MARIANA DA COSTA TELES

O DESENVOLVIMENTO VETORIAL EM UMA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICO: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA MEDIADA PELO GEOGEBRA

LAVRAS-MG
2020

MARIANA DA COSTA TELES

O DESENVOLVIMENTO VETORIAL EM UMA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICO: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA MEDIADA PELO GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Educação, área de concentração em Formação de Professores, para obtenção do título de Mestre.

Prof(a) Dr(a). Francine de Paulo Martins Lima
Orientadora

Prof(a) Dr(a). José Antônio Araújo Andrade
Coorientador

LAVRAS-MG
2020

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Teles, Mariana da Costa.
O desenvolvimento vetorial em uma perspectiva lógico-histórico: uma proposta pedagógica mediada pelo GeoGebra / Mariana da Costa Teles. - 2020.
69 p. : il.

Orientador(a): Francine de Paulo Martins Lima.
Coorientador(a): José Antônio Araújo Andrade.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Lavras, 2020.
Bibliografia.
1. GeoGebra. 2. Vetores. 3. Teoria Histórico-Cultural. I. Lima, Francine de Paulo Martins. II. Andrade, José Antônio Araújo. III. Título.

MARIANA DA COSTA TELES

O DESENVOLVIMENTO VETORIAL EM UMA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICO: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA MEDIADA PELO GEOGEBRA

VECTOR DEVELOPMENT IN A LOGICAL-HISTORICAL PERSPECTIVE: A TEACHING PROPOSAL MEDIATED BY GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Educação, área de concentração em Formação de Professores, para obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 27/02/2020

Prof. Dra. Danielli Ferreira Silva IFSULDEMINAS

Prof. Dra. Helena Maria Ferreira UFLA

Dra. Francine de Paulo Martins Lima

Orientadora

José Antônio A. Andrade.

Dr. José Antônio Araújo Andrade

Co-orientador

LAVRAS – MG

2020

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, autor e consumador na minha fé. Sem Ele eu jamais conseguiria chegar até aqui.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) pela oportunidade de realização do mestrado, especialmente aos professores do departamento de Educação pelos ensinamentos e pelas valiosas contribuições.

Ao professor José Antônio Araújo de Andrade, por todo apoio, ajuda, compreensão, paciência e orientação.

A professora Francine de Paulo Martins Lima por toda paciência, dedicação e sabedoria.

Ao meu colega de mestrado Welbert Vinícius de Souza Sansão pelo incentivo, amizade, companheirismo e pelas contribuições nesse estudo.

Ao meu amigo Gustavo Venancio Pimenta pelas orientações, amizade e ensinamentos.

As minhas queridas amigas Natalia Rodrigues de Melo, Milene Rodrigues Guimarães, Tatiane Cristina Nunes e Karina Pereira Carvalho. Agradeço a Deus por ter colocado vocês no meu caminho. Sem a amizade de vocês eu não teria conseguido ter chegado até aqui. O afeto, empatia e o incentivo de vocês foram fundamentais para essa conquista.

À minha mãe Idelci, que nunca mediu esforços para me ajudar a alcançar esse sonho.

Ao meu querido esposo, Otávio José Liazar, por toda paciência, incentivo, compreensão e companheirismo durante todo esse processo. Agradeço a Deus por ter colocado você junto de mim, pois sempre acreditou nos meus sonhos e no meu potencial.

A todos vocês, muito obrigada!

RESUMO

Este trabalho objetiva apresentar uma sugestão de atividade que tem como intenção desenvolver Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) mediada por tecnologias digitais em uma perspectiva histórico-cultural, sobre o conceito de vetores. A sequência metodológica foi iniciada por uma revisão bibliográfica, que teve como objetivo compreender como se desenvolve o pensamento humano e em seguida foi abordado como se instituiu e progrediu o conceito de vetores, sob uma perspectiva Histórico-Cultural. Desse modo, desenvolvemos situações desencadeadoras de aprendizagem a partir dessa teoria e foi elaborado um roteiro de tarefas para auxiliar professores do ensino superior, sendo que a questão que norteou presente pesquisa foi: “Que contribuições a teoria Histórico Cultural pode trazer para a elaboração de uma atividade sobre vetores mediada por tecnologias digitais?”. O intuito da escolha desse tema foi promover a possibilidade de uma melhoria no processo de ensino para o professor universitário e na aprendizagem do docente em formação. Neste estudo foi possível observar que muitas disciplinas que ensinam vetores possuem um alto índice de reprovação. Além disso, percebemos que existem poucas pesquisas sobre o conceito de vetores na perspectiva histórico-cultural.

Palavras-chave: GeoGebra. Vetores. Teoria Histórico-Cultural

ABSTRACT

This word aims to present a suggestion of activity that intends to develop Triggering Situations of Learning (SDA) mediated by digital Technologies in a historical-cultural perspective, on the concept of vectors. The methodological sequence was initiated by a bibliographic review, which aimed to understand how human thought develops and then it was approached how the concept of vectors was instituted and progressed, under a Historical-Cultural perspective. In this way, we developed triggering learning situations based on this theory and e task script was developed to assist higher education teachers, and the question that guided this research was: “What contributions can Historical Cultural theory bring to the elaboration of a cevtor activity mediated by digital Technologies?”. The purpose of choosing this theme was to promote the possibility of an improvement in the teaching process for the university teacher and in the learning of the teacher in training. In this study it was possible to observe that many disciplines that envolve vector contente have a high failure rate and, in addition, there is little research on the concept of vectors.

Keywords: Geogebra, Vectors, Historical Cultural Theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9394/96) estabelece que o ensino de Geometria Analítica Plana deve ser inserido no Ensino Médio. Além disso, é recomendado que o professor de Matemática apresente o conceito de vetor na perspectiva geométrica e algébrica (BRASIL, 2006).

Já no ensino superior, nos cursos de Licenciatura e Bacharel em Matemática, o Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG-*campus* Formiga (2018) afirma que o conteúdo de vetores está inserido com maior intensidade na disciplina de Geometria Analítica e Vetores. Na ementa do referido curso há a indicação dos conteúdos a serem abordados na unidade dos vetores:

- Vetores no plano e no espaço: tratamento algébrico, geométrico, soma e propriedades. Produto escalar, vetorial e misto.

Além de ser um conteúdo que é abordado em Geometria Analítica e vetores, esse tema é visto também, no ensino superior, nas disciplinas de Álgebra Linear, Física e Cálculo. O vetor, denominado também como grandeza vetorial, é um conteúdo que possui grande importância em cursos das áreas de ciências exatas e tecnologias. Apesar de ser estudado com maior profundidade a partir da graduação, o vetor é um conteúdo que também é visto no ensino básico quando se relaciona grandezas que possuem módulo, direção e sentido. Além disso, o conceito vetor é abordado em todas as graduações de engenharia e é um conteúdo visto nos primeiros semestres desses cursos. No curso de Engenharia Civil, o vetor está relacionado a dimensionamento de vigas e treliças, elevadores, guindastes, carregamentos e reações de apoio em que existem forças envolvidas. Já no curso de Engenharia Elétrica, o vetor é usado para determinar a existência de campo elétrico. Em Engenharia Mecânica, os conceitos como espaço, tempo, massa e força são utilizados como grandezas vetoriais. Esses são apenas alguns exemplos de cursos de Engenharias em que esse conhecimento é aplicado. (GOULART; FARIAS, 2008; RONCAGLLO; NEHRING, 2017).

Entretanto, o que se pode perceber, a partir de pesquisas, é que mesmo em disciplinas que seus conteúdos abordam apenas um tópico sobre o conceito de vetores, elas apresentam um alto índice de reprovação por parte dos estudantes. Esse problema já vem acontecendo a décadas e alguns autores trazem esses dados, comprovando essa dificuldade. Em sua tese de doutorado, Barufi (1999) revela que problemas relacionado ao ensino de Matemática no curso superior é antigo. Em sua pesquisa, o autor discorre sobre a o alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral da Universidade de São Paulo (USP) entre os anos de 1990 e 1995. O que mais chama atenção em sua pesquisa é que mesmo no Instituto de Matemática e Estatística a quantidade de alunos reprovados é muito grande. Por exemplo, em 1990 a aprovação de alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral foi apenas de 27,8%, em 1991, essa taxa se manteve 27,7%. Já em 1992, apesar de ter aumentado a quantidade de estudantes aprovados, a porcentagem ainda foi de apenas de 37,3%.

No período de 1993 a 1997, outra pesquisa foi realizada, a faculdade investigada foi a Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e dessa vez a disciplina observada foi Álgebra Linear. Foi constatado que durante o período da investigação a taxa de estudantes reprovados na disciplina de Álgebra linear variou de 24% a 52%. Outra análise encontrada foi que entre o ano de 1995 a 1996, a maior taxa de reprovação na disciplina de Álgebra Linear foi no curso de Física, o índice foi de quase 80% de alunos não aprovados. Essas reprovações podem estar relacionadas ao ensino dessas disciplinas. Por esses motivos, não basta somente o professor conhecer o assunto a ser ensinado com detalhes, pois o ensino não é uma atividade simples, é necessário fazer com que o aluno consiga compreender e visualizar os conceitos de maneira que ele consiga aplicá-los (CELESTINO, 2000; COIMBRA, 2008).

Apesar de os dados apresentados não serem atuais, podemos perceber que o problema persiste até os dias de hoje. São propostas novas metodologias de ensino de matérias relacionadas a Matemática, mas o alto índice de reprovação em disciplinas bases para os cursos de ciências exatas continua alto. Na pesquisa de Nasser, Sousa e Torraca (2012), os autores afirmam que os índices de evasão e repetência nas disciplinas referentes aos Cálculos ainda são altas. Os autores atribuem o baixo desempenho de alunos a lacunas na aprendizagem de Matemática no ensino básico.

Nos cursos de licenciatura, muitos estudantes também são reprovados na disciplina de Geometria Analítica. Além disso, há poucas pesquisas em relação a esse conteúdo, principalmente, relacionadas à Educação Matemática, o que faz com essa seja uma área que tenha muito a ser explorada ainda. A prática docente dessa disciplina precisa ser aperfeiçoada, pois só, desse modo, os estudantes poderão compreender melhor os conceitos relacionados a essa disciplina. Para isso, é necessário que sejam ampliados as possibilidades de visualização de conceitos e propriedades. Também é preciso realizar a experimentação, é preciso enfatizar a construção geométrica e gráfica usando *softwares*. O uso de um *software* pode servir tanto para a introdução de um novo conceito, quanto para a retomada de conteúdos estudados em sala de aula (RICHIT, 2005).

Coadunando com os autores apresentados e tomando como base minhas experiências, o presente estudo partiu de motivações que obtive desde a época do ensino básico e por perceber a importância em se tratar sobre o tema de vetores como uma proposta de ensino para professores. Já nos anos finais do ensino fundamental, eu já notava que muitos de meus colegas possuíam dificuldades na disciplina de Matemática, muitos conteúdos eram abstratos e de difícil compreensão para grande parte dos alunos e a medida que o tempo passava os conteúdos ensinados ficavam mais complexos e as dúvidas dos estudantes aumentavam cada dia mais.

Ao concluir o ensino médio, ingressei em uma instituição federal no curso de Licenciatura em Matemática e pude perceber que a dificuldade persistia em grande parte dos estudantes, principalmente, nas áreas de Matemática Pura e Aplicada. Ou seja, muitos estudantes ainda possuíam muitas dúvidas relacionadas à Matemática, mesmo cursando uma graduação de Licenciatura em Matemática. Durante a graduação, observava que em algumas matérias os conceitos “aprendidos” eram simplesmente decorados pelos discentes. O conteúdo de vetores, que foi abordado em algumas disciplinas, era um dos conceitos que os estudantes possuíam mais dificuldades. Diante do exposto, partiu o interesse de realizar uma pesquisa nessa área, pois pude perceber o quanto é importante aprofundar no ensino e na aprendizagem de vetores. Por meio desse estudo, será possível pensar em alternativas para melhorar a qualidade na instrução dessa disciplina nos cursos de Licenciatura e Bacharel em Matemática. Por isso decidi trabalhar com o ensino de vetores em uma perspectiva histórico-cultural, teoria fundada por Vigotski, a partir da utilização das tecnologias digitais, em específico, o *software* GeoGebra. O uso das tecnologias digitais se deve a sua importância como instrumento de mediação para a construção do conhecimento e por ajudar os estudantes que, muitas vezes, precisam de uma representação figural para compreender o conceito de vetores.

Portanto, o objetivo deste estudo é apresentar uma sugestão de atividade que tem como intenção desenvolver Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) mediadas por tecnologias digitais em uma perspectiva histórico cultural sobre o conceito de vetores. Além disso, a pergunta que norteou este trabalho foi: Que contribuições a teoria Histórico Cultural pode trazer para a elaboração de uma atividade a respeito do conceito de vetores mediada por tecnologias digitais?

Diante do exposto, a estrutura deste trabalho está organizada da seguinte maneira:

Inicialmente, será apresentado os Constructos Teóricos da Teoria Histórico-Cultural, onde será discutido a Teoria Histórico-Cultural (THC), desenvolvida por Vigotski e que teve contribuições de Leontiev e Luria. Outro conceito que será abordado na discussão é a Teoria da Atividade, que tem como inspiração a THC. Conceitos do Materialismo Histórico Dialético serão vistos nessa seção, pois eles embasam a THC.

Na sequência, será abordado a evolução da tecnologia e a importância do uso do *software* GeoGebra para a atividade que que irá ser proposta.

Em seguida, será apresentado o desenvolvimento lógico-histórico dos vetores, momento em que consistirá a respeito dos principais autores que contribuíram para a evolução desse conhecimento, partindo da ideia de números complexos até a representação geométrica dos vetores.

Por fim, será apresentada a metodologia deste trabalho e, na sequência, será proposto um roteiro de trabalho a partir das Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA), que serão apresentadas em quatro situações, sendo que cada situação será dividida em alguns momentos.

2 CONSTRUCTOS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Neste capítulo, serão apresentados os constructos teóricos da psicologia pedagógica soviética, fundamentada no materialismo histórico dialético, enfatizando a Teoria Histórico-Cultural (THC), desenvolvida por Vigotski e seus seguidores. Outra teoria que também será abordada neste capítulo é a Teoria Histórico-Cultural da Atividade, desenvolvida por Alexei N. Leontiev. Por isso, é de grande importância compreender melhor não só a THC, mas também destacar a trajetória intelectual de Vigotski, o período histórico em que ele viveu e as bases filosóficas que fundamentaram seus estudos.

2.1 Colaborações do Materialismo Histórico Dialético para a Teoria Histórico Cultural

A THC teve como principal pesquisador Lev Semenovich Vigotski (1896-1934), mas também contou com contribuições dos pesquisadores Alexei N. Leontiev (1903-1979) e Alexander Romanovich Luria (1902-1977). Vigotski, juntamente com Luria e Leontiev, buscava desenvolver uma nova Psicologia. Nessa Psicologia, de acordo com Santos (2018), o conceito de trabalho e outros princípios baseados no materialismo histórico dialético tiveram grande importância para os estudos de Vigotski.

Vigotski teve uma trajetória acadêmica que percorreu várias áreas como: Artes, Literatura, Linguística, Antropologia, Cultura, Ciências Sociais, Psicologia, Filosofia e Medicina. Mas foi a partir de 1924 que ele dedicou-se intensamente à Psicologia. Suas pesquisas eram voltadas para os estudos dos processos de transformação do desenvolvimento humano na sua dimensão filogenética, histórico-social e ontogenética. Vigotski foi influenciado por vários teóricos, como os russos Alexander Potebnya e Alexander Von Humboldt, que inspiraram o autor com estudos voltados para a origem da linguagem e sua relação com o desenvolvimento do pensamento. Outros autores como Konstantin Nikolaevic Kornilov, Pavel Petrovich Blonsky, Richard Thurnwald, Lucien Levy-Bruhl, Ivan Pavlov, Wladimir Bekterev, John Broadus Watson, Max Wertheimer, Wolf-gang Kohler, Kurt Koffka, Kurt Lewin, Jean Piaget, Karl Marx e Friedrich Engels também influenciaram fortemente nos estudos de Vigotski. No entanto, este estudo se limita a aprofundar somente nas obras desses dois últimos pesquisadores citados, pois os conceitos desenvolvidos por

Marx e Engels a respeito do trabalho humano, sociedade, uso de instrumentos e a interação dialética entre homem e a natureza fundamentam a THC de Vigotski (REGO, 2014).

Nesse sentido, iremos conhecer melhor as principais ideias de Marx para entender como os conceitos que foram desenvolvidos por ele influenciaram a THC. Marx fala sobre o papel do trabalho na mudança social e no desenvolvimento humano a partir do Materialismo Histórico Dialético. Para uma melhor compreensão, iremos explicar, primeiramente, o significado de cada termo que forma o nome dessa teoria. Em seguida, veremos a visão de Marx a respeito do trabalho.

O Materialismo é uma corrente filosófica em que se acredita que a matéria é a primeira e última substância de qualquer ser, coisa ou fenômeno do universo. Além disso, o materialismo se opõe ao idealismo que possui como princípios a ideia, o pensamento ou o espírito. A visão materialista demandava uma nova formulação radical do ponto de vista do socialismo. Este só poderia ser eficiente caso fosse originado das respectivas massas trabalhadoras, tendo à frente o próprio proletariado (ALVES, 2010; BITTAR; FERREIRA JR, 2015; MARX; ENGELS, 1996).

O Histórico, que está ligado à palavra história, é outro conceito central na filosofia de Marx. A história se funda na realidade e é feita pelos homens, por isso ela pode ser modificada, isto é, o homem é sujeito da própria história. A dialética é mais uma definição que dá nome à teoria de Marx. Ela ocorre em três momentos: tese, antítese e síntese. Podemos considerar a dialética como a luta dos contrários, ela é o principal mover do desenvolvimento da matéria e da consciência (SANTOS, 2018).

Diante do exposto, podemos considerar que o Materialismo Histórico Dialético é

> um conjunto de doutrinas filosóficas que, ao rejeitar a existência de um princípio espiritual, liga toda a realidade à matéria e às suas modificações. É uma tese do marxismo, segundo a qual o modo de produção da vida material condiciona o conjunto da vida social, política e espiritual. É um método de compreensão e análise da história, das lutas e das evoluções econômicas e políticas. Marx parte da ideia de que em toda a história o homem não é uma imanência única: na idade antiga ou ele era escravo ou cidadão; na idade média era servo ou senhor; na idade moderna é proletário ou patrão, ou seja, ou ele detém os meios de produção ou vende sua força de trabalho. (ALVES, 2010, p. 3).

Somando-se a isso, podemos considerar que o trabalho é a mediação entre o homem e a Natureza. Por meio dessa mediação o indivíduo ao modificar a natureza modifica, ao mesmo tempo, a si mesmo. Podemos observar uma aranha produzir suas teias ou uma abelha desenvolver suas colmeias, por exemplo, verificamos que o trabalho delas distingue do ser humano, pois um mestre de obras planeja para construir uma casa. Isso significa que no fim do processo de construção o mestre já tinha planejado a casa em sua cabeça e, provavelmente, já teria uma planta desse imóvel, antes de construí-lo em um terreno. A partir disso, o indivíduo que iniciou a construção da casa não será a mesma pessoa depois que a casa ficar pronta, pois ao mesmo tempo em que ele transformou o cenário daquele terreno ele também se modificou (MARX; ENGELS, 1996).

Nesse sentido, o trabalho é exclusivo ao homem. Ele não realiza apenas uma mudança da forma da matéria natural, mas também efetua na matéria seu objetivo. “Os elementos simples do processo de trabalho são a atividade orientada a um fim ou o trabalho mesmo, seu objeto e seus meios” (MARX; ENGELS, 1996, p. 149). Para Marx, o objeto é denominado como matéria prima do trabalho. Já o meio de trabalho pode ser uma ou um complexo de coisas que media o trabalhador e o objeto de trabalho, além de servir como orientador da atividade sobre o objeto. O meio é o contexto em que o trabalhador usa propriedades mecânicas, físicas e químicas das coisas para torná-las como meio de poder em relação a outras coisas, de acordo com seu objetivo (MARX; ENGELS, 1996).

Com isso, Marx tenta recuperar a concepção original de trabalho. Trabalho para Marx é a essência humana, não é apenas um dever que o trabalhador precisa cumprir em uma determinada empresa. Trabalho é entendido como práxis, que é o movimento entre o agir e o pensar. Isto é, o trabalho pode ser compreendido como a unidade dialética entre ação e pensamento, por isso ele é uma atividade especificamente humana e torna o homem diferente dos outros seres vivos (SANTOS, 2018; ALVES, 2010).

Além disso, Vigotski considera que o trabalho surgiu para satisfazer as necessidades dos invíduos, transformar a natureza, determinar o seu relacionamento com o outro, gerar conhecimento, desenvolver a sociedade e produzir história. Em face do exposto, é necessário considerar que a partir do trabalho é gerado o conhecimento, ou seja, a ciência é uma produção estritamente humana e os seres humanos são autores da sua própria história. Sendo assim, a THC se baseia na teoria de Marx para entender como se desenvolve o conhecimento humano. Veremos a seguir as ideias desenvolvidas por Vigotski no âmbito do Materialismo Histórico Dialético (REGO, 2014).

A THC explica o desenvolvimento da mente humana e ainda tem a intenção de “caracterizar os aspectos tipicamente humanos de comportamento e elaborar hipóteses de como essas características se formaram ao longo da história humana e de como se desenvolvem durante a vida de um indivíduo” (VIGOTSKI, 2009, p. 21). A comunicação com outras pessoas é o que estabelece o desenvolvimento psicológico do ser humano, diante do processo histórico-social. É por meio dessa mediação entre indivíduos que as pessoas se tornam seres humanos, pois ainda na infância se apreende a cultura, o funcionamento psicológico e comportamento do grupo cultural que cada ser está inserido. A partir do momento que esses processos são internalizados, começam a se suceder sem a mediação de outras pessoas. Esse processo de internalização não é uma transferência de uma determinada função do exterior para o interior, mas sim uma construção da estrutura interna da consciência (VIGOTSKI, 2009).

Somando-se a isso, a história, a maneira de pensar, sentir e reagir de cada homem, para Vigotski, está relacionada com a sua cultura. Nesse sentido, nascemos seres biológicos e nos tornamos humanos a partir das relações com outros indivíduos e instrumentos culturais que os seres humanos produzem. Portanto, essa relação do homem com o mundo e com outros homens não é direta, mas sim mediada. Essa mediação é realizada por meio dos instrumentos e signos. Nesse viés, o instrumento tem função de auxiliar as ações sobre os objetos. Por exemplo, ao cortar uma fruta vou usar a faca; ao serrar uma árvore vou utilizar uma motosserra. Nesses exemplos listados, os instrumentos usados são a faca e a motosserra. Isto é, os instrumentos fazem uma mediação entre a ação concreta sobre o mundo e o mundo. O outro tipo de mediação, os signos, realiza uma intervenção de natureza simbólica, diferente dos instrumentos que procede de maneira concreta. Os signos podem ser um objeto, forma, fenômeno, gesto, figura ou som, eles tem a função de auxiliar a memória e a atenção humana. Esses signos são construídos historicamente e cada cultura possui seu conjunto de signos, ele também auxilia na comunicação entre as pessoas. A placa de trânsito escrita “PARE” sugere o efeito de parar, o semáforo na cor verde indica que se deve seguir adiante, esses são alguns exemplos de signos utilizados atualmente (VIGOTSKI, 2009; REGO, 2014).

Nesse contexto, Vigotski (2009) afirma que a fala também é um instrumento de mediação que os homens dispõem, é um fenômeno social e coletivo. Ela é um fator que influencia no psíquico da criança, é a partir da fala que a criança relaciona palavras a situações concretas, uma vez que essa criança ainda não possui a generalização de um adulto. Portanto, essa generalização ocorre por fases, na proporção do amadurecimento da criança. Dessa maneira, em todos os grupos humanos, a fala é um sistema de símbolo fundamental e a partir dela que os signos são organizados. Além disso, ela também possui um papel significativo na constituição das características psicológicas humanas. O desenvolvimento da fala de uma criança acontece na interação com o meio que ela vive. De modo geral, podemos considerar que “o homem é um ser social, que fora da interação com a sociedade nunca poderá desenvolver em si mesmo aquelas qualidades, aquelas rupturas que surgirão como resultado de seu desenvolvimento histórico e da humanidade” (VIGOTSKY, 2009, p. 51).

Vigotski ainda defende que por meio do surgimento da fala três alterações no psiquismo do homem foram notadas. A primeira se refere à relação da linguagem com objetos do mundo exterior, mesmo quando esse objeto não está presente. Por exemplo, a frase “o prato caiu” nos permite compreender esse determinado evento mesmo sem estar presente na hora do acontecimento. Isto é, relacionamos com essa informação internamente. A segunda mudança está relacionada à maneira como a fala lida com o processo de abstração e generalização. Por meio da fala se pode “analisar, abstrair e generalizar as características dos objetos, eventos, situações presentes na realidade” (REGO, 2014, p. 53). A palavra “flor” pode caracterizar qualquer espécie de flor. Isso significa que a palavra não só generaliza um objeto, mas também inclui em uma categoria. A terceira modificação está relacionada na comunicação entre os homens. Essa relação permite a socialização e a apropriação de informações, conhecimentos e experiências ao longo da existência humana (VIGOTSKI, 2009; REGO, 2014).

Dessa maneira, Vigotski (2009) afirma que a finalidade da língua[1] é associar o mundo e os objetos com o pensamento. A língua transforma o pensamento em pensamento verbalizado. Nesse viés, o autor ainda afirma que o pensamento e a fala possuem origens genéticas diferentes e são comportamentos tipicamente humano. Essas duas funções se desenvolvem de formas distintas e independentes, mas estão relacionadas e ao longo da vida humana essa ligação é alterada.

A fala, de acordo com a teoria de Vigotski, começa a se desenvolver desde o nascimento de uma criança. Essa primeira fala de um bebê é um fenômeno social, pois a fala se dá pelo choro, gestos, sons, expressões faciais e tem como necessidade a comunicação. Essa fase é chama de estágio pré-intelectual do desenvolvimento da fala. Logo após essa fase, a criança consegue solucionar problemas práticos e consegue utilizar os instrumentos para mediar suas ações, mesmo sem saber falar, o que configura para uma fase de pré-linguística do desenvolvimento do pensamento. A partir desse momento, o autor afirma que a criança se relaciona e comunica com outras pessoas inseridas na sua cultura e utiliza a linguagem como instrumento do pensamento e como uma maneira de dialogar. Como consequência, o pensamento e a fala se agregam e o pensamento se torna verbal e a fala racional (PRESTES, 2010).

Nessa perspectiva, a evolução do pensamento verbal nas crianças, defendido por Vigotski, é a formação do conceito. Essa evolução conceitual é concebida por duas linhas de

---

[1] Língua é entendida como fala.

desenvolvimento: uma se refere à maneira de pensamento que a criança se desenvolve na vida cotidiana (conceitos espontâneos) e a outra forma está relacionada ao modo que a criança evolui no contexto escolar (conceitos científicos). Esses conceitos se desenvolvem a partir do pensamento empírico e teórico. “No pensamento empírico o objeto é representado no aspecto das suas relações e manifestações exteriores acessíveis à contemplação viva” (KOPNIN, 1978, p. 152). Esse pensamento está associado aos conceitos espontâneos e é descrito pela relação cotidiana, utilitária da realidade. A partir desse pensamento, a construção dos conceitos espontâneos são formados mediante tentativa-erro e a partir da base dos atributos comuns dos objetos. Nesse contexto, no momento em que a criança se orienta na solução de uma determinada tarefa, não demonstra uma total consciência do domínio dos atributos essenciais que definem o conceito (CUNHA, 2008; NUÑES, 2009).

Por outro lado, a progressão dos conceitos científicos está relacionada com o desenvolvimento por meio do pensamento teórico. Esse pensamento se caracteriza pela compreensão dos objetos e dos acontecimentos por via análise e das condições de sua origem e desenvolvimento. O processo de construção dos conceitos ocorre de maneira orientada, organizada e sistemática, em que a sua compreensão se inicia com a conscientização de suas características fundamentais expressas na definição. Desse modo, a formação de conceitos escolares (conceitos científicos) se referem a uma generalização que denota um conjunto de objetos ou fenômenos de uma mesma classe desenvolvidos pelas ciências e que se articulam como uma dada teoria científica. Somando-se a isso, as circunstâncias que os conceitos espontâneos e os conceitos científicos se desenvolvem acontecem de diversas maneiras, dependendo basicamente do modo em que é organizado e sistematizado seu processo de apropriação. Nesse contexto, vale ainda ressaltar que o pensamento empírico e teórico são níveis independentes e que o empírico se converte em teórico e que o teórico se torna empiricamente acessível em outra etapa mais elevada (CUNHA, 2008; KOPNIN, 1978; NUÑES, 2009).

Davidov (1982, p. 154) compara os dois tipos de pensamento, pontuando que “enquanto o pensamento empírico compara, classifica, cataloga objetos e fenômenos por meio de abstrações dos seus aspectos externos, o pensamento teórico revela suas leis de movimento, no processo de análise de suas relações no sistema integral”. Isso significa que os conceitos empíricos são formados pelos processos do pensamento, fundamentado nas abstrações e generalizações. Enquanto o pensamento teórico direciona o indivíduo ao pensamento reflexivo.

Nesse sentido, Davidov 1988, p. 125) afirma que

> o conteúdo do pensamento teórico é a existência mediatizada, refletida, essencial. O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetivo-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como peculiar experimento objetivo-sensorial. Logo, este experimento adquire, cada vez mais, um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passarem, com o tempo, a realizar os experimentos mentalmente.

Direcionando a discussão para as instituições de ensino, a função da escola é desenvolver o pensamento teórico dos estudantes. Assim, Santos (2018) acredita que proporcionando aos estudantes a chance de compreender a totalidade do objeto a partir dos conceitos, esses estudantes tomarão consciência de que fazem parte de uma sociedade e que também é trabalho deles modificar e movimentar os rumos da história, uma vez que conhecimento é uma construção humana.

Por isso é importante destacar que, para Kopnin (1978), o progresso do pensamento se dá por meio da interligação entre lógico e histórico. Além disso, Kopnin (1978, p. 69) considera o lógico como as “formas de evolução do pensamento no sentido da verdade”. Isto significa, de acordo com Santos (2018), que o lógico é definido pelo movimento do pensamento e é o reflexo do histórico. Enquanto o histórico é “o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento” (KOPNIN, 1978, p. 186).

Nesse sentido, Kopnin (1978, p. 186) ainda acrescenta que:

> o lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, na criação da teoria científica.[...] A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução dos problemas da inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento.

No estudo lógico-histórico do conceito, busca-se identificar os nexos conceituais, os elementos pedagógicos tensionadores e princípios envolvidos na constituição teórica do conceito ou do campo de conceito em estudo. Os Nexos Conceituais de um conceito estão relacionados com a maneira de pensar um determinado conceito. Trata-se de um conjunto de conceitos cujo conceito em estudo é uma nova síntese. Os nexos conceituais podem ser determinados por nexos internos e externos ao conceito. Os internos são históricos, relacionam o contexto social, político e econômico em que foi originado. Estimulam mais o movimento de quem está aprendendo do que os nexos externos que, por sua vez, estão associados à sua representação e à linguagem formal do conceito (CUNHA, 2008; LANNER DE MOURA, 2003; SOUSA, 2004).

Dessa forma, pode-se entender que os nexos conceituais de um conceito são “todas as relações presentes no percurso histórico da sua criação e que tem como consequência a sua formalização lógica” (REZENDE; ANDRADE, 2010, p. 4). Eles são a base que formam os conceitos, os nexos conceituais compreendem a lógica, a história, as abstrações e as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento (SOUSA, 2004).

Nesse contexto, tomemos como exemplo o trabalho desenvolvido por Pimenta (2019) em sua dissertação. O autor pesquisou sobre os Nexos Conceituais da Trigonometria. Os elementos considerados por ele como nexos foram: distância, ângulo, número, medida, regularidade, comparação, orientação e movimento. Isso significa que a partir desse campo de conceitos foi possível compreender um campo conceitual intitulado Trigonometria.

Diante do exposto, consideramos que Vigotski (2009), a partir da THC, buscou criar uma maneira que compreendesse o comportamento humano por meio do desenvolvimento histórico, com base na lógica dialética-materialista (PALANGANA, 2015).

2.2 Aprendizagem e Desenvolvimento

A Teoria Histórico-Cultural defende que é a partir da interação com outros indivíduos que acontece o desenvolvimento pleno do ser humano. Nesse sentido, a situação de um indivíduo que viveu, desde a infância, em uma tribo indígena ágrafa, por exemplo, e não possuiu contato com um ambiente letrado, não se tornará um ser humano alfabetizado. Outra situação que também pode ser tomada como exemplo é uma criança que se desenvolve em uma comunidade de não falantes, essa criança não irá adquirir a fala humana, mesmo que ela possua as condições orgânicas para desenvolver essa fala. Desse modo, podemos compreender que é a aprendizagem que proporciona o desenvolvimento de um indivíduo (VIGOTSKI, 2009).

Nessa perspectiva, Vigotski (2009) define duas fases distintas para esse desenvolvimento. A primeira está relacionada às conquistas já alcançadas, elas são identificadas como nível de desenvolvimento real ou efetivo. Já o outro nível, é apontado como a fase de desenvolvimento potencial, que está relacionado às capacidades que ainda não foram consolidadas. A diferença entre esses dois níveis é denominado como “Zona de Desenvolvimento Proximal”. A respeito dessa zona de desenvolvimento, Prestes (2010) afirma que há um equívoco nas traduções dos livros de Vigotski, pois a versão correta da palavra proximal é iminente. Proximal da ideia de próximo, o que entra em desacordo com os estudos de Vigotski, uma vez que se acredita que existe uma zona de possibilidades e não de etapas que alguém possa cumprir. Vigotski (2009, p. 328) afirma que a Zona de Desenvolvimento Iminente (ZDI) é a "distância entre o nível de desenvolvimento determinado pela capacidade de resolver um problema e o nível de desenvolvimento potencial".

Além disso, Nuñes (2009) ainda acrescenta que essa zona de desenvolvimento estabelece funções que ainda não estão amadurecidas e se encontram em processo de maturação. Nesse sentido, o progresso do desenvolvimento de uma criança pode ser observado por aquilo que já aconteceu, ou seja, aquilo que a criança já sabe fazer sozinha.

Em relação à aprendizagem escolar, é importante que o professor se paute no conteúdo que está em evolução na mente do estudante, pois é ali que vai ocorrer a ação pedagógica e vai estimular o desenvolvimento do aluno, esse estímulo vai ser gerado a partir da atividade que o professor envolver esse estudante. Essa atividade, de acordo com Vigotski (2009), pode ocorrer com o auxílio de um adulto ou de um colega mais capaz. Nesse viés, a função do docente é criar Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA).

A SDA tem como foco não só gerar a ZDI, mas também fazer com que o sujeito entre em atividade. O surgimento da ZDI significa proporcionar um contexto que os estudantes produzam e negociem significados. Os processos de significação produzem conceitos e significados. Para Vigotski (2009), significado representa as relações que a palavra pode abranger. Na Psicologia, significado corresponde a generalização e conceitos. Araújo, Vieira e Cavalcante (2009) afirmam que os significados são produções históricas e sociais, que proporcionam a comunicação entre os homens, por serem compartilhados. Além disso, os significados são fundamentais para constituir o psiquismo. Vigotski (2000) considera que os significados das palavras desenvolvem e se modificam, pois eles são construções históricas.

Diante do exposto, é necessário que o docente gere situações desencadeadoras de aprendizagem tendo como base o conhecimento que o estudante já possui. Sendo assim, o planejamento desse profissional tem como princípio amplificar a aprendizagem do estudante. O professor poderá organizar técnicas e procedimentos para que assim o estudante possa desenvolver o pensamento teórico.

Por isso, para que o estudante desenvolva o pensamento teórico, a proposta deste estudo visou investigar a origem dos vetores. Isto é, em qual momento da história houve a necessidade de se criar os vetores e como ocorreu seu desenvolvimento desde a sua origem até o modo como conhecemos hoje. A partir disso, espera-se que o estudante, por meio das SDA, compreenda a importância da necessidade que mobilizou pesquisadores a criar o conceito de vetores, com isso a expectativa é que este estudante veja essa necessidade como sua própria necessidade, que ele faça desse problema, seu problema. Será nesse instante que o estudante entrará em atividade. Por isso, é relevante tratar da Teoria da Atividade, pois somente a partir de um motivo/necessidade o estudante irá entrar em atividade.

2.3 A Teoria da Atividade

A Teoria Histórico-Cultural da Atividade, mais conhecida como Teoria da Atividade, teve início a partir do desenvolvimento do conceito histórico cultural e foi criada por Alexei N. Leontiev (1903-1979) e, posteriormente, por seus seguidores. Entre os anos de 1930 e 1940, Leontiev investigou a relação entre os processos internos da mente e a atividade humana concreta. Dessa maneira, Leontiev (1983) entendeu que a atividade humana se constitui a partir de ações, operações e tarefas geradas por meios de necessidades e motivos. Isso significa que o desenvolvimento de um indivíduo acontece por meio das atividades que ele efetua. A partir da influência de Vigotski a respeito da relação entre aprendizagem e desenvolvimento, concepções de aprendizagem e a ligação entre pensamento e linguagem é que se fundamentou a construção dessa linha e prática pedagógica. Nessa perspectiva de Vigotski, a aprendizagem é delineada por meio de uma atividade especificamente humana orientada por um objetivo. A aprendizagem concebida de maneira adequada e de forma dialética interage e impulsiona o desenvolvimento. A Teoria da Atividade, em um âmbito escolar, proporciona uma compreensão melhor dos processos de assimilação de conceitos científicos. Desse modo, as ações laborais são manifestadas a partir da atividade laboral, as ações de aprendizagem por meio da atividade didática, as ações de comunicação a partir da atividade de comunicação e assim por diante (LIBÂNEO; FREITAS, 2006).

Leontiev, ao iniciar o desenvolvimento da Teoria da Atividade, se dedicou a compreender quais categorias eram importantes para integrar um sistema psicológico de modo que ele seja incontestável em relação à ciência, à função e à associação do reflexo psicológico da realidade. Essas categorias podem ser definidas como: atividade subjetiva, consciência e personalidade humana. É por meio da atividade subjetiva que a consciência e a personalidade irão se estabelecer, pois é a partir da atividade humana a consciência é gerada e o homem se desenvolve. Em relação à personalidade, Leontiev afirma que cada indivíduo possui uma em particular, uma vez que esse ser humano q administra dentro de um sistema de relações sociais. Além disso, podemos considerar, em relação a teoria de Leontiev, que a atividade externa se modifica em atividade interna, no momento que acontece essa transformação a consciência social se torna pessoal. Enquanto isso as significações passam ter sentido pessoal, relacionando aos motivos e as necessidades humanas (GRYMUZA; RÊGO, 2014).

A atividade é o processo que media o vínculo entre o ser humano (sujeito) e a realidade a ser transformada por ele (objeto da atividade). A relação entre esse sujeito e objeto é dialética, pois objeto e sujeito se transformam, uma vez que é produzido no sujeito alterações em sua psique e sua personalidade. Dessa maneira, a atividade sempre se modifica, visto que se tem como objetivo a mudança real ou imaginária do seu objeto que se transforma em produto dessa mesma atividade. De modo geral, a atividade é a maneira, especificamente humana, de o homem se relacionar com o mundo, é resultado das influências sociais e é um processo fundamental na formação da personalidade (NUÑES, 2009).

Vigotski, Luria e Leontiev (2010, p. 68) ainda dizem que atividade é:

> apenas aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele. Nós não chamamos de atividade um processo como, por exemplo, a recordação, porque ela, em si mesma, não realiza, via de regra, nenhuma relação independente com o mundo e não satisfaz qualquer necessidade especial. Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objeto que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo.

Assim, é importante destacar os conceitos que fazem parte do processo do desenvolvimento da atividade, definidos por Leontiev na Teoria da Atividade, para entendermos como uma atividade é estruturada. Veremos nos tópicos a seguir, de acordo com Nuñes (2009), uma breve explicação sobre esses conteúdos:

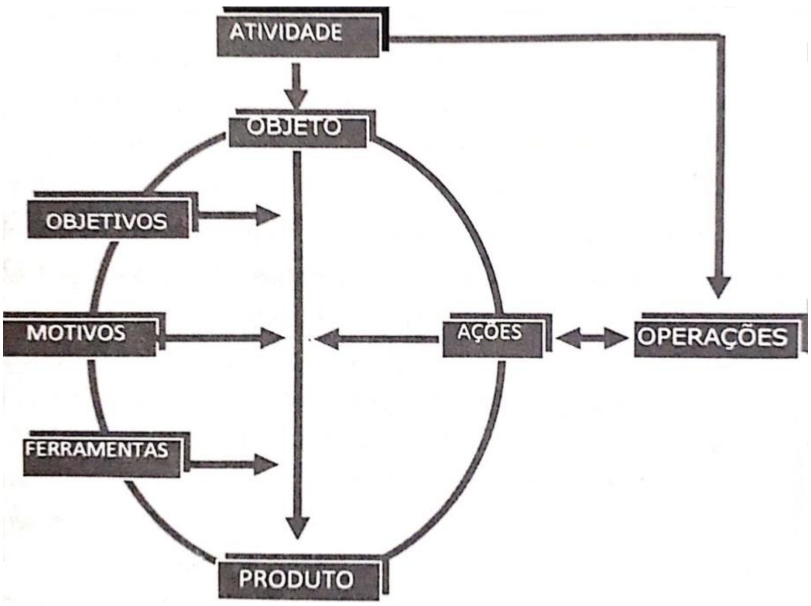
- **Sujeito da atividade**: está relacionado a quem realiza a ação. No contexto da atividade de aprendizagem, o aluno é que realiza as ações, ou seja, ele é o sujeito da atividade. Todavia, o sujeito da atividade não é um ser isolado, visto que ele possui como estrutura as relações sociais que estabelece com outras pessoas. Esse sujeito também pode ser um indivíduo concreto, um grupo social ou até mesmo uma sociedade.
- **Objeto da atividade:** ele define a direção da ação. O objeto também pode ser considerado como um objeto específico natural, uma instituição social ou até o próprio homem.
- **Ação**: é o elemento principal pelo qual se realiza a atividade, isto é, no processo subordinado a um objetivo consciente.
- **Motivos para realizar a ação:** é importante destacar os motivos para realizar a ação, pois uma vez que não existir motivos e necessidades não acontecerá a

ação, ou seja, os motivos precisam existir no sujeito. Nesse sentido, são as necessidades que incentivam a atividade e as orientam, uma vez que o sujeito possui consciência delas. O motivo da atividade tem relação com a satisfação de uma ou diversas necessidades. E é esse motivo, juntamente com a coincidência com o objetivo, que caracterizam a atividade.

- **Objetivo da atividade:** éuma previsão dos possíveis resultados que podem ocorrer a partir da execução da ação concreta. Isso significa que toda atividade que ocorre acontece sobre a base de finalidades ou objetivos que direcionam as ações do homem rumo às suas metas.
- **Sistemas de operações:** são os procedimentos, métodos, técnicas e estratégias que serão usadas para acontecer a ação e para converter o objeto em produto. Uma ação pode ser realizada por distintas operações e uma operação pode responder a diferentes ações.
- **A Base Orientadora da Atividade (BOA):** a BOA estabelece para o sujeito a imagem da ação que ele irá efetuar. É ela que vai determinar a qualidade da ação. "Na BOA, expressa-se o modelo teórico da atividade de aprendizagem como um sistema de operação que regula e dirige a aprendizagem nas condições específicas" (NUÑES, 2009, p. 84). Por exemplo, um estudante antes de realizar a atividade precisa compreender a ação que ele irá fazer, ele também precisa ter o direito de argumentar as ações.
- **Meios para realizar uma atividade:** os meios materiais são os objetos e instrumentos e também podem ser de natureza informativa ou simbólica.
- **As condições:** elas estão relacionadas a condição do ambiente em que a atividade será realizada. Por exemplo: ao espaço, iluminação, ventilação e até mesmo ao clima psicológico do local.
- **O produto:** é o resultado atingido por meio das mudanças que ocorrem com o objeto, ou seja, a matéria-prima da atividade. Essas transformações do objeto acontecem a partir dos procedimentos (ações). O produto retrata as modificações na personalidade do aluno.

A partir da definição da Teoria da Atividade e de cada conceito que a compõe, mostraremos na Figura 2.1, como o esquema da atividade é organizado.

Figura 2.1- A estrutura da atividade.



Fonte: Nuñes (2009).

Para se entender como uma atividade pode ou não ocorrer na realidade escolar de um estudante, toma-se como exemplo uma situação hipotética que Vigotski, Luria e Leontiev (2010) desenvolveram. Os autores mencionam um estudante que está se preparando para um teste. Suponha que esse estudante esteja lendo um livro de história, que será o conteúdo do exame, e um colega de classe lhe diga que esse mesmo livro não será mais necessário para o teste. O estudante poderá tomar duas atitudes: continuar a leitura do livro ou apenas colocá-lo de lado. No primeiro caso, o que dirigiu o processo de leitura (conteúdo do livro) foi o motivo, isto é, o estudante obteve uma necessidade de conhecer, entender e compreender aquilo que se tratava o livro, isso significa que ocorreu uma atividade. Já no segundo caso, o motivo que fez com que o aluno lesse o livro, até a sua desistência, não era o conteúdo, mas apenas a necessidade de ser aprovado no teste. Isso significa que o motivo da leitura não coincidia com aquilo que o induzia a ler, nesse caso a leitura não era exatamente uma atividade, mas simplesmente uma preparação para o exame. Para ocorrer a atividade a necessidade precisa coincidir com o motivo. Dessa maneira, podemos entender, a partir do exemplo dado, que a aprendizagem é identificada como atividade quando o aluno aprende para obter conhecimento.

Cabe ainda mencionar que é relevante observar as condições físicas, emocionais e o ambiente escolar do estudante, pois ele precisa que elas sejam favoráveis para que ele se aproprie de novos conhecimentos. A intenção é que esse estudante se torne construtor do próprio conhecimento. Assim, ele se tornará um cidadão ativo na sociedade, questionando, observando e tirando suas próprias conclusões em relação às situações que o cercam. No entanto, o que se pode observar é que o ensino ainda funciona como estímulo-resposta, em que professores, na maioria das vezes, somente transferem conteúdos, sem importar se o estudante se apropriou ou não dos conceitos ensinados (GRYMUZA; RÊGO, 2014).

Por isso, um dos papéis do professor é gerar no estudante o interesse pelo conhecimento e aprender não somente para "passar de ano". Ou seja, o estudante precisa ter um motivo para aprender, pois esse motivo que irá despertá-lo a aprender. Se o estudante não considerar importante e não ver sentido na atividade que está desenvolvendo poderá ocorrer uma situação de alienação.

3 TECNOLOGIA DIGITAL COMO INSTRUMENTO DE MEDIAÇÃO

O presente capítulo tem como intenção, na seção 3.1, trazer a evolução da tecnologia, partindo do princípio que ela é tão antiga quanto o ser humano. A seção 3.2 deste capítulo tem como objetivo mostrar a importância do *software* GeoGebra e suas contribuições para o ensino da Matemática.

3.1 A evolução da tecnologia

Ao observarmos a origem da espécie humana, um indivíduo utilizava apenas as capacidades naturais do corpo, como perna, braços, músculos e cérebro. A evolução do homem começou quando ele começou a produzir ferramentas. A partir disso, se iniciou a tecnologia, na qual podemos definir como aquilo que é capaz de expandir a competência de um indivíduo. Muitas tecnologias são tão próximas e presentes da realidade humana que nem percebemos mais que não são coisas naturais. Devido à tecnologia que hoje temos acesso a, por exemplo, lápis, cadernos, lousas e muitos outros produtos (KENSKI, 2007).

A partir das tecnologias é possível se criar instrumentos, signos, recursos, produtos, processos e ferramentas. Nesse sentido, vimos na THC que a relação entre o homem e a natureza é mediada pelos instrumentos e signos. Desse modo, os instrumentos e signos são utilizados para auxiliar o ser humano a resolver problemas, ou seja, eles foram inventados ao longo do tempo para satisfazer as necessidades dos homens. Os instrumentos foram se modificando e modernizado com a evolução do homem (KENSKI, 2007).

O conhecimento, por exemplo, foi transmitido em grande parte da história da humanidade por meio da oralidade, que era utilizada como uma extensão da memória humana. Por volta dos séculos XVII e XVIII, na Europa, se difundiu a escrita a partir do surgimento do livro, que possuía o formato similar ao que utilizamos hoje. Com a evolução do livro, foi permitido que a memória se estendesse ainda mais, de maneira qualitativamente distinta da oralidade. De maneira análoga, podemos considerar a informática como uma ampliação da mente humana, que proporciona que a linearidade de raciocínios seja desafiada pelas suas maneiras de pensar, uma vez que esse modo de pensamento envolve uma linguagem que relaciona escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. Nesse viés, a leitura/escrita tornou-se hipertextual, antigamente esta era feita de maneira linear, virando-se as páginas de um livro, por exemplo. Mas com o surgimento de uma escrita dinâmica, a qual se realiza por meio do computador/*smartphone*, possibilitou-se que o leitor rolasse a tela para cima, para baixo, para os lados etc. (BORBA, 2002; LÉVY, 1993; SOARES, 2002).

Além disso, podemos considerar que as tecnologias digitais estão alterando o modo de organização da sociedade, a maneira como as pessoas se relacionam, a produção de bens, diversão, ensino e aprendizado, pois a era de determinismo tecnológico tem o poder de configurar a cultura e a sociedade mediante as exigências de eficiência. As tecnologias tem o poder de amplificar a memória humana. Por isso, mesmo não sendo criada para fins educacionais, os recursos digitais que surgiram a partir da tecnologia podem servir como instrumentos auxiliadores dos docentes, promovendo autonomia nos estudantes que podem fazer pesquisas e procurar novos recursos e melhorando a qualidade do ensino/aprendizagem (PEIXOTO; ARAUJO, 2012).

Nesse sentido, muitas maneiras de ensino hoje não se encaixam no modo como as pessoas vivem e se relacionam, se perde muito tempo aprendendo pouco. Com isso, na maioria das vezes, gera uma desmotivação nos professores e também nos alunos. Podemos considerar também que a educação é o caminho para transformar a sociedade. Por isso, assim como outras áreas da sociedade, há uma grande expectativa de que as novas tecnologias possam trazer soluções para o ensino. As tecnologias permitem ampliar o conceito de aula, espaço, tempo, comunicação áudio visual, além de estabelecer novas pontes entre o presencial e o virtual. Dessa forma, o maior desafio é caminhar para um ensino e uma educação de qualidade, que agregue todas as dimensões do ser humano. As transformações na educação dependem, primeiramente, de obter educadores maduros, intelectuais, professores motivadores e que saibam dialogar. Para mudar a educação também é preciso de administradores, diretores e coordenadores que atendam a todos os níveis do processo educativo (MORAN, 2000).

Além disso, os alunos também precisam fazer parte dessa mudança, sendo motivados, curiosos, pois assim se tornam interlocutores e parceiros do professor. O docente também é um pesquisador em serviço, ele aprende com a pesquisa e com a prática. Nesse sentido, ele ensina por meio do que aprende. O professor também precisa desenvolver o papel de orientador/mediador e suas principais funções são: informar, motivar, incentivar, estimular, organizar grupos, organizar atividades de pesquisas, organizar o processo de avaliação, ensinar a vivenciar valores construtivos, individuais e sociais. Por isso, a tecnologia digital além de facilitar a relação entre estudante e docente, ela auxilia no processo ensino-aprendizagem. A internet, por exemplo, pode ajudar a desenvolver a intuição, flexibilidade mental e a adaptação a ritmos diferentes. A intuição pode ser amplificada a partir de descobertas de informações por erros e acertos. A internet permite a pesquisa individual, isso permite a cada aluno trabalhar no seu próprio ritmo. Já, na pesquisa em grupo, o estudante desenvolve a aprendizagem colaborativa. A partir das mesmas tecnologias propostas é possível obter resultados distintos, pois existem alunos mais motivados e maduros em relação a outros estudantes (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2000).

Diante do exposto, defendemos o uso das tecnologias digitais na educação, não por ela estar presente na maior parte da sociedade e por ser atrativa entre os mais jovens, mas pela sua potencialidade de auxiliar a aprendizagem. Por exemplo, no ensino de Matemática, de acordo com Frota e Borges (2004), os estudantes podem usar gráficos, figuras geométricas dinâmicas, recursos de visualização entre outros meios para aprender novas formas de pensar e solucionar problemas. As tecnologias digitais possibilitam um ambiente de indagação e exploração para os estudantes. Portanto, nesse estudo utilizaremos como recurso digital o *software* GeoGebra para auxiliar o ensino de vetores no ensino superior. O GeoGebra é de fácil manuseio e pode ser baixado no computador, celular e também tem a opção de ser usado online, esse *software* será apresentado na seção 3.2.

3.2 GeoGebra

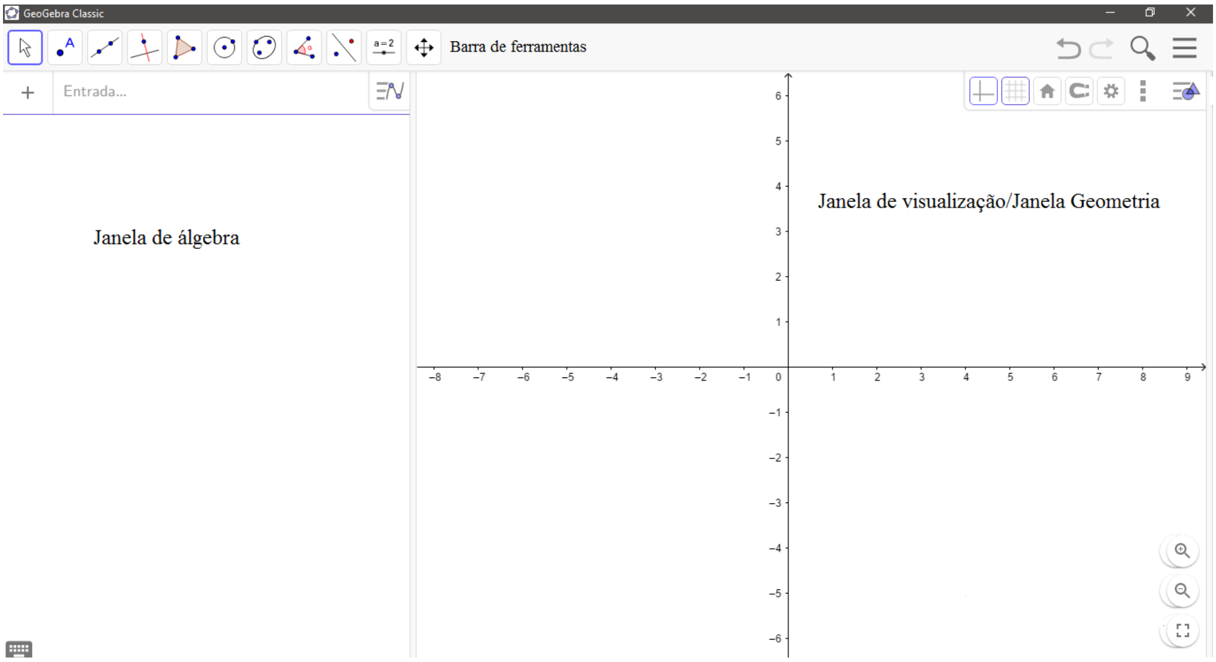
Para auxiliar o ensino da Matemática, existem vários *softwares*, alguns pagos, já outros gratuitos. O GeoGebra é um exemplo de *software* gratuito, ele também é um programa livre de geometria dinâmica. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, na sua dissertação de mestrado em 2002, na University of Salzburg-Áustria. O GeoGebra foi traduzido para mais de 50 idiomas e é utilizado em, aproximadamente, 190 países. Sua criação teve o intuito de auxiliar o ensino de Matemática na sala de aula. Como o GeoGebra é o software livre, os usuários podem modificar seus códigos fontes de modo que for conveniente, assim o colaborador pode aprimorar as ferramentas existentes nele ou acrescentar outras novas. Esse *software* possui conteúdos relacionados a Álgebra, Geometria e Cálculo (HOHENWARTER, 2013).

Somando-se a isso, podemos considerar o GeoGebra um programa dinâmico e que possui um alto potencial didático e pedagógico, ele também permite criar distintos tipos de modelos matemáticos para atingir o objetivo pretendido e pode ser manuseado nos sistemas operacionais Windows e Linux. Além disso, o *software* incentiva o raciocínio lógico e permite a utilização de comandos de condição e repetição. Ele também permite alterar figuras sem modificar sua estrutura de construção. Seus objetos básicos são pontos, vetores, segmentos, polígonos, linhas retas, secções cônicas e funções em x. (AMORIM; COSTA; SALAZAR, 2011; JARDIM et al., 2015; PETLA; ROLKOUSKI, 2008)

Cabe ainda mencionar que o GeoGebra possui uma interface que dispõe uma janela de Álgebra e outra de Geometria, isso significa que a cada objeto geométrico gerado é criado uma correspondência algébrica. Nesse sentido, existe uma interatividade entre a zona gráfica e a zona algébrica, ou seja, o que se constrói na zona gráfica o software algebriza e representa uma expressão algébrica que represente a figura produzida (AMORIM; COSTA; SALAZAR, 2011).

Iremos apresentar a interface do GeoGebra[2] para uma melhor compreensão dessas zonas.

Figura 3.1- Interface GeoGebra.



Fonte: <https://www.geogebra.org/>, visualizado em 27 jan. 2020.

Diante do exposto, o GeoGebra permite uma melhor compreensão de conteúdos matemáticos, pois ele proporciona ao usuário investigar, movimentar objetos, acompanhar as variações ocorridas, fazer conjecturas, testá-las e relacionar conteúdos algébricos e geométricos (JARDIM et al., 2015). Por isso, o uso do GeoGebra é defendido neste estudo, pois ele permite uma melhor percepção à respeito de conceitos algébricos e geométricos, melhorando não só o aprendizado do estudante, mas também o modo como o professor ensina esses conteúdos.

[2] A versão da interface é do GeoGebra Classic

4 DESENVOLVIMENTO LÓGICO- HISTÓRICO DOS VETORES

O presente capítulo tem como intenção mostrar o desenvolvimento dos vetores, partindo da ideia dos números imaginários. Este capítulo está organizado em 4 seções, sendo que a seção 4.1 fala a respeito da origem dos números imaginários a partir do momento em que não é possível resolver uma raiz quadrada de um número negativo no conjunto dos números Reais, também são apresentadas as definições do conjunto dos Números Complexos. Na seção 4.2 é mostrada a representação algébrica dos números complexos e o modo de se operar com esses números, que é semelhante aos vetores. A seção 4.3 fala a respeito da representação geométrica dos vetores e de como operá-los. A seção 4.4 diz sobre a origem dos vetores na Física e como eles são utilizados nessa área.

4.1 Representação dos números imaginários

No final do século XVIII, na Europa, ainda não existia um conceito definido para os números negativos e imaginários, mesmo assim eles já eram usados na resolução de equações algébricas. A falta de uma definição concreta desses conceitos colocava em dúvida a confiabilidade nas resoluções obtidas quando se tratava de equações algébricas e, ao mesmo tempo, havia dificuldades de se aceitar a álgebra como uma ciência autônoma. A primeira forma dos números imaginários aconteceu em 1747 e foi apresentada por D'Alembert em sua dissertação. D'Alembert afirmava que uma quantidade qualquer, composta de tantos imaginários quanto desejarmos, poderia ser reduzida à forma $A + B\sqrt{-1}$, sendo A e B quantidades reais (ROQUE, 2012).

A criação dos números imaginários surgiu com a seguinte afirmação: seja "a" um número real qualquer, não existe solução para a raiz $\sqrt{-a}$. Isso significa que não existe nenhum número real x que satisfaz $x^2 = -a^2$. A partir disso, usou-se o método da negação da negação para se resolver esse problema. Esse método consiste em criar um novo símbolo que seja possível tornar a expressão $x^2 = -a^2$ verdadeira. Então surgiu o símbolo i que é chamado unidade imaginária (CARAÇA, 1951).

Com esse novo conjunto foram estabelecidas algumas definições:

1ª O símbolo i satisfaz ao maior número possível das leis operatórias habituais;

2ª O símbolo i satisfaz a lei $i^2 = -1$.

Nessa perspectiva, Caraça (1951) afirma que a partir das duas condições definidas, é possível resolver o problema em questão. Logo, temos $-a^2 = a^2.(-1) = a^2.i^2 = (a.i)^2$ (2ª condição). Podemos também excluir a potência dos dois lados da expressão $x^2 = -a^2$, então, possuiremos $x = a.i$ (1ª condição), em seguida, podemos elevar ambos os lados ao quadrado, então, teremos $x^2 = (ai)^2 = a^2.i^2 = a^2.(-1) = -a^2$, a partir da igualdade temos que $x^2 = -a^2$. Podemos concluir que $x = a.i = \sqrt{-a^2}$. Com base na demonstração foi possível negar a não existência da raiz e obter uma expressão simbólica dela ($x = a.i$). Nesse sentido, é possível perceber que i não é um número real. Assim, foi criado um novo campo numérico: o conjunto dos Números Complexos.

Os números complexos que são da forma bi (produto de um número real b e uma unidade imaginária i) recebe o nome de imaginários puros. Aos números que são constituídos no formato $a + bi$, onde a e b são reais, se dá o nome de Números Complexos, a é chamado de parte real e b coeficiente de i. O conjunto de todos os números complexos se da o nome de campo complexo. O campo complexo abrange o campo real, para $b = 0$, os números complexos se reduzem a parte real a. Cabe ainda ressaltar que, ao surgir esse novo conjunto, não basta apenas definir um número complexo, é necessário examinar as consequências das definições que foram dadas e verificar se existe a necessidade de introduzir novas propriedades. Nesse sentido, a primeira condição estabelecida no conjunto dos complexos considera o símbolo "i" como uma variável e satisfaz ao maior número possível das leis operatórias do conjunto dos números Reais, por isso foi preciso somente criar a segunda condição ($i^2 = -1$) para se operar nesse conjunto numérico (CARAÇA, 1951).

Após a definição de um número complexo, em 1806, Jean Robert Argand (1786-1822) publicou de forma anônima a respeito de sua representação geométrica. Argand ainda atribuiu grandeza e direção no plano, isto é, passou a tratar os complexos como vetores. Nesse sentido, Argand e Caspar Wessel (1745-1818) descobriram que os números complexos poderiam ser operados algebricamente de maneira igual aos vetores e eles definiram a representação geométrica desse conjunto como segmentos orientandos. Em seguida, no ano de 1831, Gauss publicou um artigo sobre as grandezas imaginárias, no qual deu origem expressão “número complexo”. Após alguns anos, Hamilton[3] foi o responsável por fundamentar, em bases axiomáticas, a estrutura algébrica do conjunto dos números complexos. (NEVES, 2008; ROQUE, 2012; GOMES, 2013).

[3] Willian Rowan Hamilton foi um matemático britânico que nasceu em 1805 e morreu em 1865.

4.2 Representação algébrica dos vetores

Veremos como se resolve as 4 operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com os números complexos. O modo de operar esse conjunto é semelhante ao conjunto dos números Reais. Por isso, vamos tratar o símbolo i como uma variável e quando necessário iremos recorrer à segunda condição: $i^2 = -1$.

- **Adição e subtração**

  Tomemos a operação $(5+7i)+(3-2i) = 5+7i+3-2i = 5+3+7i-2i = 8+(5-2)i = 8+3i$.

  De modo geral:

  $$(a+bi)+(c+di) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$$

- **Multiplicação**

  Para calcular o produto utilizamos, como exemplo, $(2+3i).(1-5i)$, logo teremos $2(1-5i)+3i(1-5i) = 2-10i+3i-15i^2 = 2-7i-15.(-1) = 17-7i$.

  De maneira geral:

  $$\begin{aligned}(a+bi).(c+di) &= a(c+di)+bi(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2\\ &= ac+(ad+bc)i+bd.(-1) = ac+(ad+bc)i-bd\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

- **Divisão**

  Para calcular a divisão de $\frac{10-3i}{2+4i}$ iremos multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Logo teremos: $\frac{10-3i}{2+4i} \times \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{20-40i-6i+12i^2}{4-8i+8i-16i^2} = \frac{8-46i}{20}$.

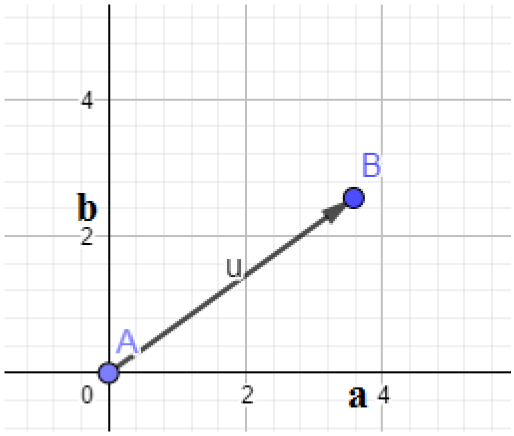
4.3 Plano Cartesiano

Os vetores são segmentos orientados no plano ou no espaço. Os vetores que possuem mesma direção, sentido e comprimento[4] são representantes de um mesmo vetor. Ele pode ser escrito como: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$, ou por $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Quando escrevemos $v = \overrightarrow{AB}$,

[4] Na seção 4.4 serão explicados os conceitos de direção, sentido e comprimento.

podemos afirmar que o vetor é determinado pelo segmento orientado AB de origem A e extremidade B. “A constituição do registro de representação por vetores, para os números complexos, está apoiada no registro de representação por pares ordenados e nos possibilita assim a representação gráfica desse número” (OLIVEIRA, 2010, p. 72). Vejamos o exemplo abaixo na figura 4.1.

Figura 4.1 - Representação gráfica do complexo $z = a + bi$.



Fonte: Produção autoral.

A partir do gráfico, podemos associar cada número complexo do formato $z = a + bi$ a um par ordenado $z = (a, b)$. Além disso, podemos associar o par ordenado $z = (a, b)$ ao ponto Z, do plano cartesiano. Nesse sentido, observamos que os pares ordenados representados no plano cartesiano permitem a representação gráfica de um número complexo por meio de um vetor com origem na origem do sistema cartesiano e extremidade no ponto Z, representante gráfico do par ordenado (a, b). No entanto, é importante destacar que vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados, isto é, qualquer vetor com mesmo módulo, direção e sentido que outro vetor pode ser tomado como um representante dessa classe. O mesmo não acontece com um vetor que representa um número complexo, por exemplo, se tomarmos um vetor equipolente a outro, sua extremidade não corresponderá as mesmas coordenadas do número complexo que foi representado pelo primeiro vetor (OLIVEIRA, 2010).

Veremos a seguir como se opera geometricamente a soma de dois vetores, a subtração e a multiplicação de um vetor por um escalar em duas dimensões (R^2).

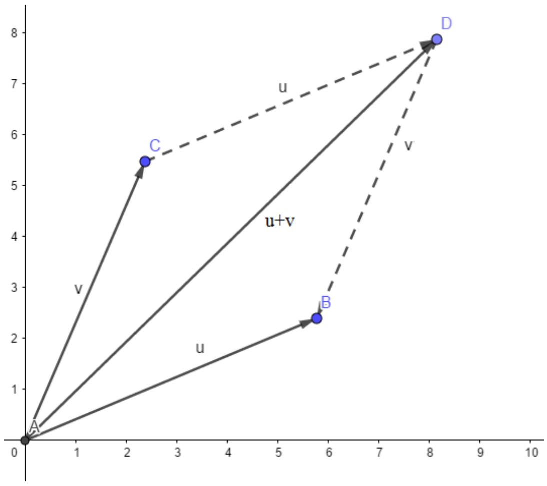
- **Soma de vetores**

Veremos a soma de dois vetores somente quando eles não são paralelos. Essa soma, a partir do plano cartesiano, acontece quando esses dois vetores possuem suas origens no mesmo ponto, o resultado da soma será um vetor que também parte da mesma origem. Logo, o segmento orientado de origem A e extremidade em D corresponde a diagonal do paralelogramo e será o resultado do vetor soma $(\vec{u}+\vec{v})$. Em seguida, completa-se o paralelogramo ABCD (Figura 4.2). Por isso, essa soma de vetores é denominada como regra do paralelogramo. Vejamos um exemplo na Figura 4.2.

De modo geral, podemos definir a soma de vetores da seguinte maneira:

Sejam os vetores $\vec{u}=(x_1, y_1)$ e $\vec{v}=(x_2, y_2)$, logo teremos $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$.

Figura 4.2 – Soma de dois vetores.

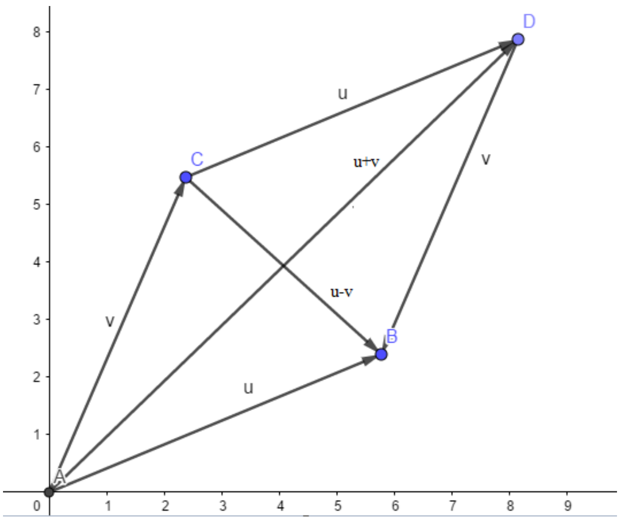


Fonte: Produção autoral.

- **Subtração de vetores**

Observamos o paralelogramo gerado pela soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na Figura 4.2 e verificamos que essa adição é representada por uma das diagonais, enquanto o resultado da diferença dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é indicado pela outra diagonal (Figura 4.3).

Figura 4.3 - Subtração de vetores.

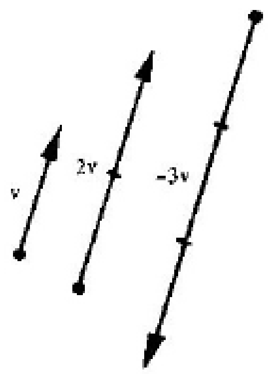


Fonte: Produção autoral.

- **Multiplicação de um vetor por um número Real**

Para ocorrer a operação de multiplicação de um número real por um vetor, esse vetor (v) e o número real (k) precisa ser diferente de zero. Isto é, seja $v \neq 0$ e $k \neq 0$, denominamos essa operação como produto do número real k pelo vetor v, o vetor resultante será $p = k.v$. Vejamos o exemplo na Figura 4.4 em que é realizada as operações $2.v$ e $-3.v$

Figura 4.4 - Operações de um escalar por um vetor.



Fonte: Produção autoral.

Logo, a partir da Figura 4.4, pode-se perceber que quando se multiplica o vetor por um número real positivo o sentido desse vetor gerado é para cima e quando se multiplica por um número real negativo o sentido é para baixo.

4.4 Grandezas Vetoriais na Física

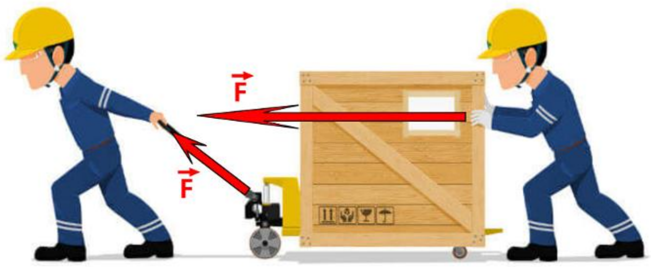
Nos séculos XVII e XVIII já era discutido pelos seguidores de Descartes e Leibniz o conceito de força, mas ela ainda não era definida como uma grandeza vetorial. Ou seja, já havia registros de grandezas que possuíam módulo, direção e sentido, mas ainda não eram denominadas como vetoriais (MEDEIROS, 2001).

Nesse sentido, podemos caracterizar as grandezas como: escalares e vetoriais. A primeira está relacionada a um número e a unidade que o corresponde, por exemplo, 4 litros de capacidade, 10 kg de massa e 15 m² de área. Já grandezas como força, aceleração e velocidade são caracterizadas como grandezas vetoriais e são representadas por setas (segmentos de reta). Além disso, elas possuem módulo, direção e sentido. Desse modo, iremos descrever o que significa cada uma dessas definições a seguir:

- Módulo: é o comprimento do corpo do vetor. Por exemplo, uma força de 25N é representada por um vetor, logo seu módulo será 25N.
- Direção: é a inclinação do vetor. Quando esse vetor está em uma inclinação de 0º, em relação ao eixo x do plano cartesiano, dizemos que ele está na direção horizontal. No momento que esse vetor está a 90º, em relação ao eixo x, dizemos que ele está na posição vertical. Nos demais casos, dizemos que ele está na diagonal.
- Sentido: é para onde a seta está apontada. A seta pode está direcionada para a direita, esquerda, para cima ou para baixo.

Para entendermos melhor esses conceitos, tomemos como exemplo a Figura 4.5. Nela podemos analisar dois operários empurrando uma caixa.

Figura 4.5 – Dois homens exercendo uma força sobre um objeto.



Fonte: Helerbrock (2018).

A partir da Figura 4.5, podemos perceber que o trabalhador que está na frente dessa caixa está exercendo uma força na direção inclinada e seu sentido é para cima, não é possível determinar o módulo desse vetor, pois não temos o tamanho dele. Já o operário localizado atrás da caixa está realizando uma força na direção horizontal, o sentido dessa força é para a esquerda; assim como no caso do primeiro operário, não é possível determinar o módulo desse segundo vetor.

5 METODOLOGIA

Podemos definir metodologia sendo o estudo da organização e do trajeto a ser percorrido para acontecer uma pesquisa. Isto é, o estudo dos instrumentos que serão usados para realizar uma pesquisa científica. Desse modo, este estudo utilizará como metodologia a pesquisa bibliográfica. Esse tipo de pesquisa estimula o aprendizado na área em que se estuda. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

5.1 Revisão Bibliográfica

A pesquisa bibliográfica é elaborada com base em conteúdos que já foram produzidos, esse material já elaborado se baseia basicamente em livros e artigos científicos. Uma das principais vantagens da pesquisa bibliográfica é proporcionar ao pesquisador uma cobertura de fenômenos mais extensa do que aquela que poderia se pesquisar diretamente, indo à campo, por exemplo. Existem pesquisas que são desenvolvidas especificamente por meio de fontes bibliográficas, por exemplo, pesquisas do tipo exploratórias, sobre ideologias e aquelas que propõem à análise de várias posições a respeito de um problema (GIL, 2002).

Tozoni-Reis (2009, p. 35) ainda assevera que a principal técnica de uma pesquisa bibliográfica é a leitura e como instrumento principal o fichamento bibliográfico. Esse fichamento precisa ter o estilo do pesquisador, porém algumas informações são essenciais, como:

> informações completas sobre autor e obra, informações do contexto histórico da produção da obra, resumo da obra, identificação do objetivo, identificação da tese (ideia original defendida pelo autor), identificação do referencial teórico (conceitos, categorias e pressupostos), informações sobre as fontes e referências utilizadas pelo autor.

Nesse contexto, Macedo (2009) e Traina e Traina Jr. (2009) ainda acrescentam que as pesquisas efetuadas na internet são feitas de acordo com contextos em específico, isto é: por autores, assunto, veículos, período ou até por combinação entre esses temas. Nessas buscas, se usam ferramentas específicas para uma pesquisa e não ferramentas genéricas como Google ou Yahoo!. Nesse tipo de pesquisa, é necessário listar palavras-chave dos contextos que irá pesquisar. Após a realização da lista, pode se executar várias buscas em que contenha artigos com as palavras procuradas. Logo em seguida, é preciso analisar cada artigo encontrado para depois, caso necessário, repetir a busca com novas listas de palavras. Esse tipo de pesquisa envolve vários procedimentos metodológicos. Esse método está relacionado em buscar documentos pertinentes ao estudo de um tema. É necessário, nesse tipo de metodologia, elaborar um esquema com temas e subtemas do futuro trabalho, esse planejamento servirá de guia quando vier a etapa de anotações das informações da leitura. É preciso também transcrever em fichas, por exemplo, resumos e notas. Por fim, se organiza o sumário do estudo e se inicia a redação do trabalho embasada pelas fichas de anotação.

Cabe ainda mencionar que a análise de um artigo é um procedimento pessoal, portanto, de modo geral, é necessário avaliar, primeiramente, o título. Caso ele esteja dentro do assunto que o pesquisador procura, é indicado ler o resumo. Se ocorrer desse resumo estar dentro do tema que se procura é recomendado ler as conclusões. Em seguida, caso necessário, é indicado ler a introdução. Se o artigo estiver dentro do tema que se espera é preciso salvar o arquivo e fazer anotações em relação a esse artigo (TRAINA; TRAINA JR, 2009).

Nesse sentido, as pesquisas no âmbito bibliográfico podem encaminhar à plena compreensão de um determinado tema sobre suas tendências teóricas e vertentes metodológicas. Além disso, a investigação sobre determinado assunto permite que o pesquisador ordene periodicamente o conjunto de informações e resultados obtidos em outros estudos, proporciona que o pesquisador observe diferentes perspectivas sobre o assunto e até perceba lacunas de autores relacionadas ao tema (SOARES; MARCIEL, 2000).

Portanto, este trabalho realizou um levantamento bibliográfico a respeito da Teoria Histórico-Cultural e da Teoria da Atividade e logo após elaborou uma proposta de um roteiro com tarefas a partir das Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) sobre o conteúdo de vetores.

6 POSSIBILIDADES DE TRABALHO COM SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM COM O TEMA VETORES

Nesta seção, trataremos de desenvolver sugestões de situações desencadeadoras de aprendizagem, tendo o conteúdo “vetores” como tema central. A ideia é proporcionar aos docentes um documento de orientação para professores dos cursos de Licenciatura em Matemática que ensinam o conteúdo de vetores. A intenção é auxiliar o professor no ensino de vetores e contribuir no aprendizado do estudante, a partir de uma perspectiva histórico-cultural, utilizando como instrumento de mediação o *software* Geogebra.

6.1 Desenvolvimento da Atividade

As SDA’s serão mostradas em quatro situações e dentro de cada situação teremos alguns momentos. Essa atividade pode ser realizada em um computador, *tablet* ou até mesmo pelo celular do estudante. No caso dessa proposta, ela foi desenvolvida para ser realizada em um laboratório de informática. É indicado que o professor instale o GeoGebra e que anexe uma lista de links (ANEXO B) antes do início da atividade em cada computador, pois assim é possível evitar possíveis imprevistos. O tempo previsto para o desenvolvimento são 8 horas/aula.

6.1.1. Situação 1

O professor, inicialmente, entregará uma lista com alguns conceitos e princípios que norteiam a compreensão da origem e das definições de vetores (ANEXO A). A intenção é que os estudantes possam refletir sobre a criação de um novo conjunto numérico. Isto é, esses conteúdos vão desencadear os processos de significação dos graduandos.

Momento 1: surgimento dos números complexos, operação com os complexos na forma algébrica

Neste momento o professor irá pedir aos estudantes que peguem uma folha de papel e um lápis/lapiseira e resolvam, dentro do conjunto dos Naturais, a raiz quadrada do número 25. Logo após o professor irá solicitar, dentro do conjunto dos números naturais, que os estudantes resolvam a raiz quadrada do número $\frac{1}{4}$ (um quarto). Com isso, espera-se que os estudantes percebam que não é possível solucionar esse problema dentro do conjunto dos números Naturais. Então será lançada a pergunta: “Dentro de qual conjunto numérico é possível solucionar esse tipo de radiciação?”. A intenção é que os discentes digam que é o conjuntos dos Racionais[5]. A partir disso, o docente explicará a necessidade que houve de se criar um novo conjunto numérico para satisfazer as necessidades que o anterior não fazia. Isso significa que em determinado momento da história foi conveniente criar um novo conjunto para se trabalhar com números fracionários e decimais. Com isso, o professor irá explicar como se concebe a criação de um novo conjunto por meio do princípio da extensão e da economia[6]. Na sequência, o docente pedirá aos estudantes que resolvam a raiz quadrada do número -4 (quatro negativo) dentro do conjunto dos números reais. Após alguns segundos o professor perguntará: “É possível obter essa solução no conjunto dos números Reais?”. A partir dessa pergunta espera-se que os estudantes percebam e digam que há uma necessidade de se criar um novo conjunto numérico que satisfaça essa raiz e que esse conjunto é o dos números complexos[7]. Caso os graduandos tenham dúvidas e não se lembrem da existência desse conjunto, o docente deverá apresentá-lo. O professor irá iniciar essa explicação falando, primeiramente, que esses números surgiram a partir do método da negação da negação[8]. Logo após, mostrará as definições[9] desse conjunto e o formato algébrico de um número complexo. O docente irá apresentar e demonstrar exemplos das 4 operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão) no formato algébrico. Essas operações serão projetadas no quadro branco ou na lousa disponível naquela instituição. O docente mostrará aos estudantes que o modo de operar esse conjunto é semelhante aos Reais, com exceção de quando aparece $1^2= -1$.

Momento 2: forma geométrica

O docente começará esse momento explicando que o plano cartesiano é um objeto matemático plano e composto por duas retas reais concorrentes e perpendiculares. Ou seja, retas que possuem apenas um ponto em comum, formando um ângulo de 90°. O professor continuará explicando que as duas retas que dão origem ao plano cartesiano precisam ser retas numéricas, pois essa é a condição que tornará possível encontrar localizações de pontos quaisquer no plano. Uma reta numérica é uma reta comum em que foi estabelecida uma

[5] Espera-se isso, pois esse conteúdo é visto no ensino fundamental.
[6] O princípio da extensão e da economia serão explicados no anexo A
[7] Espera-se isso, pois esse conteúdo está na grade curricular do 3º ano do ensino médio.
[8] Esse conceito será explicado no anexo A
[9] As definições são a partir da criação do símbolo imaginário *i*: i) o símbolo *i* satisfaz ao maior número possível das leis operatórias habituais; *ii)* $i^2=-1$

correspondência com os números reais. Desse modo, cada ponto da reta está ligado a um único número real e é esse fato que permite qualquer localização. Um número real qualquer terá apenas uma localização em toda a extensão infinita da reta.

O professor continuará dizendo que uma reta será responsável pela coordenada horizontal e outra responsável pela coordenada vertical. É comum usar as letras x para a primeira coordenada e y para a segunda e os termos "coordenada x" e "coordenada y". No plano cartesiano, a reta vertical responsável pela coordenada y é chamada de *ordenada* e a reta horizontal, responsável pelas coordenadas x, é chamada de *abcissa.* Neste momento, o professor irá dizer que um par ordenado é formado por dois números reais que representam uma coordenada. A ordem escolhida é a seguinte: o primeiro valor corresponde a coordenada x e, depois, a coordenada y, que são colocadas entre parênteses para representar uma localização qualquer (x, y). Neste momento o docente irá desenhar um gráfico, no quadro disponível na instituição, com os pontos $(2, 3)$ e irá falar que o ponto possui coordenada $x = 2$ e coordenada $y = 3$.

Neste instante, o docente irá desenhar o plano cartesiano e mostrará aos discentes que a representação gráfica de um número complexo da forma $a + bi$ é similar aos pares ordenados dos eixos x e y desse plano. Observando que no conjunto dos números complexos, "a" corresponderá ao eixo das abcissas (parte real) e "b" ao eixo das ordenadas (parte imaginária). A partir disso, o professor irá desenhar no quadro a representação gráfica do número complexo $z = 3 + 5i$, nesse momento espera-se que os estudantes percebam que ao projetar um número complexo, seu gráfico será idêntico a um vetor. Caso esses estudantes não percebam isso, o docente fará a seguinte pergunta: "Essa imagem gerada a partir do número complexo se parece com algo que vocês já viram no ensino médio ou aqui na graduação?". Caso eles ainda não percebam que a imagem é um vetor, o docente ainda vai instigar os alunos a perceberem que aquela imagem é um vetor, então fará o seguinte questionamento: "Reparem, que essa 'setinha' é um segmento de reta orientado, vocês conseguem associar a algo?". Espera-se que a partir desse questionamento os estudantes então percebam que a imagem representa um vetor.

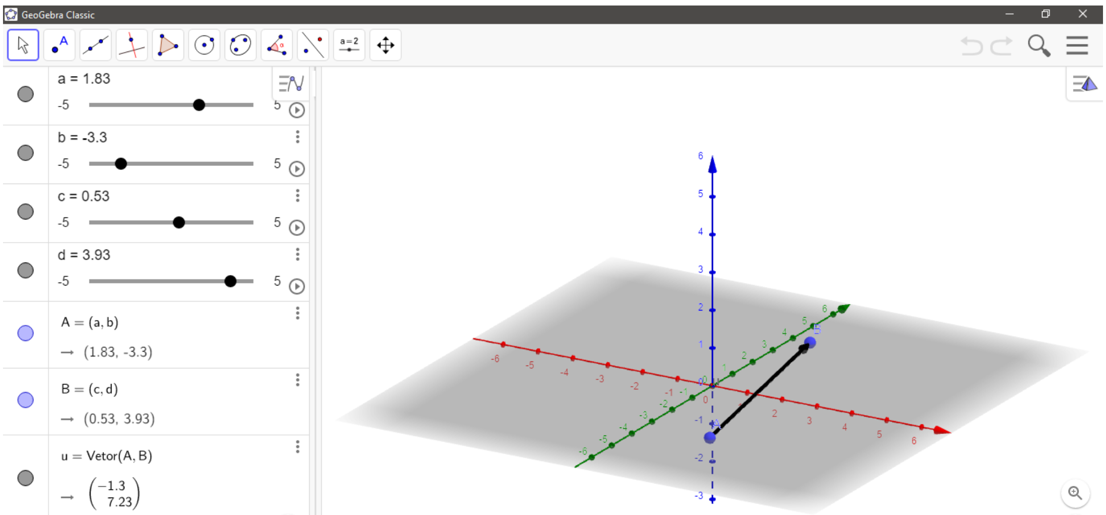
6.1.2 Situação 2

Nesta situação os estudantes vão começar a interagir com o Geogebra e manipular seus dados. Espera-se que a partir da interação com o *software* e a mediação do docente os estudantes consigam compreender os conceitos envolvendo os vetores. Essa situação será dividida em 10 momentos, começando a representação de um vetor em duas dimensões e terminando com o jogo "caça ao tesouro" que tem como lógica a soma de vetores.

Momento 1: vetor no R²

O professor pedirá para que os estudantes acessem, a partir de seus computadores, o link 1 da situação 2 na lista de links (ANEXO B). Enquanto isso, o docente irá abrir o documento do GeoGebra e plotar a imagem no data show. Em seguida o docente irá pedir aos graduandos que movimentem os controles deslizantes "a", "b", "c" e "d". A partir disso, o professor questionará os estudantes a respeito do significado de cada letra. Espera-se que os estudantes entendam e digam que o valor de "a" corresponde aos valores da origem do vetor em relação ao eixo x, o valor relacionado a "b" corresponde a extremidade do vetor em relação ao eixo y. Já os valores dos controles deslizantes de "c" e "d" correspondem a extremidade do vetor relacionados aos eixos "x" e "y". É esperado que os estudantes também percebam que o vetor está representado em duas dimensões, assim como mostra a Figura 6.1. Caso os estudantes não percebam o que está acontecendo com o gráfico, o docente deverá ser mais detalhista e irá dizer que o eixo vermelho corresponde ao eixo "x" e o eixo azul corresponde ao eixo " y".

Figura 6.1 - Vetor no R².

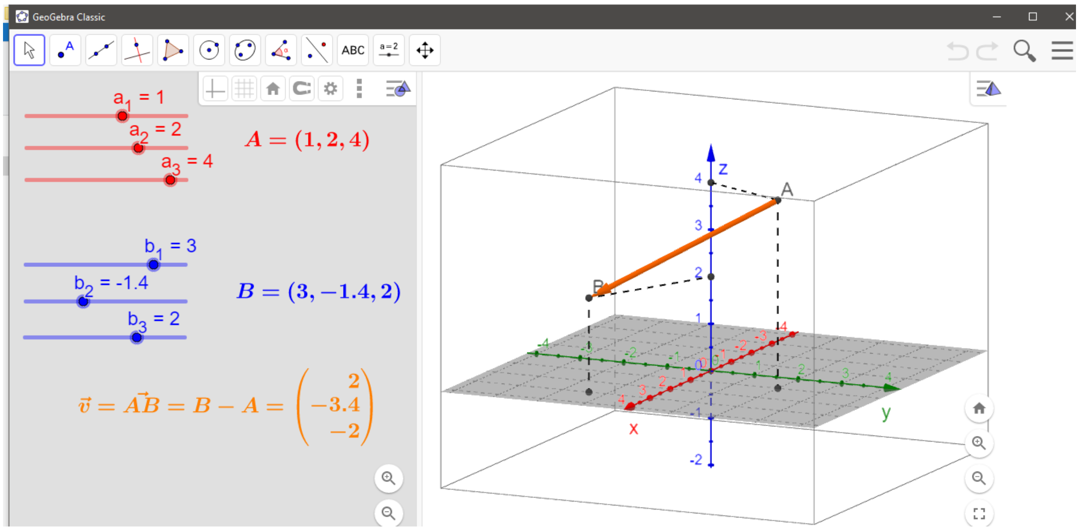


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/vfggngct>, visualizado em 24 jan. 2020.

Momento 2: vetor no espaço

Neste momento, o docente irá pedir aos estudantes que abram o segundo link da situação 2 na lista de links (ANEXO B). O professor perguntará aos graduandos a diferença entre o desenho que eles acabaram de abrir e o desenho do vetor no R^2. Espera-se que eles digam que o segundo gráfico está em 3 dimensões, como mostra a Figura 6.2, enquanto o gráfico visto no momento 1 está em duas dimensões. Também é esperado que os estudantes percebam que os controles deslizantes correspondem aos valores da origem e da extremidade, assim como foi visto no R^2. Em seguida, o docente irá pedir aos discentes que movimentem os controles deslizantes e percebem que a medida que se move o controle deslizante o vetor também se move nos eixos x,y e z. Em seguida é possível visualizar a imagem do vetor em três dimensões que os estudantes irão ver ao abrirem o link solicitado pelo professor.

Figura 6.2 - Vetor no R^3.



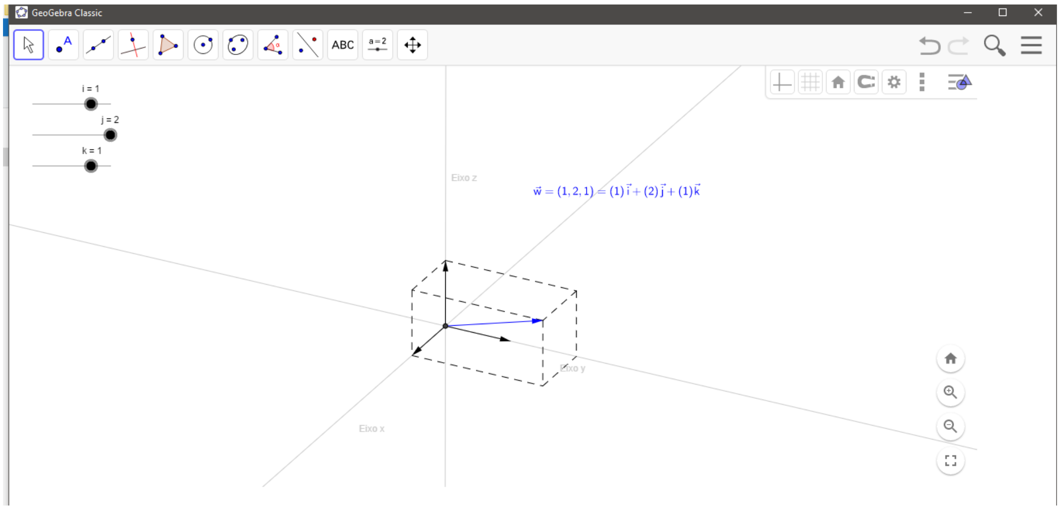
Fonte:<http://www.geogebra.org/m/RGtTs8ZZ?gct=b4b3 ad0a -aef1-43b2-3fb9-3a3c824ac5f3>, visualizado em 24 jan. 2020.

Momento 3: vetores a partir de suas componentes

Neste momento, o professor pedirá aos estudantes que abram link da lista de links do momento 3 da situação 2 (ANEXO B) e solicitará que os graduando movimentem os controles deslizantes “i”, “j” e “k”. Neste instante, o docente irá perguntar se eles conseguem perceber que tipo de vetor é “w”. Espera-se que eles digam que é uma base que foi gerada pelos vetores canônicos. É esperado também que os estudantes percebam que ao alterar os controles deslizantes é formado um cubo ou um paralelepípedo. Na Figura 6.3 é possível visualizar esse paralelepípedo formado a partir dos vetores canônicos. Além disso, “i”, “j” e

"k" serão paralelos aos eixos x, y e z quando seus valores forem zero. O professor também mostrará aos estudantes que é possível gerar todo o R³ a partir dos vetores canônicos.

Figura 6.3 - Vetores a partir de suas componentes.

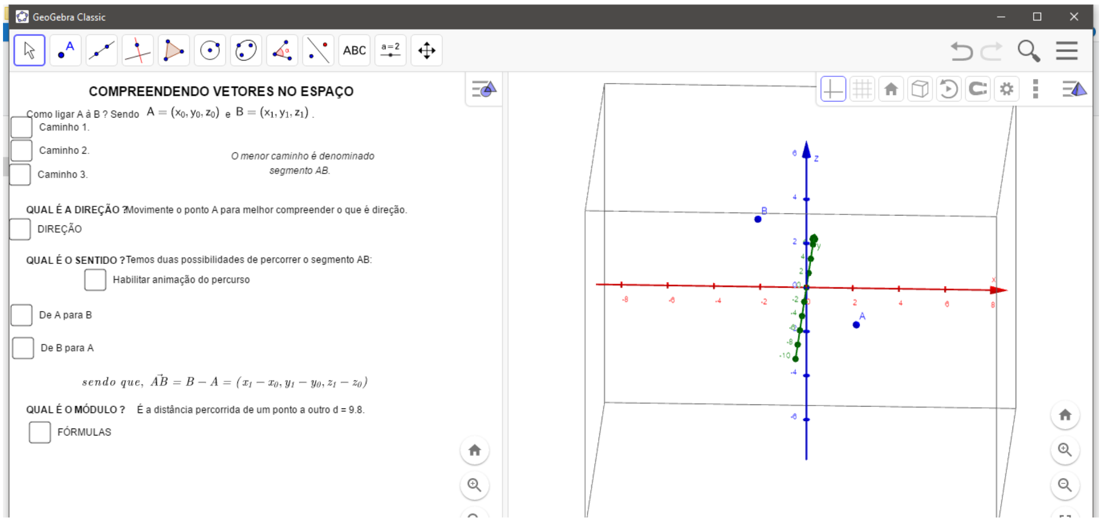


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/CETSFhUt?gct=be0411bc-475f-3665-aa79-86ad2b445484>, visualizado em 24 jan. 2020.

Momento 4: compreendendo vetores no espaço

Neste momento, o docente pedirá aos estudantes que abram o link do momento 4 da situação 2 na lista de links (ANEXO B). Neste instante, o professor irá perguntar aos estudantes qual é a menor distância entre dois pontos. O docente ouvirá a opinião dos graduandos e espera-se que a maioria deles diga que é o segmento de reta. Para comprovar que que o menor caminho entre dois pontos é o segmento de reta e sanar as possíveis dúvidas, será solicitado que os estudantes cliquem nos caminhos 1, 2 e 3 e com isso percebam que o menor caminho entre dois pontos é o segmento de reta, como mostra na Figura 6.4. O próximo passo será pedir aos estudantes que movimentem o ponto A e em seguida cliquem em "DIREÇÃO". Neste momento, o docente perguntará aos estudantes quais direções esse segmento pode ter. Espera-se que eles digam: vertical, horizontal e diagonal, pois ao clicar no comando "DIREÇÃO" é possível perceber quais direções um segmento pode assumir. Em seguida, o professor pedirá aos graduandos que digam qual sentido o vetor pode ter se for do ponto A para B e do ponto B para A. Espera-se que eles digam: direita, esquerda, para cima e para baixo. Caso os estudantes tenham dúvidas ou queiram confirmar o sentido do segmento, eles podem clicar em "DIREÇÃO" e assim sanar suas possíveis dúvidas. Posteriormente, o docente perguntará como se faz para achar o tamanho de um vetor. Espera-se que os estudantes digam que é a partir do módulo do vetor. Caso eles não digam que é o módulo, o professor pedirá para que os estudantes cliquem em “FÓRMULAS” e vejam que o valor do vetor se altera a medida que se modifica o segmento no gráfico. Os estudantes, juntamente com docente, irão identificara partir do gráfico quem são x_0, y_0, z_0, x_1, y_1 e z_1. Espera-se que, com o auxilio do professor, os discentes digam que que x_0, y_0 e z_0 correspondem aos valores da origem do vetor e que x_1, y_1 e z_1 correspondem a extremidade.

Figura 6.4 - Compreendendo vetores no espaço.

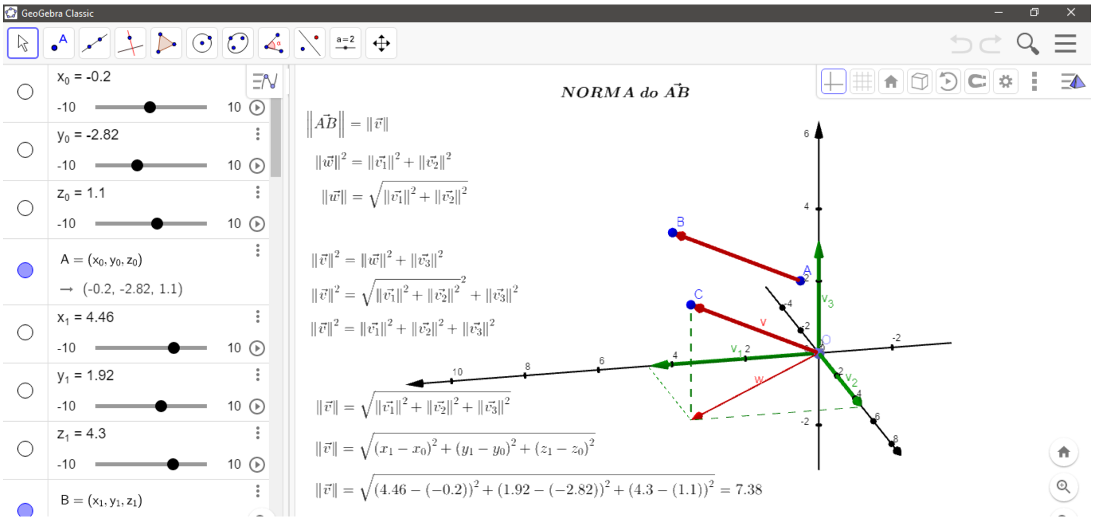


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/aJfCTkKE?gct=edc0c8c2-8b36-da42-9a4a-4a38ae3b340c>, visualizado em 24 jan. 2020.

Momento 5: deduzir a relação que define a norma vetor no plano e no espaço

Neste momento, o professor irá pedir para que os estudantes abram outro documento do GeoGebra, disponível no item 5 da segunda situação da lista de links (ANEXO B). Logo em seguida, o docente perguntará aos discentes, a partir do gráfico e da demonstração da fórmula da norma, de onde vem essa demonstração, como mostra na Figura 6.5. Espera-se que os estudantes, juntamente com o auxilio do docente, digam que ela existe a partir do Teorema de Pitágoras. O professor também dirá que a dedução da norma de “v” é a igual a demonstração da norma de “w”, mas que nesse último caso o vetor está em 3 dimensões. O docente irá solicitar que os discentes movam os controles deslizantes e digam o que eles percebem que acontece com a norma de “v”. Espera-se que eles digam que mesmo quando os eixos x, y e z estão negativos a norma sempre terá valor positivo e que seus valores irão alterar positivamente entre um intervalo positivo.

Figura 6.5 - Norma de um vetor.

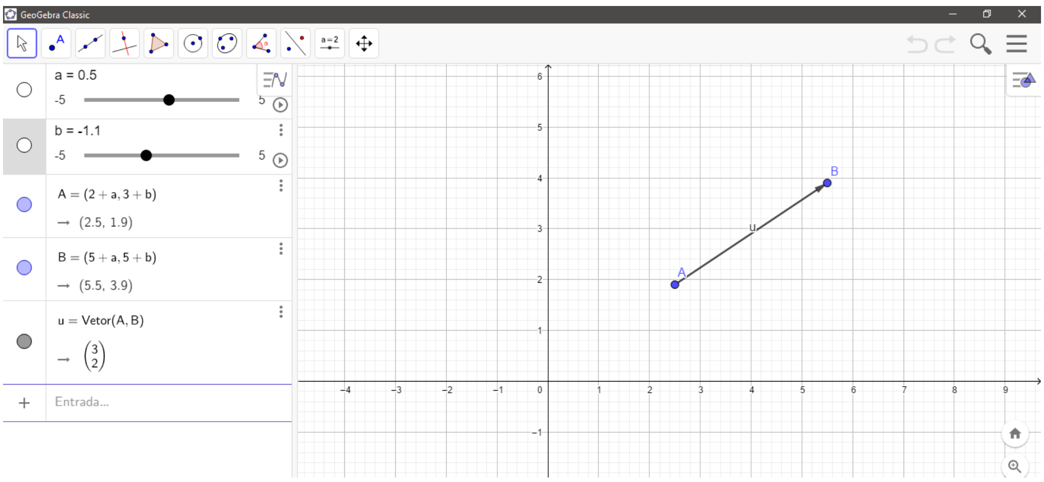


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/eb5hwscq>, visualizado em 24 jan. 2020.

Momento 6: translação por vetores

O docente irá pedir aos estudantes que abram o próximo documento do GeoGebra, disponível no item 6 na segunda situação da lista de links (ANEXO B). Em seguida, o professor irá perguntar: o que acontece se alterar os valores de “a” e “b”? Espera-se que os estudantes digam que mesmo o vetor transladando 5 unidades para a direita ou esquerda e 5 unidades para cima ou para baixo; seu módulo, direção e sentido continuam o mesmo. Ou seja, esses vetores serão equipolentes. Caso eles não percebam isso, o docente irá mover o vetor juntamente com os estudantes para cima, baixo, direita e esquerda até q eles percebam que os vetores são equipolentes. A imagem que os estudantes irão ver ao abrir esse documento será a imagem da Figura 6.6.

Figura 6.6 - Translação por vetores.

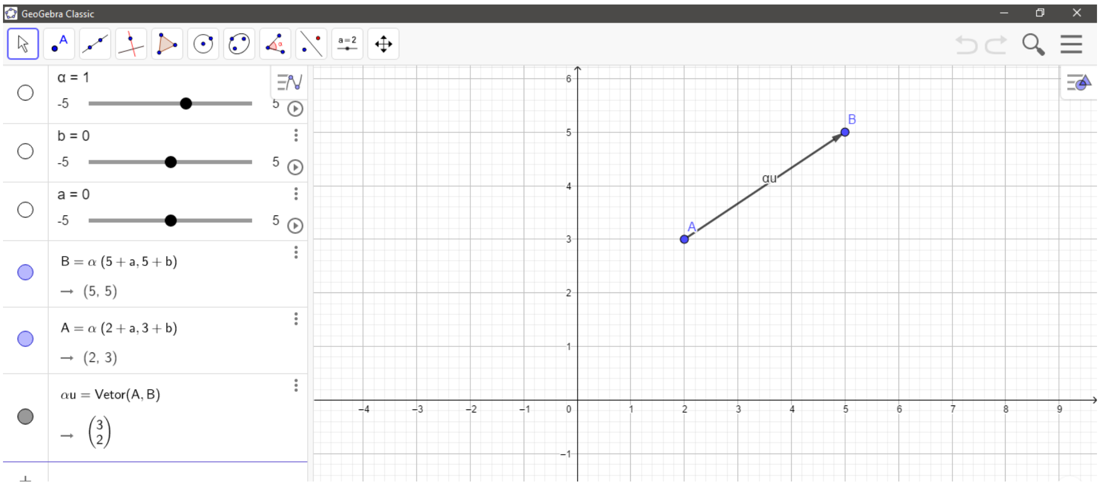


Fonte: <https://www.geogebra.org/worksheet/edit/id/nq99sfjx>, visualizado em 24 jan. 2020.

Momento 7: translação de vetores e paralelismo

Neste instante, o professor irá solicitar que os estudantes abram o documento do GeoGebra que acessa o próximo momento, disponível no item 7 na segunda situação da lista de links (ANEXO B). Neste momento, o professor perguntará: o que acontece se os valores dos controles deslizantes “a” e “b” forem modificados? Espera-se que eles digam que o vetor vai somente transladar. Logo em seguida, o docente questionará os estudantes: se alterar o valor de “α”, o que acontece? Espera-se que eles digam que irá obter outros vetores diferentes, mas que também são paralelos. Caso os estudantes não percebam o que está acontecendo com o vetor, o docente irá manipular o vetor e movimentá-lo, juntamente com os estudantes, para que eles consigam entender que o vetor sempre será paralelo a qualquer outro vetor gerado. A seguir é possível observar a imagem (Figura 6.7) que os estudantes encontrarão ao abrirem o documento do GeoGebra.

Figura 6.7 – Paralelismo e translação de vetores.

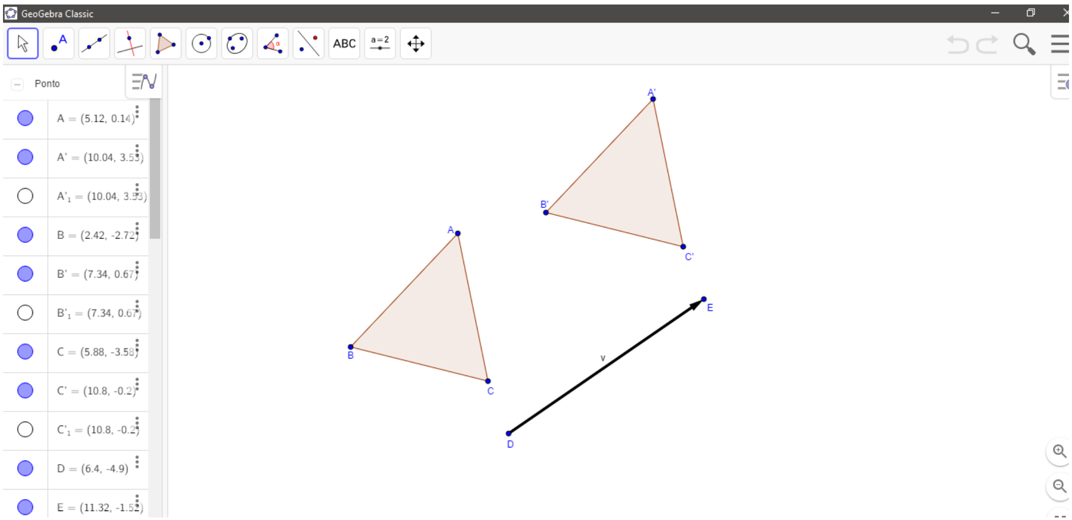


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/q6gxvc6t>, visualizado em 24 jan. 2020.

Momento 8: translação de um polígono por um vetor

O docente pedirá aos estudantes para que abram o documento denominado como “translação de um polígono por um vetor”, disponível no item 8 na segunda situação da lista de links (ANEXO B). Neste instante, o professor pedirá aos graduandos q manipulem o triângulo ABC e perguntará o que acontece com o outro triângulo A’B’C’. Espera-se que os estudantes percebem que os triângulos são congruentes e assim que os valores do triangulo ABC são modificados os valores do triangulo A’B’C’ também são alterados. Neste momento, o docente dirá que se pode construir uma figura congruente a outra usando apenas vetores. A seguir, Figura 6.8, é possível visualizar os triângulos ABC e A’B’C’ que os graduandos verão ao abrir o documento do GeoGebra. Caso os estudantes não percebam que é possível construir figuras congruentes a partir de um vetor, o docente, juntamente com os estudantes, irá manipular o triângulo ABC até que os estudantes entendam que os triângulos são iguais.

Figura 6.8 - Translação de um polígono por um vetor.

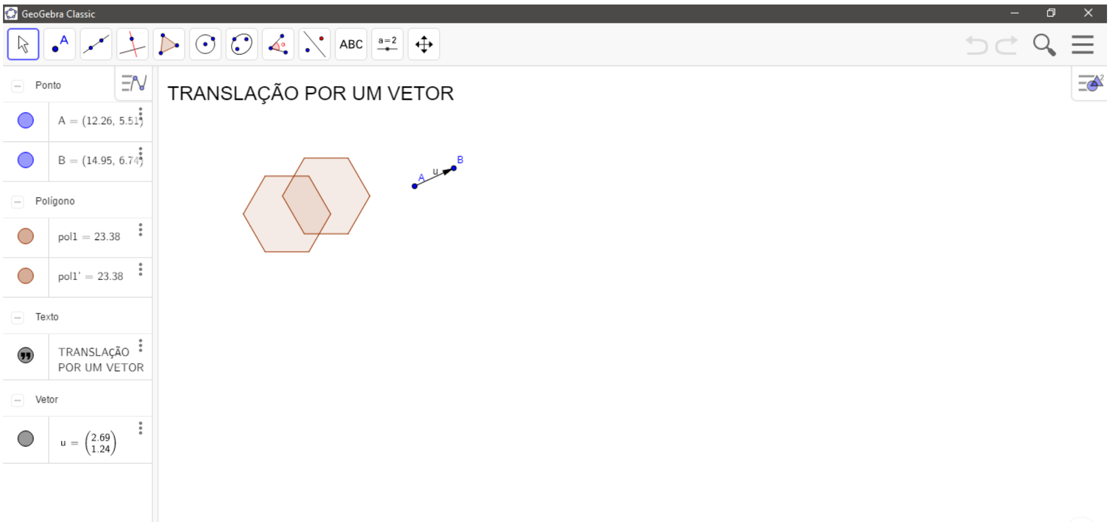


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/hEv6F79T?gct=0bbad925-95 80-7981-7136-da81751095af>, visualizado em 24 jan. 2020.

Momento 9: translação por um vetor de um hexágono

Neste momento, o professor pedirá aos estudantes que acessem o link do item 9 da segunda situação da lista de links (ANEXO B). Em seguida, o docente explicará que a ideia da translação do hexágono é a mesma do triângulo. Isso significa que se pode construir uma figura congruente a outra a partir de um vetor. A imagem a seguir mostra os dois hexágonos congruentes (Figura 6.9) que os estudantes verão ao acessar esse documento do GeoGebra.

Figura 6.9 - Translação de um hexágono por um vetor.



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/xKC82EsQ?gct=81be03f3-8038-b03a-d8bf-40897bf88d8c>, visualizado em 24 jan. 2020.

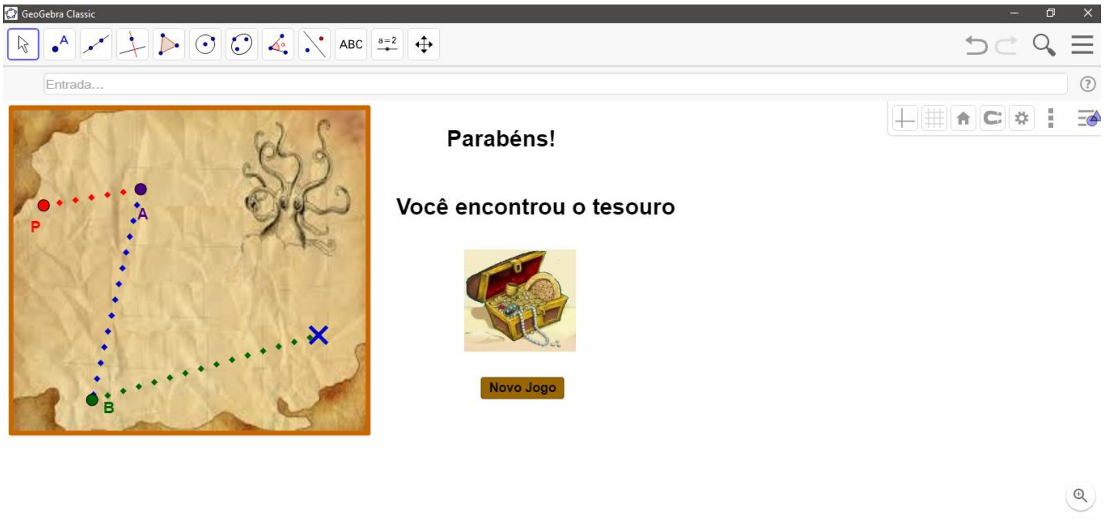
Momento 10: jogo caça ao tesouro

Neste momento, o professor pedirá aos estudantes que acessem o link do item 10 da segunda situação da lista de links. O docente pedirá que os graduandos tentem entender o raciocínio do jogo. A lógica consiste avançar etapas para encontrar o tesouro, a cada etapa é apresentado uma soma de dois vetores. Espera-se que os estudantes compreendam que se trata de soma de vetores, caso eles tenham dificuldades, o professor dirá para que os estudantes cliquem no comando “pista”. Essa pista mostra os dois vetores que precisam ser somados e o resultado da adição. A primeira imagem (Figura 6.10) está relacionada a imagem do jogo assim que ele é iniciado. Já imagem seguinte (Figura 6.11) aparece quando se encontra o tesouro.

Figura 6.10 - Imagem da primeira página do jogo de caça tesouro.

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/Pmfjqq99?gct=a736f183-a65a-5be
3-6908-d4bf48057cad>, visualizado em 24 jan. 2020.

Figura 6.11 - Imagem da última página do jogo de caça tesouro.



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/Pmfjqq99?gct=a736f183-a65a-5be3-6908-d4bf48057cad>, visualizado em 24 jan. 2020.

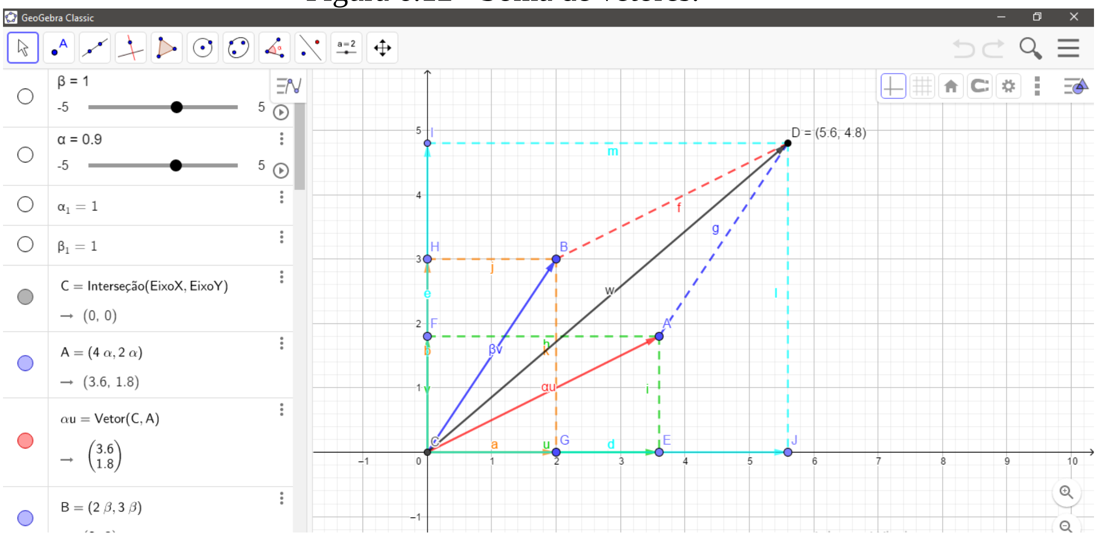
6.1.3 Situação 3

Como podemos perceber, finalizamos a situação 2 com um jogo relacionado à soma de vetores. Desse modo, os estudantes puderam relembrar, ou até mesmo aprender, como se realiza a adição de dois vetores. Por isso, a situação que irá começar os dois primeiros momentos está associada a soma de vetores no plano e no espaço. Já no último momento, será apresentado um jogo que tem como lógica a subtração de vetores

Momento 1: soma de vetores no plano (definição de soma)

O docente iniciará esse momento pedindo aos estudantes que abram o link do momento 1, localizado na situação 3 da lista de links (ANEXO B). Logo após, ele perguntará aos graduandos: “o que vocês observam no vetor azul?”. Espera-se que eles digam que o vetor azul é o resultado da soma dos vetores amarelos que estão localizados nos eixos x e y. Em seguida, o professor irá questionar novamente os estudantes com a seguinte pergunta: “o que podemos observar no vetor vermelho?”. É esperado que eles digam que o vetor vermelho é a soma dos vetores verdes, que também estão nos eixos x e y. Posteriormente, o docente questionará os graduandos a respeito do vetor preto. Espera-se que os estudantes percebam que o vetor preto é resultado da soma do vetor azul e vermelho. Caso os discentes possuam muitas dúvidas em relação a esse momento, é aconselhável que o professor abra essa atividade do GeoGebra, projete a imagem do gráfico no quadro, disponibilizado pela instituição, e movimente os vetores. Assim, o professor poderá mostrar o que acontece com cada vetor quando é alterado a sua localização. A imagem a seguir (Figura 6.12) é o gráfico que os estudantes irão encontrar ao abrir o link que será usado neste momento.

Figura 6.12 - Soma de vetores.



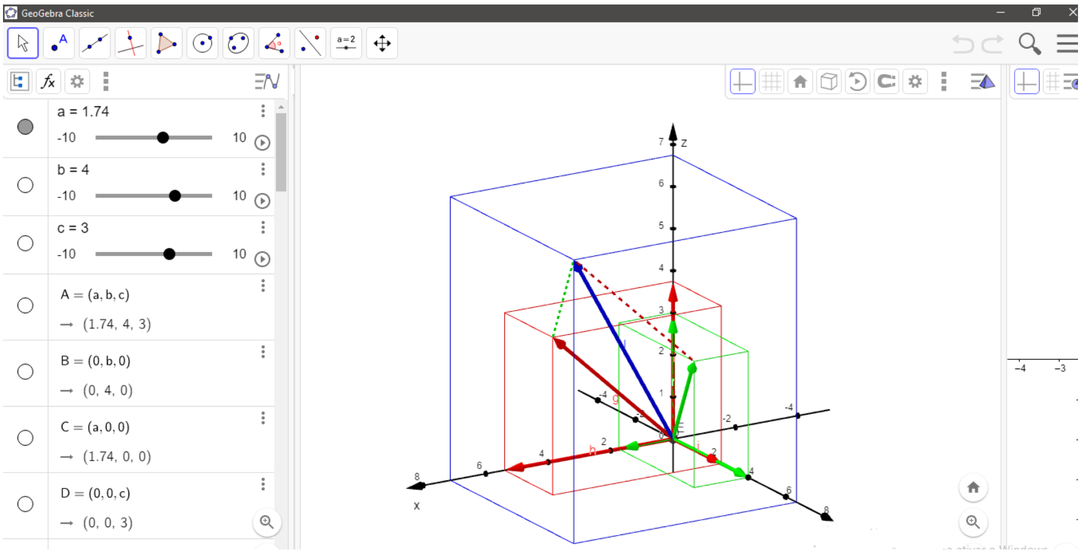
Fonte: < https://www.geogebra.org/m/cs9wgtbd>, visualizado em 24 jan. 2020.

Momento 2: soma de vetores no espaço

Neste instante, o docente pedirá aos estudantes que abram o link “soma de vetores no espaço”, localizado no momento 2, na situação 3 da lista de links (ANEXO B). Em seguida ele levantará a seguinte questão: o que é o vetor verde “r’? Espera-se que os estudantes digam que o vetor verde é resultado da soma dos outros 3 vetores verdes, também é esperado que os estudantes percebam que o vetor verde r é a diagonal do paralelepípedo verde. A mesma pergunta será feita a respeito do vetor vermelho: o que é o vetor vermelho “g”? Espera-se que os graduandos digam que esse vetor vermelho é resultado da soma dos outros 3 vetores vermelho, também é esperado que os estudantes percebam que o vetor vermelho g é a diagonal do paralelepípedo vermelho. Por fim, será perguntado aos estudantes: o que o vetor azul? Espera-se que eles digam que o vetor azul é o resultado da soma verde e vermelho e que ele é a diagonal do paralelepípedo azul.

Caso os estudantes possuam muitas dúvidas em relação a esse momento é aconselhável que o docente abra essa atividade do GeoGebra, projete no quadro e movimente os vetores. Assim, o professor poderá mostrar o que acontece com cada paralelepípedo e com suas diagonais quando é alterado seus vetores. A imagem a seguir (Figura 6.13) é o gráfico que os estudantes irão encontrar ao abrir o link que será usado neste momento.

Figura 6.13 - Soma de vetores no espaço.



Fonte:< https://www.geogebra.org/m/ry2k3xes>, visualizado em 24 jan. 2020.

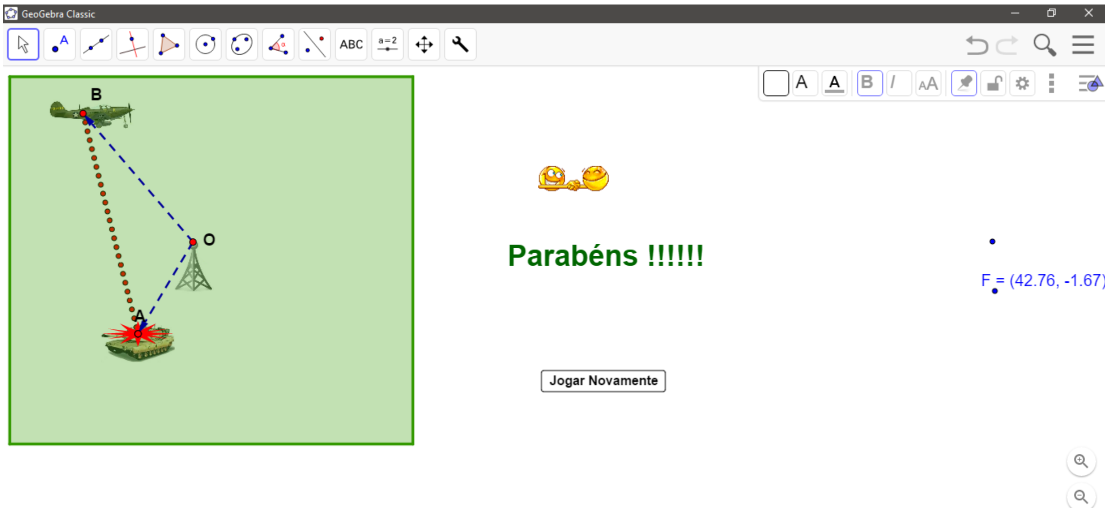
Momento 3: jogo da guerra

Neste momento, o professor pedirá aos estudantes que abram o documento do link disponível no momento 3, na situação 3 da lista de links (ANEXO B). O docente, primeiramente, pedirá para que os estudantes tentem entender o raciocínio do jogo. A lógica do jogo está relacionada a resolver subtração de vetores, a cada etapa do jogo aparece uma nova operação e na última etapa o avião atira no tanque. O Espera-se que os graduandos compreendam que o jogo trata sobre subtração de vetores. Caso os estudantes tenham dificuldades para lembrar como se resolve a operação de subtração de vetores, o professor fará um exemplo na lousa, disponibilizada na sala de aula. A seguir temos duas imagens (Figuras 6.14 e 6.15) que representam a primeira e a última página do jogo.

Figura 6.14 - Primeira página do jogo de guerra.

Fonte: < https://www.geogebra.org/m/WSBV2fpE?gct=55f0e16d-a1ab-1199-d77c-3886740198f5>, visualizado em 24 de jan. 2020.

Figura 6.15 - Última página do jogo de guerra.



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/WSBV2fpE?gct=55f0e16d-a1ab-1199-d77c-3886740198f5>, visualizado em 24 jan. 2020.

6.1.4 Situação 4: construção gráfica de uma combinação linear

Neste momento, o docente pedirá aos estudantes que abram um documento novo do GeoGebra. Com a orientação do professor os graduandos construirão um gráfico correspondente a uma combinação linear. Será dado as seguintes instruções:

- Crie dois controles deslizantes no intervalo de -5 e 5. Esse intervalo é sugerido por ter valores próximos de zero e com isso se tem uma melhor visualização da imagem que será construída.

- Construa um vetor a partir de dois pontos quaisquer. Logo após, crie outro vetor a partir de dois pontos[10].

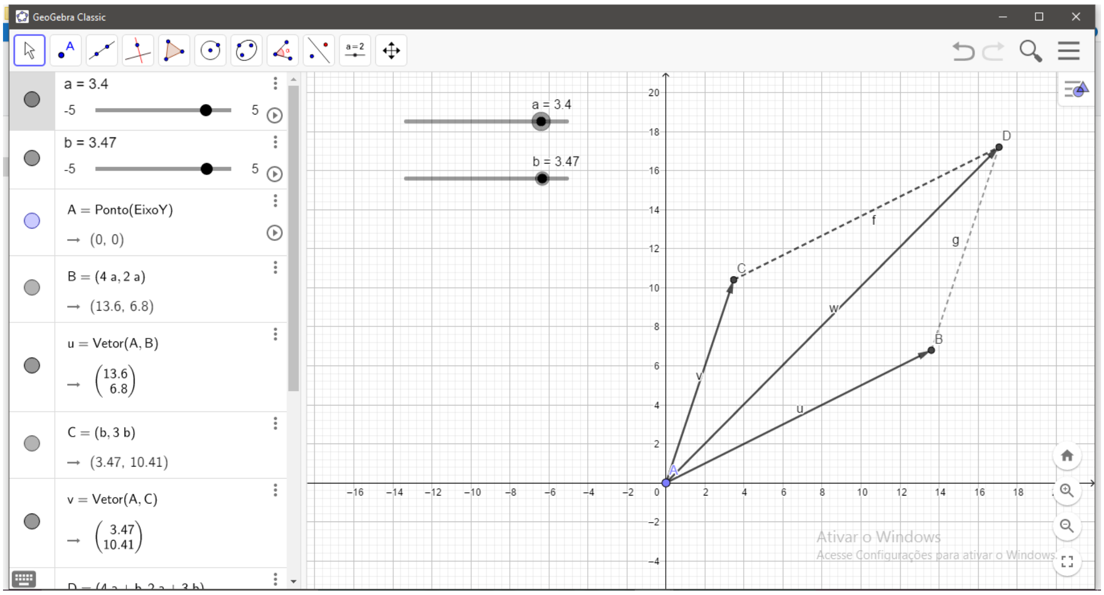
- Crie um novo vetor que irá somar os dois primeiros vetores.

- Construa um segmento que una o primeiro vetor e o vetor soma. Faça o mesmo com o outro vetor.

A partir dessas instruções, será possível construir uma combinação linear de dois vetores. Na imagem (Figura 6.16) a seguir é possível observar a construção de uma combinação linear.

.

Figura 6.16 - Representação de uma combinação linear.



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/h3gxuw5v>, visualizado em 24 jan. 2020.

[10] Como vamos fazer uma combinação linear, precisamos multiplicar um escalar por cada vetor criado.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve a intenção de disponibilizar uma proposta de ensino para professores que ensinam vetores, principalmente para os docentes dos cursos de Licenciatura em Matemática. Espero que este trabalho impulsione outros pesquisadores a trabalharem com o ensino de vetores, pois não há muitas pesquisas recentes nessa área.

A partir das pesquisas realizadas, percebeu-se que há um alto índice de dificuldade por parte dos estudantes em aprender o conceito de vetores e esse problema vem acontecendo há vários anos. Talvez esse fato esteja devido ao modo como esse tema é estudado em sala de aula. Por isso, neste estudo abordamos o conteúdo de vetores por meio da Teoria Histórico-Cultural. Por meio dessa teoria percebemos como se desenvolve o pensamento humano e com isso o papel do professor é desenvolver as SDA para que se possa criar a ZDI. Além disso, a SDA tem como intenção fazer com que o sujeito entre em atividade.

O GeoGebra, neste estudo, teve uma importante contribuição, pois por meio das pesquisas podemos perceber que muitos estudantes possuem dificuldades em visualizar conceitos algébricos. Logo, o *software* além de criar uma correspondência entre o algébrico e o geométrico pode ser um instrumento de mediação que irá gerar ZDI nos estudantes e com isso facilitar o ensino de vetores para os professores que ensinam esse conteúdo.

Vimos também que a história da origem dos vetores teve contribuições de d' Alembert, Jean Robert Argand, Caspart Wessel, Hamilton e Gauss. Observamos que os vetores originaram dos números imaginários. Em seguida, foi apresentado a proposta de uma tarefa de ensino a partir do GeoGebra. A atividade elaborada foi dividida em quatro situações e em três delas o estudante interage com esse *software*, a partir da mediação do professor. No último momento é sugerido que o graduando construa uma combinação linear, juntamente com o docente.

Este estudo é relevante devido sua contribuição para o ensino de vetores. A partir dessa pesquisa esperamos contribuir para melhorar a qualidade de ensino em disciplinas como Geometria Analítica e Vetores, Cálculo e Álgebra. Com o auxílio do GeoGebra é possível visualizar melhor conceitos algébricos que muita das vezes é abstrato e de difícil compreensão para muitos estudantes.

Minha expectativa, enquanto pesquisadora, é dar continuidade nesse trabalho e desenvolver as SDA em cursos de Licenciatura em Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. M. O método materialista histórico dialético: alguns apontamentos sobre a subjetividade, **Revista de Psicologia da UNESP**, 2010.

AMORIM, F.; COSTA, G.; SALAZAR, J. V. **Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo**. *Anais de XIII CIAEM-IACME*, 2011, 26-30.

ARAÚJO, I. R. L.; VIEIRA, A. D. S.; CAVALCANTE, M. A. S. Contribuição de Vygotsky e Bakhtin na linguagem: sentidos e significados. **Debates em Educação**, v. 1, n. 2, 2010.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: FE–USP, 1999

BITTAR, M.; FERREIRA JR., A. Ativismo pedagógico e princípios da escola do trabalho nos primeiros tempos da educação soviética. **Revista Brasileira de Educação**, v. 20 n. 61 abr.-jun. 2015.

BORBA, M. C. **Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática**. I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática. 2002a, p 135-146.

BRASIL (2006). **Orientações Curriculares: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2). Disponível em: Acesso em: 10 jan 2020.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

COIMBRA, J. L. **Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear.** Dissertação (mestrado)-Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

CUNHA, M. R. K. **Estudo das elaborações dos professores sobre o conceito de medida em atividades de ensino**. UNICAMP, Campinas, SP. 2008.

DAVIDOV, V. Problemas do Ensino Desenvolvimental: A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. **Revista Soviet Education**, August, v.30, n.8, 1988.

DAVIDOV, V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Pueblo y Educación, 1982.

FROTA, M. C. R.; BORGES, O. **Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na Educação Matemática**. Anais da 27ª reunião anual da Anped, 2004.

GEOGEBRA, site oficial. **GEOGEBRA**: The Graphing Calculator for Functions, Geometry, Algebra, Calculus, Statistics and 3D Math! Dispon´ıvel em https://www.geogebra.org/ Acesso em 27 jan. 2020.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Plageder, 2009.

GIL, A. C., et al. **Técnicas de pesquisa em economia e elaboração de monografias**. 2000.

GOMES, R. **Números complexos e polinômios:** estratégias de ensino para aplicação por meio do Geogebra. 2013.

GOULART, J. S. S.; FARIAS, L. M. S. Um diálogo sobre a Teoria Antropológica do Didático–TAD intermediado por um curso introdutório sobre os vetores A dialogue on the Anthropological Theory of Didactics-ATD intermediated by an introductory course on the vectors. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 20, n. 3, 2018.

GRYMUZA, A. M. G.; RÊGO, R. G. **A TEORIA DA ATIVIDADE: UMA POSSIBILIDADE NO ENSINO DE MATEMÁTICA**. Universidade Federal da Paraíba. Revista Temas em Educação, 2014, 23.2: 117.

HELERBROCK, R. Vetores. **MUNDO EDUCAÇÃO**, 2018. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/vetores.htm>. Acesso em: 17 jun. 2020.

HOHENWARTER, M. **GeoGebra 4.4–From desktops to tablets**. *Indagatio Didactica*, 2013, 5.1: 8-18.

JARDIM, D. F., SILVA, J. M., PEREIRA, M. M., JUNIOR, E. A. S., NEPOMUCENA, T. V., & PINHEIRO, T. R. (2015). **Estudando limites com o GeoGebra**. Revista Vozes dos Vales, 4(8).

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**. Papirus editora, 2007.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira S.A., v. 123, 1978. (Coleção Perspectivas do homem).

LANNER DE MOURA, A.R. **Movimento Conceitual em sala de aula**. In: Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática. CIAEM, Blumenau/SC, 13-17 de julho de 2003.

LEONTIEV, A. N., (1983). **Actividad, conciencia, personalidad**. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência.** Editora 34, 1993.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. da M. Vygotsky, Leontiev, Davydov – três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática. In: **IV Congresso Brasileiro de História da Educação**. 2006. (Eixo temático: 3. Cultura e práticas escolares).

MACEDO, N. D. **Iniciação à pesquisa bibliográfica**. Edições Loyola, 1995.

MARX, K; ENGELS, F. **O Capital: Crítica de Economia Política.** Editora Nova Cultural Ltda, 1996.

MEDEIROS, A. A atualidade pedagógica da controvérsia histórica sobre a verdadeira definição da" Força de um corpo". **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 3, n. 1, p. 62-80, 2001.

MORAN, J. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 6 ed. Campinas: Papirus, 2000.

MORAN, J; MASETTO, M; BEHRENS, I. **Tecnologias e mediação pedagógica.** 10ª ed. Campinas: Papirus, 2000.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. **Transição do ensino médio para o superior:** como minimizar as dificuldades em cálculo. V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). Petrópolis, RJ, 2012.

NEVES, R. C. **OS QUATÉRNIOS DE HAMILTON E O ESPAÇO**. 2008. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituo de Matemática.

NUÑES, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin: formação de conceitos e princípios didáticos**. Brasília: Liber Livro, 2009.

OLIVEIRA, C. N. C. de, et al. **Números Complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos**. 2010.

PALANGANA, I, C. **Desenvolvimento e Aprendizagem em Piaget e Vigotski:** A relevância do social. São Paulo: Summus Editorial, 2015.

PEIXOTO, J.; ARAUJO, C. H. S. Tecnologia e educação: algumas considerações sobre o discurso pedagógico contemporâneo. **Educação e Sociedade**, Campinas, v. 33, n. 118, p. 253-268, Mar. 2012. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1590/S0101-73302012000100016>. Acesso em 02/12/2018.

PETLA, R. J.; ROLKOUSKI, E. **Geogebra–Possibilidades para o ensino de matemática**. *União da Vitória, PR*, 2008, 1419-6.

PIMENTA, G. V. **O DESENVOLVIMENTO DO CAMPO CONCEITUAL DA TRIGONOMETRIA EM SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM MEDIADA POR TECNOLOGIAS DIGITAIS**. 2019. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós Graduação em Educação - Universidade Federal de Lavras (UFLA).

PRESTES, Z. R. **Quando não é a mesma coisa: análise de traduções de Lev Semionovitch Vigotski no Brasil: repercussões no campo educacional**. 2010. 295 f. Tese (Doutorado em Educação)- Universidade de Brasília, Brasília, 2010. Disponível em: <http://repositorio.unb.br/handle/10482/9123>. Acesso em: 07 mai. 2019.

PROJETO POLITICO PEDAGÓGICO DO CURSO LICENCITURA EM MATEMÁTICA. Disponível em: https://www.formiga.ifmg.edu.br/documents/2018/ Matematica/FOR_Licencitura-em-Matemtica_ 2018.pdf. Acesso em: 13 fev. 2020.

REGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. 25. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.
TOZONI-REIS, Marília Freitas de Campos. **Metodologia da pesquisa**. 2009.

REZENDE, J. P.; ANDRADE, J. A. A. Nexos conceituais de número natural como sustentação para o desenvolvimento de atividades de ensino. **Trabalho de conclusão de curso, MG (UFLA)**, 2010.

RICHIT, A. (2005). **Projetos em Geometria Analítica usando software de geometria dinâmica**: repensando a formação inicial docente em Matemática.

RONCAGLLO, V., & NEHRING, C. M. (2017, August). **CONCEITO DE VETOR– ARGUMENTOS DE ESTUDANTES EM RELAÇÃO A COMPREENSÃO DO CONCEITO**. In VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA-2017

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, R. S. **O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO TEÓRICO NO ENSINO DA TERMODINÂMICA EM SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM.** 2018. 232 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Ensino de Física, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2018. Disponível em: <http://repositorio.ufla.br/bitstream/1/30890/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_O%20desenvolvimento%20do%20pensamento%20te%C3%B3rico%20no%20ensino%20da%20termodin%C3%A2mica%20em%20situa%C3%A7%C3%B5es%20desencadeadoras%20de%20aprendizagem.pdf>. Acesso em: 17 mai. 2019.

SOARES, M. **Novas práticas de leitura e escrita: letramento na cibercultura**. Educação e Sociedade, Campinas , v. 23, n. 81, p. 143-160, Dez. 2002. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0101-73302002008100008>. Acesso em: 01 dez. 2018.

SOARES, M. B.; MACIEL, F. P. **Alfabetização**. Brasília: MEC; Inep; Comped, 2000. (Estado do Conhecimento, n.1). Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484330/Alfabetiza%C3%A7%C3%A3o/f9ddff4f-1708-41fa-82e5-4f2aa7c6c581?Version=1.3> Acesso em: 6 mai. 2020.

SOUSA, M. d. C. d. **O Ensino de Álgebra numa Perspectiva Lógico-histórica**: um Estudo das Elaborações Correlatas de Professores do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado), 2004.

TRAINA, A. J. M.; TRAINA JR, C. **Como fazer pesquisa bibliográfica**. SBC Horizontes, 2009, 2.2: 30-35.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** 2. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2009. (2ª tiragem). Tradução: Paulo Bezerra.

VIGOTSKI, L. S; LURIA, A. R; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizado**. 11ª Edição - São Paulo: ícone, 2010. Tradução: Maria da Pena Villalobos.

ANEXO A

SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

José Antônio Araújo Andrade
Setor de Educação Matemática – DEX/UFLA
joseaaa@ufla.br
Mariana da Costa Teles
Mestranda em Educação – PPGE/UFLA
marycostateles@hotmail.com

Ao assistir ao desenvolvimento lógico-histórico dos conceitos matemáticos, notam-se três fatores determinantes: o princípio de extensão, o princípio da economia e a negação da negação.

Princípio de extensão: Esse princípio tem como intenção generalizar e estender todas as aquisições do pensamento seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível das generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências.

Princípio da economia: É conveniente que as definições de um novo conceito mantenham o mesmo formato das antigas. Isso se faz necessário para que haja um menor desperdício possível de energia mental, não só referente a definição, mas também as suas consequências. Esse princípio nos leva a preferir dois caminhos: o mais simples e o mais curto.

Negação da negação: Para entender melhor essa definição usaremos o exemplo da criação do conjunto dos Racionais. A partir do conjunto dos números Inteiros, tomemos dois números: m e n $(n \neq 0)$; estes dois números estão na seguinte relação aritmética: ou m é divisível por n, ou não. Desse modo, temos duas opções:

a) Se m é divisível por n, os dois números definem, por meio da operação de divisão, um terceiro número: o quociente.
b) Se m não é divisível por n, a operação da divisão nega a existência de um número quociente.

Nesse sentido, a intenção da definição consiste em negar a negação de "b" e desse modo construir um novo campo numérico: o número fracionário.

Para chegarmos à ideia matemática de vetores, vamos partir do conceito de número, observando todas as relações e leis estabelecidas e os casos de impossibilidade (negação de um fato ou argumento matemático). Em especial, os casos de impossibilidade se apresentam como elementos tensionadores e se constituem como essenciais para uma ampliação qualitativa do conceito, neste caso do campo conceitual de número.

Com a constituição do conjunto dos números inteiros (não relativos), por exemplo, propriedades, princípios, leis... foram estabelecidos, no âmbito da teoria matemática, bem como indeterminações, indefinições e a impossibilidades de se obter alguns resultados:

(i) Casos de indefinição:

$$\frac{a}{b}, \text{ para } b > 0$$

(ii) Casos de indeterminação

$$0^0 \text{ e } \frac{0}{0}$$

(iii) A partir das operações, observaram-se as seguintes impossibilidades ou restrições:

$$a - b, \text{ para } a \geq b$$

$$\frac{a}{b}, \text{ com } a \text{ um número inteiro, múltiplo de } b.$$

$\sqrt{a} = b$, em que a é um número inteiro e quadrado perfeito, isto é, de modo que $b^2 = a$

$\sqrt{a}$, para $a \geq 0$ (neste caso considerando os reais relativos)

Procure entender os casos em que a negação de uma negação estabelece a necessidade de criação/ampliação de um campo numérico.

GRANDEZAS

Podemos definir as grandezas como escalar ou vetorial. A grandeza escalar é escrita por um número e sua unidade de medida correspondente. Exemplos: $22\ kg$ de massa, $32\ l$ de capacidade, $25\ m$ de comprimento. Já a grandeza vetorial tem a necessidade de ter módulo, direção e sentido; isso significa que ela só pode ser representada por um vetor.

Vetor: Representamos por um segmento de reta. O segmento de A para B, origem A e extremidade B, representamos por $\overrightarrow{AB}$. O segmento de B para A, origem B e extremidade A, representamos por $\overrightarrow{BA}$.

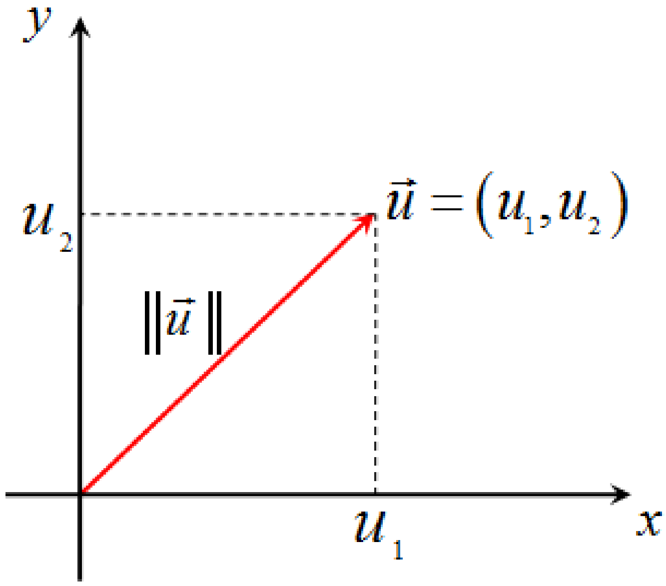
Translação de vetor: é quando a posição inicial e final de cada um dos pontos do vetor definem segmentos orientados paralelos e com as mesmas medidas algébricas (igualdade de módulos, sentidos, direções).

Módulo/norma

O tamanho (intensidade, ou comprimento) de um vetor é indicado por: $||\vec{u}||$, no qual pode ser chamado de norma de $\vec{u}$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$||\vec{u}||^2 = u_1^2 + u_2^2 \rightarrow ||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



Fonte: Produção autoral

Podemos entender que um vetor pode ter seu sentido para direita, esquerda, para cima ou para baixo. Já as possibilidades da direção do vetor são: vertical, horizontal e diagonal.

Vetores equipolentes são vetores que possuem mesmo módulo, sentido e direção.

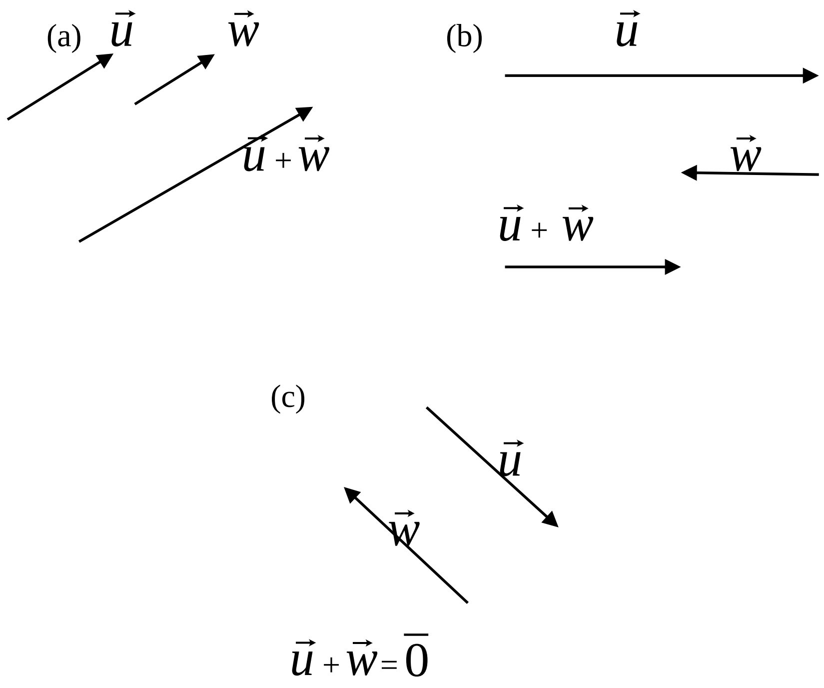
<u>Adição de vetores</u>

(i) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overline{0}$

Vetor nulo

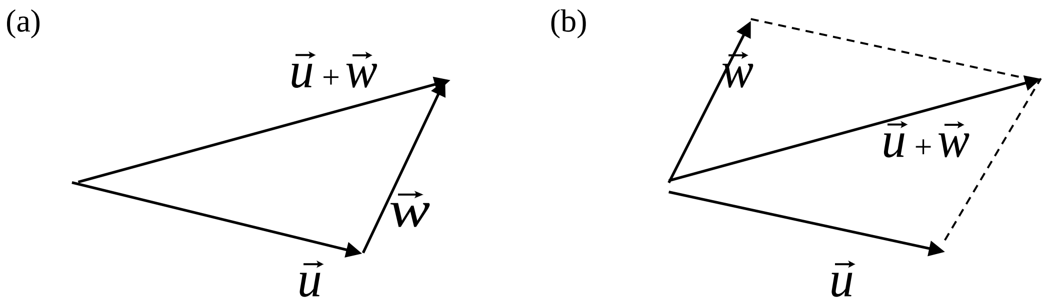
Seja $\vec{u}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos.

(ii) Quando $\vec{u} // \vec{w}$, ou seja, quando $\vec{u}$ e $\vec{w}$ tem a mesma direção, a soma u+w poderá ser representada como:

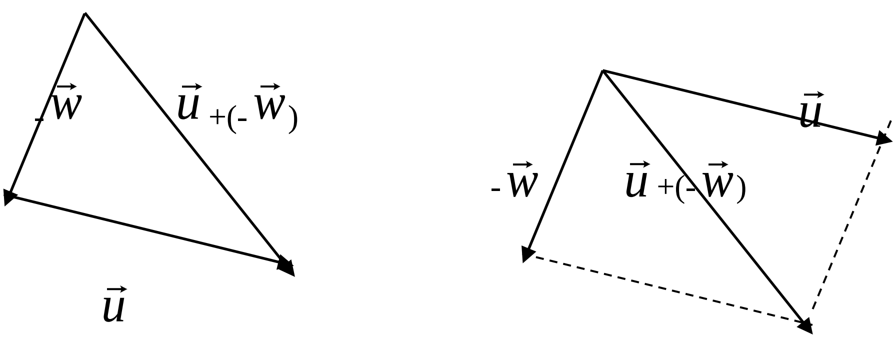


(iii) Quando $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não são paralelos:

Então $\vec{u}+\vec{w}$, será:

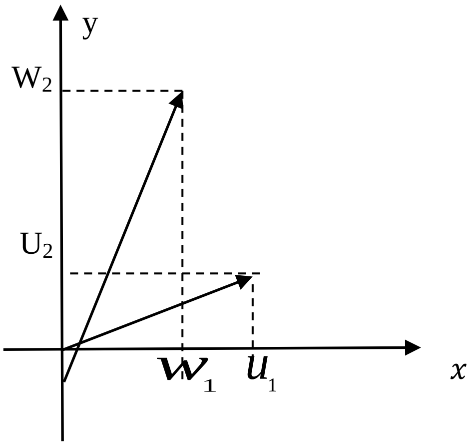


Considerando ainda, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ apresentados acima, a soma $\vec{u}+(-\vec{w})$ poderá ser representada como:



<u>Soma de vetores no sistema de eixos</u>

Representação dos vetores num sistema de eixos coordenados



Com isso, $(w_1, w_2) + (u_1, u_2) = (w_1 + u_1, w_2 + u_2)$

Vetor unitário: é aquele que tem o módulo/norma igual a 1. Existem três vetores unitários que formam a **base canônica** para o espaço R³, que são dados por:

$$i = (1,0,0);\ j = (0,1,0)\ e\ k = (0,0,1)$$

i // eixo x

j // eixo y

k // eixo z

Exemplo: Um vetor $\vec{v} = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ pode ser escrito em termos de uma soma:

$$\vec{v} = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = (\vec{v}_1, 0, 0) + (0, \vec{v}_2, 0) + (0,0, \vec{v}_3) = \vec{v}_1\ (1, 0, 0) + \vec{v}_2\ (0,1,0) + \vec{v}_3\ (0,0,1)$$
$$= \vec{v}_1\ (1,0,0) + \vec{v}_2\ (0,1,0) + \vec{v}_3\ (0,0,1) = \vec{v}_1 i + \vec{v}_2\ j + \vec{v}_3\ k$$

COMBINAÇÃO LINEAR

Definição: Seja os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_k$ e os escalares $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, temos que:

$\vec{v} = x_1\vec{v}_1, x_2\vec{v}_2, x_3\vec{v}_3, \dots, x_k\ \vec{v}_k$. Ou seja, $\overrightarrow{v}$ é a combinação linear dos vetores e dos escalares.

ANEXO B

LISTA DE LINKS

SITUAÇÃO 2

1. **Momento 1: Vetor no R²**
https://www.geogebra.org/m/vfggngct

2. **Momento 2: Vetor no espaço**
https://www.geogebra.org/m/RGtTs8ZZ?gct=b4b3ad0a-aef1-43b2-3fb9-3a3c824ac5f3

3. **Momento 3: Vetores a partir das componentes**
https://www.geogebra.org/m/CETSFhUt?gct=be0411bc-475f-3665-aa79-86ad2b445484

4. **Momento 4: Compreendendo vetores no espaço**
https://www.geogebra.org/m/aJfCTkKE?gct=edc0c8c2-8b36-da42-9a4a-4a38ae3b340c

5. **Momento 5: Deduzir a relação que define a norma vetor no plano e no espaço**
https://www.geogebra.org/m/eb5hwscq

6. **Momento 6: Translação de vetores**
https://www.geogebra.org/worksheet/edit/id/nq99sfjx

7. **Momento 7: Translação de vetores e paralelelismo**
https://www.geogebra.org/m/q6gxvc6t

8. **Momento 8: Translação de um poligono por um vetor**
https://www.geogebra.org/m/hEv6F79T?gct=0bbad925-9580-7981-7136-da81751095af

9. **Momento 9: Translação por um vetor de um hexágono**
https://www.geogebra.org/m/xKC82EsQ?gct=81be03f3-8038-b03a-d8bf-40897bf88d8c

10. **Momento 10: Jogo caça ao tesouro**

https://www.geogebra.org/m/Pmfjqq99?gct=a736f183-a65a-5be3-6908-d4bf48057cad

SITUAÇÃO 3

1. **Momento 1: Soma de vetores no plano (defnição de soma)**

https://www.geogebra.org/m/cs9wgtbd

2. **Momento 2: Soma de vetores no espaço**

https://www.geogebra.org/m/ry2k3xes

3. **Momento 3: Jogo de guerra**

https://www.geogebra.org/m/WSBV2fpE?gct=55f0e16d-a1ab-1199-d77c-3886740198f5