



LUCAS PIMENTA SILVA PAIVA

ANÁLISE DE ALGORITMOS DE ALINHAMENTO EM AHRS

LAVRAS – MG

2020

LUCAS PIMENTA SILVA PAIVA

ANÁLISE DE ALGORITMOS DE ALINHAMENTO EM AHRS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação, área de concentração em Engenharia de Sistemas e Automação, para obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Felipe Oliveira e Silva
Orientador

LAVRAS – MG

2020

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Paiva, Lucas Pimenta Silva

Análise de algoritmos de alinhamento em AHRS / Lucas
Pimenta Silva Paiva. - 2020.

90 p.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Oliveira e Silva.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal
de Lavras, 2020.

Bibliografia.

1. Sistemas de Navegação. 2. Alinhamento. AHRS. I.
Silva, Felipe Oliveira. II. Título.

LUCAS PIMENTA SILVA PAIVA

ANÁLISE DE ALGORITMOS DE ALINHAMENTO EM AHRS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação, área de concentração em Engenharia de Sistemas e Automação, para obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 01 de setembro de 2020.

Prof. DSc. Ettore Apolônio de Barros USP
Prof. DSc. Danilo Alves de Lima UFLA



Prof. Dr. Felipe Oliveira e Silva
Orientador

**LAVRAS – MG
2020**

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e Nossa Senhora Aparecida, minha padroeira, que senti verdadeiramente cuidando de mim nos momentos de dificuldade, e como modelos tenho me espelhado e lutado a viver uma vida em santidade; Aos meus pais, Edir e Istalemar pela minha vida concedida em seu matrimônio, os ensinamentos que me moldaram como cidadão, e sua constante confiança e suporte, que me deram durante toda a minha vida; Em especial minha mãe que sempre me incentivou, e mesmo não tendo me acompanhado presencialmente até o final deixou tanto amor em mim que me motivou a terminar e continuar buscando meu caminho; À minha esposa Daniela, pelo amor, companheirismo, cumplicidade e apoio em todos os momentos até aqui; Aos meus familiares, pois de alguma forma lutaram e contribuíram para me ver conquistando este título de mestre; Aos meus colegas de curso e amigos que fizeram parte desta pequena jornada do meu mestrado, e que levarei como família para toda minha vida; Ao Prof. Dr. Felipe Oliveira e Silva, por acreditar em mim desde o início, pelo suporte que me forneceu ao desenvolvimento deste trabalho, discussões e ensinamentos, como professor orientador e amigo; À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) (processo Nº 88881.169927/2018-01), à FAPEMIG (processo no. CAG-APQ-01449-17), ao CNPq (processo no. 313160/2019-8) e Embrapa (processo Nº 212-20/2018) e ao Departamento de Automática (DAT) da Universidade Federal de Lavras (UFLA), pelo suporte dado à pesquisa. A todos que, com seus conhecimentos, incentivos e críticas colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho.

*Não te indignes por causa dos malfeitores,
nem tenhas inveja dos que praticam a iniquidade.
Porque cedo serão ceifados como a erva,
e murcharão como a verdura.
Confia no Senhor e faz o bem;
habitarás na terra, e verdadeiramente serás alimentado.
Deleita-te também no Senhor,
e te concederá os desejos do teu coração.
Entrega o teu caminho ao Senhor; confia nele, e ele o fará.
(Salmos 37:1-5)*

RESUMO

Na maioria dos sistemas de navegação autônoma, a orientação inicial do veículo não é conhecida. O alinhamento é uma fase que antecede a etapa de navegação, e é responsável pela orientação do veículo. Contudo, sensores inerciais de baixo custo não são recomendados para realizar o processo de alinhamento, uma vez que as leituras de seus girômetros não são capazes de fornecer medições precisas da taxa de rotação terrestre. Diante disso, alguns autores propõem a utilização de magnetômetros, e utilizam observação do vetor densidade de campo magnético terrestre no alinhamento. Este projeto investiga o problema do alinhamento utilizando sensores de baixo nível para Sistemas de Referência de Orientação e Rumo (AHRS) em estado estacionário. Neste trabalho, é apresentada a análise de erros para seis algoritmos de alinhamento. São estes: Algoritmo de Determinação da Orientação via Três Eixos (TRIAD), Algoritmo Estimador de *Quaternion* (QUEST), Algoritmo Baseado em ângulos de Euler (EBA), Algoritmo *Quaternion* Fatorado (FQA), Algoritmo *Quaternion* Algébrico (AQUA) e Algoritmo de Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM). Todos propõem o uso de acelerômetros e magnetômetros para estimar a orientação, porém empregando metodologias diferentes. Como contribuição deste projeto, destaca-se o estudo de algoritmos capazes de determinar valores precisos de orientação utilizando sensores inerciais de baixo custo. Resultados simulados e experimentais corroboram a análise de erros proposta, evidenciando as principais diferenças, vantagens e desvantagens da utilização de cada um destes algoritmos. Dessa forma, este trabalho serve como base para futuras pesquisas, principalmente as que objetivam a navegação autônoma utilizando sensores de baixo custo.

Palavras-chave: Sistemas de Navegação. Alinhamento. AHRS.

ABSTRACT

In most autonomous navigation systems, the initial orientation of the vehicle is not known. The alignment is a phase that precedes the navigation step, and is responsible for determining the orientation of the vehicle. However, low-grade inertial sensors are not recommended to perform the alignment process, since the readings of their angular rate sensors are not capable of providing accurate measurements of the Earth's rotation rate. Therefore, some authors propose the use of magnetometers, and the observation of the Earth's magnetic field density vector in the alignment. This project investigates the problem of stationary alignment for low-grade Attitude and Heading Reference Systems (AHRS). In this work, we present the error analysis for six alignment algorithms. These are: Three-Axis Attitude Determination (TRIAD), QUaternion ESTimator (QUEST), Euler angle-Based Algorithm(EBA), Factored Quaternion Algorithm (FQA), Algebraic Quaternion Algorithm (AQUA) e Super Fast Attitude Determination Algorithm for Consumer-Level Accelerometer and Magnetometer (SAAM). All of them propose the use of accelerometers and magnetometers to estimate the system orientation, but using different methodologies. As a contribution of this project, we highlight the study of algorithms capable of determining precise orientation values using low-grade sensors. Simulated and experimental results corroborate the proposed errors analysis, evidencing the main differences, advantages and disadvantages of the use of each of these algorithms. Thus, this work serves as a basis for future research, especially those aimed at autonomous navigation using low-grade sensors.

Keywords: Navigation System. Alignment. AHRS

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Conceito genérico do sistema de navegação inercial.	15
Figura 2.2 – Representação do sistema de coordenadas do corpo.	16
Figura 2.3 – Representação do sistema de coordenadas inercial.	17
Figura 2.4 – Representação do sistema de coordenadas local.	18
Figura 2.5 – Representação dos ângulos de Euler.	20
Figura 2.6 – Representação da rotação com <i>quaternion</i>	22
Figura 5.1 – Erro de normalidade norte simulado.	50
Figura 5.2 – Erro de normalidade leste simulado.	51
Figura 5.3 – Erro de normalidade vertical simulado.	51
Figura 5.4 – Erro de ortogonalidade norte simulado.	52
Figura 5.5 – Erro de ortogonalidade leste simulado.	52
Figura 5.6 – Erro de ortogonalidade vertical simulado.	53
Figura 5.7 – Erro de alinhamento norte simulado.	53
Figura 5.8 – Erro de alinhamento leste simulado.	54
Figura 5.9 – Erro de alinhamento vertical simulado.	54
Figura 5.10 – Erro de rolamento simulado.	55
Figura 5.11 – Erro de arfagem simulado.	55
Figura 5.12 – Erro de guinada simulado.	56
Figura 5.13 – Mancal a ar semi-esférico de três graus de liberdade.	56
Figura 5.14 – Erro de normalidade norte experimental.	58
Figura 5.15 – Erro normalidade leste experimental.	58
Figura 5.16 – Erro de normalidade vertical experimental.	59
Figura 5.17 – Erro de ortogonalidade norte experimental.	59
Figura 5.18 – Erro de ortogonalidade leste experimental.	60
Figura 5.19 – Erro de ortogonalidade vertical experimental.	60
Figura 5.20 – Erro de alinhamento norte experimental.	61
Figura 5.21 – Erro de alinhamento leste experimental.	61
Figura 5.22 – Erro de alinhamento vertical experimental.	62
Figura 5.23 – Erro de rolamento experimental.	62
Figura 5.24 – Erro de arfagem experimental.	63
Figura 5.25 – Erro de guinada experimental.	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Erros simulados estimados através das equações derivadas.	50
Tabela 5.2 – Erros experimentais estimados através das equações derivadas.	57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Objetivos	11
1.2	Contribuições	11
1.3	Organização do trabalho	12
2	SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL	14
2.1	Sistemas de coordenadas	15
2.2	Matriz de transformação de coordenadas	17
2.3	Ângulos de Euler	19
2.4	<i>Quaternion</i>	21
3	ALINHAMENTO	23
3.1	Alinhamento em AHRS	24
3.2	Algoritmo de Determinação da Orientação via Três Eixos (TRIAD)	25
3.3	Algoritmo Estimador de <i>Quaternion</i> (QUEST)	27
3.4	Algoritmo Baseado em ângulos de Euler (EBA)	28
3.5	Algoritmo <i>Quaternion</i> Fatorado (FQA)	30
3.6	Algoritmo <i>Quaternion</i> Algébrico (AQUA)	33
3.7	Algoritmo de Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM)	36
4	ANÁLISE DE ERROS	41
4.1	TRIAD	43
4.2	QUEST	45
4.3	EBA, FQA, AQUA e SAAM	47
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	49
5.1	Resultados simulados	49
5.2	Resultados experimentais	54
5.3	Discussões finais	60
6	CONCLUSÃO	64
	REFERÊNCIAS	66
	APENDICE A – Derivação de erros do algoritmo TRIAD	69
	APENDICE B – Derivação de erros do algoritmo EBA	75

1 INTRODUÇÃO

Um Sistema de Navegação Inercial (INS) é definido como um sistema automatizado, que utiliza dispositivos capazes de fornecer posição, velocidade e orientação, mais especificamente, acelerômetros e girômetros capazes de medir variáveis tais como força específica e taxa angular do corpo em movimento (GROVES, 2013). A posição, velocidade e orientação são fruto da integração numérica das forças específicas e taxas angulares medidas em instantes específicos de amostragem (SILVA, 2016).

As Unidades de Medição Inercial (IMUs), que compõe um INS, são compostas por um conjunto de acelerômetros e girômetros, que medem as variáveis supracitadas em diferentes eixos, criando uma representação do movimento em um sistema de coordenadas tridimensional (TITTERTON; WESTON, 2004). Esta configuração adquiriu relevância por volta do ano de 1960, sendo chamada de mecanização solidária, ou então, Sistema de Navegação Inercial Solidário (SINS), no qual os sensores estão fixos na estrutura do veículo (TITTERTON; WESTON, 2004).

Atualmente, verifica-se a ampla utilização de IMUs na indústria, as quais se diferem por suas capacidades de prover valores precisos para a solução de orientação. As IMUs podem ser classificadas em categorias como: comerciais, marítimas, de aviação, intermediárias, táticas, automotivas e de consumo (GROVES, 2013). Por sua vez, cada tipo de sensor possui diferentes desempenhos, originando uma relação proporcional entre exatidão e custo. Os valores de forças específicas e taxas angulares que são medidas pelas IMUs são utilizadas para o cálculo de posição, velocidade e orientação do veículo. Como previamente mencionado, isso acontece por meio da integração numérica dos valores fornecidos pelos acelerômetros e girômetros. Contudo, o processo de navegação necessita de uma inicialização, mais conhecido como alinhamento, o qual consiste na estimação da orientação inicial do corpo com relação a uma referência conhecida (SILVA, 2016).

Na maior parte dos casos, esse procedimento é realizado em estado estacionário, devido às condições particulares do veículo (GROVES, 2013). Os ângulos de Euler, matrizes de rotação e *quaternions* são os métodos mais utilizados para representar a orientação de um corpo. Ignorar o processo de inicialização pode desencadear erros inaceitáveis, resultando em grande perda de desempenho do sistema (FARRELL, 2008).

Na maioria dos casos, a orientação inicial do veículo não é conhecida antes de se iniciar a navegação. Quando o próprio Sistema Inercial de Navegação Solidário (SINS) do veículo

define sua orientação em estado estacionário, dá-se o nome de auto-alinhamento (BRITTING, 1971) *apud* (SILVA, 2016). O auto-alinhamento, geralmente, é conduzido em duas fases, o auto-alinhamento grosseiro (CA) e o auto-alinhamento fino (FA). A fase de auto-alinhamento grosseiro, como o próprio nome sugere, define a orientação aproximada do veículo por meio de transformações analíticas diretas (GROVES, 2013). As limitações desse método consistem em se considerar o sistema perfeitamente estacionário, os sensores não corrompidos e as informações externas precisamente conhecidas (GROVES, 2013).

O processo de auto-alinhamento grosseiro determina apenas valores aproximados para a orientação inicial do sistema (SILVA, 2016). Gade (2016) afirma que é necessária uma entrada de referência para qualquer etapa do alinhamento. Em casos estacionários, a orientação pode ser definida por meio da observação de grandezas físicas existentes no globo terrestre, como a gravidade local e a taxa de rotação terrestre (HU et al., 2004). Contudo, alguns tipos de girômetros apresentam limitações para determinar a taxa de rotação da Terra, devido à sua pequena magnitude (HU et al., 2004).

Os girômetros, nas IMUs de nível automotivo ou de consumo, possuem baixo desempenho, e não são recomendados para o alinhamento em estado estacionário sem a utilização de sensores auxiliares (SILVA et al., 2018). Como a taxa de rotação da Terra é muito pequena, as perturbações e erros nas leituras dos girômetros impedem a utilização do método convencional (LI; WANG, 2013). Diante disso, as medições de um magnetômetro podem ser muito úteis para se estimar e corrigir os erros em um sistema de navegação inercial contendo sensores de baixo desempenho. Os girômetros podem ser integrados com magnetômetros, odômetros diferenciáveis, entre outros sensores visando calibrar os erros constantes (vieses) dos sensores, e também melhorar a exatidão do alinhamento e da navegação (GROVES, 2013). Na maior parte desses processos, os acelerômetros medem os ângulos de rolamento e arfagem, enquanto magnetômetros são utilizados para corrigir o ângulo de guinada, que são derivados dos girômetros (LI; WANG, 2013). IMUs que incorporam magnetômetros em sua estrutura, são conhecidos como Sistemas de Referência de Orientação e Rumo (AHRS).

Na literatura é possível encontrar diversos métodos que buscam resolver o problema de alinhamento em AHRS. Algoritmos como o Algoritmo de Determinação da Orientação via Três Eixos (TRIAD), Algoritmo Estimador de *Quaternion* (QUEST), Algoritmo Baseado em ângulos de Euler (EBA), Algoritmo *Quaternion* Fatorado (FQA), Algoritmo *Quaternion* Algébrico (AQUA) e Algoritmo de Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM),

utilizam IMUs que contêm, além de acelerômetros e girômetros, magnetômetros (WU et al., 2018);(YUN; BACHMANN; MCGHEE, 2008). Esses últimos medem a grandeza do campo magnético terrestre para resolver o problema de alinhamento ((STIRLING; FYFE; LACHAPPELLE, 2005);(YUN; BACHMANN; MCGHEE, 2008);(WU et al., 2018)) . Contudo, embora os algoritmos de alinhamento de AHRS tenham sido amplamente discutidos, percebe-se a necessidade de estudos analíticos sobre as propriedades de alinhamento de cada método, assim como a análise da viabilidade e proposta de utilização em IMUs de nível automotivo e de consumo, i.e., para aplicações de baixo custo.

1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é investigar os principais algoritmos de alinhamento grosseiro para AHRS existentes na literatura, e analisar suas viabilidades em aplicações de baixo custo. Definiu-se como os principais algoritmos estudados, os que utilizam medições de força específica e densidade de campo magnético (medidos por acelerômetros e magnetômetros). Por isso, tem-se como objetivos específicos deste trabalho:

- Identificar e estudar, na literatura, os principais algoritmos de alinhamento para AHRS que utilizam, magnetômetros e acelerômetros, como sensores;
- Implementar os algoritmos e conduzir as simulações no ambiente Matlab;
- Realizar testes experimentais *in loco* com uma AHRS de nível automotivo;
- Discutir as propriedades de cada algoritmo e propor o melhor método para o auto-alinhamento de AHRS em aplicações de baixo custo.

1.2 Contribuições

Este trabalho pretende realizar o estudo analítico das formulações e propriedades de algoritmos para AHRS, no processo de alinhamento em estado estacionário. Almeja-se contribuir para a melhoria dos processos de alinhamento com sensores de baixo custo.

Os resultados abordam os algoritmos TRIAD, QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM. Dessa forma é possível confirmar a adequação do processo analítico utilizado no alinhamento grosseiro de AHRS, bem como os erros resultantes de cada algoritmo oriundos das incertezas existentes nos sensores.

Os algoritmos são avaliados em quesitos de exatidão alcançada no processo de alinhamento. Sendo assim, o estudo identifica os algoritmos para AHRS capazes de determinar uma condição inicial menos enviesada para sensores de nível automotivo.

Como contribuições adicionais deste trabalho, pretende-se fornecer subsídio para áreas que demandam a utilização de IMUs de baixo custo, como por exemplo, a agricultura de precisão onde a relação custo/exatidão dos atuais SINS ainda inviabiliza a aplicação.

1.3 Organização do trabalho

Esta dissertação encontra-se dividida em seis Capítulos. O Capítulo 1, supracitado, apresenta a problemática alvo de estudo deste trabalho. Cita os objetivos e as principais contribuições esperadas.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão sistemática sobre Sistemas de Navegação Inercial (INS). Nesse Capítulo são abordados os sistemas de coordenadas (*b-frame*, *i-frame*, *e-frame*, *n-frame* e *l-frame*) e como os mesmos são utilizados no âmbito de SINS. Em seguida, são discutidos os conceitos de transformações de coordenadas, e suas aplicações nos algoritmos propostos. Discute-se, também, os ângulos de Euler e sua aplicação na determinação da orientação inicial do veículo, em termos de rolamento, arfagem e guinada. O conceito do *quaternion* também é apresentado.

O Capítulo 3 introduz o conceito de alinhamento, e a evolução histórica dos métodos utilizados. São descritos os algoritmos TRIAD, QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM, os quais serão simulados e apresentados como resultados neste trabalho.

No Capítulo 4, as expressões analíticas dos erros provenientes de cada método de alinhamento são derivadas. Para fins de análise, são consideradas incertezas nas leituras dos acelerômetros e magnetômetros, e nos valores da gravidade local e campo magnético terrestre (erros de magnitude, ângulos de inclinação e declinação do campo). Para simplificar as análises, as expressões dos erros são derivadas considerando-se um cenário ideal de sistemas de coordenadas do corpo e local coincidentes. Dessa forma, os algoritmos são comparados em rapidez e exatidão.

O Capítulo 5 apresenta os resultados do trabalho, valendo-se de dados simulados e experimentais, bem como a discussão dos mesmos. Apresenta-se também, uma comparação da exatidão de cada algoritmo e, conseqüentemente, dos erros resultantes.

O Capítulo 6, por fim, traz uma breve conclusão dos resultados obtidos, e propõe os futuros estudos previstos com a conclusão desta dissertação, os quais poderão resultar em importantes melhorias nos atuais algoritmos de alinhamento de AHRS.

2 SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

Segundo Groves (2008), um sistema de navegação inercial é definido como um conjunto de algoritmos e sensores capazes de fornecer valores de posição, velocidade e orientação. O conjunto de sensores é conhecido como Unidade de Medição Inercial (IMU), a qual é ligada ao processador de navegação.

Tal processador recebe os dados da IMU e os processa para retornar valores de velocidade, posição e orientação (GROVES, 2013). Na maior parte dos casos, as IMUs são compostas por três acelerômetros e três girômetros, que são montados ortogonalmente (três graus de liberdade) (ZHU; ZHOU, 2009).

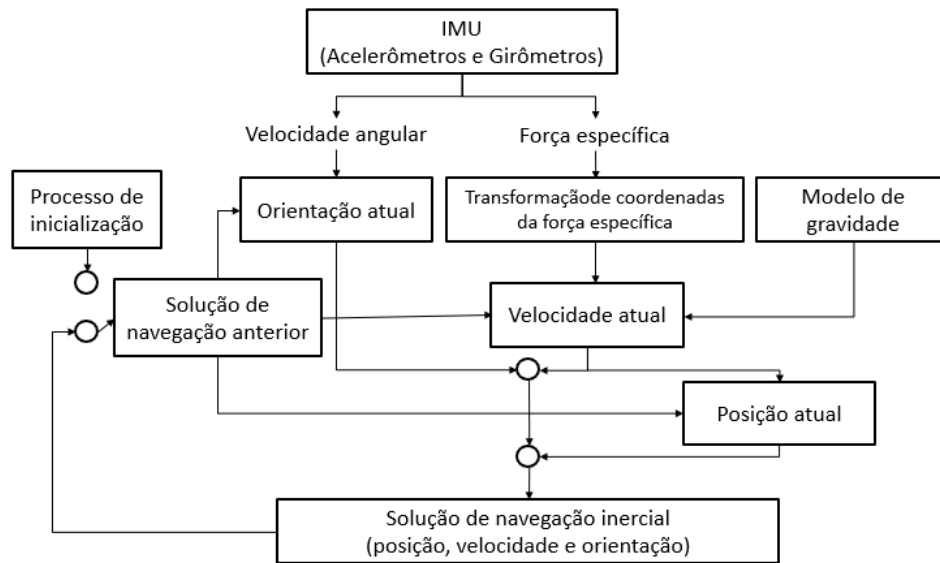
Os girômetros são utilizados para manter a solução de orientação do INS, enquanto os acelerômetros medem a força específica (FARRELL, 2008). As informações de orientação são utilizadas para converter essas grandezas para o sistema de coordenadas utilizado pelo processador (FARRELL, 2008).

Por meio da integração numérica da força específica é possível obter valores de velocidade, os quais, quando integrados novamente, retornam a posição. A integração das velocidades angulares medidas pelos girômetros, por outro lado determina a orientação (ZHU; ZHOU, 2009). Além disso, um modelo gravitacional é necessário para transformar força específica em aceleração. Segundo Gade (2016), as leituras dos acelerômetros devem ser somadas à gravidade, cuja magnitude varia de acordo com a posição do veículo no globo. Ao combinar os dados dos acelerômetros com os dos girômetros, é possível determinar o movimento translacional/rotacional do veículo em um dado referencial inercial, i.e., sua posição nesse referencial (GADE, 2016).

De acordo com Groves (2013), são utilizadas duas mecanizações em INS: *gimballed* e *strapdown*. Na mecanização *gimballed*, os sensores são fixados em uma estrutura que, por sua vez, é acoplada ao veículo por meio de cardã (*gimbals*). Esses têm sua orientação controlada por motores elétricos montados em torno do cardã (SILVA, 2016). Em uma configuração *strap-down*, os sensores estão fixados no próprio chassi do veículo. Estes sistemas são conhecidos na literatura como Sistema de Navegação Inercial Solidários (SINS) (GROVES, 2013).

O conceito genérico de um sistema de navegação inercial pode ser observado na Fig. 2.1.

Figura 2.1 – Conceito genérico do sistema de navegação inercial.



Fonte: Adaptado de Groves (2008).

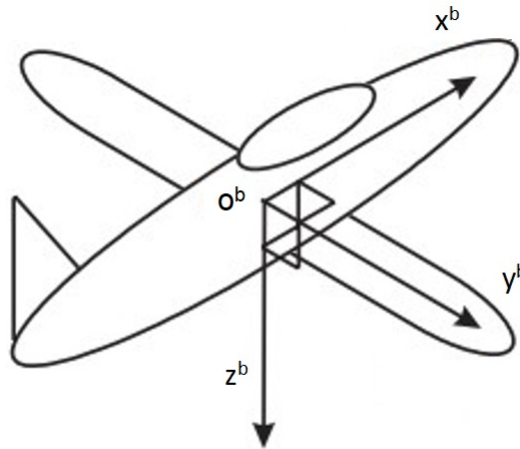
Segundo Farrell (2008), um SINS pode ser implementado por meio de um conjunto de equações de navegação, as quais podem ser divididas em quatro etapas principais: atualização de atitude, transformação dos eixos de resolução de força específica, atualização de velocidade e atualização de posição. O autor ainda destaca que os sistemas de navegação exigem a transformação dos valores medidos e calculados para um mesmo sistema de coordenadas. Os sistemas de coordenadas, são usados para representar um objeto, referência ou conjunto de eixos de revolução (GROVES, 2013).

Os sensores inerciais fornecem medições em relação ao referencial inercial, ao passo que a maior parte das aplicações de interesse requer a posição/velocidade em relação à Terra, e a orientação em algum outro sistema de coordenadas localmente nivelado. Assim, para uma navegação adequada é necessário conhecer a definição e a relação entre os diferentes sistemas de coordenadas.

2.1 Sistemas de coordenadas.

Um sistema de coordenadas pode ser entendido como uma representação matemática na forma de três vetores unitários ortogonais, que contém informações de referência sobre o objeto (LI; LANDRY; LAVOIE, 2008). Na Fig. 2.2, pode-se observar os três vetores ortogonais que estão presentes em um sistema de coordenadas.

Figura 2.2 – Representação do sistema de coordenadas do corpo.



Fonte: Adaptado de Groves (2008).

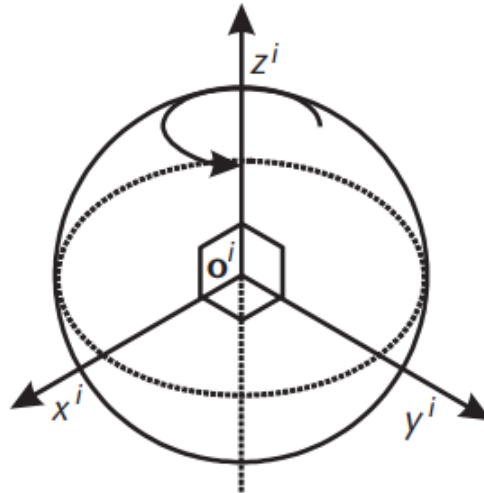
Em um SINS, é importante que se escolha adequadamente o sistema de coordenadas a ser utilizado uma vez que as transformações matemáticas devem ser realizadas sempre nesse referencial (LI; LANDRY; LAVOIE, 2008). Os sistemas de coordenadas mais utilizados na literatura são: o *b-frame*, *i-frame*, *e-frame*, *n-frame* e o *l-frame* (GROVES, 2013). Cada tipo de sistema representa os vetores em uma referência.

O *b-frame* é o sistema de coordenadas do corpo, o qual é definido por eixos ortogonais centrados na estrutura *strapdown* do veículo, conforme pode ser observado na Figura 2.2. Nota-se, que o eixo x é definido ao longo do eixo longitudinal do corpo. O eixo y faz um ângulo de 90 graus à direita do eixo x , e o eixo z é definido completando a regra da mão direita (sistema dextrogiro).

O *i-frame*, ou ECI (Inercial Centrado na Terra), é definido formalmente como aquele que não gira ou translada em relação ao universo (GROVES, 2013). Esse sistema, para fins de navegação terrestre, pode ser considerado como sendo centrado na Terra, e possuindo eixos apontando para o eixo de rotação da Terra, e para o plano equatorial. Ele não é exatamente fixo e gira juntamente com a Terra em torno do sol, além de sofrer a ação da translação e movimento do Sol em torno do universo. Por esse motivo, o sistema ECI não representa um sistema inercial perfeito, mas é válido para fins de navegação. Esse sistema pode ser observado na Fig. 2.3 (GROVES, 2013).

O *e-frame*, ou ECEF (Fixo Centrado na Terra) é o sistema de coordenadas referenciado na Terra. Os eixos de coordenadas desse sistema seguem a mesma definição do sistema ECI (FIGURA2.3), contudo ele rotaciona junto com a Terra. Os eixos x e y do sistema ECEF

Figura 2.3 – Representação do sistema de coordenadas inercial.



Fonte: Groves (2008).

são definidos no plano equatorial, sendo o eixo x voltado para a intercessão do plano com o meridiano de referência, e o y formando 90 graus a Leste (GROVES, 2013).

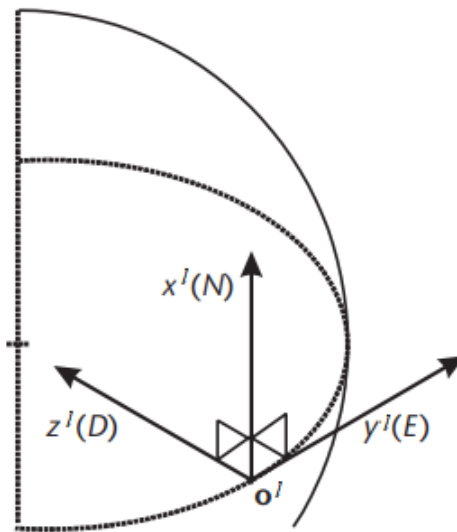
O sistema de navegação local, n -frame ou ENU (Leste, Norte e *Down*), é fixado no centro de massa do veículo. O eixo z aponta na direção normal (para cima) à gravidade, e os eixos x e y apontam, respectivamente, para Leste e Norte (GROVES, 2013). Por sua vez, o sistema de coordenadas l -frame, ou NED (Norte, Leste e *Down*), é definido de forma muito semelhante ao ENU, apresentando contudo seus eixos x e y nas direções Norte e Leste, e z na direção vertical (para baixo) (FIGURA 2.4).

Outro sistema de coordenadas, a ser empregado neste trabalho, é definido por Valenti, Dryanovski e Xiao (2016) como g -frame. Os autores sugerem uma adaptação do sistema de navegação local (NED), onde esse é realinhado com o Norte Magnético, alterando assim a direção dos eixos x e y originais. O eixo x , portanto, aponta na direção da projeção horizontal do campo magnético terrestre, e o eixo z permanece na mesma direção.

2.2 Matriz de transformação de coordenadas

Para se fazer a adequação de vetores de um sistema de coordenadas para outro é necessário realizar o que se conhece por transformação de coordenadas. A matriz de transformação de

Figura 2.4 – Representação do sistema de coordenadas local.



Fonte: Groves (2008).

coordenadas, que realiza tal operação é representada como C_{β}^{α} , onde α é o sistema de coordenadas pós-transformação, e β , pré-transformação (GROVES, 2013) (FARRELL, 2008). Dessa forma, pode-se dizer que,

$$\mathbf{x}^{\alpha} = C_{\beta}^{\alpha} \mathbf{x}^{\beta}, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{x} é um vetor arbitrário.

Assim, é possível dizer que em (2.1), é representada a transformação do vetor \mathbf{x} , do sistema de coordenadas β para o sistema de coordenadas α . Para reverter a transformação de coordenadas, segue a expressão,

$$C_{\alpha}^{\beta} = C_{\beta}^{\alpha T}. \quad (2.2)$$

A rotação ou transformação sucessiva de matrizes de coordenadas pode ser realizada através da multiplicação das matrizes, a saber:

$$C_{\alpha}^{\beta} = C_{\gamma}^{\beta} C_{\alpha}^{\gamma}, \quad (2.3)$$

onde γ é um sistema de coordenadas intermediário.

De acordo com Groves (2013), a ordem de multiplicação é fundamental para o resultado. Caso a ordem de multiplicação em (2.3) mude, o resultado também será alterado.

Após uma transformação, a matriz ou vetor original pode ser recuperado através da reversão do processo, conforme,

$$I = C_{\alpha}^{\beta} C_{\beta}^{\alpha} \quad (2.4)$$

onde I , é a matriz identidade e as matrizes de transformação são definidas ortogonais, i.e., $C_{\alpha}^{\beta} (C_{\alpha}^{\beta})^T = I$ e $\det(C_{\alpha}^{\beta}) = 1$.

A orientação relativa entre dois sistemas de coordenadas, pode ser parametrizada de diferentes formas. As formas mais comuns são: matrizes de transformação de coordenadas (também referidas como matrizes de cossenos diretores), os ângulos de Euler, os vetores de rotação e os *quaternions* (ALI; EL-SHEIMY, 2013).

2.3 Ângulos de Euler

Os ângulos de Euler fornecem uma parametrização alternativa da orientação do corpo com relação ao sistema de coordenadas local. Eles são definidos como três rotações sucessivas do sistema de coordenadas local em direção ao sistema do corpo. Existem doze sequencias de (três) rotações possíveis, no entanto, para este trabalho foi utilizada a sequencia 3,2,1, a qual define os ângulos de: guinada (ψ), arfagem (θ) e rolamento (ϕ) (LI; WANG, 2013).

O rolamento é o parâmetro que determina a variação angular do veículo em torno do seu eixo longitudinal, x . A arfagem determina a variação angular do corpo em torno do seu eixo y . A guinada, por fim, representa a variação angular do veículo em torno de seu eixo z . Os ângulos de Euler são ilustrados na Figura 2.5.

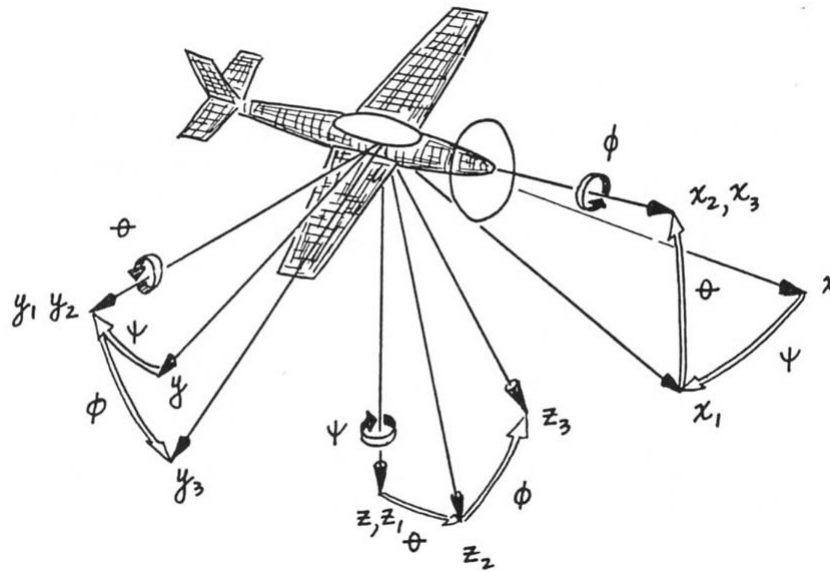
De acordo com a sequência 3,2,1 dos ângulos de Euler, a primeira rotação que ocorre é a guinada. Nesse processo, o eixo z do sistemas de coordenadas local se mantém fixo enquanto os eixos x e y giram (segundo a regra da mão direita). O vetor rotacionado pode ser equacionado como:

$$x^{\psi} = x^{\beta} \cos \psi + y^{\beta} \sin \psi, \quad (2.5)$$

$$y^{\psi} = -x^{\beta} \sin \psi + y^{\beta} \cos \psi, \quad (2.6)$$

$$z^{\psi} = z^{\beta}. \quad (2.7)$$

Figura 2.5 – Representação dos ângulos de Euler.



Fonte: Grawford (1986).

O ângulo de arfagem é obtido fixando-se o eixo y do sistema de coordenadas resultante da rotação em torno do eixo z , e rotacionando-se os demais (segundo a regra da mão direita), produzindo:

$$x^\theta = x^\psi \cos\theta - z^\psi \sin\theta, \quad (2.8)$$

$$y^\theta = y^\psi, \quad (2.9)$$

$$z^\theta = x^\psi \sin\theta + z^\psi \cos\theta. \quad (2.10)$$

Por sua vez, o ângulo de rolamento, resulta da fixação do recém rotacionado eixo x , e rotação dos eixos y e z , intermediários, como segue:

$$x^\alpha = x^\theta, \quad (2.11)$$

$$y^\alpha = y^\theta \cos\phi + z^\theta \sin\phi, \quad (2.12)$$

$$z^\alpha = -y^\theta \sin\phi + z^\theta \cos\phi. \quad (2.13)$$

As três rotações usadas na definição dos ângulos de Euler não comutam, por isso a sequência de rotação é crucial para o sistema. A ordem descrita na literatura, e pelo autor, como

correta é: ψ , θ e ϕ . Se essa ordem for alterada, resultados diferentes podem ser originados para a orientação do veículo.

Segundo Shuster e Markley (2006), ângulos de Euler podem ser convertidos na correspondente parametrização em matrizes de cossenos diretores, como segue:

$$C_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\theta\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & -\cos\theta\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Para retornar os parâmetros em ângulos de Euler, a partir da matriz de cossenos diretores, empregam-se as seguintes equivalências, extraídas de (2.14):

$$\phi = \arctan \frac{C_{32}}{C_{33}}, \quad (2.15)$$

$$\theta = \arctan \frac{-C_{31}}{\sqrt{1 - C_{33}^2}}, \quad (2.16)$$

$$\psi = \arctan \frac{C_{21}}{C_{11}}. \quad (2.17)$$

onde C_{ij} são os componentes de C_{β}^{α} , na linha i e coluna j . Segundo Li e Wang (2013), é adotado, por convenção, um valor de -90° e 90° para o ângulo de arfagem.

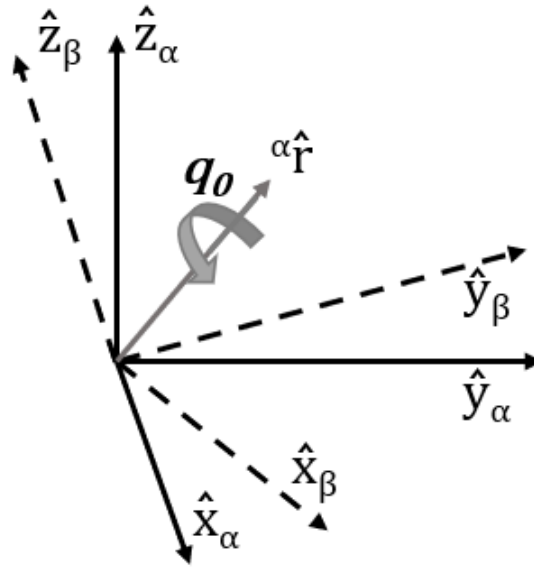
2.4 Quaternion

O *quaternion* é outra parametrização utilizada para se representar a orientação relativa entre dois sistemas de coordenadas (ALI; EL-SHEIMY, 2013). Proveniente do chamado vetor de rotação, ele é um método que evita o problema de singularidade presente em outras representações (ALI; EL-SHEIMY, 2013). Considere o *quaternion* q a seguir,

$$q_{\beta}^{\alpha} = (q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (2.18)$$

onde q_0 é a magnitude da rotação, enquanto as três outras componentes (q_1, q_2, q_3) representam os três eixos sobre os quais essa rotação ocorre. A Figura 2.6 representa o conceito do *quaternion*.

Figura 2.6 – Representação da rotação com *quaternion*.



Fonte: Adaptado de Silva (2016).

O *quaternion* também pode ser convertido em uma matriz de cossenos diretores correspondente. De acordo com Savage (2007), pode-se determinar a matriz C_{β}^{α} a partir do *quaternion* q_{β}^{α} , como segue:

$$C_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

A transformação reversa, para se obter o *quaternion* a partir da matriz de cossenos diretores é tal que (GROVES, 2013):

$$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{\beta 1,1}^{\alpha} + C_{\beta 2,2}^{\alpha} + C_{\beta 3,3}^{\alpha}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{\alpha 1,1}^{\beta} + C_{\alpha 2,2}^{\beta} + C_{\alpha 3,3}^{\beta}}, \quad (2.20)$$

$$q_1 = \frac{C_{\beta 3,2}^{\alpha} - C_{\beta 2,3}^{\alpha}}{4q_0} = \frac{C_{\alpha 2,3}^{\beta} - C_{\alpha 3,2}^{\beta}}{4q_0}, \quad (2.21)$$

$$q_2 = \frac{C_{\beta 1,3}^{\alpha} - C_{\beta 3,1}^{\alpha}}{4q_0} = \frac{C_{\alpha 3,1}^{\beta} - C_{\alpha 1,3}^{\beta}}{4q_0}, \quad (2.22)$$

$$q_3 = \frac{C_{\beta 2,1}^{\alpha} - C_{\beta 1,2}^{\alpha}}{4q_0} = \frac{C_{\alpha 1,2}^{\beta} - C_{\alpha 2,1}^{\beta}}{4q_0}. \quad (2.23)$$

3 ALINHAMENTO

O alinhamento é a etapa que antecede a navegação, e é responsável por retornar os dados de orientação do veículo para fins de inicialização (SILVA et al., 2018). Segundo Bistrov (2012), o alinhamento consiste na determinação da matriz de cossenos diretores inicial que relaciona o sistema de coordenadas do corpo com o sistema de navegação local (NED).

Em uma plataforma *strapdown*, é importante se ter o processo de alinhamento com autonomia, exatidão e rapidez (SILVA et al., 2018). O alinhamento estacionário é geralmente dividido em duas fases: o alinhamento grosseiro e o alinhamento fino (SILVA et al., 2018). De acordo com Silva et al. (2018), o alinhamento grosseiro, como o próprio nome sugere, produz uma estimativa grosseira da orientação inicial do sistema por meio de transformações analíticas bastante diretas. As principais limitações do alinhamento grosseiro relacionam-se com as fracas suposições de sensores inerciais não-corrompidos e sistema perfeitamente estacionário.

O auto-alinhamento grosseiro de IMUs é implementado a partir da medição de grandezas físicas, como a aceleração da gravidade e a velocidade de rotação da Terra (GROVES, 2013). O alinhamento fino, por sua vez, melhora as estimativas fornecidas pela etapa anterior, e compensa os desvios dos sensores. Isso pode ser feito por meio de filtragem estocástica (Filtro de Kalman).

Segundo Choukroun *et al.* (2010) *apud* Silva (2016), obter uma informação de orientação precisa implica em obter uma matriz de transformação ortonormal. Mais precisamente, a propriedade de ortonormalidade de uma matriz de orientação é crucial quando usada para realizar transformações vetoriais a uma alta taxa de computação, como na navegação inercial.

Farrell, Knight e Thompson (1966) estabeleceram o método de alinhamento grosseiro mais referido na literatura, o qual se tornou base para maioria dos trabalhos subsequentes. Esse método determina a orientação do sistema por meio dos vetores gravidade e velocidade angular da Terra. Em 1971, Britting (1971) propôs um novo método de alinhamento grosseiro, baseado no método TRIAD (Determinação da Orientação em Três Eixos) (BLACK, 1964). Esse método estima a matriz de orientação a partir de três vetores linearmente independentes, gerados pelos vetores gravidade, velocidade angular da Terra e o produto vetorial de ambos.

Jiang (1998) buscou novas alternativas para o auto-alinhamento estacionário de IMUs. O autor desenvolveu um método que substituiu o conjunto original de vetores do TRIAD por vetores ortogonais, também gerados a partir do produto vetorial entre a gravidade e a velocidade

angular da Terra. O método foi capaz de diminuir os erros de alinhamento residuais, ficando conhecido como método Ortogonal-TRIAD (O-TRIAD) (JIANG, 1998).

No entanto, uma vez que girômetros de baixo custo têm altas taxas de deriva e de ruído, as saídas dos mesmos não podem ser usadas para se estimar ângulos de guinada. A principal razão é que os girômetros, nesses casos, não são capazes de medir a velocidade angular da Terra (GROVES, 2013). Segundo Bistrov (2012), a taxa de rotação da Terra é cerca de $15^\circ/h$, ao passo que os níveis de ruído dos girômetros de baixo custo são próximo ou maiores que esse valor.

Como o ângulo de guinada é crucial para a inicialização do algoritmo de navegação, magnetômetros podem ser usados para essa estimativa. Segundo Li e Wang (2013), quando magnetômetros compõe uma IMU, essa passa a ser conhecida como Sistema de Referência de Orientação e Rumo (AHRS).

3.1 Alinhamento em AHRS

Um dos primeiros algoritmos de alinhamento empregado em AHRS foi o TRIAD (Determinação da Orientação via Três Eixos), originalmente proposto por Black (1964). Apesar do TRIAD ser um método analítico direto, ele tem a desvantagem de acomodar apenas duas observações vetoriais por cálculo de atitude. Para resolver esse problema, o ESTimador de *Quaternion* (QUEST) foi proposto por Shuster e Oh (1981).

Com base no trabalho de Davenport (1968), o QUEST resolveu de maneira ótima o problema de Wahba (1965), tornando-se um dos métodos de determinação de atitude mais referidos até agora. No entanto, o QUEST apresenta a desvantagem de não dissociar os erros do magnetômetro das estimativas de arfagem e rolamento (FAN; LI; LIU, 2018).

Para superar a deficiência do QUEST, Yun, Bachmann e McGhee (2008) propuseram o Algoritmo *Quaternion* Fatorado (FQA) que, apesar de não ser um método ótimo, demonstrou ter uma exatidão superior (em rolamento e arfagem), além de ser 25% mais rápido. As derivações/alternativas mais recentes, mas ainda não ótimas, do FQA são: o Algoritmo *Quaternion* Algébrico (AQUA) (VALENTI; DRYANOVSKI; XIAO, 2016), e o Algoritmo de Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM) (WU et al., 2018). Todos estes afirmam atingir a mesma exatidão que a do FQA, porém a um menor custo computacional.

Outro método utilizado no alinhamento de AHRS é o Algoritmo Baseado em Ângulos de Euler (EBA), também conhecido como solução de orientação via arco-tangente. Este método

é citado nos trabalhos de (ZHU; ZHOU, 2009) e (FAN; LI; LIU, 2018), e, diferentemente dos demais algoritmos, fornece a solução de orientação na forma de ângulos de Euler. Conforme analisado por Groves (2013), contudo, essa abordagem apresenta problemas de singularidade, especialmente em regiões de altas latitudes.

Na literatura, ainda encontram-se novos algoritmos de alinhamento AHRS, como é o caso do Estimador *Quaternion* de Estrutura Simples (SSQE) (SUH, 2019). Neste projeto contudo, é investigada, apenas, a comparação analítica dos métodos TRIAD, QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM.

3.2 Algoritmo de Determinação da Orientação via Três Eixos (TRIAD)

O algoritmo TRIAD pode ser entendido como um método analítico (não ótimo) criado para a resolução do problema de Wahba (WAHBA, 1965). Segundo Yun, Bachmann e McGhee (2008), o método TRIAD requer, como entrada para o sistema, a medição de dois vetores de referência não paralelos. No caso de AHRS, os vetores de entrada são observações da gravidade local, \mathbf{g}_P , fornecida pelos acelerômetros, e da densidade de campo magnético terrestre, \mathbf{m}_E , fornecida pelos magnetômetros (JIANG, 1998). No sistema de coordenadas de navegação (NED), tem-se:

$$\mathbf{g}_P^l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_P \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

e,

$$\mathbf{m}_E^l = M \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma \\ \sin\alpha\cos\gamma \\ \sin\gamma \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

onde g_P é a magnitude do vetor gravidade, α e γ são ângulos de declinação e inclinação local do campo magnético da Terra, respectivamente, e M corresponde à magnitude da densidade de campo magnético.

Os vetores acima também podem ser representados no sistema de coordenadas do corpo. Assumindo que o AHRS é estacionário, e que os sensores não estão corrompidos, têm-se:

$$\mathbf{g}_P^b \approx -\mathbf{a}_{SF}^b = \begin{bmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{m}_E^b \approx \mathbf{m}_m^b = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

onde \mathbf{a}_{SF} é o vetor força específica, a_x , a_y e a_z são os valores medidos nos três eixos dos acelerômetros, \mathbf{m}_m é o vetor de densidade total do fluxo magnético medido pelos magnetômetros, e m_x , m_y e m_z são os valores medidos nos eixos dos mesmos.

Segundo Zhao et al. (2011), o algoritmo se baseia na construção de duas tríades de vetores, as quais são utilizadas para formar a matriz C_b^l , a saber:

$$N = \left[\begin{array}{ccc} (\mathbf{g}_P^l) & (\mathbf{m}_E^l) & (\mathbf{g}_P^l \times \mathbf{m}_E^l) \end{array} \right] \quad (3.5)$$

e,

$$D = \left[\begin{array}{ccc} (\mathbf{g}_P^b) & (\mathbf{m}_E^b) & (\mathbf{g}_P^b \times \mathbf{m}_E^b) \end{array} \right]. \quad (3.6)$$

A solução para C_b^l pode ser definida como:

$$C_b^l = (N^T)^{-1}(D^T) \quad (3.7)$$

Os ângulos de rolamento, arfagem e guinada podem ser encontrados por meio da relação:

$$\phi = \arctan2 \frac{C_{32}}{C_{33}} = \arctan2 \frac{a_y}{a_z}, \quad (3.8)$$

$$\theta = -\arcsin C_{31} = \arcsin \frac{a_x}{g_P}, \quad (3.9)$$

$$\psi = \arctan2 \frac{C_{21}}{C_{11}} = \arctan2 \frac{g_P m_x \sin \alpha - a_y m_z \cos \alpha + a_z m_z \cos \alpha + M a_x \sin \alpha \sin \gamma}{a_y m_z \sin \alpha - a_z m_y \sin \alpha + g_P m_x \cos \alpha + M a_x \cos \alpha \sin \gamma}. \quad (3.10)$$

onde C_{ij} corresponde ao elemento na linha i e coluna j da matriz de cossenos diretores C_b^l .

3.3 Algoritmo Estimador de *Quaternion* (QUEST)

O Algoritmo QUEST, apresentado nesta seção, tem determinação da orientação do AHRS por meio das leituras de acelerômetros e magnetômetros. Outras derivações/aplicações desse método podem ser encontradas em (CRASSIDIS; MARKLEY; CHENG, 2007) e (BAR-ITZHACK, 1996). O algoritmo QUEST é capaz de fornecer uma resposta ótima e rápida, mesmo com recursos computacionais reduzidos (KUGA; CARRARA, 2013). A lógica do QUEST consiste, a princípio, na resolução do problema de Wahba. Como demonstrado por Davenport (1968), este equivale a encontrar o autovetor normalizado correspondente ao maior autovalor da seguinte matriz K :

$$K = \begin{bmatrix} S - \sigma I & Z \\ Z^T & \sigma \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

sendo,

$$S = B + B^T, \quad (3.12)$$

$$B = \sum \omega_a (\mathbf{v}_a^b \cdot \mathbf{v}_a^l), \quad (3.13)$$

$$Z = \begin{bmatrix} B_{23} - B_{32} & B_{31} - B_{13} & B_{12} - B_{21} \end{bmatrix}^T, \quad (3.14)$$

$$\sigma = \text{tr}[B], \quad (3.15)$$

onde \mathbf{v}_a^b é um vetor arbitrário representado no sistema de coordenadas do corpo, \mathbf{v}_a^l é o mesmo vetor, representado no sistema de coordenadas local l , ω_a é o peso atribuído ao vetor (sendo proporcional às variâncias das medições dos sensores), tal que $\sum \omega_a = 1$, tr é o traço da matriz e B_{ij} representa o elemento B na linha i e coluna j . Os vetores referentes às leituras dos sensores, disponíveis para serem utilizados no algoritmo são, $\mathbf{v}_g = \mathbf{g}_P / |\mathbf{g}_P|$ e $\mathbf{v}_m = \mathbf{m}_E / |\mathbf{m}_E|$.

A solução do *quaternion* ótimo, que relaciona o sistema de coordenadas l com relação a b , pode ser dada como segue (KUGA; CARRARA, 2013):

$$\mathbf{q}_1^b = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}|^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde \mathbf{p} é o vetor de parâmetros calculado como,

$$\mathbf{p} = [(\lambda_{max} + \sigma)I - S]^{-1} Z, \quad (3.17)$$

sendo λ_{max} o maior autovalor de (3.11), o qual é geralmente encontrado numericamente embora uma solução analítica fechada exista, a saber (SHUSTER; OH, 1981),

$$\lambda = \sqrt{\omega_g^2 + \omega_g \omega_m \cos(\theta_g - \theta_m) + \omega_g^2}, \quad (3.18)$$

com:

$$\cos(\theta_g - \theta_m) = (\mathbf{v}_g^1 \cdot \mathbf{v}_m^1)(\mathbf{v}_g^b \cdot \mathbf{v}_m^b) + |\mathbf{v}_g^1 \times \mathbf{v}_m^1| |\mathbf{v}_g^b \times \mathbf{v}_m^b|. \quad (3.19)$$

Segundo Kuga e Carrara (2013), o *quaternion* ótimo pode ser convertido para sua equivalente matriz de rotação fazendo-se,

$$C_b^l = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q})I + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^t - 2q_0\mathbf{q} \times, \quad (3.20)$$

onde, q_0 representa o primeiro valor do *quaternion* q_1^b e $\mathbf{q} \times$ representa a forma antissimétrica do vetor \mathbf{q} , formado a partir dos três últimos elementos de \mathbf{q}_1^b .

3.4 Algoritmo Baseado em ângulos de Euler (EBA)

O EBA é um algoritmo baseado em ângulos de Euler, amplamente utilizado no alinhamento de AHRS, o qual também é conhecido como método do arco tangente (FAN; LI; LIU, 2018). Esse método calcula os ângulos de Euler diretamente. Os trabalhos de Caruso (1997) e Kluga, Kluga e Vecvagars (2016), contemplam a utilização do EBA e descrevem os resultados obtidos.

O EBA determina os ângulos de Euler, baseando-se nas seguintes igualdades:

$$\mathbf{g}_P^b = C_l^b \mathbf{g}_P^l, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{m}_E^b = C_l^b \mathbf{m}_E^l, \quad (3.22)$$

com:

$$C_l^b = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi & \cos\phi \cos\psi + \sin\phi \sin\theta \sin\psi & \sin\phi \cos\theta \\ \sin\phi \sin\psi + \cos\phi \sin\theta \cos\psi & -\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

onde C_l^b é a matriz de rotação que relaciona os triedros de navegação (l) e do corpo (b).

Substituindo (3.1), (3.3) e (3.23) em (3.21), têm-se:

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\sin\phi \cos\theta & -\cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}^T g_P. \quad (3.24)$$

Manipulando-se (3.24):

$$\phi = \arctan2\left(\frac{-a_y}{-a_z}\right), \quad (3.25)$$

$$\theta = \arctan2\left(\frac{a_x}{g_P}\right). \quad (3.26)$$

A partir de (3.25) e (3.26), nota-se que a determinação de ϕ e θ depende unicamente das leituras dos acelerômetros e da gravidade local. Destaca-se que o valor do ângulo de arfagem poderia ser calculado sem o valor de gravidade, uma vez que esta pode ser inferida com base nos valores de a_y e a_z . No entanto, g_P é utilizado aqui uma vez que sua estimativa, baseada em modelos globais, é em geral, mais precisa do que a obtida com base nas saídas dos acelerômetros.

Para a determinação de ψ , é necessária a utilização dos magnetômetros. Substituindo-se (3.2), (3.4) e (3.23) em (3.22), é possível obter a relação:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta & -\cos\phi & \sin\phi \cos\theta \\ \cos\phi \sin\theta & \sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi_m \cos\gamma \\ \sin\psi_m \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

com:

$$\psi_m = \psi - \alpha, \quad (3.28)$$

onde ψ_m é o ângulo de guinada com relação ao norte magnético.

A solução genérica para ψ_m , derivada de (GROVES, 2013), pode ser descrita conforme:

$$\psi_m = \arctan2 \frac{-m_y \cos \phi + m_z \sin \phi}{m_x \cos \theta + m_y \sin \phi \sin \theta + m_z \cos \phi \sin \theta}. \quad (3.29)$$

Utilizando-se as equações (3.25) e (3.26) em (3.29), pode-se obter (BEKIR, 2007):

$$\psi_m = \arctan \frac{g_P(a_z m_y - m_y a_z)}{a_y(a_y m_x - m_y a_x) - a_z(a_x m_z - m_x a_z)}. \quad (3.30)$$

Caso α seja um valor conhecido e ψ pode ser obtido pela sua substituição em (3.28). Para obtenção da matriz de transformação de coordenadas equivalente, pode-se substituir os valores de θ e ϕ e ψ diretamente em (3.23).

3.5 Algoritmo Quaternion Fatorado (FQA)

O FQA foi proposto por Yun, Bachmann e Mcghee (2008), com vistas à estimação da orientação de um AHRS em movimento lento ou estacionário. O FQA utiliza observações da gravidade e do campo magnético da Terra, não sendo, contudo, aplicável em situações onde a aceleração linear é relativamente grande, a menos que seja utilizado um filtro complementar. Este método é muito parecido com o EBA, divergindo, contudo, na parametrização da orientação via *quaternions*.

Seja o *quaternion* q_θ , relativo à rotação do veículo sobre o eixo y do sistema de navegação local. Yun, Bachmann e McGhee (2008) definem q_θ como:

$$q_\theta = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

onde

$$\sin \frac{\theta}{2} = \text{sign}(\sin \theta) \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)}{2}} \quad (3.32)$$

e

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{(1 + \cos\theta)}{2}}. \quad (3.33)$$

Nessas relações, $sign$ é uma função que retorna +1 para argumentos positivos e -1 para argumentos negativos.

A fim de se evitar maior custo computacional, Yun, Bachmann e McGhee (2008) computam:

$$\sin\theta = \bar{a}_x \quad (3.34)$$

e

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} \quad (3.35)$$

com,

$$\frac{\mathbf{a}_{SF}}{|\mathbf{a}_{SF}|} = \begin{bmatrix} \bar{a}_x \\ \bar{a}_y \\ \bar{a}_z \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

onde $\bar{\mathbf{a}}_{SF}^b$ é o vetor força específica normalizado medido pelos acelerômetros.

A determinação do *quaternion* q_ϕ , relativo ao ângulo de rolamento, segue o mesmo princípio de q_θ , ou seja:

$$q_\phi = \cos\frac{\phi}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin\frac{\phi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

onde $\cos\frac{\phi}{2}$ e $\sin\frac{\phi}{2}$ são calculados conforme (3.32) e (3.33) e:

$$\sin\phi = -\frac{\bar{a}_y}{\cos\theta}, \quad (3.38)$$

$$\cos\phi = -\frac{\bar{a}_z}{\cos\theta}. \quad (3.39)$$

O *quaternion* q_ψ , por fim, relativo ao ângulo de guinada, pode ser definido como:

$$q_\psi = \cos\frac{\psi}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin\frac{\psi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

onde $\cos(\psi/2)$ e $\sin(\psi/2)$ também são calculados conforme (3.32) e (3.33). Os valores de $\cos\psi$ e $\sin\psi$, por sua vez, são encontrados como segue:

$$\begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x & M_y \\ -M_y & M_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

onde $N = [N_x \ N_y]^T$ é a densidade do campo magnético da Terra normalizado no plano horizontal e $M = [M_x \ M_y]^T$ é a grandeza correspondente medida pelos magnetômetros. Estes valores podem ser calculados como:

$$N = \frac{1}{\sqrt{(m_N^2) + (m_E^2)}} \begin{bmatrix} {}^e m_N \\ {}^e m_E \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

e

$$M = \frac{1}{\sqrt{({}^e m_x^2) + ({}^e m_y^2)}} \begin{bmatrix} {}^e m_x \\ {}^e m_y \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

onde m_N e m_E são as componentes norte e leste de \mathbf{m}_E^l , e ${}^e m_x$ e ${}^e m_y$ são o segundo e terceiro componentes do *quaternion* intermediário \mathbf{q}_m^e , computado como:

$$\mathbf{q}_m^e = q_\theta \otimes q_\phi \otimes (\mathbf{q}_m^b) \otimes q_\phi^{-1} \otimes q_\theta^{-1}, \quad (3.44)$$

com

$$\mathbf{q}_m^b = \begin{pmatrix} 0 & m_x & m_y & m_z \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

A forma final do *quaternion* que representa a orientação do corpo com relação ao sistema de navegação local pode ser descrita como (YUN; BACHMANN; MCGHEE, 2008):

$$q_b^l = q_\theta \otimes q_\phi \otimes q_\psi. \quad (3.46)$$

A matriz de rotação correspondente a q_b^l pode ser obtida fazendo-se:

$$C_b^l = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

O resultado também pode ser representados na forma de ângulos de Euler, conforme (2.15), (2.16) e (2.17).

3.6 Algoritmo *Quaternion* Algébrico (AQUA)

O algoritmo AQUA foi proposto por Valenti, Dryanovski e Xiao (2016), com o objetivo de melhorar o desempenho dos algoritmos QUEST e FQA. Segundo Valenti, Dryanovski e Xiao (2016), esse algoritmo gera apenas dois *quaternions*: o primeiro corresponde aos ângulos de rolamento e arfagem conjuntamente, enquanto o segundo representa o movimento de guinada (VALENTI; DRYANOVSKI; XIAO, 2016).

A derivação algébrica dos *quaternions*, requer observações da gravidade e do vetor de campo magnético. Esses valores, medidos pelos acelerômetros (\mathbf{a}_{SF}^b) e magnetômetros (\mathbf{m}_m^b), são definidos conforme (3.3) e (3.4). Como se tem duas leituras de sensores independentes é possível formular o *quaternion* rotacionando \mathbf{a}_{SF}^b e \mathbf{m}_m^b com relação aos vetores de referência \mathbf{g}_P^l e \mathbf{m}_E^l .

Os vetores unitários que representam as quantidades supracitadas, no sistema de coordenadas local, são definidos como:

$$\bar{\mathbf{g}}_P^l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$\bar{\mathbf{m}}_E^l = \begin{bmatrix} \bar{m}_N \\ \bar{m}_E \\ \bar{m}_D \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Segundo Valenti, Dryanovski e Xiao (2016), no entanto, não é possível determinar tais *quaternions*, caso haja divergência entre as leituras dos sensores (acelerômetros e magnetômetros). Isso ocorre devido a ruídos presentes no sistema. Sendo assim, os autores sugerem o uso do triedro g , no lugar do triedro l . O triedro g é uma adaptação do sistema de navegação local (NED), onde esse é realinhado com o norte magnético, alterando assim a direção de seus eixos x e y originais. O eixo x do triedro g , portanto, aponta na direção da projeção horizontal do campo magnético terrestre, enquanto o eixo z permanece na direção vertical.

Sejam, portanto, as seguintes relações:

$$-C_b^g \bar{\mathbf{a}}_{SF}^b = \bar{\mathbf{g}}_P^g \quad (3.50)$$

e

$$C_b^g \bar{\mathbf{m}}_m^b = \bar{\mathbf{m}}_E^g, \quad (3.51)$$

onde C_g^b é a matriz de rotação do recém-modificado triedro g para o triedro b , e $\bar{\mathbf{m}}_m^b$ é o vetor densidade de fluxo magnético normalizado medido pelos magnetômetros.

Segundo Valenti, Dryanovski e Xiao (2016), são formadas duas matrizes de rotação, C_{acc} e C_{mag} , correspondentes, respectivamente, aos *quaternions* q_{acc} e q_{mag} , tal que:

$$q_{acc} = \begin{bmatrix} q_{0acc} & q_{1acc} & q_{2acc} & q_{3acc} \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$q_{mag} = \begin{bmatrix} q_{0mag} & 0 & 0 & q_{3mag} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

e

$$C_g^b = C_{acc} C_{mag}. \quad (3.54)$$

Para definição de q_{acc} é importante considerar que qualquer rotação em torno do eixo z do triedro g , em (3.50), não produz alteração no resultado. Portanto, (3.50) é equivalente a:

$$C_{acc} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_x \\ -\bar{a}_y \\ -\bar{a}_z \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Após rearranjo dos termos:

$$\begin{cases} 2q_{0acc}q_{2acc} = -\bar{a}_x; \\ -2q_{0acc}q_{1acc} = -\bar{a}_y; \\ q_{0acc}^2 - q_{1acc}^2 - q_{2acc}^2 = -\bar{a}_z. \end{cases} \quad (3.56)$$

O sistema de equações em (3.56) permite quatro soluções para q_{acc} . Segundo Valenti, Dryanovski e Xiao (2016), duas destas podem ser descartadas, uma vez que possuem forma

negativa. As outras duas soluções seguem as condições $q_{2acc} = 0$, para $\bar{a}_z \geq 0$, e $q_{3acc} = 0$, para $\bar{a}_z < 0$. Dessa forma tem-se:

$$q_{acc} = \begin{cases} [\lambda_1 & -\frac{\bar{a}_y}{2\lambda_1} & \frac{\bar{a}_x}{2\lambda_1} & 0], \bar{a}_z \leq 0; \\ [-\frac{\bar{a}_y}{2\lambda_2} & \lambda_2 & 0 & \frac{\bar{a}_x}{2\lambda_2}], \bar{a}_z > 0, \end{cases} \quad (3.57)$$

onde,

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{-\bar{a}_z + 1}{2}}, \quad (3.58)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{1 + \bar{a}_z}{2}}. \quad (3.59)$$

Para determinar o valor de q_{mag} , utiliza-se a mesma abordagem descrita anteriormente, para q_{acc} . Substituindo os valores em (3.51), tem-se:

$$C_{mag} \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\Gamma} \\ 0 \\ L_z \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

com

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \mathbf{L} = C_{acc}^T(\bar{\mathbf{m}}_m^b), \quad (3.61)$$

$$\Gamma = L_x^2 + L_y^2, \quad (3.62)$$

onde \mathbf{L} é o vetor de campo magnético rotacionado, e C_{acc} é calculado a partir de q_{acc} , via (3.47).

Segundo Valenti, Dryanovski e Xiao (2016), q_{mag} realiza apenas uma rotação sobre eixo z do triedro g , alinhando o eixo x do sistema de coordenadas intermediário, com a direção positiva do norte magnético terrestre. Essa rotação altera apenas o componente de guinada, e não afeta os ângulos de rolamento e arfagem.

Consequentemente, a partir de (3.60), pode-se obter o sistema:

$$\begin{cases} (q_{0mag}^2 - q_{3mag}^2)\sqrt{\Gamma} = L_x; \\ 2q_{0mag}q_{3mag}\sqrt{\Gamma} = L_y; \\ (q_{0mag}^2 + q_{3mag}^2)L_z = L_z. \end{cases} \quad (3.63)$$

A fim de se evitar singularidades em (3.63), Valenti, Dryanovski e Xiao (2016) estabelecem condições para o *quaternion* q_{mag} , sendo elas:

$$q_{mag} = \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{\Gamma+L_x}\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{2\Gamma}} & 0 & 0 & \frac{L_y}{\sqrt{2}\sqrt{\Gamma+L_x}\sqrt{\Gamma}} \right]^T, L_x \geq 0; \\ \left[\frac{L_y}{\sqrt{2}\sqrt{\Gamma-L_x}\sqrt{\Gamma}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\Gamma-L_x}\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{2\Gamma}} \right]^T, L_x < 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

Finalmente, é possível obter o *quaternion* q_g^b , multiplicando-se os dois *quaternions* q_{acc} e q_{mag} , como segue:

$$q_g^b = q_{acc} \otimes q_{mag}. \quad (3.65)$$

Finalmente, q_g^b pode ser convertido para suas equivalentes representações em matriz de rotação e ângulos de Euler, via aplicação direta de (3.47), e (2.15) a (2.17), respectivamente. Vale ressaltar, no entanto, que o ângulo de guinada assim determinado corresponde, na verdade, a ψ_m e não a ψ . Para a obtenção deste último, basta-se aplicar (3.28), dado o conhecimento do ângulo de declinação magnética α .

3.7 Algoritmo de Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM)

O Algoritmo de Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM) foi proposto como uma solução simplificada de alinhamento para AHRS, mas ainda na forma de *quaternions* (WU et al., 2018). O objetivo desse algoritmo é reduzir o custo computacional associado à resolução do problema Wahba, na determinação do máximo autovalor descrito na Seção 3.3.

Para computar a orientação por meio do algoritmo SAAM, utiliza-se as observações normalizadas dos vetores gravidade e densidade de campo magnético terrestre no sistema de coordenadas do corpo, respectivamente, $\bar{\mathbf{g}}_p^b = -\bar{\mathbf{a}}_{SF}^b = (\bar{g}_x, \bar{g}_y, \bar{g}_z)$ e $\bar{\mathbf{m}}_m^b = (\bar{m}_x, \bar{m}_y, \bar{m}_z)$ e seus vetores de referência no sistema de coordenadas intermediário g , i.e., $\bar{\mathbf{g}}_p^g = (0, 0, 1)^T$ e $\bar{\mathbf{m}}_E^g = (\bar{m}_N, 0, \bar{m}_D)$. Por serem normalizados, tem-se:

$$\begin{cases} \bar{g}_x^2 + \bar{g}_y^2 + \bar{g}_z^2 = 1; \\ \bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2 + \bar{m}_z^2 = 1; \\ \bar{m}_N^2 + \bar{m}_D^2 = 1. \end{cases} \quad (3.66)$$

Assim como o QUEST, o SAAM utiliza como base para seu método, a otimização do problema Wahba. Neste caso, Wu et al. (2018) afirmam que podem ser utilizados métodos numéricos como o Algoritmo Gradiente Descendente (GDA), o Algoritmo de Gauss-Newton (GNA) e o Algoritmo Levenberg-Marquardt (LMA). Por outro lado, sabe-se que a resolução do problema de Wahba consiste na solução da matriz K de Davenport, conforme (3.11) a (3.15). No SAAM, e diferentemente do QUEST, a derivação do maior autovalor de K é proposta de forma analítica fechada e o problema do autovetor é resolvido de forma direta. O polinômio característico de K é obtido por:

$$\det(K - \lambda_K I) = 0, \quad (3.67)$$

com

$$\lambda_K^4 + \tau_1 \lambda_K^2 + \tau_2 \lambda_K + \tau_3 = 0. \quad (3.68)$$

Onde:

$$\tau_1 = -4\omega_g^2 + 4\omega_g - 2 + 4\beta\bar{m}_D\omega_g(\omega_g - 1), \quad (3.69)$$

$$\tau_2 = 0, \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = 4\beta\bar{m}_D\omega_g(\omega_g - 1)(-2\omega_g^2 + 2\omega_g - 1) + 4\omega_g^2(\omega_g - 1)^2(\beta^2 - \bar{m}_N^2) + \\ 4\omega_g^4 - 8\omega_g^3 + 8\omega_g^2 - 4\omega_g + 1, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\beta = a_x\bar{m}_x + a_y\bar{m}_y + a_z\bar{m}_z. \quad (3.72)$$

Wu et al. (2018) demonstram que os autovalores de K podem ser computados por meio de:

$$\lambda_{K,1} = \sqrt{(1 - \omega_g)^2 + \omega_g^2} + 2\omega_g(1 - \omega_g)(\beta\bar{m}_D + V), \quad (3.73)$$

$$\lambda_{K,2} = \sqrt{(1 - \omega_g)^2 + \omega_g^2} + 2\omega_g(1 - \omega_g)(\beta\bar{m}_D - V), \quad (3.74)$$

$$\lambda_{K,3} = -\sqrt{(1 - \omega_g)^2 + \omega_g^2} + 2\omega_g(1 - \omega_g)(\beta\bar{m}_D - V), \quad (3.75)$$

$$\lambda_{K,4} = -\sqrt{(1 - \omega_g)^2 + \omega_g^2} + 2\omega_g(1 - \omega_g)(\beta\bar{m}_D + V), \quad (3.76)$$

onde

$$V = \bar{m}_N \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.77)$$

Segundo Yun, Bachmann e McGhee (2008), uma vez que o ângulo de inclinação do campo magnético terrestre $\gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $m_N = \cos \gamma > 0$, e, portanto $V > 0$. Classificando os autovalores de K em ordem decrescente, obtém-se:

$$\lambda_{K,1} \geq \lambda_{K,2} > \lambda_{K,3} \geq \lambda_{K,4}. \quad (3.78)$$

O *quaternion* de orientação deve ser o autovetor associado ao autovalor $\lambda_{K,1}$. Portanto, segundo Wu et al. (2018), na fusão acelerômetro-magnetômetro, tem-se:

$$\bar{m}_D = \beta, \quad (3.79)$$

$$\bar{m}_N = \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.80)$$

Ainda de acordo com Wu et al. (2018), os ângulos de rolamento e guinada não são afetados pela medição do campo magnético. Dessa forma, a expressão analítica para o autovalor máximo de K pode ser simplificada para,

$$\lambda_{K,1} \approx 1. \quad (3.81)$$

Os resultados finais da forma escalonada para $K - I$ podem ser dados por:

$$K - I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a \\ & 1 & \dots & b \\ & & 1 & c \\ & & & d \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

onde,

$$a = \frac{1}{P} [\bar{m}_y(\bar{m}_D - a_x \bar{m}_N + \beta(\omega_g - 1) - \omega_g \bar{m}_D) + a_y(\bar{m}_N \bar{m}_x + \bar{m}_N^2(1 - \omega_g) + \omega_g - \omega_g \beta \bar{m}_D)], \quad (3.83)$$

$$b = \frac{1}{P} [\bar{m}_N \bar{m}_z + \beta \bar{m}_x(1 - \omega_g) + \bar{m}_D \bar{m}_x(\omega_g - 1) + a_z \bar{m}_N(\bar{m}_D(\omega_g - 1) - \beta \omega_g) + a_x(\bar{m}_N^2(\omega_g - 1) - \omega_g + \omega_g \beta \bar{m}_D)], \quad (3.84)$$

$$c = \frac{1}{P} [\bar{m}_N(-(1 + a_z)\bar{m}_y + a_y(\bar{m}_D + \bar{m}_z + \omega_g \beta - \omega_g \bar{m}_D))], \quad (3.85)$$

$$d = \frac{1}{P} [2(1 + \beta^2 - 2\beta \bar{m}_D - \bar{m}_N^2)(1 - \omega_g)\omega_g], \quad (3.86)$$

com

$$P = [-1 - \bar{m}_N \bar{m}_x - a_z \bar{m}_N \bar{m}_x + (\omega_g - 1)a_z \bar{m}_N^2 + (\omega_g - 1)\bar{m}_D \bar{m}_z - a_z \omega_g + a_x \bar{m}_N(\bar{m}_D + \bar{m}_z - \bar{m}_D \omega_g)]. \quad (3.87)$$

Como $\beta = m_D$, a solução fundamental para $(KI)q = 0$ é dada por:

$$\bar{q} = (\bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3), \quad (3.88)$$

$$\bar{q}_0 = (a_z - 1)(m_N + m_x) + a_x(m_D - m_z), \quad (3.89)$$

$$\bar{q}_1 = (a_z - 1)m_y + a_y(m_D - m_z), \quad (3.90)$$

$$\bar{q}_2 = a_z m_D - a_x m_N - m_z, \quad (3.91)$$

$$\bar{q}_3 = -a_y(m_N + m_x) + a_x m_y. \quad (3.92)$$

Isso mostra que a solução do SAAM está livre dos pesos pré-determinados w_g atribuídos às observações vetoriais no QUEST. O *quaternion* resolvido é tal que:

$$\bar{q} = (\bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)^T = \left(\mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2}, \cos \frac{\phi}{2} \right)^T, \quad (3.93)$$

onde \mathbf{n} é um vetor de rotação e ϕ é o ângulo de rotação em torno mesmo. Para compatibilização com o *quaternion* fornecido pelo QUEST, e definido no Capítulo 2.4, (3.93) precisa ser reorganizado e normalizado como segue:

$$q_b^s = \left(\cos \frac{\phi}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2} \right)^T = \frac{(\bar{q}_3, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2)^T}{\sqrt{\bar{q}_0^2 + \bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2 + \bar{q}_3^2}}. \quad (3.94)$$

A matriz de rotação correspondente a q_b^s pode ser obtida via (3.47). O resultado também pode ser representado na forma de ângulos de Euler, conforme (2.15), (2.16) e (2.17).

Vale a pena observar que, assim como no AQUA, o ângulo de guinada obtido corresponde a ψ_m e não ψ . Para a obtenção deste último, basta-se aplicar (3.28), dado o conhecimento do ângulo de declinação magnética α .

4 ANÁLISE DE ERROS

Para fins didáticos, os algoritmos de alinhamento de AHRS abordados neste trabalho se basearam nas seguintes premissas: veículo perfeitamente estacionário, sensores não corrompidos e condições externas (gravidade e campo magnético terrestre) perfeitamente conhecidos.

Segundo Hu et al. (2004) contudo, nenhuma das premissas supracitadas é verdadeira em aplicações práticas. Por isso, na prática, o valor exato da matriz de transformação de coordenadas (ou *quaternion*) não pode ser determinado (SILVA; LEITE FILHO et al., 2013). Segundo Savage (2007), a existência de erros nas variáveis anteriormente descritas produz uma matriz corrompida \hat{C}_b^l , que é apenas uma estimativa da matriz de transformação verdadeira C_b^l , somado a uma matriz de erro, δC_b^l . A relação entre estas matrizes pode ser equacionada como:

$$\hat{C}_b^l = C_b^l + \delta C_b^l = (I + E)C_b^l, \quad (4.1)$$

onde I é uma representação alternativa da matriz identidade e E é a matriz de erros de \hat{C}_b^l .

De acordo com Savage (2007), a matriz de erros E é definida como:

$$E = E_s + E_{ss}, \quad (4.2)$$

com

$$E_s = \frac{E + E^T}{2} = \begin{bmatrix} \eta_N & o_D & o_E \\ o_D & \eta_E & o_N \\ o_E & o_N & \eta_D \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$E_{ss} = \frac{E - E^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_D & -\varphi_E \\ -\varphi_D & 0 & \varphi_N \\ \varphi_E & -\varphi_N & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde E_s é uma matriz simétrica e E_{ss} é uma matriz antissimétrica. Os vetores de erros são definidos como: o (erro de ortogonalidade), η (erro de normalidade) e φ (erro de alinhamento)¹.

De acordo com Silva (2016), manipulando-se (4.1), tem-se que a matriz E também pode ser representada como:

$$E = \delta C_b^l (C_b^l)^T. \quad (4.5)$$

¹ Subscritos N , E e D representam erros nas direções norte, leste e vertical, respectivamente

Ainda segundo o autor, é possível expandir os erros de C_b^l por meio de técnicas de perturbação linear. Dessa forma o valor de δC_b^l é computado como:

$$\begin{aligned} \delta C_b^l = & \frac{\delta C_b^l}{\delta a_x} \delta a_x + \frac{\delta C_b^l}{\delta a_y} \delta a_y + \frac{\delta C_b^l}{\delta a_z} \delta a_z + \frac{\delta C_b^l}{\delta m_x} \delta m_x + \frac{\delta C_b^l}{\delta m_y} \delta m_y \\ & + \frac{\delta C_b^l}{\delta m_z} \delta m_z + \frac{\delta C_b^l}{\delta g_P} \delta g_P + \frac{\delta C_b^l}{\delta \alpha} \delta \alpha + \frac{\delta C_b^l}{\delta \gamma} \delta \gamma + \frac{\delta C_b^l}{\delta M} \delta M, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde, δ_x representa o erro na variável genérica x .

Os erros de normalidade, ortogonalidade e alinhamento podem ser computados por meio da utilização de (4.6) em (4.5), e depois em (4.3) e (4.4) (SILVA, 2016). De acordo com Silva (2016), fórmulas para os erros nos ângulos de Euler podem ser derivadas substituindo-se C_b^l em (4.6), respectivamente por ϕ , θ e ψ . A derivação dos erros na forma de *quaternions*, pode ser elaborada de maneira semelhante (JIANG, 1998) (LOVREN; PIEPER, 1998), com vistas à análise dos algoritmos QUEST, FQA, AQUA e SAAM. Alternativamente, os erros residuais dos *quaternions* podem ser convertidos em correspondentes erros na matriz de transformação de coordenadas ou ângulos de Euler. Isso pode ser feito como segue:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & E_s^T \end{bmatrix} = \frac{(Q^T \delta Q + \delta Q^T Q + \tilde{Q}^T \delta \tilde{Q} + \delta \tilde{Q}^T \tilde{Q})}{2}, \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & E_{ss}^T \end{bmatrix} = (A^T \delta Q - \delta Q^T Q + \tilde{Q}^T \delta \tilde{Q} - \delta \tilde{Q}^T \tilde{Q}) \quad (4.8)$$

sendo

$$Q = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$A = Q\tilde{Q} = \tilde{Q}Q, \quad (4.11)$$

onde q_0, q_1, q_2 e q_3 são, respectivamente, o primeiro, segundo, terceiro e quarto componente do *quaternion*. Já δQ e $\delta \tilde{Q}$ podem ser derivados, substituindo C_b^l em (4.6) por Q e \tilde{Q} , respectivamente.

Segundo Silva (2016), as expressões obtidas por meio de (4.6), para o caso genérico do veículo arbitrariamente orientado com relação ao sistema de navegação são complexas e de difícil interpretação. Sendo assim, o autor adota a condição de perfeito alinhamento entre os triedros do corpo e de navegação, para fins da análise de erros, que segue.

4.1 TRIAD

Para derivação dos erros provenientes do método TRIAD, utiliza-se (3.7) em (4.6), e o resultado em (4.3), (4.4) e (4.5). Dessa forma, as seguintes expressões para os erros residuais do algoritmo são obtidas (para detalhes, vide Apêndice A):

$$\eta_N = \frac{\cos\alpha \tan\gamma}{g_P} \delta a_x + \frac{\cos\alpha \tan\gamma}{g_P} \delta a_y - \frac{\sin^2\alpha}{g_P} \delta a_z + \frac{\cos\alpha}{M \cos\gamma} \delta m_x + \frac{\sin\alpha}{M \cos\gamma} \delta m_y - \frac{\sin^2\alpha}{g_P} \delta g_P + \tan\gamma \delta\gamma - \frac{1}{M} \delta M, \quad (4.12)$$

$$\eta_E = \frac{\cos\alpha \tan\gamma}{g_P} \delta a_x + \frac{\sin\alpha \tan\gamma}{g_P} \delta a_y - \frac{\cos^2\alpha}{g_P} \delta a_z + \frac{\cos\alpha}{M \cos\gamma} \delta m_x + \frac{\sin\alpha}{M \cos\gamma} \delta m_y - \frac{\cos^2\alpha}{g_P} \delta g_P + \tan\gamma \delta\gamma - \frac{1}{M} \delta M, \quad (4.13)$$

$$\eta_D = -\frac{1}{g_P} \delta a_z - \frac{1}{g_P} \delta g_P, \quad (4.14)$$

$$o_N = \frac{\sin(2\alpha)}{4g_P} \delta a_x - \frac{\sin^2 \alpha}{2g_P} \delta a_y + \frac{\sin \alpha \tan \gamma}{2g_P} \delta a_z + \frac{\sin \alpha}{2M \cos \gamma} \delta m_z + \frac{\sin \alpha \tan \gamma}{2g_P} \delta g_P - \frac{\sin \alpha}{2} \delta \gamma - \frac{\sin \alpha \tan \gamma}{2M} \delta M, \quad (4.15)$$

$$o_E = -\frac{\cos^2 \alpha}{2g_P} \delta a_x - \frac{\sin(2\alpha)}{4g_P} \delta a_y + \frac{\cos \alpha \tan \gamma}{2g_P} \delta a_z + \frac{\cos \alpha}{2M \cos \gamma} \delta m_z + \frac{\cos \alpha \tan \gamma}{2g_P} \delta g_P - \frac{\cos \alpha}{2} \delta \gamma - \frac{\cos \alpha \tan \gamma}{2M} \delta M, \quad (4.16)$$

$$o_D = \frac{\sin(2\alpha)}{2g_P} \delta a_z + \frac{\sin(2\alpha)}{2g_P} \delta g_P, \quad (4.17)$$

$$\varphi_N = -\frac{\sin(2\alpha)}{4g_P} \delta a_x + \frac{\cos^2 \alpha + 1}{2g_P} \delta a_y + \frac{\sin \alpha \tan \gamma}{2g_P} \delta a_z + \frac{\sin \alpha}{2M \cos \gamma} \delta m_z + \frac{\sin \alpha \tan \gamma}{2g_P} \delta g_P - \frac{\sin \alpha}{2} \delta \gamma - \frac{\sin \alpha \tan \gamma}{2M} \delta M, \quad (4.18)$$

$$\varphi_E = -\frac{\sin^2 \gamma + 1}{2g_P} \delta a_x + \frac{\sin(2\alpha)}{4g_P} \delta a_y - \frac{\cos \alpha \tan \gamma}{2g_P} \delta a_z - \frac{\cos \alpha}{2M \cos \gamma} \delta m_z - \frac{\cos \alpha \tan \gamma}{2g_P} \delta g_P - \frac{\cos \alpha}{2} \delta \gamma + \frac{\cos \alpha \tan \gamma}{2M} \delta M, \quad (4.19)$$

$$\varphi_D = -\frac{\sin \alpha \tan \gamma}{g_P} \delta a_x + \frac{\cos \alpha \tan \gamma}{g_P} \delta a_y - \frac{\sin \alpha}{M \cos \gamma} \delta m_x + \frac{\cos \alpha}{M \cos \gamma} \delta m_y - \delta \alpha, \quad (4.20)$$

$$\delta_\phi = -\frac{1}{g_P} \delta a_y, \quad (4.21)$$

$$\delta_\theta = \frac{1}{g_P} \delta a_x, \quad (4.22)$$

$$\delta_{\psi} = \frac{\sin\alpha \tan\gamma}{g_P} \delta a_x - \frac{\cos\alpha \tan\gamma}{g_P} \delta a_y + \frac{\sin(2\alpha)}{2g_P} \delta a_z + \frac{\sin\alpha}{M \cos\gamma} \delta m_x + \frac{\cos\alpha}{M \cos\gamma} \delta m_y + \frac{\sin(2\alpha)}{2g_P} \delta g_P + \delta\alpha. \quad (4.23)$$

A análise de erros é proposta para verificar a influência dos erros dos sensores e dos fatores externos no processo de alinhamento em AHRS. Com base em (4.12) a (4.17), nota-se que erros residuais de normalidade e ortogonalidade são desenvolvidos na C_b^l computada pelo TRIAD.

Como já demonstrado por Paiva et al. (2019a), apesar da existência dos erros de normalidade e ortogonalidade, os erros de alinhamento são de maior preocupação, uma vez que eles não são facilmente estimados e compensados, nem mesmo numa eventual etapa posterior de alinhamento fino. Como pode ser observado em (4.18) a (4.20), os erros de alinhamento são causados pela maioria das fontes de erros investigadas neste trabalho (SILVA; HEMERLY; FILHO, 2017). Nota-se, em (4.23), que estas fontes de erro também afetam o erro no ângulo de guinada.

Verifica-se também que, nas equações supracitadas, os componentes de erros ponderados por $\sin\alpha$ são menos prejudiciais para o desempenho do alinhamento, uma vez que α normalmente se situa entre $\pm 20^\circ$ para a maioria das aplicações terrestres (CHULLIAT et al., 2015). Contudo, é possível inferir, de (4.18), que embora $\sin\alpha$ pondere o valor de δm_z , seu efeito pode ser significativo no erro de alinhamento norte φ_N , especialmente na presença do chamado magnetismo "hard-iron" (GROVES, 2013).

Por último, vale ressaltar que, nas equações supracitadas, $\tan\gamma$ gera erros insignificantes em baixas latitudes. Em contrapartida, esse erro aumenta significativamente à medida que a latitude aumenta, podendo causar erros residuais consideráveis no alinhamento. Esta, portanto, é a principal razão pela qual o alinhamento de AHRS não é viável nos polos geográficos da Terra.

4.2 QUEST

A análise de erros do algoritmo QUEST é realizada por meio da substituição de (3.20) em (4.6), e o resultado em (4.3) a (4.5). Dessa forma, as equações de erros residuais do algoritmo QUEST são (o processo de derivação empregado segue os mesmos passos descritos no

Apêndice A para o TRIAD. Tal detalhamento não é apresentado nesse trabalho unicamente por limitações de espaço):

$$\eta_N = \eta_E = \eta_D = o_N = o_E = o_D = 0, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \varphi_N = -\delta_\phi = & \left(\frac{\omega_g + \omega_m \cos^2 \alpha}{g_P} \right) \delta a_y - \\ & \omega_m \left[\frac{\sin(2\alpha)}{2g_P} \delta a_x + \frac{\sin(2\alpha) \sin \gamma}{2M} \delta m_x + \frac{\sin^2 \alpha \sin \gamma}{M} \delta m_y - \frac{\sin \alpha \cos \gamma}{M} \delta m_z + \sin \alpha \delta \gamma \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \varphi_E = -\delta_\theta = & - \left(\frac{\omega_g + \omega_m \sin^2 \alpha}{g_P} \right) \delta a_x + \\ & \omega_m \left[\frac{\sin(2\alpha)}{2g_P} \delta a_y + \frac{\cos^2(\alpha) \sin \gamma}{M} \delta m_x + \frac{\sin(2\alpha) \sin \gamma}{2M} \delta m_y - \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{M} \delta m_z + \cos \alpha \delta \gamma \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\varphi_D = -\delta_\psi = -\frac{\sin \alpha \tan \gamma}{g_P} \delta a_x + \frac{\cos \alpha \tan \gamma}{g_P} \delta a_y - \frac{\sin \alpha}{M \cos \gamma} \delta m_x + \frac{\cos \alpha}{M \cos \gamma} \delta m_y - \delta \alpha. \quad (4.27)$$

Como é possível observar em (4.24), o algoritmo QUEST não apresenta erros de normalidade e ortogonalidade em sua matriz de rotação. Isso condiz com o estudo de Jiang e Lin (1991), onde é provada a não existência desses erros quando a orientação é parametrizada na forma de *quaternions*. Isso também significa que há uma redução do custo computacional do algoritmo.

As equações (4.25) a (4.27), apresentam as expressões de erros residuais na matriz de rotação obtida a partir do algoritmo QUEST. Esse resultado havia sido evidenciado apenas de forma numérica em Yun, Bachmann e McGhee (2008). Os erros de alinhamento norte e leste do algoritmo QUEST são mais corrompidos pelos valores de erros dos magnetômetros δm_x e δm_y . Isso pode implicar em uma grande influência nos valores de alinhamento, em especial norte e leste, em situações sujeitas a interferências magnética (*hard irons*). Outro ponto importante em (4.25) e (4.26) é a influência de ω_m . Como já citado anteriormente esse valor é o peso utilizado nas equações do algoritmo QUEST para ponderar os valores das leituras dos magnetômetros.

Sendo assim, percebe-se que quanto maior o valor de ω_m , maior será o erro em ϕ_N e ϕ_E . No entanto, o valor de ω_m tendendo, no limite, à zero, $\omega_m \rightarrow 0$, poderia gerar um resultado de orientação indeterminado, uma vez que apenas o vetor \mathbf{v}_g continuaria sendo observado.

Dessa forma, pode-se dizer que a análise de erros do algoritmo QUEST corrobora com os resultados numéricos obtidos em Yun, Bachmann e McGhee (2008).

4.3 EBA, FQA, AQUA e SAAM

Assim como nos métodos TRIAD e QUEST, expressões analíticas para os erros provenientes do método EBA também podem ser derivadas. Substituindo-se (3.25) a (3.30) em (3.23) e a transposta do resultado em (4.6), produz (para detalhes, vide Apendice B):

$$\eta_N = \eta_E = \eta_D = o_N = o_E = o_D = 0, \quad (4.28)$$

$$\varphi_N = -\delta\phi = \frac{1}{g_P} \delta a_y, \quad (4.29)$$

$$\varphi_E = -\delta\theta = -\frac{1}{g_P} \delta a_x, \quad (4.30)$$

$$\varphi_D = -\delta\psi = -\frac{\sin\alpha \tan\gamma}{g_P} \delta a_x + \frac{\cos\alpha \tan\gamma}{g_P} \delta a_y - \frac{\sin\alpha}{M \cos\gamma} \delta m_x + \frac{\cos\alpha}{M \cos\gamma} \delta m_y - \delta\alpha. \quad (4.31)$$

É possível perceber que, à semelhança do algoritmo QUEST, o algoritmo EBA elimina os erros de normalidade e ortogonalidade, reduzindo assim o custo computacional de implementação do mesmo. Os erros desenvolvidos no EBA são exclusivamente erros de alinhamento e nos ângulos de Euler. Observa-se também, que os erros de alinhamento norte, leste e vertical são iguais em magnitude e opostos em sinal aos erros de rolamento, arfagem e guinada, respectivamente.

Adicionalmente, verifica-se em (4.29) e (4.30) que, diferentemente do TRIAD e QUEST, os erros de alinhamento norte e leste no EBA não são afetados por erros nos magnetômetros, ou no campo magnético terrestre. Isto indica que menores erros de alinhamento em norte e leste são esperados na implementação do EBA.

Os métodos FQA, AQUA e SAAM, à semelhança do QUEST, utilizam parametrizações de orientação na forma de *quaternions*. Expressões analíticas para os erros provenientes desses métodos podem ser derivadas empregando-se as equações (4.6) a (4.11) e o mesmo raciocínio descrito nos Apêndices A e B.

Procedendo de tal maneira, encontram-se exatamente as mesmas expressões analíticas obtidas para o algoritmo EBA. Isso confirma o trabalho de Yun, Bachmann e McGhee (2008), no qual o desempenho dos algoritmos EBA e FQA foi dito ser semelhante. Dessa forma, os erros dos métodos FQA, AQUA e SAAM podem ser considerados iguais aos descritos em (4.28) a (4.31), e não são repetidos nesta seção.

Com base nas análises de erros apresentadas, conclui-se que o FQA, AQUA e SAAM, assim como o EBA, são superiores ao TRIAD e QUEST (ao menos do ponto de vista de exatidão). Adicionalmente, pode-se considerar o FQA e AQUA ainda superiores ao EBA, uma vez que eles evitam problemas de singularidade, bem como evitam o cálculo de funções trigonométricas (YUN; BACHMANN; MCGHEE, 2008).

Do ponto de vista de eficiência computacional, Valenti, Dryanovski e Xiao (2016), ainda concluem que o AQUA pode ser considerado superior ao FQA, pois o procedimento para determinação do ângulo de guinada, no AQUA, elimina a necessidade da pré-definição do campo magnético. De acordo com Wu et al. (2018), o SAAM também é superior ao FQA, uma vez que é mais rápido na estimação da orientação.

A análise de erros mostrada neste trabalho corrobora com os estudos de Paiva et al. (2019a) e Paiva et al. (2019b) que apresentaram derivação dos erros de alinhamento dos algoritmos TRIAD, EBA, FQA e AQUA, para AHRS.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 Resultados simulados

Para validar a análise de erros apresentada no Capítulo 4, bem como as verificações descritas, foi elaborado um teste simulado. Os resultados se baseiam no teste de desempenho do processo de alinhamento usando os algoritmos TRIAD, QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM. Para esta simulação, foram considerados valores da latitude local $-23,2131^\circ$, longitude $-45,8606^\circ$ e altitude 629 metros. Os parâmetros da Terra, como raio equatorial, elipticidade, velocidade angular, entre outros, foram baseados no trabalho de Rogers (2007) *apud* SILVA (2016). A aceleração da gravidade local e o campo magnético da Terra foram calculados de acordo com os modelos descritos em Britting (1971) e Chulliat et al. (2015), respectivamente.

Por convenção, as simulações foram concebidas assumindo-se que o sistema de coordenadas do corpo é perfeitamente alinhado com o sistema de coordenadas de navegação, representando assim, o cenário ideal adotado no Capítulo 4.

Os sensores (acelerômetros e magnetômetros) foram simulados com um intervalo de amostragem de 100Hz. Os vieses simulados dos magnetômetros e acelerômetros foram de, respectivamente, 5 mG e 5 mg. Também foram introduzidos ruídos aleatórios para os acelerômetros ($0,1\text{mg}/\sqrt{\text{Hz}}$) e magnetômetros ($0,2\text{mG}/\sqrt{\text{Hz}}$). Incertezas na gravidade local e campo magnético local também foram consideradas, a saber, 0,005mg, 0,1 mG (magnitude do campo) e 0,1 deg (declinação e inclinação magnética), respectivamente. Os valores simulados para os erros supracitados são condizentes com sensores de nível automotivo (GROVES, 2013).

Com base nos erros simulados foi possível obter estimativas para os erros de normalidade, ortogonalidade, alinhamento e ângulos de Euler para cada um dos algoritmos investigados. Esses valores foram obtidos das fórmulas apresentadas no Capítulo 4, e estão representados na Tabela 5.1. Por outro lado, os erros efetivamente obtidos são mostrados nas Figuras 5.1 a 5.12.

Nota-se, nas Figuras 5.1 a 5.6, que, como esperado, os métodos QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM não apresentaram erros de normalidade ou ortogonalidade. Somente o algoritmo TRIAD resultou nesses dois tipos de erros, em todos os eixos. Esse resultado corrobora com o trabalho de Paiva et al. (2019b).

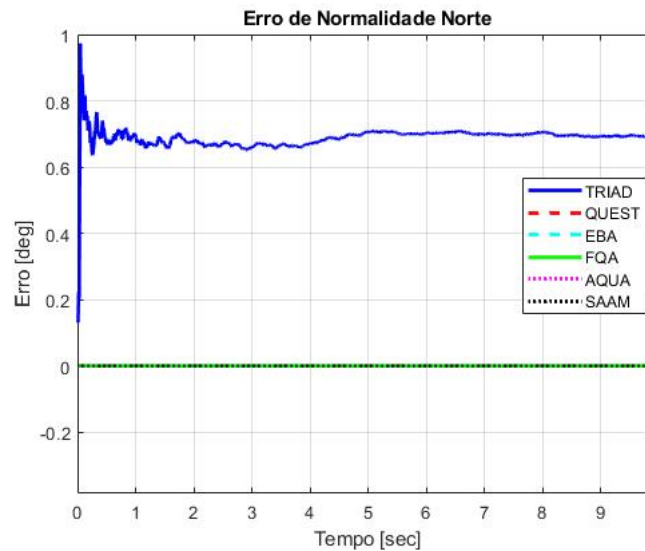
Nas Figuras 5.7, 5.8 e 5.9, é possível observar que o algoritmo TRIAD produz o menor erro de alinhamento na direção norte, seguido pelo algoritmo QUEST. Os algoritmos EBA,

Tabela 5.1 – Erros simulados estimados através das equações derivadas.

Erros	TRIAD	QUEST	EBA	FQA	AQUA	SAAM
η_N [deg]	0,6163	0	0	0	0	0
η_E [deg]	0,4084	0	0	0	0	0
η_D [deg]	-0,2874	0	0	0	0	0
o_N [deg]	-0,2091	0	0	0	0	0
o_E [deg]	0,5224	0	0	0	0	0
o_D [deg]	-0,0992	0	0	0	0	0
φ_N [deg]	0,0779	0,1802	0,2871	0,2871	0,2871	0,2871
φ_E [deg]	-0,8095	-0,5542	-0,2871	-0,2871	-0,2871	-0,2871
φ_D [deg]	1,6754	1,6754	1,6754	1,6754	1,6754	1,6754
$\delta\phi$ [deg]	-0,2871	-0,1802	-0,2871	-0,2871	-0,2871	-0,2871
$\delta\theta$ [deg]	0,2871	0,5542	0,2871	0,2871	0,2871	0,2871
$\delta\psi$ [deg]	-1,7940	-1,6754	-1,6754	-1,6754	-1,6754	-1,6754

Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.1 – Erro de normalidade norte simulado.



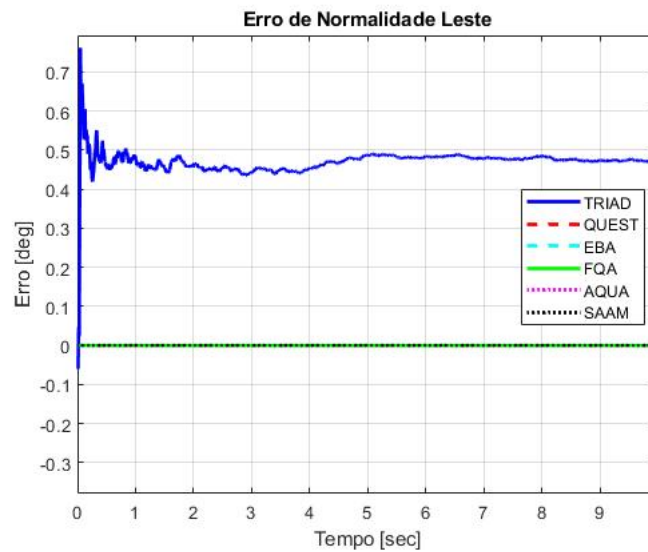
Fonte: Do Autor (2020).

FQA, AQUA e SAAM possuem comportamento parecido, sendo estes os maiores erros nesta direção.

No que concerne aos erros de alinhamento leste, a Figura 5.8 mostra que os algoritmos EBA, FQA, AQUA e SAAM têm melhor desempenho e possuem um tempo de convergência menor. O algoritmo QUEST possui um tempo de convergência parecido com estes, mas um erro maior, ao passo que o TRIAD apresenta maior tempo de convergência e maior erro. A Figura 5.9 demonstra que, conforme previsto, não há grandes discrepâncias entre os erros de alinhamento vertical produzidos por todos os algoritmos investigados.

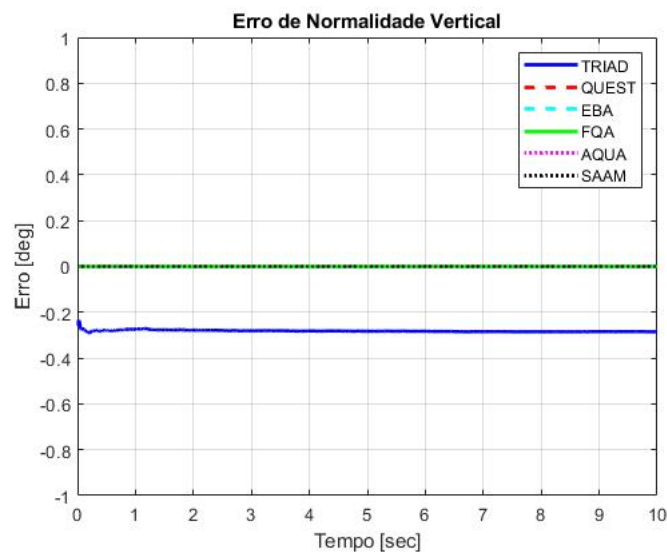
Conforme observado na Figura 5.10, os erros de rolamento quase se sobrepõem para os algoritmos TRIAD, EBA, FQA, AQUA e SAAM, apresentando um comportamento muito

Figura 5.2 – Erro de normalidade leste simulado.



Fonte: Autor.

Figura 5.3 – Erro de normalidade vertical simulado.

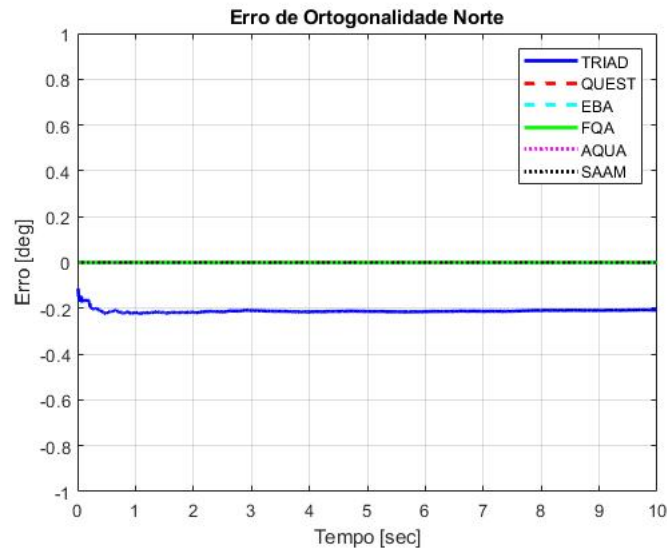


Fonte: Do Autor (2020).

parecido entre eles. Como discutido no Capítulo 4, os algoritmos investigados estimam o ângulo de rolamento apenas com medidas dos acelerômetros, e utilizam, portanto, uma abordagem muito parecida. Dessa forma, a semelhança é justificada. Por outro lado, o algoritmo QUEST, que também se vale de medições dos magnetômetros para computar o ângulo de rolamento, gera um erro diferente dos demais (e em conformidade com o predito na Tabela 5.1).

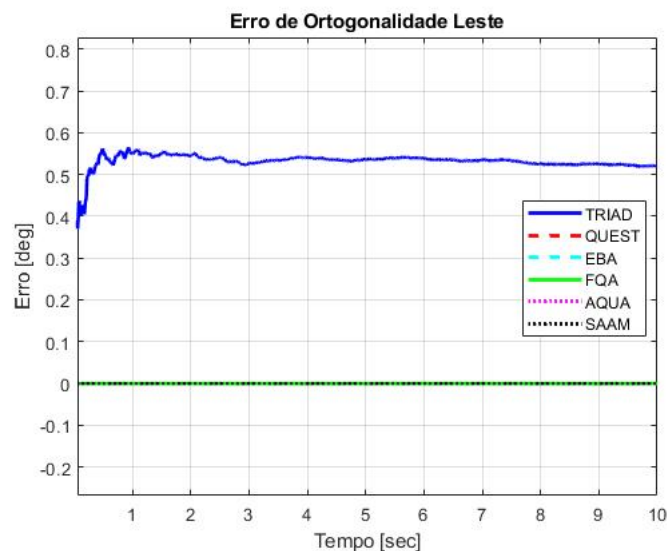
Na Figura 5.11, pode-se observar que os algoritmos TRIAD, EBA, FQA, AQUA e SAAM assumem, novamente, comportamento de erro de arfagem parecidos. O algoritmo QUEST, por sua vez, resulta em erro de arfagem maior que os demais. Esse comportamento

Figura 5.4 – Erro de ortogonalidade norte simulado.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.5 – Erro de ortogonalidade leste simulado.



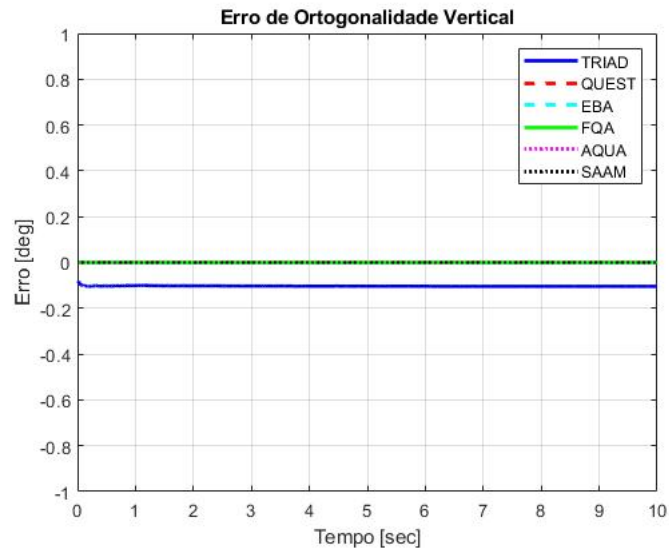
Fonte: Do Autor (2020).

condiz com as equações derivadas, uma vez que o erro de arfagem do algoritmo QUEST, assim como erro de rolamento, sofrem com a influência dos magnetômetros.

Por fim, o erro residual de guinada, desenvolvido pelo algoritmo TRIAD, mostrou-se ligeiramente maior que o dos algoritmos EBA, FQA, AQUA, QUEST e SAAM conforme ilustrado na Figura 5.12.

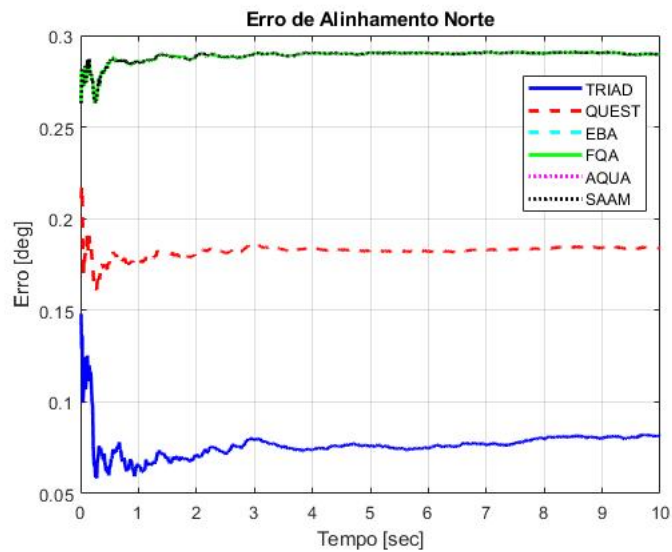
Das Figuras (5.1) a (5.12), fica evidente a semelhança entre os algoritmos EBA, FQA e AQUA e suas superioridades (em termos de exatidão) com relação ao TRIAD. Estas verificações foram originalmente apontadas no trabalho de Paiva et al. (2019b). Dessa forma, o presente

Figura 5.6 – Erro de ortogonalidade vertical simulado.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.7 – Erro de alinhamento norte simulado.

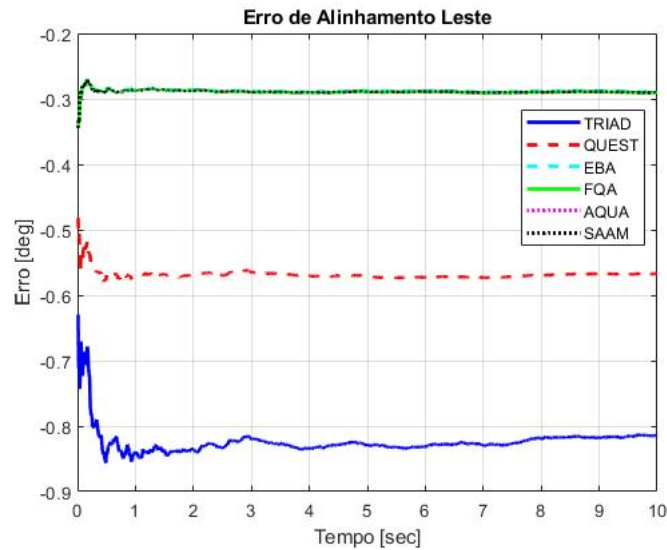


Fonte: Do Autor (2020).

trabalho complementa o estudo anterior acrescentando os resultados simulados dos algoritmos QUEST e SAAM.

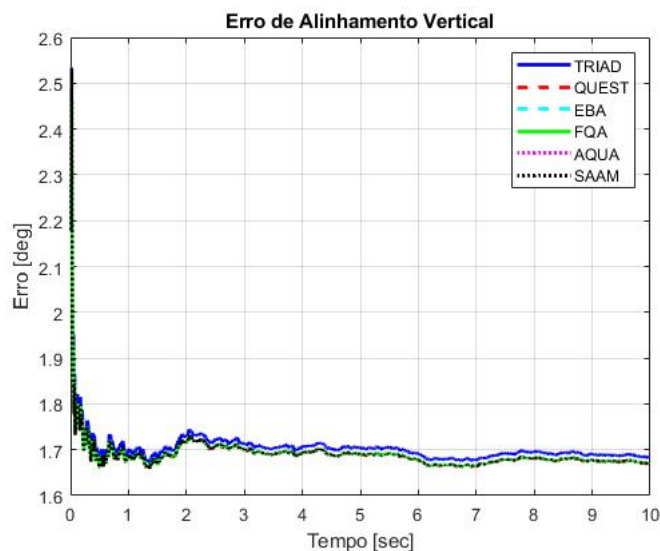
Nota-se, por fim, que os resultados da simulação corroboram os erros preditos na Tabela 5.1. Esses fatos confirmam a validade da análise de erros proposta neste trabalho.

Figura 5.8 – Erro de alinhamento leste simulado.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.9 – Erro de alinhamento vertical simulado.

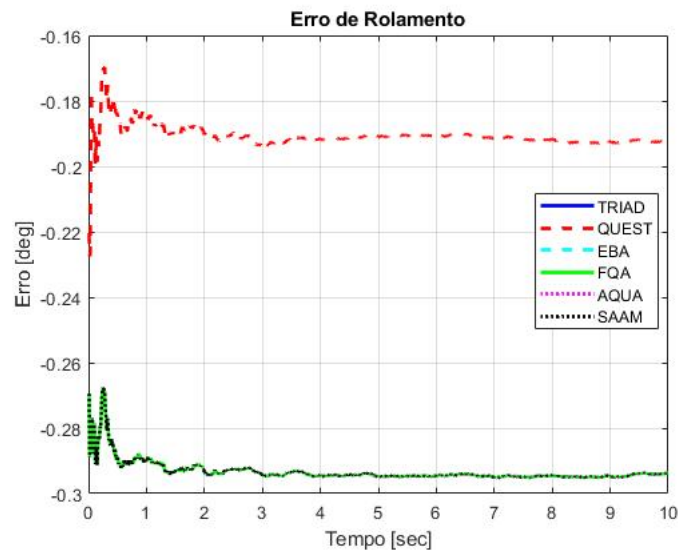


Fonte: Do Autor (2020).

5.2 Resultados experimentais

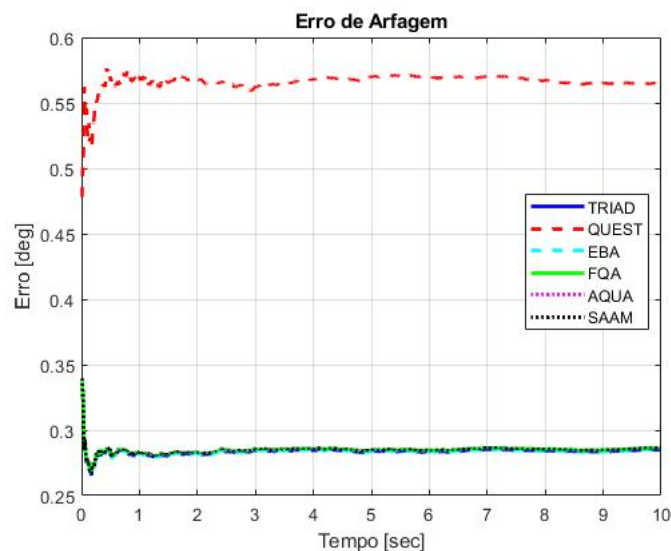
Para validar os resultados obtidos no teste simulado, também foi realizado um teste experimental. O teste foi realizado no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), em São José dos Campos, Brasil. As coordenadas geográficas do experimento foram latitude $-23,2113^\circ$, longitude $-45,1408^\circ$ e altitude 641 metros. Utilizou-se uma unidade AHRS M2 da Innalabs (OLIVEIRA; KUGA; CARRARA, 2015). A AHRS foi, montada estacionária alinhada ao sistema de coordenadas de navegação em um mancal a ar semi-esférico de três graus de liberdade.

Figura 5.10 – Erro de rolamento simulado.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.11 – Erro de arfagem simulado.

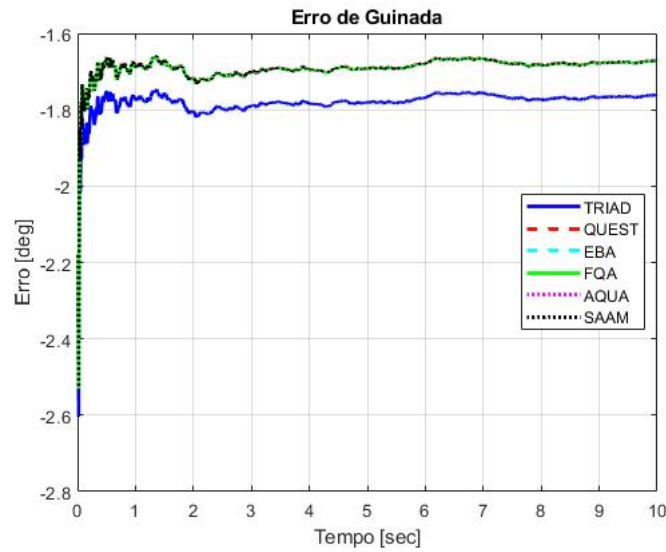


Fonte: Do Autor (2020).

Este sistema foi desenvolvido no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), e está especificado com maiores detalhes no trabalho de Oliveira, Kuga e Carrara (2015). A montagem do sistema pode ser observada na Figura 5.13.

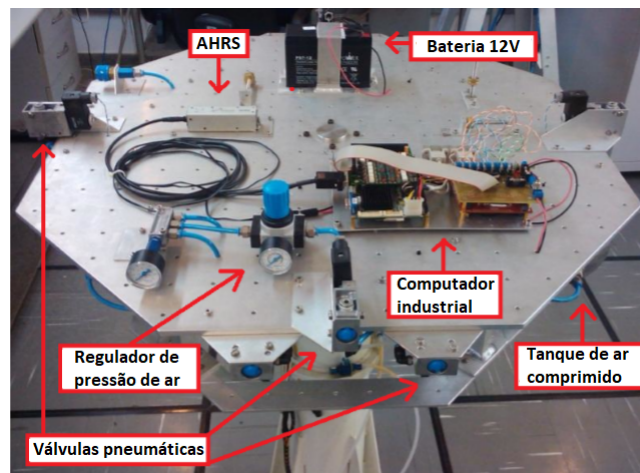
O teste experimental foi conduzido com os mesmos algoritmos de alinhamento do teste simulado, acrescido de uma etapa de pré-calibração dos sensores. Tal calibração é necessária para se compensar erros residuais que não foram contemplados na análise de erros apresentada. Para calibração prévia dos dados dos sensores (magnetômetros, em particular), utilizou-se o algoritmo de Foster e Elkaim (2008).

Figura 5.12 – Erro de guinada simulado.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.13 – Mancal a ar semi-esférico de três graus de liberdade.



Fonte: Do Autor (2020).

Os modelos de gravidade local e densidade do fluxo magnético foram à semelhança dos testes simulados (usando os modelos de Britting (1971) e Chulliat et al. (2015)).

Uma vez que o AHRS foi montado alinhado com o sistema de coordenadas de navegação, tem-se que $\tilde{\mathbf{a}}_{SF}^b \approx -\hat{\mathbf{g}}_P^l$ e $\tilde{\mathbf{m}}_m^b \approx \hat{\mathbf{m}}_E^l$, onde os suscritos $\tilde{\cdot}$ e $\hat{\cdot}$ representam grandezas medidas (valores médios acumulados no tempo) e estimados, respectivamente.

Dessa forma, subtraindo numericamente $-\hat{\mathbf{g}}_P^l$ e $\hat{\mathbf{m}}_E^l$ de, respectivamente, $\tilde{\mathbf{a}}_{SF}^b$ e $\tilde{\mathbf{m}}_m^b$, chega-se às estimativas grosseiras dos vieses residuais dos sensores, sendo eles:

$$\delta \hat{\mathbf{a}}_{SF}^b = \begin{bmatrix} -0.4736 & -1.5073 & -1.8667 \end{bmatrix}^T \text{ mg}, \quad (5.1)$$

$$\delta \hat{\mathbf{m}}_m^b = \begin{bmatrix} 10.5987 & 2.5724 & -4.1518 \end{bmatrix}^T \text{ mG.} \quad (5.2)$$

Substituindo (5.1) e (5.2) nas expressões de erros definidas no Capítulo 4, e considerando erros nos valores de gravidade, magnitude, inclinação e declinação do campo magnético local, conforme a Seção 5.1, foram obtidas previsões para os erros residuais nas matrizes de rotação e ângulos de Euler. Os valores preditos podem ser observados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Erros experimentais estimados através das equações derivadas.

Erros	TRIAD	QUEST	EBA	FQA	AQUA	SAAM
η_N [deg]	2,7353	0	0	0	0	0
η_E [deg]	2,8126	0	0	0	0	0
η_D [deg]	0,1069	0	0	0	0	0
o_N [deg]	0,2463	0	0	0	0	0
o_E [deg]	-0,6151	0	0	0	0	0
o_D [deg]	0,0369	0	0	0	0	0
φ_N [deg]	0,1596	-0,1290	-0,0865	-0,0865	-0,0865	-0,0865
φ_E [deg]	0,6423	-0,0790	0,0272	0,0272	0,0272	0,0272
φ_D [deg]	1,9875	1,9875	1,9875	1,9875	1,9875	1,9875
$\delta\phi$ [deg]	0,0865	0,1290	0,0865	0,0865	0,0865	0,0865
$\delta\theta$ [deg]	-0,0272	0,0790	-0,0272	-0,0272	-0,0272	-0,0272
$\delta\psi$ [deg]	-1,9507	-1,9875	-1,9875	-1,9875	-1,9875	-1,9875

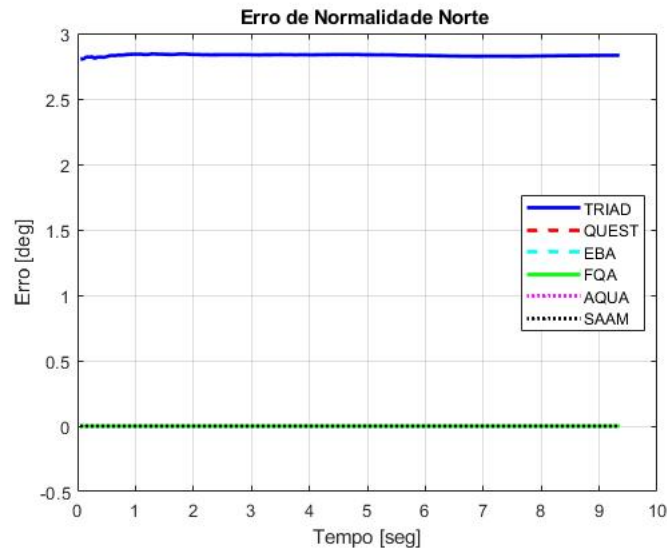
Fonte: Do Autor (2020).

As Figuras 5.14 a 5.25 apresentam os erros obtidos experimentalmente. Como pode-se observar, os erros obtidos corroboram os preditos, seguindo o mesmo padrão evidenciado no teste simulado. Esses resultados confirmam a validade da análise de erros proposta neste trabalho, bem como as verificações delineadas com relação à exatidão dos algoritmos TRIAD, QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM para fins de alinhamento estacionário de AHRS.

De forma pormenorizada, nota-se nas Figuras 5.14 a 5.19, que, como esperado, os métodos QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM não resultaram em erros de normalidade ou ortogonalidade. O algoritmo TRIAD, por sua vez, originou esses dois tipos de erros, em todas as direções. Percebe-se também, que os erros de normalidade do algoritmo TRIAD tiveram valores consideravelmente maiores que nos testes simulados, especialmente nas direções norte e leste.

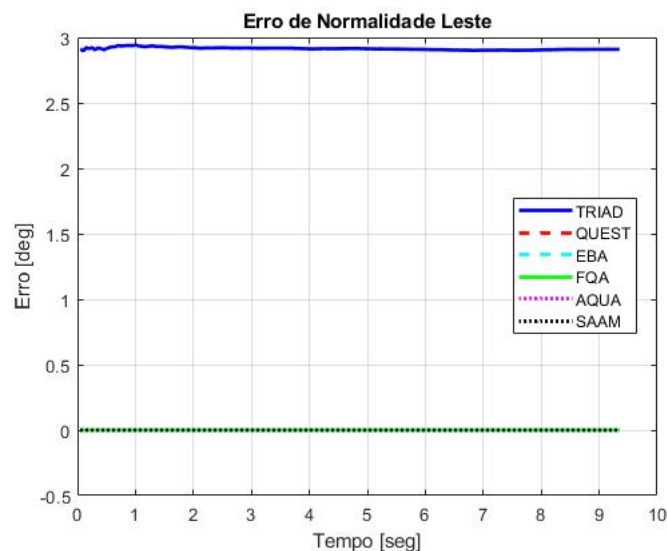
Com que concerne aos erros de alinhamento (Figuras 5.20 a 5.22) os algoritmos EBA, FQA, AQUAM e SAAM se sobressaíram nas direções norte e leste, resultando nos menores valores de erro. O algoritmo QUEST também forneceu um resultado satisfatório, ligeiramente maior que os demais, contudo o TRIAD apresentou o maior erro.

Figura 5.14 – Erro de normalidade norte experimental.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.15 – Erro normalidade leste experimental.



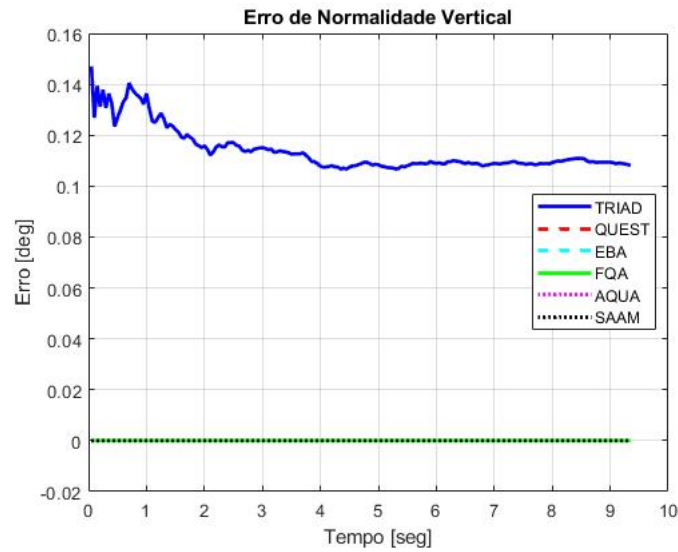
Fonte: Do Autor (2020).

Esse resultado confirma a análise de erros, uma vez que os erros de alinhamento norte e leste dos algoritmos TRIAD e QUEST sofrem interferências dos ângulos de inclinação e da magnitude da densidade do campo magnético da Terra.

Na Figura 5.22, percebe-se que na direção vertical, os algoritmos EBA, FQA, AQUA, SAAM e QUEST têm resultados iguais e ligeiramente melhores que o TRIAD.

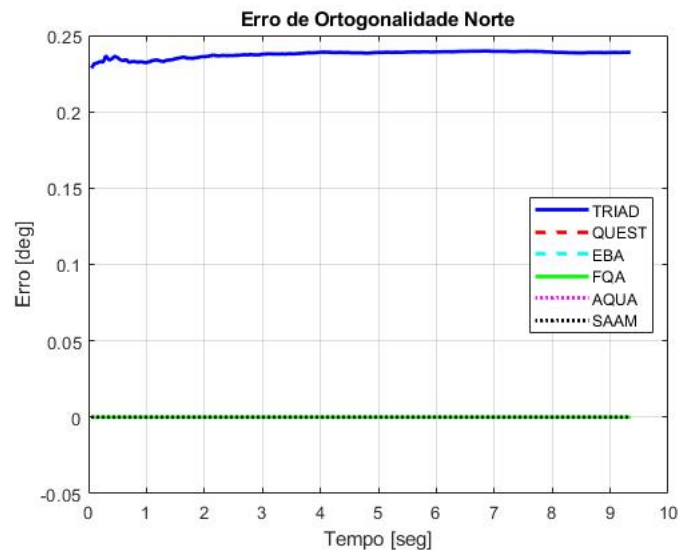
Quando comparados os desempenhos dos algoritmos quanto aos ângulos de Euler (FIGURA 5.23 a FIGURA 5.25), nota-se que os algoritmos EBA, FQA, AQUA e SAAM possuem o mesmo resultado para todos os ângulos. Estes algoritmos, juntamente com o TRIAD, se des-

Figura 5.16 – Erro de normalidade vertical experimental.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.17 – Erro de ortogonalidade norte experimental.

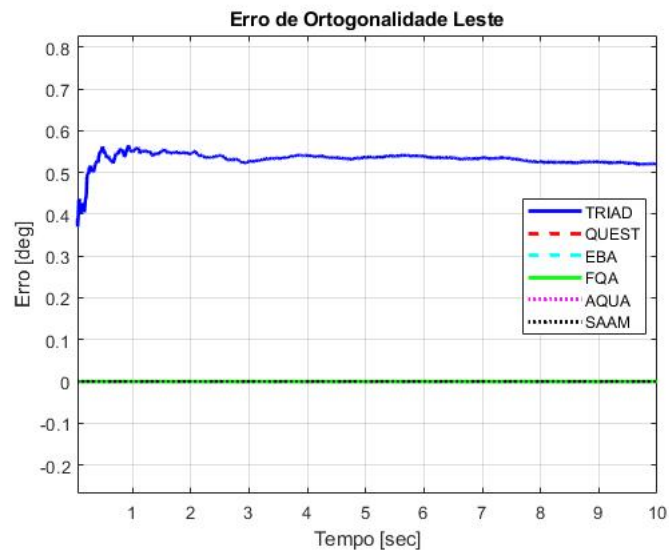


Fonte: Do Autor (2020).

tacam na estimação dos ângulos de rolamento e arfagem, por apresentarem erros menores que o QUEST.

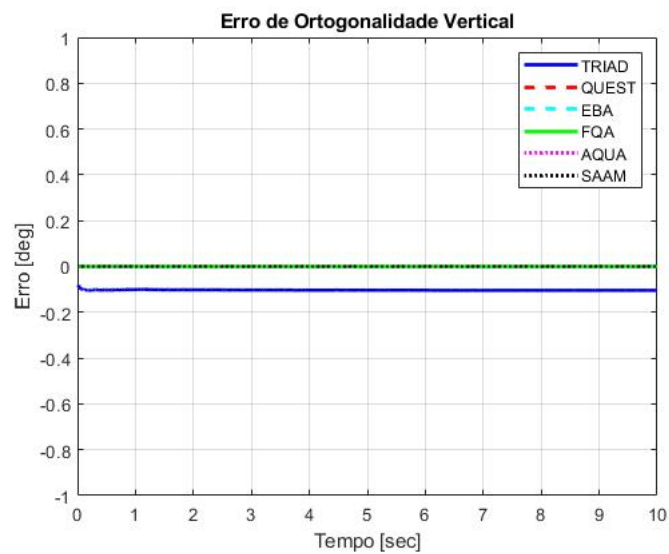
Por outro lado, da Figura 5.25, vê-se que o algoritmo TRIAD resulta no maior erro de guinada, enquanto os algoritmos QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM produzem erros menores, e iguais entre si.

Figura 5.18 – Erro de ortogonalidade leste experimental.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.19 – Erro de ortogonalidade vertical experimental.



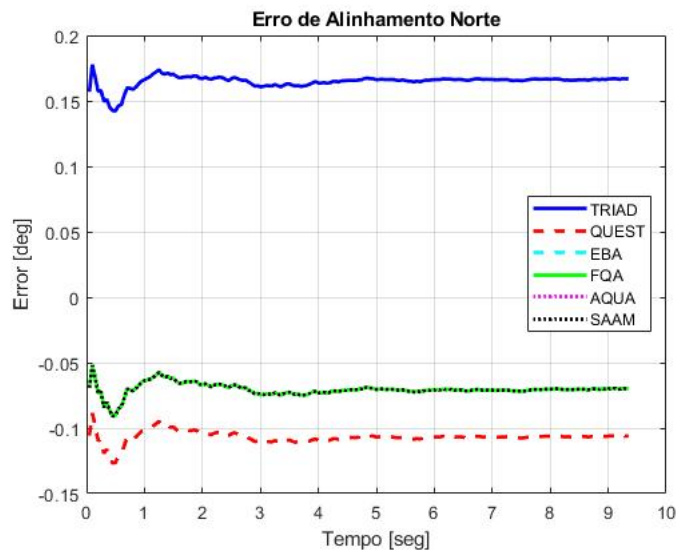
Fonte: Do Autor (2020).

5.3 Discussões finais

Com base nos resultados apresentados nas Seções 5.1 e 5.2, foi possível verificar que os algoritmos investigados foram implementados corretamente, conforme proposto nos objetivos deste trabalho. Foi possível notar, em particular, que os seis métodos (TRIAD, QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM) apresentaram diferenças significativas em seus desempenhos.

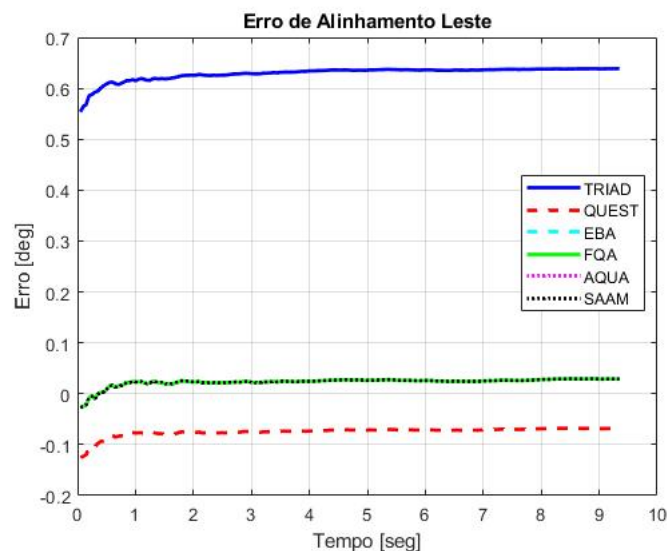
Destaca-se que o método TRIAD foi o único algoritmo que gerou erros de normalidade e ortogonalidade em sua matriz de transformação de coordenadas.

Figura 5.20 – Erro de alinhamento norte experimental.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.21 – Erro de alinhamento leste experimental.

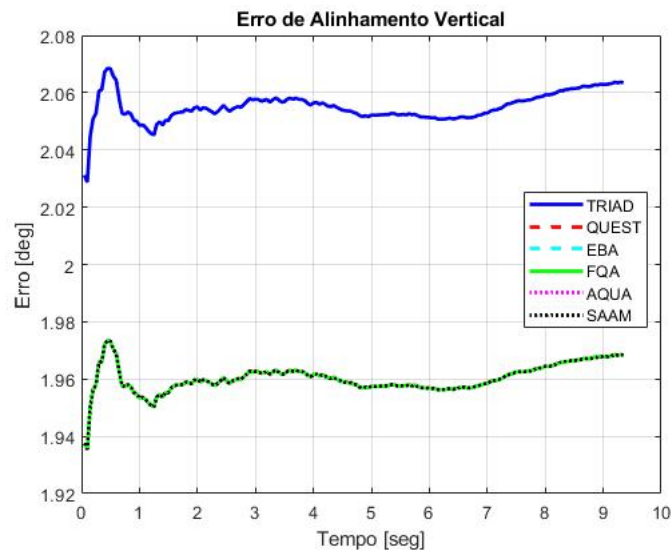


Fonte: Do Autor (2020).

Os métodos EBA, FQA, AQUA e SAAM originaram resultados muito próximos, do ponto de vista de exatidão. No entanto, eles diferem quanto ao seu custo computacional (questão não investigada neste trabalho).

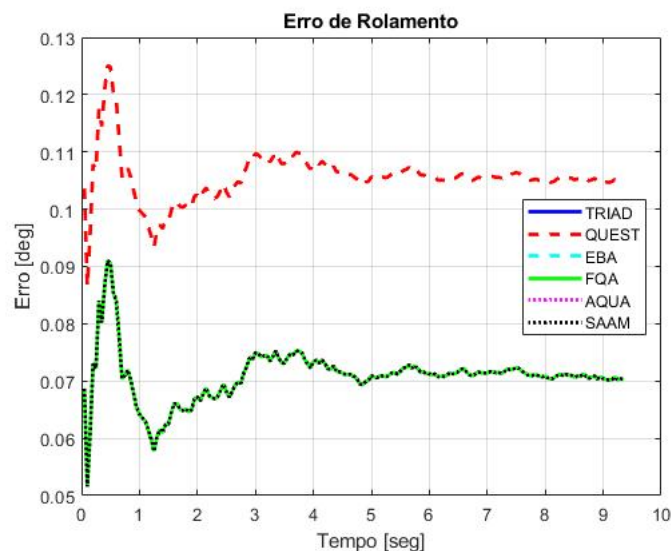
O algoritmo AQUA, embora apresente um desempenho (em termos de exatidão) semelhante ao EBA e FQA, pode ser considerado mais eficiente por seu custo de implementação computacional ser melhor em até 65% (em comparação ao FQA) (VALENTI; DRYANOVSKI; XIAO, 2016).

Figura 5.22 – Erro de alinhamento vertical experimental.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.23 – Erro de rolamento experimental.

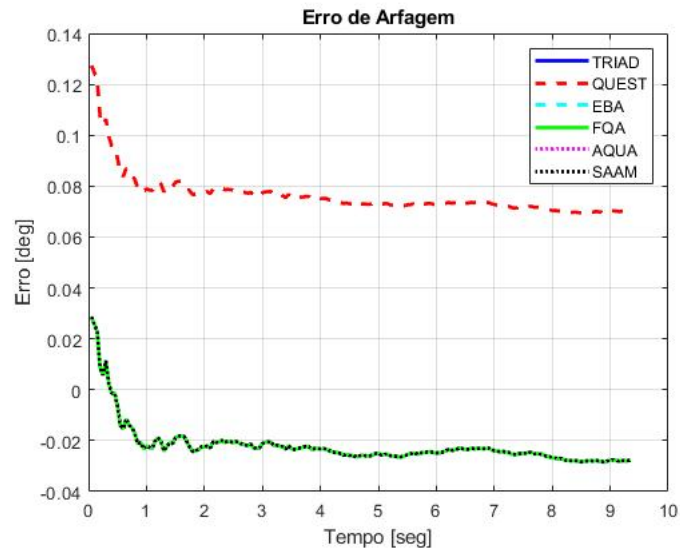


Fonte: Do Autor (2020).

O SAAM, por sua vez, emprega uma parametrização mais simplificada de *quaternion*, e se destaca pelo seu tempo de convergência (WU et al., 2018). No entanto, os resultados experimentais deste trabalho mostraram que os algoritmos EBA, FQA e AQUA possuem tempo de convergência muito próximos ao SAAM, não sendo evidenciada, portanto, nenhuma superioridade deste último nesse quesito.

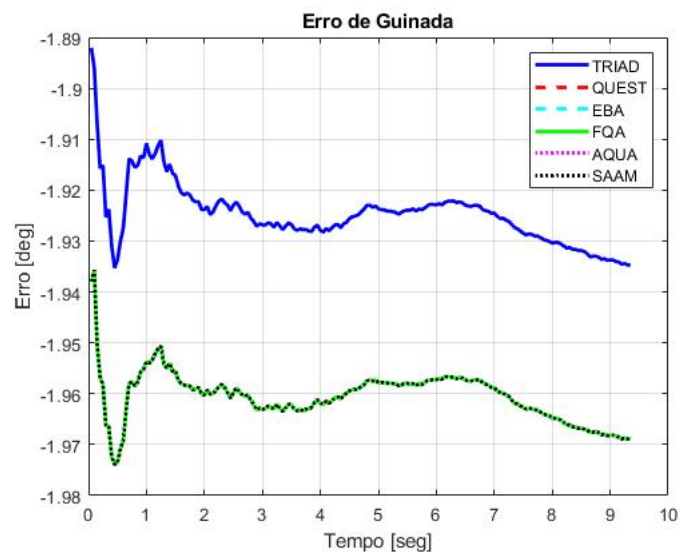
Dessa forma, para fins de alinhamento estacionário em AHRS utilizando sensores de baixo custo, pode-se dizer que os algoritmos AQUA e SAAM são superiores aos demais al-

Figura 5.24 – Erro de arfagem experimental.



Fonte: Do Autor (2020).

Figura 5.25 – Erro de guinada experimental.



Fonte: Do Autor (2020).

goritmos estudados neste trabalho, uma vez que, mesmo apresentando exatidão semelhante ao EBA e FQA, requerem um custo de implementação computacional menor.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a análise de seis algoritmos de alinhamento grosseiro empregados em Sistemas de Referência de Orientação e Rumo (AHRS), sendo eles: TRIAD, QUEST, EBA, FQA, AQUA e SAAM.

Uma análise de erros foi realizada, considerando um cenário ideal de alinhamento entre os sistemas de coordenadas do corpo e de navegação. Para fins de análise, foram considerados erros nas leituras dos acelerômetros e magnetômetros, bem como nos modelos gravitacional e magnético da Terra.

Expressões analíticas para os erros residuais (normalidade, ortogonalidade e alinhamento) desenvolvidos nas matrizes de transformação de coordenadas computadas por cada um dos algoritmos foram derivadas. Além disso foram derivadas expressões para os erros nos ângulos de Euler.

Por meio da análise dos erros de cada algoritmo, foi possível perceber que quatro deles se assemelham em termos de exatidão, sendo esses: EBA, FQA, AQUA e SAAM. Por outro lado, os métodos TRIAD e QUEST apresentaram resultados inferiores.

Pode-se dizer que, de acordo com as expressões analíticas derivadas para os erros, os vieses dos acelerômetros nos eixos y e x determinam diretamente os erros de alinhamento norte e leste. O erro de alinhamento vertical, por sua vez, é dependente também (e principalmente) dos vieses dos magnetômetros (nos eixos x e y) e erros de declinação magnética (para todos os algoritmos investigados).

Os resultados evidenciaram que o algoritmo TRIAD sofre grande influência dos ângulos de inclinação e declinação do campo magnético da Terra, tornando-o mais suscetível a erros em regiões de altas latitudes. Por outro lado, o algoritmo QUEST mostrou ter sua exatidão mais severamente degradada, quando da existência de anomalias magnéticas (*hard-irons*).

Embora os algoritmos EBA, FQA, AQUA e SAAM apresentem resultados semelhantes em termos de exatidão, verifica-se, na literatura, que os algoritmos AQUA e SAAM, que são variações do algoritmo FQA, implicam em menor custo computacional, sendo portanto, considerados os algoritmos mais eficientes para fins de alinhamento de AHRS utilizando sensores de nível automotivo.

Como metas para continuação deste trabalho, o autor pretende expandir a análise de erros de forma mais criteriosa, tornando-a válida, por exemplo, para qualquer orientação do

sistema de coordenadas do corpo com relação ao de navegação, assim como aprofundar a discussão a respeito dos erros obtidos, em cada método, também na fase de alinhamento fino.

Destaca-se também como proposta de trabalho futuro o teste do sensor automotivo em aplicações práticas envolvendo veículos terrestres, como é o caso de tratores agrícolas. Acredita-se que trabalhos como o sugerido tenham muito a contribuir para o desenvolvimento tecnológico de áreas estratégicas para o país, como é o caso, por exemplo, da agricultura de precisão.

REFERÊNCIAS

- ALI, A.; EL-SHEIMY, N. Low-cost MEMS-based pedestrian navigation technique for GPS-denied areas. **Journal of Sensors**, Hindawi, 2013.
- BAR-ITZHACK, I. Y. Request-a recursive quest algorithm for sequential attitude determination. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 19, n. 5, p. 1034–1038, 1996.
- BEKIR, E. **Introduction to modern navigation systems**. [S.l.]: World Scientific, 2007.
- BISTROV, V. Performance analysis of alignment process of MEMS IMU. **International Journal of Navigation and Observation**, Hindawi, 2012.
- BLACK, H. D. A passive system for determining the attitude of a satellite. **AIAA journal**, v. 2, n. 7, p. 1350–1351, 1964.
- BRITTING, K. R. **Inertial navigation systems analysis**. 1971.
- CARUSO, M. J. **Applications of magnetoresistive sensors in navigation systems**. [S.l.], 1997.
- CHULLIAT, A. et al. The US/UK world magnetic model for 2015-2020. BGS and NOAA, 2015.
- CRASSIDIS, J. L.; MARKLEY, F. L.; CHENG, Y. Survey of nonlinear attitude estimation methods. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 30, n. 1, p. 12–28, 2007.
- DAVENPORT, P. B. **A vector approach to the algebra of rotations with applications**. [S.l.]: National Aeronautics and Space Administration, 1968. v. 4696.
- FAN, B.; LI, Q.; LIU, T. How magnetic disturbance influences the attitude and heading in magnetic and inertial sensor-based orientation estimation. **Sensors**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 18, n. 1, p. 76, 2018.
- FARRELL, J. **Aided navigation: GPS with high rate sensors**. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 2008.
- FARRELL, J.; KNIGHT, J.; THOMPSON, E. Alignment methods for strapdown inertial systems. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 3, n. 9, p. 1432–1434, 1966.
- FOSTER, C. C.; ELKAIM, G. H. Extension of a two-step calibration methodology to include nonorthogonal sensor axes. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, IEEE, v. 44, n. 3, p. 1070–1078, 2008.
- GADE, K. The seven ways to find heading. **The Journal of Navigation**, Cambridge University Press, v. 69, n. 5, p. 955–970, 2016.
- GRAWFORD, D. R. **Airplane Design**. [S.l.]: [S.l.]: Crawford Aviation, 1986.
- GROVES. Principles of gnss, inertial, and multisensor integrated navigation systems. **London: Artech House Remote Sensing Library**, 2013.

- HU, X. et al. Errors analysis and compensation of low cost attitude measurement system. In: IEEE. **Intelligent Control and Automation, 2004. WCICA 2004. Fifth World Congress on**. [S.l.], 2004. v. 4, p. 3688–3691.
- JIANG, Y. F. Error analysis of analytic coarse alignment methods. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, IEEE, v. 34, n. 1, p. 334–337, 1998.
- JIANG, Y. F.; LIN, Y. P. Error analysis of quaternion transformations (inertial navigation). **IEEE transactions on aerospace and electronic systems**, IEEE, v. 27, n. 4, p. 634–639, 1991.
- KLUGA, J.; KLUGA, A.; VECVAGARS, V. Magnetometer error models of low-cost land vehicle navigation system. **Elektronika ir elektrotechnika**, v. 22, n. 6, p. 57–60, 2016.
- KUGA, H. K.; CARRARA, V. Attitude determination with magnetometers and accelerometers to use in satellite simulator. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2013, 2013.
- LI, D.; LANDRY, R.; LAVOIE, P. Low-cost MEMS sensor-based attitude determination system by integration of magnetometers and GPS: A real-data test and performance evaluation. In: IEEE. **Position, Location and Navigation Symposium, 2008 IEEE/ION**. [S.l.], 2008. p. 1190–1198.
- LI, W.; WANG, J. Effective adaptive Kalman filter for MEMS-IMU/magnetometers integrated attitude and heading reference systems. **The Journal of Navigation**, Cambridge University Press, v. 66, n. 1, p. 99–113, 2013.
- LOVREN, N.; PIEPER, J. Error analysis of direction cosines and quaternion parameters techniques for aircraft attitude determination. **IEEE Transactions on aerospace and electronic systems**, IEEE, v. 34, n. 3, p. 983–989, 1998.
- OLIVEIRA, A. M. de; KUGA, H. K.; CARRARA, V. Air bearing platforms for simulation of spacecraft attitude control systems. In: **International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, February**. [S.l.: s.n.], 2015.
- PAIVA, L. P. S. et al. Análise de erros para alinhamento em AHRS - parte I: Algoritmo TRIAD. In: **Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2019, submetido**. [S.l.: s.n.], 2019.
- PAIVA, L. P. S. et al. Análise de erros para alinhamento em AHRS - parte II: Algoritmos EBA, FQA e AQUA. In: **Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2019**. [S.l.: s.n.], 2019.
- SAVAGE, P. **Strapdown Analytics: Part 1, Maple Plain, MN: Strapdown Associates**. [S.l.]: Inc, 2007.
- SHUSTER, M. D.; MARKLEY, F. L. General formula for extracting the euler angles. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 29, n. 1, p. 215–221, 2006.
- SHUSTER, M. D.; OH, S. D. Three-axis attitude determination from vector observations. **Journal of guidance and Control**, v. 4, n. 1, p. 70–77, 1981.
- SILVA, F.; HEMERLY, E.; FILHO, W. L. On the error state selection for stationary sins alignment and calibration kalman filters—part II: Observability/estimability analysis. **Sensors**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 17, n. 3, p. 439, 2017.

- SILVA, F. O. **Stationary Self-Alignment and Calibration Techniques for Straodown Inertial Navigation Systems**: Thesis of doctor of science. Instituto Tecnológico Aeronáutico-São José dos Campos, 2016.
- SILVA, F. O. et al. A fast in-field coarse alignment and bias estimation method for stationary intermediate-grade IMUs. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, IEEE, v. 67, n. 4, p. 831–838, 2018.
- SILVA, F. O.; LEITE FILHO, W. de C. et al. Análise do tempo de alinhamento em sistemas de navegação inercial solidários. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 1, n. 1, 2013.
- STIRLING, R.; FYFE, K.; LACHAPELLE, G. Evaluation of a new method of heading estimation for pedestrian dead reckoning using shoe mounted sensors. **The Journal of Navigation**, Cambridge University Press, v. 58, n. 1, p. 31–45, 2005.
- SUH, Y. S. Simple-structured quaternion estimator separating inertial and magnetic sensor effects. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, IEEE, v. 55, n. 6, p. 2698–2706, 2019.
- TITTERTON, D.; WESTON. **Strapdown inertial navigation technology**. [S.l.]: IET, 2004. v. 17.
- VALENTI, R. G.; DRYANOVSKI, I.; XIAO, J. A linear Kalman filter for MARG orientation estimation using the algebraic quaternion algorithm. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, IEEE, v. 65, n. 2, p. 467–481, 2016.
- WAHBA, G. A least squares estimate of spacecraft attitude. **SIAM Review**, v. 7, n. 3, p. 409, 1965.
- WU, J. et al. A super fast attitude determination algorithm for consumer-level accelerometer and magnetometer. **IEEE Transactions on Consumer Electronics**, IEEE, v. 64, n. 3, p. 375–381, 2018.
- YUN, X.; BACHMANN, E. R.; MCGHEE, R. B. A simplified quaternion-based algorithm for orientation estimation from earth gravity and magnetic field measurements. **IEEE Transactions on instrumentation and measurement**, IEEE, v. 57, n. 3, p. 638–650, 2008.
- ZHAO, H. et al. Comparison of initial alignment methods for SINS. In: IEEE. **Intelligent Control and Automation (WCICA), 2011 9th World Congress on**. [S.l.], 2011. p. 42–47.
- ZHU, R.; ZHOU, Z. A small low-cost hybrid orientation system and its error analysis. **IEEE Sensors Journal**, IEEE, v. 9, n. 3, p. 223–230, 2009.

APÊNDICE A – Derivação de erros do algoritmo TRIAD

Este Apêndice ilustra o processo de derivação utilizado na análise de erros proposta para o TRIAD. Considere, inicialmente, a substituição das equações (3.1) à (3.4) em (3.5) e (3.6).

Dessa forma, obtém-se:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & M\cos\alpha\cos\gamma & -g_P M\sin\alpha\cos\gamma \\ 0 & M\sin\alpha\cos\gamma & g_P M\cos\alpha\cos\gamma \\ g_P & M\sin\gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$D = \begin{bmatrix} -a_x & m_x & (a_z m_y - a_y m_z) \\ -a_y & m_y & (a_x m_z - a_z m_x) \\ -a_z & m_z & (a_y m_x - a_x m_y) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Depois de aplicar as operações de transposição e inversão em N e D , conforme (3.7), têm-se, que a descrição analítica da matriz de coordenadas, sem erros, obtidas por meio do algoritmo TRIAD é:

$$C_b^l = \frac{1}{g_P M \cos\gamma} [c_{ij}]_{i,j=\{1,2,3\}}, \quad (3)$$

onde,

$$c_{11} = a_x M \cos\alpha \sin\gamma + m_x g_P \cos\alpha - (a_z m_y - a_y m_z) \sin\alpha, \quad (4)$$

$$c_{12} = a_y M \cos\alpha \sin\gamma + m_y g_P \cos\alpha - (a_x m_z - a_z m_x) \sin\alpha, \quad (5)$$

$$c_{13} = a_z M \cos\alpha \sin\gamma + m_z g_P \cos\alpha - (a_y m_x - a_x m_y) \sin\alpha, \quad (6)$$

$$c_{21} = a_x M \sin\alpha \sin\gamma + m_x g_P \sin\alpha + (a_z m_y - a_y m_z) \cos\alpha, \quad (7)$$

$$c_{22} = a_y M \sin\alpha \sin\gamma + m_y g_P \sin\alpha + (a_x m_z - a_z m_x) \cos\alpha, \quad (8)$$

$$c_{23} = a_z M \sin\alpha \sin\gamma + m_z g_P \sin\alpha + (a_y m_x - a_x m_y) \cos\alpha, \quad (9)$$

$$c_{31} = -a_x M \cos\gamma, \quad (10)$$

$$c_{32} = -a_y M \cos\gamma, \quad (11)$$

$$c_{33} = -a_z M \cos\gamma. \quad (12)$$

A fim de derivar δC_b^l para o TRIAD, como sugerido em (4.6), pode-se avaliar individualmente as derivadas parciais de (3) com relação a cada fonte de erro, individualmente, como segue:

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial a_x} = \frac{1}{g_P M \cos \gamma} \begin{bmatrix} M \cos \alpha \sin \gamma & -m_z \sin \alpha & m_y \sin \alpha \\ M \sin \alpha \sin \gamma & m_z \cos \alpha & -m_y \cos \alpha \\ -M \cos \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial a_y} = \frac{1}{g_P M \cos \gamma} \begin{bmatrix} m_z \sin \alpha & M \cos \alpha \sin \gamma & -m_x \sin \alpha \\ -m_z \cos \alpha & M \sin \alpha \sin \gamma & m_x \cos \alpha \\ 0 & -M \cos \gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial a_z} = \frac{1}{g_P M \cos \gamma} \begin{bmatrix} -m_y \sin \alpha & m_x \sin \alpha & M \cos \alpha \sin \gamma \\ m_y \cos \alpha & -m_x \cos \alpha & M \sin \alpha \sin \gamma \\ 0 & 0 & -M \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial m_x} = \frac{1}{g_P M \cos \gamma} \begin{bmatrix} g_P \cos \alpha & a_z \sin \alpha & -a_y \sin \alpha \\ g_P \sin \alpha & -a_z \cos \alpha & a_y \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial m_y} = \frac{1}{g_P M \cos \gamma} \begin{bmatrix} -a_z \sin \alpha & g_P \cos \alpha & a_x \sin \alpha \\ a_z \cos \alpha & g_P \sin \alpha & -a_x \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial m_z} = \frac{1}{g_P M \cos \gamma} \begin{bmatrix} a_y \sin \alpha & -a_x \sin \alpha & g_P \cos \alpha \\ -a_y \cos \alpha & a_x \cos \alpha & g_P \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial g_P} = \frac{1}{g_P^2 M \cos \gamma} [g_{ii}]_{i,j=\{1,2,3\}}, \quad (19)$$

com,

$$g_{11} = -a_x M \cos \alpha \sin \gamma + (a_z m_y - a_y m_z) \sin \alpha, \quad (20)$$

$$g_{12} = -a_y M \cos \alpha \sin \gamma + (a_x m_z - a_z m_x) \sin \alpha, \quad (21)$$

$$g_{13} = -a_z M \cos \alpha \sin \gamma + (a_y m_x - a_x m_y) \sin \alpha, \quad (22)$$

$$g_{21} = -a_x M \sin \alpha \sin \gamma - (a_z m_y - a_y m_z) \cos \alpha, \quad (23)$$

$$g_{22} = -a_y M \sin \alpha \sin \gamma - (a_x m_z - a_z m_x) \cos \alpha, \quad (24)$$

$$g_{23} = -a_z M \sin \alpha \sin \gamma - (a_y m_x - a_x m_y) \cos \alpha, \quad (25)$$

$$g_{31} = a_x M \cos \gamma, \quad (26)$$

$$g_{32} = a_y M \cos \gamma, \quad (27)$$

$$g_{33} = a_z M \cos \gamma, \quad (28)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial M} = \frac{1}{g_P M^2 \cos \gamma} [b_{ii}]_{i,j=\{1,2,3\}}, \quad (29)$$

com,

$$b_{11} = -m_x g_P \cos \alpha + (a_z m_y - a_y m_z) \sin \alpha, \quad (30)$$

$$b_{12} = -m_y g_P \cos \alpha + (a_x m_z - a_z m_x) \sin \alpha, \quad (31)$$

$$b_{13} = -m_z g_P \cos \alpha + (a_y m_x - a_x m_y) \sin \alpha, \quad (32)$$

$$b_{21} = -m_x g_P \sin \alpha - (a_z m_y - a_y m_z) \cos \alpha, \quad (33)$$

$$b_{22} = -m_y g_P \sin \alpha - (a_x m_z - a_z m_x) \cos \alpha, \quad (34)$$

$$b_{23} = -m_z g_P \sin \alpha - (a_y m_x - a_x m_y) \cos \alpha, \quad (35)$$

$$b_{31} = b_{32} = b_{33} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial \alpha} = \frac{1}{g_P M \cos \gamma} [a_{ii}]_{i,j=\{1,2,3\}}, \quad (37)$$

com,

$$a_{11} = -a_x M \sin \alpha \sin \gamma - m_x g_P \sin \alpha - (a_z m_y - a_y m_z) \cos \alpha, \quad (38)$$

$$a_{12} = -a_y M \sin \alpha \sin \gamma - m_y g_P \sin \alpha - (a_x m_z - a_z m_x) \cos \alpha, \quad (39)$$

$$a_{13} = -a_z M \sin \alpha \sin \gamma - m_z g_P \sin \alpha - (a_y m_x - a_x m_y) \cos \alpha, \quad (40)$$

$$a_{21} = a_x M \cos \alpha \sin \gamma + m_x g_P \cos \alpha - (a_z m_y - a_y m_z) \sin \alpha, \quad (41)$$

$$a_{22} = a_y M \cos \alpha \sin \gamma + m_y g_P \cos \alpha - (a_x m_z - a_z m_x) \sin \alpha, \quad (42)$$

$$a_{23} = a_z M \cos \alpha \sin \gamma + m_z g_P \cos \alpha - (a_y m_x - a_x m_y) \sin \alpha, \quad (43)$$

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial \gamma} = \frac{1}{g_P M c^2 \gamma} [d_{ii}]_{i,j=\{1,2,3\}}, \quad (45)$$

com,

$$d_{11} = a_x M \cos \alpha + m_x g_P \cos \alpha \sin \gamma - (a_z m_y - a_y m_z) \sin \alpha \sin \gamma, \quad (46)$$

$$d_{12} = a_y M \cos \alpha + m_y g_P \cos \alpha \sin \gamma - (a_x m_z - a_z m_x) \sin \alpha \sin \gamma, \quad (47)$$

$$d_{13} = a_z M \cos \alpha + m_z g_P \cos \alpha \sin \gamma - (a_y m_x - a_x m_y) \sin \alpha \sin \gamma, \quad (48)$$

$$d_{21} = a_x M \sin \alpha + m_x g_P \sin \alpha \sin \gamma + (a_z m_y - a_y m_z) \cos \alpha \sin \gamma, \quad (49)$$

$$d_{22} = a_y M \sin \alpha + m_y g_P \sin \alpha \sin \gamma + (a_x m_z - a_z m_x) \cos \alpha \sin \gamma, \quad (50)$$

$$d_{23} = a_z M \sin \alpha + m_z g_P \sin \alpha \sin \gamma + (a_y m_x - a_x m_y) \cos \alpha \sin \gamma, \quad (51)$$

$$d_{31} = d_{32} = d_{33} = 0. \quad (52)$$

Para a suposição simplificadora dos sistemas de coordenadas do corpo e de navegação perfeitamente alinhados, i.e. $C_b^l = I$, têm-se $g_P^l = g_P^b$ e $m_E^l = m_E^b$. Portanto, com base de (3.1) à (3.4), pode-se afirmar que: $a_x = a_y = 0$, $a_z = -g_P$, $m_x = M \cos \alpha \cos \gamma$, $m_y = M \sin \alpha \cos \gamma$, e $m_z = M \sin \gamma$. Substituindo tais relações em (13) a (19), (29), (37) e (45), pode-se fazer as seguintes simplificações:

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial a_x} \right|_{C_b^l=I} = \frac{1}{g_P} \begin{bmatrix} \cos \alpha \tan \gamma & -\sin \alpha \tan \gamma & \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \tan \gamma & \cos \alpha \tan \gamma & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial a_y} \right|_{C_b^l=I} = \frac{1}{g_P} \begin{bmatrix} \sin \alpha \tan \gamma & \cos \alpha \tan \gamma & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\cos \alpha \tan \gamma & \sin \alpha \tan \gamma & \cos^2 \alpha \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial a_z} \right|_{C_b^l=I} = \frac{1}{g_P} \begin{bmatrix} -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos \alpha \tan \gamma \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & \sin \alpha \tan \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial m_x} \right|_{C_b^l=I} = \frac{1}{M \cos \gamma} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial m_y} \right|_{C_b^l=I} = \frac{1}{M \cos \gamma} \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial m_z} \right|_{C_b^l=I} = \frac{1}{M \cos \gamma} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial g_P} \right|_{C_b^l=I} = \frac{1}{g_P} \begin{bmatrix} -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos \alpha \tan \gamma \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & \sin \alpha \tan \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (59)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial M} \right|_{C_b^l=I} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\cos \alpha \tan \gamma \\ 0 & -1 & -\sin \alpha \tan \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (60)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial \alpha} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial \gamma} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} \tan \gamma & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & \tan \gamma & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Além disso, como $C_b^l = I$, as equações (4.2) à (4.4) também podem ser simplificadas, conforme:

$$\delta C_b^l \Big|_{C_b^l=I} = E = \begin{bmatrix} \eta_N & o_D + \varphi_D & o_E - \varphi_E \\ o_D - \varphi_D & \eta_E & o_N + \varphi_N \\ o_E + \varphi_E & o_N - \varphi_N & \eta_D \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Portanto, se $\delta C_b^l|_{C_b^l=I}$ é calculado por meio de (4.6), ou seja multiplicando as equações (53) à (62) pelos erros correspondentes, o resultado final é uma matriz de erros com o formato de (63), cujos erros de normalidade, ortogonalidade e alinhamento são dados por (4.12) à (4.23).

APÊNDICE B – Derivação de erros do algoritmo EBA

O algoritmo EBA calcula a orientação diretamente em termos de ângulos de Euler, conforme (3.25), (3.26), (3.28) e (3.30). Para derivação dos erros, é necessário a re-parametrização da orientação na forma de matriz C_b^l , conforme (3.23). Uma vez feito isso, têm-se:

$$C_b^l = [c_{ij}]|_{i,j=\{1,2,3\}}, \quad (64)$$

onde,

$$c_{11} = \frac{\sqrt{g_p^2 - a_x^2}}{g_p} \cos(\alpha - \arctan(A)), \quad (65)$$

$$c_{12} = \frac{|a_z|}{a_z g_p \sqrt{a_y^2 + a_z^2}} (a_x a_y \cos(\alpha + \arctan(A)) - g_p \sin(\alpha + \arctan(A))), \quad (66)$$

$$c_{13} = \frac{|a_z|}{a_z g_p \sqrt{a_y^2 + a_z^2}} (a_x a_z \cos(\alpha + \arctan(A)) - a_y g_p \sin(\alpha + \arctan(A))), \quad (67)$$

$$C_{21} = \sin(\alpha + \arctan A) \frac{\sqrt{g_p^2 - a_x^2}}{g_p}, \quad (68)$$

$$c_{22} = \frac{|a_z|}{a_z g_p \sqrt{a_y^2 + a_z^2}} (\cos(\alpha + \arctan(A)) - a_x a_y \sin(\alpha + \arctan(A))), \quad (69)$$

$$c_{23} = \frac{|a_z|}{a_z g_p \sqrt{a_y^2 + a_z^2}} (a_x a_z \sin(\alpha + \arctan(A)) - g_p a_y \cos(\alpha + \arctan(A))), \quad (70)$$

$$c_{31} = -\frac{a_x}{g_p} \quad (71)$$

$$c_{32} = \frac{a_y |a_z| \sqrt{g_p^2 - a_x^2}}{a_z g_p \sqrt{a_y^2 + a_z^2}} \quad (72)$$

$$c_{33} = \frac{|a_z| \sqrt{g_p^2 - a_x^2}}{g_p \sqrt{a_y^2 + a_z^2}} \quad (73)$$

sendo,

$$A = \frac{g_p |a_z| (a_y m_z - a_z m_y)}{a_z m_x \sqrt{(g_p^2 - a_x^2)} \sqrt{(a_y^2 + a_z^2)} + a_x a_y m_y |a_z| + a_x a_z m_z |a_z|} \quad (74)$$

Da mesma forma que foi realizado para o algoritmo TRIAD, a derivação de δC_b^l para o EBA, conforme (4.6), pode ser feita avaliando-se individualmente as derivadas parciais de (64) com relação a cada fonte de erro, individualmente, como segue:

$$\frac{\partial C^I}{\partial a_x} = \left[\begin{aligned} & -\frac{a_x \cos(k_2)}{g_p^2 k_{11}} - \frac{\sin(k_2) k_{11} k_8 k_1}{k_7 k_9^2} - \frac{a_y \cos(k_2)}{a_z g_p k_{10}} - \frac{\cos(k_2) k_8 k_1}{k_6} - \frac{a_x a_y \sin(k_2) k_8 k_1}{k_3} - \frac{\cos(k_2)}{g_p k_{10}} - \frac{a_y \sin(k_2) k_8 k_1}{k_4} + \frac{a_y \cos(k_2) k_8 k_1}{k_5} \\ & \frac{\cos(k_2) k_1 k_8 k_1}{k_7 k_9^2} - \frac{a_x \sin(k_2)}{g_p^2 k_{11}} - \frac{a_y \sin(k_2)}{a_z g_p k_{10}} - \frac{\sin(k_2) k_8 k_1}{k_6} + \frac{a_x a_y \cos(k_2) k_8 k_1}{k_3} - \frac{\sin(k_2)}{g_p k_{10}} + \frac{a_y \sin(k_2) k_8 k_1}{k_5} + \frac{a_x \cos(k_2) k_8 k_1}{k_4} \\ & -\frac{1}{g_p} - \frac{a_x a_y}{a_z g_p^2 k_{10} k_{11}} - \frac{a_x}{g_p^2 k_{10} k_{11}} \end{aligned} \right], \quad (75)$$

sendo,

$$k_1 = -\frac{m_z}{g_p k_{10}} - \frac{a_x m_x}{g_p k_{11}} + \frac{a_y m_y}{a_z g_p k_{10}}, \quad (76)$$

$$k_2 = \alpha - \arctan\left(\frac{k_8}{k_9}\right), \quad (77)$$

$$k_3 = a_z g_p k_{10} k_7 (k_9)^2, \quad (78)$$

$$k_4 = g_p k_{10} k_7 (k_9)^2, \quad (79)$$

$$k_5 = a_z k_{10} k_7 (k_9)^2, \quad (80)$$

$$k_6 = k_{10} k_7 (k_9)^2, \quad (81)$$

$$\kappa_7 = \frac{(\kappa_8)^2}{(\kappa_9)^2} + 1, \quad (82)$$

$$\kappa_8 = \frac{m_y}{\kappa_{10}} - \frac{a_y m_z}{a_z \kappa_{10}}, \quad (83)$$

$$\kappa_9 = m_x \kappa_{11} + \frac{a_x m_z}{g_p \kappa_{10}} + \frac{a_x a_y m_y}{a_z g_p \kappa_{10}}, \quad (84)$$

$$\kappa_{10} = \sqrt{\frac{a_y^2}{a_z^2} + 1}, \quad (85)$$

$$\kappa_{11} = \sqrt{1 - \frac{a_x^2}{g_p^2}}, \quad (86)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial a_y} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\kappa_{13})\kappa_{12}\kappa_{22}}{\kappa_{19}} - \frac{a_y \sin(\kappa_{13})}{\kappa_{18}} - \frac{\cos(\kappa_{13})\kappa_{12}}{\text{sqrt}(\kappa_{23})\kappa_{19}} + \frac{a_x \cos(\kappa_{13})}{a_z g_p \text{sqrt}(\kappa_{23})} - \frac{a_x a_y^2 \cos(\kappa_{13})}{\kappa_{15}} - \frac{a_x a_y \sin(\kappa_{13})\kappa_{12}}{\kappa_{14}} - \frac{a_x \sin(\kappa_{13})\kappa_{12}}{a_z \sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} - \frac{a_y \sin(\kappa_{13})\kappa_{12}}{a_z g_p \sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} \\ \frac{\cos(\kappa_{13})\kappa_{12}\kappa_{22}}{\kappa_{19}} - \frac{a_x \sin(\kappa_{13})}{a_z g_p \sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} - \frac{\sin(\kappa_{13})\kappa_{12}}{\sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} + \frac{a_x \cos(\kappa_{13})}{\kappa_{18}} - \frac{a_x a_y^2 \sin(\kappa_{13})}{\kappa_{15}} + \frac{a_x a_y \cos(\kappa_{13})\kappa_{12}}{\kappa_{14}} + \frac{a_x \cos(\kappa_{13})\kappa_{12}}{a_z \sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} + \frac{a_y \cos(\kappa_{13})\kappa_{12}}{a_z g_p \sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} \\ 0 \\ \frac{\sin(\kappa_{13})}{a_z \sqrt{(\kappa_{23})}} - \frac{a_y^2 \sin(\kappa_{13})}{\kappa_{17}} - \frac{a_x a_y \cos(\kappa_{13})}{\kappa_{16}} + \frac{a_y \cos(\kappa_{13})\kappa_{12}}{a_z \sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} + \frac{a_x \cos(\kappa_{13})\kappa_{12}}{a_z \sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} - \frac{a_y \sin(\kappa_{13})\kappa_{12}}{g_p \sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} - \frac{a_x \sin(\kappa_{13})\kappa_{12}}{g_p \sqrt{(\kappa_{23})\kappa_{19}}} \\ -\frac{a_y \kappa_{22}}{\kappa_{18}} \end{bmatrix}, \quad (87)$$

sendo,

$$\kappa_{12} = \frac{1}{\kappa_{20}} \left(\frac{m_z}{a_z \sqrt{\kappa_{23}}} + \frac{a_y m_y}{\kappa_{18}} - \frac{a_y^2 m_z}{\kappa_{17}} - \frac{1}{\kappa_{20}^2} \left(\frac{a_x a_y^2 m_y}{\kappa_{15}} - \frac{a_x m_y}{a_z g p \sqrt{\kappa_{23}}} - \frac{a_x a_y m_z}{\kappa_{16}} \right) \right), \quad (88)$$

$$\kappa_{13} = \alpha - \arctan\left(\frac{\kappa_{21}}{\kappa_{20}}\right), \quad (89)$$

$$\kappa_{14} = a_z g p \sqrt{\kappa_{23}} \kappa_{19}, \quad (90)$$

$$\kappa_{15} = a_z^3 g p \kappa_{23}^{3/2}, \quad (91)$$

$$\kappa_{16} = a_z^2 g p \kappa_{23}^{3/2}, \quad (92)$$

$$\kappa_{17} = a_z^3 \kappa_{23}^{3/2}, \quad (93)$$

$$\kappa_{18} = a_z^2 \kappa_{23}^{3/2}, \quad (94)$$

$$\kappa_{19} = \frac{\kappa_{21}^2}{\kappa_{20}^2} + 1, \quad (95)$$

$$\kappa_{26} = a_z g_p \sqrt{\kappa_{37} \kappa_{33}}, \quad (103)$$

$$\kappa_{27} = a_z^4 g_p \kappa_{37}^{3/2}, \quad (104)$$

$$\kappa_{28} = a_z^3 g_p \kappa_{37}^{3/2}, \quad (105)$$

$$\kappa_{29} = a_z^2 g_p \kappa_{37}^{3/2}, \quad (106)$$

$$\kappa_{30} = a_z^4 \kappa_{37}^{3/2}, \quad (107)$$

$$\kappa_{31} = a_z^3 \kappa_{37}^{3/2}, \quad (108)$$

$$\kappa_{32} = a_z^2 \sqrt{\kappa_{37}}, \quad (109)$$

$$\kappa_{33} = \frac{\kappa_{35}^2}{\kappa_{34}} + 1, \quad (110)$$

$$\kappa_{34} = m_x \kappa_{36} + \frac{a_x m_z}{g_p \sqrt{\kappa_{37}}} + \frac{a_x a_y m_y}{a_z g_p \sqrt{\kappa_{37}}}, \quad (111)$$

$$\kappa_{35} = \frac{m_y}{\sqrt{\kappa_{37}}} - \frac{a_y m_z}{a_z \sqrt{\kappa_{37}}}, \quad (112)$$

$$\kappa_{36} = \sqrt{1 - \frac{a_x^2}{g_p^2}}, \quad (113)$$

$$\kappa_{37} = \frac{a_y^2}{a_z^2} + 1, \quad (114)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial m_x} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\kappa_{38})(\kappa_{46}-1)\kappa_{43}}{\kappa_{42}\kappa_{44}} & \frac{\cos(\kappa_{38})\sqrt{(1-\kappa_{46})}\kappa_{43}}{\kappa_{41}} & \frac{a_x a_y \sin(\kappa_{38})\sqrt{(1-\kappa_{46})}\kappa_{43}}{\kappa_{39}} & \frac{a_y \cos(\kappa_{38})\sqrt{(1-\kappa_{46})}\kappa_{43}}{\kappa_{41}} & \frac{a_x \sin(\kappa_{38})\sqrt{(1-\kappa_{46})}\kappa_{43}}{\kappa_{40}} \\ \frac{\cos(\kappa_{38})(\kappa_{46}-1)\kappa_{43}}{\kappa_{42}\kappa_{44}} & \frac{a_x a_y \cos(\kappa_{38})\sqrt{(1-\kappa_{46})}\kappa_{43}}{\kappa_{39}} & \frac{\sin(\kappa_{38})\sqrt{(1-\kappa_{46})}\kappa_{43}}{\kappa_{41}} & \frac{a_x \cos(\kappa_{38})\sqrt{(1-\kappa_{46})}\kappa_{43}}{\kappa_{40}} & \frac{a_y \sin(\kappa_{38})\sqrt{(1-\kappa_{46})}\kappa_{43}}{\kappa_{41}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (115)$$

sendo,

$$\kappa_{38} = \alpha - \arctan\left(\frac{\kappa_{43}}{\kappa_{44}}\right), \quad (116)$$

$$\kappa_{39} = a_z g_p \kappa_{45} \kappa_{42} \kappa_{44}^2, \quad (117)$$

$$\kappa_{40} = g_p \kappa_{45} \kappa_{42} \kappa_{44}^2, \quad (118)$$

$$\kappa_{41} = a_z \kappa_{45} \kappa_{42} \kappa_{44}^2, \quad (119)$$

$$\kappa_{42} = \kappa_{45} \kappa_{42} \kappa_{44}^2, \quad (120)$$

$$\kappa_{43} = \frac{\kappa_{43}^2}{\kappa_{44}^2} + 1, \quad (121)$$

$$\kappa_{44} = \frac{m_y a_y m_z}{\kappa_{45} a_z \kappa_{45}}, \quad (122)$$

$$\kappa_{45} = m_x \sqrt{(1 - \kappa_{46})} + \frac{a_x m_z}{g_p \kappa_{45}} + \frac{a_x a_y m_y}{a_z g_p \kappa_{45}}, \quad (123)$$

$$\kappa_{46} = \sqrt{\frac{a_y^2}{a_z^2} + 1}, \quad (124)$$

$$\kappa_{47} = \frac{a_x^2}{g_p^2}, \quad (125)$$

$$\frac{\partial C_b^I}{\partial m_y} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\kappa_{50}) \kappa_{48} \kappa_{52}}{\kappa_{49}} & \frac{\cos(\kappa_{50}) \kappa_{48}}{\kappa_{53} \kappa_{49}} + \frac{a_x a_y \sin(\kappa_{50}) \kappa_{48}}{a_z g_p \kappa_{53} \kappa_{49}} & \frac{a_x \sin(\kappa_{50}) \kappa_{48}}{g_p \kappa_{53} \kappa_{49}} - \frac{a_y \cos(\kappa_{50}) \kappa_{48}}{a_z \kappa_{53} \kappa_{49}} \\ -\frac{\cos(\kappa_{50}) \kappa_{48} \kappa_{52}}{\kappa_{49}} & \frac{\sin(\kappa_{50}) \kappa_{48}}{\kappa_{53} \kappa_{49}} - \frac{a_x a_y \cos(\kappa_{50}) \kappa_{48}}{a_z g_p \kappa_{53} \kappa_{49}} & \frac{a_x \cos(\kappa_{50}) \kappa_{48}}{g_p \kappa_{53} \kappa_{49}} - \frac{a_y \sin(\kappa_{50}) \kappa_{48}}{a_z \kappa_{53} \kappa_{49}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (126)$$

sendo,

$$\kappa_{48} = \frac{1}{\kappa_{53} \kappa_{51}} - \frac{a_x a_y \kappa_{51}}{a_z g_p \kappa_{53} \kappa_{51}^2}, \quad (127)$$

$$\kappa_{49} = \frac{\kappa_{51}^2}{2} + 1, \quad (128)$$

$$\kappa_{50} = \alpha - \arctan\left(\frac{\kappa_{51}}{\kappa_{51}}\right), \quad (129)$$

$$\kappa_{51} = m_x \kappa_{52} + \frac{a_x m_z}{g_p \kappa_{53}} + \frac{a_x a_y m_y}{a_z g_p \kappa_{53}}, \quad (130)$$

$$\kappa_{52} = \frac{m_y}{\kappa_{53}} - \frac{a_y m_z}{a_z \kappa_{53}}, \quad (131)$$

$$\kappa_{53} = \sqrt{\left(1 - \frac{a_x^2}{g_p^2}\right)}, \quad (132)$$

$$\kappa_{54} = \sqrt{\left(\frac{a_y^2}{a_z^2} + 1\right)}, \quad (133)$$

$$\frac{\partial C_l^I}{\partial m_z} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\kappa_{57}) \kappa_{55} \kappa_{60}}{\kappa_{56}} & -\frac{\cos(\kappa_{57}) \kappa_{55}}{\kappa_{61} \kappa_{56}} & -\frac{a_x a_y \sin(\kappa_{57}) \kappa_{55}}{a_z g_p \kappa_{61} \kappa_{56}} & \frac{a_y \cos(\kappa_{57}) \kappa_{55}}{a_z \kappa_{61} \kappa_{56}} & -\frac{a_x \cos(\kappa_{57}) \kappa_{55}}{a_z \kappa_{61} \kappa_{56}} \\ \frac{\cos(\kappa_{57}) \kappa_{55} \kappa_{60}}{\kappa_{56}} & -\frac{\sin(\kappa_{57}) \kappa_{55}}{\kappa_{61} \kappa_{56}} & +\frac{a_x a_y \cos(\kappa_{57}) \kappa_{55}}{a_z g_p \kappa_{61} \kappa_{56}} & +\frac{a_y \sin(\kappa_{57}) \kappa_{55}}{a_z \kappa_{61} \kappa_{56}} & +\frac{a_x \sin(\kappa_{57}) \kappa_{55}}{a_z \kappa_{61} \kappa_{56}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (134)$$

sendo,

$$\kappa_{55} = \frac{a_y}{a_z \kappa_{61} \kappa_{58}} + \frac{a_x \kappa_{59}}{g_p \kappa_{61} \kappa_{58}^2}, \quad (135)$$

$$\kappa_{56} = \frac{\kappa_{59}^2}{\kappa_{58}^2} + 1, \quad (136)$$

$$\kappa_{57} = \alpha - \arctan\left(\frac{\kappa_{59}}{\kappa_{58}}\right), \quad (137)$$

$$\kappa_{58} = m_x \kappa_{60} + \frac{a_x m_z}{g_p \kappa_{61}} + \frac{a_x a_y m_y}{a_z g_p \kappa_{61}}, \quad (138)$$

$$\kappa_{59} = \frac{m_y}{\kappa_{61}} - \frac{a_y m_z}{a_z \kappa_{61}}, \quad (139)$$

$$\kappa_{60} = \sqrt{\left(1 - \frac{a_x^2}{g_p^2}\right)}, \quad (140)$$

$$\kappa_{61} = \sqrt{\left(\frac{a_y^2}{a_z^2} + 1\right)}, \quad (141)$$

$$\frac{\partial C^I}{\partial g_p} = \left[\begin{array}{l} \frac{a_x \cos(\kappa_2)}{g_p^3 \kappa_{12}} + \frac{\sin(\kappa_2) \kappa_{12} \kappa_9 \kappa_1}{\kappa_8 \kappa_{10}^2} \\ \frac{a_x^2 \sin(\kappa_63)}{g_p^3 \kappa_{73}} - \frac{\cos(\kappa_63) \kappa_{73} \kappa_{70} \kappa_{62}}{\kappa_{69} \kappa_{71}^2} \\ \frac{a_x}{g_p^2} \\ \frac{\cos(\kappa_2) \kappa_{70} \kappa_{62}}{\kappa_{67}} - \frac{a_x a_y \cos(\kappa_2)}{\kappa_7} + \frac{a_x a_y \sin(\kappa_63) \kappa_{70} \kappa_{62}}{\kappa_{64}} \\ \frac{\sin(\kappa_63) \kappa_{70} \kappa_{62}}{\kappa_{67}} - \frac{a_x a_y \sin(\kappa_63)}{\kappa_{68}} - \frac{a_x^2 a_y}{a_z g_p^3 \kappa_{72} \kappa_{73}} \\ \frac{a_y \sin(\kappa_63) \kappa_{70} \kappa_{62}}{\kappa_{65}} - \frac{a_y \cos(\kappa_63) \kappa_{70} \kappa_{62}}{\kappa_{66}} - \frac{a_x \cos(\kappa_63) \kappa_{70} \kappa_{62}}{\kappa_{66}} \\ - \frac{a_x \sin(\kappa_63)}{g_p^2 \kappa_{72}} - \frac{a_x \cos(\kappa_63) \kappa_{70} \kappa_{62}}{\kappa_{65}} - \frac{a_y \sin(\kappa_63) \kappa_{70} \kappa_{62}}{\kappa_{66}} \\ - \frac{a_x^2 \kappa_{72}}{g_p^3 \kappa_{72} \kappa_{73}} \end{array} \right], \quad (142)$$

sendo,

$$\kappa_{62} = \frac{a_x m_z}{g_p^2 \kappa_{72}} - \frac{a_x^2 m_x}{g_p^3 \kappa_{72}} + \frac{a_x a_y m_y}{\kappa_{68}}, \quad (143)$$

$$\kappa_{63} = \alpha - \arctan\left(\frac{\kappa_9}{\kappa_{10}}\right), \quad (144)$$

$$\kappa_{64} = a_z g_p \kappa_{11} \kappa_8 (\kappa_{10})^2, \quad (145)$$

$$\kappa_{65} = g_p \kappa_{11} \kappa_8 (\kappa_{10})^2, \quad (146)$$

$$\kappa_{66} = a_z \kappa_{11} \kappa_8 (\kappa_{10})^2, \quad (147)$$

$$\kappa_{67} = \kappa_{11} \kappa_8 (\kappa_{10})^2, \quad (148)$$

$$\kappa_{68} = a_z g_p \kappa_{72}, \quad (149)$$

$$\kappa_{69} = \frac{(\kappa_9)^2}{(\kappa_{10})^2} + 1, \quad (150)$$

$$\kappa_{70} = \frac{m_y}{\kappa_{11}} - \frac{a_y m_z}{a_z \kappa_{11}}, \quad (151)$$

$$\kappa_{71} = m_x \kappa_{12} + \frac{a_x m_z}{g_p \kappa_{11}} + \frac{a_x a_y m_y}{a_z g_p \kappa_{11}}, \quad (152)$$

$$\kappa_{72} = \sqrt{\frac{a_y^2}{a_z^2} + 1}, \quad (153)$$

$$\kappa_{73} = \sqrt{1 - \frac{a_x^2}{g_p^2}}, \quad (154)$$

$$\frac{\partial C^l_b}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -\kappa_{74}\kappa_{77} & -\frac{\kappa_{75}}{\kappa_{76}} - \frac{a_x a_y \kappa_{74}}{a_z g_p \kappa_{76}} & \frac{a_y \kappa_{75}}{a_z \kappa_{76}} - \frac{a_x \kappa_{74}}{g_p \kappa_{76}} & 0 \\ \kappa_{75}\kappa_{77} & \frac{a_x a_y \kappa_{75}}{a_z g_p \kappa_{76}} - \frac{\kappa_{74}}{\kappa_{76}} & \frac{a_x \kappa_{75}}{g_p \kappa_{76}} + \frac{a_y \kappa_{74}}{a_z \kappa_{76}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (155)$$

sendo,

$$\kappa_{74} = \sin(\alpha - \arctan(\frac{\frac{m_y}{\kappa_{76}} - \frac{a_y m_z}{a_z \kappa_{76}}}{m_x \kappa_{77} + \frac{a_x m_z}{g_p \kappa_{76}} + \frac{a_x a_y m_y}{a_z g_p \kappa_{76}}})) , \quad (156)$$

$$\kappa_{75} = \cos(\alpha - \arctan(\frac{\frac{m_y}{\kappa_{76}} - \frac{a_y m_z}{a_z \kappa_{76}}}{m_x \kappa_{77} + \frac{a_x m_z}{g_p \kappa_{76}} + \frac{a_x a_y m_y}{a_z g_p \kappa_{76}}})) , \quad (157)$$

$$\kappa_{76} = \sqrt{\frac{a_y^2}{a_z^2} + 1}, \quad (158)$$

$$\kappa_{77} = \sqrt{1 - \frac{a_x^2}{g_p^2}}, \quad (159)$$

$$\frac{\partial C_b^l}{\partial \gamma} = \frac{\partial C_b^l}{\partial M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (160)$$

Considerando os sistemas de coordenadas do corpo e de navegação perfeitamente alinhados, i.e. $C_b^l = I$, têm-se $g_P^l = g_P^b$ e $m_E^l = m_E^b$. Portanto, em (3.1) a (3.4), as seguintes relações se verificam: $a_x = a_y = 0$, $a_z = -g_P$, $m_x = M \cos \alpha \cos \gamma$, $m_y = M \sin \alpha \cos \gamma$, e $m_z = M \sin \gamma$. Substituindo tais igualdades em (75) a (160), pode-se fazer as seguintes simplificações:

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial a_x} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{|\cos(\alpha)| \tan(\alpha) \tan(\gamma)}{g_P} & \frac{\cos(\alpha - \arctan(\tan(\alpha)))}{g_P} \\ \frac{|\cos(\alpha)| \tan(\alpha) \tan(\gamma)}{g_P} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{g_P} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (161)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial a_y} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{|\cos(\alpha)| \tan(\gamma)}{g_P} & 0 \\ \frac{|\cos(\alpha)| \tan(\gamma)}{g_P} & 0 & \frac{\cos(\alpha - \arctan(\tan(\alpha)))}{g_P} \\ 0 & -\frac{1}{g_P} & 0 \end{bmatrix}, \quad (162)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial a_z} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (163)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial m_x} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{|\cos(\alpha)| \tan(\alpha)}{M \cos(\gamma)} & 0 \\ \frac{|\cos(\alpha)| \tan(\alpha)}{M \cos(\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (164)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial m_y} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{|\cos(\alpha)|}{M \cos(\gamma)} & 0 \\ -\frac{|\cos(\alpha)|}{M \cos(\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (165)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial m_z} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (166)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial g_p} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (167)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial \alpha} \right|_{C_b^l=I} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\alpha - \arctan(\tan(\alpha))) & 0 \\ \cos(\alpha - \arctan(\tan(\alpha))) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (168)$$

$$\left. \frac{\partial C_b^l}{\partial \gamma} \right|_{C_b^l=I} = \frac{\partial C_b^l}{\partial M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (169)$$

Considerando ainda o cenário ideal de $C_b^l = I$, as equações (4.2) a (4.4) podem ser simplificadas, como já apresentado em (63). Portanto, se $\delta C_b^l|_{C_b^l=I}$ é calculado por meio de (4.6), i.e., multiplicando as equações (161) a (169) pelos erros correspondentes, o resultado final é uma matriz de erros com o formato de (63), cujos erros de normalidade, ortogonalidade e alinhamento são dados por (4.28) a (4.31).