Nas figuras 1 e 2 são ilustradas as formas da fdp (13) e (20) para diferentes valores paramétricos.

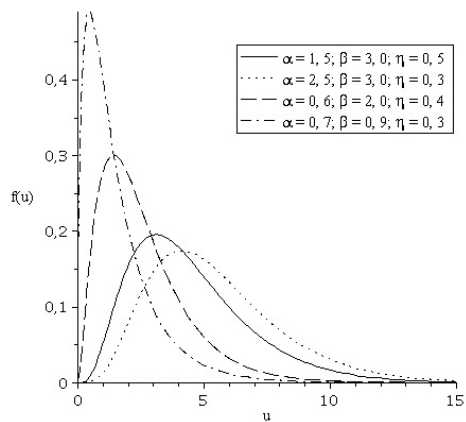


Figura 1. Gráficos da fdp (13)

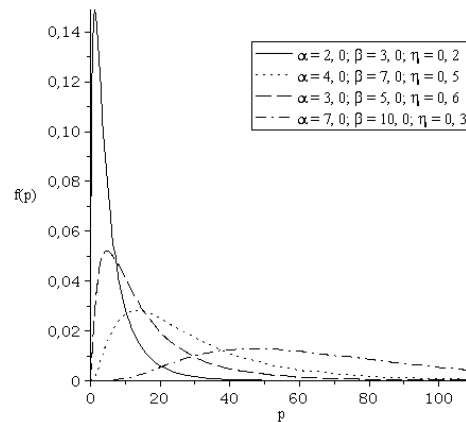


Figura 2. Gráficos da fdp (20)

**Lema 2** (Equação (2.15.3.2) [15]). Se  $a + \nu > 0$  e  $p > c$ , então,

$$\int_0^\infty x^{a-1} \exp(-px) I_\nu(cx) dx = p^{-(a+\nu)} \left(\frac{c}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu+a)}{\Gamma(\nu+1)} \times {}_2F_1\left(\frac{a+\nu}{2}, \frac{a+\nu+1}{2}; \nu+1, \frac{c^2}{p^2}\right).$$

**Teorema 3** Se  $X$  e  $Y$  são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$f_Q(q) = \frac{(1-\eta)^\beta q^{\beta-1} (1-q)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{**} q^k \times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+k}{2}, \frac{\alpha+\beta+k+1}{2}; \beta+k; 4\eta q(1-q)\right) \quad (24)$$

sendo que  $1 > q > 0$  e  $a_k^{**} = \frac{\eta^k \Gamma(\beta-\alpha+k)\Gamma(\beta+\alpha+k)}{k! \Gamma(\beta+k)}$ . Analogamente, se  $Q = X/(X+Y)$ , então,

$$f_Q(q) = \frac{(1-\eta)^\beta q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{**} (1-q)^k \times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+k}{2}, \frac{\alpha+\beta+k+1}{2}; \beta+k; 4\eta q(1-q)\right). \quad (25)$$

**Prova:** Usando (15) e (16) pode-se escrever a fdp de  $Q$  da seguinte maneira:

$$f_Q(u) = \frac{q^{(\beta-1)/2} (1-q)^{\alpha-1}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* q^{k/2} (1-q)^{(1-\beta-k)/2} I(q) \quad (26)$$

sendo que:

$$I(q) = \int_0^\infty u^\alpha \exp\left(-\frac{u}{1-\eta}\right) I_{\beta+k-1}\left(\frac{2u\sqrt{\eta q(1-q)}}{1-\eta}\right) du \quad (27)$$

Aplicando o lema 2 em (27) obtém-se,

$$I(q) = \frac{(1-\eta)^\alpha [\eta q(1-q)]^{(\beta+k-1)/2} \Gamma(\beta+\alpha+k)}{\Gamma(\beta+k)} \times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+k}{2}, \frac{\alpha+\beta+k+1}{2}; \beta+k; 4\eta q(1-q)\right) \quad (28)$$

A conclusão do teorema decorre da substituição direta de (28) em (26).

Na figura 3 são ilustradas as formas da fdp (24) para diferentes valores paramétricos.



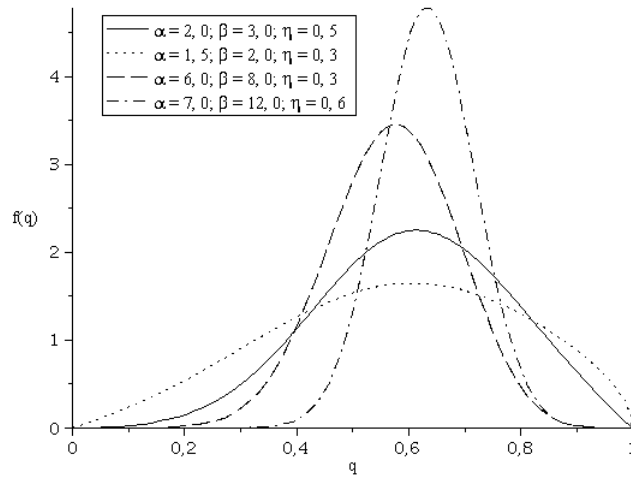


Figura 3. Gráficos da fdp (24)

#### 4 Momentos

Nesta seção, são deduzidos os momentos de  $U = X + Y$  e  $P = XY$  quando  $X$  e  $Y$  seguem o modelo (1).

**Lema 3** (Equação (2.15.5.4) [15]). Se  $p > 0$  e  $\nu > -n - 1$ , então,

$$\int_0^\infty x^{\nu+2n-1} \exp(-px^2) I_\nu(cx) dx = \frac{n!c^\nu}{2^{\nu+1} p^{n+\nu+1}} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right) L_n^\nu\left(-\frac{c^2}{4p}\right).$$

**Lema 4** (Equação (2.19.3.2) [15]). Se  $p > 0$  e  $a > 0$ , então,

$$\int_0^\infty x^{a-1} \exp(-px) L_n^\nu(cx) dx = \frac{\Gamma(a)}{p^a} P_n^{(\nu, a-\nu-n-1)}\left(1 - \frac{2c}{p}\right).$$

**Teorema 4** Se  $X$  e  $Y$  são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$E(X^n Y^m) = \frac{m!(1-\eta)^{\beta-\alpha+m} \Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\eta^k \Gamma(\beta-\alpha+k)}{k!} \times P_m^{(\beta+k-1, \alpha-\beta-k+n-m)}\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right) \quad (29)$$

para todos inteiros  $n \geq 1$  e  $m \geq 1$ .

**Prova:** Utilizando (1) e (16), pode-se afirmar que:

$$E(X^n Y^m) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \int_0^{\infty} \frac{x^{(2\alpha-\beta-k+2n-1)/2} \exp [x/(\eta+1)]}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} I(x) dx \quad (30)$$

sendo que:

$$I(x) = \int_0^{\infty} y^{(\beta+k+2m-1)/2} \exp\left(-\frac{y}{1-\eta}\right) I_{\beta+k-1}\left(\frac{2\sqrt{\eta xy}}{1-\eta}\right) dy \quad (31)$$

Efetuada a transformação de variável  $t^2 = y$  em (31) e em seguida aplicando o lema 3 obtém-se,

$$I(x) = m!(1-\eta)^{m+1} (\eta x)^{(\beta+k-1)/2} \exp\left(\frac{\eta x}{1-\eta}\right) L_m^{\beta+k-1}\left(-\frac{\eta x}{1-\eta}\right). \quad (32)$$

Substituindo (32) em (30), temos:

$$E(X^n Y^m) = \frac{m!(1-\eta)^{m+1}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \eta^{(\beta+k-1)/2} \times \int_0^{\infty} x^{\alpha+n-1} \exp(-x) L_m^{\beta+k-1}\left(-\frac{\eta x}{1-\eta}\right) dx. \quad (33)$$

Chega-se ao fim da demonstração aplicando o lema 4 em cada integral de (33).

**Teorema 5** Se  $X$  e  $Y$  são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$E(U^n) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j! \eta^k (1-\eta)^{\beta-\alpha+j} \Gamma(\alpha+n-j) \Gamma(\beta-\alpha+k)}{k! \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \times P_n^{(\beta+k-1, \alpha-\beta-k+n-2j)}\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right) \quad (34)$$

para todo inteiro  $n \geq 1$ .

**Prova:** O teorema resulta da combinação do teorema 4 juntamente com a seguinte propriedade de expectância:

$$E(U^n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E(X^{n-j} Y^j).$$

■

**Teorema 6** Se  $X$  e  $Y$  são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$E(P^n) = \frac{n!(1-\eta)^{\beta-\alpha+m} \Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^k \Gamma(\beta-\alpha+k)}{k!} \times P_n^{(\beta+k-1, \alpha-\beta-k)} \left( \frac{1+\eta}{1-\eta} \right) \quad (35)$$

para todo inteiro  $n \geq 1$ .

**Prova:** Imediata a partir do teorema 4.

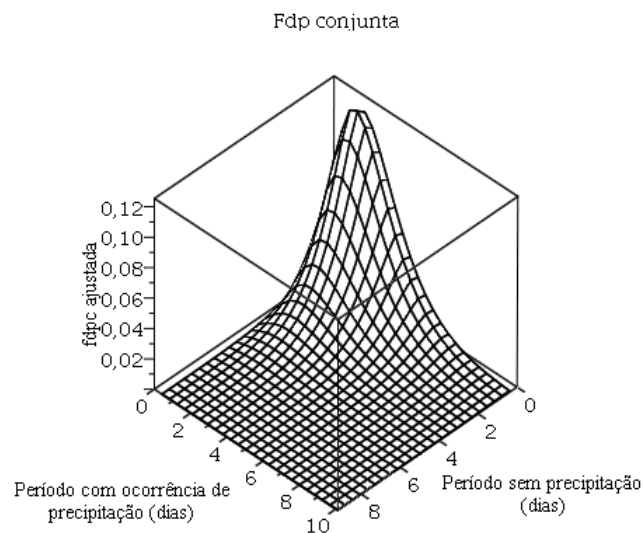


Figura 4. Fdp conjunta para os dados ajustados

## 5 Aplicação

A partir dos resultados obtidos nas seções anteriores, foi feita uma aplicação do modelo (1) na análise de precipitações pluviométricas ocorridas na cidade de Passo Fundo situada no norte do Estado do Rio Grande do Sul.

Os dados explorados foram coletados na Estação Agrometeorológica da EMBRAPA Trigo com coordenadas geográficas  $28^{\circ}15'46''S$  de latitude,  $52^{\circ}24'24''W$  de longitude e 684m de altitude. O conjunto de dados pode ser acessado livremente no seguinte endereço eletrônico: <http://www.cnpt.embrapa.br/pesquisa/agromet/ap>. A base de dados corresponde às medições diárias do índice pluviométrico no período de 01 de julho de 2009 até 30 de junho de 2011.

Utilizando as medições do índice pluviométrico, obtêm-se os dados sobre período de dias sem precipitação ( $X$ ) e período contíguo com ocorrência de precipitação ( $Y$ ). O objetivo é determinar as distribuições das variáveis:

1. Período climático ( $U$ ) = período sem precipitação ( $X$ ) + período contíguo com ocorrência de precipitação ( $Y$ ). O período climático indica um ciclo climático, formado pela soma dos dias sem chuva com os dias contíguos com chuva, essa quantidade também indica o retorno do período de seca (sem chuva);
2. Proporção de dias com ocorrência de precipitação ( $Q$ ) = período com ocorrência de precipitação ( $Y$ ) / (período sem precipitação ( $X$ ) + período contíguo com ocorrência de precipitação ( $Y$ )).

Como o modelo gama bivariado (1) tem marginais gama distribuídas com parâmetro de escala unitário, os dados observados para  $X$  e  $Y$  sofreram uma transformação para corrigir a escala. A transformação utilizada foi  $(X, Y) \rightarrow (C_1X, C_2Y)$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são fatores de correção de escala:

$$C_1 = \frac{n\hat{\alpha}}{\sum_{k=0}^n x} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{n\hat{\beta}}{\sum_{k=0}^n y}$$

Os parâmetros  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  foram ajustados a partir de suas distribuições marginais

via Método da Máxima Verossimilhança. As estimativas obtidas foram  $\hat{\alpha} = 1,633$  e  $\hat{\beta} = 2,963$ . A estimativa do parâmetro de dependência,  $\hat{\eta} = 0,005$ , foi deduzida a partir de (3) e da expressão:

$$\hat{\rho} = \frac{E[(X - M_x)(Y - M_y)]}{S_x S_y} \quad (36)$$

sendo que  $(M_x, S_x)$  e  $(M_y, S_y)$  são, respectivamente, as médias amostrais e os desvios padrões das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ .

O gráfico da fdp conjunta ajustada para os dados transformados é exibido na figura 4. Nas figuras 5 e 6 são exibidas as fdps ajustadas para  $U$  e  $Q$  sobreposta pelos respectivos histogramas dos dados transformados.

Para verificar a qualidade do ajuste de (1), primeiramente, foi plotado o gráfico de  $F_X(x_{(i)})$  versus  $(i - 0,375)/(n + 0,25)$  [16], sendo que  $F_X(\cdot)$  denota a função de distribuição acumulada de  $X$  e  $x_{(i)}$  representa os valores amostrais de  $X$  em ordem crescente, em seguida plotou-se o gráfico de  $F_Y(y_{(i)})$  versus  $(i - 0,375)/(n + 0,25)$  em que  $F_Y(\cdot)$  denota a função de distribuição acumulada de  $Y$  e  $y_{(i)}$  representa os valores amostrais de  $Y$  em ordem crescente. Esses gráficos são exibidos nas figuras 7 e 8, respectivamente.

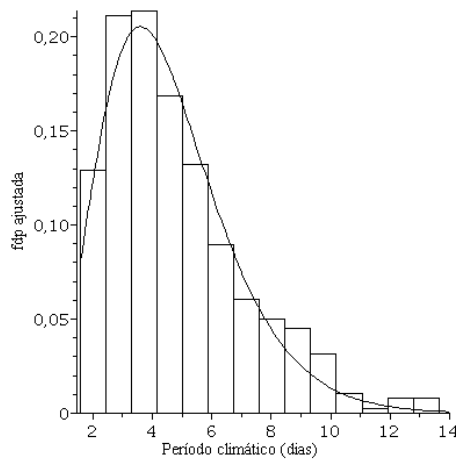


Figura 5. Fdp ajustada de  $U$

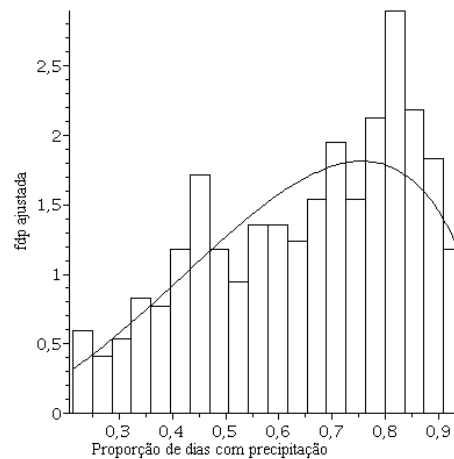


Figura 6. Fdp ajustada de  $Q$

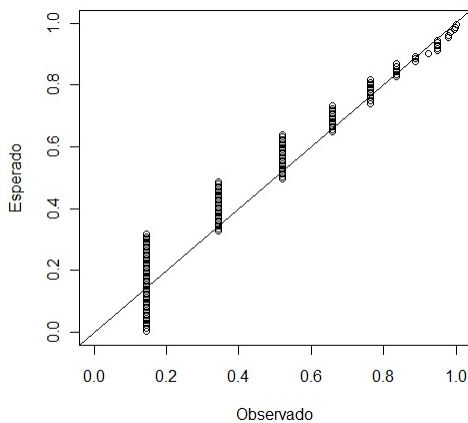


Figura 7. Ppplot para o período sem precipitação

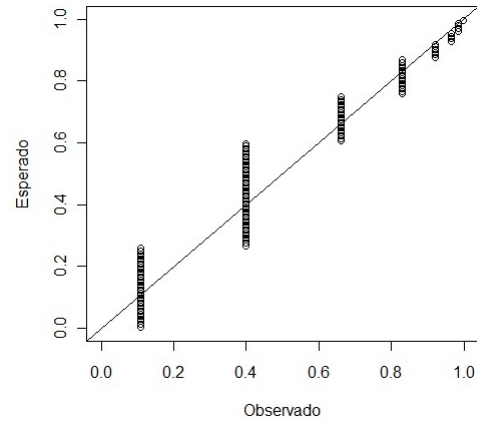


Figura 8. Ppplot para o período com ocorrência de precipitação

## 6 Conclusões

Considerando que  $X$  e  $Y$  seguem o modelo gama bivariado de Smith, Aldelfang e Tubbs, foi possível deduzir as distribuições exatas e os momentos das variáveis aleatórias  $U = X + Y$ ,  $P = XY$  e  $Q = Y/(X + Y)$  utilizando funções especiais. A aplicação do modelo na análise de dados de precipitações ocorridas na cidade de Passo Fundo situada no norte do Estado do Rio Grande do Sul apresentou resultados satisfatórios, levando-se em consideração que os critérios gráficos de qualidade de ajuste indicaram uma boa adequação do modelo aos dados observados.

## 7 Agradecimentos

Agradecemos à Coordenadoria para o Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de doutorado do primeiro autor.

## 8 Referências

- [1] IZAMA, T. Two or multi-dimensional gamma-type distribution and its application to rainfall data. *Meteorological Research Institute*, v. 15, p. 167–200, 1965.

- [2] LOAICIGA, H. A.; LEIPNIK, R. B. Correlated gamma variables in the analysis of microbial densities in water. *Water Resour*, v. 28, p. 329–335, 2005.
- [3] YUE, S. A bivariate gamma distribution for use in multivariate flood frequency analysis. *Hydrol Process*, v. 15, p. 1033–1045, 2001.
- [4] NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. Cherian's bivariate gamma distribution as a model for drought data. *Agrociencia*, v. 40, p. 483–490, 2006.
- [5] NADARAJAH, S. A bivariate gamma model for drought. *Water Resour Res*, v. 43 w08501, 2007.
- [6] VRAC, M.; NAVEAU, P.; DROBINSKI, P. Modeling pairwise dependencies in precipitation intensities. *Nonlinear Proc Geoph*, v. 14, p. 789–797, 2007.
- [7] YUE, S.; OUARDA, T. B. M. J.; BOBEE, B. A review of bivariate gamma distributions for hydrological application. *J Hydrol*, v. 246, p. 1–18, 2001.
- [8] NADARAJAH, S. A bivariate pareto model for drought. *Stoch Environ Res Risk Asses*, v. 23, p. 811–822, 2008.
- [9] NADARAJAH, S. A bivariate distribution with gamma and beta marginals with application to drought data. *J Appl Stat*, v. 36, p. 277–301, 2009.
- [10] NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. Friday and Patil's bivariate exponential distribution with application to drought data. *Water Resour Manage*, v. 20, p. 749–759, 2006.
- [11] NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. Intensity-duration models on bivariate gamma distributions. *Hiroshima Math J*, v. 36, p. 387–395, 2006.
- [12] NADARAJAH, S.; KOTZ, S. Sums, products and ratios for Downton's bivariate exponential distribution. *Stoch Environ Res Risk Asses*, v. 20, p. 164–170, 2006.
- [13] SMITH, O. E.; ADELFGANG, S. I.; TUBBS, J. D. A bivariate gamma probability distribution with application to gust modeling. *J Spacecraft Rockets*, v. 18, n. 6, p. 545–549, 1982.

- [14] PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. Integrals and series, Elementary Functions, Amsterdam: Gordon and Breach, v. 1, 1998, p. 808.
- [15] PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. Integrals and series, Special Functions, Amsterdam: Gordon and Breach, v. 2, 1998, p. 808.
- [16] CHAMBERS, J.; CLEVELAND, W.; KLEINER, B.; TUKEY, P. Graphical methods for data analysis. Boston: Duxbury Press, 1983, 395p.