



**GLACIANE LOPES TEIXEIRA**

**AVALIAÇÃO DAS CURVAS DE CRESCIMENTO  
DE EQUINOS DA RAÇA CAMPOLINA  
UTILIZANDO MODELOS NÃO LINEARES**

**LAVRAS – MG**

**2020**

**GLACIANE LOPES TEIXEIRA**

**AVALIAÇÃO DAS CURVAS DE CRESCIMENTO DE EQUINOS DA  
RAÇA CAMPOLINA UTILIZANDO MODELOS NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de  
Lavras, como parte das exigências do Programa  
de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação  
Agropecuária para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Tales Jesus Fernandes  
Orientador

Prof. DSc. Raquel Silva de Moura  
Coorientadora

**LAVRAS – MG**

**2020**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca  
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Teixeira, Glaciane Lopes.

Avaliação das curvas de crescimento de equinos da raça  
Campolina utilizando modelos não lineares / Glaciane Lopes  
Teixeira. - 2020.

84 p. : il.

Orientador(a): Tales Jesus Fernandes.

Coorientador(a): Raquel Silva de Moura.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de  
Lavras, 2020.

Bibliografia.

1. Método transversal. 2. Pontos influentes. 3. Altura de  
cernelha. I. Fernandes, Tales Jesus. II. de Moura, Raquel Silva. III.  
Título.

**GLACIANE LOPES TEIXEIRA**

**AVALIAÇÃO DAS CURVAS DE CRESCIMENTO DE EQUINOS DA  
RAÇA CAMPOLINA UTILIZANDO MODELOS NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 27 de Fevereiro de 2020.

Prof. DSc. Joel Augusto Muniz UFLA  
Prof. DSc. Raquel Moreira Pires dos Santos Melo UFSJ

Prof. DSc. Tales Jesus Fernandes  
Orientador

Prof. DSc. Raquel Silva de Moura  
Co-Orientadora

**LAVRAS – MG  
2020**

*Dedico este trabalho aos meus pais que sempre me apoiaram, aos meus amigos presentes em todos os momentos da minha vida e, aos professores que contribuíram muito com seus ensinamentos. Muito Obrigada.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse ao longo da minha vida e, não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer. À UFLA pelo ambiente criativo e amigável que proporciona, a secretaria e ao programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária. Em especial agradeço ao Tales, pela orientação, apoio, paciência e confiança. Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra mestre nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos. Aos meus pais, Lenimar e Glaucio, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001". A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

## RESUMO

A raça equina Campolina possui traços curvilíneos e uma estrutura óssea muscular bem articulada, se destacando em ambientes esportivos como enduro, tração e lazer. O estudo de curvas de crescimento animal baseados em modelos não lineares tem sido frequentemente utilizado como método para análise do desenvolvimento de diversas espécies, no entanto, não há relatos de estudo sobre modelagem da curva de crescimento nesta raça. Neste trabalho, objetivou-se avaliar o ajuste dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody para as variáveis altura de cernelha e peso vivo para machos e fêmeas em dados obtidos pelo método transversal. Foram estudadas também as derivadas de ordem superior destes modelos de crescimento almejando identificar pontos relevantes da curva de crescimento como PAM, PI, PDM e PDA. Os dados experimentais foram obtidos de uma exposição agropecuária em Belo Horizonte/ MG, no ano de 2012. Foram mensurados 356 animais no total, sendo 114 machos e 242 fêmeas da raça Campolina, os quais foram divididos em 16 classes de idade (7 a 203 meses) e sexo. Os modelos foram comparados pelos seguintes critérios quanto à qualidade de ajuste:  $R^2$ ,  $AIC_C$  e MAPE. Todos os ajustes, intervalos e gráficos feitos foram analisados pelo software estatístico R. O método transversal de obtenção de dados pode ser aplicado no estudo de curvas de crescimento, em peso vivo e altura de cernelha para a raça Campolina. O modelo Gompertz foi escolhido como a melhor representante para a curva de crescimento animal em ambos os sexos, por apresentar melhores avaliadores de qualidade e captação de mais pontos influentes de suas derivadas de 1ª a 4ª ordem. O valor da altura de cernelha adulta foi estimada em torno de 160 cm em ambos os sexos e para a variável peso vivo, 530 kg para fêmeas e 494 kg para machos. O índice de maturidade dos machos foi maior que o das fêmeas, sugerindo que o crescimento de machos é mais acelerado para altura de cernelha. O desenvolvimento em altura é mais acelerado do que em peso sendo que alguns pontos importantes do crescimento ocorrem ainda na fase pré-natal.

**Palavras-chave:** Altura de cernelha. Derivadas de modelos não lineares. Método transversal. Peso vivo. Pontos influentes.

## ABSTRACT

The Campolina horse breed has curvilinear features and a well-articulated muscular bone structure, standing out in sports environments such as enduro, traction and leisure. The study of animal growth curves based on non-linear models has often been used as a method for analyzing the development of several species, however, there are no reports of a study on modeling the growth curve in this breed. In this work, the objective was to evaluate the fit of the Logistical, Gompertz, von Bertalanffy and Brody models for the withers height and live weight variables for males and females in data obtained by the transversal method. Higher order derivatives of these growth models were also studied, aiming to identify relevant points of the growth curve such as MAP, IP, MDP and ADP. The experimental data were obtained from an agricultural exhibition in Belo Horizonte / MG, in 2012. A total of 356 animals were measured, 114 males and 242 females of the Campolina breed, which were divided into 16 age classes (7 to 203 months) and sex. The models were compared according to the following criteria for quality of fit:  $R^2$ ,  $AIC_C$  and MAPE. All adjustments, intervals and graphs made were analyzed by the statistical software R. The transversal method of obtaining data can be applied in the study of growth curves, in live weight and withers height for the Campolina breed. The Gompertz model was chosen as the best representative for the animal growth curve in both sexes, as it presents better quality evaluators and captures more influential points from its 1st to 4th order derivatives. The adult withers height value was estimated to be around 160 cm in both sexes and for the variable live weight, 530 kg for females and 494 kg for males. The maturity index of males was higher than that of females, suggesting that the growth of males is more accelerated for withers height. Development in height is more accelerated than in weight, with some important points of growth still occurring in the prenatal phase.

**Keywords:** Cross-sectional method. Influential points. Live weight. Nonlinear models derivative. Withers height.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diferenças na taxa percentual de crescimento de tecidos de acordo com sua prioridade no organismo animal. . . . .	25
Figura 2.2 – Curva de crescimento animal, em formato sigmoideal, desde a concepção à maturidade. . . . .	27
Figura 2.3 – Pontos relevantes em uma curva de crescimento obtidos pelas derivadas de um modelo não linear. . . . .	35
Figura 2.4 – Derivadas de 1ª a 4ª ordem de um modelo não linear e sua curva de crescimento. . . . .	36
Figura 4.1 – Boxplot das variáveis altura de cernelha (cm) e peso vivo (kg) para os equinos machos e fêmeas da raça Campolina. . . . .	51
Figura 4.2 – Curva de crescimento da variável peso vivo de fêmeas e machos da raça Campolina descrita pelo modelo Gompertz com um intervalo de confiança de 95%. . . . .	55
Figura 4.3 – Curva de crescimento da variável altura de cernelha de fêmeas e machos da raça Campolina descrita pelo modelo Gompertz com um intervalo de confiança de 95%. . . . .	59
Figura 4.4 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento do peso vivo de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Logístico. . . . .	71
Figura 4.5 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento do peso vivo de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Gompertz. . . . .	72
Figura 4.6 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento do peso vivo de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear von Bertalanffy. . . . .	73

Figura 4.7 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento do peso vivo de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Brody. . . . .	74
Figura 4.8 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Logístico. . . . .	75
Figura 4.9 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Gompertz. . . . .	76
Figura 4.10 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de machos da raça Campolina para o modelo não linear Gompertz. . . . .	77
Figura 4.11 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear von Bertalanffy. . . . .	78
Figura 4.12 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Brody. . . . .	79

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Médias e variâncias calculadas em cada classe de idade (meses) em ambos os sexos para a variável peso vivo (kg). . . . .	47
Tabela 3.2 – Médias e variâncias calculadas em cada classe de idade (meses) em ambos os sexos para a variável altura de cernelha (cm). . . . .	48
Tabela 4.1 – Análise de resíduos dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody para a variável peso vivo (kg) de fêmeas e machos da raça Campolina. . . . .	52
Tabela 4.2 – Estimativas para os parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody para a variável peso vivo (kg) de fêmeas e machos da raça Campolina. . . . .	53
Tabela 4.3 – Análise de resíduos dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e brody para a variável altura de cernelha (cm) de fêmeas e machos da raça Campolina. . . . .	57
Tabela 4.4 – Estimativas para os parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody para a variável altura de cernelha (cm) de fêmeas e machos da raça Campolina. . . . .	57
Tabela 4.5 – Intervalos de confiança (95%) para as variáveis altura de cernelha e peso vivo de machos e fêmeas da raça Campolina utilizando o modelo Gompertz. . . . .	60
Tabela 4.6 – Estimativas dos pontos influentes (em meses) dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para a variável altura de cernelha (cm) e peso vivo, para ambos os sexos, da raça Campolina. . . . .	69

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	19
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	23
<b>2.1</b>	<b>História da raça Campolina</b>	23
<b>2.2</b>	<b>Crescimento de equinos</b>	24
<b>2.3</b>	<b>Modelos de regressão não linear</b>	30
<b>2.3.1</b>	<b>Modelo Logístico</b>	31
<b>2.3.2</b>	<b>Modelo Brody</b>	32
<b>2.3.3</b>	<b>Modelo Gompertz</b>	33
<b>2.3.4</b>	<b>Modelo von Bertalanffy</b>	34
<b>2.4</b>	<b>Derivadas de ordens superiores em curvas de crescimento</b>	34
<b>2.5</b>	<b>Estimação dos parâmetros</b>	37
<b>2.6</b>	<b>Métodos iterativos</b>	40
<b>2.7</b>	<b>Análise de resíduos</b>	42
<b>2.7.1</b>	<b>Teste de Shapiro-Wilk</b>	42
<b>2.7.2</b>	<b>Teste de Durbin-Watson</b>	42
<b>2.7.3</b>	<b>Teste de Breusch-Pagan</b>	43
<b>2.8</b>	<b>Avaliadores de qualidade</b>	44
<b>2.8.1</b>	<b>Coefficiente de determinação</b>	44
<b>2.8.2</b>	<b>Critério de Informação de Akaike Corrigido</b>	45
<b>2.8.3</b>	<b>Média Percentual Absoluta do Erro</b>	45
<b>3</b>	<b>MATERIAL E MÉTODOS</b>	47
<b>3.1</b>	<b>Material</b>	47
<b>3.2</b>	<b>Metodologia</b>	48
<b>3.3</b>	<b>Recursos computacionais</b>	50
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	51
<b>4.1</b>	<b>Peso vivo</b>	52
<b>4.2</b>	<b>Altura de cernelha</b>	56

<b>4.3</b>	<b>Derivadas da curva de crescimento . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>4.3.1</b>	<b>Derivadas modelo Brody . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>4.3.2</b>	<b>Derivadas modelo Gompertz . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>4.3.3</b>	<b>Derivadas modelo Logístico . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>4.3.4</b>	<b>Derivadas modelo von Bertalanffy . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>83</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Surgiu em 1870 no Brasil, Estado de Minas Gerais, cidade de Entre Rios de Minas, a raça equina Campolina. Resultante de cruzamentos realizados durante cerca de três décadas com o intuito de obter características específicas por seu criador, Cassiano Campolina, o porte nobre, as formas harmoniosas, os traços curvilíneos e uma estrutura óssea muscular favorável, são algumas das características que colocam o campolina na sexta posição em número de exemplares do ranking nacional equino. Concentrado principalmente nas regiões Nordeste e Sudeste do país, o campolina se destaca no mercado equino nacional em atividades funcionais de esporte e serviço como enduros, marchas e exposições, mas por ser resistente, dócil, possuir andamento macio e confortável, também se torna atraente para o lazer (LUCENA *et al.*, 2016).

O Campolina é um cavalo de sela, trabalho de tração leve e marcha. Sua musculatura é bem desenvolvida, seus membros são longos, oblíquos e bem articulados. A raça se destaca nas cavalgadas por sua imponência, força e resistência. A raça equina Campolina no início do século XXI conquistou atenção, tanto por sua beleza, quanto por seu porte avantajado e comodidade de andamento, ganhando destaque no mercado nacional. Seu Estado berço, Minas Gerais, detém cerca de 40% do plantel brasileiro (BORGES *et al.*, 2010).

A utilização de índices que destaquem as relações entre as medidas de comprimento corporal, de perímetro torácico e de peso vivo (PV) no processo de seleção dos equinos ainda é pouco praticada no Brasil. Ademais, poucas pesquisas avaliando medidas lineares e índices morfométricos foram feitas até o momento com a raça Campolina. Esses estudos proporcionam relevantes informações técnico científicas com base nas quais a Associação Brasileira de Criadores de Cavalo Campolina (ABCCCampolina) pode direcionar suas estratégias para melhoramento genético da raça (LUCENA *et al.*, 2015).

A altura de cernelha (AC), entre todas as medidas lineares, é uma das mais utilizadas, por mostrar menores variações decorrentes do instrumento de mensuração ou dos erros cometidos pelo mensurador (CABRAL *et al.* 2004; RIBEIRO *et al.*, 2018). Segundo Hintz (2005), o peso vivo pode ser afetado por várias características relacionadas ao próprio animal como: sexo, idade, estado gestacional, escore corporal e raça, ou não ligadas a ele, como: a disponibilidade de alimentos, estado sanitário, condições ambientais e de bem estar. Estima-se que no primeiro ano de vida, segundo estudo feito por Cabral (2004) com equinos da raça Mangalarga Marchador (MM), o potro possui cerca de 60% a 70% da altura de cernelha adulta e 95% dela até aos 24 meses de idade.

A modelagem de crescimento de bovinos está mais evoluída do que de equinos, principalmente pela dificuldade, em alguns casos, da posse de dados do peso animal. Definir o peso é extremamente importante para a saúde e influência em todas as vertentes da vida do animal; porém nem todo haras é viável ou possui uma balança para aferição do peso. Nesse sentido, trabalhos tem sido desenvolvidos com o intuito de avaliar métodos alternativos de obtenção do PV (SOUZA *et al.*, 2017 b). Particularmente na raça Campolina, raros trabalhos foram analisados com esta finalidade, mas são de grande utilidade e essenciais para profissionais da área.

No primeiro estudo morfométrico sobre a raça Campolina, Fontes (1957) observou correlações positivas e significativas entre AC e comprimento do corpo equino para machos acima de 5 anos. As elevadas correlações fenotípicas entre as medidas lineares da raça MM indicaram que existe alta correlação entre as características de conformação equinas, sendo a AC a mais positivamente correlacionada com o PV (CABRAL *et al.*, 2004).

Nos estudos envolvendo o crescimento e desenvolvimento de diversas espécies animais, os modelos não lineares têm se mostrado adequados por apresentarem bons ajustes e fornecerem estimativas de parâmetros com interpretação

biológica (CARNEIRO *et al.*, 2014; VELOSO *et al.*, 2016). Assim, a descrição da curva de crescimento em altura e peso dos cavalos Campolina em condições naturais poderá fornecer valores para serem usados como referência na comparação de práticas de manejo ou na descrição da taxa de crescimento equino.

De acordo com Santos *et al.* (2007) acompanhar o crescimento de equinos é de grande importância para o manejo adequado dos mesmos. Desta forma, a obtenção de pontos de aceleração máxima (PAM) e desaceleração máxima (PDM) da curva analisada, assim como ponto de desaceleração assintótica (PDA) e ponto de inflexão (PI), podem auxiliar nesta conduta. Geralmente, estes pontos são obtidos de maneira aproximada através de observações gráficas, tendo como exemplo em Souza *et al.* (2017a). No entanto, estes pontos influentes da curva de crescimento podem ser determinados de maneira exata por meio do estudo de derivadas de ordem superior (3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>).

Assim, o objetivo deste trabalho foi selecionar dentre os modelos não lineares Gompertz, Logístico, Brody e von Bertalanffy, o mais adequado para descrição da curva de crescimento equino, em peso vivo e altura de cernelha da raça Campolina, bem como explorar derivadas de primeiro à quarto grau destes modelos, adquirindo informações relevantes que contribuem com o desenvolvimento desta raça.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 História da raça Campolina

A criação da raça campolina teve início no final do século XIX no Estado de Minas Gerais por Cassiano Campolina (1836-1904). Cassiano tinha como principal objetivo formar cavalos de grande porte, ágeis, resistentes e de boa aparência (ABCCCAMPOLINA, 1995). Em sua formação, a raça Campolina foi aperfeiçoada por cruzamentos de outras raças como Andaluza, Anglo-Normanda, Puro Sangue Inglês, Clydesdale, Oldemburguesa, Holstein, American Saddle Horse e Mangalarga (FONTES, 1957). Quanto a sua origem, a raça Campolina é estreitamente relacionada com as demais raças brasileiras, principalmente a MM, Pantaneiro e Crioulo Brasileiro (COTHRAN *et al.*, 1998).

A expansão da raça Campolina se fez pelo surgimento de linhagens. Na cidade de Entre Rios de Minas - MG, destacou-se o garanhão Gas Rex, de importante influência na fixação de características para a raça (FONTES, 1957). Outro núcleo com grande participação na formação da raça foi o criatório Angelim, situado na Fazenda Serra do Paraíso, Poryraguá, sul da Bahia. A raça é resultante de acasalamentos entre animais das linhagens Gas e Passa Tempo, principalmente nas décadas de 70 e 80, quando estas apresentavam características bem definidas (ANDRADE *et al.*, 2006).

Em 1951 foi fundada a ABCCCampolina, em Belo Horizonte, MG, onde foi elaborado um padrão para registros genealógicos para os animais da raça. Segundo as determinações do padrão da raça Campolina, o equino está enquadrado no tipo sela, e o adulto da raça deve ser mediolíneo (proporções equilibradas entre os diâmetros) e eumétrico (dimensões médias de massa corpórea). A AC ideal é de 162 cm para os machos, e PV de 550 kg a 600 kg, e 156 cm de AC para as fêmeas, com PV de 350 kg a 450 kg, evidenciando porte alto para o animal (LUCENA *et al.*, 2016).

Depois do aperfeiçoamento da raça, as características atuais observadas em cavalos Campolina são movimentos harmoniosos com montaria nobre e confortável, suporte de longas caminhadas e de fácil adestramento. É um excelente animal para o lazer, reunindo a prática esportivas como o enduro equestre, assim como o conforto da marcha ao porte robusto para passeios e hipismo rural. Mesmo que a raça seja encontrada com pelagens alazã, castanha, preta, tordilha e pampa, a baía é a mais predominante (BERBARI NETO, 2005).

## 2.2 Crescimento de equinos

Os equinos são utilizados nas mais diversas atividades, como lazer, esporte e competição. Independentemente da atividade praticada pelo animal, o objetivo é sempre produzir e desenvolver animais fortes, precoces e versáteis. Porém, diferentemente de outras criações animais, como exemplo os bovinos, não se procura o crescimento máximo para abate, e sim um crescimento ideal de desenvolvimento para sua precocidade em eventos de interesse.

A criação de um potro visa produzir um animal muito bem desenvolvido sob os planos ósseos e musculares, sem acumulação supérflua de gorduras de reserva. Para se obter uma boa evolução equina, uma qualidade de regime alimentar é essencial, caso contrário, toda carência ou desequilíbrio da norma acarreta um atraso ou mesmo um golpe irreversível no desenvolvimento animal (SOUZA *et al.*, 2010).

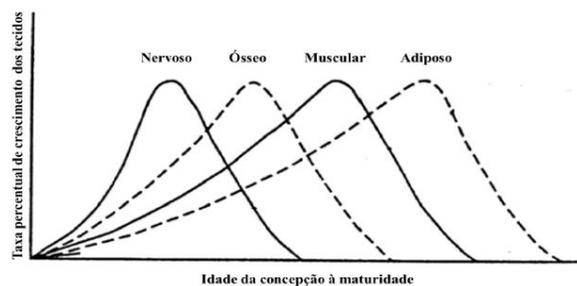
Mudanças corporais devido ao crescimento dos animais ao longo do tempo respeitam o princípio da homeostase, ou seja, para o animal sobreviver é necessário que suas células estejam protegidas contra variações de temperatura, pressão, nutrição, dentre outros, onde isto só é adquirido por modificação nas estratégias de crescimento, afim de se estabelecer um equilíbrio fisiológico (LAWRENCE; FOWLER, 2002).

A base do crescimento animal a nível celular se dá por meio da síntese protéica, então o processo do crescimento ocorre principalmente por divisão celulares, ou seja, mitoses, onde ocorre replicação dos cromossomos. As células musculares e nervosas depois de formadas não replicam, situam-se na fase estática e só mudam de tamanho e forma durante a vida do animal. É a partir do crescimento celular que se tem o crescimento dos tecidos, pois estes são formados pelas células (SOUZA, 2017a).

O crescimento dos tecidos ocorre pelos processos de hiperplasia, que é o aumento do número de células, e hipertrofia, aumento no diâmetro das células. Vale ressaltar que no organismo animal há uma prioridade no crescimento dos tecidos de acordo com sua importância no desenvolvimento, onde primeiramente cresce o tecido nervoso, depois ósseo, muscular e por último o adiposo (Figura 2.1) (OWENS; DUBESKI; HANSONT, 1993).

Além disso, o ciclo de crescimento de cada órgão e tecido não ocorre de forma sincronizada, onde normalmente a forma dos animais e proporções dos tecidos que o constituem alteram-se de acordo com as necessidades fisiológicas dos mesmos (LAWRENCE; FOWLER, 2002; SOUZA, 2017a).

Figura 2.1 – Diferenças na taxa percentual de crescimento de tecidos de acordo com sua prioridade no organismo animal.



Fonte: Adaptado de Hecht (1916) e Pállson (1952), citado por Lawrence e Fowler (2002) e Souza (2017a).

A maioria das células animais perde a capacidade de diferenciação a partir dos estágios iniciais da vida. Dependendo do tecido do animal, como por exemplo, o muscular esquelético, o número de células é determinado somente nos terços iniciais da fase fetal (Hiperplasia),(SOUZA, 2017a).

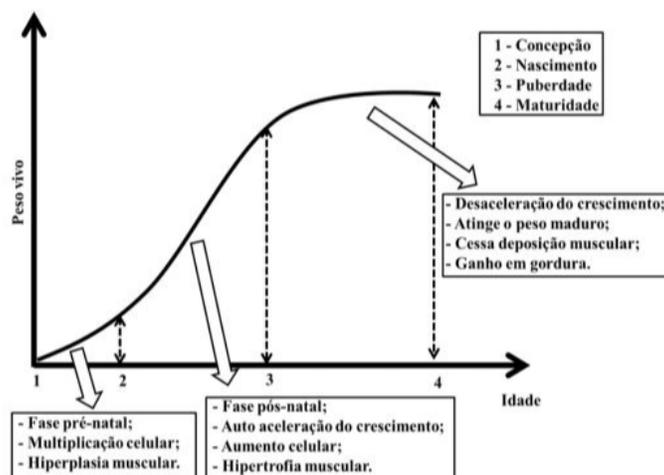
Na fase pré-natal ocorre também o desenvolvimento do esqueleto e de órgãos. Já após o nascimento há uma aceleração do crescimento e aumento na deposição de tecidos até a puberdade. É a partir da puberdade, por volta de dois anos e meio a 3 anos de vida, que a deposição muscular cessa e ocorre deposição em gordura, há uma desaceleração do crescimento e os animais atingem o peso e tamanho maduro (FREITAS, 2005).

Os animais tem um padrão de crescimento pré determinado geneticamente, mas o crescimento real dos mesmos envolve além de fatores genéticos, também os fatores ambientais. Deste modo, os animais tendem a crescer até um tamanho máximo de acordo com sua raça (RIBEIRO, 2018).

Muitos são os fatores que podem interferir no crescimento pré e pós-natal dos animais como: nutrição e alimentação, condições ambientais estressantes, idade da mãe, raça, sexo, clima, ano de nascimento, localização geográfica, treinamento e outros. Dentre estes citados, a nutrição é a que desempenha o papel mais importante no sucesso em todos os estágios da vida animal, pois influencia o desenvolvimento placentário e conseqüentemente o crescimento fetal e pós-natal, destacando-se principalmente a nutrição materna (PIMENTEL *et al.*, 2017).

Segundo Lawrence e Fowler (2002), para que o animal cresça, este precisa de nutrientes, de modo que, o desenvolvimento animal é o progressivo aumento de nutrientes e seus metabólitos, que começa na concepção e continua sempre que a ingestão de nutrientes excede as necessidades para manutenção, este conceito também é denominado de crescimento positivo, lembrando que a ingestão de energia em excesso é uma das principais causas da obesidade animal.

Figura 2.2 – Curva de crescimento animal, em formato sigmoidal, desde a concepção à maturidade.



Fonte: Adaptado de Owens, Dubeski e Hansont (1993) e Souza *et al.*, 2017a.

Ao nascer, o potro já apresenta um crescimento linear apreciável, onde possui cerca de 60-70% da altura de cernelha de um animal adulto, alcançando 88% aos 12 meses, 95% de seu crescimento máximo aos 24 meses e 100% aos 60 meses, em média, em sua AC (CABRAL, 2004).

O Sistema Eclético de Proporções Lineares, proposto por Lesbre (1920) e citado por Souza *et al.*, (2017b) tem sido utilizado há várias décadas no estudo das proporções de cavalos de sela. Este estudo baseia-se nas relações existentes entre as diversas regiões do corpo e o conjunto formado por elas. Essa relação é apresentada da seguinte forma: a AC e garupa, e o comprimento do corpo equivalem a duas vezes e meia ao comprimento da cabeça, assim como o comprimento do pescoço e das espáduas apresentam o mesmo valor do comprimento da cabeça.

O animal é considerado bem-proporcionado se as partes do corpo, observadas em conjunto, são adaptadas à função atribuída. Tais variações possuem certa influência do sexo e idade, sendo fundamental um estudo de cada variável para a avaliação dessa influência ao decorrer do tempo.

O PV é uma característica fundamental no manejo diário dos haras, sendo aplicável em diversas situações ligadas aos manejos sanitários e nutricionais de equinos, como: determinação da quantidade de alimento a ser fornecido aos animais; avaliação de programas nutricionais; indicação precoce de problemas de saúde; informação auxiliar no treinamento para competições equestres, melhoria da eficiência reprodutiva e determinação da quantidade de medicamentos a ser administradas aos animais, pois as doses clínicas para cada medicamento foram estabelecidas com referências do peso corporal de cada espécie animal (LEWIS, 2000).

A forma mais precisa de se obter o PV é através de pesagem em balança animal, mas muitas vezes o seu alto custo de implantação limita sua disponibilidade para uso na maioria dos criatórios brasileiros. Contudo, existem métodos alternativos para estimativa de PV disponíveis no mercado e na literatura. Um estudo feito por Souza *et al.* (2017c) analisou métodos de estimação do PV, como fitas para peso, tabelas e fórmulas matemáticas com o intuito de apresentar metodologias práticas, baratas e mais adequadas do que o simples exame visual do animal.

Em pesquisas feitas por Garcia *et al.* (2011) com equinos da raça Puro Sangue Inglês, encontraram nos animais 10% do peso adulto ao nascimento, 45% aos 6 meses, 65% aos 12 meses e 79% aos 18 meses. Já Rezende *et al.* (1986) encontraram valores de 9,7% do peso adulto ao nascimento, 33,4% aos 6 meses, 62% para machos e 71% para fêmeas aos 12 meses de idade em animais da raça MM. Assim, vários estudos tem sido conduzidos por alguns pesquisadores, como Santos *et al.* (2007), Fradinho *et al.* (2015), Souza *et al.* (2017b), dentre outros, buscando explicar o crescimento desta variável em outras raças equinas.

A taxa de crescimento ósseo e muscular equino adequada ainda é muito debatida, pois alguns cavalos podem apresentar desenvolvimento mais lento do que outros, de modo que a relação de ambos os sistemas seja coordenada. Muitos

problemas relacionados ao desenvolvimento podem ser prevenidos quando se dispõe do conhecimento da curva de crescimento da raça e suas variações (SOUZA *et al.*, 2017b, RIBEIRO *et al.*, 2018).

Alguns padrões de conformação, como medidas morfométricas de AC, altura na garupa, comprimento do corpo, comprimento da cabeça, perímetro torácico e perímetro da canela, podem sugerir certo grau de desenvolvimento do equino, no entanto, ainda se requer dados atuais sobre curvas de crescimento da raça Campolina, principalmente que estejam de acordo com a realidade totalmente diversa de cada região do Brasil. Esta diversidade regional pode ser um dos fatores determinantes ao crescimento destes animais, juntamente com o tipo de seleção, manejo e alimentação, sendo esta última ainda mais importante quando ocorre no primeiro ano de vida equina (BARCELOS *et al.*, 2016).

A AC se torna uma das medidas mais importantes neste caso, devido a necessidade de registro do profissional da área na Associação da raça, pois diferentemente de outros animais, cujo o PV é a medida principal por sua finalidade ser o abate, para equinos o objetivo é justamente o contrário, se estuda a precocidade de crescimento do animal para eventos de interesse como esporte e reprodução.

Segundo Ribeiro *et al.* (2018) em um estudo sobre a curva de crescimento em AC com a raça MM, observaram um crescimento muito acelerado nos primeiros 24 meses de idade em ambos os sexos. Os machos adultos apresentaram AC maior que as fêmeas, no entanto elas são mais precoces, pois apresentaram maior estimativa para o índice de maturidade. Estudos sobre este tema e curvas de crescimento da raça Campolina ainda são escassos no meio científico, se fazendo necessário estudar esta variável também muito correlacionada com o PV equino.

Deficiências na elaboração de planos nutricionais, como sub ou supernutrição de potros, falta de fornecimento de sal mineral próprio para equinos, desmame precoce, permanência de animais jovens por longo período de tempo estabulados, além de outros erros de manejo podem trazer danos ao padrão de

crescimento dos animais, o que leva a prejuízos irreparáveis ao desenvolvimento, gerando principalmente problemas articulares severos e desvios ósseos (deformidades flexurais e angulares) (CINTRA, 2013; FLETCHER *et al.*, 2000; MARTIN-ROSSET, 2005). Ter conhecimento da curva de crescimento animal, auxilia no direcionamento de melhorias destes fatores que interferem nas fases pré e pós natal.

### 2.3 Modelos de regressão não linear

Muitos problemas relacionados ao desenvolvimento equino podem ser prevenidos quando dispomos do conhecimento da curva de crescimento da raça e suas variações. Tais curvas representam os esforços integrados de inúmeros mecanismos biológicos da espécie, avaliados através do aumento no tamanho corporal no decorrer do tempo. Uma das formas de sintetizar as informações contidas numa série de dados em poucos parâmetros biologicamente interpretáveis é o uso de modelos não lineares (SOUZA *et al.*, 2017b).

O termo curva de crescimento usualmente evoca a imagem de curvas sigmóides que representam o tempo de vida de medidas de dimensão, geralmente de altura e peso. Segundo Seber e Wild (2003), na modelagem de dados de desenvolvimento animal, deseja-se obter informações sobre a interpretação física dos parâmetros, a fim de construir um modelo padrão para as observações em estudo.

Uma importante diferença do modelo de regressão não linear é que o número de parâmetros regressores  $p$  não é, necessariamente, diretamente relacionado ao número de variáveis explicativas no modelo (KUTNER *et al.*, 2005). A principal característica desse modelo é que a parte fixa,  $f(X, \theta)$ , em geral, decorre de um processo determinístico deduzido a partir de suposições teóricas (quase sempre equações diferenciais), sendo os parâmetros resultantes interpretáveis e a parte aleatória definida de erros homogêneos (CORDEIRO, PRUDENTE e DEMETRIO, 2009).

Algumas funções não lineares podem se tornar lineares através de uma transformação utilizando operadores funcionais, sendo o logaritmo um exemplo bastante comum. Porém quando estes modelos são ajustados pelos dados e utilizam algum tipo de transformação em suas variáveis, ou seja, aproximá-los para os modelos lineares, mesmo que sejam alcançados ajustes satisfatórios, prejudica-se bastante a obtenção de estimativas mais realistas dos parâmetros de interesse e, principalmente, dificulta a interpretação destes mesmos parâmetros. Logo, a transformação deve ser utilizada somente como último recurso por consequentemente também apresentarem dificuldades na especificação adequada dos erros associados ao modelo (DRAPER, SMITH, 1998).

A forma clássica de um modelo de regressão não linear é:

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon};$$

em que,  $\mathbf{Y}$  é o vetor com a variável resposta (variável dependente);  $\mathbf{X}$  é o vetor de uma ou mais variáveis independentes;  $\boldsymbol{\theta}$  é o vetor de parâmetros;  $f(\cdot)$  é a função (ou relação) matemática característica do modelo em estudo e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  o vetor de erros associado ao modelo.

A curva de crescimento da função não linear é representada por uma curva sigmoide, conhecida pelo formato de "s". A fase inicial, indica um desenvolvimento lento, depois passa por uma fase acelerada até começar a desacelerar, diminuindo o ritmo com o tempo, até estabilizar. Alguns modelos estão sendo frequentemente utilizados com esta finalidade para observação de fenômenos biológicos em curva de crescimento, com a maioria deles obtendo grande sucesso de ajuste.

### 2.3.1 Modelo Logístico

Este modelo foi inicialmente proposto por Verhulst em 1838 para descrever o crescimento de populações humanas (BACAËR, 2011). Diferentes para-

metrizações são usadas por autores para descreverem curvas de crescimento utilizando modelos não lineares. Segundo Fernandes *et al.* (2015) uma forma de apresentar o modelo que obteve o melhor desempenho, principalmente para interpretações práticas de todos os parâmetros, foi:

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{k(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i$$

em que,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $Y_i$  é a  $i$ -ésima observação da variável dependente,  $x_i$  é a  $i$ -ésima observação da variável independente;  $\alpha$  é o valor esperado (assintótico) para o tamanho adulto da característica em estudo, quando  $x_i \rightarrow \infty$ ;  $\beta$  é a abscissa do PI, ou seja, a partir dele o crescimento é desacelerado;  $k$  é um índice de maturidade, está associado ao crescimento, quanto maior for seu valor, menor tempo será necessário para a característica em estudo atingir o valor assintótico ( $\alpha$ );  $\varepsilon_i$  é o erro aleatório associado à  $i$ -ésima observação o qual se pressupõe que seja independente e identicamente distribuído seguindo uma distribuição Normal com média zero e variância constante, ou seja,  $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$  (MUNIZ *et al.*, 2017).

No modelo Logístico, o parâmetro  $\alpha$  é considerado uma assíntota horizontal, podendo assumir valores de  $y=0$  à  $y = \alpha$ . Uma característica da função, é que seu PI ocorre no ponto  $x = \beta$  e  $y = \frac{\alpha}{2}$ , indicando a simetria da curva, pois este ponto se dá exatamente na metade do valor assintótico ( $\alpha$ ). O parâmetro  $k$ , sendo  $k = \frac{4}{\alpha} y'_{pi}$ , em que  $y'$  é a primeira derivada da função, dará a forma da curva do gráfico da equação, em que para valores  $\alpha > 0$  e  $k > 0$ , quanto maior o valor deste último, maior será a inclinação da reta tangente no PI (MISCHAN; PINHO, 2014).

### 2.3.2 Modelo Brody

Proposto em 1945 por Brody, este modelo é geralmente usado para descrever o crescimento de organismos com taxas de crescimento decrescentes desde o início até a sua fase final, onde há uma estabilidade do crescimento (MISCHAN;

PINHO, 2014). O modelo descreve curvas de crescimento que não apresentam o padrão sigmoidal, pois não possui PI.

$$Y_i = \alpha[1 - \beta e^{-(kx_i)}] + \varepsilon_i$$

Diferentemente do modelo logístico, esta função possui apenas uma assíntota horizontal,  $y = \alpha$ , em que  $\alpha > 0 : (-\infty; \alpha)$  e  $\alpha < 0 : (\alpha; \infty)$ . A função também não apresenta valores de mínimo e máximo. A interpretação de seus parâmetros se assemelham com a do modelo Logístico, com exceção do parâmetro  $\beta$  que não possui interpretação neste caso, uma vez que o padrão de crescimento deste modelo já começa com a taxa de crescimento máxima, depois do PI.

### 2.3.3 Modelo Gompertz

Proposto por Gompertz, em 1825, com o objetivo de estudo das tábuas de vida, este modelo foi muito usado em ciências atuariais. Deste momento em diante o uso do modelo para biologia e economia se tornou constante (SEBER, WILD, 2003).

O modelo apresenta um crescimento inicial exponencial, e a seguir, assintótico. A função apresenta domínio de toda a reta real. Muito semelhante ao modelo logístico, também possui duas assíntotas horizontais. A interpretação dos parâmetros é a mesma definida para o modelo Logístico, inclusive a assíntota horizontal, a qual continua sendo a reta  $y = \alpha$ .

$$Y_i = \alpha e^{-e^{k(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i$$

A principal diferença em relação ao modelo Logístico é que o  $PI = (\beta; \frac{\alpha}{e})$ , não ocorre na metade da curva, sendo  $e$  a base dos logaritmos neperianos.

No caso do parâmetro  $k = \frac{e}{\alpha} y'_{pi}$ , em que  $y'$  é a primeira derivada, com  $\alpha$  fixo, o parâmetro é proporcional à inclinação da reta tangente à curva no seu PI. Se

pode dizer neste caso que o parâmetro  $k$  é inversamente proporcional à localização do PI.

### 2.3.4 Modelo von Bertalanffy

Segundo Brito *et al.* (2007), Richards foi o primeiro a utilizar o modelo von Bertalanffy proposto por von Bertalanffy em 1957, na área de Ciências Florestais. Sua utilidade além de curvas de crescimento populacional de peixes e de crustáceos, se tornou útil também para modelagem de crescimento vegetal, devido ao formato sigmoidal não simétrico de sua curva de crescimento.

$$Y_i = \alpha \left( 1 - \frac{e^{k(\beta - x_i)}}{3} \right)^3 + \varepsilon_i$$

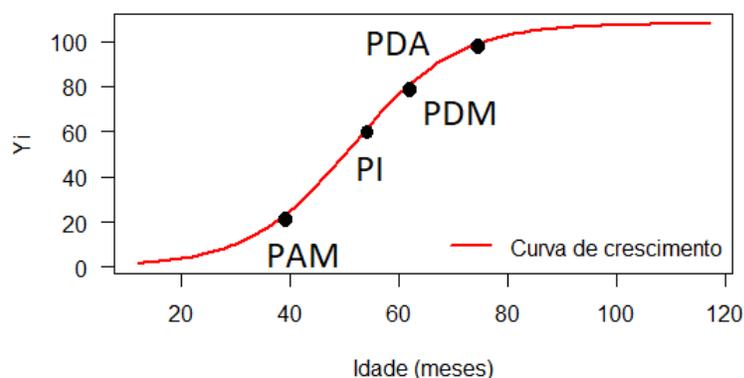
A interpretação dos parâmetros é a mesma dos modelos Gompertz e Logístico. Para o modelo von Bertalanffy, o contradomínio da função é o intervalo da reta real, mas quando se têm  $\alpha, \beta, k > 0$ , o intervalo se torna  $-\infty < y < \alpha$ , a reta  $y = \alpha$  é a assíntota horizontal. O PI estimado por este modelo é dado por  $PI = (\beta; \frac{8\alpha}{27})$ .

## 2.4 Derivadas de ordens superiores em curvas de crescimento

A análise dos dados sobre crescimento é importante em muitas áreas de pesquisa. O intuito dos estudos está no interesse da descrição do crescimento da variável em análise na tentativa de compreender seu desenvolvimento ao longo do tempo, assim como pontos de aceleração, estabilização, desaceleração e ponto de inflexão. O uso de derivadas de ordens superiores em relação a variável X se faz necessário para a estimação de pontos importantes que possuem interpretações práticas para diversas áreas. Estes pontos, podem ser identificados em uma curva de crescimento com padrão sigmoidal conforme pode ser observado na Figura 2.3,

sendo o eixo  $Y$  a porcentagem de crescimento e  $X$  a idade em meses da característica em estudo.

Figura 2.3 – Pontos relevantes em uma curva de crescimento obtidos pelas derivadas de um modelo não linear.

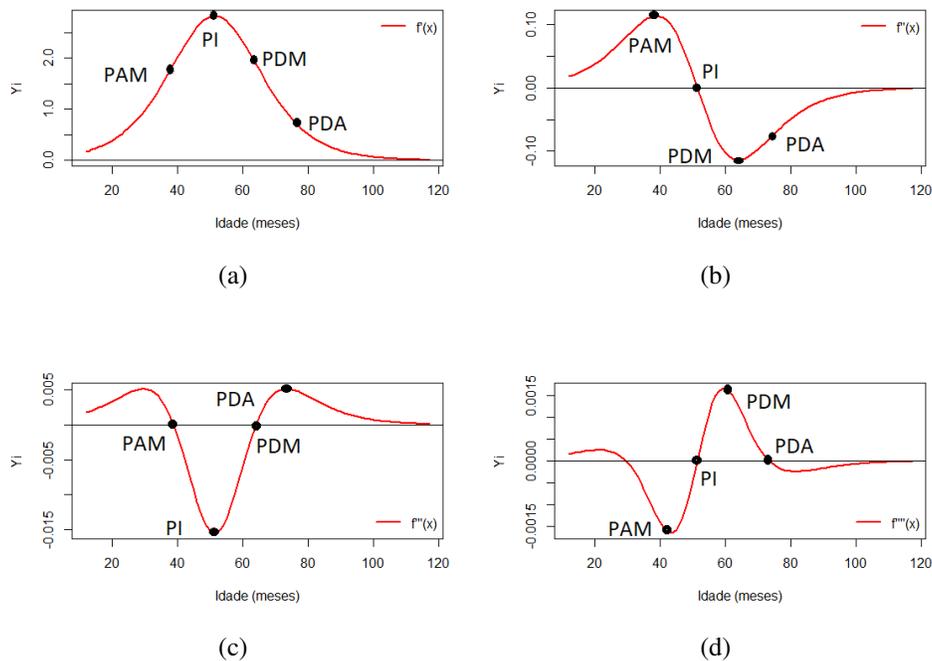


No aspecto sigmoide da curva, naturalmente ao passar de um crescimento lento para um mais acelerado identifica-se o ponto de aceleração máxima (PAM), a partir daí a característica em estudo atinge a maior taxa de crescimento (PI) e começa a desacelerar a ponto de atingir a desaceleração máxima (PDM) e, posteriormente chegar ao ponto de equilíbrio do desenvolvimento, onde o indivíduo atingiu a maturidade, chamado de ponto de desaceleração assintótica (PDA).

A Figura 2.4 (a) representa a taxa de crescimento em relação a variável  $X$  estudada, assim como a derivada de segunda ordem, Figura 2.4 (b), representa a aceleração do crescimento, sendo a mesma positiva até alcançar o PI e decrescente a partir deste ponto. A abscissa do PI é o valor que zera a segunda derivada, representada neste estudo pelo parâmetro  $\beta$ . Neste ponto, antes de atingir a inflexão, ocorre o PAM, Figura 2.4 (c), decrescendo em seguida até atingir o PI. Posteriormente, a curva se comporta com a aceleração decrescendo e atingindo o PDM. Segundo Mischan e Pinho (2014), as estimativas de PAM e PDM podem

ser encontradas calculando  $f(X, \theta)''' = 0$ , sendo  $f$  a relação matemática entre as variáveis,  $X$  a variável resposta e  $\theta$  o vetor de parâmetros do modelo.

Figura 2.4 – Derivadas de 1ª a 4ª ordem de um modelo não linear e sua curva de crescimento.



O ponto de estabilidade, um dos mais importantes da curva de crescimento, pode ser definido como o ponto na curva em que o crescimento já não é mais significativo se comparado aos demais, e por estar próximo à sua assíntota, é considerado como um ponto constante, Figura 2.4 (d).

De acordo com Mischan e Pinho (2014), ao calcular e igualar a zero a derivada de quarta ordem da função  $y$  ( $f(X, \theta)'''' = 0$ ), o PDA será encontrado. Este ponto é considerado um ponto de parada de crescimento, pois é visto como sendo o último ponto de inflexão da aceleração, estando a um passo de atingir sua estabilidade.

Um estudo sobre quando pode considerar o crescimento como praticamente constante, isto é, curva próxima a sua assíntota, Mischan *et al.* (2011), afirmou que o PDA tem a vantagem de ser um ponto matemático com importantes significados biológicos. O mesmo ponto, juntamente com PI pode ser usado, portanto, em discussões sobre curvas e ser utilizado como critério para determinar quando o crescimento atinge um valor suficiente próximo da assíntota.

No artigo de BEM *et al.* (2017), utilizando modelos não lineares para características produtivas do vegetal, destaca o uso de derivadas de graus superiores para obtenção de pontos relevantes e interpretáveis para a área biológica, sendo a ferramenta aplicada adequada também para outros estudos em que a finalidade seja a análise de curva de crescimento.

Sari *et al.* (2018), utilizando dados de várias colheitas e fazendo uso de derivadas de 1º e 2º grau, conseguiu interpretações reais que auxiliaram o profissional da área. Na prática, o agricultor pode reduzir o custo por unidade produzida no momento de ocorrência do PI. O PAM, neste caso, indicou a lentidão da produção inicial, além de ajudar a verificar o grau de maturação das plantas no início da colheita.

Destacando a importância das derivadas na curva de crescimento, se entende por fim que o ponto que anula a derivada de segunda ordem é o PI. Os pontos que anulam a derivada de terceira ordem são os pontos extremos da função aceleração, PAM e PDM. E os pontos que anulam a derivada de quarta ordem são os pontos de inflexão da aceleração; o último deles é o PDA.

## 2.5 Estimação dos parâmetros

Sob o ponto de vista da inferência estatística frequentista, para os modelos de regressão linear, os estimadores de mínimos quadrados, que consiste na minimização das somas de quadrados dos resíduos, apresentam ótimas propriedades, isto é, são não viesados, possuem distribuição Normal e variância mínima entre qual-

quer outra classe de estimadores. Essas propriedades são consideradas como as melhores que uma classe de estimadores pode apresentar (SEARLE, 1971). Para modelos não lineares, as propriedades somente são válidas assintoticamente, ou seja, tamanho da amostra suficientemente grande. Em geral, essas propriedades não são satisfeitas em pequenas amostras.

Para a aplicação do método de mínimos quadrados (MMQ) não é necessário nenhuma pressuposição. No entanto o método pode ser classificado de acordo com a sua estrutura de erros da seguinte forma, segundo Draper e Smith (1998):

i. Ordinários: são aqueles cuja estrutura dos erros não viola nenhuma das pressuposições como: erros independentes, igualmente e identicamente distribuídos (i.i.d.) com distribuição Normal de média zero e variância homogênea, ou seja,  $\varepsilon \sim N(0; I\sigma^2)$ . Esse método consiste na estimação dos parâmetros através da minimização da soma de quadrados dos resíduos (SQR).

ii. Ponderados: são erros cuja estrutura não atende a pressuposição de homocedasticidade, assim os erros são classificados como heterocedásticos,  $\varepsilon \sim N(0; D\sigma^2)$ , em que  $D$  é uma matriz diagonal, positiva definida, a qual elementos da diagonal principal são os pesos que ponderam a variância.

iii. Generalizados: são aqueles cuja estrutura de erros não atende a pressuposição de independência e/ou de homogeneidade de variâncias, logo os erros são correlacionados e possivelmente heterocedásticos,  $\varepsilon \sim N(0; W\sigma^2)$ , em que  $W$  é uma matriz simétrica, positiva definida, os elementos da diagonal principal são as ponderações das variâncias e, fora dela, a correlação dos erros.

Desta forma, a escolha do MMQ a ser utilizado depende da estrutura de erros do modelo de regressão analisado. Neste presente trabalho, será empregado a estrutura de erros ordinários e caso seja identificado algum desvio de pressuposição sobre o vetor de erros, este desvio será incorporado ao processo de estimação dos parâmetros sendo necessário o uso de Mínimos Quadrados Ponderados ou Generalizados.

A estimativa de  $\theta$  é o primeiro passo em uma análise de regressão, cujos valores de  $\mathbf{X}$  foram obtidos a partir de uma amostra de tamanho  $n$ . O objetivo é encontrar os valores dos parâmetros tal que a distância entre a curva (em função de  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ ) e os pontos observados seja a menor possível. Por exemplo, segue a expressão da função no caso de um modelo de regressão linear simples:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\theta + \varepsilon$$

sendo  $\theta$  o vetor dos parâmetros. O erro do modelo pode ser indicado pela diferença entre os valores observados e os estimados,  $\hat{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\theta$ . A ideia é obter os valores de  $\theta$  que minimizem esta expressão.

Para encontrar  $\hat{\theta}$ , é necessário derivar a função em relação aos parâmetros, igualando a zero em seguida. Assim é encontrada a equação denominada SEN (Sistema de Equações Normais):

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\theta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\hat{\theta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y})$$

Considerando o caso de modelos não lineares, a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = F(\mathbf{X}, \theta) + \varepsilon$$

em que:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; F(\mathbf{X}, \theta) = \begin{bmatrix} F(X_1, \theta) \\ F(X_2, \theta) \\ \vdots \\ F(X_n, \theta) \end{bmatrix}; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Seguindo o mesmo passo a passo que o caso linear, é necessário encontrar os valores de  $\hat{\theta}$  que minimizem os resíduos, ou seja, diferenças entre os valores observados e estimados.

$$SQR(\theta) = \varepsilon' \varepsilon = [Y - F(X, \theta)]' [Y - F(X, \theta)] = Y'Y - 2Y'F(X, \theta) + F(X, \theta)'F(X, \theta)$$

A minimização de  $SQR(\theta)$  é obtida derivando-se a mesma em relação a  $\theta$  e igualando-a a zero.

$$\frac{\partial SQR(\theta)}{\partial(\theta)} = -2Y' \times \frac{\partial F(X, \theta)}{\partial(\theta)} + \frac{\partial F(X, \theta)'}{\partial(\theta)} \times F(X, \theta) + F(X, \theta)' \times \frac{\partial F(X, \theta)}{\partial(\theta)},$$

em que  $\frac{\partial F(X, \theta)}{\partial(\theta)}$  é a matriz conhecida como jacobiana, formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial. Tendo a matriz jacobiana como  $G$  e utilizando a propriedade da transposta de matrizes  $(A'B)' = B'A$ , tem-se o sistema de equações normais (SEN) não linear:

$$-2Y'G + 2F'(X, \theta)G = 0$$

$$G'F(X, \theta) = G'Y$$

Pelo fato de a matriz  $G$  ser composta por derivadas parciais e depender dos parâmetros, assim como  $F(X, \theta)$  também ocorrer o mesmo, não é possível encontrar estimativas para  $\hat{\theta}$ , seguindo deste modo, a própria definição de modelos não lineares, sendo necessário a utilização de métodos alternativos para encontrar uma solução aproximada.

## 2.6 Métodos iterativos

Métodos iterativos são necessários para alcançar soluções aproximadas das somas de quadrados residuais em modelos não lineares, cujo SEN não apresenta solução explícita. Esse método é um procedimento que gera uma sequência de soluções aproximadas que vão melhorando conforme iterações são executadas e atualizadas. Muitos métodos são utilizados na literatura, como: Gauss-Newton ou método da linearização, método de Newton, método Steepest-Descent ou método gradiente e método de Marquardt (BATES; WATTS, 1988). Esses métodos se diferem na forma como  $\theta - \theta^o$  é calculado para propiciar as atualizações no

vetor de parâmetros, sendo  $\theta$  o vetor de parâmetros do modelo e  $\theta^o$  o vetor de parâmetros dado pelo pesquisador, devido seu conhecimento a priori no assunto, sendo a diferença dos dois, os erros do modelo.

Para o método de Gauss-Newton, é usado a expansão em série de Taylor de primeira ordem do vetor de funções:  $f(\theta) = f(\theta^o) + F(\theta^o)(\theta - \theta^o) + \dots +$ , em que  $F(\theta^o)$  é a matriz de primeiras derivadas de  $X$ , avaliada no ponto  $\theta^o$  (MATOS, 2016). O método iterativo consiste numa aproximação inicial que pretende encontrar soluções (também designadas como raízes) de equações da forma que  $f(x) = 0$ , em que  $f$  deverá ser uma função contínua numa vizinhança da raiz.

O processo e a eficiência de cada método está diretamente relacionado com a escolha de um bom valor inicial, sendo este mais importante que o método iterativo utilizado para a convergência (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002). O sucesso na convergência de um algoritmo para um método iterativo, no processo de estimação não linear, está diretamente associado ao uso de uma função resposta apropriada e de valores iniciais adequados ao procedimento numérico (SOUZA, 1998). Uma escolha não adequada dos valores iniciais pode resultar em um número muito grande de interações até atingir a convergência, ou convergir ao um mínimo local, sendo possível o método não convergir. Entretanto, valores iniciais adequados podem levar ao mínimo global, mesmo com a existência de vários mínimos locais.

A qualidade desses valores iniciais está ligada a experiência do pesquisador e/ou à resultados prévios obtidos de estudos anteriores. A convergência do método é atingida por algum critério de parada pré-determinado pelo pesquisador, como por exemplo, quando não ocorrerem mais diferenças significativas no vetor de parâmetros em suas atualizações. Quanto menor o número de iterações o processo de ajuste alcançar, melhor ele será considerado, portanto mais rápido será o ajuste.

## 2.7 Análise de resíduos

Após obter as estimativas dos parâmetros dos modelos pelo método adequado, é necessário a análise de resíduos por meio de testes estatísticos.

### 2.7.1 Teste de Shapiro-Wilk

O teste de Shapiro-Wilk (1995) é utilizado para a verificação da normalidade dos resíduos, cuja a hipótese nula testada afirma que os resíduos seguem uma distribuição Normal com média zero e variância constante, e a hipótese alternativa, os resíduos não seguem uma distribuição Normal. A estatística de teste é calculada pela expressão (SHAPIRO, WILK, 1965):

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

em que,  $\bar{x}$  é a média amostral dos resíduos;  $x_i$  são os valores amostrais residuais ordenados de 1 a  $n$ , e  $b$  é um valor calculado com base nas médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra aleatória com  $n$  elementos de uma distribuição Normal.

A normalidade do teste é aceita quando valor da estatística  $W$  é maior se comparado com o valor encontrado na tabela específica de Shapiro-Wilk. Outra maneira habitual de análise de hipóteses, é pelo valor- $p$  obtido por software, sendo a normalidade aceita quando valor  $p > \alpha$  estipulado.

### 2.7.2 Teste de Durbin-Watson

A independência dos resíduos é verificada pelo teste de Durbin-Watson (1950), cuja hipótese nula afirma que os resíduos são independentes, ou seja, não correlacionados, contra a hipótese alternativa de que os resíduos não são independentes. A estatística de teste é calculada pela expressão (DURBIN, WATSON,

1950):

$$D = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}$$

em que,  $\varepsilon_i$  é o resíduo relacionado à observação no tempo  $i$  e  $\varepsilon_{i-1}$  é o resíduo relacionado à observação no tempo  $i - 1$ .

A conclusão do teste é dada pela comparação do valor  $D$  com a tabela elaborada por Savin e White (1977) que possui limites inferiores ( $D_i$ ) e superiores ( $D_s$ ).  $D$  é um valor que varia em um intervalo de 0 e 4. Se  $D > D_s$ , não existe correlação; se  $D < D_i$ , existe uma correlação positiva; se  $D$  estiver entre os dois limites, o teste é inconclusivo. A decisão também pode ser tomada em relação ao valor  $p > \alpha$  estipulado.

Em relação a valores,  $D$  próximo de 0 indica existência de autocorrelação positiva; próximo de 2 indica resíduos independentes e próximos de 4, indícios de autocorrelação negativa.

### 2.7.3 Teste de Breusch-Pagan

O pressuposto de homocedasticidade de variâncias residuais é verificado pelo teste de Breusch-Pagan (1979), cuja hipótese nula afirma que as variâncias residuais são homogêneas, contra a hipótese alternativa de que as variâncias residuais são heterogêneas. O teste é realizado, inicialmente, ajustando uma regressão linear simples com os resíduos padronizados. A estatística de teste é calculada pela expressão (BREUSCH, PAGAN, 1979):

$$BP = \frac{SQR}{2},$$

sendo

$$SQR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

em que  $SQR$  é a soma dos quadrados da regressão. O valor encontrado pelo teste deve ser comparado com o valor crítico da distribuição de Qui-quadrado, com 1

grau de liberdade. A decisão também pode ser tomada em relação ao valor  $p > \alpha$  estipulado.

## 2.8 Avaliadores de qualidade

Crítérios de qualidade são necessários para direcionar e consolidar a decisão tomada da escolha de um modelo analisado. Vale ressaltar que as estimativas dos parâmetros encontrados devem possuir interpretações plausíveis, lógicas e condizentes com a realidade dos dados em estudo.

Em trabalhos atuais sobre curvas de crescimento, especificamente na área zootécnica, os critérios mais utilizados para a avaliação da qualidade de ajuste são: Coeficiente de determinação  $R^2$  e Critério de Informação de Akaike Corrigido ( $AIC_C$ ), porém neste trabalho também se faz uso da Média Percentual Absoluta do Erro (MAPE).

### 2.8.1 Coeficiente de determinação

O coeficiente de determinação  $R^2$  é uma medida de ajustamento de um modelo estatístico em relação aos valores observados. O coeficiente varia entre 0 e 1, indicando em porcentagem (0 a 100), a quantidade de variação explicada nos dados pelo modelo utilizado (DRAPER, SMITH, 1998) Quanto maior  $R^2$ , ou seja, valor próximo de 1, melhor explicativo e bem ajustado aos dados o modelo é considerado.

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT},$$

em que, SQR se refere à soma de quadrados do resíduo e SQT, à soma de quadrados total.

$$SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

$$SQR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

sendo  $n$  é o numero de observações;  $y_i$  o valor observado,  $\bar{y}$  a média das observações e  $\hat{y}_i$  o valor estimado de  $y_i$ .

### 2.8.2 Critério de Informação de Akaike Corrigido

O Critério de Informação de Akaike Corrigido ( $AIC_C$ ) leva em consideração o grau de parametrização do modelo, mas é fortemente utilizado quando possui pequenas amostras. Esse critério é dado por (BOZDONGAN, 1987):

$$AIC_C = \ln \frac{SQR}{n} + 2(p+1) + \frac{2(p+1)(p+2)}{n-(p+2)},$$

em que,  $\ln$  é o operador logaritmo natural;  $SQR$  é a soma de quadrados do resíduo;  $p$  é o número de parâmetros do modelo e  $n$  é o tamanho da amostra. Menores valores de  $AIC_C$  indicam melhor ajuste.

### 2.8.3 Média Percentual Absoluta do Erro

A Média Percentual Absoluta do Erro (MAPE) mede o erro médio em porcentagem. A expressão é dada por (MORETTIN, TOLOI, 2006):

$$MAPE = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}}{y_i} \right) * 100$$

em que  $y_i$  são valores observados, e  $\hat{y}$  são os valores estimados pelo modelo.

O valor de MAPE pode ser positivo e negativo, sendo que valores próximos de zero indicam um melhor ajuste. Quando positivo, o modelo está subestimando os dados, e negativo, superestimando.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

#### 3.1 Material

Os dados analisados foram obtidos em 2012, durante um evento no Parque de Exposições Bolívar de Andrade, em Belo Horizonte/MG. O estudo foi aprovado pelo Comitê de Ética da UFLA em Pesquisa com Animais, sob protocolo 039/12. Foram coletadas informações sobre PV e AC de equinos da raça Campolina, sendo o peso corporal, medida aferida utilizando a balança eletrônica para animais de grande porte, com precisão de 0,5 kg e capacidade para 2000 kg e, dimensões lineares da AC, medida do ponto mais alto da região interescapular, localizado no espaço definido pelo processo espinhoso de T5 e T6, até o solo. Foram mensurados 356 animais no total, sendo 114 machos e 242 fêmeas, os quais foram separados por sexo (macho e fêmea não gestante) e divididos em 16 classes de idade (7 a 2013), por alguns meses não conterem animais o suficiente para a distribuição regular em maior quantidade de faixas etárias, segundo Ribeiro *et al.* (2018).

Tabela 3.1 – Médias e variâncias calculadas em cada classe de idade (meses) em ambos os sexos para a variável peso vivo (kg).

Idade	Nº de animais		Fêmeas		Machos	
	Fêmeas	Machos	Média (kg)	Var	Média (kg)	Var
6l-11	19	9	252,16	2473,58	237,06	408,03
11l-14	17	13	266,50	1160,13	287,88	1120,67
14l-19	11	7	344,36	1841,05	351,07	816,37
19l-23	42	7	399,83	2332,63	391,79	1255,65
23l-26	12	9	396,13	1616,10	418,67	2468,94
26l-30	5	2	467,00	907,50	456,25	78,13
30l-36	22	4	449,02	2755,96	446,13	550,06
36l-47	20	9	489,75	2918,36	454,72	1028,82
47l-56	13	7	487,35	3264,06	491,07	1437,20
56l-66	14	14	524,59	4914,88	473,43	2857,53
66l-78	14	15	536,32	3217,14	483,60	1390,04
78l-85	12	3	542,67	3623,29	495,83	1127,08
85l-109	12	4	537,21	3094,84	508,75	472,92
109l-121	7	4	545,14	2460,14	526,00	819,00
121l-151	8	4	541,25	4310,71	466,88	2980,73
151l-203	14	3	487,14	7421,02	510,00	2968,75

Tabela 3.2 – Médias e variâncias calculadas em cada classe de idade (meses) em ambos os sexos para a variável altura de cernelha (cm).

Idade	Nº de animais		Fêmeas		Machos	
	Fêmeas	Machos	Média (cm)	Var	Média (cm)	Var
6l-11	19	9	133,79	24,43	130,50	27,50
11l-14	17	13	138,97	17,80	138,35	27,06
14l-19	11	7	145,95	7,07	145,79	8,74
19l-23	42	7	149,96	24,22	153,79	98,65
23l-26	12	9	150,29	13,84	153,28	27,69
26l-30	5	2	154,40	17,18	155,75	6,13
30l-36	22	4	153,18	20,18	155,50	17,67
36l-47	20	9	159,03	15,96	158,44	4,47
47l-56	13	7	157,81	20,15	160,00	15,92
56l-66	14	14	160,18	25,60	160,25	9,64
66l-78	14	15	159,39	16,08	157,00	25,71
78l-85	12	3	161,46	12,75	162,00	13,00
85l-109	12	4	160,21	32,34	160,75	76,92
109l-121	7	4	160,93	14,87	162,13	2,56
121l-151	8	4	159,25	24,79	158,38	17,56
151l-203	14	3	159,50	58,15	159,67	26,33

### 3.2 Metodologia

No método usual longitudinal as medidas são tomadas repetidamente do mesmo grupo de indivíduos, desde o nascimento até a idade adulta. No entanto, esse método demanda longo tempo de seguimento, além de possivelmente haver ocorrências de dependência dos erros, sendo necessário uso de modelos autoregressivos. O método transversal elabora sua curva a partir de medidas tomadas uma única vez de certa amostra da população, não necessitando do acompanhamento de indivíduos ao longo do tempo (ZEFERINO *et al.*, 2003).

O método transversal é o mais utilizado em pesquisas com humanos, tendo a vantagem da rapidez metodológica, praticidade e baixo custo de análise (SPERANDIO *et al.*, 2011). Este método é difícil de ser encontrado em dados de animais, principalmente em espécie equina. Estudos como o de Ribeiro *et al.* (2018) e Souza *et al.* (2017b) com dados equinos da raça MM evidenciaram o uso deste

método, pois o intervalo de tempo desde o nascimento até a fase adulta do animal ocorre aproximadamente por cerca de cinco anos, fase esta em que as fazendas retêm muito pouco animal, devido a principal fonte de renda envolvida na produção de cavalos ser da venda de potros, dificultando, neste caso, pesquisas sobre crescimento.

Neste trabalho foi utilizado o método transversal de coleta de dados, nas quais foram observados as variáveis AC e PV dos animais utilizando os modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy para descrever o padrão de crescimento da raça Campolina. A estimação dos parâmetros foi feita pelo método de mínimos quadrados conforme Draper e Smith (1998), utilizando o algoritmo numérico de Gauss-Newton.

Para verificação das pressuposições da análise de resíduos foi utilizado o teste de Shapiro-wilk sob a hipótese de normalidade dos resíduos, teste de Durbin-Watson para verificação da independência dos resíduos e teste de Breuch-Pagan para verificação da homocedasticidade das variâncias residuais.

Utilizou-se o teste t para significância dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e k, cuja a hipótese nula é de que o parâmetro é igual a zero, contra a hipótese alternativa de que o parâmetro é diferente de zero. Todos os testes empregados neste trabalho estão ao nível 5% de significância. Foram obtidos os limites inferiores e superiores com 95% de confiança para as estimativas das variáveis PV e AC ao longo dos meses para o modelo escolhido.

Os avaliadores de qualidade utilizados em análise para avaliação e comparação entre modelos e seleção da curva de crescimento mais adequada para a raça Campolina foram os Critério de Akaike Corrigido ( $AIC_C$ ), Coeficiente de determinação ( $R^2$ ) e Média Percentual Absoluta do Erro (MAPE).

Foram calculadas analiticamente as derivadas de primeira a quarta ordem em relação à variável X para todos os modelos propostos neste estudo: Brody, Logístico, Gompertz e von Bertalanffy, assim como a obtenção de pontos de in-

teresses específicos da curva: PDA, PI, PDM e PAM. As regras utilizadas para o cálculo das derivadas foram cadeia, produto e quociente, respectivamente:

$$(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

### 3.3 Recursos computacionais

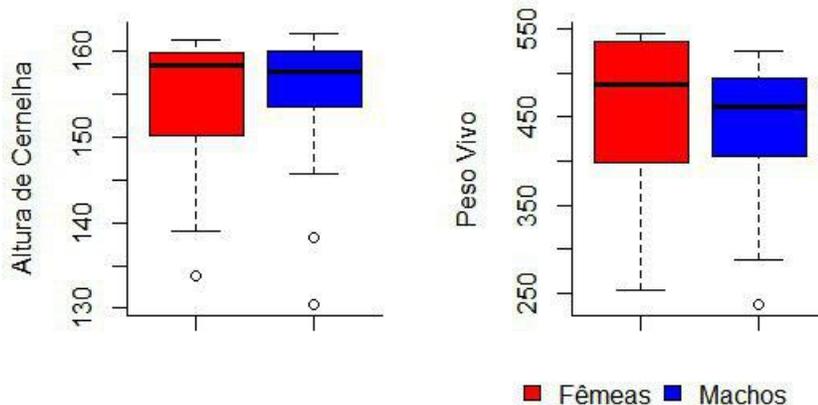
As estimativas para os parâmetros dos modelos, testes estatísticos para análises de resíduos e avaliadores de qualidade, bem como os ajustes gráficos e toda a parte computacional envolvida na elaboração deste trabalho, foram obtidas utilizando o software estatístico R (R Development Core team, 2019) com o auxílio dos pacotes nlme, qpcR, car e lmtest.

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foram analisadas as dispersões das variáveis AC e PV de machos e fêmeas da raça Campolina. O gráfico boxplot auxilia na identificação da distribuição dos dados e sua variabilidade, assim como fornecer informações sobre algumas características do conjunto de dados, sendo elas, localização, dispersão, assimetria, comprimento da cauda e outliers (medidas discrepantes).

Em um boxplot são apresentados cinco estatísticas: o mínimo, o primeiro quartil (Q1), a mediana, o terceiro quartil (Q3) e o máximo. O centro da distribuição é indicado pela mediana (linha em negrito na Figura 4.1), representando 50% dos dados. A dispersão é dita pela amplitude do gráfico, que pode ser calculada pela subtração do máximo pelo mínimo valor. Quanto maior a amplitude, maior a variação nos dados.

Figura 4.1 – Boxplot das variáveis altura de cernelha (cm) e peso vivo (kg) para os equinos machos e fêmeas da raça Campolina.



Para a variável AC, os dados estão semelhantes em ambos os sexos, a mediana representa e indica que 50% dos equinos Campolina estão medindo até

158 cm, com o valor máximo de 162 cm e mínimo de 133 cm para fêmeas, com diferença de 3 cm a menos para os machos, 130 cm.

Para a variável PV, os sexos se diferem um pouco mais. Para o peso de machos, a média é de 437kg, mediana de 461kg, valor máximo de 526kg e mínimo de 237kg. Para as fêmeas, média de 454kg, mediana de 487kg, peso máximo de 545kg e mínimo de 252kg.

#### 4.1 Peso vivo

Para análise das curvas de crescimento equino e validação dos modelos, é de suma importância a verificação das pressuposições necessárias. A Tabela 4.1 representa a análise de resíduos dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody por meio dos testes Shapiro-Wilk para normalidade, Durbin-Watson para independência e Breusch-Pagan para homogeneidade dos resíduos.

Todas as hipóteses nulas foram aceitas em seus respectivos testes, afirmando assim pelo valor p ( $>0,05$ ) que as pressuposições sobre o vetor de erros são atendidas para o estudo da curva de crescimento da raça Campolina para a variável PV em ambos os sexos.

Tabela 4.1 – Análise de resíduos dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody para a variável peso vivo (kg) de fêmeas e machos da raça Campolina.

	Peso vivo fêmeas				Peso vivo machos			
	Logístico		Gompertz		Logístico		Gompertz	
	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p
<b>SW</b>	0,934	0,283	0,924	0,197	0,972	0,873	0,976	0,930
<b>DW</b>	2,068	0,644	2,151	0,736	2,223	0,886	2,353	0,846
<b>BP</b>	0,189	0,910	0,860	0,958	3,861	0,145	3,751	0,153
	von Bertalanffy		Brody		von Bertalanffy		Brody	
	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p
<b>SW</b>	0,928	0,226	0,928	0,226	0,985	0,992	0,985	0,992
<b>DW</b>	2,167	0,796	2,167	0,772	2,462	0,670	2,462	0,756
<b>BP</b>	0,345	0,842	0,345	0,842	3,042	0,218	3,042	0,218

**Legenda:** SW: Shapiro-Wilk, DW: Durbin-Watson, BP: Breusch-Pagan, Est. Teste: estatística de teste.

A Tabela 4.2 apresenta as estimativas para os parâmetros e avaliadores de qualidade da curva de crescimento dos dados ajustados aos modelos para a variável PV de fêmeas e machos da raça equina Campolina. As estimativas de fêmeas para o parâmetro  $\alpha$  foram superiores as de macho e também ao referencial da ABCCCampolina, em que fêmeas possuem valores entre 350kg e 450kg. Em contrapartida, a estimativa  $\alpha$  para machos foi abaixo ao referencial da raça, o qual estima valores entre 550kg a 600kg.

Tabela 4.2 – Estimativas para os parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody para a variável peso vivo (kg) de fêmeas e machos da raça Campolina.

Est	Peso vivo de fêmeas				Peso vivo de machos			
	L	G	von B	B	L	G	von B	B
$\alpha$	528,135*	530,169*	532,730*	532,731*	492,790*	494,374*	496,413*	496,413*
$\beta$	9,615*	4,753*	2,730*	0,885*	8,478*	4,686*	3,128*	0,959*
k	0,088*	0,072*	0,067*	0,057*	0,111*	0,091*	0,085*	0,074*
$R^2$	0,958	0,959	0,959	0,958	0,961	0,963	0,964	0,964
$AIC_C$	149,868	149,420	149,460	149,962	143,598	140,643	142,409	142,159
MAPE	-0,232	-0,191	-0,185	-0,193	-0,153	-0,119	-0,111	-0,102

**Legenda:** Est: estimativas; L: Logístico; G: Gompertz; von B: von Bertalanffy; B: Brody; \*= significativo pelo teste t ao nível de 5% ( $P < 0,05$ );  $\alpha$ : valor assintótico da curva;  $\beta$ : abscissa do ponto de inflexão; k: índice de maturidade;  $R^2$ : Coeficiente de determinação;  $AIC_C$ : Critério de informação de akaike corrigido, MAPE: média percentual absoluta do erro.

A redução observada no PV de machos foi explicado por Lucena *et al.* (2016), em um estudo feito com a raça Campolina, resultados sugeriram que há tendências em reduções no perímetro torácico e peso corporal para classificações de cavalos de sela. Segundo Souza *et al.* (2018) o fato do baixo peso se deve por machos não possuírem melhorias no manejo no primeiro ano de vida, pois poucos são escolhidos para reprodução, sendo a maioria encaminhada para a venda do animal.

O alto valor de  $\alpha$  para PV de fêmeas na Tabela 4.2, pode estar relacionado, segundo Souza *et al.* (2018) em um estudo feito para a raça MM, que as fêmeas geralmente recebem uma nutrição e manejo sanitário de melhor qualidade desde

potras, período no qual há grande desenvolvimento corporal, por serem as futuras matrizes e doadoras de embriões.

Outro motivo do alto PV para fêmeas, é por possuírem um maior valor agregado quando comparado aos machos nessa faixa etária, independente do direcionamento destas para participação em exposições agropecuárias. O mesmo aconteceu com Fradinho *et al.* (2015), em que também atribui valores elevados de PV devido a melhorias genéticas e práticas de alimentação durante os últimos anos.

O acúmulo de gordura no tecido adiposo acarreta em excesso de peso, não sendo recomendado e prejudicial para as articulações, afetando assim a vida útil do animal em eventos esportivos, fazendo com que encerrem sua participação precocemente.

Para o modelo Brody, o parâmetro  $\beta$  não possui interpretação, o modelo Logístico possui maior valor para ambos os sexos e, o modelo Gompertz valores semelhantes. Estes resultados concordam com os obtidos por Souza *et al.* (2017b) com a raça MM, encontrando valores similares de  $\beta$  para o desenvolvimento de PV, indicando semelhanças entre as raças.

Para o parâmetro  $k$ , a tabela 4.2 aponta que os machos possuem maior aceleração e antecipação de crescimento, o que está em concordância com os valores em meses dos pontos influentes da curva encontrados pelo cálculo das derivadas de 1ª a 4ª ordem (seção 4.3).

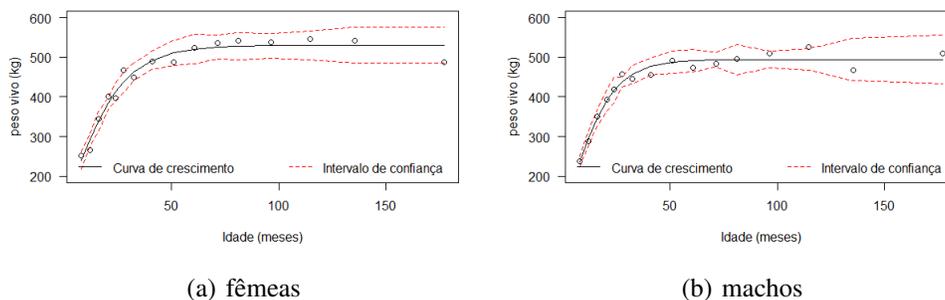
É possível identificar que o valor de  $k$  do modelo Gompertz para macho possui valor elevado (0,0914) se comparado com fêmea (0,0719), indicando que o crescimento masculino é mais acelerado, similar ao que acontece no estudo de Fradinho *et al.* (2015) com a raça Lusitano. Tal fato não ocorre no estudo de Souza *et al.* (2017b) com a raça MM, no qual sucede o contrário, crescimento de fêmeas é mais acelerado (0,098) em relação aos machos (0,059).

Os avaliadores de qualidades indicaram bons ajustes, dando destaque no valor de MAPE negativo, ressaltando que valores próximos de zero são os ideais, e que neste caso, os valores dos parâmetros dos modelos não lineares estão superestimados para ambos os sexos.

É visto pela Tabela 4.2 que todos os modelos são considerados bons e indicados, segundo estes avaliadores, para a representação da curva de crescimento de equinos da raça Campolina da variável PV. Porém, neste caso, o modelo Gompertz foi escolhido pelo fato de seus avaliadores serem levemente melhores e sua captação de mais pontos influentes pela análise gráfica das derivadas de 1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> ordem (seção 4.3), trazer maiores informações para este estudo.

A Figura 4.2 mostra a semelhança gráfica da curva de crescimento para ambos os sexos da variável PV do modelo Gompertz, porém todas as curvas dos outros modelos analisados se assemelharam entre si. Cada gráfico possui o próprio limite inferior e superior do intervalo de confiança, utilizando o desvio padrão médio inerente a cada dado das variáveis e faixas etárias contidas na Tabela 3.1.

Figura 4.2 – Curva de crescimento da variável peso vivo de fêmeas e machos da raça Campolina descrita pelo modelo Gompertz com um intervalo de confiança de 95%.



Em um estudo feito por McManus *et al.* (2010) para as raças Hanoveriana, Brasileiro de Hispismo, Puro Sangue Inglês e Mestiços, pouca diferença de maturação ( $k$ ) entre machos e fêmeas foi observado. O Modelo Brody e Weibull

foi escolhido para descrever a curva de crescimento por obter o melhor desempenho e menos parâmetros, enquanto o modelo Gompertz substituiu o peso e altura adulta dos dados. O mesmo estudo discutiu que geralmente machos apresentaram taxas de crescimento superiores às fêmeas e, que a castração não afeta o desenvolvimento animal antes dos 24 meses de vida.

Para Fradinho *et al.* (2015), o modelo Richards foi o escolhido para descrever a curva de crescimento de PV da raça Lusitano, além de observar que os machos apresentaram maior precocidade do que as fêmeas. Já para o estudo de Souza *et al.* (2017b), o modelo Brody foi o mais adequado para descrever a curva de fêmeas da raça MM, pois elas têm uma precocidade maior do que os machos para atingir o peso adulto e, o modelo von Bertalanffy o escolhido para a representação da curva masculina.

No estudo de Souza *et al.* (2017b), foi registrado os pesos variando de 416kg a 420kg para o sexo feminino e, 431kg a 439kg para masculino. A diferença nos padrões de crescimento mostrou claramente variações com base no sexo, segundo as quais os machos eram mais pesados que as fêmeas, o que é o oposto com os dados de Campolina neste trabalho. Esse fenômeno é melhor explicado pelo dimorfismo sexual, porque os machos possuem características sexuais secundárias que influenciam o crescimento de algumas partes do corpo, que por sua vez influenciam diretamente o peso corporal.

## **4.2 Altura de cernelha**

Assim como na seção 4.1, a Tabela 4.3 representa a análise de resíduos dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody da variável AC de fêmeas e machos. Todos os pressupostos necessários foram atendidos ao nível de significância (valor  $p > 0,05$ ), afirmando que os modelos estão adequados para o estudo da curva de crescimento da raça Campolina.

Tabela 4.3 – Análise de resíduos dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e brody para a variável altura de cernelha (cm) de fêmeas e machos da raça Campolina.

	Altura cernelha fêmeas				Altura de cernelha machos			
	Logístico		Gompertz		Logístico		Gompertz	
	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p
SW	0,933	0,276	0,929	0,24	0,971	0,854	0,970	0,839
DW	3,132	0,050	3,183	0,050	2,474	0,772	2,507	0,590
BP	4,629	0,099	4,662	0,097	0,864	0,649	0,701	0,704
	von Bertalanffy		Brody		von Bertalanffy		Brody	
	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p	Est. Teste	Valor p
	SW	0,929	0,235	0,932	0,260	0,969	0,827	0,968
DW	3,198	0,040	3,223	0,620	2,518	0,544	2,535	0,586
BP	4,638	0,096	4,589	0,101	0,646	0,724	0,538	0,764

**Legenda:** SW: Shapiro-Wilk, DW: Durbin-Watson, BP: Breusch-Pagan, Est. Teste: estatística de teste.

A Tabela 4.4 apresenta as estimativas para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e k dos modelos ajustados. Observando os resultados, as estimativas de  $\alpha$  para ambos sexos foram consideradas iguais para todos os modelos com valor em torno de 160 cm, estando um pouco abaixo se comparado com a média padrão masculina registrada da raça pela ABCCCampolina de 162 cm e, elevada para média padrão feminina de 156 cm.

Tabela 4.4 – Estimativas para os parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody para a variável altura de cernelha (cm) de fêmeas e machos da raça Campolina.

Est	Altura de cernelha fêmeas				Altura de cernelha machos			
	L	G	von B	B	L	G	von B	B
$\alpha$	160,131*	160,171*	160,184*	160,213*	159,923	159,968*	159,983*	160,015*
$\beta$	-13,144*	-15,406*	-16,203*	0,289*	-5,488*	-7,271*	-7,903*	0,408*
k	0,077*	0,073*	0,072*	0,069*	0,109*	0,103*	0,101*	0,097*
$R^2$	0,982	0,982	0,982	0,982	0,972	0,972	0,972	0,972
$AIC_C$	55,924	55,696	55,641	55,566	65,327	65,277	65,279	65,312
MAPE	-0,005	-0,005	-0,005	-0,005	-0,009	-0,008	-0,009	-0,008

**Legenda:** Est: estimativas; L: Logístico; G: Gompertz; von B: von Bertalanffy; B: Brody; \*= significativo pelo teste t de 5% ( $P < 0,05$ );  $\alpha$ : valor assintótico da curva;  $\beta$ : abscissa do ponto de inflexão; k: índice de maturidade;  $R^2$ : Coeficiente de determinação;  $AIC_C$ : Critério de informação de akaike corrigido, MAPE: média percentual absoluta do erro.

As diferenças observadas no valor do parâmetro  $\beta$  podem estar associadas ao formato sigmoideal das diferentes curvas dos modelos ajustados, o que também foi verificado por Fernandes *et al.* (2014) e Ribeiro *et al.* (2018). O valor do parâmetro para o modelo Brody não possui interpretação.

Para Logístico, Gompertz e von Bertalanffy, o valor negativo de  $\beta$  indica que a inflexão da curva ocorre meses antes dos dados analisados neste estudo, ou seja, quando o feto do animal ainda está em gestação, fase pré-natal como mencionado na Figura 2.2. É possível assim afirmar que as fêmeas atingem o PI mais rápido que os machos em todos os modelos, porém são os machos que possuem uma maior aceleração de crescimento e tendem a atingir a sua AC adulta mais precoce se comparado com as fêmeas, pois as estimativas do parâmetro  $k$ , que indicam o valor do índice de maturidade, foram menores em fêmeas e maiores em machos.

Pela Tabela 4.2, os valores de  $\beta$  indicam que o PI ocorre de uma forma mais tardia para PV se comparada com valores da Tabela 4.4 para AC, que possuem valores negativos, próximos a de Ribeiro *et al.* (2018) com o estudo de MM, indicando que as duas raças possuem desenvolvimento semelhantes. Para o estudo de Fradinho *et al.* (2015) para a raça Lusitano,  $\beta$  possui valores positivos para AC.

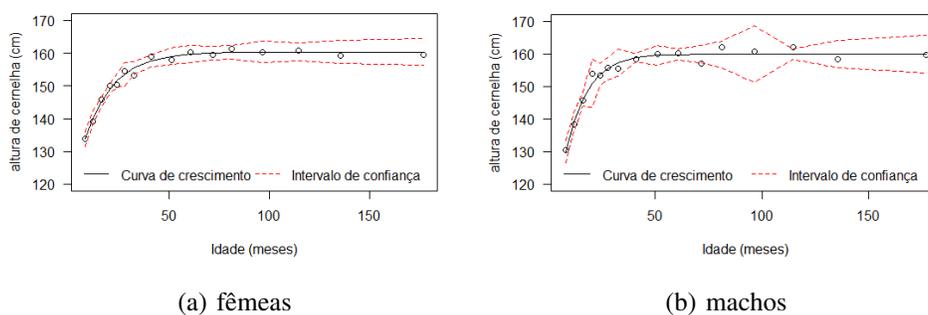
Os avaliadores de qualidade também estão contidos na Tabela 4.4 para ambos os sexos, com valores de  $R^2$  acima de 97%, valores de  $AIC_C$  semelhantes em cada sexo, e valores de MAPE negativos, ou seja, levemente superestimados.

Assim como a variável PV (Tabela 4.2), o modelo Gompertz também foi o mais indicado para a representação da curva de crescimento de AC (Tabela 4.4) de fêmeas e machos da raça Campolina, principalmente pelas suas informações nos pontos influentes do estudo de derivadas de ordens superiores (seção 4.3).

A Figura 4.3, assim como a Figura 4.2, mostra a semelhança gráfica da curva de crescimento para ambos os sexos para a variáveis AC do modelo Gompertz, sendo todos os modelos semelhantes entre si. Estas curvas não possuem a

característica sigmoïdal de um modelo de crescimento clássico, pois os dados não foram coletados desde a fase inicial do crescimento equino. Cada gráfico possui o próprio limite superior e inferior do intervalo de confiança, utilizando o desvio padrão médio inerente a cada dado das variáveis e faixas etárias contidas na Tabela 3.2.

Figura 4.3 – Curva de crescimento da variável altura de cernelha de fêmeas e machos da raça Campolina descrita pelo modelo Gompertz com um intervalo de confiança de 95%.



Para Santos *et al.* (1999) com o estudo da raça Pantaneiro, o modelo Weibull foi o mais indicado para ambos os sexos na representação da curva de estatura-idade. A altura média na maturidade foi maior no sexo masculino do que no feminino. O índice de maturidade, no entanto, foi mais elevado para fêmeas do que machos. Houve indicação de associação negativa entre o índice de maturidade e a estatura na maturidade apenas para mulheres. Estes resultados indicaram que as fêmeas amadurecem mais cedo.

O modelo Logístico foi o mais indicado para o estudo de Ribeiro *et al.* (2018) na descrição das curvas de crescimento de AC para ambos os sexos da raça MM. Observou-se também um crescimento acelerado nos primeiros meses de idade. Os machos atingiram uma altura adulta maior, porém as fêmeas são mais precoces, pois apresentaram maior estimativa para o índice de maturidade.

Trabalhos como Fradinho *et al.* (2015) com a raça Lusitano e Souza *et al.* (2017c) com MM, observaram a necessidade de tabelas que contribuam e auxiliem profissionais da área zootécnica com a prática e manejo dos animais. Deste modo, a finalidade da Tabela 4.5 foi facilitar os pesquisadores com valores de referência para AC e PV de seus respectivos intervalos de confiança (95%) do modelo Gompertz para valores de AC e PV da raça Campolina em ambos sexos para complementar a informação gráfica da curva de crescimento das Figuras 4.2 e 4.3.

Tabela 4.5 – Intervalos de confiança (95%) para as variáveis altura de cernelha e peso vivo de machos e fêmeas da raça Campolina utilizando o modelo Gompertz.

Idade	Altura de cernelha				Peso vivo			
	Fêmeas		Machos		Fêmeas		Machos	
	LI	LS	LI	LS	LI	LS	LI	LS
6_11	131,474	135,919	126,661	133,513	217,824	262,552	222,978	249,372
11_14	137,958	141,968	136,683	142,338	276,560	308,943	277,918	314,314
14_19	143,260	146,403	143,929	148,310	314,241	364,954	325,264	367,597
19_23	147,488	150,465	143,760	158,476	369,490	398,704	364,310	416,811
23_26	149,329	153,538	150,310	157,187	389,906	435,397	384,128	449,055
26_30	149,731	156,996	152,178	159,038	409,907	462,718	424,328	448,828
30_36	153,539	157,293	153,232	161,470	440,817	484,692	433,962	479,931
36_47	155,848	159,350	157,494	160,255	468,771	516,123	455,840	497,751
47_56	156,487	161,367	156,622	162,533	480,385	542,499	459,165	515,334
56_66	156,898	162,199	158,195	161,448	483,903	557,351	463,370	519,373
66_78	157,791	161,993	157,355	162,487	496,109	555,533	474,405	512,141
78_85	158,011	162,052	155,870	164,030	493,911	562,056	455,922	531,902
85_109	156,908	163,343	151,369	168,559	497,970	560,923	472,951	515,574
109_121	157,302	163,015	158,399	161,536	493,227	566,715	466,301	522,399
121_151	156,718	163,618	155,861	164,075	484,628	575,623	440,867	547,875
151_203	156,176	164,165	154,161	165,775	485,041	575,293	432,720	556,031

**Legenda:** LI: limite inferior, LS: limite superior.

Pela Tabela 4.5 se percebe que para AC, ambos os sexos possuem semelhantes tamanhos ao decorrer dos meses. Pela associação da raça, o macho possui maior altura, mas pela Tabela se percebe que ao longo do crescimento, a partir dos cinco anos de vida, as fêmeas se equiparam em estatura. Porém para variável PV, nos dois primeiros anos, fêmeas e machos se assemelham em seus valores, tendo a partir dos três anos, fêmeas valores elevados.

A curva de crescimento do modelo não linear Logístico foi a mais adequada para o estudo de AC de ambos os sexos de equinos MM em Ribeiro *et al.* (2018). Observou-se um crescimento muito acelerado nos primeiros dois anos

de vida. Os machos adultos apresentaram valores de AC maiores que as fêmeas, no entanto elas são mais precoces, pois apresentaram maiores estimativas para o índice de maturidade.

O mesmo resultado foi encontrado por Souza *et al.* (2017b) para machos da raça, mas para fêmeas o melhor modelo não linear foi Brody, e ambos estabilizando a altura aos 60 meses de idade, semelhante a variável PV que indicou um crescimento em ganho de peso mais rápido e homogêneo entre seis e 24 meses de idade, sendo as fêmeas mais precoces. Para Campolina, o presente trabalho não apresentou diferenças entre fêmeas e machos, sendo este último com maiores índices de maturidade em todos os modelos propostos.

No estudo de Cabral *et al.* (2004) com MM, machos e as fêmeas apresentam valores médios das proporções das medidas lineares distintos dos propostos pelo Sistema Eclético de Proporções Lineares, tornando necessário o aperfeiçoamento dos programas de avaliação morfológica dos eqüinos desta raça. Esta mesma diferença também foi notada neste trabalho com valores distintos de AC se comparado com a referência da associação da raça.

Em estudo morfológico entre garanhões e castrados Campolina, Lucena *et al.* (2015) observou valores de AC menores para castrados que para os garanhões, se comparado com o padrão da raça. Há tendência de aumento na AC média dos garanhões, se aproximando cada vez mais do ideal de 162 cm, segundo ABCCCampolina. No entanto, Segundo Souza *et al.* (2018) garanhões são morfometricamente mais homogêneos do que éguas, provavelmente devido a uma maior pressão de seleção.

Os resultados do estudo de Manso filho *et al.* (2000), o potro Campolina obteve mais de 75% de sua AC adulta aos seis meses de idade, e o mesmo acontece neste presente trabalho. O perímetro torácico é conhecido por estar relacionado com a capacidade de carga do animal e, com base no Índice de conformação,

quando esta medição está associada com AC, os animais são classificados como adequado para cavalo de sela ou de tracção.

### 4.3 Derivadas da curva de crescimento

Abaixo estão apresentadas analiticamente o cálculo das derivadas de primeira a quarta ordem dos modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy.

#### 4.3.1 Derivadas modelo Brody

$$Y_i = \alpha[1 - \beta e^{-(kx_i)}] + \varepsilon_i$$

Para obter a derivada do modelo foi utilizado sucessivamente em cada ordem a regra da cadeia, sendo neste caso de fácil compreensão.

$$Y_i' = \alpha\beta k e^{-(kx_i)}$$

$$Y_i'' = -\alpha\beta k^2 e^{-(kx_i)}$$

$$Y_i''' = \alpha\beta k^3 e^{-(kx_i)}$$

$$Y_i'''' = -\alpha\beta k^4 e^{-(kx_i)}$$

#### 4.3.2 Derivadas modelo Gompertz

$$Y_i = \alpha e^{-e^{k(\beta-x_i)}} + \varepsilon_i$$

Para obter as derivadas até o quarto grau deste modelo foi necessário utilizar a regra do produto.

$$Y_i' = \alpha k e^{-e^k(\beta-x_i)} \cdot e^{k(\beta-x_i)}$$

$$Y_i'' = \alpha k e^{-e^k(\beta-x_i)} \cdot -e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k \cdot [e^{k(\beta-x_i)}] + \alpha k e^{-e^k(\beta-x_i)} \cdot [e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k]$$

A derivada de segunda ordem simplificada é:

$$Y_i'' = \alpha k^2 e^{-e^k(\beta-x_i)} \cdot e^{2k(\beta-x_i)} - \alpha k^2 e^{-e^k(\beta-x_i)} \cdot e^{k(\beta-x_i)}$$

Esta é uma maneira mais resumida de apresentar a derivada de segunda ordem:

$$Y_i'' = k^2 \alpha e^{-e^k(\beta-x_i)} \cdot e^{k(\beta-x_i)} \cdot [e^{k(\beta-x_i)} - 1]$$

Aplicando a regra do produto

$$\begin{aligned} Y_i''' &= ([\alpha k^2 e^{-e^k(\beta-x_i)} \cdot -e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k] e^{2k(\beta-x_i)} + [\alpha k^2 e^{-e^k(\beta-x_i)}] \cdot -2k e^{2k(\beta-x_i)}) \\ &+ (-[\alpha k^2 e^{-e^k(\beta-x_i)} \cdot -e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k] \cdot e^{k(\beta-x_i)} + [\alpha k^2 e^{-e^k(\beta-x_i)}] \cdot e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k) \end{aligned}$$

Organizando e multiplicando toda a equação anterior

$$\begin{aligned} Y_i''' &= \alpha k^3 e^{-e^k(\beta-x_i)} e^{3k(\beta-x_i)} - 2\alpha k^3 e^{-e^k(\beta-x_i)} e^{2k(\beta-x_i)} \\ &- \alpha k^3 e^{-e^k(\beta-x_i)} e^{2k(\beta-x_i)} - \alpha k^3 e^{-e^k(\beta-x_i)} e^{k(\beta-x_i)} \end{aligned}$$

Simplificando a derivada de terceira ordem

$$\begin{aligned} Y_i''' &= \alpha k^3 e^{-e^k(\beta-x_i)} e^{2k(\beta-x_i)} \cdot [e^{k(\beta-x_i)} - 2] \\ &- \alpha k^3 e^{-e^k(\beta-x_i)} e^{k(\beta-x_i)} \cdot [e^{k(\beta-x_i)} + 1] \end{aligned}$$

A derivada de terceira ordem também pode ser escrita da seguinte forma:

$$Y_i''' = \alpha k (k e^{k(\beta-x_i)} - k)^2 \cdot e^{k(\beta-x_i)-e^{k(\beta-x_i)}} - \alpha k^3 e^{2k(\beta-x_i)-e^{k(\beta-x_i)}}$$

Aplicando a regra do produto na equação anterior para encontrar a derivada de quarta ordem

$$\begin{aligned} Y_i'''' &= (\alpha k^3 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} \cdot -e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k) \cdot e^{3k(\beta-x_i)} + [\alpha k^3 e^{-e^{k(\beta-x_i)}}] \cdot -3k e^{3k(\beta-x_i)} \\ &+ ([2\alpha k^3 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} \cdot -e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k] \cdot e^{2k(\beta-x_i)} + [2\alpha k^3 e^{-e^{k(\beta-x_i)}}] \cdot -2k e^{2k(\beta-x_i)}) \\ &+ (-[\alpha k^3 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} \cdot -e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k] \cdot e^{2k(\beta-x_i)} + [\alpha k^3 e^{-e^{k(\beta-x_i)}}] \cdot -2k e^{2k(\beta-x_i)}) \\ &+ (-[\alpha k^3 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} \cdot -e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k] \cdot e^{k(\beta-x_i)} + [\alpha k^3 e^{-e^{k(\beta-x_i)}}] \cdot e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k) \end{aligned}$$

Organizando e multiplicando toda a equação

$$\begin{aligned} Y_i'''' &= \alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{4k(\beta-x_i)} - 3\alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{3k(\beta-x_i)} + 2\alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{3k(\beta-x_i)} \\ &- 4\alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{2k(\beta-x_i)} - \alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{3k(\beta-x_i)} - 2\alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{2k(\beta-x_i)} \\ &- \alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{2k(\beta-x_i)} - \alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{k(\beta-x_i)} \end{aligned}$$

Simplificando a derivada de ordem quatro

$$\begin{aligned} Y_i'''' &= (\alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{3k(\beta-x_i)}) \cdot (e^{k(\beta-x_i)} - 3) + 2\alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{2k(\beta-x_i)} \cdot (e^{k(\beta-x_i)} - 2) \\ &- \alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{2k(\beta-x_i)} \cdot (e^{k(\beta-x_i)} - 2) - \alpha k^4 e^{-e^{k(\beta-x_i)}} e^{k(\beta-x_i)} \cdot (e^{k(\beta-x_i)} - 1) \end{aligned}$$

A derivada de ordem quatro também pode ser escrita desta forma:

$$\begin{aligned} Y_i'''' &= -2\alpha k^3 (k e^{k(\beta-x_i)} - k) \cdot e^{2k(\beta-x_i)-e^{k(\beta-x_i)}} - \alpha k^3 (k e^{k(\beta-x_i)} - 2k) \cdot e^{2k(\beta-x_i)-e^{k(\beta-x_i)}} \\ &+ \alpha k (e^{k(\beta-x_i)} - k)^3 \cdot e^{k(\beta-x_i)-e^{k(\beta-x_i)}} \end{aligned}$$

### 4.3.3 Derivadas modelo Logístico

Para obter a derivada de primeiro grau do modelo foi utilizada a regra do quociente:

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{k(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i$$

$$Y_i' = \frac{-\alpha e^{k(\beta - x_i)} \cdot -k}{[1 + e^{k(\beta - x_i)}]^2}$$

$$Y_i' = \frac{\alpha k e^{k(\beta - x_i)}}{[1 + e^{k(\beta - x_i)}]^2}$$

Neste caso além de usar a regra do quociente também foi usado a regra da cadeia

$$Y_i'' = \frac{(\alpha k e^{k(\beta - x_i)} \cdot -k)(1 + e^{k(\beta - x_i)})^2 - (\alpha k e^{k(\beta - x_i)})2(1 + e^{k(\beta - x_i)})e^{k(\beta - x_i)} \cdot -k}{(1 + e^{k(\beta - x_i)})^4}$$

Multiplicando e organizando toda a equação

$$Y_i'' = \frac{-\alpha k^2 e^{k(\beta - x_i)}(1 + e^{k(\beta - x_i)})^2}{(1 + e^{k(\beta - x_i)})^4} + \frac{2\alpha k^2 e^{2k(\beta - x_i)}(1 + e^{k(\beta - x_i)})}{(1 + e^{k(\beta - x_i)})^4}$$

Obtendo a derivada de segunda ordem final simplificada:

$$Y_i'' = \frac{2\alpha k^2 e^{2k(\beta - x_i)}}{(e^{k(\beta - x_i)} + 1)^3} - \frac{\alpha k^2 e^{k(\beta - x_i)}}{(e^{k(\beta - x_i)} + 1)^2}$$

Aplicando a regra do quociente na equação

$$Y_i''' = \frac{(-\alpha k^2 e^{k(\beta - x_i)} \cdot -k)((1 + e^{k(\beta - x_i)})^2) - (-\alpha k^2 e^{k(\beta - x_i)}) \cdot 2(1 + e^{k(\beta - x_i)})e^{k(\beta - x_i)} \cdot -k}{(1 + e^{k(\beta - x_i)})^4} + \frac{(4(\alpha k^2 e^{k(\beta - x_i)})e^{k(\beta - x_i)} \cdot -k)(1 + e^{k(\beta - x_i)})^3 - (2\alpha k^2 e^{2k(\beta - x_i)}) \cdot 3(1 + e^{k(\beta - x_i)})^2 \cdot e^{k(\beta - x_i)} \cdot -k}{(1 + e^{k(\beta - x_i)})^6}$$

Organizando a multiplicação

$$\begin{aligned}
 Y_i''' &= \frac{\alpha k^3 e^{k(\beta-x_i)} (1 + e^{k(\beta-x_i)})^2}{(1 + e^{k(\beta-x_i)})^4} \\
 &- \frac{2\alpha k^3 e^{2k(\beta-x_i)} (1 + e^{k(\beta-x_i)})}{(1 + e^{k(\beta-x_i)})^4} \\
 &- \frac{4\alpha k^3 e^{2k(\beta-x_i)} (1 + e^{k(\beta-x_i)})^3}{(1 + e^{k(\beta-x_i)})^6} \\
 &+ \frac{6\alpha k^3 e^{3k(\beta-x_i)} (1 + e^{k(\beta-x_i)})^2}{(1 + e^{k(\beta-x_i)})^6}
 \end{aligned}$$

Obtendo a derivada de terceira ordem final simplificada:

$$Y_i''' = \frac{6\alpha k^3 e^{3k(\beta-x_i)}}{(e^{k(\beta-x_i)} + 1)^4} - \frac{6\alpha k^3 e^{2k(\beta-x_i)}}{(e^{k(\beta-x_i)} + 1)^3} + \frac{\alpha k^3 e^{k(\beta-x_i)}}{(e^{k(\beta-x_i)} + 1)^2}$$

Aplicando a regra do quociente em toda a equação:

$$\begin{aligned}
 Y_i'''' &= \frac{(\alpha k^3 e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k)(1 + e^{k(\beta-x_i)})^2 - (\alpha k^3 e^{k(\beta-x_i)}) \cdot 2(1 + e^{k(\beta-x_i)}) \cdot e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k}{(1 + e^{k(\beta-x_i)})^4} \\
 &- \frac{(12(\alpha k^3 e^{k(\beta-x_i)}) \cdot e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k)(1 + e^{k(\beta-x_i)})^3 - (-6\alpha k^3 e^{2k(\beta-x_i)})(3(1 + e^{k(\beta-x_i)})^2 e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k)}{(1 + e^{k(\beta-x_i)})^6} \\
 &+ \frac{(18\alpha k^3 e^{2k(\beta-x_i)} \cdot e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k)(1 + e^{k(\beta-x_i)})^4 - (6\alpha k^3 e^{3k(\beta-x_i)})(4(1 + e^{k(\beta-x_i)})^3) e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k}{(1 + e^{k(\beta-x_i)})^8}
 \end{aligned}$$

Obtendo a derivada de quarta ordem final simplificada:

$$Y_i'''' = \frac{24\alpha k^4 e^{4k(\beta-x_i)}}{(e^{k(\beta-x_i)} + 1)^5} - \frac{36\alpha k^4 e^{3k(\beta-x_i)}}{(e^{k(\beta-x_i)} + 1)^4} + \frac{14\alpha k^4 e^{2k(\beta-x_i)}}{(e^{k(\beta-x_i)} + 1)^3} - \frac{\alpha k^4 e^{k(\beta-x_i)}}{(e^{k(\beta-x_i)} + 1)^2}$$

#### 4.3.4 Derivadas modelo von Bertalanffy

$$Y_i = \alpha \left( 1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3} \right)^3 + \varepsilon_i$$

Para obter a derivada de primeira ordem foi utilizada a regra da cadeia.

$$Y_i' = 3\alpha \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)^2 \cdot -\frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3} \cdot -k$$

$$Y_i' = \alpha k e^{k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)^2$$

Para obter a derivada de segunda ordem foi necessário utilizar a regra do produto.

$$Y_i'' = \alpha k e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)^2 + \alpha k e^{k(\beta-x_i)} \cdot 2 \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right) \cdot -\frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3} \cdot -k$$

Organizando e multiplicando as equações:

$$Y_i'' = -\alpha k^2 e^{k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)^2 + \frac{2\alpha k^2 e^{2k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)}{3}$$

Aplicando a regra do produto e regra da cadeia para obter a derivada de terceira ordem:

$$Y_i''' = -\alpha k^2 e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)^2 - \alpha k^2 e^{k(\beta-x_i)} \cdot 2 \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right) \cdot -\frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3} \cdot -k$$

$$+ \frac{2\alpha k^2 e^{2k(\beta-x_i)} \cdot -e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k}{3}$$

Organizando e multiplicando as equações:

$$Y_i''' = \alpha k^3 e^{k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)^2 - 2\alpha k^3 e^{2k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right) + \frac{2\alpha k^3 e^{3k(\beta-x_i)}}{9}$$

Aplicando a regra do produto e regra da cadeia para obter a derivada de quarta ordem:

$$\begin{aligned}
 Y_i'''' &= \alpha k^3 e^{k(\beta-x_i)} \cdot -k \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)^2 + \alpha k^3 e^{k(\beta-x_i)} \cdot 2 \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right) \cdot -\frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3} \cdot -k \\
 &\quad - 2\alpha k^3 e^{2k(\beta-x_i)} \cdot -2k \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right) - 2\alpha k^3 e^{2k(\beta-x_i)} \cdot -\frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3} \cdot -k \\
 &\quad + \frac{2\alpha k^3 e^{3k(\beta-x_i)} \cdot -3k}{9}
 \end{aligned}$$

Organizando e multiplicando as equações:

$$\begin{aligned}
 Y_i'''' &= -\alpha k^4 e^{k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)^2 + \frac{2\alpha k^4 e^{2k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)}{3} \\
 &\quad + 4\alpha k^4 e^{2k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right) - \frac{2\alpha k^4 e^{3k(\beta-x_i)}}{3} - \frac{6\alpha k^4 e^{3k(\beta-x_i)}}{9}
 \end{aligned}$$

sendo que a última fração da equação pode ser simplificada por:

$$-\frac{6\alpha k^4 e^{3k(\beta-x_i)}}{9} = \frac{-2\alpha k^4 e^{3k(\beta-x_i)}}{3}$$

Logo, as duas últimas equações de  $Y_i''''$  podem ser somadas. Calculando o mínimo múltiplo comum se chega ao resultado final da quarta derivada:

$$\begin{aligned}
 Y_i'''' &= -\alpha k^4 e^{k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)^2 + \frac{14\alpha k^4 e^{2k(\beta-x_i)} \cdot \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3}\right)}{3} \\
 &\quad - \frac{4\alpha k^4 e^{3k(\beta-x_i)}}{3}
 \end{aligned}$$

O cálculo de PAM, PI, PDM e PDA pode ser encontrado analiticamente por softwares adequados. Os pontos, em meses, mencionados da curva de crescimento para PV e AC dos modelos analisados para ambos os sexos da raça Campolina se encontram na Tabela 4.6. Se observa que o modelo Brody não possui nenhum destes pontos destacados pela curva, sendo considerado o pior modelo para a descrição de peso e altura da raça.

Todos os modelos não captam o PAM, por certamente este se encontrar ainda na fase pré-natal, amostra a qual não se tem acesso. Para von Bertalanffy, o PI não foi obtido e, para Logístico e Gompertz os valores foram discrepantes, sendo o último menor, ou seja, indicando maior precocidade para ambos os sexos, atingidos aos 5 meses de idade.

Para AC feminina, apenas o PDA foi identificado, tendo uma grande diferença entre as estimativas dos modelos Logístico e Gompertz, sendo o segundo mais precoce. Para fêmeas, o PDA ocorre antes do que para machos, afirmando que elas já atingem grande parte da altura adulta antes do primeiro ano de vida, assim como o estudo de Cabral (2004) com a raça MM, afirmando que os potros já possuem até o primeiro ano de vida de 60% a 70% da AC adulta.

Tabela 4.6 – Estimativas dos pontos influentes (em meses) dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para a variável altura de cernelha (cm) e peso vivo, para ambos os sexos, da raça Campolina.

	PI		PDM			PDA		
	Log	Gomp	Log	Gomp	von B	Log	Gomp	von B
<b>ACF</b>	-	-	-	-	-	17	6	-
<b>ACM</b>	-	-	7	3	-	16	11	-
<b>PVF</b>	9	5	25	19	15	36	29	26
<b>PVM</b>	8	5	21	16	13	30	24	22

**Legenda:** PI: ponto de inflexão; PDM: ponto de desaceleração mínima; PDA: ponto de desaceleração assintótica; Log: Logístico; Gomp: Gompertz, von B: von Bertalanffy; ACF: altura de cernelha de fêmeas; ACM: altura de cernelha de machos; PVF: peso vivo de fêmeas, PVM: peso vivo de machos.

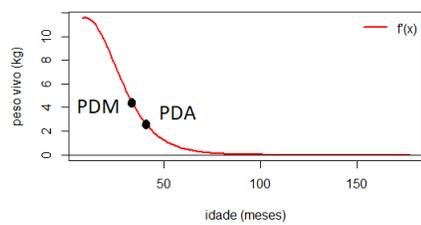
Para AC masculina, o PDM foi identificado, indicando que os machos são mais tardios em relação as fêmeas, pois este ponto para elas já é atingido na fase pré natal. Para PV de fêmeas, os três modelos obtiveram os pontos PDM e PDA, sendo o Logístico considerado mais tardio e o von Bertalanffy mais precoce. O mesmo efeito também acontece para os machos, tendo eles ainda menores valores, corroborando com a Tabela 4.2 para os valores de  $k$ , onde os machos possuem um crescimento mais acelerado.

É possível afirmar que para PV mais pontos influentes foram captados pelos dados, indicando que para esta variável, se comparado com AC, o crescimento é mais lento, pois ocorrem em meses posteriores aos femininos.

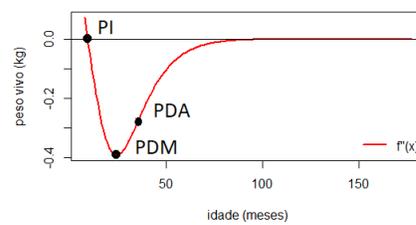
É preciso salientar que todas as Figuras das derivadas nesta seção estão de acordo com a Figura 2.4, porém por seus pontos influentes se encontrarem na fase pré natal ou antes dos seis meses de idade, dados estes que não foram estudados neste trabalho, alguns pontos não foram captados pela análise gráfica das curvas, assim como também não captados pela Tabela 4.6.

A seguir, da Figura 4.4 a 4.7 foram mostrados graficamente os pontos influentes encontrados nas derivadas de 1º a 4º grau da curva de crescimento dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody para fêmeas da variável PV, ocultando os gráficos dos machos por sua grande semelhança entre eles, sendo o mesmo para as Figuras 4.8 a 4.12 com a variável AC, ressaltando apenas a diferença do modelo Gompertz para os sexos, pois para os machos neste modelo foi possível estimar o PDM.

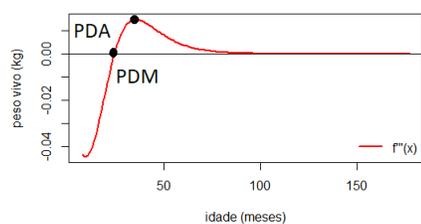
Figura 4.4 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento do peso vivo de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Logístico.



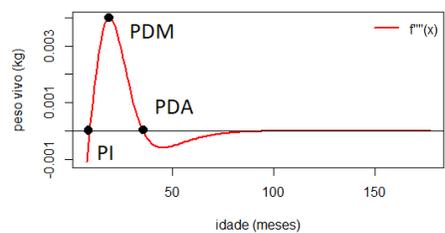
(a)



(b)

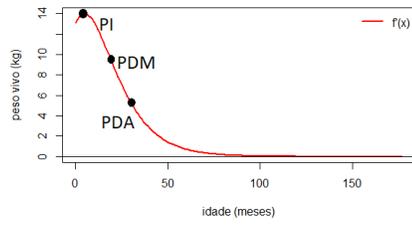


(c)

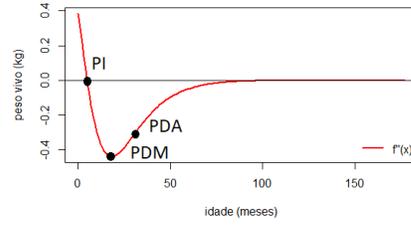


(d)

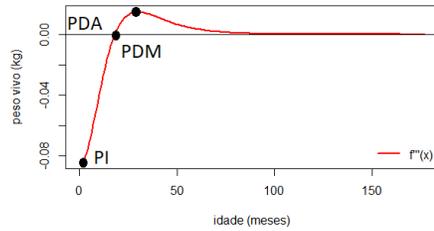
Figura 4.5 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento do peso vivo de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Gompertz.



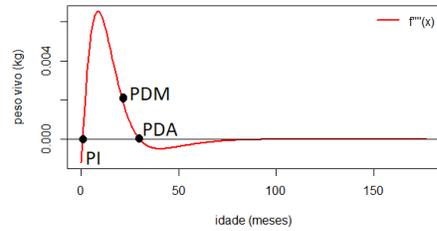
(a)



(b)

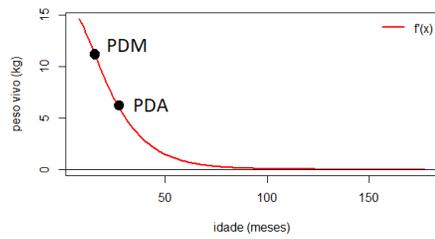


(c)

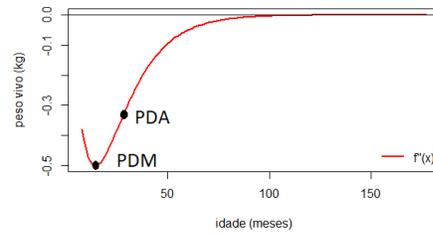


(d)

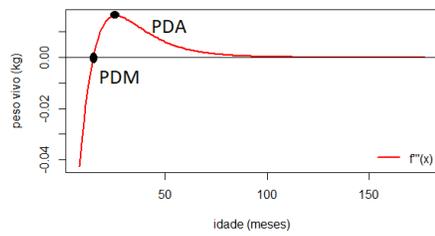
Figura 4.6 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento do peso vivo de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear von Bertalanffy.



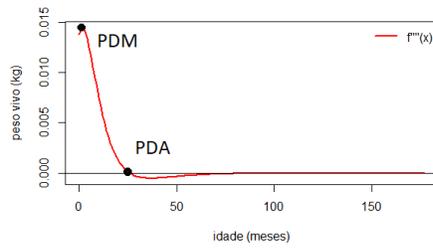
(a)



(b)

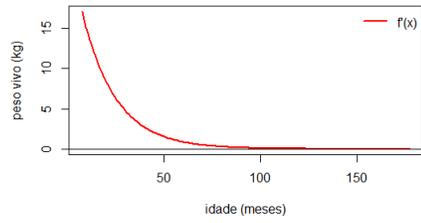


(c)

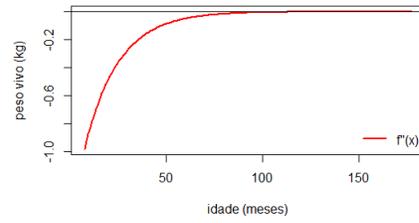


(d)

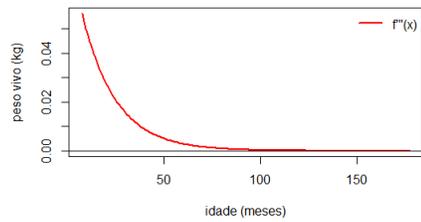
Figura 4.7 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento do peso vivo de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Brody.



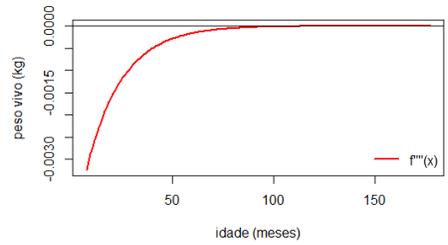
(a)



(b)

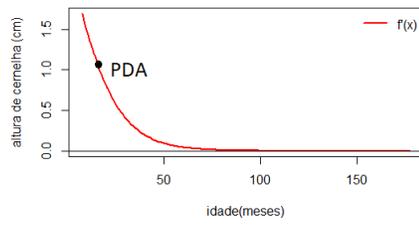


(c)

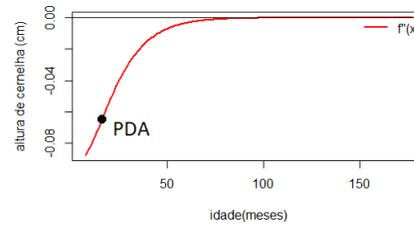


(d)

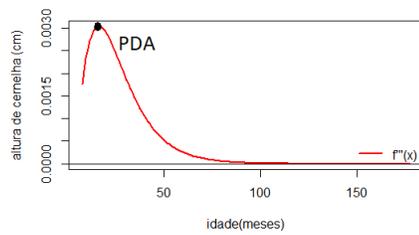
Figura 4.8 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Logístico.



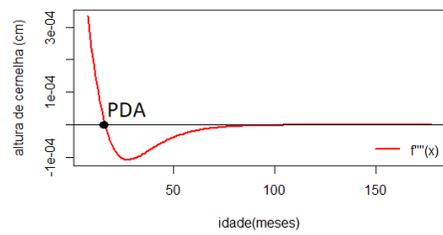
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.9 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Gompertz.

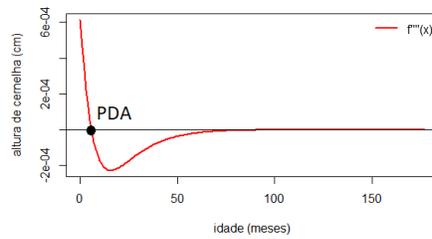
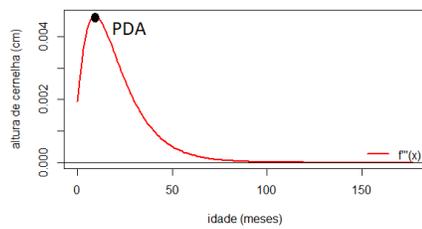
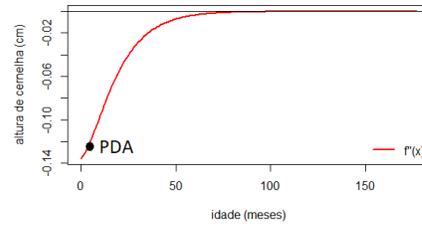
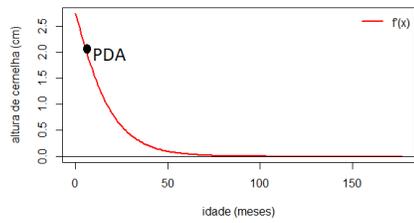


Figura 4.10 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de machos da raça Campolina para o modelo não linear Gompertz.

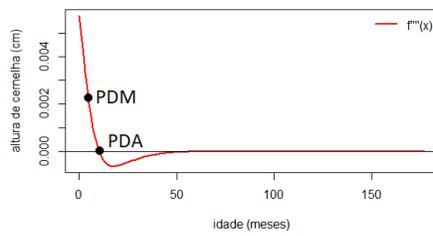
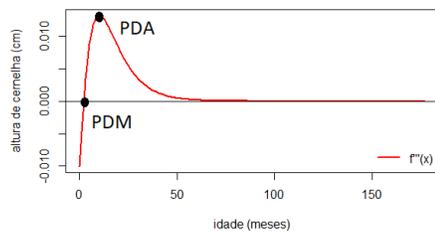
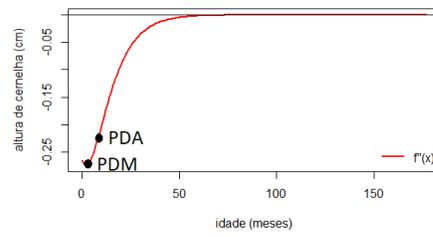
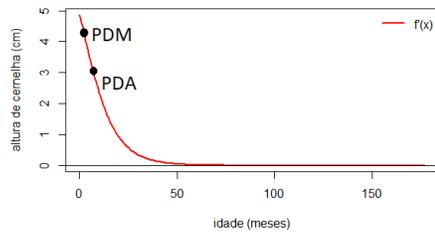


Figura 4.11 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear von Bertalanffy.

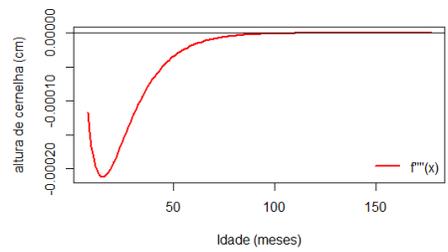
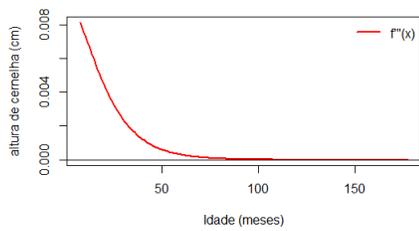
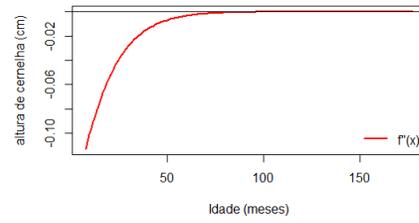
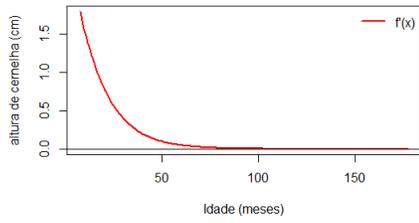
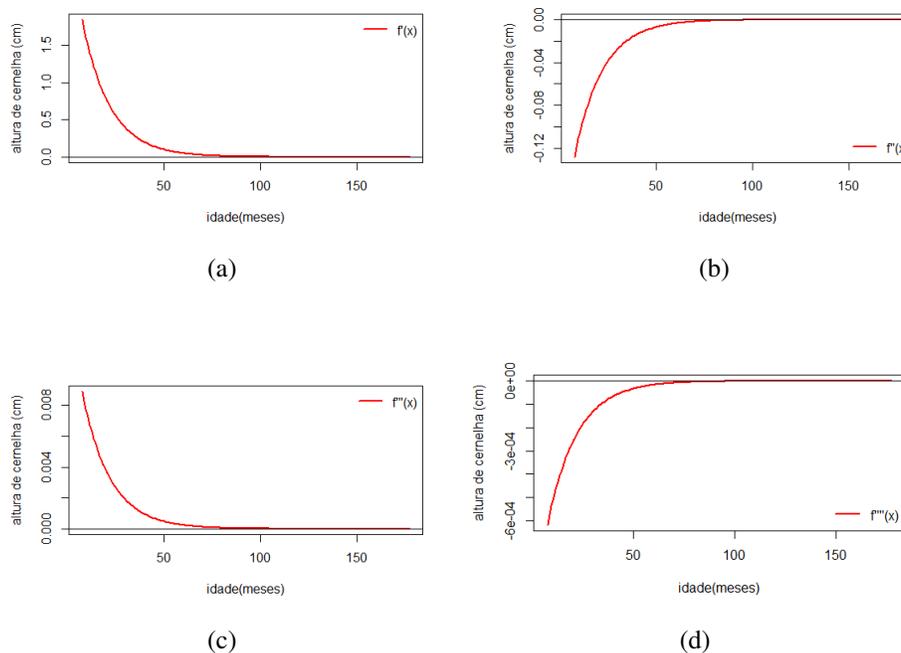


Figura 4.12 – Derivadas de ordem superior da curva de crescimento da altura de cernelha de fêmeas da raça Campolina para o modelo não linear Brody.



Para a variável AC, os modelos von Bertalanffy e Brody não captam nenhum ponto influente da curva, Figura 4.11 e 4.12. Os modelos Logístico e Gompertz conseguem captar PDM e PDA para machos conforme Tabela 4.6 e Figura 4.10 para Gompertz e, apenas PDA para fêmeas, Figura 4.9, indicando assim que os pontos PAM e PI ocorrem em fases anteriores aos seis meses de vida. Para Gompertz, em ambos os sexos, os valores são menores, indicando precocidade, principalmente para as fêmeas, com seu ponto PDA atingido aos 6 meses de idade.

Desta forma o estudo de derivadas de 1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> ordem dos modelos não lineares, contribuíram com o conhecimento da curva de crescimento da raça Campolina para peso e altura em ambos sexos. A falta de informação do período anterior à seis meses de idade dos equinos impactou no formato sigmoidal da curva.

## 5 CONCLUSÃO

O modelo não linear Gompertz foi considerado o mais adequado para a representação da curva de crescimento utilizando o método transversal para obtenção dos dados da raça equina Campolina para descrição de peso vivo e altura de cernelha em machos e fêmeas.

Observou-se que para peso corporal, os pontos influentes para machos acontecem mais cedo se comparado com as fêmeas, que são mais pesadas e possuem o desenvolvimento mais lento. Para altura de cernelha, ambos os sexos possuem medidas em torno de 160 cm, sendo as fêmeas mais precoces no seu desenvolvimento, porém os machos possuem maior velocidade de crescimento.

Os pontos influentes com o uso das derivadas de 1<sup>o</sup> a 4<sup>o</sup> grau contribuíram para discussões da curva animal, indicando que o desenvolvimento em altura de cernelha é mais acelerado do que em peso corporal. Alguns dos pontos influentes do crescimento provavelmente ocorrem ainda na fase pré-natal ou aleitamento.

## 6 REFERÊNCIAS

ANDRADE A.F.C. *et al.* Relação entre escore cardíaco e o condicionamento físico de equinos da raça Mangalarga. **Revista Brasileira de Ciência veterinária**, v.13, n.2, p.125-130, 2006.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DOS CRIADORES DO CAVALO CAMPOLINA - ABCCCampolina. **Regulamento do serviço de registro genealógico e padrão racial**. Belo Horizonte, ABCCCampolina, p.18, 1995.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DOS CRIADORES DO CAVALO MANGALARGA MARCHADO. **Regulamento do registro genealógico da raça equina Mangalarga Marchador** Belo Horizonte: O Lutador, p.65, 1992.

BACAËR, N. **A short history of mathematical population dynamics**. London: Springer, 2011. Verhulst and the logistic equation (1838).

BARCELOS, K.M.C. *et al.* Prevalence of Tarsal Diseases in Champion Mangalarga Marchador Horses in the Marcha Picada Modality and Its Association With Tarsal Angle, **Journal Equine Veterinary Science**, v.27, p.25-30. 2016. <https://doi.org/10.1016/j.jevs.2016.07.012>

BATES, D.M.; WATTS, D.G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. John Wiley Sons, p.365, 1988.

BEM, C.M. *et al.* Growth models for morphological traits of sunn hemp. **Ciências Agrárias**, v.30, n.5, p.2933-2944, 2017. <https://doi.org/10.5433/1679-0359.2017>

BERBARI NETO, F. **Análise das medidas lineares e avaliação de índices morfométricos em garanhões da raça Campolina.** Dissertação (Mestrado em Produção Animal) - Universidade Estadual do Norte Fluminense. Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 2005.

BOZDOGAN, H. Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. **Psychometrika**, v.52, n.3, p.345-370, 1987.

BORGES, G.S. *et al.* Biometria testicular de garanhões da raça Campolina. **Boletim de Indústria Animal**, v.67, n.2, p.157-162, 2010.

BRETAS, M.S. **Associações entre características morfométricas e cinemáticas de equinos da raça Campolina.** Dissertação (Mestrado em Zootecnia)- Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006. p.70.

BREUSCH, T.S., & PAGAN A.R. A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation. **Econometrica**, v.47, n.5, p.1287-294, 1979. <https://doi.org/10.2307/1911963>

BRITO, C. C. RAMOS de *et al.* Modelos de crescimento resultantes da combinação e variações dos modelos de chapman-richards e silva-bailey aplicados em leucaena leucocephala (lam.) de wit. **Ciência Florestal**, Universidade Federal de Santa Maria, v.17, n.2, 2007. <http://dx.doi.org/10.5902/198050981949>

CABRAL, G.C. *et al.* Avaliação morfométrica de equinos da raça Mangalarga Marchador: conformação e proporções corporais. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v.33,n.6, p.1798-1805, 2004. <http://dx.doi.org/10.1590/S1516-3598200>

4000700018.

CARNEIRO, A.P.S. *et al.* Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v.49, n.1, p.57-62, 2014. <http://dx.doi.org/10.1590/S0100-204X2014000100008>

CAVALCANTE L.J. *et al.* Estudo comparativo das proporções morfométricas entre garanhões e castrados da raça Campolina. **Ciências Agrárias**, v.36, n.1, p.353-366, 2015. <http://dx.doi.org/10.5433/1679-0359.2015v36n1p353>

CORDEIRO, G.M.; PRUDENTE, A.A.; DEMÉTRIO, C.G.B. Uma revisão dos modelos normais não-lineares. **Revista de Matemática e Estatística**, v.27, p.360-393. 2009.

COTHRAN, E.G., SANTOS, S.A., MAZZA, M.C.M. *et al.* Genetics of Pantaneiro horse of the Pantanal region of Brazil. **Genetics and Molecular Biology**, v.21, n.3, p.343-349, 1998. <http://dx.doi.org/10.1590/S1415-47571998000300009>

DRAPER, N.R. & SMITH, H. **Applied Regression Analysis**. John Wiley and Sons, v.3, p.736, 1998.

DURBIN, J.; WATSON G. S. Testing for serial correlation in least squares regression I. **Biometrika**, London, v.37, n.3/4, p.409-428, 1950.

ESTATUTO: padrão da raça, Belo Horizonte: ABCCMM, 2000, p.8, Disponível em: < <http://www.abccmm.org.br/regulamentos> >.

FERNANDES, T.J. *et al.* Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum Technology**, Maringá, v.37, n.4, p.397-402, 2015.

FERNANDES, T.J. *et al.* Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, v.9, n.2, p.207-215, 2014.

FLETCHER K.L. *et al.* Influence of age and sex on serum osteocalcin concentrations in horses at weaning and during physical conditioning. **Journal of Equine Veterinary Science**, v.20, n.2, p.124-126, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0737-0806\(00\)80471-2](https://doi.org/10.1016/S0737-0806(00)80471-2)

FONTES, L.R. **Origem e características do cavalo Campolina**. Tese (Concurso para Professor Titular). Escola Superior de Veterinária, Universidade Rural do Estado de Minas Gerais, Belo Horizonte, f.60, 1957.

FOX, J and WEISBERG, S. An R Companion to Applied Regression, Third Edition. Thousand Oaks CA: Sage. 2019. <https://socialsciences.mcmaster.ca/jfox/Books/Companion/>.

FRADINHO, M.J. *et al.* Growth and development of the Lusitano horse managed on grazing systems. **LivestockScience**, 2015. <http://dx.doi.org/10.1016/j.livsci.2015.06.006i>

FREITAS, A.R. Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v.34, n.3, p.786-795, 2005. <http://dx.doi.org/10.1590/S1516->

35982005000300010

FRÚHAUF, A.C. **Uso de modelos não lineares no estudo do crescimento de cedro (*cedrela fissilis*)**. Dissertação (mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras. Lavras, MG, 2018. p.61.

HINTZ, H.F. Evaluate the entire equine diet. **Journal of Equine Veterinary Science**, v.25, n.12, p.540-541, 2005.

KUTNER, M.H. **Applied Linear Statistical Models**. 5th ed. McGraw Hill, 2005.

LAWRENCE, T.L.J; FOWLER, V.R. **Growth of farms animals**. CABI Publishing, New York, p.368, 2002.

LESBRE, F.X. **Precis d'Exterieur du Cheval**. Paris: Freres Ed., 1920.

LEWIS, L.D. **Nutrição clínica eqüina**. 1.ed. São Paulo: Roca, p.710, 2000.

LUCENA, J.E.C. *et al.* Caracterização morfométrica de fêmeas, garanhões e castrados da raça Campolina baseada em índices. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, v.68, n.2, p.431-438, 2016. <https://dx.doi.org/10.1590/1678-4162-8016>

LUCENA, J.E.C. *et al.* Estudo comparativo de proporções morfométricas entre garanhões e castrados da raça Campolina. **Semina: Ciências Agrárias**, Londrina, v.36, n.1, p.353-366, 2015. <https://dx.doi.org/10.5433/1679-0359.2015v36n1p353>

MCMANUS, C.M. *et al.* Non linear growth curves for weight and height in four genetic groups of horses. **Ciência Animal Brasileira**, Goiânia, v.11, n.1, p.80-89, 2010. <http://doi.org/10.5216/cab.v11i1.5400>

MARTIN-ROSSET, W. **Growth and development in the equine**. Wageningen: Academic Publishers, 2005.

MATTOS, R.W.P. **Ajuste de modelos não lineares ao crescimento e ganho de massa de frutos de pequi**. Dissertação (mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras. Lavras, MG, 2016. p.73.

MATTOS, T.B. **Modelos Não Lineares e suas Aplicações**. Monografia (Especialização) - Curso de Estatística, Departamento de Estatística, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, p.59, 2013.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J.A. Algumas considerações em regressão não-linear. **Acta Scientiarum**, Maringá, v.24, n.6, p.1761-1770, 2002.

MISCHAN, M.M. *et al.* Determination of a point sufficiently close to the asymptote in nonlinear growth functions. **Scientia Agricola**, v.68, n.1, p.109-114, 2011. <https://dx.doi.org/10.1590/S0103-90162011000100016>

MISCHAN, M.M.; PINHO, S.Z.de. **Modelos não lineares: funções assintóticas de crescimento**. São Paulo: Cultura Acadêmica , p.184, 2014.

MISERANI, M.G. *et al.* Avaliação dos Fatores que Influem nas Medidas Lineares do Cavallo Pantaneiro. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa , v.31, n.1, p.335-

341, 2002. <http://dx.doi.org/10.1590/S1516-35982002000200007>.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C. **Análise de Séries Temporais**, v.2, p.564, 2006.

MOTA, M.D.S.; OLIVEIRA, H.N.; PUOLI FILHO, J.N.P. Avaliação do crescimento em potros da raça quarto de milha. **Revista Electrónica de Veterinaria**, v.11, n.1, p.1-10, 2010.

MUIANGA, C.A. *et al.* Descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro por modelos não lineares. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v.38, n.1, p.22-32, 2016. <http://dx.doi.org/10.1590/0100-2945-295/14>.

MUNIZ, J.A.; NASCIMENTO, M.D.S.; FERNANDES, T. J. Nonlinear models for description of cacao fruit growth with assumption violations. **Revista Caatinga**, Mossoró, v.30, n.1, p.250-257, 2017. <http://dx.doi.org/10.1590/1983-21252017v30n128rc>

NASCIMENTO, M.S. **Modelos não lineares na descrição do crescimento de frutos de cacauzeiros**. Dissertação (mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras. Lavras, MG, 2014. p.52.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL - NRC. **Nutrient requirements of horses**. 5.ed. Washington, D.C.: National Academy Press, p.100, 1989.

OWENS, F.N.; DUBESKI, P.; HANSONT, C.F. Factors that alter the growth and development of ruminants. **Journal of Animal Science**, v.71, p.3138-3150, 1993.

<https://doi.org/10.2527/1993.71113138x>

PESSOA FILHO, N. **Larousse dos cavalos**. Editora Larousse, p.287, 2006.

PIMENTEL, C.M.M.; LOUVANDINI, Helder; CAMPOS, V.A.L. Non linear growth curves for weight and height in four genetic groups of horses. **Ciência animal brasileira**, Goiânia, v.11, n. 1, p.80-89, 2010. <http://doi.org/10.5216/cab.v11i1.5400>

PIMENTEL *et al.* Gender on the growth of Criollo foals from birth to three years of age. **Ciência Rural**. Santa Maria, v.47, n.1, p.1-7, 2017. <http://dx.doi.org/10.1590/0103-8478cr20150989>

PINHEIRO *et al.* R Core Team. *nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models*. R package version 3.1-139. 2019. <https://CRAN.R-project.org/package=nlme>.

PROCOPIO, A.M.; BERGMANN, J.A.G.; COSTA, M.D. Formação e demografia da raça Campolina. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária de Zootecnia**. Belo Horizonte, v.55, n.3, p.361-365, 2003. <http://dx.doi.org/10.1590/S0102-09352003000300018>

R Development Core Team. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2019. ISBN 3-900051-07-0. <http://www.R-project.org>.

RIBEIRO, R.A. *et al.* Curva de crescimento em altura na cernelha de equinos da raça Mangalarga Marchador considerando-se heterocedasticidade. **Arquivo Brasileiro de medicina veterinária zootecnia**, Belo Horizonte, v.70, n.1, p.272-278,

2018. <http://dx.doi.org/10.1590/1678-4162-9322>.

SANTOS, S.A.; OLIVEIRA, M.R.D.; SERENO, J.R. Using nonlinear models to describe height growth curves in pantaneiro horses. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v.34, p.1133-1138, 1999.

SANTOS, S.A. *et al.* Monitoramento do desenvolvimento de cavalos pantaneiros por meio de curvas de crescimento. **Revista Archivos de Zootecnia**, ISSN 0004-0592, V.56, n.1, p.647-654, 2007.

SARI, B.G. *et al.* Nonlinear Modeling for Analyzing Data from Multiple Harvest Crops. **Agronomy Journal**, Madison, v.110, n.6, p.2331-2342, 2018. <https://doi.org/10.2134/agronj2018.05.0307>

SAVIN, N.E.; WHITE, K. J. The Durbin-Watson test for serial correlation with extreme sample sizes or many regressors. **Econometrica**, v.45, n.8, p.1989-1996, 1977. <http://doi.org/10.2307/1914122>

SEARLE, S.R. **Linear models**. John Wiley and Sons, New York, p.532, 1971.

SEBER G.A.F.; WILD C.J. **Nonlinear regression**. J. Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, p.768, 2003.

SHAPIRO, S.S.; WILK, M. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, v.52, n.3/4, p.591-611, 1965. <http://doi.org/10.2307/2333709>

SPERANDIO, N. *et al.* Comparação do estado nutricional infantil com utilização de diferentes curvas de crescimento. **Revista de Nutrição**, Campinas, v.24, n.4, p.565-574, 2011.

SPIESS, A.N. qpcR: Modelling and Analysis of Real-Time PCR Data. R package version 1.4-1. 2018. <https://CRAN.R-project.org/package=qpcR>.

SOUZA, L.A. *et al.* Curvas de crescimento em bovinos da raça Indubrasil criados no Estado do Sergipe. **Revista de Ciência Agronômica**, Fortaleza, v.41, n.4, p.671-676, 2010. <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-66902010000400022>.

SOUZA, F.A.C. **Curvas de crescimento em equinos da raça Mangalarga Marchador utilizando método transversal**. Dissertação (mestrado em Zootecnia)-Universidade Federal de Lavras. Lavras, MG, 2017a. p.104.

SOUZA, F.A.C. *et al.* Nonlinear modeling growth body weight of Mangalarga Marchador horses. **Ciencia Rural**, v.47, n.4, 2017b. <http://dx.doi.org/10.1590/0103-8478cr20160636>

SOUZA, F.A.C. *et al.* Estimation methods and correction factors for body weight in Mangalarga Marchador horses. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v.46, n.12, p.903-909, 2017c. <http://dx.doi.org/10.1590/s1806-92902017001200005>.

SOUZA, G.S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não linear**. Brasília: EMBRAPA-SPI; EMBRAPA-SEA, p.489 1998.

VELOSO, R.C. *et al.* Seleção e classificação multivariada de modelos não lineares para frangos de corte. **Arquivo Brasileiro de Medicina veterinária Zootecnia**,

v.68, p.191-200, 2016. <http://dx.doi.org/10.1590/1678-4162-7894>

ZAMBORLINI, L.C. *et al.* Estudo genético-quantitativo de medidas lineares de equinos da raça Mangalarga Marchador. I. Estimativas de fatores de ambiente e parâmetros genéticos. **Revista Brasileira de Ciência Veterinária**, v.3, p.33-37, 1996. <http://dx.doi.org/10.4322/rbcv.2015.041>

ZEFERINO, A.M.B. *et al.* Acompanhamento do crescimento. **Jornal de Pediatria**, Porto Alegre, v.79, n.1, p.23-32, 2003. <http://dx.doi.org/10.1590/S0021-75572003000700004>

ZEILEIS, A.; HOTHORN, T. Diagnostic Checking in Regression Relationships. **R News** 2(3), 7-10, 2002. <https://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/>

ZUCCARI, C.E.S.N. *et al.* Eficiência reprodutiva e dinâmica folicular de éguas campolina de acordo com a condição corporal. **Ciência Animal Brasileira**, Goiânia, v.14, n.4, p.406-412, 2013. <http://dx.doi.org/10.5216/cab.v14i4.17693>.