FILIPE CÉSAR ARCHÂNGELO E SILVA

CADEIAS DE MARKOV - UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

LAVRAS – MG

2020

FILIPE CÉSAR ARCHÂNGELO E SILVA

CADEIAS DE MARKOV - UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré
Orientadora

LAVRAS – MG

2020

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Silva, Filipe César Archângelo e
Cadeias de Markov - Uma Sequência Didática para o Ensino Médio / Silva, Filipe César Archângelo e. – Lavras : UFLA, 2020.
51 p. : il.

Dissertação(mestrado profissional)–Universidade Federal de Lavras, 2020.
Orientadora: Profa. Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré.
Bibliografia.

1. Cadeias de Markov. 2. Probabilidade . 3. Sequência Didática. I. Sodré, Rita de Cássia Dornelas. II. Título.

FILIPE CÉSAR ARCHÂNGELO E SILVA

CADEIAS DE MARKOV - UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 15 de Dezembro de 2020.

Profa. Dra. Evelise Roman Corbalan Gois Freire	UFLA
Prof. Dr. Emerson Souza Freire	UFF

Profa. Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré
Orientadora

LAVRAS – MG
2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo maravilhoso dom da vida, por ser autor de meu destino, meu guia e socorro presente nos momentos de angústias e frustrações - obrigado, meu Pai, por tudo que me deste. Agradeço de todo coração, à minha madrinha Maria Manoelina, *in memorian*, que em vida proporcionou-me os maiores sorrisos e afetos, que tomou-me como filho, fornecendo um incondicional carinho de mãe e, assim, tornou-se a pessoa que mesmo sem escolaridade, me ensinou o que é o verdadeiro amor.

Agradeço ao meu pai Edson Marques, por ser um exemplo de fé e minha calmaria em momentos de tempestades, tornando-se assim, referência de serenidade e mansidão. Agradeço à minha irmã Sofia Laura, por continuamente impulsionar-me a prosseguir decididamente, por ser minha conselheira particular e sempre lembrar-me do porquê de minhas batalhas diárias. Agradeço à minha namorada e melhor amiga Karoline Figueiredo, por muitas vezes enxergar-me além do que os olhos podem ver, por ser minha companheira, minha incentivadora e por acreditar em meus sonhos, aceitando trilhá-los ao meu lado.

Agradeço à minha orientadora Rita de Cássia, pela paciência em ter lido inúmeras vezes os mesmos capítulos, por direcionar-me, de maneira majestosa, às prioridades deste trabalho e por ter oportunizado a mim e aos meus colegas de pós-graduação, admiráveis aulas e ensinamentos, além de servir como espelho de uma excelente profissional. Agradeço ao meu mentor, antigo professor, recente colega de classe e eterno amigo Francisco Ragner, por estar presente durante grande parte de minha formação, encorajando-me com belas palavras; compartindo de minhas orações diárias e provocando-me altas gargalhadas, que muitas vezes tornaram-se meu refúgio. Agradeço ao mais recente e prodigioso amigo Jonas Soares, por mostrar-se assíduo em situações desesperadoras, por confiar em minha capacidade e competência, por ouvir tantos desabafos e, acima de tudo, por comprovar que verdadeiras amizades não requerem grande tempo de convivência.

Agradeço, em especial, aos colegas Antônio Marcos e Mariana Mercílio, grandes pessoas e de caráteres indiscutíveis, que fizeram parte dessa minha trajetória, partilhando diversas conquistas, sortidas risadas na hora do almoço, múltiplas histórias bizarras e provando serem essenciais em meus momentos de dificuldades. Agradeço, também, a professora Evelise Freire, que muitas vezes compartilhou de suas experiências e se fez uma grande encorajadora do processo ao qual passei.

Meu último agradecimento vai para a minha mãe Joana D'Arc Archângelo, a pessoa que me colocou nesse caminho, o meu maior orgulho nessa vida, a minha rainha e maior admiração. A pessoa que educou, orientou e formou meu caráter. A pessoa que me ensinou valores, princípios e preceitos - vencendo preconceitos, quebrando paradigmas e nunca desistindo de seus sonhos. A pessoa que se manteve acordada junto a mim, enquanto eu virava noites. A pessoa que respeitou o meu silêncio e soube dizer as palavras certas nos meus momentos de crises existenciais.

E, por fim, agradeço antecipadamente a todos que lerão esse trabalho.

RESUMO

Uma cadeia de Markov é um processo estocástico caracterizado pela perda de memória. Em outras palavras, é um processo aleatório dependente do tempo que satisfaz a propriedade de Markov, que é caracterizada por previsões para os estados futuros baseando-se no estado presente e independente dos estados passados. As cadeias de Markov têm aplicações em diversos tópicos da Física, Economia, Biologia, teoria dos jogos, etc. Seu estudo envolve os conteúdos de matrizes e probabilidade. Uma vez que esses conteúdos fazem parte da Educação Básica, há a possibilidade de um estudo inicial de seus conceitos através de alguns exemplos e aplicações no 2° ano do Ensino Médio. Assim, com o objetivo de apresentar interessantes aplicações da Matemática e motivar os estudantes na sua aprendizagem, este trabalho traz uma proposta de sequência didática, isto é, um conjunto de atividades planejadas para o estudo em grupo, com previsão de duração de duas horas-aulas. Os estudantes terão a oportunidade de observar que as linhas de raciocínio utilizadas nas resoluções dos problemas são muito semelhantes, apesar dos temas de cada problema serem completamente diferentes. Tal situação mostra o caráter de generalização da Matemática, que faz uso de uma mesma ferramenta para resolver problemas de origens distintas.

Palavras-chave: Cadeias de Markov. Probabilidade. Sequência Didática.

ABSTRACT

A Markov chain is a stochastic process obtained by the loss of memory. In other words, it is a random time-dependent process that satisfies the Markov property, which is characterized by predictions for future states based on the present state and independent of past states. The chains of Markov have applications in several topics of Physics, Economics, Biology, game theory, etc. This study involves the contents of matrices and probability. Since these contents are part of Basic Education, there are the possibility of an initial study of its concepts through some examples and applications in the 2° year of High school. Thus, in order to present interesting applications of mathematics and motivate students in their learning, this work presents a didactic sequence proposal, that is, a set of activities planned for the group study, with a duration of two class hours. Students will have the opportunity to note that the lines of reasoning used in problem solving are very similar, although the themes of each problem are completely different. Such a situation shows the character of generalization of Mathematics, which makes use of the same tool to solve problems of different origins.

Keywords: Markov chains. Probability. Didactic Sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Variável aleatória discreta X definida sobre Ω. 21
Figura 2.2 – Diagrama em árvore e suas probabilidades 21
Figura 2.3 – Esquema com as probabilidades de transição entre os quatro estados 23
Figura 3.1 – Esquema com as probabilidades de transição entre os dois estados possíveis 26
Figura 3.2 – Esquema com as probabilidades de transição entre os quatro estados 32
Figura 3.3 – Esquema com as probabilidades de transições entre os estados de E 34
Figura 3.4 – Nova reordenação dos estados de $E = \{1', 2', 3', 4', 5'\}$ 35
Figura 4.1 – Esquema com as probabilidades de transição entre os dois estados do sistema 40
Figura 4.2 – Situação do Problema 4.1 42
Figura 4.3 – Esquema de migração entre as zonas urbana (U) e rural (R) do município . 44
Figura 4.4 – Esquema com as probabilidades de transição entre as três classes sociais . . 46
Figura 4.5 – Situação do Problema 4.3 46
Figura 4.6 – Esquema com as probabilidades de transição entre os três tipos de safra . . 48
Figura 4.7 – Situação do Problema 4.4 48

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Probabilidades para os resultados do próximo jogo 25
Tabela 3.2 – Probabilidades para o próximo jogo baseadas no resultado do jogo atual . . 27
Tabela 4.1 – Probabilidades de vitória ou derrota para um determinado time. 40
Tabela 4.2 – Porcentagens de migração entre as zonas urbana e rural do município. . . . 44
Tabela 4.3 – Probabilidades de transição entre as classes A, M e B da próxima geração. . 46

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS 10

2.1 Histórico sobre probabilidade 10

2.2 Probabilidade 11

2.2.1 Tipos e probabilidade de um evento 12

2.2.2 Adição de probabilidades 14

2.2.3 Probabilidade condicional 16

2.2.4 Eventos independentes 17

2.3 Conceitos básicos de processos estocásticos 20

3 CADEIAS DE MARKOV 24

3.1 Vetor de probabilidade de estado 29

3.2 Classificação de estados 30

3.3 Cadeias de Markov absorventes 33

3.4 Cadeias de Markov regulares 37

4 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE CADEIAS DE MARKOV PARA O ENSINO MÉDIO 39

Considerações finais 50

REFERÊNCIAS 51

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a presença e o uso de probabilidades são frequentes no cotidiano de muitas pessoas e em diversas situações: nas consultas sobre a previsão do tempo no aplicativo do celular, sobre os possíveis congestionamentos no trânsito, sobre as chances de um time de futebol ganhar uma determinada partida, sobre as chances de um aluno ser aprovado em um vestibular, as chances de um apostador ganhar na loteria, etc. Assim, é notável que a teoria probabilística está presente na vida das pessoas.

Nas ciências, a situação se repete, e o estudo de probabilidade e suas aplicações estão em diversas áreas, como na Estatística, na Economia, nas Engenharias, na Física, na Química, na Sociologia, entre outras.

Este trabalho apresenta um estudo introdutório de uma aplicação de probabilidade, mais especificamente, as chamadas cadeias de Markov, que é um tipo especial de processo aleatório caracterizado pela perda de memória. Considera-se a evolução de um processo em tempo discreto, sendo o conjunto de estados possíveis também um conjunto discreto e, na maioria dos exemplos, um conjunto finito. A probabilidade do processo assumir um determinado estado no futuro, só depende do estado presente, ou seja, os estados anteriores do processo não interferem na probabilidade de estados futuros. São fornecidas as probabilidades de transição de um estado para o outro e, por simplicidade, estas probabilidades não dependem do tempo, ou seja, são estacionárias.

A escolha do tema de cadeias de Markov pelo autor, justifica-se pela possibilidade de inserção de alguns de seus conceitos no âmbito escolar a nível de Ensino Médio, mais especificamente, no 2° ano do Ensino Médio. Os conteúdos de matrizes e probabilidade são pré-requisitos para tal inserção. Com este objetivo, o autor apresenta uma proposta de sequência didática, isto é, um conjunto de atividades planejadas para o estudo introdutório de alguns conceitos de cadeias de Markov através de situações problemas, que são baseadas em um exemplo previamente discutido e estudado com o professor. A estimativa do tempo necessário para a realização da sequência é de duas horas-aulas e sugere-se a dinâmica de trabalho em grupo.

A divisão desta dissertação é feita em quatro capítulos, incluindo este primeiro capítulo introdutório.

O Capítulo 1 traz uma revisão dos conceitos básicos de probabilidade e processos estocásticos, uma vez que, as cadeias de Markov são exemplos especiais desse tipo de processos. O autor achou importante a inserção de tal revisão para o bom entendimento do trabalho.

O Capítulo 2 apresenta o tema principal do trabalho, as cadeias de Markov. Apesar do conteúdo apresentado neste capítulo não ser voltado para os alunos do Ensino Médio, ele tem por objetivo ampliar e melhorar a formação matemática do professor, um dos pontos centrais do PROFMAT.

O Capítulo 3 traz a sequência didática para os alunos do 2° ano do Ensino Médio. Tal sequência é formada por alguns problemas envolvendo as ideias de cadeias de Markov, principalmente, o conceito de matriz de transição e o cálculo de probabilidades não triviais. As resoluções das atividades e alguns comentários pertinentes também fazem parte do capítulo.

O autor acredita que a sequência didática apresentada neste trabalho possa incentivar o interesse dos estudantes pela Matemática, em especial, pelo estudo de probabilidade, uma vez que os problemas apresentados envolvem interessantes aplicações na vida cotidiana.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo, será apresentada uma revisão dos conteúdos probabilidades relevantes para o estudo das cadeias de Markov, bem como um breve histórico sobre o tema. Todos os conceitos abordados remetem a uma futura aplicação para alunos de Ensino Médio, sendo assim, limitaremos as ideias e exemplos para este público.

2.1 Histórico sobre probabilidade

O grande interesse do homem em estudar, e assim, aprofundar em fenômenos que envolvam determinadas possibilidades para ações, eventos e fenômenos, não é uma curiosidade recente. Tal estudo foi o passo decisivo para o desenvolvimento do cálculo das probabilidades. Segundo (SILVA, 2020), alguns indícios alegam que, o surgimento da Teoria da Probabilidade teve início com os jogos de azar alastrado na Idade Média. Jogos desse tipo eram frequentemente praticados através de apostas e até mesmo como tentativas de predizer o futuro.

O avanço da Teoria da Probabilidade deve ser atribuído à diversos matemáticos. Sustenta-se que cálculo das probabilidades teve a sua origem na Itália com Luca Pacioli (1445 - 1517) , Niccolò Fontana Tartaglia (1499 - 1557) , Galileu Galilei (1564 - 1642) e Gerolamo Cardano (1501 - 1576) , onde este último foi o autor de *O Livro dos Jogos de Azar* (1520), o primeiro livro a tratar-se sobre o acaso, onde que apesar de cometer alguns equívocos, teve como sua maior contribuição o que conhecemos hoje como *espaço amostral*.

Para o desenvolvimento do estudo em questão, pode-se ainda citar outros matemáticos que contribuíram de forma satisfatória para a fundamentação dos cálculos probabilísticos, como Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) e Lenis Poisson (1781 - 1840). Entretanto, e de acordo com (EVES, 2004), um marco interessante e, consequentemente, importante na história deu-se em 1654, quando Antoine Gombaud, um nobre experimente apostador,buscou o auxílio de Blaise Pascal (1623 - 1662) para a seguinte questão: *"Dois jogadores estão participando de um determinado jogo e ambos têm a mesma probabilidade de vencer. O ganhador será aquele que atingir um certo número de pontos. Caso o jogo seja interrompido em um dado momento, qual a maneira justa de dividir o valor apostado?"*. Para isso, Blaise Pascal teve a ajuda de Pierre de Fermat (1601 - 1655), onde estes, ao encontrarem soluções para o problema de maneiras distintas, representaram um significativo avanço no domínio das probabilidades.

Em 1655, Christiaan Huygens (1629 - 1695), em viagem à Paris, conheceu as correspondências trocadas por Fermat e Pascal, e assim, em 1657 publicou *On Reasoning in Games of Chance*, livro que apresenta de forma sistemática o problema discutido por Fermat e Pascal e alguns outros problemas mais complexos envolvendo jogos de azar. Esta obra contribuiu indiretamente em outras vertentes da Teoria da Probabilidade, pois serviu de inspiração para Jacob Bernoulli (1654 - 1705) no estudo de experimentações. Bernoulli percebeu que as probabilidades podiam ser calculadas por meio de observações, registrando-se as frequências de eventos e as margens de erro, fato que posteriormente deu origem a Teoria da Medição, usada para quantificar erros aleatórios, em meados do século XVIII.

As contribuições de Bernoulli evidenciaram os grandes números, abordando permutações, agrupamentos, combinações e a classificação binomial. Atualmente, a Teoria da Probabilidade ainda é aplicada a jogos de azar, bem como em diversas áreas da medicina, engenharia, Market, economia e, até mesmo, no direito. Os conceitos desenvolvidos alteraram o estudo dos processos aleatórios, riscos e tomadas de decisões.

2.2 Probabilidade

Com a teoria da probabilidade, procura-se quantificar a chance de ocorrência de um determinado resultado (evento), quando observa-se um fenômeno ou um experimento aleatório.

Tomando um experimento, este pode acontecer em duas vertentes (MORGADO, 2006). Será dito que um *experimento é determinístico* no momento que, repetido em condições semelhantes conduz a resultados fundamentalmente idênticos, podendo assim, determiná-los antes de sua realização, por exemplo: quanto tempo levará um veículo para percorrer um trajeto de 300 km numa velocidade média de 60 km/h? Não há a necessidade de executar o experimento para determinar a resposta de $5h$.

Os experimentos que, quando repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes, são chamados de *experimentos aleatórios*. Ou seja, são experimentos cujos resultados somente são conhecidos após sua realização. Mesmo repetindo-se o experimento ou mantendo-se as mesmas condições, ainda assim o resultado poderá não ser o mesmo. Por exemplo, no lançamento de um dado comum (seis faces numeradas de 1 a 6) e honesto (todas as faces têm a mesma chance de aparecer), que face ficará voltada para cima? Para conhecer o resultado, precisa-se lançar o dado.

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de *espaço amostral* ou *conjunto universo* e será representado por Ω.

No caso do lançamento de um dado, tem-se $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Além disso, define-se como *evento* um subconjunto do espaço amostral.

Exemplo 2.1 *No lançamento de três moedas, indica-se por ca e co as faces cara e coroa. Assim, o espaço amostral é dado pelo conjunto*

$$\Omega = \{(ca,ca,ca),(ca,ca,co),(ca,co,ca),(co,ca,ca),(co,co,co),(co,co,ca),$$

$$(co,ca,co),(ca,co,co)\}.$$

represente os seguintes eventos:

Evento A: *As três faces são iguais.*

Evento B: *Somente uma face 'cara'.*

Evento C: *Pelo menos uma face 'cara'.*

São eles:

- $A = \{(ca,ca,ca),(co,co,co)\}$.
- $B = \{(ca,co,co),(co,ca,co),(co,co,ca)\}$.
- $C = \{(ca,ca,ca),(ca,ca,co),(ca,co,ca),(co,ca,ca),(co,co,ca),(co,ca,co),(ca,co,co)\}$.

Lembre-se que a quantidade de elementos do espaço amostral e de um evento de um experimento aleatório são calculados geralmente com o auxílio da análise combinatória.

2.2.1 Tipos e probabilidade de um evento

Considere o lançamento de um dado comum e a observação da face voltada para cima. O espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Analisa-se a seguir diversos tipos de eventos que podem ser definidos neste experimento.

Evento elementar: qualquer subconjunto unitário de Ω. Exemplo: a ocorrência de um número múltiplo de 5, $A = \{5\}$.

Evento certo: o próprio espaço amostral Ω. Exemplo: a ocorrência de um número divisor de 60, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Evento impossível: é um conjunto vazio $\emptyset$. Exemplo: a ocorrência de um número múltiplo de 8: $C = \emptyset$.

Evento união: é a reunião de eventos. Exemplo: seja D a ocorrência de um número primo, $D = \{2,3,5\}$, e o evento E sendo a ocorrência de um número ímpar, $E = \{1,3,5\}$. O evento $D \cup E$ será a ocorrência de um número primo ou ímpar, $D \cup E = \{1,2,3,5\}$.

Evento interseção: é a interseção de eventos. Exemplo: considere os eventos D e E do item anterior. O evento $D \cap E$ é a ocorrência de um número primo e ímpar, $D \cap E = \{3,5\}$.

Eventos mutuamente exclusivos: dois eventos F e G são chamados mutuamente exclusivos quando $F \cap G = \emptyset$. Exemplo: seja F a ocorrência de um número par, $F = \{2,4,6\}$, e G a ocorrência de um número ímpar, $G = \{1,3,5\}$. Então F e G são mutuamente exclusivos.

Evento complementar: um evento $\bar{H}$ é complementar do evento H, se $\bar{H} = \Omega - H$. Exemplo: seja H a ocorrência de um número primo, $H = \{2,3,5\}$. O evento $\bar{H}$ sendo a ocorrência de um número não primo, $\bar{H} = \{1,4,6\}$, é um evento complementar de H. No item anterior, o evento F é complementar do evento G e vice-versa.

Diz-se que um espaço amostral é **equiprovável** quando a chance de ocorrência de cada um de seus eventos elementares é sempre a mesma.

Definição 2.1 ***(Probabilidade clássica)*** *Seja Ω um espaço amostral equiprovável e A um de seus eventos. A probabilidade de ocorrência do evento A é definida por:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

sendo $n(A)$ e $n(\Omega)$ a quantidade de elementos em A e Ω, respectivamente.

Em outras palavras, pode-se dizer que a probabilidade de ocorrência de um evento A é a razão entre o número de casos favoráveis ao evento A e o número de casos possíveis no experimento.

$$P(A) = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}.$$

Em muitas aplicações, o espaço amostral não é equiprovável, impossibilitando o cálculo da probabilidade como definido anteriormente. Nestes casos, usa-se uma outra definição de probabilidade conhecida como **definição frequentista**. Por exemplo, para determinar a probabilidade de um determinado goleiro defender um pênalti em um jogo, faz-se uma análise dos jogos realizados anteriormente pelo goleiro para fazer uma projeção com base em dados que já aconteceram. Suponha que em 35 pênaltis ocorridos em jogos anteriores, o goleiro tenha defendido 15. Então, tem-se uma estimativa para a probabilidade do goleiro defender um pênalti no jogo, dada pela frequência relativa $\frac{15}{35} = \frac{3}{7} = 0,428...$, ou seja, aproximadamente, 43%. Segundo (SOARES J. F., 2002), pode-se afirmar que, quanto maior for o número n de repetições de um determinado experimento, melhor será a estimativa para a probalidade. Dessa forma, a probabilidade de um evento A é dada pela frequência relativa desse evento

$$P(A) = \frac{\text{número de vezes de ocorrência do evento}}{\text{número total de repetições do experimento}}.$$

A seguir, são apresentadas algumas propriedades de probabilidade para certos eventos de um espaço amostral Ω.

(I) $P(\emptyset) = 0$

(II) $P(\Omega) = 1$

(III) $0 \leq P(A) \leq 1$

(IV) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2.2.2 Adição de probabilidades

Em um baralho comum tem-se 4 naipes:

- paus ($\clubsuit$, cor preta)
- copas ($\heartsuit$, cor vermelha)
- espadas ($\spadesuit$, cor preta)
- ouros ($\diamondsuit$, cor vermelha)

Cada naipe possui 13 cartas, são elas: $\mathscr{A}$(ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, $\mathscr{J}$(valete), $\mathscr{Q}$(dama) e $\mathscr{K}$ (rei). Ao extrair uma carta ao acaso, pergunta-se:

(a) Qual é a probabilidade de a carta retirada ser de copas?

(b) Qual é a probabilidade de a carta retirada ser um ás?

(c) Qual é a probabilidade de a carta retirada ser de copas ou um ás?

Para responder as questões acima, observa-se que como são 4 naipes, com 13 cartas cada um, então tem-se um total de $4 \cdot 13 = 52$ cartas, portanto $n(\Omega) = 52$.

(a) Casos favoráveis: são as 13 cartas de copas, assim, $n(\text{casos favoráveis}) = 13$. Logo, $P(\text{carta ser de copas}$
$\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

(b) Casos favoráveis: são os 4 ases, assim, $n(\text{casos favoráveis}) = 4$. Logo, $P(\text{carta ser um ás}) =$ $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

(c) Casos favoráveis: 4 ases + 13 cartas de copas - 1 ás de copas = 16 cartas, assim, $n(\text{casos favoráveis}) =$ 16. Logo,

$$P(\text{carta ser de copas ou um ás}) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

Percebe-se que, nesse exemplo, foi necessário retirar um elemento (ás de copas), que foi contabilizado nos dois conjuntos. Em situações como essa, em que dois conjuntos possuem elementos repetidos, tem-se:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Em palavras, pode-se dizer que o número de elementos do conjunto união $A \cup B$ é igual ao número de elementos de A mais o número de elementos de B, menos o número de elementos do conjunto interseção $A \cap B$.

Pode-se estender esse conceito para as probabilidades, uma vez que,

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}.$$

que é equivalente a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2.2.3 Probabilidade condicional

Muitas vezes, o conhecimento de alguma informação a respeito do resultado de um experimento aleatório pode alterar a probabilidade de um determinado evento ligado a tal experimento.

Exemplo 2.2 *Num jogo de dados, um jogador sempre aposta em obter um resultado maior do que 3. A probabilidade de vencer tal aposta é facilmente calculada e vale* $1/2$*. Certa vez, esse mesmo jogador chegou no momento em que o dado já havia sido lançado. Como ainda não havia visto o resultado, decidiu analisar se faria a mesma aposta como de costume. Porém ele foi avisado de que o resultado era um número par. Sabendo disso, o jogador decidiu por não apostar e esperar a próxima jogada. O jogador tomou uma boa decisão?*

Para responder tal questionamento, basta calcular a probabilidade de sair um resultado maior do que 3, sabendo que o resultado é um número par, e comparar o valor com $1/2$.

Sendo o evento A a ocorrência de um resultado maior do que 3, $A = \{4,5,6\}$, tem-se $P(A) = 1/2$. Chamando de B a ocorrência de resultado par, $B = \{2,4,6\}$, $P(B) = 1/2$. A probabilidade de ocorrer um número maior do que 3, sabendo que ele é um número par, será denotada por $P(A|B)$. Diz-se que $P(A|B)$ é a probabilidade de ocorrência do evento A, condicionada à ocorrência do evento B.

Para realização desse cálculo, raciocina-se como se o espaço amostral tivesse diminuído e passasse a ser $\bar{\Omega} = B$. Já o evento A deve ser considerado como um outro evento $\bar{A}$ nesse novo espaço amostral $\bar{\Omega} = B$. Na verdade, $\bar{A} = A \cap B$. Os casos favoráveis para o evento $\bar{A}$ é o conjunto $A \cap B = \{4,6\}$. Portanto,

$$P(A|B) = \frac{n(\bar{A})}{n(\bar{\Omega})} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{3}. \tag{2.1}$$

Como a probabilidade encontrada é maior do que $P(A) = 1/2$, pode-se concluir que o jogador não tomou uma boa decisão ao deixar de apostar.

De (2.1), tem-se uma outra forma de indicar $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

De maneira análoga,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Logo, pode-se escrever:

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A). \tag{2.2}$$

Equivalentemente,

$$P(A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(B|A)}.$$

2.2.4 Eventos independentes

Se a probabilidade de um evento A condicionado a um evento B for igual à probabilidade do evento A, diz-se que o evento A é independente do evento B ou, equivalentemente, A independe de B. Caso contrário, diz-se que o evento A depende de B.

Exemplo 2.3 *Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Duas bolas, escolhidas ao acaso, são retiradas dessa urna, sucessivamente e* **sem reposição**. *Qual é a probabilidade que a segunda bola seja branca?*

Como não há reposição da bola na urna, $n(\Omega) = 10 \cdot 9 = 90$ possibilidades. Denote por A a retirada da segunda bola na cor branca. Tem-se dois tipos de casos favoráveis a A: a retirada de uma primeira bola na cor preta e a retirada de uma segunda bola na cor branca ($6 \cdot 4 = 24$ possibilidades) ou a retirada de uma primeira bola branca e uma segunda bola branca ($4 \cdot 3 = 12$ possibilidades), totalizando assim $36 = 24 + 12$ possibilidades. Logo,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Exemplo 2.4 *Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Duas bolas, escolhidas ao acaso, são retiradas dessa urna, sucessivamente e* **sem reposição**. *Qual é a probabilidade que a segunda bola seja branca, sabendo-se que a primeira bola retirada foi preta?*

Denote por B a retirada da primeira bola na cor preta. Tem-se dois tipos de casos favoráveis a B: a retirada de uma primeira bola na cor preta e a retirada de uma segunda bola na cor branca ($6 \cdot 4 = 24$ possibilidades) ou a retirada de uma primeira bola preta e uma segunda bola preta

($6 \cdot 5 = 30$ possibilidades), totalizando assim $54 = 24 + 30$ possibilidades. Logo, $n(B) = 54$. O evento interseção $A \cap B$, seria retirar uma primeira bola preta e uma segunda bola branca, possui $6 \cdot 4 = 24$ casos favoráveis. Logo,

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} \approx 0,44.$$

Observa-se que, como $P(A|B) \neq P(A)$, o evento A depende do evento B. Em outras palavras, a condição 'retirar uma primeira bola na cor preta' influenciou a probabilidade de sair uma segunda bola na cor branca.

Exemplo 2.5 *Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Duas bolas, escolhidas ao acaso, são retiradas dessa urna, sucessivamente e* **com reposição***. Qual é a probabilidade que a segunda bola seja branca?*

Como há reposição da bola na urna, $n(\Omega) = 10 \cdot 10 = 100$ possibilidades. Denote por A a retirada da segunda bola na cor branca. Tem-se dois tipos de casos favoráveis a A: a retirada de uma primeira bola na cor preta e a retirada de uma segunda bola na cor branca ($6 \cdot 4 = 24$ possibilidades) ou a retirada de uma primeira bola branca e uma segunda bola branca ($4 \cdot 4 = 16$ possibilidades), totalizando assim $40 = 24 + 16$ possibilidades. Logo,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Exemplo 2.6 *Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Duas bolas, escolhidas ao acaso, são retiradas dessa urna, sucessivamente e* **com reposição***. Qual é a probabilidade que a segunda bola seja branca, sabendo-se que a primeira bola retirada foi preta?*

Denote por B a retirada da primeira bola na cor preta. Tem-se dois tipos de casos favoráveis a B: a retirada de uma primeira bola na cor preta e a retirada de uma segunda bola na cor branca ($6 \cdot 4 = 24$ possibilidades) ou a retirada de uma primeira bola preta e uma segunda bola preta ($6 \cdot 6 = 36$ possibilidades), totalizando assim $60 = 24 + 36$ possibilidades. Logo, $n(B) = 60$. O evento interseção $A \cap B$, seria retirar uma primeira bola preta e uma segunda bola branca, possui $6 \cdot 4 = 24$ casos favoráveis. Logo,

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Observa-se que, neste exemplo, $P(A|B) = P(A)$. Portanto, o evento A é independente do evento B. Em outras palavras, a condição 'retirar uma primeira bola na cor preta' não influenciou a probabilidade de sair uma segunda bola na cor branca. O que foi essencial aqui, para a independência do evento A de B, foi a reposição da primeira bola retirada na urna. Quando não é feita a reposição da bola, o evento A passa a depender do evento B.

Esse raciocínio pode ser generalizado para a retirada de qualquer quantidade de bola em uma urna, desde que haja a reposição da bola retirada em cada momento. Um outro exemplo, é o lançamento de uma moeda por cem vezes. A probabilidade de obter a face cara em qualquer um dos lançamentos é $1/2$ e independe de qualquer resultado obtido anteriormente.

Agora, analisa-se uma questão interessante: se o evento A é independente do evento B, então o evento B é independente do evento A? O teorema seguinte traz uma resposta afirmativa para essa pergunta.

Teorema 2.1 *Sejam A e B eventos possíveis de um mesmo espaço amostral Ω. Se o evento A é independente do evento B, então B também é independente de A. Em símbolos escreve-se:*

$$P(A|B) = P(A) \Longrightarrow P(B|A) = P(B).$$

Demonstração: Como A e B são eventos possíveis, segue que $n(A)$ e $n(B)$ são diferentes de zero. Mostrou-se, anteriormente, que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Por hipótese, $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, ou seja, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Portanto,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Logo, B é independente de A.

Exemplo 2.7 *Uma urna contém 7 bolas brancas e 3 bolas azuis. Calcule a probabilidade de obter duas bolas azuis em duas retiradas sucessivas, se as retiradas forem feitas*

a) *com reposição.*

b) *sem reposição.*

a) Denote por A_1 a retirada da primeira bola na cor azul e por A_2 a retirada da segunda bola também na cor azul. Deseja-se calcular $P(A_1 \cap A_2)$. Como o experimento é realizado com reposição, os eventos A_1 e A_2 são independentes e, portanto, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 0,09$.

b) Como não há reposição, os eventos A_1 e A_2 não são independentes. Assim, deve-se usar a probabilidade condicional,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{15} \approx 0,067.$$

Em resumo, se A e B são eventos de um mesmo espaço amostral Ω, com $P(B) \neq 0$, é válido que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Além disso, se o evento A é independente do evento B, isto é, se $P(A|B) = P(A)$, então

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

2.3 Conceitos básicos de processos estocásticos

Para entender o que é um processo estocástico é necessário o conceito de variável aleatória. Existem dois tipos de variável aleatória: a discreta e a contínua. Define-se a seguir a variável aleatória discreta (CLARKE A. BRUCE, 1979), pois é ela que será utilizada no estudo de cadeias de Markov.

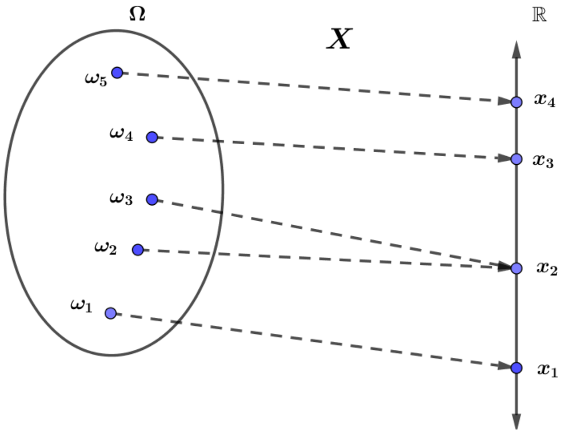
Definição 2.2 *Uma **variável aleatória** X é uma função definida sobre um espaço amostral Ω que atribui um valor real a cada elemento de Ω. Diz-se que a variável aleatória é **discreta** quando o conjunto de valores possíveis é finito ou infinito e enumerável.*

Com o objetivo de tornar mais claros tais conceitos apresenta-se o exemplo:

Exemplo 2.8 *Uma urna contém duas bolas azuis A e três bolas vermelhas V. Suponha que são sorteadas duas bolas ao acaso, sem reposição. Tem-se o espaço amostral*

$$\Omega = \{\omega_1 = (A,A),\ \omega_2 = (A,V),\ \omega_3 = (V,A),\ \omega_4 = (V,V)\}.$$

Figura 2.1 – Variável aleatória discreta X definida sobre Ω.

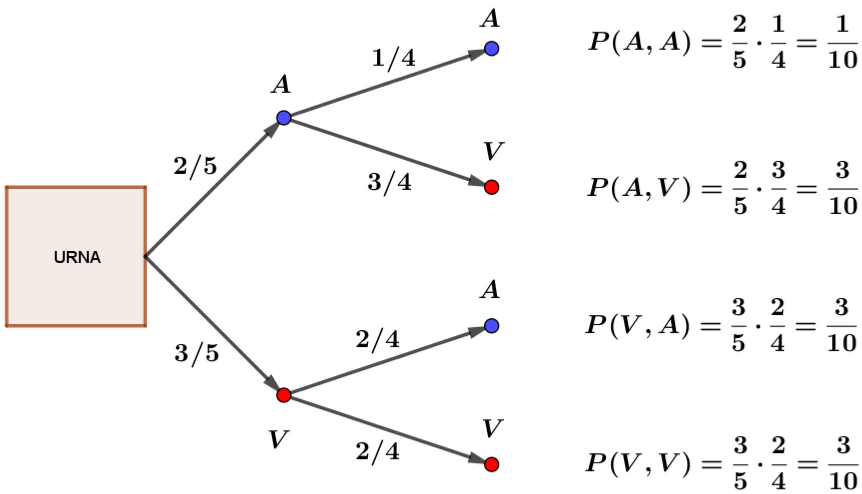


Fonte: Do autor (2020)

Define-se a seguinte variável aleatória discreta X: ***número de bolas vermelhas retiradas****. Então,* $X(\omega_1) = 0$*,* $X(\omega_2) = 1$*,* $X(\omega_3) = 1$ *e* $X(\omega_4) = 2$*. Os valores assumidos por esta variável aleatória discreta são: 0, 1 e 2.*

No caso do exemplo anterior, usando o conceito de probabilidade condicional, tem-se o diagrama:

Figura 2.2 – Diagrama em árvore e suas probabilidades



Fonte: Do autor (2020)

Definição 2.3 *A* ***distribuição de probabilidade*** *para uma variável aleatória X é a descrição das probabilidades associadas aos valores possíveis da variável. Para o caso de variável discreta, a* *distribuição de probabilidade é apenas uma lista de valores possíveis com suas probabilidades associadas.*

Assim, para o exemplo anterior, tem-se a distribuição de probabilidade para a variável aleatória X:

$$P(X=0) = P(A,A) = \tfrac{1}{10},$$
$$P(X=1) = P(A,V) + P(V,A) = \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10} = \tfrac{6}{10},$$
$$P(X=2) = P(V,V) = \tfrac{3}{10}.$$

Tem-se a seguir a definição de um processo estocástico.

Definição 2.4 *Um **processo estocástico** $\{X_t : t \in I\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias definidas sobre um mesmo espaço amostral Ω. O conjunto I será chamado de **espaço de parâmetros**, sendo na prática o período de tempo em que o processo estocástico é observado. Assume-se $I = [0,\infty]$ (parâmetro em tempo contínuo) ou $I = \{0,1,2,3,\cdots\}$ (parâmetro em tempo discreto). O conjunto de valores que a variável aleatória X_t pode assumir é chamado de **espaço de estados** e será denotado por E.*

- *Se X_t representa alguma contagem, isto é, se X_t for uma variável aleatória discreta, o espaço de estados E pode ser uma sequência finita ou infinita e enumerável (processo de estado discreto ou cadeia aleatória).*

- *Se X_t representa uma medida, isto é, se X_t for uma variável aleatória contínua, o espaço de estados E pode ser um intervalo de números reais (processo de estado contínuo).*

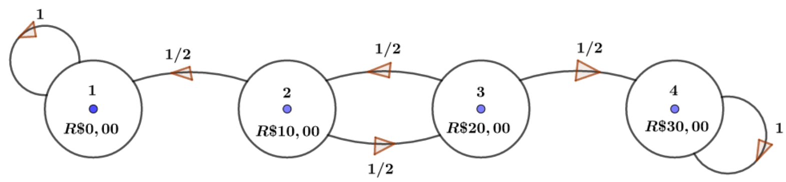
A seguir tem-se um exemplo de processo estocástico com variáveis aleatórias discretas que podem assumir quatro estados, isto é, o conjunto E tem quatro elementos, além disso o tempo também é discreto.

Exemplo 2.9 *Um jogador tem $R\$10,00$ e decide apostar em um jogo de dado comum no qual ele ganha 10 reais, caso saia um número par, ou perde 10 reais, caso saia um número ímpar. Dessa forma, as probabilidades dele perder ou ganhar são ambas iguais a $1/2$. O jogo acaba quando o jogador tiver $R\$30,00$ ou $R\$0,00$.*

Este exemplo dá origem a uma cadeia de Markov sendo a variável aleatória X_k a quantia acumulada pelo jogador na k-ésima jogada. Tal variável aleatória pode assumir um dos estados: 1, 2, 3 e 4, sendo estes estados correspondentes às quantias: $R\$0,00$, $R\$10,00$, $R\$20,00$ e $R\$30,00$, respectivamente. Desssa forma, o conjunto de estados é $E = \{1,2,3,4\}$ e o estado inicial é

$X_0 = 2$. Já X_1 pode ser o estado 1 ($R\$0,00$) ou o estado 3 ($R\$20,00$). Portanto a cadeia de Markov será uma sequência numérica, a princípio finita, cujo primeiro termo é 2 e o último termo é 1 ou 4. Os termos intermediários variam entre os números 2 e 3.

Figura 2.3 – Esquema com as probabilidades de transição entre os quatro estados



Fonte: Do autor (2020)

Como um processo estocástico tem a função de associar a um conjunto de índice I uma coleção de variáveis aleatórias X_t, saber definir o comportamento dessas variáveis torna-se algo fundamental, uma vez que essas variáveis definem a complexidade de um fenômeno.

3 CADEIAS DE MARKOV

Este capítulo é destinado ao estudo dos processos Markovianos, que é um tipo específico de processo estocástico. Em um processo Markoviano, a distribuição de probabilidade para um passo futuro depende apenas do estado presente. Se, por sua vez, o espaço de estados é discreto (enumerável), então o processo é chamado de **Cadeia de Markov** (LEVIN, 2009).

Nas aplicações, a sequência $\{X_n : n = 0,1,2,\cdots\}$ representa a evolução no tempo de um sistema, nos instantes $n = 0,1,2,...$. A variável aleatória X_n representa o estado do sistema no instante n. O conjunto de valores que a variável X_n pode assumir é chamado de espaço de estados e é denotado por E. Por exemplo, se $X_n = i$, diz-se que o processo encontra-se no estado $i \in E$ no tempo n. Admite-se que existe uma probabilidade fixa p_{ij} do processo transitar do estado i para o estado j, independente de n, isto é,

$$p_{ij} = P[X_{n+1} = j|X_n = i], \ \ \forall n \geq 0, \forall i, j \in E.$$

O fato de p_{ij} ser independente de n, refere-se à definição de **cadeias de Markov estacionárias (ou homogêneas)**, às quais restringe-se estas notas.

Por exemplo, X_n poderia ser o saldo em uma conta corrente no dia n, sendo X_0 o saldo inicial no dia da abertura da conta. O espaço de estados seria $E = \mathbb{R}$, pensando em saldos negativos que é quando o cliente tem uma dívida com o banco. Neste caso, o saldo da conta corrente no dia n, dado o saldo da conta nos dias anteriores X_{n-1}, X_{n-2},$\cdots$,X_0, irá depender apenas do saldo do dia anterior, isto é, de X_{n-1}. Como o espaço de estados não é enumerável, este exemplo trata-se de um processo Markoviano, mas não é um exemplo de cadeia de Markov.

Uma cadeia de Markov é descrita da seguinte forma:

Definição 3.1 *Um processo estocástico em tempo discreto $\{X_n : n = 0,1,2,\cdots\}$, com espaço de estados discreto (enumerável) E, é uma cadeia de Markov estacionária se, para todo i, j, i_0, i_1,...,$i_{n-1} \in E$, tem-se*

$$P[\overbrace{X_{n+1} = j}^{futuro} \mid \overbrace{X_n = i}^{presente}, \overbrace{X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0}^{passado}] = P[\overbrace{X_{n+1} = j}^{futuro} \mid \overbrace{X_n = i}^{presente}] = p_{ij},$$

sendo p_{ij} a probabilidade de transição do processo do estado i para o estado j, em um passo, independente do instante de tempo $n \geq 0$. Em outras palavras, a igualdade acima diz que essa probabilidade não depende dos estados passados, depende somente do estado presente i. O *processo pode permanecer no estado em que se encontra e isso ocorre com probabilidade igual a p_{ii}.*

Como consequência da definição de cadeia de Markov estacionária tem-se

$$P[X_{n+1} = j|X_n = i] \;=\; P[X_1 = j|X_0 = i] \;=\; p_{ij},$$

para todo $i, j \in E$ e $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Exemplo 3.1 *Em um jogo, onde não é possível a ocorrência de empate, foram observados alguns dados para um determinado time. Se o time obteve uma vitória no jogo atual, a chance de vitória no próximo jogo é de 75%. Todavia, se no jogo atual ocorreu uma derrota, a chance de vitória no próximo jogo é de 35%. Determine as probabilidades de transição entre os estados.*

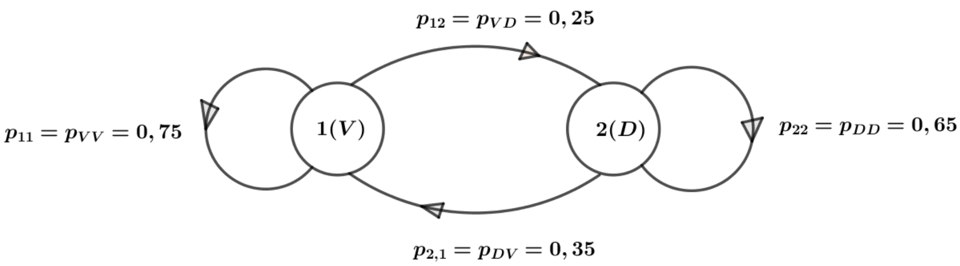
Resolução: A Tabela a seguir apresenta tais informações:

Tabela 3.1 – Probabilidades para os resultados do próximo jogo

	Vitória no Próximo Jogo	**Derrota no Próximo Jogo**
Vitória no Jogo Atual	75%	25%
Derrota no Jogo Atual	35%	65%

Essa situação pode ser modelada através de uma cadeia de Markov com dois estados possíveis, $E = \{1, 2\}$, sendo o estado 1 indicando a vitória do time e 2 indicando a derrota. Tem-se o esquema:

Figura 3.1 – Esquema com as probabilidades de transição entre os dois estados possíveis



Fonte: Do autor (2020)

Com as informações fornecidas tem-se as probabilidades de transição através de uma matriz quadrada denominada **matriz de transição**:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,35 & 0,65 \end{bmatrix},$$

sendo que as entradas da primeira linha da matriz representam as probabilidades para os dois estados (resultados) possíveis após um jogo vitorioso. Da mesma forma, as entradas da segunda linha representam as probabilidades para os dois estados possíveis após uma derrota.

De uma forma mais geral, considere uma cadeia de Markov cujo espaço de estados é $E = \{1, 2, \cdots, n\}$. Define-se a matriz de transição da cadeia de Markov como sendo a matriz quadrada de ordem n, $P = (p_{ij})$, sendo p_{ij} a probabilidade de transição do estado i para o estado j, $1 \leq i, j \leq n$ (BOLDRINI, 1986)

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

O objetivo a seguir é responder à pergunta: **qual é a probabilidade do processo estar no estado j daqui a duas unidades de tempo, sabendo que ele iniciou no estado i?** Denota-se esta probabilidade por $p_{ij}^{(2)} = P[X_2 = j | X_0 = i]$.

Como as probabilidades p_{ij} independem de n, o valor da probabilidade $p_{ij}^{(2)}$ também é a probabilidade do processo ir para o estado j daqui a duas unidades de tempo, saindo do estado

i no tempo n, ou seja,

$$p_{ij}^{(2)} = P[X_{n+2} = j | X_n = i] = P[X_2 = j | X_0 = i].$$

De forma análoga, a probabilidade de transição em k-passos, denotada por $p_{ij}^{(k)}$, é a probabilidade de transferência do estado i para o estado j em k etapas de tempo discreto, independente do instante $n \geq 0$, ou seja,

$$p_{ij}^{(k)} = P\{X_{n+k} = j | X_n = i\} = P[X_k = j | X_0 = i], \ \ \forall n \geq 0.$$

Tem-se um exemplo para melhor compreensão.

Exemplo 3.2 *Considere os seguintes dados para um determinado time de futebol:*

a) *O time nunca empata dois jogos consecutivos.*

b) *Se ele empata, a probabilidade de vencer ou perder o próximo jogo são iguais.*

c) *Se ele ganha, as probabilidades de ganhar ou empatar o próximo jogo são* 75% *e* 15%, *respectivamente.*

d) *Se ele perde, a probabilidade de ganhar a próxima partida cai para* 25% *e a de perder novamente aumenta para* 50%.

Diante dessas informações, determine a probabilidade do time perder o segundo jogo, tendo vencido o jogo atual.

Resolução: A tabela a seguir traz as informações:

Tabela 3.2 – Probabilidades para o próximo jogo baseadas no resultado do jogo atual

	Vitória no Próximo Jogo	**Empate no Próximo Jogo**	**Derrota no Próximo Jogo**
Vitória no Jogo Atual	75%	15%	10%
Empate no Jogo Atual	50%	0%	50%
Derrota no Jogo Atual	25%	25%	50%

Considerando o espaço de estados $E = \{1,2,3\}$, sendo 1 para vitória, 2 para empate e 3 para derrota, tem-se a matriz de transição:

$$P = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,15 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Nessa situação, nota-se que se o time vence uma partida, então a probabilidade dele perder o segundo jogo será a união disjunta de três eventos:

i) vence o jogo atual, vence o próximo jogo e perde o segundo jogo;

ii) vence o jogo atual, empata o próximo jogo e perde o segundo jogo;

iii) vence o jogo atual, perde o próximo jogo e perde o segundo jogo;

Em outras palavras, pode ocorrer uma das três opções abaixo:

i) ganha $\xrightarrow{p_{11}}$ ganha $\xrightarrow{p_{13}}$ perde;

ii) ganha $\xrightarrow{p_{12}}$ empata $\xrightarrow{p_{23}}$ perde;

iii) ganha $\xrightarrow{p_{13}}$ perde $\xrightarrow{p_{33}}$ perde;

A probabilidade do primeiro evento desta lista ocorrer é o produto de duas probabilidades condicionais, $p_{11} \cdot p_{13}$, sendo p_{11} a probabilidade condicional dele vencer o jogo seguinte, tendo vencido o jogo atual, e p_{13} a probabilidade condicional dele perder o jogo seguinte, tendo vencido o jogo atual.

Os outros dois eventos da lista seguem este mesmo raciocínio: a probabilidade do segundo evento é o produto $p_{12}\cdot_{23}$, e a probabilidade do terceiro evento é o produto $p_{13}\cdot_{33}$. Portanto, a probabilidade do time perder o segundo jogo, tendo vencido o jogo atual é a soma:

$$p_{13}^{(2)} = p_{11} \cdot p_{13} + p_{12} \cdot p_{23} + p_{13} \cdot p_{33} = 0,75 \cdot 0,1 + 0,15 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,2$$

que é exatamente o elemento da matriz P^2 que está na posição $(1,3)$, ou seja, na primeira linha e terceira coluna.

$$P^2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} =$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} p_{11}p_{11}+p_{12}p_{21}+p_{13}p_{31} & p_{11}p_{12}+p_{12}p_{22}+p_{13}p_{32} & p_{11}p_{13}+p_{12}p_{23}+p_{13}p_{33} \\ p_{21}p_{11}+p_{22}p_{21}+p_{23}p_{31} & p_{21}p_{12}+p_{22}p_{22}+p_{23}p_{32} & p_{21}p_{13}+p_{22}p_{23}+p_{23}p_{33} \\ p_{31}p_{11}+p_{32}p_{21}+p_{33}p_{31} & p_{31}p_{12}+p_{32}p_{22}+p_{33}p_{32} & p_{31}p_{13}+p_{32}p_{23}+p_{33}p_{33} \end{bmatrix}$$

Usando a notação de somatório, tem-se $p_{13}^{(2)} = \sum_{m=1}^{3} p_{1m} \cdot p_{m3}$. De forma análoga, a probabilidade do processo estar no estado j daqui a duas unidades de tempo, sabendo que ele encontra-se no estado i é $p_{ij}^{(2)} = \sum_{m=1}^{3} p_{im} \cdot p_{mj}$, sendo $1 \leq i, j \leq 3$.

Da mesma forma, as probabilidades para k jogos futuros são dadas pela matriz P^k, $k = 1, 2, \cdots$. A seguir, estão algumas potências da matriz de transição P:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,66 & 0,14 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,43 & 0,17 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0,62 & 0,15 & 0,23 \\ 0,55 & 0,15 & 0,3 \\ 0,51 & 0,17 & 0,32 \end{bmatrix}, \quad P^4 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,15 & 0,25 \\ 0,56 & 0,16 & 0,28 \\ 0,51 & 0,17 & 0,32 \end{bmatrix},$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0,59 & 0,15 & 0,26 \\ 0,57 & 0,15 & 0,28 \\ 0,56 & 0,16 & 0,28 \end{bmatrix}, \quad P^6 = \begin{bmatrix} 0,58 & 0,15 & 0,27 \\ 0,58 & 0,15 & 0,27 \\ 0,57 & 0,16 & 0,27 \end{bmatrix}, \quad P^7 = \begin{bmatrix} 0,58 & 0,15 & 0,27 \\ 0,58 & 0,15 & 0,27 \\ 0,58 & 0,15 & 0,27 \end{bmatrix}.$$

Através da primeira coluna da matriz P^7, nota-se que a probabilidade do time vencer o sétimo jogo é a mesma para os diferentes resultados do jogo atual, isto é, não importa se o time venceu, empatou ou perdeu o jogo atual, a probabilidade dele vencer o sétimo jogo é de 58%. Em símbolos, $p_{11}^{(7)} = p_{21}^{(7)} = p_{31}^{(7)} = 0,58$. O mesmo ocorre com as segunda e terceira colunas, que correspondem as probabilidades de empate e derrota no sétimo jogo, respectivamente. As probabilidades dessa cadeia se estabilizarem independem de onde a cadeia é iniciada. Estas características são das **cadeias regulares**, assunto a ser estudado posteriormente.

A n-ésima potência da matriz de transição P, P^n, é denominada **matriz de transição de passo** n.

3.1 Vetor de probabilidade de estado

Considere um conjunto finito de estados $E = \{1, 2, \cdots, k\}$. Um vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, \cdots, v_k)$ é dito um **vetor de probabilidade de estado** se $v_i \geq 0$, para todo $1 \leq i \leq k$, e $v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 1$.

Voltando ao exemplo anterior, pode-se representar a vitória no jogo atual pelo vetor de probabilidade de estado $\overrightarrow{v_0} = (1,0,0)$. Ao multiplicar o vetor linha $\overrightarrow{v_0}$ pela matriz P^2, obtém-se o vetor $\overrightarrow{v_2}$ que contém as probabilidades para cada um dos três estados, depois de duas unidades de tempo, estando inicialmente o time no estado 1.

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_0} \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,66 & 0,14 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,43 & 0,17 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,66 & 0,14 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Portanto, a probabilidade do time sofrer uma derrota no segundo jogo, tendo vencido o jogo atual, equivale a terceira entrada do vetor $\overrightarrow{v_2}$ correspondente ao estado 3, ou seja, 20%. Lembrando que tal probabilidade foi denotada por $p_{13}^{(2)}$, tem-se que

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_0} \cdot P^2 = [p_{11}^{(2)} \ \ p_{12}^{(2)} \ \ p_{13}^{(2)}],$$

sendo $p_{1j}^{(2)}$ a probabilidade para cada um dos três possíveis resultados no segundo jogo, tendo vencido o jogo atual (partindo do estado 1).

O resultado a seguir (GOLMAKANI, 2014) generaliza esses fatos.

Teorema 3.1 *Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov, e seja $\overrightarrow{v_0}$ o vetor de probabilidade de estado que representa o estado inicial. Então a probabilidade de que a cadeia esteja no estado j após n passos é a j-ésima entrada do vetor $\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_0}P^n$.*

Em outras palavras, se, inicialmente, o processo está no estado $i \in E$, então $\overrightarrow{v_0} = (0,\cdots,1,\cdots,0)$, sendo 1 a i-ésima entrada de $\overrightarrow{v_0}$. A probabilidade do processo ir para o estado $j \in E$ em n passos é denotada por $p_{ij}^{(n)}$ e equivale a j-ésima entrada do vetor $\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_0} \cdot P^n$, sendo P a matriz de transição do processo.

3.2 Classificação de estados

Os estados são classificados da seguinte forma:

Estados alcançáveis: Diz-se que o estado j é alcançável a partir do estado i, se $p_{ij}^{(n)} > 0$, para algum $n > 0$.

Estados comunicantes: Diz-se que os estados i e j são comunicantes, se i é alcançável a partir de j e vice-versa. Além disso, convenciona-se que todo estado é comunicante com ele mesmo, pensando que o processo pode atingir qualquer estado i a partir de i em 0 passos.

Estados transientes: Diz-se que um estado i é transiente (ou transitório) se existir a possibilidade do processo entrar neste estado e nunca mais retornar ao mesmo. Em outras palavras, o estado i é transiente se, e somente se, existe um estado j, $j \neq i$, que é alcançável a partir do estado i, mas não vice-versa. Dessa forma, se o processo estiver no estado i, existe uma probabilidade positiva de o processo mover-se para o estado j e não retornar ao estado i.

Estados recorrentes: Diz-se que um estado i é recorrente se ele não for transiente. Em outras palavras, quando o processo assume um estado recorrente, existe uma probabilidade positiva dele retornar a este estado, não necessariamente no próximo passo. Para processos em tempo infinito, um estado recorrente será atingido uma inifinidade de vezes.

Estados absorventes: Diz-se que um estado i é absorvente se, ao entrar nesse estado, o processo nunca deixá-lo, ou seja, $p_{ii} = 1$. Pode-se dizer que o estado absorvente é um tipo especial de estado recorrente.

A relação de estados comunicantes é uma relação de equivalência definida no conjunto de estados E, visto que ela satisfaz as três propriedades:

Reflexiva: Todo estado $i \in E$ é comunicante com ele mesmo.

Simétrica: Se i é comunicante com j, j também é comunicante com i.

Transitiva: Se i é comunicante com k e k é comunicante com j, então i é comunicante com j.

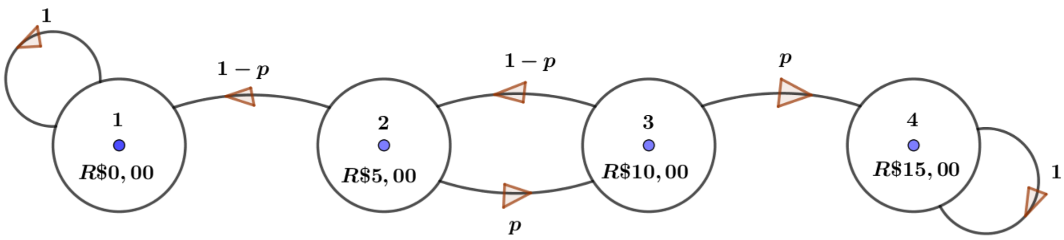
Dessa forma, os estados que são comunicantes com um determinado estado $i \in E$ estão em uma mesma classe de equivalência, que denota-se por $\bar{i}$.

Se todos os estados de uma cadeia são comunicantes com um único estado, então todos os estados pertencem à uma mesma classe de equivalência, e, neste caso, diz-se que a **cadeia é irredutível**.

Exemplo 3.3 *Um jogador tem $R\$5,00$ e a cada vez que ele joga, ganha $R\$5,00$ com probabilidade $p > 0$, ou perde $R\$5,00$ com probabilidade $1 - p$. O jogo acaba quando o jogador acumula $R\$15,00$ ou $R\$0,00$.*

Observa-se que as possíveis quantias de dinheiro acumuladas pelo jogador a cada jogada são $R\$0,00$, $R\$5,00$, $R\$10,00$ e $R\$15,00$, as quais serão associadas aos estados 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Dessa forma, o jogo pode ser visto como uma cadeia de Markov cujo conjunto de estados é $E = \{1,2,3,4\}$. Tem-se o esquema e a matriz de transição:

Figura 3.2 – Esquema com as probabilidades de transição entre os quatro estados



Fonte: Do autor (2020)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De acordo com as definições anteriores, tem-se que o estado 4 é alcançável a partir do estado 3, mas não vale o contrário, isto é, o estado 3 não é alcançável a partir do estado 4. Portanto os estados 3 e 4 não são comunicantes. Já os estados 2 e 3 são comunicantes. Os estados 1 e 4 são exemplos de estados absorventes, pois $p_{11} = 1$ e $p_{44} = 1$. Os estados 2 e 3 são exemplos de estados transientes. Por fim, existem três classes de equivalência nesta cadeia. São elas: $\overline{1} = \{1\}$, $\overline{2} = \{2,3\}$ e $\overline{4} = \{4\}$.

Definição 3.2 *Em uma cadeia de Markov, um conjunto não vazio C de estados é denominado um* ***conjunto fechado*** *se o processo, ao assumir qualquer um de seus estados, permanecer indefinidamente nos estados pertencentes a C. Em outras palavras, C é um conjunto fechado quando nenhum estado fora de C for alcançável a partir de qualquer estado de C. Logo, pode-se afirmar que C é um conjunto formado por estados recorrentes.*

Voltando ao exemplo 3.3, além do conjunto fechado trivial $E = \{1,2,3,4\}$, existem somente dois conjuntos fechados: $C_1 = \{1\}$ e $C_2 = \{4\}$.

3.3 Cadeias de Markov absorventes

Apresenta-se (GOLMAKANI, 2014) um tipo especial de cadeias de Markov.

Definição 3.3 *Uma cadeia de Markov é dita **absorvente**, se nela existe pelo menos um estado absorvente e, a partir de qualquer estado, é possível atingir algum estado absorvente, não necessariamente em um passo. Em particular, não existem estados recorrentes em uma cadeia absorvente.*

Considere uma cadeia de Markov absorvente com conjunto de estados $E = \{1, 2, \cdots, k\}$ e matriz de transição $\widehat{P}$. Suponha que existam r estados absorventes e t estados transientes, então $k = r + t$. Reordenando os estados de E de forma que os estados absorventes sejam os últimos, determina-se P, **matriz de transição canônica** que tem a seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} Q_{t\times t} & R_{t\times r} \\ O_{r\times t} & I_{r\times r} \end{bmatrix},$$

sendo a matriz $O_{r\times t}$ a matriz nula e $I_{r\times r}$ a matriz identidade. A matriz Q está relacionada com os estados transientes, ou seja, ela traz as probabilidades de transição entre os estados transientes.

Além disso, é possível demonstrar que a matriz de transição em n passos é da forma:

$$P^n = \begin{bmatrix} Q^n & * \\ O_{r\times t} & I_{r\times r} \end{bmatrix},$$

sendo Q^n a n-ésima potência da matriz $Q_{t\times t}$ que aparece em P e $*$ indica uma matriz de ordem $t \times r$ que depende de $Q_{t\times t}$ e $R_{t\times r}$, porém não é apresentada aqui devido a sua complexidade.

Teorema 3.2 *Quando $n \to +\infty$, a matriz de transição em n passos P^n converge para a matriz $\overline{P}$, sendo*

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} O_{t\times t} & (I-Q)^{-1}R \\ O_{r\times t} & I_{r\times r} \end{bmatrix},$$

*que é denominada **matriz de transição estável** da cadeia absorvente. As entradas n_{ij} da matriz $N = (I-Q)^{-1}$ representam o número esperado de vezes que o processo assume o estado transiente j, dado que ele tenha iniciado no estado transiente i, antes do processo ser absorvido. A matriz N é denominada **matriz fundamental** de P.*

Tem-se do teorema, que $\lim_{n\to+\infty} Q^n = 0$, ou seja, as probabilidades de transição entre os estados transientes são muito pequenas, quando n é suficientemente grande. Dessa forma, o processo será absorvido pelos estados absorventes, para n suficientemente grande. As entradas da matriz $\overline{P}$ representam os valores limites para as probabilidades de transição para n suficientemente grande (NORRIS, 1997).

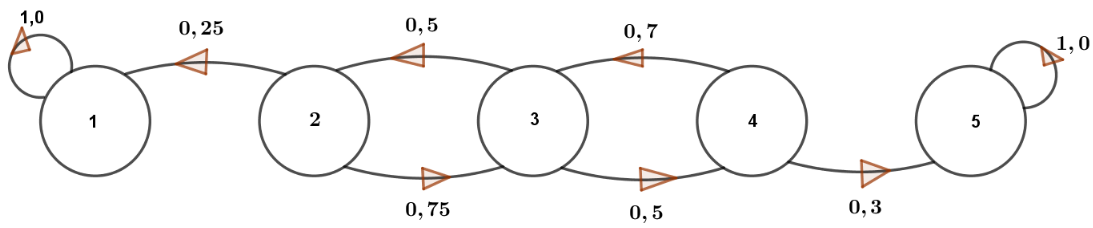
Tem-se um exemplo para melhor compreensão.

Exemplo 3.4 *Considere uma cadeia de Markov cuja matriz de transição é dada por*

$$\widehat{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O diagrama abaixo contém as probabilidades de transições entre os cinco estados do conjunto $E = \{1,2,3,4,5\}$.

Figura 3.3 – Esquema com as probabilidades de transições entre os estados de E

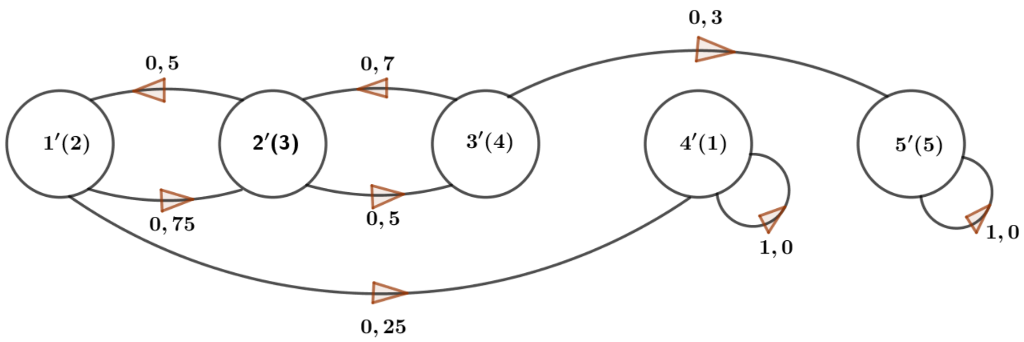


Fonte: Do autor (2020)

Reordenando o conjunto de estados de forma que os estados absorventes 1 e 5 sejam os dois últimos $4' = 1$ e $5' = 5$ tem-se uma nova matriz de transição P.

$$P = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0{,}75 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Figura 3.4 – Nova reordenação dos estados de $E = \{1', 2', 3', 4', 5'\}$



Fonte: Do autor (2020)

Logo, com alguns arredondamentos naturais, tem-se que

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 2,4 & 2,7 & 1,4 \\ 1,8 & 3,6 & 1,8 \\ 1,3 & 2,5 & 2,3 \end{bmatrix}.$$

Isso indica que, por exemplo, iniciando no estado $1' = 2$, o número esperado de vezes que o sistema permanece nos estados $1' = 2$, $2' = 3$ e $3' = 4$ será 2, 3 e 1, respectivamente, fazendo os arredondamentos.

A matriz de transição estável $\overline{P}$ é dada por:

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pois

$$(I - Q)^{-1}R = \begin{bmatrix} 2,4 & 2,7 & 1,4 \\ 1,8 & 3,6 & 1,8 \\ 1,3 & 2,5 & 2,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, por exemplo, se a cadeia iniciar no estado $2' = 3$, considera-se $\overrightarrow{v_0} = (0,1,0,0,0)$. As probabilidades de absorção dos estados absorventes serão:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} \cdot \overline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Logo, ambos os estados absorventes $4' = 1$ e $5' = 5$ têm a mesma probabilidade de absorção de 50%.

Por sua vez, se a cadeia iniciar no estado $1' = 2$, o estado absorvente $4' = 1$ terá 60% de probabilidade de absorver o processo e o estado absorvente $5' = 5$ terá 40% de probabilidade de absorver o processo.

Finalmente, se a cadeia iniciar no estado $3' = 4$, o estado absorvente $4' = 1$ terá somente 30% de probabilidade de absorver o processo e o estado absorvente $5' = 5$ terá 70% de probabilidade de absorver o processo.

Apresenta-se um último resultado para as cadeias absorventes.

Teorema 3.3 ***(Tempo necessário para a absorção da cadeia)*** *Se uma cadeia absorvente iniciar no estado $i \in E$, então o número esperado de passos t_i antes dela ser absorvida é igual a i-ésima entrada da matriz coluna $T = (I-Q)^{-1} \cdot C$, sendo C a matriz coluna com todas entradas iguais a* 1.

De acordo com o Teorema 3.2, a entrada n_{ij} da matriz $N = (I-Q)^{-1}$ é o número esperado de vezes que o estado j é assumido pela cadeia, tendo esta iniciado no estado i, antes dela ser absorvida. Portanto a soma dos elementos de uma linha da matriz $N = (I-Q)^{-1}$ será o número esperado de passos antes da cadeia ser absorvida. O fato de multiplicar N pela matriz coluna C, cujas entradas são todas iguais a 1, equivale a efetuar a soma dos elementos de cada linha de N.

Para a cadeia absorvente do Exemplo 3.4, tem-se

$$T = (I-Q)^{-1} \cdot C = N \cdot C \begin{bmatrix} 2,4 & 2,7 & 1,4 \\ 1,8 & 3,6 & 1,8 \\ 1,3 & 2,5 & 2,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,5 \\ 7,2 \\ 6,1 \end{bmatrix}.$$

Assim, se a cadeia iniciar no estado $1' = 2$, o número esperado de passos antes dela ser absorvida é 6. Se, por sua vez, ela iniciar no estado $2'$, o número esperado de passos é igual a 7. Por fim, se ela iniciar no estado $3' = 4$, o número esperado de passos é 6.

3.4 Cadeias de Markov regulares

Nesta seção, é apresentado um outro tipo especial de cadeias de Markov, as cadeias de Markov regulares.

Definição 3.4 *Considere uma cadeia de Markov com matriz de transição P. Se alguma potência da matriz P tiver todas as entradas positivas, diz-se que a cadeia é* ***regular****.*

Tem-se o importante resultado válido para cadeias regulares (NORRIS, 1997).

Teorema 3.4 *Considere uma cadeia de Markov regular com matriz de transição P. Então:*

i) $\lim_{n\to\infty} P^n = \overline{P}$.

ii) As linhas da matriz $\overline{P}$ são todas iguais e podem ser representadas por um vetor-linha

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{bmatrix},$$

com $p_i > 0$, para todo $1 \leq i \leq r$.

iii) Dado um vetor de probabilidade $\overrightarrow{v_0}$, então $\lim_{n\to\infty} \overrightarrow{v_0}P^n = \overrightarrow{v}$, sendo $\overrightarrow{v}$ definido no item anterior.

iv) O vetor $\overrightarrow{v}$ é o único vetor que satisfaz $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}P$. O vetor de probabilidade de estado $\overrightarrow{v}$ é chamado de ***estado estável*** *da cadeia regular.*

Observe que o vetor de probabilidade de estado $\overrightarrow{v}$ é fixado pela matriz P. Dessa forma, $\overrightarrow{v}P^n = \overrightarrow{v}$, para todo n inteiro positivo.

Tem-se um exemplo para melhor compreensão.

Exemplo 3.5 *Em uma determinada região, observa-se que, quando chove bastante durante um ano, a probabilidade de que chova bastante no ano seguinte é de 25%, e que a probabilidade de que faça seca é de 75%. Ainda, se houver seca em um ano, no ano seguinte as probabilidades de haver seca ou chuva são iguais a 50%. Suponha que estas probabilidades não mudem com* *o decorrer do tempo. Estude o comportamento das probabilidades para seca e para chuva a longo prazo.*

Considerando o conjunto de estados $E = \{1,2\}$, sendo 1 o estado 'chuva' e 2 o estado 'seca', tem-se a matriz de transição P:

$$P = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Como todas as entradas da matriz P são postivivas, pode-se concluir que a cadeia de Markov resultante é regular. Portanto, são válidos os resultados do Teorema 3.4. Calcula-se o vetor estável $\overrightarrow{v}$ do processo. Para isso resolve-se a equação matricial $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot P$.

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}.$$

Que dá origem ao sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 0,25p_1 + 0,5p_2 & = & p_1 \\ 0,75p_1 + 0,5p_2 & = & p_2 \end{cases}$$

cujas soluções são $p_2 = 1,5p_1$. Como $p_1 + p_2 = 1$, segue que $p_1 = 0,4$ e $p_2 = 0,6$. Logo $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$.

Assim, a longo prazo, a probabilidade de se ter um ano com muita chuva é 40%, enquanto que a probabilidade de um ano com seca é 60%, ou seja, o clima na região tenderá a uma ligeira aridez com o passar do tempo.

4 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE CADEIAS DE MARKOV PARA O ENSINO MÉDIO

O presente capítulo traz uma proposta de sequência didática sobre uma introdução de cadeias de Markov, indicada para os alunos do 2° ano do Ensino Médio, visto que os conteúdos de matrizes e probabilidade são pré-requisitos para tal tema. As cadeias de Markov podem ser aplicadas a diversos contextos nas ciências, dessa forma, seu estudo permite um ensino-aprendizagem interdisciplinar da Matemática, além de despertar a curiosidade dos estudantes.

Esta sequência didática inicia-se com um exemplo introdutório, que deve ser explicado aos estudantes, cujo objetivo é introduzir o conceito de matriz de transição de cadeias de Markov. Na sequência tem-se quatro problemas aplicados que seguem a linha de raciocínio do exemplo para serem resolvidos pelos estudantes. Os comentários e as resoluções que acompanham cada problema devem ser obviamente omitidos aos estudantes no momento da aplicação das atividades, e estão aqui para dar suporte ao professor. Estima-se que o tempo necessário para a realização das atividades seja de duas horas-aulas (100 minutos).

As atividades trabalham conceitos de probabilidade, eventos independentes, cálculo de probabilidades não triviais e o conceito de matriz de transição, proveniente do estudo de cadeias de Markov.

De forma superficial, pode-se dizer que uma cadeia de Markov é um processo aleatório que satisfaz a propriedade de Markov, que é caracterizada por previsões para estados futuros com base somente no estado presente (atual), ou seja, independente do que aconteceu no passado. Em outras palavras, as evoluções futuras dependem apenas do estado presente. Por exemplo, a sequência dos saldos mensais de uma conta poupança pode ser considerada uma cadeia de Markov, pois o saldo no mês seguinte depende apenas do saldo no mês atual e não dos saldos em meses anteriores. A seguir tem-se um exemplo para compreensão e visualização dos estados possíveis com suas probabilidades de transição de um estado para outro.

Exemplo 4.1 *Em um jogo, onde não é possível a ocorrência de empate, foram observados alguns dados para um determinado time. Se o time obteve uma vitória no jogo atual, a chance de vitória no próximo jogo é de* 75%. *Todavia, se no jogo atual ocorreu uma derrota, a chance de vitória no próximo jogo é de* 35%.

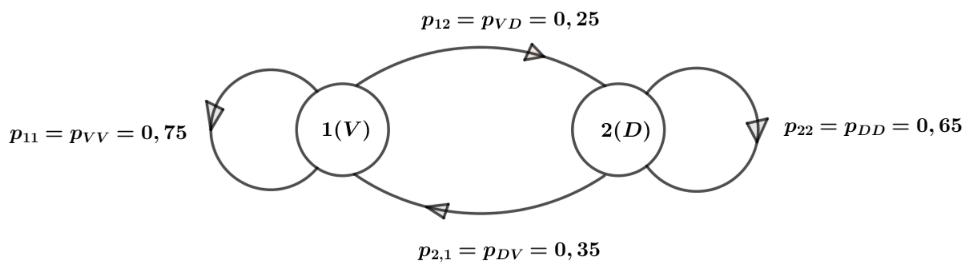
A Tabela a seguir apresenta tais informações:

Tabela 4.1 – Probabilidades de vitória ou derrota para um determinado time.

	Vitória no Próximo Jogo	**Derrota no Próximo Jogo**
Vitória no Jogo Atual	75%	25%
Derrota no Jogo Atual	35%	65%

Essa situação pode ser modelada através de uma cadeia de Markov com dois estados possíveis, $E = \{1,2\}$, sendo o estado 1 indicando a vitória do time e 2 indicando a derrota. Tem-se o diagrama:

Figura 4.1 – Esquema com as probabilidades de transição entre os dois estados do sistema



Fonte: Do autor (2020)

Interpreta-se o diagrama da seguinte forma:

- o número p_{11} significa a probabilidade do time vencer o jogo seguinte, tendo vencido o jogo atual. Em outras palavras, o número p_{11} representa a probabilidade do time permanecer no estado de vencedor.

- o número p_{12} significa a probabilidade do time perder o jogo seguinte, tendo vencido o jogo atual. Em outras palavras, o número p_{12} representa a probabilidade do time ir do estado de vencedor para o estado de perdedor.

- o número p_{21} significa a probabilidade do time vencer o jogo seguinte, tendo perdido o jogo atual. Em outras palavras, o número p_{21} representa a probabilidade do time ir do estado de perdedor para o estado de vencedor.

- o número p_{22} significa a probabilidade do time perder o jogo seguinte, tendo perdido o jogo atual. Em outras palavras, o número p_{22} representa a probabilidade do time permanecer no estado de perdedor.

De forma geral, diz-se que o número p_{ij} é a probabilidade de transição do estado i para o estado j, sendo $i = 1,2$ e $j = 1,2$.

Observe que as probabilidades p_{11} e p_{12} devem ter soma igual a 1, pois tendo o time ganhado o jogo atual, as únicas possibilidades para o jogo seguinte é vencer ou perder, uma vez que não é possível o empate nesse tipo de jogo, como foi mencionado no enunciado. Se a probabilidade de vencer o jogo seguinte, tendo vencido o jogo atual, é de 75%, então a probabilidade do time perder é de 25%, sabendo que o time vem de uma vitória. Ou seja, $75\% + 25\% = 100\%$. O mesmo pode ser observado para as probabilidades p_{21} e p_{22}.

Com as informações fornecidas tem-se as probabilidades de transição através de uma matriz quadrada denominada **matriz de transição**:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,35 & 0,65 \end{bmatrix},$$

sendo que as entradas da primeira linha da matriz representam as probabilidades para os dois estados (resultados) possíveis após um jogo vitorioso. Da mesma forma, as entradas da segunda linha representam as probabilidades para os dois estados possíveis após uma derrota.

O objetivo a seguir é responder à pergunta: **qual é a probabilidade do time perder o segundo jogo, sabendo que ele ganhou o jogo atual?** Em outras palavras, qual é a probabilidade do time ir para o estado 2 em duas unidades de tempo, partindo do estado 1. Denota-se esta probabilidade por $p_{12}^{(2)}$.

Nesta situação, nota-se que se o time vence uma partida, então a probabilidade dele perder o segundo jogo será a união disjunta de dois eventos:

i) Ele vence o próximo jogo e perde o segundo jogo;

ii) Ele perde o próximo jogo e também perde o segundo.

Em outras palavras, pode ocorrer uma das duas opções abaixo:

i) ganha $\xrightarrow{p_{11}}$ ganha $\xrightarrow{p_{12}}$ perde;

ii) ganha $\xrightarrow{p_{12}}$ perde $\xrightarrow{p_{22}}$ perde;

A probabilidade do primeiro evento desta lista ocorrer é o produto de duas probabilidades condicionais, $p_{11} \cdot p_{12}$, sendo p_{11} a probabilidade condicional dele vencer o jogo seguinte, tendo vencido o jogo atual, e p_{12} a probabilidade condicional dele perder o jogo seguinte, tendo vencido o jogo atual.

A probabilidade do segundo evento desta lista ocorrer é o produto de duas probabilidades condicionais, $p_{12} \cdot p_{22}$, sendo p_{12} a probabilidade condicional dele perder o jogo seguinte, tendo vencido o jogo atual, e p_{22} a probabilidade condicional dele perder o jogo seguinte, tendo perdido o jogo atual. Portanto, a probabilidade do time perder o segundo jogo, tendo vencido o jogo atual é a soma:

$$p_{12}^{(2)} = p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22},$$

que é exatamente o elemento da matriz $P^2 = P \cdot P$ que está na posição $(1,2)$, ou seja, na primeira linha e segunda coluna.

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} \end{bmatrix}$$

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,35 & 0,65 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,35 & 0,65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,49 & 0,51 \end{bmatrix}.$$

Assim, a probabilidade do time estar no estado 2 daqui a duas unidades de tempo, sabendo que ele iniciou no estado 1, é de 35%. Em outras palavras, a probabilidade do time perder o segundo jogo, tendo vencido o jogo atual, é de 35%.

Seguindo o exemplo acima, resolva o seguinte problema:

Problema 4.1 *Qual é a probabilidade do time perder o terceiro jogo, sabendo que ele ganhou o jogo atual? Em outras palavras, qual é a probabilidade do time ir para o estado* 2 *em três unidades de tempo, partindo do estado* 1. *Denota-se esta probabilidade por* $p_{12}^{(3)}$.

Figura 4.2 – Situação do Problema 4.1

Fonte: Do autor (2020)

Comentário

Espera-se que os alunos listem todas as 4 situações possíveis a seguir:

i) ganha $\xrightarrow{p_{11}}$ ganha $\xrightarrow{p_{11}}$ ganha $\xrightarrow{p_{12}}$ perde;

ii) ganha $\xrightarrow{p_{11}}$ ganha $\xrightarrow{p_{12}}$ perde $\xrightarrow{p_{22}}$ perde;

iii) ganha $\xrightarrow{p_{12}}$ perde $\xrightarrow{p_{21}}$ ganha $\xrightarrow{p_{12}}$ perde;

iv) ganha $\xrightarrow{p_{12}}$ perde $\xrightarrow{p_{22}}$ perde $\xrightarrow{p_{22}}$ perde;

Usando um raciocício análogo ao exemplo anterior, tem-se que a probabilidade dele perder o terceiro jogo, tendo vencido o jogo atual, será a união disjunta dos quatros eventos listados acima.

A probabilidade do primeiro evento desta lista ocorrer é o produto de três probabilidades condicionais, $p_{11} \cdot p_{11} \cdot p_{12}$, sendo p_{11} a probabilidade do time continuar no estado de vencedor, isto é, vencer dois jogos consecutivos, e p_{12} a probabilidade do time perder um jogo depois de alcançar uma vitória. A probabilidade dos outros três eventos seguem de forma análoga. Portanto a probabilidade requerida é a soma das quatro probabilidades:

$$p_{12}^{(3)} = p_{11} \cdot p_{11} \cdot p_{12} + p_{11} \cdot p_{12} \cdot p_{22} + p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{22} =$$

$$= 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25 + 0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,65 + 0,25 \cdot 0,35 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,65 \cdot 0,65 = 0,39.$$

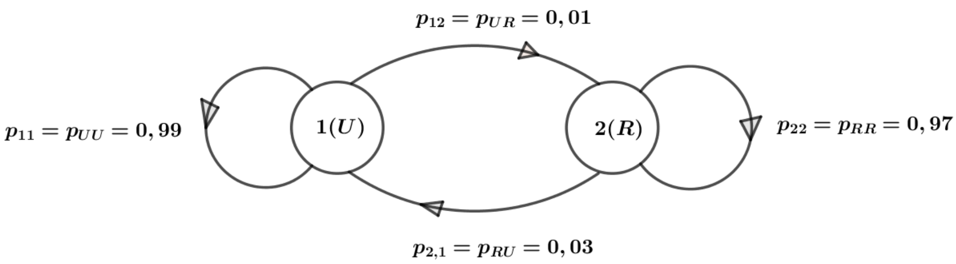
Os alunos podem não perceber que tal expressão corresponde ao elemento na posição $(1,2)$ (primeira linha e segunda coluna) da matriz $P^3 = P \cdot P \cdot P$. Com a ajuda de uma calculadora ou de um software eles podem calcular a matriz P^3 e comparar tal elemento com o valor $0,39$ encontrado. Portanto, a resposta do problema é 39%.

Problema 4.2 *Suponha que em um determinado município, a cada ano,* 3% *da população da zona rural migra para a zona urbana, enquanto que apenas* 1% *da população da zona urbana migra para a zona rural. Se estas porcentagens de migração não se alterarem anualmente, qual será a porcentagem da população rural que migrará para a zona urbana após dois anos? Em outras palavras, qual é o valor de* $p_{21}^{(2)}$*? Encontre a matriz de transição P deste processo.*

Comentário

Espera-se que os alunos entendam a existência de dois estados possíveis, já que um habitante do município pode morar na zona urbana (U) ou na zona rutal (R). Indica-se a zona urbana por estado 1 e a zona rural por estado 2, ou vice-versa. Observa-se o esquema e a tabela com as informações do problema.

Figura 4.3 – Esquema de migração entre as zonas urbana (U) e rural (R) do município



Fonte: Do autor (2020)

Tabela 4.2 – Porcentagens de migração entre as zonas urbana e rural do município.

	Zona Urbana	**Zona Rural**
Zona Urbana	99%	1%
Zona Rural	3%	97%

A matriz de transição com as porcentagens de mudanças entre os estados 1 (U) e 2(R) é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 0,03 & 0,97 \end{bmatrix}.$$

Para este problema, tem-se as duas situações possíveis:

i) meio rural $\xrightarrow{p_{22}}$ meio rural $\xrightarrow{p_{21}}$ meio urbano;

ii) meio rural $\xrightarrow{p_{21}}$ meio urbano $\xrightarrow{p_{11}}$ meio urbano;

A primeira situação representa o indivíduo que se muda para a cidade no segundo ano. A segunda situação representa o indivíduo que se muda para a cidade no primeiro ano.

Assim, a porcentagem da população rural que migra para o meio urbano em dois anos será a soma:

$$p_{22} \cdot p_{21} + p_{21} \cdot p_{11} = 0,97 \cdot 0,03 + 0,03 \cdot 0,99 = 0,03 \cdot 1,96 = 0,0588.$$

Portanto $5,88\%$ da população rural migrará para a cidade em dois anos.

Outra possível solução seria calcular a matriz P^2 com a utilização de uma calculadora ou de um software e verificar o valor correspondente ao elemento na posição $(2,1)$ (segunda linha e primeira coluna).

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 0,03 & 0,97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 0,03 & 0,97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9804 & 0,0196 \\ 0,0588 & 0,9412 \end{bmatrix}$$

Assim, aproximadamente 6% da população rural terá migrado para a cidade no período de dois anos.

Problema 4.3 *A população de um país é dividida em três classes sociais: alta (A), média (M) e baixa (B). Um estudo estatístico mostra que a probabilidade dos filhos de uma família de classe alta permanecerem nesta classe é de* 90%*. Entretanto, há uma chance de* 10% *deles irem para a classe média. O mesmo estudo aponta que os filhos de uma família de classe média têm* 10% *de chance de irem para a classe alta e* 30% *de chance de irem para a classe baixa. Por fim, os filhos de uma família de classe baixa têm* 20% *de chance de irem para a classe média e* 75% *de chance de permanecerem na classe baixa. De acordo com essas informações, qual a probabilidade dos netos de uma família de classe média irem para a classe alta?*

Comentário

Espera-se que os alunos identifiquem os três possíveis estados - classe alta (A), classe média (M) e classe baixa (B) - e suas respectivas probabilidades de transição. Tais informações são descritas no esquema e na tabela abaixo, onde os estados 1, 2 e 3 representam as classes A, B e C, respectivamente.

A matriz de transição com as probabilidades de mudanças entre as classes A, M e B é dada por:

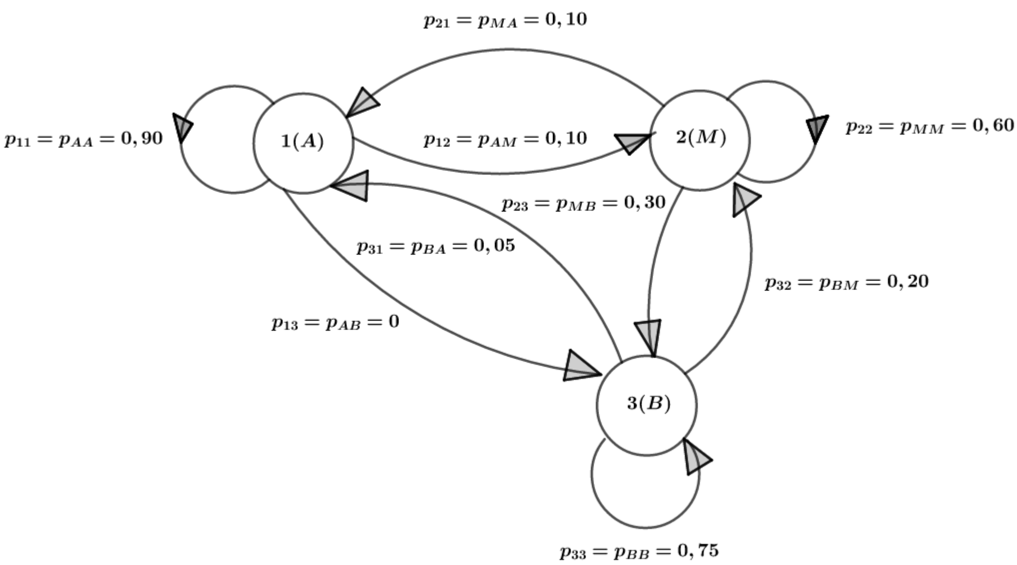
$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,2 & 0,75 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que os filhos podem ocupar qualquer uma das três classes, contanto que os pais e os netos pertençam às classes M e A, respectivamente. Assim, existe três situações possíveis:

i) classe M $\xrightarrow{p_{21}}$ classe A $\xrightarrow{p_{11}}$ classe A;

ii) classe M $\xrightarrow{p_{22}}$ classe M $\xrightarrow{p_{21}}$ classe A;

Figura 4.4 – Esquema com as probabilidades de transição entre as três classes sociais

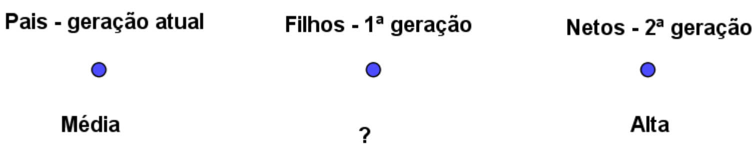


Fonte: Do autor (2020)

Tabela 4.3 – Probabilidades de transição entre as classes A, M e B da próxima geração.

	Classe A	Classe M	Classe B
Classe A	90%	10%	0%
Classe M	10%	60%	30%
Classe B	5%	20%	75%

Figura 4.5 – Situação do Problema 4.3



Fonte: Do autor (2020)

iii) classe M $\xrightarrow{p_{23}}$ classe B $\xrightarrow{p_{31}}$ classe A;

O primeiro evento representa os filhos do casal de classe média que foram para a classe alta. O segundo evento representa os filhos do casal de classe média que continuaram na classe média. Por fim, o terceiro evento representa os filhos do casal de classe média que foram para a classe baixa. A probabilidade a ser calculada será a soma das probabilidades destes três eventos independentes:

$$p_{21} \cdot p_{11} + p_{22} \cdot p_{21} + p_{23} \cdot p_{31} = 0,1 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 = 0,165.$$

Portanto, a probabilidade dos netos de uma família de classe média irem para a classe alta é de $16,5\%$.

Uma solução alternativa seria calcular P^2 com a utilização de uma calculadora ou de um software e verificar o elemento na posição $(2,1)$, isto é, que ocupa a segunda linha e primeira coluna.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,2 & 0,75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,2 & 0,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,82 & 0,15 & 0,03 \\ 0,165 & 0,43 & 0,405 \\ 0,1025 & 0,275 & 0,6225 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que o elemento na posição $(2,1)$ é $0,165$, que representa $16,5\%$ de probabilidade de uma família de classe média ter netos na classe alta.

Problema 4.4 *Um determinado fruto tem sua safra classificada em três modalidades: boa, média e ruim. Estudos revelam que, após uma safra boa, há probabilidades iguais a* 50% *e* 10% *de a próxima safra ser média ou ruim, respectivamente. Após uma safra média, há probabilidades iguais a* 40% *e* 10% *de a próxima safra ser boa ou ruim, respectivamente. E após uma safra ruim, há probabilidades iguais a* 30% *e* 60% *de a safra no ano seguinte ser boa ou média, respectivamente. Com base nestas informações, qual é a probabilidade da safra ser boa daqui a dois anos, sabendo que ela foi ruim neste ano? Monte a matriz de transição.*

Comentário

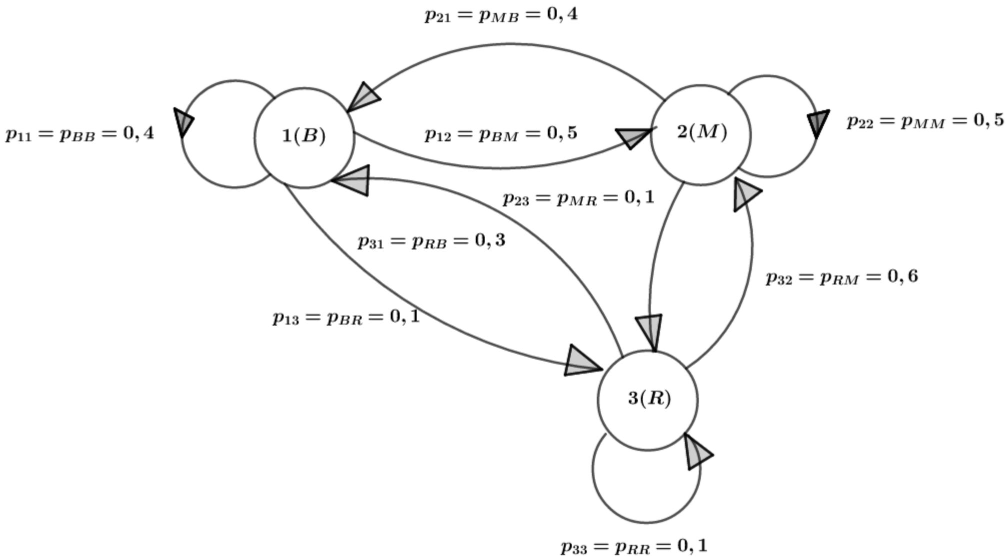
Espera-se que os alunos associem os três tipos de safra - boa(B), média (M) e ruim (R) - aos estados $E = \{1,2,3\}$. Tem-se pela ordem descrita, a seguinte matriz de transição e situação do problema:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Dependendo da safra do ano seguinte, tem-se as três possibilidades:

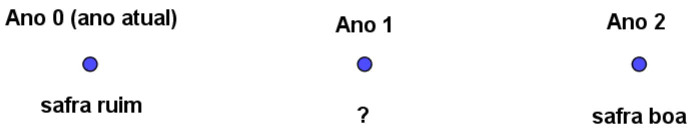
i) safra ruim $\xrightarrow{p_{31}}$ safra boa $\xrightarrow{p_{11}}$ safra boa;

Figura 4.6 – Esquema com as probabilidades de transição entre os três tipos de safra



Fonte: Do autor (2020)

Figura 4.7 – Situação do Problema 4.4



Fonte: Do autor (2020)

ii) safra ruim $\xrightarrow{p_{32}}$ safra média $\xrightarrow{p_{21}}$ safra boa;

iii) safra ruim $\xrightarrow{p_{33}}$ safra ruim $\xrightarrow{p_{31}}$ safra boa.

Nos eventos listados acima, nota-se que a safra do ano atual e a safra do segundo ano são, respectivamente, ruim e boa, isso implica que as variações de eventos estão exclusivamente vinculadas ao primeiro ano ou ano seguinte. Assim, a probabilidade a ser calculada será a soma das probabilidades destes três eventos independentes:

$$p_{31} \cdot p_{11} + p_{32} \cdot p_{21} + p_{33} \cdot p_{31} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,39.$$

É possível ainda, através da utilização de uma calculadora ou de um software, verificar o elemento na posição $(3,1)$, da matriz P^2.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,39 & 0,51 & 0,1 \\ 0,39 & 0,51 & 0,1 \\ 0,39 & 0,51 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a probabilidade da safra ser boa no segundo ano, tendo uma safra atual ruim, é de 39%.

Este último problema é bem interessante, pois traz um exemplo de uma cadeia regular, que pode ser confirmado ao observar as colunas constantes da matriz P^2. Quando tem-se uma cadeia regular, a partir de um certo tempo, a probabilidade do processo estar em determinado estado independente da estado inicial. No Problema 4.4, após dois anos, a probabilidade de se ter uma boa safra, por exemplo, é de 39%, independentemente do tipo de safra do ano atual. O mesmo vale para as probabilidades de uma safra ruim e de uma safra média.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresenta um estudo introdutório sobre processos estocásticos, em especial, sobre as cadeias de Markov. Tal estudo foi realizado com o intuito de ampliar e melhorar a formação matemática do professor, possibilitando a visualização de várias aplicações em que as cadeias de Markov são utilizadas.

Com o objetivo de levar parte desse estudo para o Ensino Médio, elaborou-se uma proposta de sequência didática com quatro problemas aplicados envolvendo conceitos iniciais de cadeias de Markov com dois e três estados. Visto que os conteúdos de matrizes e probabilidade são pré-requisitos para tal tema, o foco dos problemas foi o cálculo de algumas probabilidades não triviais e a construção da matriz de transição da cadeia.

Finalizando, o autor acredita que tal proposta possa incentivar o interesse dos estudantes pela Matemática, em especial, pelo estudo de probabilidade, uma vez que os problemas apresentados envolvem aplicações na vida cotidiana.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L. e. a. **Algebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

CLARKE A. BRUCE, D. R. L. **Probabilidade e Processos Estocásticos**. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

GOLMAKANI, A. e. a. Cadeias de markov. **VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**, 2014.

LEVIN, D. A. **Markov chains and mixing times**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2009.

MORGADO, e. a. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NORRIS, J. **Markov Chains**. Cambridge University Press: Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 1997.

SILVA, M. N. P. d. Historia da probabilidade. **Brasil Escola**, 2020.

SOARES J. F., S. A. L. **Introducão à Estatística Médica**. Belo Horizonte: Coopmed, 2002.