



**ANTÔNIO MARCOS CARVALHO DE SOUSA**

**O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS SOB A ÓTICA  
HISTÓRICA, PRÁTICA E DIDÁTICA**

**LAVRAS – MG**

**2021**

**ANTÔNIO MARCOS CARVALHO DE SOUSA**

**O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS SOB A ÓTICA HISTÓRICA, PRÁTICA E  
DIDÁTICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Fernando Lourenço

Orientador

**LAVRAS – MG**

**2021**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca  
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Sousa, Antônio Marcos Carvalho de  
O Corpo dos Números Complexos Sob a Ótica Histórica,  
Prática e Didática / Antônio Marcos Carvalho de Sousa. –  
Lavras : UFLA, 2021.  
98 p. : il.

Dissertação (mestrado profissional)–Universidade Federal  
de Lavras, 2021.  
Orientador: Fernando Lourenço.  
Bibliografia.

1. Números Complexos. 2. Funções Complexas e Mapea-  
mentos. 3. Abordagem Didática. I. Lourenço, Fernando. II.  
Título.

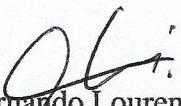
**ANTÔNIO MARCOS CARVALHO DE SOUSA**

**O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS SOB A ÓTICA HISTÓRICA, PRÁTICA E  
DIDÁTICA  
THE FIELD OF COMPLEX NUMBERS FROM THE HISTORICAL, PRACTICAL  
AND DIDACTIC PERSPECTIVE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 26 de Fevereiro de 2021.

Prof. Fernando Lourenço (Orientador)	UFLA
Profa. Divane Aparecida de Moraes Dantas	CEFET-MG
Prof. Helvécio Geovani Fagnoli Filho	UFLA

  
Fernando Lourenço  
Orientador

LAVRAS – MG  
2021

*Dedico esta dissertação aos meus filhos, que são meus maiores tesouros: Augusto César e Pedro Henrique.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ser sempre a minha luz, sem a qual esta dissertação não teria sido concluída, e por iluminar os meus passos e pensamentos nos momentos mais sombrios. Agradeço também à minha mãe, Cleusa; uma mulher guerreira; que criou o meu irmão e eu sozinha, mas com muito amor e sabedoria! Ela quem me mostrou a importância de ser fiel a Deus, ser honesto e procurar, antes de qualquer coisa, ser um homem bom. Agradeço também ao meu irmão, Milton, por me ensinar a importância de estudar e por ser uma referência para mim, sobretudo paterna. Boa parte do homem que sou hoje é reflexo do exemplo que ele me deu! Agradeço à minha querida esposa, Stela, por cuidar de mim e dos nossos filhos com todo o carinho, algumas vezes até sem eu merecer, por me aconselhar em momentos de tempestades e lutar ao meu lado as inúmeras batalhas do dia a dia!

Agradeço ao meu orientador, Fernando, por direcionar-me com maestria neste trabalho, pela paciência em lidar com a minha ansiedade, por sempre se preocupar comigo e com meus filhos, pelas aulas incríveis de Fundamentos de Cálculo e por ser um exemplo de profissional! Agradeço aos meus colegas de mestrado pela parceria, camaradagem e pelos momentos de descontração, principalmente na área de “conveniência”, sem os quais não teríamos “suportado” o programa de pós-graduação, e por serem a melhor turma que já fiz parte (#obbgmdvdqdm, #comoosgorilas, #chicotyson, #x1seunub)!

Agradeço também ao meu prodigioso amigo e pupilo, Nício Murilo, por me ajudar nas mais variadas tarefas, sempre com muita disposição e entusiasmo! Por fim, agradeço a todos os meus professores e colegas de trabalho por sempre me incentivarem a dar o meu melhor e enxergar em mim potencialidades que muita da vezes nem mesmo eu fui capaz de notar.

*"...Não me escolhestes vós a mim, mas eu vos escolhi a vós, e vos nomeei, para que vades e deis fruto, e o vosso fruto permaneça; a fim de que tudo quanto em meu nome pedirdes ao Pai ele vo-lo conceda..."*

*(João 15:16.)*

## RESUMO

O estudo dos Números Complexos não conta muito com a empatia de alguns professores de Matemática. Alegam que é desnecessário e não possui muitas aplicações práticas, ou ainda pior, que não o compreendem bem e por isso acabam por não incluí-lo em suas aulas. Visando contribuir para a mudança desse cenário, o intuito dessa dissertação é apresentar ao leitor uma abordagem mais aprofundada sobre os Números Complexos, desde as motivações para seu surgimento, formalizações, definições, propriedades, aplicações (funções complexas), até tópicos mais sofisticados, tais como: Mapeamentos Complexos, Transformações de Möbius e o Teorema do Círculo Preservado. É importante ressaltar que, na contramão de certas bibliografias tradicionais utilizadas em cursos de graduação, este estudo segue uma perspectiva mais didática; simplificada e interativa, através de *softwares* matemáticos, tais como *GeoGebra* e *Wolfram Alpha*. Isso permite uma visualização global sobre os Números Complexos, torna o seu entendimento mais significativo, não mais mecânico e maçante, e pode servir de ferramenta de aprendizagem para alunos e professores do ensino médio e superior.

**Palavras-chave:** Números Complexos; Transformações de Möbius; Teorema do Círculo Preservado; Aprendizagem Significativa; Sequência Didática.



## ABSTRACT

The study of Complex Numbers does not have much empathy of some math teachers. They claim that it is unnecessary and does not have many practical applications, or even worse, that they do not understand it well and, therefore, end up not including it in their classes. In order to contribute to changing this scenario, the purpose of this dissertation is to present the reader with a more in-depth approach to Complex Numbers, from the motivations for their appearance, formalizations, definitions, properties, applications (complex functions), to more sophisticated topics, such as: Complex Mappings, Möbius Transformations and the Circle-Preserving Theorem. It is important to note that, in contrast to certain traditional bibliographies used in undergraduate courses, this study follows a more didactic perspective; simplified and interactive, through mathematical softwares such as GeoGebra and Wolfram Alpha. This allows for a global view of Complex Numbers, makes their understanding more meaningful, no longer mechanical and tiresome, and may serve as a learning tool for high school and college students and teachers.

**Keywords:** Complex Numbers; Möbius Transformations; Circle-Preserving Theorem; Meaningful Learning; Didactic Sequence.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Plano de Argand-Gauss. . . . .	26
Figura 1.2 – Representação geométrica de $z_0 = 3 + \sqrt{3}i$ no plano complexo. . . . .	27
Figura 1.3 – Representação geométrica para as raízes complexas de $w^6 = 1$ . . . . .	32
Figura 2.1 – Exemplo de bola aberta em $\mathbb{C}$ . . . . .	40
Figura 2.2 – Exemplo de bola fechada em $\mathbb{C}$ . . . . .	40
Figura 2.3 – Exemplo de esfera em $\mathbb{C}$ . . . . .	41
Figura 2.4 – O conjunto $X = \{z \in \mathbb{C}   R(z) < 2\}$ com uma ampliação no ponto $z_0 = 1,95 + i \in X$ . . . . .	42
Figura 2.5 – O conjunto $X = \{z \in \mathbb{C}   R(z) \leq 2\}$ com uma ampliação no ponto $z_0 = 2 + i \in X$ . . . . .	43
Figura 2.6 – Representação geométrica de $X = \{z \in \mathbb{C};  z - 3 - 2i  > 3\} \cup \{z_0 = 3 + 2i\}$ . . . . .	44
Figura 2.7 – Expandindo a função $f(z) = z^2 - (2 + i)z$ em termos de $x$ e $y$ . . . . .	48
Figura 2.8 – Expandindo a parte real da função $f(z) = z^2 - (2 + i)z$ em termos de $x$ e $y$ . . . . .	48
Figura 2.9 – Expandindo a parte imaginária da função $f(z) = z^2 - (2 + i)z$ em termos de $x$ e $y$ . . . . .	49
Figura 3.1 – Mapeamento complexo para $S = \{z \in \mathbb{C};  z  = \sqrt{3}\}$ e $f(z) = e^z$ . . . . .	61
Figura 3.2 – Translação $T$ no ponto $z$ . . . . .	62
Figura 3.3 – Imagem $S'$ do quadrado $S$ sob translação. . . . .	63
Figura 3.4 – Ampliação $M$ no ponto $z$ . . . . .	65
Figura 3.5 – Imagem $C'$ da circunferência $C$ sob ampliação. . . . .	66
Figura 3.6 – Rotação $R$ no ponto $z$ . . . . .	67
Figura 3.7 – Imagem $S'$ da reta $y = 0$ sob rotação. . . . .	68
Figura 3.8 – Imagem $S'$ do retângulo $S$ sob mapeamento linear. . . . .	71
Figura 3.9 – Conjugado complexo e inversão no círculo unitário. . . . .	73
Figura 3.10 – Mapeamento inverso para os pontos $z_1, \dots, z_4$ da figura 3.9b. . . . .	74
Figura 3.11 – Imagem $S'$ do semicírculo $S$ sob mapeamento inverso. . . . .	75
Figura 3.12 – Imagem $C$ da reta vertical $L$ sob mapeamento inverso. . . . .	76
Figura 3.13 – Retas a serem mapeadas no plano- $z$ estendido. . . . .	78
Figura 3.14 – Respectivas imagens das retas no plano- $w$ estendido. . . . .	79
Figura 3.15 – A transformação linear fracionária $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ . . . . .	85
Figura 3.16 – A transformação linear fracionária $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ . . . . .	87

Figura 3.17 – O retângulo de vértices $-1 + i$ , $-1 + 2i$ , $1 + 2i$ e $1 + i$ . . . . .	92
Figura 3.18 – A região $R'$ , resultado da inversão e reflexão do retângulo $R$ . . . . .	93
Figura 3.19 – O retângulo de vértices $-1 + i$ , $-1 + 2i$ , $1 + 2i$ e $1 + i$ . . . . .	93
Figura 3.20 – A região $R'$ , resultado da aplicação de $f$ no retângulo $R$ . . . . .	94

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>NÚMEROS COMPLEXOS</b> . . . . .	12
1.1	Surgimento Histórico dos Números Complexos . . . . .	12
1.2	Construção do Corpo dos Números Complexos $\mathbb{C}$ . . . . .	17
1.3	Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ - Forma Algébrica . . . . .	19
1.4	Conjugados . . . . .	21
1.5	Módulo . . . . .	23
1.6	Forma Trigonométrica ou Polar . . . . .	25
1.7	Extração de Raízes . . . . .	30
1.8	Forma Matricial . . . . .	32
<b>2</b>	<b>O CÁLCULO EM <math>\mathbb{C}</math></b> . . . . .	38
2.1	Noções da topologia de $\mathbb{C}$ . . . . .	38
2.2	Funções Complexas . . . . .	45
2.2.1	Partes Real e Imaginária de uma Função Complexa . . . . .	46
2.2.2	Forma Polar de Funções Complexas . . . . .	49
2.2.3	Função Exponencial . . . . .	50
2.2.4	Função Logarítmica . . . . .	54
<b>3</b>	<b>FUNÇÕES COMPLEXAS ESPECIAIS E MAPEAMENTOS</b> . . . . .	60
3.1	Mapeamentos Complexos . . . . .	60
3.2	Mapeamentos Lineares . . . . .	61
3.2.1	Translações . . . . .	62
3.2.2	Ampliações . . . . .	64
3.2.3	Rotações . . . . .	67
3.3	Mapeamentos Inversos . . . . .	72
3.4	Transformações Lineares Fracionárias . . . . .	80
3.5	Proposta de Sequência Didática . . . . .	88
3.5.1	O Mapeamento Inverso de Figuras no Plano Complexo através do <i>GeoGebra</i> - Uma Sequência Didática . . . . .	89
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	98

## INTRODUÇÃO

Podemos dizer que o domínio dos números é quase tão antigo quanto a própria existência do homem. Desde a pré-história, com a necessidade de contar, até os dias atuais, onde os números se tornaram caracteres de sistemas computacionais, vemos o quanto o estudo dos números foi importante para a evolução humana, culminando, em meados do século XVI, na criação do Conjunto dos Números Complexos, denotado  $\mathbb{C}$ , que engloba todos os conjuntos numéricos, desde os Números Naturais até os Reais, acrescido dos números imaginários.

Atualmente, mesmo depois de séculos desde o seu surgimento, ainda é comum ver, em sala de aula, que os Números Complexos são abordados de maneira superficial, metódica e desconectada das suas origens históricas. Além disso, observamos algumas referências em meio à bibliografia tradicional que falham em apresentar o conteúdo de uma forma mais simplificada e interativa, sendo elas frequentemente densas, com figuras subjetivas e pouco preocupadas com uma abordagem que permite uma aprendizagem gradativa. Sendo assim, a presente dissertação visa apresentar uma ótica histórica, didática e prática acerca dos Números Complexos e as inúmeras ferramentas que eles nos oferecem.

Este trabalho está dividido em três capítulos: Números Complexos, O Cálculo em  $\mathbb{C}$ , e finalmente, Funções Complexas Especiais e Mapeamentos. Mais especificamente, no Capítulo 1, abordaremos a real motivação para o aparecimento dos Números Complexos, progredindo pelas etapas que levaram à sua consolidação. Construiremos o Corpo dos Números Complexos através dos formalismos necessários, evidenciando diferentes sistemas de notação.

No Capítulo 2, veremos, então, algumas características topológicas de  $\mathbb{C}$ , bem como funções cuja variável é complexa, analisando suas peculiaridades e propriedades, tais como: partes real e imaginária; forma polar e inversividade, além de mostrar a generalização de funções cuja variável é real para aquelas cuja variável é complexa, exemplificando com as funções exponenciais e logarítmicas.

Finalizaremos com o Capítulo 3, no qual discutiremos os mapeamentos complexos, que podem ser vistos como uma adaptação para a representação gráfica de funções complexas. Os mapeamentos lineares e inversos também integrarão este capítulo, sendo eles representantes das funções complexas lineares e inversas, respectivamente. Isso será imprescindível para dois conceitos chave que encerram o capítulo: Transformações Lineares Fracionárias e o Teorema do Círculo Preservado.

Tudo será feito de forma gradativa e com o apoio de recursos computacionais modernos, que auxiliam na visualização e interpretação geométrica, proporcionando sempre ao leitor um direcionamento no seu estudo e, principalmente, o incentivando a utilizar as mais variadas ferramentas para facilitar sua jornada de aprendizado.

O intuito do trabalho não é apenas servir de apoio à compreensão dos Números Complexos, mas também inspirar o leitor, principalmente os professores de Matemática do ensino médio e superior, a levar os aprendizados deste trabalho para sua prática diária em sala de aula, bem como em suas pesquisas e reflexões, promovendo, principalmente, a interdisciplinaridade.

## 1 NÚMEROS COMPLEXOS

Sabemos que a abordagem dos Números Complexos em sala de aula, por vezes, não conta com a empatia de muitos professores de Matemática do ensino médio. Alguns julgam desnecessário, pois não vislumbram aplicações práticas para tal, outros não compreendem esse conteúdo e por consequência disso decidem não incluí-lo em seus planos de aula.

Visando contribuir para a mudança desse cenário, este primeiro capítulo tem como objetivo oferecer ao leitor, principalmente professores que lecionam esse conteúdo no ensino médio, uma referência em relação ao Conjunto dos Números Complexos, evidenciando os fatos que contribuíram para sua criação, bem como suas principais características e propriedades. Falaremos sobre a “verdadeira” motivação para o surgimento desses números, que apesar de interessante não é algo nada inédito dentro do universo matemático. Eles surgem de uma disputa entre dois matemáticos de ego inflado: Cardano e Tartaglia (CERRI; MONTEIRO, 2001).

Em seguida, veremos a construção dos Números Complexos  $\mathbb{C}$  com estrutura de corpo e o conjunto dos reais  $\mathbb{R}$  como um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . A partir daí, estudaremos um número complexo em sua forma algébrica, polar e matricial, bem como seu conjugado, módulo e a extração de suas raízes. Buscaremos fazer tudo isso sob o rigor matemático através de definições, proposições, demonstrações, etc. Alguns fatos serão assumidos como senso comum, como as propriedades dos números reais, por exemplo.

### 1.1 Surgimento Histórico dos Números Complexos

Nesta seção, usaremos como referência básica o texto científico (CERRI; MONTEIRO, 2001).

Desde a antiguidade já havia matemáticos com forte atração e entusiasmo em resolver problemas envolvendo equações. Os matemáticos da antiga Babilônia, por exemplo, conseguiam obter a resolução para uma equação de 2º grau através da técnica que conhecemos atualmente como completamento de quadrados. Além disso, os gregos também já conseguiam resolver essas equações com régua e compasso e desempenharam papel importante no desenvolvimento da Matemática em geral. Mas entre os séculos V e XV, com a expansão do Cristianismo, quando a Europa entrou na Idade Média, período no qual a Igreja Católica controlava o desenvolvimento cultural, boa parte desses avanços ficaram por conta dos árabes e hindus.

O hindu Bhaskara Akaria, famoso por ter uma fórmula com seu nome, foi um grande astrônomo e matemático do século XII, responsável por encontrar fórmulas gerais e identidades

para equações com duas incógnitas. No entanto, por mais que seu nome seja usado para designar a fórmula para resolver equações de 2º grau, não foi ele quem a descobriu, pois o matemático Sridhara, também hindu, já havia feito isso no século XI. Convém lembrar que a fórmula para resolver qualquer equação da forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$ , é dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como se pode ver, a fórmula possui uma raiz quadrada que nem sempre existe, isto é, se o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , então não existe nenhum número real  $x$  que é solução da equação. Seria isso então o que motivou a criação de um conjunto numérico capaz de conter a solução para esses casos onde  $\Delta < 0$ ? A resposta é não! Esse fato não preocupava os matemáticos da época. Para eles, essas equações cujo discriminante é negativo simplesmente não tinham solução, pois acreditavam que a raiz negativa não existia.

Aproximadamente quatrocentos anos se passaram e os europeus voltaram a se dedicar à Matemática. Na busca de soluções para as equações de 3º grau, surgiu então a ideia de que o conjunto dos Números Reais não seria mais suficiente para a solução de tais problemas. A partir desse pressuposto e com a volta ao interesse nos estudos matemáticos, surgiu na Itália o desenvolvimento de pesquisas e disputas para se obter uma solução para a equação de 3º grau.

No início do século XVI, o italiano Scipione del Ferro iniciou o desenvolvimento de uma teoria para a solução de equações do tipo  $x^3 + px + q = 0$ , mas ele acabou morrendo antes mesmo de publicar seu trabalho. No entanto, Ferro tinha um pupilo que acompanhava seus estudos, chamado Antonio Maria Fior, que conhecia a resolução da equação. Em busca de ganhar algum reconhecimento valendo-se dessa teoria, Fior desafiou Niccoló Fontana, um matemático em ascensão na época, a encontrar tais soluções. Era muito comum nesse período competições e desafios entre matemáticos. Há algumas hipóteses para explicar esses ocorridos, a primeira é que essa foi a maneira que os estudiosos encontraram para mostrar ou exibir quem era o mais ágil e inteligente, ou então uma maneira pra encontrar erros nas fórmulas de seus adversários e acabar com a notoriedade daquele estudo.

Nicoló Fontana, conhecido também por Tartaglia, nasceu em Brécia em 1500 e foi agredido com golpes de sabre quando ainda era criança e por causa disso ficou com uma cicatriz na boca e com grandes dificuldades na fala, por esse motivo derivou o apelido de Tartaglia, que significa gago. Confiando apenas na sua capacidade matemática, Tartaglia aceitou o desafio de Fior e após muita dedicação ele deduziu não só a fórmula para o caso em questão, mas



também para as equações do tipo  $x^3 + px^2 + q = 0$ . Mesmo já conhecendo a solução deixada por seu mestre, Fior perdeu o desafio e saiu humilhado do embate com Tartaglia. Mas não foi exatamente por isso que Nicoló Fontana ficou famoso. Foram suas constantes disputas com Girolamo Cardano que o trouxeram notoriedade na história da Matemática.

Girolamo Cardano foi outro matemático italiano que também teve destaque nessa época. Nascido em Paiva no ano de 1501, sua vida foi cheia de grandes contrastes. Era conhecido por sua excelência com os números, mas também por possuir traços de violência, inveja e desonestidade. Para se ter uma ideia, em sua obra intitulada *Liber de Ludo*, ao mesmo tempo que introduzia noções de probabilidades, também ensinava maneiras de trapacear nos jogos. Mas sua principal obra foi o livro *Ars Magna*, publicada em 1545 na Alemanha, que apresentava métodos de solução para equações de 3º e 4º grau, um dos quais era, na verdade, de autoria de Tartaglia, dando início à grande rivalidade entre os dois.

No momento em que chegou ao conhecimento de Cardano que Tartaglia havia vencido Fior no desafio, descobrindo a solução para as equações de 3º grau, Cardano logo pediu a Tartaglia que lhe revelasse o segredo da teoria para publicar em seu livro. Não querendo entregar a sua descoberta, Tartaglia se manteve firme e disse que ele próprio faria a publicação. Porém, usando de esperteza, promessas e muita insistência, jurando nunca contar a ninguém, muito menos publicar a teoria, Cardano acaba conseguindo de Tartaglia o que ele mais queria, a resolução da equação de grau 3. Como já era de se esperar, Cardano não honrou suas promessas, traiu Tartaglia e em 1545 publicou a técnica de resolução em seu livro *Ars Magna*, mencionado anteriormente, que passou a ser conhecida como a Fórmula de Cardano. Dessa forma, como em vários outros casos, Tartaglia não recebeu nenhum mérito pelo seu trabalho.

É claro que a atitude de Cardano foi desonrosa e nada o justifica, mas o trabalho de Tartaglia foi realmente de crescer os olhos de qualquer matemático, até mesmo na atualidade. Vamos conhecer agora a fórmula que causou toda a confusão.

Na equação  $x^3 + px + q = 0$ , o que Tartaglia fez foi supor que as raízes eram obtidas através da substituição  $x = u + v$ . Fazendo  $x^3 = (u + v)^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = 3uvx + u^3 + v^3$ , temos que

$$x^3 + px + q = 0 \Rightarrow 3uvx + u^3 + v^3 + px + q = 0 \Rightarrow 3uvx + u^3 + v^3 = -px - q.$$

Pela igualdade de polinômios, temos que  $-p = 3uv$  e  $-q = u^3 + v^3$ . De  $-p = 3uv$ , sabemos que  $uv = -\frac{p}{3} \Rightarrow (uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 \Rightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$ .

Vamos considerar agora a equação  $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$ . É fácil notar que  $u^3$  e  $v^3$  são suas raízes, pois a soma  $u^3 + v^3 = -q$  e o produto  $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$ . Sendo assim, pela fórmula de Bhaskara, segue que

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \Rightarrow u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \text{ e}$$

$$v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \Rightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Mas pela suposição inicial de Tartaglia, sabemos que  $x = u + v$ . Logo a solução geral para qualquer equação do tipo  $x^3 + px + q = 0$  é dada por:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \quad (1.1)$$

Como se pode ver, a solução acima possui raízes quadradas que podem ser negativas, as quais eram tidas como inexistentes. Mas por que não dizer então que nesses casos a solução também não existia? Porque não era mais tão simples assim. Os matemáticos observaram que equações cujas soluções eram reais e conhecidas tinham valores de  $p$  e  $q$  de modo que aquele radicando era negativo, ou seja, por mais que na fórmula surgisse algo até então inexistente, no fim das contas a resposta era um número real.

Como exemplo, tomemos a equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$ . Uma de suas soluções é  $x_1 = 4 \in \mathbb{R}$  (as demais são  $x_2 = -\sqrt{3} - 2$  e  $x_3 = \sqrt{3} - 2$  e também são reais), mas pela fórmula o resultado é

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

A solução pela fórmula apresenta raízes negativas e cúbicas cuja natureza era totalmente desconhecida na época. Por conta disso surgiram várias dúvidas e questionamentos, pois estava claro que as estruturas algébricas conhecidas até então não eram suficientes para resolver as equações de 3º grau. Desta forma, o conjunto dos Números Reais precisava ser ampliado.

Os matemáticos do século XVI estavam diante de uma situação semelhante à ocorrida com os números irracionais na Grécia antiga, quando surgiu o problema da  $\sqrt{2}$  e dos segmentos incomensuráveis, inclusive com ingredientes bem parecidos, pois os relatos sobre a descoberta dos irracionais sugerem que Hipaso de Metaponto, membro da emblemática Escola Pitagórica, já defendia que havia números como  $\sqrt{2}$  e o número de ouro  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , por exemplo, que não eram racionais. Pitágoras, no entanto, não concordou com seu discípulo e com medo de ele ter razão, mandou afogá-lo.

De fato, o conceito que os europeus do século XVI tinham sobre os números precisava ser estendido. Mas somente depois de alguns anos é que o engenheiro hidráulico Rafael Bombelli, nascido no ano de 1526 em Bolonha, na Itália, conseguiu derrubar essa barreira e dar continuidade ao trabalho de Cardano e Tartaglia. O livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica* relata que a ideia de Bombelli foi supor que  $2 + \sqrt{-121} = (a + \sqrt{-b})^3$  e  $2 - \sqrt{-121} = (a - \sqrt{-b})^3$ , para algum  $a, b \in \mathbb{R}$ , assumindo que  $\sqrt{-1}$  era algo conhecido e que satisfazia as operações usuais existentes. Podemos ver uma possível dedução para  $2 + \sqrt{-121}$  a seguir. O outro caso segue o mesmo raciocínio.

$$\begin{aligned} 2 + \sqrt{-121} &= 2 + 11\sqrt{-1} = (8 - 6) + (12 - 1)\sqrt{-1} = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - 1\sqrt{-1} \\ &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= (2 + \sqrt{-1})^3. \end{aligned}$$

Bombelli constatou que  $a = 2$  e  $b = 1$ , como vimos acima. Sendo assim, a solução da equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$  dada por  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  podia ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} \\ &= 4. \end{aligned}$$

A solução real  $x = 4$  pôde enfim ser encontrada e o caminho para se criar um novo conjunto numérico começou a ser traçado.

Com o passar do tempo, muitos outros matemáticos contribuíram para o aprimoramento dos números complexos. Dentre eles convém citar René Descartes, responsável por chamar as raízes negativas de imaginárias, motivo pelo qual até hoje se chama  $\sqrt{-1}$  de unidade imaginária, e Leonhard Euler, que desenvolveu a fórmula para extração de raízes de um número complexo com o auxílio da fórmula  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , melhorou a notação e simbologia (a substituição  $i = \sqrt{-1}$ , por exemplo) e adotou a forma algébrica  $z = a + bi$  em seus trabalhos, os quais servem como referência até os dias de hoje.

## 1.2 Construção do Corpo dos Números Complexos $\mathbb{C}$

Primeiramente, assumiremos que todas as relações dos Números Reais são verdadeiras, não sendo necessárias, portanto, demonstrações das propriedades de  $\mathbb{R}$ . No entanto, se necessário, veja A Construção dos Números Reais e suas Extensões em (AGUILAR; DIAS, 2015). Para os Complexos, usaremos (NETO, 2016) e (SOARES, 1999) como referências principais.

A partir disso, vamos considerar o seguinte conjunto  $C = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ , munido das duas operações definidas adiante:

Adição

$$\begin{aligned} + : C \times C &\longrightarrow C \\ ((a, b), (c, d)) &\mapsto (a + c, b + d). \end{aligned}$$

Multiplicação

$$\begin{aligned} \cdot : C \times C &\longrightarrow C \\ ((a, b), (c, d)) &\mapsto (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Para exemplificar, os números  $z = (2, 3)$  e  $w = (1, -1)$  pertencem ao conjunto  $C$  acima, cuja adição  $z + w$  e cujo produto  $z \cdot w$  são dados por  $z + w = (2, 3) + (1, -1) = (3, 2)$  e  $z \cdot w = (2, 3) \cdot (1, -1) = (5, 1)$ , respectivamente.

**Proposição 1.1.**  $(C, +, \cdot)$  satisfaz as propriedades comutativa, associativa, existência de elemento neutro, elemento inverso e distributiva.

*Demonstração.*

Sejam  $z = (a, b)$ ,  $u = (c, d)$  e  $w = (e, f)$  elementos de  $C$ . Temos as seguintes propriedades para a adição:

1. Comutativa:  $z + u = u + z$ .

$$z + u = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = u + z.$$

2. Associativa  $(z + u) + w = z + (u + w)$ .

$$\begin{aligned} (z + u) + w &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= ((a + c) + e, (b + d) + f) = (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= (a, b) + [(c + e), (d + f)] = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \\ &= z + (u + w). \end{aligned}$$

3. Existe  $O = (0, 0) \in C$ , tal que  $z + a = (a, b) + (0, 0) = z$ ,  $\forall z \in C$ .

4. Para todo  $z = (a, b) \in C$ , existe  $-z = (-a, -b) \in C$ ,  
tal que  $z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (0, 0) = O$ .

Temos também as propriedades da multiplicação:

5. Comutativa:  $z \cdot u = u \cdot z$ .

$$z \cdot u = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d) \cdot (a, b) = u \cdot z.$$

6. Associativa:  $(z \cdot u) \cdot w = z \cdot (u \cdot w)$ .

$$\begin{aligned} (z \cdot u) \cdot w &= [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] \\ &= z \cdot (u \cdot w). \end{aligned}$$

7. Existe  $n = (1, 0) \in C$ , tal que  $z \cdot n = (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) = z, \forall z \in C$ .

8. Para todo  $z = (a, b) \neq O$ , existe  $z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \in C$ , tal que

$$z \cdot z^{-1} = (a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ba}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = n.$$

Por fim, temos a propriedade mista:

9. Distributiva:  $z \cdot (u + w) = z \cdot u + z \cdot w$ .

$$\begin{aligned}
 z \cdot (u + w) &= (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\
 &= [a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)] \\
 &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\
 &= ((ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)) \\
 &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\
 &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) \\
 &= z \cdot u + z \cdot w.
 \end{aligned}$$

**Definição 1.1.** O Conjunto  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  será chamado *Corpo dos Números Complexos* e denotado por  $\mathbb{C}$ .

Um Conjunto é um Corpo quando satisfaz as nove propriedades apresentadas na Proposição 1.1. Para mais detalhes, veja (AGUILAR; DIAS, 2015) cap. 1, pg. 10.

### 1.3 Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ - Forma Algébrica

A partir da Definição 1.1, mostraremos que o conjunto dos Números Reais  $\mathbb{R}$  pode ser identificado como um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Para isso, consideremos o conjunto  $\bar{\mathbb{C}} = \{(r, 0), \text{ tal que } r \in \mathbb{R}\}$ , com  $\bar{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$ , e as considerações a seguir.

**Definição 1.2.** Seja  $C$  um corpo e seja  $C'$  um subconjunto não vazio de  $C$ . Dizemos que  $C'$  é um subcorpo de  $C$  se  $C'$  é um corpo com as mesmas operações de  $C$ .

Isso significa que para  $C'$  ser subcorpo de  $C$ , ele deve possuir pelo menos um elemento, isto é,  $C' \neq \emptyset$  e, dados  $a, b \in C'$ , devemos ter  $a + b, a \cdot b \in C'$ , considerando que as operações  $(+, \cdot)$  são as mesmas de  $C$ .

**Proposição 1.2.**  $(\bar{\mathbb{C}}, +, \cdot)$  é um subcorpo de  $\mathbb{C}$ .

*Demonstração.*

O conjunto  $\bar{\mathbb{C}} \neq \emptyset$  tem pelo menos dois elementos:  $n = (1, 0)$  e  $O = (0, 0)$ . Além disso,  $\bar{\mathbb{C}}$  é fechado em relação à adição e multiplicação, pois, para todo  $z = (a, 0), w = (b, 0)$  em  $\bar{\mathbb{C}}$ ,

temos que  $z + w = (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in \overline{C}$  e  $z \cdot w = (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0) \in \overline{C}$ . Por fim, qualquer que seja  $z = (a, 0)$  pertencente a  $\overline{C}$ , com  $a \neq 0$ , existe  $-z = (-a, 0) \in \overline{C}$  e  $z^{-1} = \left(\frac{1}{a}, 0\right)$  em  $\overline{C}$ . Logo  $(\overline{C}, +, \cdot)$  é um subcorpo de  $\mathbb{C}$ . ■

**Proposição 1.3.** *O subcorpo  $\overline{C}$  é isomorfo ao corpo  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.*

Seja a função  $f : \overline{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(a, 0) = a$ . Queremos mostrar que  $f$  é uma função bijetora e preserva suas operações. De fato, dados  $z = (a, 0), w = (b, 0)$  em  $\overline{C}$ , obtemos  $f(z) = a$  e  $f(w) = b$ . Supondo então que  $a = b$ , temos que  $a = b \Rightarrow f(z) = f(w) \Rightarrow f(a, 0) = f(b, 0) \Rightarrow (a, 0) = (b, 0) \Rightarrow z = w$ , ou seja,  $f$  é injetora. Além disso, tomando  $a \in \mathbb{R}$ , existe  $z = (a, 0) \in \overline{C}$  tal que  $f(z) = f(a, 0) = a$ , logo  $f$  é sobrejetora e, daí, concluímos que  $f$  é uma bijeção. Por outro lado, vemos que  $f(z + w) = f((a, 0) + (b, 0)) = f(a + b, 0) = a + b = f(a, 0) + f(b, 0) = f(z) + f(w)$  e  $f(z \cdot w) = f((a, 0) \cdot (b, 0)) = f(ab, 0) = ab = f(a, 0) \cdot f(b, 0) = f(z) \cdot f(w)$ , ou seja,  $f$  preserva suas operações. Portanto  $\overline{C} \approx \mathbb{R}$ . ■

Mediante as proposições acima, fica garantido que o subcorpo  $\overline{C}$  de  $\mathbb{C}$  é isomorfo ao corpo  $\mathbb{R}$ . O Conjunto dos Números Reais, por sua vez, passa a ser um subconjunto de  $\mathbb{C}$ .

Convenientemente, considere agora o número complexo  $i = (0, 1)$ . A esse número daremos o nome de **unidade imaginária**. Note que, dado  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ , ele pode ser escrito na forma  $z = a + bi$ , pois:

$$\begin{aligned} z &= (a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi, \text{ e} \\ a + bi &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = (a, 0) + (b \cdot 0 - 1 \cdot 0, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (a, 0) + (0, b) = \\ &= (a + 0, 0 + b) = (a, b) = z. \end{aligned}$$

Desta maneira, cada número complexo  $z = (a, b)$  pode ser representado em sua **forma algébrica** por  $z = a + bi$ , onde  $i = (0, 1)$ . Denominaremos **parte real** ( $R(z)$ ) de  $z$  como sendo o valor de  $a$  e **parte imaginária** ( $I(z)$ ) de  $z$  o valor de  $b$ , ou seja,  $R(z) = a$  e  $I(z) = b$ , que também podem ser representadas por  $Re(z)$  e  $Im(z)$ , respectivamente. Esta nova notação facilita as operações algébricas pois, dados os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , temos que:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Como exemplo, dados os números complexos  $z = (2, 3) = 2 + 3i$  e  $w = (1, -1) = 1 - i$ , temos que  $z + w = (2 + 3i) + (1 - i) = 3 + 2i$  e  $z \cdot w = (2 + 3i) \cdot (1 - i) = 5 + i$ .

Em relação à unidade imaginária  $i = (0, 1)$ , vemos que:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1;$$

$$i^3 = (0, 1)(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)(0, 1) = (0, -1) = -i.$$

$$i^4 = (0, 1)(0, 1)(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)(-1, 0) = (1, 0) = 1.$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1.$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1.$$

⋮

Note que as operações acima indicam um ciclo nos resultados, reiniciando a cada quatro unidades acrescentadas no expoente. Sendo assim, dado  $m \in \mathbb{N}$ , podemos escrevê-lo na forma  $m = 4q + r$  (dividindo  $m$  por 4), tal que  $0 \leq r < 4$ . Desta forma, de um modo geral, temos que  $i^m = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$ , ou seja, os valores de  $i^m$  e  $i^r$  são iguais, desde que  $r$  seja o resto da divisão de  $m$  por 4. O número complexo  $i^{2021} = i^1 = i$ , por exemplo.

## 1.4 Conjugados

Nesta seção, veremos a definição de conjugado de um número complexo e suas propriedades. Os conjugados são importantes principalmente na resolução de situações do tipo  $z_1 \cdot z = z_2$ , onde  $z_1, z_2$  são conhecidos ( $z_1 \neq 0$ ) e o objetivo é encontrar  $z$ , sendo  $z, z_1, z_2$  números complexos.

**Definição 1.3.** Chama-se conjugado do número complexo  $z = a + bi$  ao número  $\bar{z} = a - bi$ .

Da definição acima, dados  $z_0 = 2 + 3i$  e  $w_0 = 1 - i$ , é fácil ver que

$$\bar{z}_0 = 2 - 3i \text{ e } \bar{w}_0 = 1 + i.$$

Generalizando, se tomarmos  $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$ , é certo que valem as seguintes propriedades:



$$1. \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

*Demonstração.*

$$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \bar{z} + \bar{w}. \quad \blacksquare$$

$$2. \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}.$$

*Demonstração.*

$$\overline{z-w} = \overline{(a-c) + (b-d)i} = (a-c) - (b-d)i = (a-bi) - (c-di) = \bar{z} - \bar{w}. \quad \blacksquare$$

$$3. \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

*Demonstração.*

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i = (a-bi) \cdot (c-di) = \bar{z} \cdot \bar{w}. \quad \blacksquare$$

$$4. z \neq O \Rightarrow \overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}.$$

*Demonstração.*

$$\overline{(z^{-1})} = \overline{\left( \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2} \right)} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{b}{a^2+b^2} = (\bar{z})^{-1}. \quad \blacksquare$$

$$5. z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

*Demonstração.*

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2. \quad \blacksquare$$

$$6. \overline{(\bar{z})} = z.$$

*Demonstração.*

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{a-bi} = a+bi = z. \quad \blacksquare$$

$$7. \overline{\left( \frac{z}{w} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

*Demonstração.*

$$\overline{\left( \frac{z}{w} \right)} = \overline{(z \cdot w^{-1})} = \bar{z} \cdot \overline{(w^{-1})} = \bar{z} \cdot (\bar{w})^{-1} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}. \quad \blacksquare$$

$$8. z + \bar{z} = 2a.$$

*Demonstração.*

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a. \quad \blacksquare$$

$$9. z - \bar{z} = 2bi.$$

*Demonstração.*

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi. \quad \blacksquare$$

$$10. z = \bar{z} \Leftrightarrow b = 0.$$

*Demonstração.*

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow (a + bi) = (a - bi) \Leftrightarrow b = 0. \quad \blacksquare$$

## 1.5 Módulo

Vimos que um número complexo  $z$  pode ser representado na forma de par ordenado, ou seja,  $z = (a, b)$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , e é a mesma representação de um ponto ou vetor em  $\mathbb{R}^2$ . Sendo assim, o cálculo algébrico do módulo de um número complexo segue o mesmo raciocínio para o módulo de um vetor ou da distância entre dois pontos considerando que um deles é a origem do plano cartesiano. Vejamos a seguir a definição e algumas propriedades do módulo de um número complexo.

**Definição 1.4.** Dado  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , chamamos de *módulo de  $z$*  o número real não negativo  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ .

Como exemplo, ao considerarmos  $z_0 = 3 + 4i$  e  $w_0 = 1 - 2\sqrt{2}i$ , temos que

$$|z_0| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ e } |w_0| = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Note que, pela definição, devemos considerar somente o valor não negativo. De um modo geral, para  $z = a + bi$ ,  $w = c + di \in \mathbb{C}$ , valem as propriedades a seguir:

$$1. |z| = |\bar{z}|.$$

*Demonstração.*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|. \quad \blacksquare$$

$$2. |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

*Demonstração.*

$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0. \quad \blacksquare$$

$$3. |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (z \cdot w)(\overline{z \cdot w}) = (z \cdot w)(\bar{z} \cdot \bar{w}) = (z \cdot \bar{z})(w \cdot \bar{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2 \\ &\Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$4. |z^{-1}| = |z|^{-1}.$$

*Demonstração.*

$$1 = |1| = |z \cdot z^{-1}| = |z| \cdot |z^{-1}| \Rightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}. \quad \blacksquare$$

$$5. \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \text{ desde que } w \neq 0.$$

*Demonstração.*

$$\left| \frac{z}{w} \right| = |z \cdot w^{-1}| = |z| \cdot |w^{-1}| = \frac{|z|}{|w|}. \quad \blacksquare$$

$$6. a \leq |a| \leq |z| \text{ e } b \leq |b| \leq |z|.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} a \leq |a| &= \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\ b \leq |b| &= \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (Desigualdade Triangular).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z \cdot \bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Logo, de  $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$ , temos que  $|z + w| \leq |z| + |w|$ . ■

8.  $|z - w| \geq |z| - |w|$ .

*Demonstração.*

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w| \Rightarrow |z - w| \geq |z| - |w|. \quad \blacksquare$$

9.  $|z - w| \geq |w| - |z|$ .

*Demonstração.*

$$|w| = |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z| \Rightarrow |z - w| \geq |w| - |z|. \quad \blacksquare$$

10.  $||z| - |w|| \leq |z - w|$ .

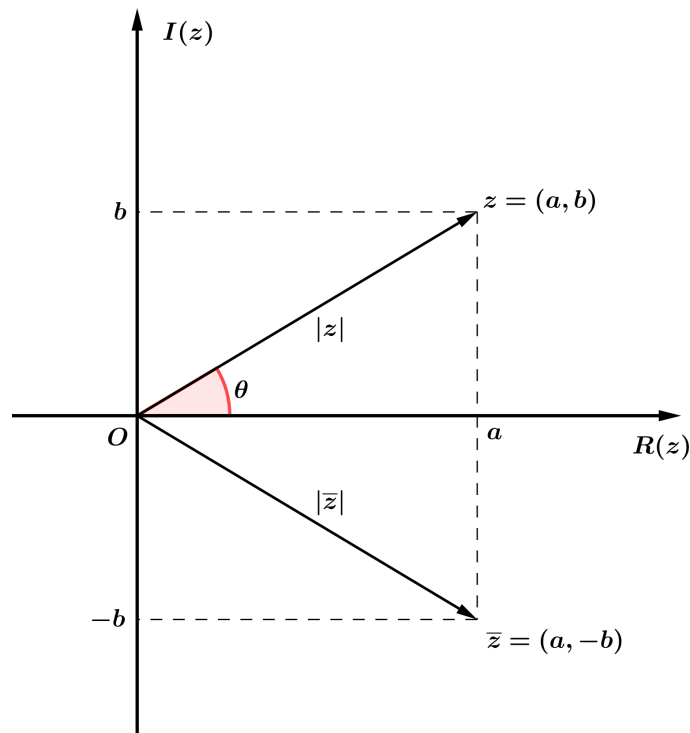
*Demonstração.*

Segue das Propriedades 8 e 9:  $-(|z - w|) \leq |z| - |w| \leq |z - w| \Rightarrow ||z| - |w|| \leq |z - w|$ . ■

## 1.6 Forma Trigonométrica ou Polar

Dando continuidade ao que foi dito na seção anterior, abordaremos agora os Números Complexos de forma geométrica. Ao considerarmos um número complexo  $z = a + bi = (a, b) \in \mathbb{C}$ , podemos representá-lo em um plano  $xOy$ , associando a parte real  $R(z)$  ao eixo horizontal  $Ox$  e a parte imaginária  $I(z)$  ao eixo vertical  $Oy$ , que de agora em diante serão denominados eixo real e eixo imaginário, respectivamente. A Figura 1.1 a seguir mostra esse plano, que é bem semelhante ao cartesiano, preservando boa parte de suas características, o qual é chamado de plano complexo, ou plano de Argand-Gauss.

Figura 1.1 – Plano de Argand-Gauss.



Fonte: Próprio autor.

Chamaremos de afixo de  $z$  o ponto  $P(a, b)$ , cuja abscissa é  $R(z) = a$  e ordenada é  $I(z) = b$ . Sendo assim, o módulo de  $z$  pode ser visto como o comprimento do vetor  $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ , cuja validação pode ser obtida através do Teorema de Pitágoras, por exemplo. Além disso, como se pode ver,  $|z| = |\bar{z}|$  e  $\bar{z}$  têm como afixo o ponto  $P'(a, -b)$ , que é simétrico de  $P$  em relação ao eixo horizontal. É notório também que, se  $a = 0$ ,  $z$  está sobre o eixo imaginário ( $z$  é um número imaginário puro), por outro lado, se  $b = 0$ ,  $z \in \mathbb{R}$  e localizado sobre o eixo real.

Ao observar o plano complexo, podemos notar que o vetor que representa  $z$  forma um ângulo  $\theta \in \mathbb{R}$  com o eixo real positivo no sentido anti-horário, o qual é chamado de **argumento** de  $z$ , e é sempre medido em radianos.

**Definição 1.5.** Dado  $z = a + bi \neq 0 \in \mathbb{C}$ , existe um único  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ , tal que:

$$\begin{cases} a = |z| \cos \theta \\ b = |z| \operatorname{sen} \theta. \end{cases} \quad (1.2)$$

Pelo fato de  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ , a solução do sistema acima é chamada de **argumento principal** de  $z$  e denotado por  $\operatorname{Arg}(z)$ . Além disso, se  $\theta \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $\{\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  contém todos os argumentos de  $z$  e denotamos por  $\operatorname{arg}(z)$  qualquer um dos seus elementos. As-

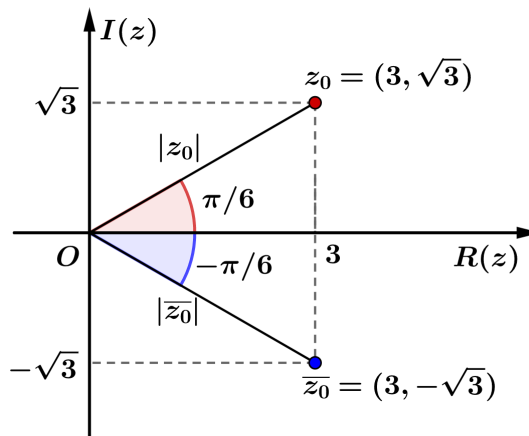
sim, se  $\theta = \arg(z); z \neq 0$ , então  $z$  pode ser posto em sua **forma polar**, isto é,  $z = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Para simplificar a escrita, podemos tomar  $|z| = r$  e escrever  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , e em coordenadas polares temos  $z = (r, \theta)$ .

Considerando  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  e  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ , temos as seguintes relações para  $\text{Arg}(z)$ :

- $I(z) = 0, R(z) > 0 \Rightarrow \theta = 0$ ;
- $I(z) = 0, R(z) < 0 \Rightarrow \theta = \pi$ ;
- $R(z) = 0, I(z) > 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ;
- $R(z) = 0, I(z) < 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$ , e
- $R(z) \neq 0, I(z) \neq 0 \Rightarrow \theta = \arctg\left(\frac{I(z)}{R(z)}\right)$ .

Para exemplificar o que vimos nesta seção até agora, ao tomar o complexo  $z_0 = 3 + \sqrt{3}i$ , temos que  $\bar{z}_0 = 3 - \sqrt{3}i$ ,  $|z_0| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ,  $\text{Arg}(z_0) = \frac{\pi}{6}$ , pois o arco cuja tangente vale  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  é  $\frac{\pi}{6}$  rad, e  $\arg(z_0) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . No plano complexo, temos:

Figura 1.2 – Representação geométrica de  $z_0 = 3 + \sqrt{3}i$  no plano complexo.



Fonte: Próprio autor.

Outro resultado importante para nós é dado pela fórmula de De Moivre, a qual garante que  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \forall n \in \mathbb{N}$ . Além disso, convenientemente, utilizando a fórmula de Euler dada por  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , podemos reescrever  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  como sendo  $z = re^{i\theta} = |z|e^{i\theta}$ , exemplo:  $z_0 = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Esta nova forma de representar um número complexo preserva as propriedades elementares que conhecemos, algumas das quais veremos adiante. Sejam  $\theta$  e  $\varphi \in \mathbb{R}$ , temos que:

$$1. e^{i\theta} \neq 0.$$

*Demonstração.*

Pelas propriedades do módulo de um número complexo, sabemos que  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \forall z \in \mathbb{C}$ . Sendo assim,  $|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{1} = 1 \neq 0$ . Logo  $e^{i\theta} \neq 0$ . ■

$$2. e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cdot (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \\ &= \cos \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + i(\operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \cos \theta \operatorname{sen} \varphi) \\ &= \cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi) \\ &= e^{i(\theta+\varphi)}. \end{aligned}$$

$$3. \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} &= \frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}{\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi} = \frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}{\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi} \\ &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cdot (\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi) \\ &= \cos \theta \cos \varphi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + i(\operatorname{sen} \theta \cos \varphi - \cos \theta \operatorname{sen} \varphi) \\ &= \cos(\theta - \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta - \varphi) \\ &= e^{i(\theta-\varphi)}. \end{aligned}$$

$$4. (e^{i\theta})^{-1} = e^{i(-\theta)}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} (e^{i\theta})^{-1} &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-1} = \frac{1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta} \cdot \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta \\ &= \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) \\ &= e^{i(-\theta)}. \end{aligned}$$

5.  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ , qualquer que seja  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.*

Para esta demonstração, usaremos a fórmula de De Moivre vista anteriormente. Com efeito, dado  $n$  natural, temos que  $(e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = e^{in\theta}$ . Por outro lado, se  $n < 0$ , basta considerar que  $-n > 0$  e utilizar a propriedade 4 anterior, considerando que  $(e^{i\theta})^n = (e^{-i\theta})^{-n}$ . ■

Pelas propriedades acima, dados  $z = |z|e^{i\theta}$ ,  $w = |w|e^{i\varphi} \in \mathbb{C} - \{0\}$ , é imediato que:

6.  $z \cdot w = |z||w|e^{i(\theta+\varphi)}$ .

*Demonstração.*

$$z \cdot w = (|z|e^{i\theta}) \cdot (|w|e^{i\varphi}) = |z||w|e^{i\theta}e^{i\varphi} = |z||w|e^{i(\theta+\varphi)}. \quad \blacksquare$$

Apesar de simples, essa demonstração acima nos mostra que o produto  $z \cdot w$  é um número complexo de módulo  $|z| \cdot |w|$  e argumento  $\theta + \varphi$ , isto é,  $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ .

7.  $z^{-1} = |z|^{-1}e^{i(-\theta)}$ ,  $z \neq 0$ .

*Demonstração.*

$$z^{-1} = (|z|e^{i\theta})^{-1} = |z|^{-1}(e^{i\theta})^{-1} = |z|^{-1}e^{i(-\theta)}. \quad \blacksquare$$

8.  $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}$ ,  $w \neq 0$ .

*Demonstração.*

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|e^{i\theta}}{|w|e^{i\varphi}} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}. \quad \blacksquare$$

9.  $z^n = |z|^n \cdot e^{i(n\theta)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.*

Pode ser feita por indução.

i) Para  $n = 0$  e  $n = 1$  é evidente.

ii) Suponhamos agora que  $z^n = |z|^n \cdot e^{i(n\theta)}$ ,  $n > 1$ . Queremos mostrar que  $z^{n+1} = |z|^{n+1}e^{i(n+1)\theta}$ . De fato,  $z^{n+1} = z^n \cdot z$  e, pela hipótese de indução,  $z^n \cdot z = (|z|^n \cdot e^{i(n\theta)}) \cdot (|z|e^{i\theta}) = |z|^n|z|e^{i(n\theta)}e^{i\theta} = |z|^{n+1}e^{i(n+1)\theta}$ .

Logo, de i) e ii), temos que  $z^n = |z|^n \cdot e^{i(n\theta)}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ■



$$10. z^{-n} = |z|^{-n} e^{i(-n\theta)}, n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.*

$$z^{-n} = (z^n)^{-1} = (|z|^n e^{in\theta})^{-1} = |z|^{-n} e^{i(-n\theta)}. \quad \blacksquare$$

$$11. z^{\frac{m}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} e^{i\left(\frac{m\theta}{n}\right)}, m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0.$$

*Demonstração.*

$$z^{\frac{m}{n}} = (z^m)^{\frac{1}{n}} = \left[ |z|^m \cdot e^{i(m\theta)} \right]^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} e^{i\left(\frac{m\theta}{n}\right)}. \quad \blacksquare$$

## 1.7 Extração de Raízes

Vimos na seção anterior que um número complexo pode ser escrito em sua forma polar para facilitar a interpretação geométrica, mas essa não é a única vantagem. Utilizando a forma polar e suas propriedades, podemos encontrar mais facilmente as soluções para equações da forma  $w^n = z$ , considerando que  $n \in \mathbb{N}$  e  $z \in \mathbb{C}$  são conhecidos. Podemos dizer que o processo de solução dessas equações é chamado de extração de raízes de um número complexo  $z$ , desde que  $n \geq 2$ .

Inicialmente, note que as soluções da equação anterior para  $z = 0$  e  $n = 1$  são evidentes, pois  $w^n = 0 \Rightarrow w = 0$  e  $w^1 = z \Rightarrow w = z$ . Ademais, temos a seguinte definição:

**Definição 1.6.** *Dados  $z \in \mathbb{C}$  e  $n \geq 2$  inteiro, chama-se raiz enésima de  $z$  a todo número complexo  $w$  tal que  $w^n = z$ .*

Tomando os complexos  $z = |z|e^{i\theta}$  e  $w = |w|e^{i\varphi}$ , podemos escrever  $w^n = z$  da forma  $(|w|e^{i\varphi})^n = |z|e^{i\theta}$ . Pela Propriedade 5 da forma polar, segue que  $(|w|e^{i\varphi})^n = |w|^n e^{i(n\varphi)} = |z|e^{i\theta}$ , então temos que:

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ e^{i(n\varphi)} = e^{i\theta} \end{cases} \quad (1.3)$$

Das igualdades acima, podemos concluir que  $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ , pois  $|z|$  e  $|w|$  são números positivos, e que  $n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Note que não basta considerar  $n\varphi = \theta$ , uma vez que  $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$ , para qualquer que seja  $k \in \mathbb{Z}$ .

Continuando o raciocínio, podemos reescrever a equação  $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$  sob a forma  $\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ , pois teremos um valor de  $\varphi$  para cada valor de  $k \in \mathbb{Z}$  e as soluções de  $w^n = z$ , conhecendo  $z$  e  $n$  serão dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\varphi_k} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}. \quad (1.4)$$

Não é preciso considerar as voltas completas que partem de  $\varphi_k$ , ou seja,  $\varphi_k + 2k'\pi$ , com  $k' \in \mathbb{Z}$ , uma vez que não precisamos encontrar todos os argumentos possíveis para  $w_k$ , mas apenas um deles, pois sabemos que  $e^{i(\varphi_k+2k'\pi)} = e^{i\varphi_k}$ . Isso significa que os valores de  $k$  variam de 0 até  $n-1$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ). Para sintetizar o que vimos até agora, podemos enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 1.4.** *Todo número complexo  $z = |z|e^{i\theta} \neq 0$  tem exatamente  $n$  raízes complexas, onde  $n \geq 2$  é um inteiro. Estas raízes são dadas por  $z_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .*

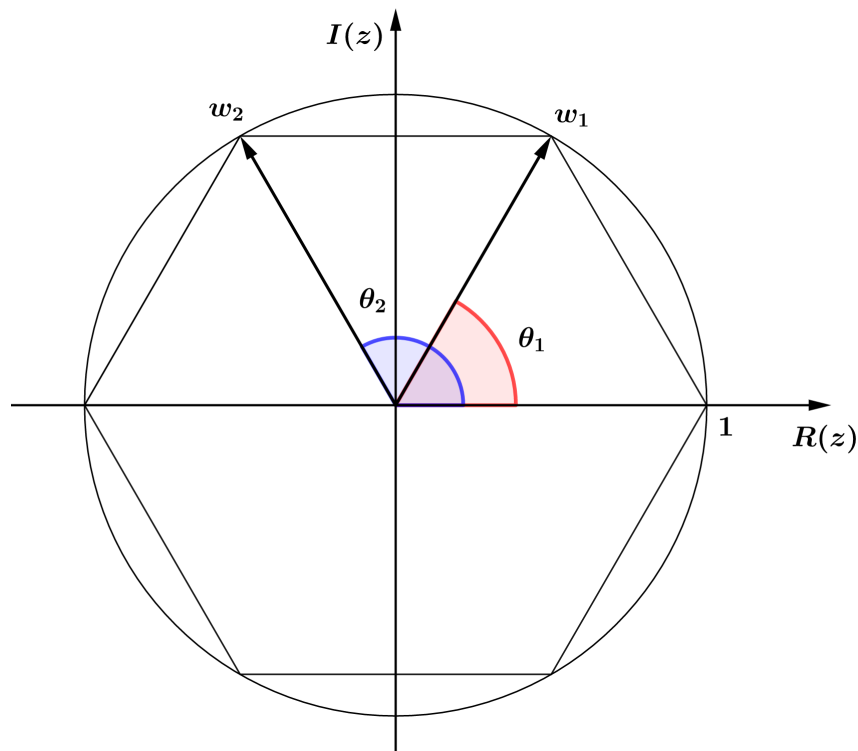
*Demonstração.*

Queremos mostrar que os números complexos  $z_k$  são raízes enésimas de  $z$ , que essas raízes são duas a duas distintas e que qualquer raiz de  $z$  tem a forma de  $z_k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . De fato,  $(z_k)^n = \left[|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}\right]^n = |z| e^{i(\theta+2k\pi)} = |z| e^{i\theta} = z$ . Logo,  $z_k$  é raiz de  $z$ . Por outro lado, dados  $k, k' \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq k, k' \leq n-1$ , ao supor que  $z_k = z_{k'}$ , podemos afirmar que  $|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k'\pi}{n}\right)} \Rightarrow \frac{\theta+2k\pi}{n} = \frac{\theta+2k'\pi}{n} \Rightarrow \theta + 2k\pi = \theta + 2k'\pi \Rightarrow 2k\pi = 2k'\pi \Rightarrow k = k'$ , isto é,  $z_k = z_{k'}$  apenas se  $k = k'$ . Tomando  $w = |w|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$  tal que  $w^n = z$ , temos que  $|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$  e  $\varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , logo  $w = \sqrt[n]{|z|} e^{i\varphi} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = z_k$ . ■

Consideremos agora o caso particular  $w^n = 1$ , ou seja,  $w$  é uma das  $n$  raízes da unidade. Temos que  $w^n = e^{i2k\pi} \Rightarrow w_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ , qualquer que seja  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Além disso, dados  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$  e  $z_0 = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}$  uma raiz enésima de  $z$  (tomando  $k = 0$ ), é fácil notar que qualquer raiz  $z_k$  de  $z$  é dada por  $z_k = z_0 \cdot w_k$ , para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , pois  $z_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = z_0 \cdot w_k$ . Isso significa que, conhecendo uma das raízes de  $z$ , as demais podem ser obtidas através da multiplicação dessa raiz pelas raízes  $w_k$  da unidade.

Outro fato notório é que ao fixar  $n \in \mathbb{N}$ , o conjunto  $Z_n = \left\{ w_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}; k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$  contém as raízes enésimas da unidade e, geometricamente, constitui os vértices de um polígono regular de  $n$  lados, sendo um desses vértices o ponto  $(1, 0)$ , inscrito na circunferência  $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  de centro na origem e raio unitário, conforme ilustração a seguir:

Figura 1.3 – Representação geométrica para as raízes complexas de  $w^6 = 1$ .



Fonte: Próprio autor.

Como se pode ver, de  $w^6 = 1$ , temos que  $\theta_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow w_1 = e^{i(\frac{\pi}{3})}$ ,  $\theta_2 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow w_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$  e, mais genericamente,  $\theta_k = \frac{2k\pi}{6} = k\frac{\pi}{3} \Rightarrow w_k = e^{i\theta_k}$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ .

## 1.8 Forma Matricial

Para encerrarmos o primeiro capítulo, veremos uma outra maneira de se representar um número complexo, agora através de matrizes. Para tanto, construiremos um corpo  $M$  de matrizes quadradas de ordem dois de modo que  $M$  satisfaça as nove propriedades vistas na Proposição 1.1 considerando as operações usuais entre matrizes (LIMA, 2016b). Em seguida, mostraremos que  $M$  e  $\mathbb{C}$  são isomorfos, ou seja, que um número complexo  $z$  também pode ser visto como um elemento de  $M$ , e vice versa.

**Proposição 1.5.** *Seja  $M: \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . O conjunto  $M$  é um corpo.*

*Demonstração.*

Considere as matrizes  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$  e  $C = \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$  em  $M$ .

Verifica-se as propriedades adiante:

Em relação à adição:

1. Comutativa:  $A + B = B + A$ .

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c+a & d+b \\ -(d+b) & c+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= B + A. \end{aligned}$$

2. Associativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+c)+e & (b+d)+f \\ -((b+d)+f) & (a+c)+e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(c+e) & b+(d+f) \\ -(b+(d+f)) & a+(c+e) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ -(d+f) & c+e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \right] \\ &= A + (B + C). \end{aligned}$$

3. Existe  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ , tal que  $A + N = N + A = A$ ,  $\forall A \in M$ :

$$A + N = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = A, \forall A \in M.$$

4. Para qualquer matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$ , existe  $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \in M$ , tal que

$$A + (-A) = -A + A = N:$$

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N.$$

Note que não é necessário provar que  $A + N = N + A$  e  $A + (-A) = -A + A$ , uma vez que todas elas pertencem ao conjunto  $M$  e, portanto, satisfazem a propriedade comutativa da adição.

Partindo agora para as propriedades da multiplicação:

5. Comutativa:  $A \cdot B = B \cdot A$ .

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ca - db & da + cb \\ -(da + cb) & ca - db \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= B \cdot A \end{aligned}$$

6. Associativa:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ac - bd)e - (ad + bc)f & (ad + bc)e + (ac - bd)f \\ -(ad + bc)e - (ac - bd)f & (ac - bd)e - (ad + bc)f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ace - bde - adf - bcf & ade + bce + acf - bdf \\ -ade - bce - acf + bdf & ace - bde - adf - bcf \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ace - adf - bde - bcf & ade + acf + bce - bdf \\ -ade - acf - bce + bdf & ace - adf - bde - bcf \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(ce - df) + b(-de - cf) & a(de + cf) + b(ce - df) \\ -b(ce - df) + a(-de - cf) & -b(de + cf) + a(ce - df) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ce - df & de + cf \\ -de - cf & ce - df \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \right] \\
&= A \cdot (B \cdot C).
\end{aligned}$$

7. Existe  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ , tal que  $A \cdot I = I \cdot A = A, \forall A \in M$ :

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = A, \forall A \in M.$$

8. Para qualquer matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$  e  $A \neq N$ , existe  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in M$ , tal que  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ :

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} & \frac{-ab+ba}{a^2+b^2} \\ \frac{-ba+ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Por último, a propriedade mista:

9. Distributiva:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ .

$$\begin{aligned}
A \cdot (B + C) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ -(d+f) & c+e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac+ae-bd-bf & ad+af+bc+be \\ -(ad+af+bc+be) & ac+ae-bd-bf \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ac - bd + ae - bf & ad + bc + af + be \\ -(ad + bc + af + be) & ac - bd + ae - bf \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ae - bf & af + be \\ -(af + be) & ae - bf \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \\
&= A \cdot B + A \cdot C. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Mediante a demonstração acima, fica comprovado que o conjunto  $M$  tem estrutura de corpo.

**Proposição 1.6.** A função  $f: \mathbb{C} \rightarrow M$ , dada por  $f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  é um isomorfismo.

*Demonstração.*

Assim como fizemos na demonstração da Proposição 1.3, devemos mostrar que  $f$  é uma função bijetora e preserva suas operações. Com efeito, tomando  $z = a + bi$ ,  $w = c + di \in \mathbb{C}$ , segue que  $f(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  e  $f(w) = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ . Supondo  $f(z) = f(w)$ , devemos ter então que  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ , o que ocorre somente quando  $a = c$  e  $b = d$ , mediante as propriedades de igualdade entre matrizes. Daí, se  $a = c$  e  $b = d$ , temos que  $z = w$  e  $f$  é injetora. Além disso, tomando  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$ , existe  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z = (a + bi)$  e  $f(z) = f(a + bi) = Y$ , o que significa que  $f$  é sobrejetora. Logo, já que  $f$  é injetora e sobrejetora,  $f$  é uma função bijetora. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
f(z + w) &= f((a + bi) + (c + di)) = f((a + c) + (b + d)i) \\
&= \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -b - d & a + c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\
&= f(a + bi) + f(c + di) \\
&= f(z) + f(w).
\end{aligned}$$

Segue também que:

$$\begin{aligned}
 f(z \cdot w) &= f((a+bi) \cdot (c+di)) = f((ac-bd) + (ad+bc)i) \\
 &= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\
 &= f(a+bi) \cdot f(c+di) \\
 &= f(z) \cdot f(w).
 \end{aligned}$$

Por fim, tomando  $s = 0+0i$ ,  $p = 1+0i \in \mathbb{C}$  temos que:  $f(s) = f(0+0i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N \in M$

e  $f(p) = f(1+0i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \in M$ . Desta forma, podemos concluir que  $f$  preserva suas operações e é um isomorfismo de  $\mathbb{C}$  em  $M$ . ■

Para exemplificar o que vimos nesta seção, efetuaremos algumas operações entre números complexos em sua forma matricial. Com efeito, tomando  $z_1 = 2-i$  e  $z_2 = 3+2i$ , sabemos que  $z_1 + z_2 = 5+i$  e que  $z_1 \cdot z_2 = 8+i$ . A representação matricial de  $z_1$  é  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  e de  $z_2$  é  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ . Temos então que

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & -1+2 \\ 1-2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ e}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 & 4-3 \\ 3-4 & 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Apesar de incomum, a representação matricial de um número complexo pode ser bastante útil, principalmente em sistemas computacionais, pois existem muitos algoritmos que usam matrizes (ou vetores) em suas bases de cálculos.



## 2 O CÁLCULO EM $\mathbb{C}$

Com tudo que vimos no capítulo anterior sobre o conjunto dos Números Complexos, podemos agora aprofundar o estudo um pouco mais. Começaremos conhecendo melhor as principais características topológicas de  $\mathbb{C}$  e estudaremos também algumas funções cuja variável é complexa, isto é, cujo domínio é  $\mathbb{C}$ .

### 2.1 Noções da topologia de $\mathbb{C}$

Pela forma que o conjunto dos Números Complexos foi definido no capítulo 1 através de pares ordenados, é natural pensar que  $\mathbb{C}$  herda a topologia do plano  $\mathbb{R}^2$ . De fato, isso realmente ocorre, porém com algumas peculiaridades e notações diferentes. Usando os trabalhos de (LIMA, 2016a), (ZILL; SHANAHAN, 2003) e (NETO, 2016) como referências, admitiremos que as principais propriedades e conceitos topológicos dos espaços euclidianos, em geral, são conhecidas, mas algumas delas lembraremos em nosso texto, tais como: a norma de um vetor, a distância entre dois vetores; bolas, esferas, conjuntos abertos, fechados, discretos, etc. A partir daí, estabeleceremos a relação entre a topologia de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$ .

Inicialmente, lançando mão da teoria vista no primeiro capítulo de (LIMA, 2016a) sobre topologia no espaço  $n$ -dimensional ( $\mathbb{R}^n$ ), vale lembrar que, dado um vetor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , a **norma** (ou o comprimento) de  $x$  é dada por:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (2.1)$$

Podemos ver aqui a primeira relação entre  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$ , pois a norma de um vetor em  $\mathbb{R}^2$  e o módulo de um número complexo são obtidos exatamente da mesma maneira, conforme vimos na seção 1.5. Além disso, através da norma dada na equação (2.1) acima, torna-se possível abordar também a ideia de distância entre dois pontos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , a qual é definida de acordo com a equação:

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (2.2)$$

É importante salientar ainda, que tanto a norma quanto a distância são números reais. Sendo assim, visando maior simplicidade na notação, podemos considerar, convenientemente, que  $d(x, y) = r$ , por exemplo.

Dois outros itens importantes para nós e muito utilizados no universo dos espaços euclidianos são os conceitos de “bola” e “esfera”. Para (LIMA, 2016a), dado um ponto  $a$  de  $\mathbb{R}^n$  e  $r > 0 \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $B(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}$  é chamado de **bola aberta** de centro  $a$  e raio  $r$ , cuja distância de qualquer que seja o  $x$  ao ponto  $a$  é menor do que  $r$ . De maneira análoga, é imediato pensar que o conjunto  $B[a; r] := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r\}$  é chamado de **bola fechada** de centro  $a$  e raio  $r$  (também conhecida como disco  $n$ -dimensional de centro  $a$  e raio  $r$ ), de modo que a distância entre os pontos  $x$  e  $a$  é menor do que ou igual a  $r$ . É de se estranhar, talvez, essa nomenclatura, afinal de contas o termo “bola” serve para representar um objeto esférico tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ), não é mesmo? Mas, por se tratar de um termo familiar, ele se torna conveniente para unificar as notações e favorecer a interpretação, pois nos ajuda a “enxergar” os conjuntos geometricamente. Por fim, ao conjunto  $S[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| = r\}$  daremos o nome de **esfera**. Ela é a “casca” e podemos dizer que a bola fechada  $B[a; r]$  é a união da bola aberta  $B(a; r)$  com a esfera  $S[a; r]$ , isto é,  $B[a; r] = B(a; r) \cup S[a; r]$ .

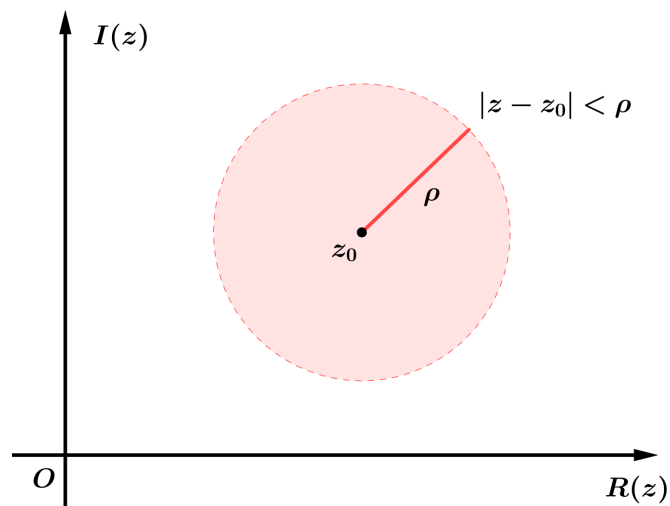
Tomando agora um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  e um ponto  $a \in X$ , dizemos que  $a$  é um **ponto interior** ao conjunto  $X$  quando, para algum  $r > 0$ ,  $B(a; r) \subset X$ . Isso significa que se a vizinhança de  $a$  também pertence a  $X$ ,  $a$  é ponto interior de  $X$ . O conjunto de todos os pontos interiores a  $X$ , denotado por  $int(X)$ , recebe o nome de **interior** do conjunto  $X$ . Um conjunto  $X$  é dito **aberto** quando todos os seus elementos são pontos interiores. Por outro lado, considerando ainda o subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , um ponto  $b \in \mathbb{R}^n$  é chamado de **ponto aderente** ao conjunto  $X$  quando existe uma sequência de pontos  $(x_k)$  em  $X$  de modo que  $x_k \rightarrow b$ , ou seja, quando a sequência  $(x_k)$  em  $X$  tende ou converge para  $b$ . A união de todos os pontos aderentes de  $X$  é o conjunto  $\bar{X}$  e é chamado de **fecho** do conjunto  $X$ . Sintetizando,  $b \in \bar{X} \Leftrightarrow x_k \rightarrow b$ , com  $x_k \in X$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Falar que  $b$  pertence a  $\bar{X}$  é afirmar que  $b$  é ponto aderente de  $X$ . Dizemos que um conjunto  $X$  é **fechado** quando  $\bar{X} = X$ , ou seja, todos os seus elementos são pontos aderentes. As bolas abertas e fechadas são exemplos de conjuntos abertos e fechados, respectivamente.

Por fim, dado um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  e um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a$  é um **ponto de acumulação** de  $X$  quando  $a \in \overline{X - \{a\}}$ , ou seja, qualquer que seja  $r > 0 \in \mathbb{R}$ , a bola  $B(a; r)$  contém algum ponto de  $X - \{a\}$  ( $X$  diferente de  $a$ ). Um ponto de acumulação de  $X$  pode pertencer a  $X$  ou não. O conjunto de todos os pontos de acumulação de  $X$  é chamado de **conjunto derivado** e denotado por  $X'$ . Além disso, dado  $b \in X \subset \mathbb{R}^n$ , se  $b$  não é ponto de acumulação de  $X$ , então  $b$  é um **ponto isolado** de  $X$ , ou seja, existe  $r > 0 \in \mathbb{R}$  tal que  $B(b; r) \cap X = \{b\}$ . Se todos os pontos de um conjunto  $X$  forem isolados, então  $X$  é um **conjunto discreto**.

A partir de agora já podemos criar mais relações entre  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$ . Sabemos que o plano  $\mathbb{R}^2$  é um caso particular em qualquer uma das definições topológicas de  $\mathbb{R}^n$  dadas anteriormente, então podemos partir direto para os Números Complexos fazendo uso das mesmas notações utilizadas por (LIMA, 2016a), mantendo a padronização, cada qual com a sua devida interpretação visual, pois “enxergar geometricamente” esses conjuntos e propriedades ajuda a compreendê-los melhor. Sendo assim, dado  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $\rho \in \mathbb{R}$ , vamos considerar que:

1. O conjunto  $B(z_0; \rho) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \rho\}$  é a bola aberta em  $\mathbb{C}$  de centro  $z_0$  e raio  $\rho$ .

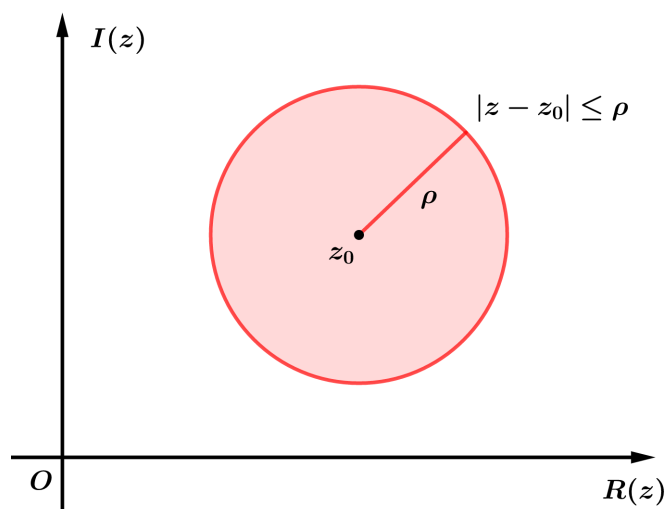
Figura 2.1 – Exemplo de bola aberta em  $\mathbb{C}$ .



Fonte: Próprio autor.

2. O conjunto  $B[z_0; \rho] = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq \rho\}$  é a bola fechada em  $\mathbb{C}$  de centro  $z_0$  e raio  $\rho$ .

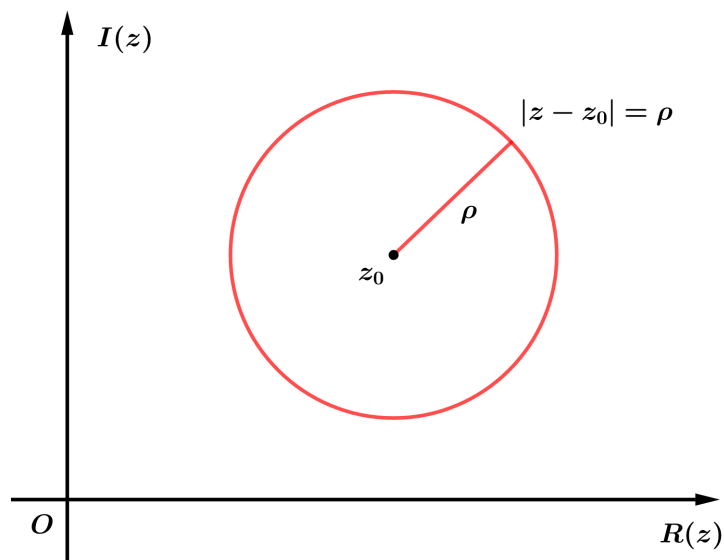
Figura 2.2 – Exemplo de bola fechada em  $\mathbb{C}$ .



Fonte: Próprio autor.

3. O conjunto  $S[z_0; \rho] = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \rho\}$  é a esfera em  $\mathbb{C}$  de centro  $z_0$  e raio  $\rho$ .

Figura 2.3 – Exemplo de esfera em  $\mathbb{C}$ .



Fonte: Próprio autor.

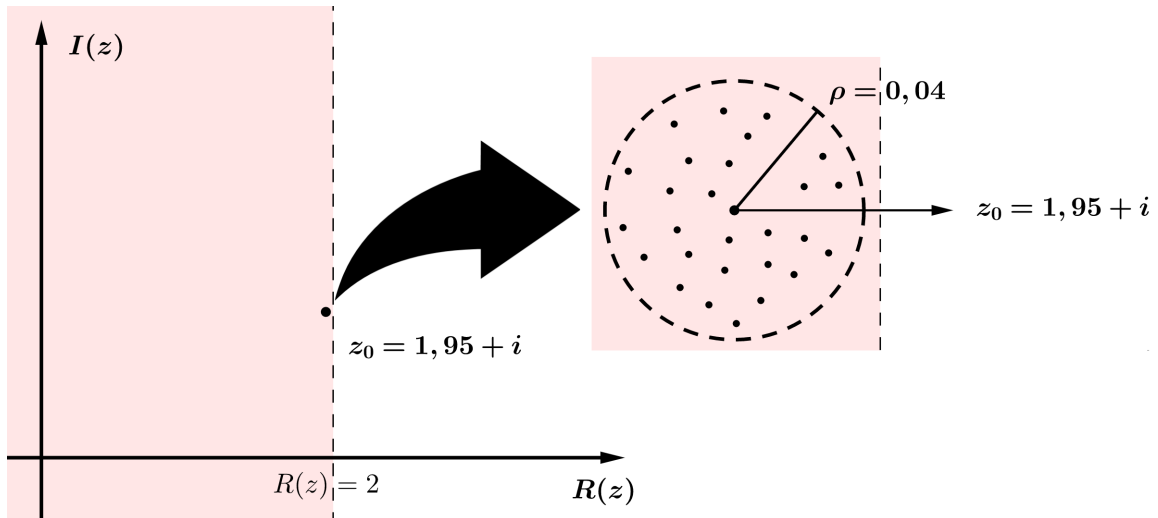
É muito comum ver outras notações para esses conjuntos. Como exemplo, (ZILL; SHANAHAN, 2003, pág. 29) chama a esfera de “círculo”, a bola fechada de “disco” e a bola aberta de “vizinhança”.

4. Dado  $X \subset \mathbb{C}$ , o interior de  $X$  é o conjunto:

$$\text{int}(X) = \{z \in \mathbb{C}, \text{ tal que } B(z; r) \subset X, \text{ para algum } r > 0 \in \mathbb{R}\}.$$

Vale lembrar que qualquer ponto de  $\text{int}(X)$  é ponto interior de  $X$ . Além disso, para qualquer que seja  $z \in X$ , se  $z \in \text{int}(X)$ , então o conjunto  $X$  é aberto. Por exemplo, tomando o conjunto  $X = \{z \in \mathbb{C} | R(z) < 2\}$ , queremos descobrir quem é  $\text{int}(X)$  e saber se  $X$  é aberto ou não. Para isto, basta observar o que acontece com os pontos à esquerda da reta  $R(z) = 2$ , os mais próximos possíveis. Sendo assim, dado um ponto qualquer de  $X$ , nosso objetivo é ver o que acontece com a vizinhança dele. Com efeito, dado  $z_0 \in X$ , temos que  $R(z_0) < 2$ . Além disso, ao considerar  $\rho > 0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\rho \leq |R(z_0) - 2|$ , verificamos que  $B(z_0; \rho) \subset X$ , portanto  $X = \text{int}(X)$  é, de fato, aberto. Como exemplo, tomando  $z_0 = 1,95 + i$  e  $\rho = 0,04$  temos que a bola  $B(1,95 + i; 0,04) \subset X$ . Visualmente, temos:

Figura 2.4 – O conjunto  $X = \{z \in \mathbb{C} \mid R(z) < 2\}$  com uma ampliação no ponto  $z_0 = 1,95 + i \in X$ .



Fonte: Próprio autor.

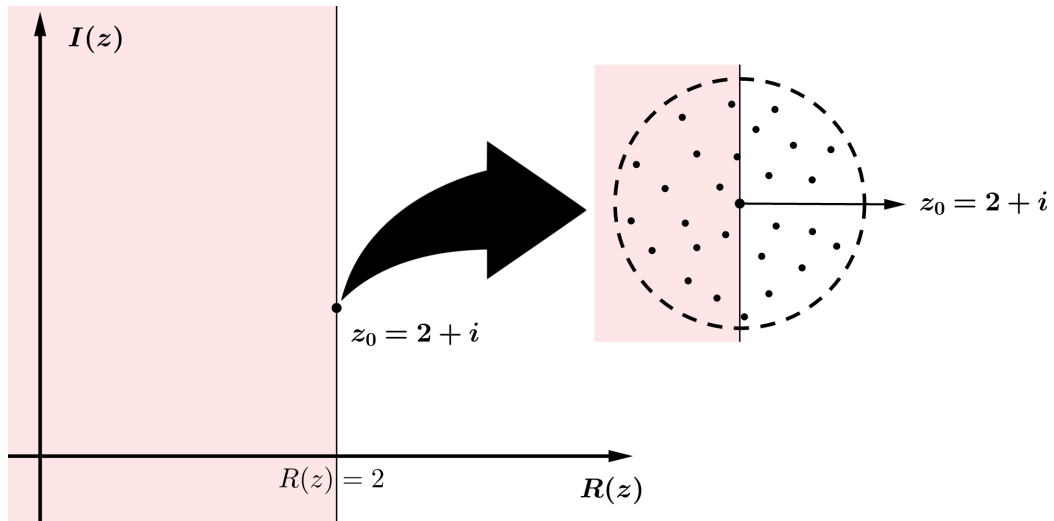
Por mais que sejamos capazes de interpretar essas condições de forma puramente algébrica, a interpretação geométrica é um instrumento privilegiado para a análise da situação. Dá pra ver na Figura 2.4 que os pontos vizinhos de  $z_0$  estão todos dentro de  $X$ , por isso,  $X$  é aberto. O mesmo não acontece na Figura 2.5, pois vemos que nenhuma vizinhança de  $z_0$  está totalmente contida no conjunto  $X$ .

5. Dado  $X \subset \mathbb{C}$ , o fecho de  $X$  é o conjunto:

$$\bar{X} = \{z \in \mathbb{C}, \text{ tal que } B(z; r) \cap X \neq \emptyset, \text{ para algum } r \in \mathbb{R}, \text{ com } r > 0\}.$$

Sabemos que qualquer ponto de  $\bar{X}$  é ponto aderente de  $X$  e que  $X \subset \bar{X}$ . Quando  $X = \bar{X}$ , o conjunto  $X$  é fechado. Por exemplo, tomando o conjunto  $X = \{z \in \mathbb{C} \mid R(z) \leq 2\}$ , é fácil ver que  $\bar{X} = \{z \in \mathbb{C} \mid R(z) \leq 2\}$ , pois qualquer sequência convergente  $x_k \in X$  tende para um ponto também pertencente a  $X$ . Desta forma,  $X = \bar{X}$  é fechado, pois ao considerar o ponto  $z_0 = 2 + i \in X$ , por exemplo, é notório que qualquer bola  $B(z_0; \rho)$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$ , intersecta o conjunto  $X$ , isto é,  $B(z_0; \rho) \cap X \neq \emptyset$ . Essa situação está ilustrada na Figura 2.5 a seguir, onde parte dos pontos vizinhos a  $z_0$  pertencem a  $X$ .

Figura 2.5 – O conjunto  $X = \{z \in \mathbb{C} | R(z) \leq 2\}$  com uma ampliação no ponto  $z_0 = 2 + i \in X$ .



Fonte: Próprio autor.

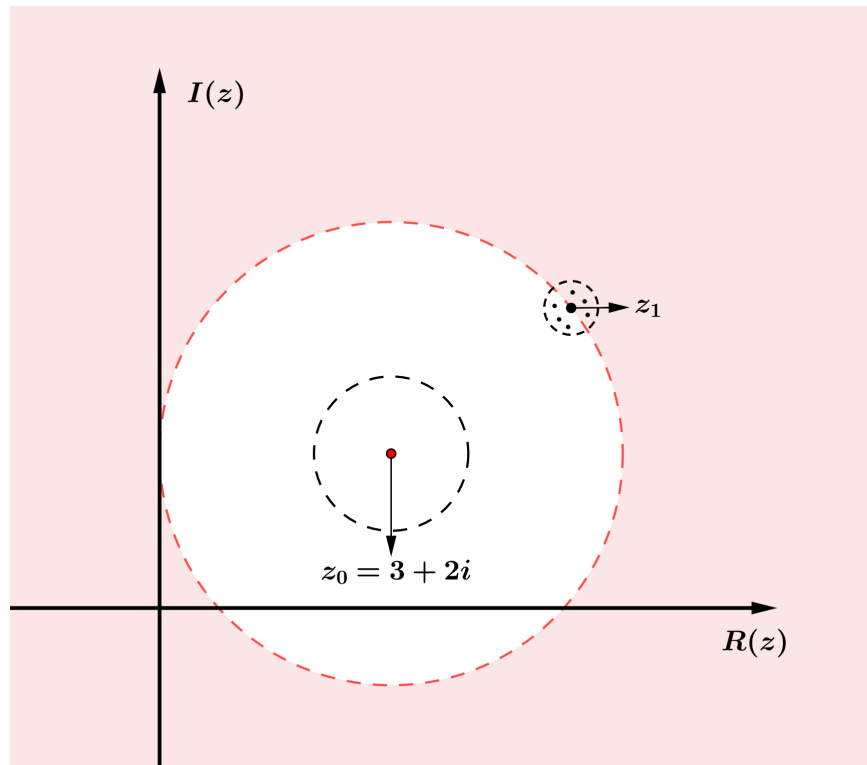
Observando a Figura 2.5 acima, também podemos falar um pouco sobre fronteira ou bordo de um conjunto. Lins Neto em (NETO, 2016) diz que, dado  $X \subset \mathbb{C}$ , a **fronteira** ou **bordo** de  $X$  é o conjunto  $\partial X = \{z \in \mathbb{C}, \text{ tal que } B(z; r) \cap X \neq \emptyset \text{ e } B(z; r) \cap (\mathbb{C} - X) \neq \emptyset \text{ para todo } r \in \mathbb{R}\}$ . Pelo exemplo da Figura 2.5, a fronteira ou bordo de  $X$  é o conjunto  $\partial X = \{z \in \mathbb{C}; R(z) = 2\}$ , isto é, qualquer ponto de  $\mathbb{C}$  que esteja sobre a reta  $R(z) = 2$ . Note também que qualquer bola fechada tem como interior a sua respectiva bola aberta, qualquer bola aberta tem como fecho a sua respectiva bola fechada e a fronteira ou bordo de uma bola é a sua respectiva esfera. Por fim, não é correto afirmar que se um conjunto não é aberto, então ele é fechado, ou vice-versa. O conjunto  $F = \{z \in \mathbb{C}; -2 < \text{Im}(z) \leq 2\}$ , por exemplo, não é aberto nem fechado.

6. Dizemos que  $z \in \mathbb{C}$  é ponto de acumulação de  $X \subset \mathbb{C}$  se  $z \in \overline{X - \{z\}}$ , isto é:

$$[B(z; r) - \{z\}] \cap X \neq \emptyset, \text{ para todo } r > 0.$$

Já vimos que um ponto de acumulação de  $X$  pode pertencer a  $X$  ou não, e que quando um ponto não é de acumulação ele é um ponto isolado. Considere, por exemplo, o conjunto  $X = \{z \in \mathbb{C}; |z - 3 - 2i| > 3\} \cup \{z_0 = 3 + 2i\}$ . É notório que qualquer  $z \in \mathbb{C}$ , tal que  $|z - 3 - 2i| \geq 3$  é ponto de acumulação de  $X$ , pois qualquer bola aberta centrada em  $z$  tem interseção com  $X - \{z\}$ , mas o ponto  $z_0$  é um ponto isolado, pois a bola  $B(z_0; 1)$  intersecta  $X$  apenas no próprio  $z_0$ , isto é,  $B(z_0; 1) \cap X = \{z_0\}$ . Isso fica mais evidente na Figura 2.6 a seguir:

Figura 2.6 – Representação geométrica de  $X = \{z \in \mathbb{C}; |z - 3 - 2i| > 3\} \cup \{z_0 = 3 + 2i\}$ .



Fonte: Próprio autor.

Podemos ver que o ponto  $z_1$  é de acumulação, mesmo não pertencendo a  $X$ , pois qualquer bola aberta centrada nele intercepta o conjunto  $X$ . Já o ponto  $z_0$  é isolado, pois existe, por exemplo, a bola aberta centrada nele e de raio  $\rho = 1$ , cuja única interseção com  $X$  é o próprio  $z_0$ . Uma curiosidade interessante é que por mais que  $z_0$  seja isolado, ele é ponto aderente de  $X$ , pois a sequência constante  $x_0 = (z_0, z_0, \dots, z_0, \dots) \in X$  converge para  $z_0$ . Podemos dizer então que nem todo ponto aderente é de acumulação, apesar de possuírem definições muito semelhantes. Já o ponto  $z_1$ , além de ser ponto de acumulação, também é aderente, pois existem pontos em  $X$  que convergem para  $z_1$  (veja na Figura 2.6 que existem pontos próximos à  $z_1$ ). De um modo geral, qualquer que seja o ponto de acumulação  $z \in X$ , por definição, sempre vai existir uma sequência  $(x_k) \in X$  que converge para  $z$ . Logo, todo ponto de acumulação também é ponto aderente.

Por fim, quando todos os pontos de  $X \in \mathbb{C}$  são isolados, dizemos que  $X$  é um conjunto discreto. Qualquer subconjunto finito  $S \subset \mathbb{C}$  é um conjunto discreto, pois, tomando  $z \in S$  e  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r = \min\{d(z_j, z_k)\}$ , com  $z_j, z_k \in S$  e  $j \neq k$  ( $r$  é a menor distância possível entre dois pontos distintos de  $S$ ), existem  $\rho \leq r$  e  $B(z; \rho)$  de modo que  $B(z; \rho) \cap S = \{z\}$ . Em outras palavras, existe uma bola aberta com centro em  $z$  cujo raio é menor do que ou igual a menor

distância possível entre quaisquer pontos de  $S$ . Logo cada um dos elementos de  $S$  é um ponto isolado e, portanto,  $S$  é um conjunto discreto.

## 2.2 Funções Complexas

O estudo das funções é, sem dúvidas, um dos mais importantes e recorrentes não somente no universo da Matemática Pura, mas também nos ambientes onde a Matemática é utilizada como ferramenta. É através das funções que estabelecemos relações entre duas ou mais grandezas, o que possibilita, dentre outras coisas, garantir a previsibilidade de certos fenômenos. Dada essa importância, nosso objetivo inicial é lembrar e caracterizar as funções reais, isto é, aquelas que são construídas sobre o conjunto dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ), e então seguir para as funções complexas. Lima, em (LIMA, 2017), define que:

**Definição 2.1.** *Dados os conjuntos  $X, Y \subset \mathbb{R}$ , uma **função**  $f : X \rightarrow Y$  (lê-se “uma função de  $X$  em  $Y$ ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento  $x \in X$  um elemento  $y = f(x) \in Y$  (leia-se “ $y$  igual a  $f$  de  $x$ ”). O conjunto  $X$  chama-se **domínio** e  $Y$  é o **contra-domínio** da função  $f$ . Para cada  $x \in X$ , o elemento  $f(x) \in Y$  chama-se a **imagem** de  $x$  pela função  $f$ , ou o **valor** assumido pela função  $f$  no ponto  $x \in X$ . Escreve-se  $x \mapsto f(x)$  para indicar que  $f$  transforma (ou leva)  $x$  em  $f(x)$ .*

Uma função  $f$  de  $X$  em  $Y$  é, desta forma, uma correspondência ou regra que toma, para cada elemento em  $X$ , um e apenas um elemento em  $Y$ . É comum utilizar a notação  $D(f)$  para o domínio da função  $f$ , ou seja,  $D(f) = X$ . Além disso, podemos acrescentar que o conjunto  $Im(f) := \{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$  é o conjunto de todas as imagens  $f(x)$  de  $f$  que estão no contradomínio  $Y$ . Notem que já vimos uma notação bem parecida, por isso vale lembrar que quando escrevemos  $Im(z)$ , ou  $I(z)$ , estamos nos referindo à parte imaginária do complexo  $z$ , que é sempre um número real, isto é,  $Im(z) \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$ . Já a  $Im(f)$  (imagem da função  $f$ ) é um conjunto. Vamos considerar a seguir um exemplo clássico de função polinomial, cuja lei de formação é  $f(x) = x^2$  e cuja variável  $x$  é real. Sabemos que o domínio de  $f$  é  $D(f) = \mathbb{R}$ , pois não existem restrições para  $x$ , e que  $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , logo  $Im(f) = \{y \geq 0 \in \mathbb{R}\}$ .

No cálculo elementar em  $\mathbb{R}$  já estamos familiarizados com as funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, etc. Todas elas possuem variáveis reais, por isso são chamadas de funções reais. Nesta seção, no entanto, discorreremos sobre as funções cujas variáveis são números complexos. Naturalmente, pelo fato de os Reais serem um subconjunto



dos Complexos, praticamente tudo que veremos a seguir é simplesmente uma continuação ou generalização daquilo que já conhecemos em  $\mathbb{R}$ . Com efeito, para (ZILL; SHANAHAN, 2003), temos:

**Definição 2.2.** *Uma função complexa é uma função  $f$  cujo domínio e imagem são subconjuntos do conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos.*

Como se pode ver, a função complexa é uma generalização “ipsis litteris” da função real, mudando apenas o conjunto no qual as entradas (domínios) e saídas (imagens) são obtidas. Também podemos dizer que uma função complexa é chamada de **função de valor complexo para uma variável complexa**, mas, pela simplicidade de notação, vamos nos ater em dizer simplesmente “função complexa, ou função de variável complexa”. Usualmente, também utilizaremos  $f$  (bem como  $g$  e  $h$ ) para designar as funções complexas,  $z$  para a variável de entrada e  $w = f(z)$  para o valor assumido pela função  $f$  no ponto  $z$ . Dado  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , eis alguns exemplos de funções complexas:

1.  $f(z) = z$

2.  $g(z) = z^2 - (2 + i)z$

3.  $h(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$

4.  $w = I(z)$  (função que retorna a parte imaginária de  $z$ ).

Notem que a “cara” dessas funções é bem familiar, pois são definidas da mesma forma que já estamos acostumados, ressaltando, é claro, que agora são funções complexas. Os exemplos 1 e 2 dados anteriormente são mais simples, onde seus respectivos domínios são  $D(f) = D(g) = \mathbb{C}$ . Já o exemplo 3 possui uma restrição, pois a função  $h$  não está definida para  $z = \pm i$ , uma vez que o denominador  $z^2 + 1$  deve ser diferente de zero. Sendo assim,  $D(h) = \mathbb{C} - \{-i, i\}$ . Por último, no exemplo 4, podemos ver que o valor de  $w$  é um número real, pois  $Im(z) \in \mathbb{R}$ , mas isso não é um problema, visto que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , portanto  $w \in \mathbb{C}$ . Isso nos faz ver que, de agora em diante, qualquer função real é também complexa.

### 2.2.1 Partes Real e Imaginária de uma Função Complexa

Assim como um número complexo, uma função complexa também tem parte real e imaginária. Ao definirmos uma função  $f$  qualquer, muitas vezes a tomamos sobre o complexo

$z$ , não havendo distinção entre o que é parte real e o que é parte imaginária. Entretanto, sabemos que  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) e que  $f$  pode ser expressa em termos das variáveis reais  $x$  e  $y$ . Com efeito, dado  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , qualquer  $f(z)$  é da forma  $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ , isto é, uma função complexa pode ser definida em termos das duas funções reais  $u$  e  $v$ , sendo  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  as partes real e imaginária de  $f$ , respectivamente. Tomando como exemplo a função  $f(z) = z^2 - (2 + i)z$  e substituindo  $z = x + yi$ , obtemos:

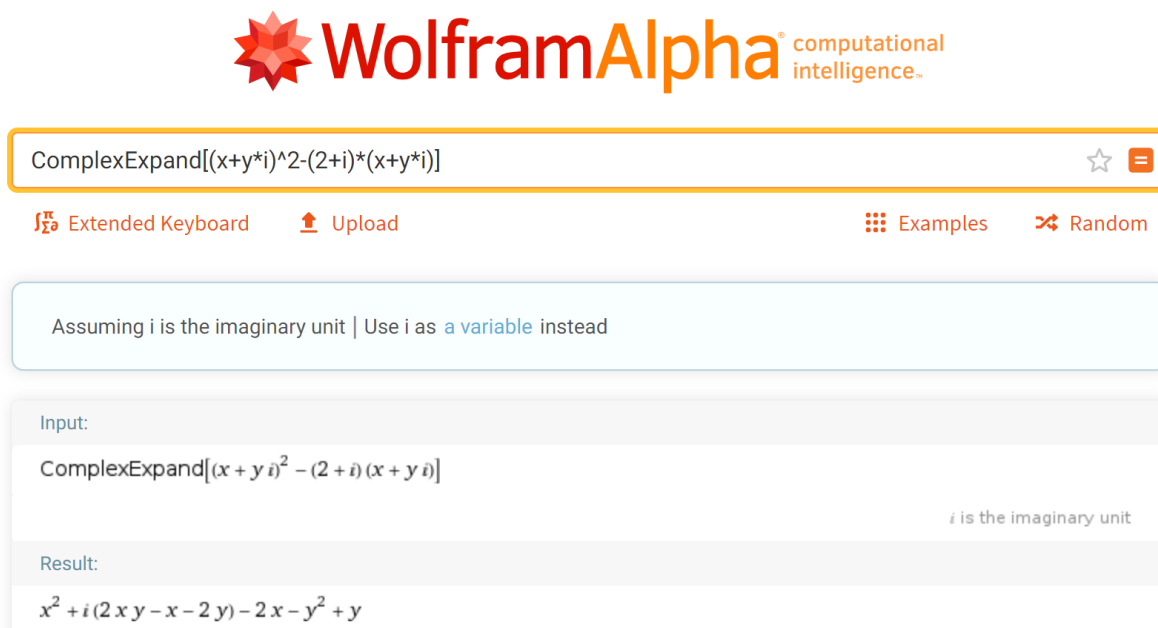
$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 - (2 + i)z \\ &= (x + yi)^2 - (2 + i)(x + yi) \\ &= x^2 + 2xyi + y^2i^2 - (2x + 2yi + xi + yi^2) \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 - 2x - 2yi - xi + y \\ &= x^2 - y^2 - 2x + y + (2xy - x - 2y)i \\ &= (x^2 - y^2 - 2x + y) + (2xy - x - 2y)i. \end{aligned}$$

Logo, como podemos ver, de  $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ , concluímos que  $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + y$  e  $v(x, y) = 2xy - x - 2y$ . Para esse caso em particular, o desenvolvimento de  $f(x + yi)$  não apresenta muita dificuldade, uma vez que resolver a soma e o produto entre números complexos na sua forma algébrica é relativamente simples. Todavia, isso nem sempre é uma tarefa rápida e fácil, por isso sugerimos o uso de alguma ferramenta computacional. Particularmente, indicamos o *Wolfram Alpha*<sup>1</sup>, pois é gratuito, de fácil manuseio e interpretação, e para expandir a função dada anteriormente em termos de  $x$  e  $y$ , podemos utilizar o comando `ComplexExpand[expression]`, escrevendo no lugar de `expression` a expressão  $(x+y*i)^2-(2+i)(x+y*i)$ , conforme Figura 2.7.

Note que na guia `Input` ele mostra o que foi digitado em linguagem matemática e o resultado apresentado na guia `Result` é  $x^2 + i(2xy - x - 2y) - 2x - y^2 + y$ , que é o mesmo resultado já obtido anteriormente. Além disso, caso o interesse seja apenas em uma das partes da função, podemos combinar o comando `ComplexExpand[expression]` com `Re[expression]` ou `Im[expression]`, que retornam as partes real e imaginária de `expression`, respectivamente, o que pode ser visto nas Figuras 2.8 e 2.9.

<sup>1</sup> Disponível gratuitamente no site <<https://www.wolframalpha.com/>>.

Figura 2.7 – Expandindo a função  $f(z) = z^2 - (2 + i)z$  em termos de  $x$  e  $y$ .



WolframAlpha<sup>®</sup> computational intelligence.

ComplexExpand[(x+y\*i)^2-(2+i)\*(x+y\*i)]

Extended Keyboard Upload Examples Random

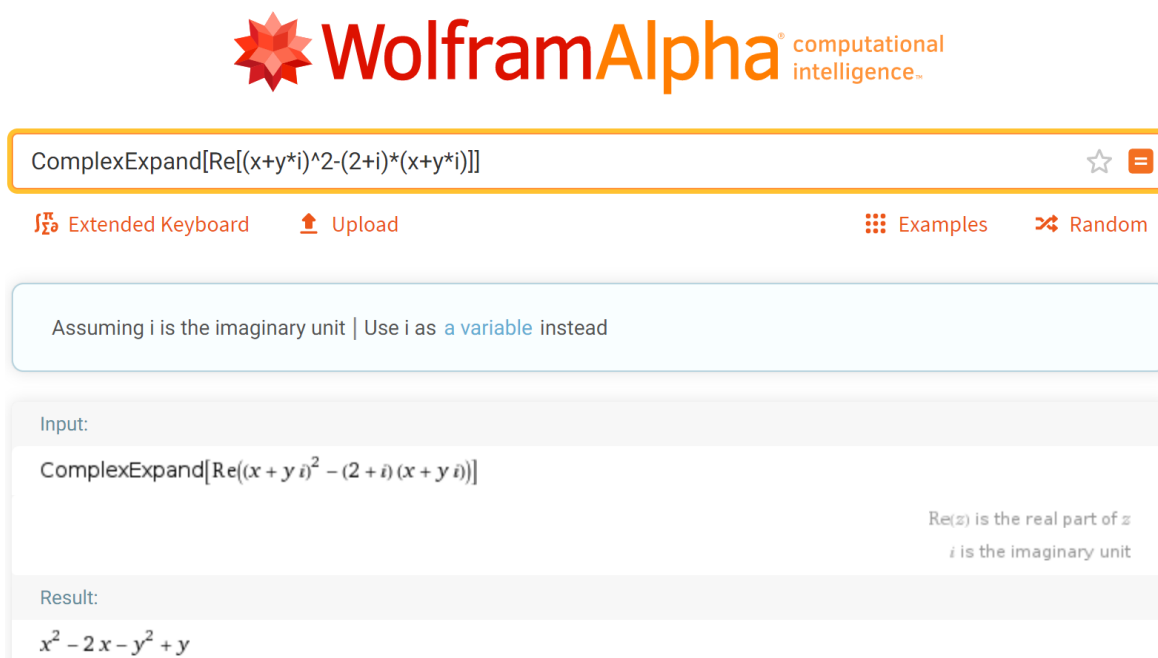
Assuming i is the imaginary unit | Use i as a variable instead

Input:  
ComplexExpand[(x + y i)<sup>2</sup> - (2 + i)(x + y i)]  
i is the imaginary unit

Result:  
 $x^2 + i(2xy - x - 2y) - 2x - y^2 + y$

Fonte: <[https://www.wolframalpha.com/input/?i=ComplexExpand%5B%28x%2By\\*i%29%5E2-%282%2Bi%29\\*%28x%2By\\*i%29%5D](https://www.wolframalpha.com/input/?i=ComplexExpand%5B%28x%2By*i%29%5E2-%282%2Bi%29*%28x%2By*i%29%5D)> Acesso em: 20/07/2020.

Figura 2.8 – Expandindo a parte real da função  $f(z) = z^2 - (2 + i)z$  em termos de  $x$  e  $y$ .



WolframAlpha<sup>®</sup> computational intelligence.

ComplexExpand[Re[(x+y\*i)^2-(2+i)\*(x+y\*i)]]

Extended Keyboard Upload Examples Random

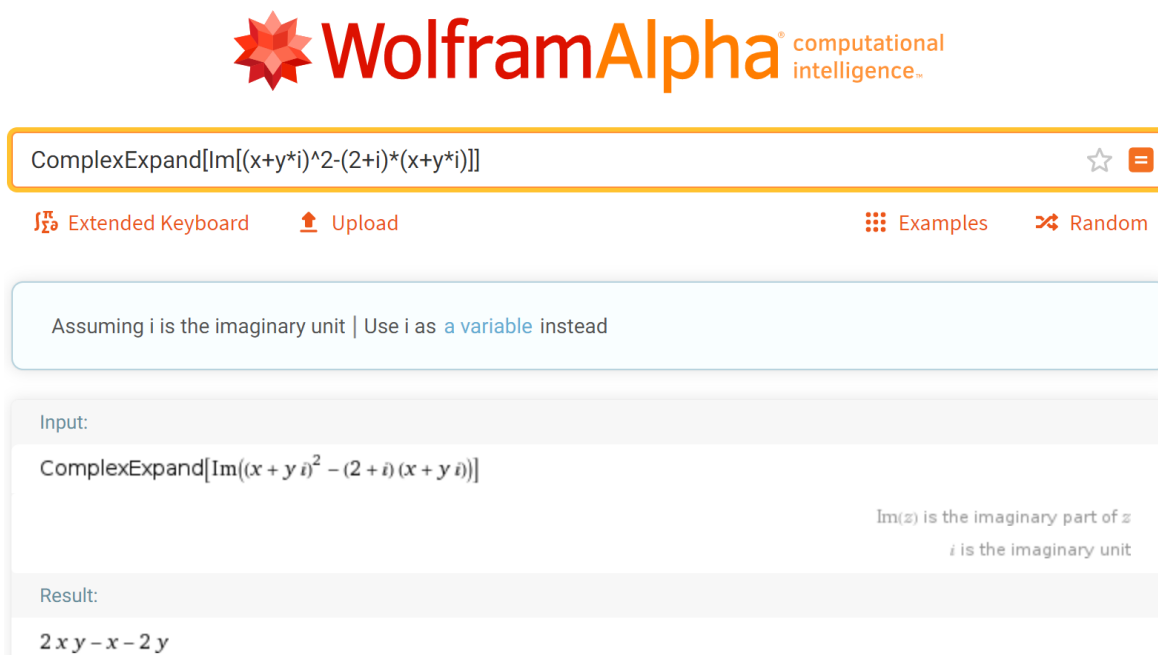
Assuming i is the imaginary unit | Use i as a variable instead

Input:  
ComplexExpand[Re[(x + y i)<sup>2</sup> - (2 + i)(x + y i)]]  
Re(z) is the real part of z  
i is the imaginary unit

Result:  
 $x^2 - 2x - y^2 + y$

Fonte: <[https://www.wolframalpha.com/input/?i=ComplexExpand%5BRe%5B%28x%2By\\*i%29%5E2-%282%2Bi%29\\*%28x%2By\\*i%29%5D%5D](https://www.wolframalpha.com/input/?i=ComplexExpand%5BRe%5B%28x%2By*i%29%5E2-%282%2Bi%29*%28x%2By*i%29%5D%5D)> Acesso em: 20/07/2020.

Figura 2.9 – Expandindo a parte imaginária da função  $f(z) = z^2 - (2 + i)z$  em termos de  $x$  e  $y$ .



**WolframAlpha** computational intelligence.

ComplexExpand[Im[(x+yi)^2-(2+i)\*(x+yi)]]

Extended Keyboard Upload Examples Random

Assuming  $i$  is the imaginary unit | Use  $i$  as a variable instead

Input:  
ComplexExpand[Im[(x + y i)<sup>2</sup> - (2 + i)(x + y i)]]

Result:  
2 x y - x - 2 y

Im(z) is the imaginary part of z  
i is the imaginary unit

Fonte: <[https://www.wolframalpha.com/input/?i=ComplexExpand%5BIm%5B%28x%2By\\*i%29%5E2-%282%2Bi%29\\*%28x%2By\\*i%29%5D%5D](https://www.wolframalpha.com/input/?i=ComplexExpand%5BIm%5B%28x%2By*i%29%5E2-%282%2Bi%29*%28x%2By*i%29%5D%5D)> Acesso em: 20/07/2020.

É importante salientar, ainda, que qualquer função complexa  $f$  pode ser obtida a partir das funções reais  $u$  e  $v$  dadas, isto é, caso seja conveniente arbitrar quem deve ser  $u$  e  $v$ , basta tomar  $w = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ . Isso também não nos impede de escrever a função  $f$  em termos de  $z$ . É só manipular as funções  $u$  e  $v$  de modo que a variável  $z = x + yi$  se torne evidente. Todavia, uma vez que  $x$  e  $y$  já são conhecidos, esse trabalho torna-se redundante. Assim como as funções reais, podemos construir uma pluralidade de funções complexas, algumas das quais veremos mais detalhadamente em breve.

## 2.2.2 Forma Polar de Funções Complexas

Vimos anteriormente que as partes real e imaginária de uma função complexa podem ser definidas tomando como base as coordenadas cartesianas, isto é, conhecendo  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , uma função complexa  $f$  é dada por  $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ . Entretanto, também podemos definir uma função complexa considerando que a variável  $z$  é dada em coordenadas polares. Conforme vimos na seção 1.6, um número complexo pode ser escrito em sua forma trigonométrica ou polar  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , com  $r = |z|$ , ou ainda, através da fórmula de Euler, na forma exponencial  $z = re^{i\theta}$ . Desta maneira, basta substituir  $z$  por  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  ou  $re^{i\theta}$  em  $f(z)$ , que assume a forma  $f(z) = u_p(r, \theta) + v_p(r, \theta)i$ , de modo que  $u_p(r, \theta)$  e  $v_p(r, \theta)$  continuam sendo as partes

real e imaginária de  $f$ , respectivamente, mas elas são distintas de  $u$  e  $v$ . Como exemplo, ao tomarmos a função  $f(z) = z^2$  e substituirmos  $z$ , aplicando a fórmula de De Moivre, obtemos:

$$f(z) = z^2 = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^2 = r^2 \cos(2\theta) + ir^2 \operatorname{sen}(2\theta).$$

Como se pode ver, temos que  $u_p(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta)$  e  $v_p(r, \theta) = r^2 \operatorname{sen}(2\theta)$  representam as partes real e imaginária de  $f(z) = z^2$ , respectivamente. Naturalmente, conhecendo  $r$  e  $\theta$ , o valor de  $f(z)$  pode ser obtido facilmente, mas se  $z$  for dado em termos de  $x$  e  $y$ , basta calcular  $r$  e  $\theta$  através das fórmulas vistas no capítulo 1. Notem que ao desenvolver  $f(z) = z^2$  em coordenadas cartesianas, obtemos  $f(z) = z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ , cujas partes real e imaginária são  $u(x, y) = x^2 - y^2$  e  $v(x, y) = 2xy$ , respectivamente, muito diferentes de  $u_p(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta)$  e  $v_p(r, \theta) = r^2 \operatorname{sen}(2\theta)$ . Como lembrete, não podemos esquecer que o valor de  $\theta = \arg(z)$  não é único.

### 2.2.3 Função Exponencial

Lançando mão do que vimos na seção 1.6, onde um número complexo  $z = x + yi$  pode ser escrito sob a forma trigonométrica  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , com  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , e que, através da fórmula de Euler, passamos a escrever  $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta}$ , de modo que  $z = re^{i\theta}$ , podemos definir uma função cuja lei de formação é  $f(z) = e^z$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \\ &= e^{x+yi} \\ &= e^x e^{yi} \text{ (pelas propriedades vistas na seção 1.6)} \\ &= e^x [\cos y + i \operatorname{sen} y] \text{ (aplicando a fórmula de Euler)} \\ &= e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

**Definição 2.3.** Dado  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , a função:

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y \tag{2.3}$$

é chamada de **função exponencial complexa**.

É comum ver em algumas bibliografias a notação  $f(z) = \exp(z)$  para denotar  $f(z) = e^z$ , pois facilita a representação em linguagem computacional. O *Mathematica*<sup>2</sup>, por exemplo, utiliza essa notação.

Da definição 2.3 acima, podemos ver que a parte real da função  $f$  é  $u(x, y) = e^x \cos(y)$  e a parte imaginária é  $v(x, y) = e^x \sin y$ . Para calcularmos o valor de  $f$  em um determinado ponto, por exemplo,  $z_0 = 2 - \pi i$ , basta substituirmos  $x = \operatorname{Re}(z_0)$  e  $y = \operatorname{Im}(z_0)$  em  $u$  e  $v$ , isto é,  $u(2, -\pi) = e^2 \cos(-\pi) = -e^2$  e  $v(2, -\pi) = e^2 \sin(-\pi) = 0$ , logo  $f(2 - \pi i) = -e^2 \approx -7,389$ .

Dando ênfase ao fato de que toda função real também é complexa, temos o seguinte resultado:

**Lema 2.1.** *Dado  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , ou seja,  $z$  é um número real, temos que  $f(z) = e^z \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.*

Tomando  $z = x + 0i \in \mathbb{C}$ , temos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \\ &= e^{x+0i} \\ &= e^x e^{0i} \\ &= e^x [\cos 0 + i \sin 0] \\ &= 1e^x + 0ie^x \\ &= e^x. \end{aligned}$$

■

Como se pode ver, a função  $f(z) = e^z$  é uma generalização da função real  $f(x) = e^x \in \mathbb{R}$ . Isso nos motiva a mostrar que as propriedades da função exponencial  $f(x) = e^x$  nos números reais também se estendem aos complexos, isto é, dados  $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$ , temos que:

1.  $e^0 = 1$ .

*Demonstração.*

Basta considerar que  $z = 0 \in \mathbb{R}$  e  $a^0 = 1, \forall a \neq 0 \in \mathbb{R}$ .

■

2.  $e^z e^w = e^{z+w}$ .

<sup>2</sup> É um dos mais poderosos *softwares* matemáticos da atualidade. Disponível no site: <<https://www.wolfram.com/mathematica>>.

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 e^z e^w &= e^{a+bi} e^{c+di} \\
 &= [e^a \cos b + ie^a \operatorname{sen} b] \cdot [e^c \cos d + ie^c \operatorname{sen} d] \\
 &= e^{a+c} [\cos b \cos d - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} d] + ie^{a+c} [\operatorname{sen} b \cos d + \cos b \operatorname{sen} d] \\
 &= e^{a+c} \cos(b+d) + ie^{a+c} \operatorname{sen}(b+d) \\
 &= e^{(a+c)+(b+d)i} \\
 &= e^{z+w}.
 \end{aligned}$$

3.  $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}.$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 \frac{e^z}{e^w} &= \frac{e^{a+bi}}{e^{c+di}} = \frac{e^a \cos b + ie^a \operatorname{sen} b}{e^c \cos d + ie^c \operatorname{sen} d} = \left(\frac{e^a}{e^c}\right) \left[\frac{\cos b + i \operatorname{sen} b}{\cos d + i \operatorname{sen} d}\right] \\
 &= e^{a-c} \left[\frac{\cos b + i \operatorname{sen} b}{\cos d + i \operatorname{sen} d}\right] \left[\frac{\cos d - i \operatorname{sen} d}{\cos d - i \operatorname{sen} d}\right] \\
 &= e^{a-c} \left[\frac{\cos b \cos d - i \cos b \operatorname{sen} d + i \operatorname{sen} b \cos d - i^2 \operatorname{sen} b \operatorname{sen} d}{\cos^2 d - i^2 \operatorname{sen}^2 d}\right] \\
 &= e^{a-c} \left[\frac{\cos b \cos d + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} d + i(\operatorname{sen} b \cos d - \operatorname{sen} d \cos b)}{1}\right] \\
 &= e^{a-c} [\cos(b-d) + i \operatorname{sen}(b-d)] \\
 &= e^{a-c} \cos(b-d) + ie^{a-c} \operatorname{sen}(b-d) \\
 &= e^{(a-c)+i(b-d)} \\
 &= e^{z-w}.
 \end{aligned}$$

4.  $(e^z)^n = e^{nz}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.*

Aplicando a propriedade 5 da seção 1.6, temos que:

$$(e^z)^n = (e^{a+bi})^n = (e^a e^{bi})^n = (e^a)^n (e^{bi})^n = e^{na} e^{inb} = e^{n(a+bi)} = e^{nz}.$$

Além das propriedades acima, também podemos analisar o que acontece com o conjugado, módulo e argumento da função exponencial complexa. Dados  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , temos que:

$$5. \overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

*Demonstração.*

$$\overline{e^z} = \overline{e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y} = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y = e^x \cos(-y) + ie^x \operatorname{sen}(-y) = e^{x-yi} = e^{\bar{z}}. \quad \blacksquare$$

$$6. |e^z| = e^x \text{ e } \arg(e^z) = y + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

*Demonstração.*

Tomando  $w = e^z \in \mathbb{C}$ , podemos escrevê-lo na forma polar  $w = |w|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , sendo  $\theta = \arg(w)$ . Por outro lado, pela definição da função exponencial complexa, temos que  $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ . Com isso, temos que:

$$w = e^z = |w|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Da igualdade acima, concluímos que  $|w| = |e^z| = e^x$  e  $\theta = \arg(w) = \arg(e^z) = y + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

Convém ressaltar que o argumento de um número complexo não é único, por isto  $\arg(e^z) = y + 2k\pi$ , para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ . Sabemos também que a função real  $f(x) = e^x$  é sempre positiva e não nula, indicando que a igualdade  $|e^z| = e^x$  endossa o fato de  $|e^z| > 0$  e  $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Um importante fato sobre as funções exponenciais complexas é que elas são **periódicas**. De maneira similar às funções reais, dizemos que uma função complexa é periódica de período  $p \in \mathbb{C}$  quando  $f(z+p) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}$ . No caso da função  $f(z) = e^z$ , é fácil intuir isto, uma vez que ela é definida usando as funções seno e cosseno, que são naturalmente periódicas. Seu menor período é dado por  $p = 2\pi i$ , pois:



$$\begin{aligned}
f(z + 2\pi i) &= e^{z+2\pi i} \\
&= e^z e^{2\pi i} \\
&= e^z [\cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi)] \\
&= e^z (1 + 0i) \\
&= e^z \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

Note que isso só foi possível aplicando a propriedade 2 mostrada anteriormente. Acreditamos que a periodicidade seja uma das diferenças mais significativas em relação à função exponencial real, que não é periódica. Outro fato interessante é que qualquer  $p = 2k\pi i$ , com  $k \in \mathbb{Z}^*$ , também é período da função  $f(z) = e^z$ , uma vez que é trivial para nós que  $\cos(2k\pi) = 1$  e  $\operatorname{sen}(2k\pi) = 0$ , qualquer que seja  $k \in \mathbb{Z}$ . Sendo assim, temos que  $f(z + 2k\pi i) = f(z)$ .

#### 2.2.4 Função Logarítmica

Uma vez que já definimos a função exponencial, é natural pensar que a logarítmica seja nosso próximo objeto de estudo, pois essas funções são inversas uma da outra em  $\mathbb{R}$ . De fato, dentro do universo dos números reais, temos que as funções  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln x$  são inversas, isto é,  $g(x) = f^{-1}(x)$ . Um atributo que favorece essa relação de inversividade é o fato de que tanto a função exponencial  $f(x) = e^x$  quanto a logarítmica  $g(x) = \ln x$  são injetivas, ou seja, não existem imagens iguais para elementos distintos do domínio. No entanto, quando o universo é  $\mathbb{C}$ , a situação é radicalmente diferente, uma vez que a função exponencial complexa  $f(w) = e^w$  é periódica e, evidentemente, possui a mesma imagem para infinitos elementos distintos do domínio, isto é, se fixarmos um  $z \in \mathbb{C}$  não nulo, existem infinitos  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $f(w) = z$ . Exemplificando, é fácil ver que qualquer  $w = \frac{(4k+1)\pi i}{2}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , é solução de  $e^w = i$ . Assim sendo, ainda não podemos afirmar, mesmo que intuitivamente, qualquer coisa em relação à inversividade das funções exponenciais e logarítmicas complexas. Primeiro devemos mostrar que a equação  $e^w = z$  possui infinitas soluções e, desta forma, obter uma expressão para o logaritmo complexo. Com isso em mãos, provaremos algumas propriedades e só então teremos condições de saber se existe uma função logarítmica complexa que é a inversa da exponencial.

Objetivando obter uma expressão para logaritmo complexo, vamos considerar que  $w = u + iv$  é uma solução da equação  $e^w = z$ , para algum  $z \in \mathbb{C}$  dado. Sendo assim, por conta da igualdade, temos que  $|e^w| = |z|$  e  $\arg(e^w) = \arg(z)$ . Por outro lado, lançando mão das propriedades vistas na subseção 2.2.3, sabemos que  $|e^w| = e^u = |z|$  e  $v = \arg(e^w) = \arg(z)$  e, de  $e^u = |z|$ , temos que  $u = \log_e |z|$ . Isso nos permite dizer que, dado  $z \neq 0 \in \mathbb{C}$ , se  $e^w = z$ , temos que:

$$w = u + iv = \log_e |z| + i \arg(z). \quad (2.4)$$

Já sabemos que o argumento de um número complexo não é único e, por isso, existem infinitos valores para  $w$  acima. Sendo assim, podemos dizer que  $w = \log_e |z| + i \arg(z)$  define uma função de múltiplos valores cuja variável  $z$  é complexa, isto é,  $G(z) = w = \log_e |z| + i \arg(z)$ . Notem que usamos a notação  $\log_e |z|$  para discriminar o logaritmo de  $|z|$  na base  $e$ , ou ainda, o logaritmo natural de  $|z|$ , pois trata-se de um número real, ou seja,  $\log_e |z| \in \mathbb{R}$ . Essa mudança de interpretação faz-se conveniente, uma vez que usaremos a notação  $\ln z$  para denotar o logaritmo do complexo  $z$ . Com isso em mente, podemos dizer que:

**Definição 2.4.** Dado  $z \in \mathbb{C}$ , a função complexa de múltiplos valores  $\ln z$  definida por:

$$\ln z = \log_e |z| + i \arg(z) \quad (2.5)$$

é chamada de **logaritmo complexo**.

Sempre que quisermos mencionar o logaritmo complexo, usaremos a notação  $\ln z$  vista na definição acima. Podemos optar por escrevê-lo utilizando a forma exponencial substituindo  $z = |z|e^{i\theta}$ , vejamos:

$$\ln z = \log_e |z| + i(\theta + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

Da definição 2.4, bem como através de sua forma alternativa (2.6), podemos obter todas as soluções possíveis para a equação  $e^w = z$ , qualquer que seja o  $z \neq 0 \in \mathbb{C}$ . Como exemplo, tomando  $z = i$ , temos que  $|i| = 1$  e  $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , e as soluções para  $e^w = i$  são dadas por  $w = \ln i = \log_e |i| + i \arg(i) = \log_e 1 + i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$ . Mas  $\log_e 1 = 0$ , então  $w = 0 + i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \frac{(4k+1)\pi i}{2}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Logo  $w \in \left\{ \dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$ .

Nosso próximo passo é demonstrar algumas propriedades dos logaritmos que, assim como na exponencial, também são uma generalização dos reais aos complexos, isto é, tomando  $z = |z|e^{i\theta}$ ,  $w = |w|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , temos que:

$$1. \ln(zw) = \ln z + \ln w.$$

*Demonstração.*

Pelas propriedades do módulo e forma trigonométrica vistas nas seções 1.5 e 1.6, sabemos que  $|zw| = |z||w|$  e que  $zw = |zw|e^{i\theta}e^{i\varphi} = |z||w|e^{i(\theta+\varphi)}$ , isto é, o argumento do produto  $zw$  é a soma dos argumentos de  $z$  e  $w$ . Sendo assim, pela definição 2.4, temos que  $\ln(zw) = \log_e |zw| + i \arg(zw) = \log_e (|z||w|) + i(\arg(z) + \arg(w)) = \log_e |z| + \log_e |w| + i(\arg(z) + \arg(w))$ , pois o produto  $|z||w|$  é um número real que, por conta disso, satisfaz as propriedades do logaritmo em  $\mathbb{R}$ . Desta forma, temos que  $\ln(zw) = \log_e |z| + \log_e |w| + i(\arg(z) + \arg(w)) = \log_e |z| + i \arg(z) + \log_e |w| + i \arg(w) = \ln z + \ln w$ . Logo  $\ln(zw) = \ln z + \ln w$ . ■

$$2. \ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln z - \ln w, \quad w \neq 0.$$

*Demonstração.*

De maneira análoga ao item anterior, temos que

$$\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \log_e \left|\frac{z}{w}\right| + i \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \log_e \frac{|z|}{|w|} + i(\arg(z) - \arg(w)) = \log_e |z| - \log_e |w| + i(\arg(z) - \arg(w)) = \log_e |z| + i \arg(z) - (\log_e |w| + i \arg(w)) = \ln z - \ln w. \quad \blacksquare$$

$$3. \ln z^n = n \ln z, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Demonstração.*

De  $z = |z|e^{i\theta}$ , segue que  $\theta = \arg(z)$ . Por outro lado, vimos na seção 1.6 que  $z^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$ , isto é,  $n\theta = \arg(z^n)$ . Sendo assim, de  $\theta = \arg(z)$  e  $n\theta = \arg(z^n)$ , podemos concluir que  $n \arg(z) = \arg(z^n)$ , ou seja, o argumento de  $z^n$  é igual a  $n$  vezes o argumento de  $z$ . Com isso em mente, temos então que  $\ln z^n = \log_e |z^n| + i \arg(z^n) = n \log_e |z| + i(n \arg(z)) = n(\log_e |z| + i \arg(z)) = n \ln z$ . ■

Como podemos ver, é fato que as propriedades acima seguem a mesma dinâmica que as dos logaritmos reais. Por conta disso, somos levados a pensar que, assim como na exponencial, a função de múltiplos valores  $G(z) = \ln z \in \mathbb{C}$  é uma generalização da função real  $g(x) = \ln x \in \mathbb{R}$ , mas isso não é verdade, uma vez que a logaritmo complexo possui infinitos valores para o mesmo  $z \in \mathbb{C}$ , por definição. Sendo assim, mesmo tomando um  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z = x + 0i$ , isto é,  $z$

é um número real, ainda assim  $\ln z \notin \mathbb{R}$ , pois  $\ln z = \log_e |x| + i2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Como exemplo, ao tomar  $z = 2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , temos que  $\ln 2 = 0,6931 + i2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). No entanto, é possível notar que para o caso  $k = 0$ , existe um único valor para  $\ln 2$ , que é justamente o resultado do logaritmo real  $\log_e 2 \approx 0,6931$ . Este fato nos mostra que por mais que a função logarítmica complexa  $g(z) = \ln z$  retorna inúmeras imagens para um único  $z$  real no domínio, uma delas também é real e ocorre quando consideramos apenas o argumento principal de  $z$ , que é o caso  $k = 0$  e  $\ln z = \log_e |z|$ . De um modo geral, ao usarmos apenas o argumento principal de  $z$ , denotado por  $\text{Arg}(z)$ , em  $\ln z = \log_e |z| + i \arg(z)$  encontraremos o **valor principal do logaritmo complexo** de  $z$ , que denotaremos por  $\text{Ln } z$ . Essa nova expressão sugere a seguinte definição:

**Definição 2.5.** Dado  $z \in \mathbb{C}$ , a função complexa  $\text{Ln } z$  definida por:

$$\text{Ln } z = \log_e |z| + i \text{Arg}(z) \quad (2.7)$$

é chamada de **valor principal do logaritmo complexo**.

Notem que a expressão  $g(z) = \text{Ln } z$  define uma função com valores um-para-um, isto é, dado  $z \in \mathbb{C}$  só existe um valor para  $\text{Ln } z$  associado, enquanto  $G(z) = \ln z$  define uma função de múltiplos valores, ou seja, dado  $z \in \mathbb{C}$ , existem infinitos resultados para  $\ln z$ . Outra importante consideração é que as propriedades vistas anteriormente não necessariamente se aplicam ao valor principal do logaritmo complexo. Por exemplo, não é verdade que  $\text{Ln}(zw) = \text{Ln } z + \text{Ln } w, \forall z, w \in \mathbb{C}$ , pois, dados  $z = -2i$  e  $w = -3i$ , temos que

$$\text{Ln}(zw) = \text{Ln} [(-2i)(-3i)] = \text{Ln}(-6) = \log_e(6) + i\pi = \log_e(2) + \log_e(3) + i\pi,$$

enquanto que

$$\text{Ln } z + \text{Ln } w = \text{Ln}(-2i) + \text{Ln}(-3i) = \log_e(2) - i\frac{\pi}{2} + \log_e(3) - i\frac{\pi}{2} = \log_e(2) + \log_e(3) - i\pi,$$

logo,  $\text{Ln}(zw) \neq \text{Ln } z + \text{Ln } w$ .

Da definição 2.5, também podemos escrever o valor principal do logaritmo complexo sob a forma:

$$\text{Ln } z = \log_e r + i\theta, \text{ com } r = |z| \text{ e } -\pi < \theta \leq \pi. \quad (2.8)$$

Como exemplo, para  $z = 1 + i$ , temos que  $|z| = \sqrt{2}$  e  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ , então  $\text{Ln}(1 + i) = \log_e \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \log_e 2 + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \left( \log_e 2 + i\frac{\pi}{2} \right) \approx 0,3466 + 0,7854i$ . É evidente que este resultado também poderia ser obtido utilizando  $k = 0$  na definição 2.4.

Através da definição 2.5 já é possível vislumbrar que a função  $\text{Ln } z$  pode ser a inversa da exponencial  $e^z$ , pois, dado  $z \in \mathbb{C}$ , temos que  $\text{Ln } z$  é único, isto é,  $\text{Ln } z$  é apenas um dos valores de  $\ln z$ . Com efeito, dado  $z = |z|(\cos \theta + i \text{sen } \theta)$ , com  $\theta = \text{Arg}(z)$ , a partir da definição 2.3, temos que  $e^{\text{Ln } z} = z$ , para todo  $z \neq 0$ , vejamos:

$$\begin{aligned} e^{\text{Ln } z} &= e^{\log_e |z| + i \text{Arg}(z)} \text{ (pela definição de } \text{Ln } z) \\ &= e^{\log_e |z|} (\cos \text{Arg}(z) + i \text{sen } \text{Arg}(z)) \\ &= |z|(\cos \theta + i \text{sen } \theta) \\ &= z. \end{aligned}$$

Como vimos acima, ao mostrar que  $e^{\text{Ln } z} = z$ , para todo  $z \neq 0$ , somos induzidos à acreditar que as funções  $e^z$  e  $\text{Ln } z$  são inversas uma da outra e está acabado. No entanto, esta afirmação não está totalmente correta, uma vez que a recíproca  $\text{Ln}(e^z) = z$  não é verdadeira para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Vejamos o seguinte exemplo para  $z = 1 + \frac{3\pi}{2}i$ :

$$e^{\text{Ln}(1 + \frac{3\pi}{2}i)} = 1 + \frac{3\pi}{2}i, \text{ pois } e^{\text{Ln } z} = z, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por outro lado,

$$\text{Ln}\left(e^{1 + \frac{3\pi}{2}i}\right) = \text{Ln}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i \neq 1 + \frac{3\pi}{2}i.$$

Isso ocorre porque a função exponencial complexa não é do tipo um-para-um em seu domínio, ou melhor,  $f(z) = e^z$  possui elementos distintos do domínio que são levados a uma única imagem. Desta forma, precisamos primeiro restringir a função exponencial de modo que não existam valores ambíguos em seu domínio, ou seja, dados  $z_1, z_2 \in D(f)$ , se  $z_1 \neq z_2$ , então  $f(z_1)$  deve obrigatoriamente ser diferente de  $f(z_2)$ . É fácil ver que uma das possibilidades para esta restrição é a região  $R_f = \{z = x + yi \in \mathbb{C}; -\infty < x < +\infty, -\pi < y \leq \pi\}$ , pois a função exponencial complexa  $f(z) = e^z$  é  $2\pi i$  periódica na parte imaginária, cujo argumento principal de  $f$  pertence ao intervalo  $] -\pi, \pi]$ . Esse conjunto  $R_f$  é chamado de **região fundamental** e qualquer  $z \in R_f$  tem imagens  $w = e^z$  distintas.

**Definição 2.6.** Dada a função exponencial complexa  $f(z) = e^z$ , se seu domínio for a região fundamental  $R_f = \{z = x + yi \in \mathbb{C}; -\infty < x < +\infty, -\pi < y \leq \pi\}$ , então a função inversa de  $f$  é o valor principal do logaritmo complexo  $\text{Ln } z$ , isto é,  $f^{-1}(z) = \text{Ln } z$ .

Com efeito, dado  $z = x + yi \in R_f$ , temos que  $-\infty < x < +\infty, -\pi < y \leq \pi$  e  $y = \text{Arg}(e^z)$ , logo:

$$\begin{aligned} \text{Ln}(e^z) &= \log_e |e^z| + i \text{Arg}(e^z) \text{ (pela definição de } \text{Ln } z) \\ &= \log_e(e^x) + iy \text{ (pois } |e^z| = e^x) \\ &= x + yi \\ &= z. \end{aligned}$$

Ao restringir o domínio da função exponencial complexa à região fundamental, podemos dizer, enfim, que  $f(z) = e^z$  e  $g(z) = \text{Ln } z$  são inversas.

### 3 FUNÇÕES COMPLEXAS ESPECIAIS E MAPEAMENTOS

Um dos recursos mais utilizados no estudo das funções reais é o gráfico. Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sabemos que seu gráfico é uma curva no plano Cartesiano, cuja variável independente é representada pelo eixo horizontal, comumente chamado de *eixo x*, e a variável dependente é o eixo vertical, ou *eixo y*. A interpretação visual é um instrumento privilegiado de análise, pois através do gráfico podemos investigar relações e propriedades de forma simples e prática. Por outro lado, como é de se imaginar, não existe representação gráfica para funções complexas, uma vez que seu gráfico estaria no espaço quadridimensional, o que é impossível de ser visualizado. Porém, como o domínio e o contradomínio de uma função complexa são, cada um, bidimensionais, podemos trabalhar com o conceito de mapeamento gráfico de funções complexas, ou simplesmente mapeamento complexo, através do qual conseguiremos trabalhar de forma mais concreta com as Transformações Lineares Fracionárias e o Teorema do Círculo Preservado, objetivo principal deste capítulo.

#### 3.1 Mapeamentos Complexos

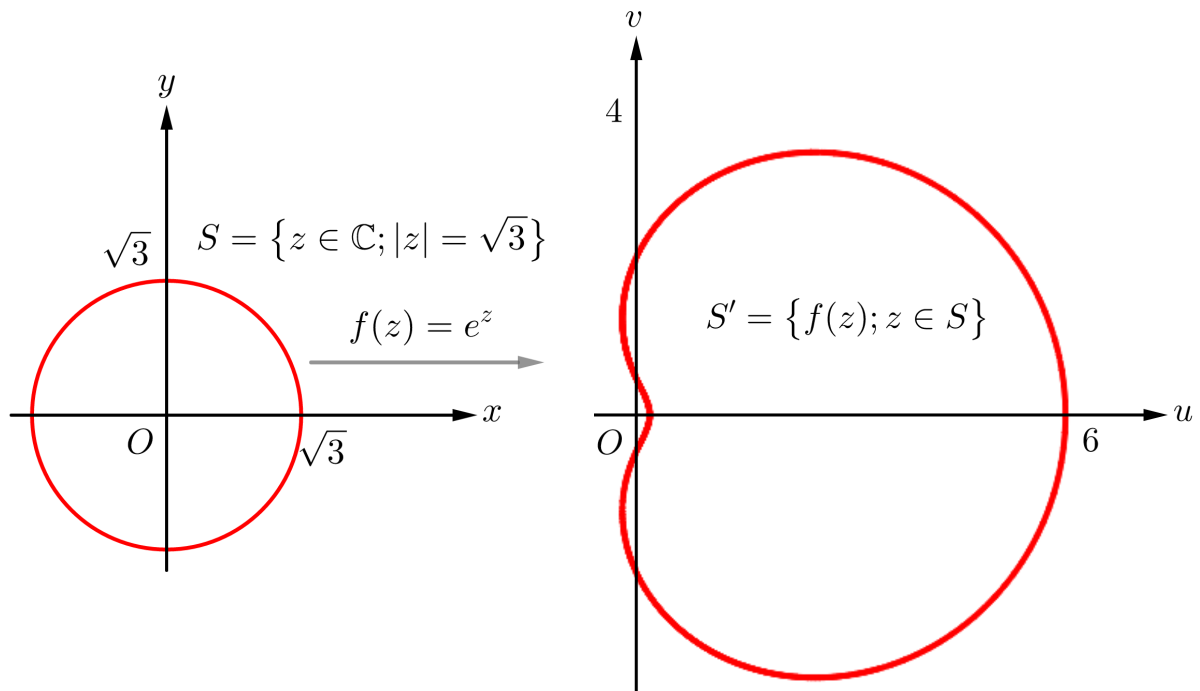
Apresentado pelo matemático Bernhard Riemann<sup>1</sup>, o mapeamento complexo visa criar uma representação geométrica para uma função complexa através de uma correspondência entre dois planos complexos idênticos, de modo que a variável independente  $z$  seja representada em um desses planos e a variável dependente  $w = f(z)$  no outro. Em outras palavras, dada uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , o mapeamento complexo cria uma correspondência entre os pontos do domínio, que chamaremos de plano- $z$ , e os pontos do contradomínio, que chamaremos de plano- $w$ . Sendo assim, a representação geométrica de um mapeamento complexo consiste em duas figuras: na primeira, teremos um subconjunto  $S$  de pontos no plano- $z$ , também chamado de pré-imagem, e na segunda, um conjunto  $S'$  das imagens  $w = f(z)$ , tal que  $z \in S$ , no plano- $w$ . Se o ponto  $z_0$  do plano- $z$  corresponde ao ponto  $w_0$  do plano- $w$ , isto é,  $f(z_0) = w_0$ , então podemos dizer que a função  $f$  mapeou  $z_0$  em  $w_0$ , ou que  $z_0$  foi mapeado em  $w_0$  através de  $f$ . Este conceito é uma forma alternativa, mas eficiente, de representar uma função complexa geometricamente. Vejamos o exemplo a seguir para  $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = \sqrt{3}\}$  e  $f(z) = e^z$ .

<sup>1</sup> <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann/>>

Figura 3.1 – Mapeamento complexo para  $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = \sqrt{3}\}$  e  $f(z) = e^z$ .

(a) O conjunto  $S$  no plano- $z$ .

(b) A imagem de  $S$  no plano- $w$ .



Fonte: Próprio autor.

Vimos na subseção 2.2.3 que a função exponencial  $f(z) = e^z$  também pode ser escrita sob a forma  $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ , de modo que  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = e^x \sin y$  são suas partes real e imaginária, respectivamente. Desta forma, como o nosso intuito é mapear os pontos de  $S$  do plano- $z$  no plano- $w$ , precisamos substituir os valores de  $z = x + yi \in S$  em  $f(z) = u + iv$ , obtendo assim os pontos da curva  $S'$ , cujas coordenadas são  $(u, v)$ , e o resultado esperado é a figura 3.1, onde estão representados todos os pontos do conjunto  $S$  (figura 3.1a) e sua respectiva imagem  $S'$  (figura 3.1b) mediante a função  $f$ . A construção no *GeoGebra* que gerou a figura 3.1 está disponível no link <<https://www.geogebra.org/m/epvcbgqc>>.

### 3.2 Mapeamentos Lineares

O termo “linear” está diretamente ligado a expressões algébricas reais cujo maior expoente é 1, como por exemplo, a equação  $ax + b = c$ , com  $a, b$ , e  $c$  constantes reais, é dita linear, pois o termo de maior grau é  $x$ , cujo expoente é 1. Com o propósito de manter os mesmos termos e notações da análise real, vamos definir a função  $f(z) = az + b$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes complexas, como sendo uma **função complexa linear**. Apesar de  $a$  poder ser qualquer número



complexo, evitaremos a opção  $a = 0$ , uma vez que teríamos como consequência disso a função  $f(z) = b$ , que é constante.

Sabemos que funções reais do tipo  $f(x) = ax + b$  são bem simples de se trabalhar graficamente e, felizmente, isso também ocorre com a função complexa linear no que se refere à sua interpretação gráfica, isto é, ao seu **mapeamento linear**. Nesta seção estudaremos então os três casos especiais de mapeamentos lineares, são eles: Translações, Ampliações e Rotações. Depois disto, veremos que um mapeamento linear é a composição desses três casos e que isto será usado no estudo das Transformações Lineares Fracionárias.

### 3.2.1 Translações

Uma função complexa linear do tipo

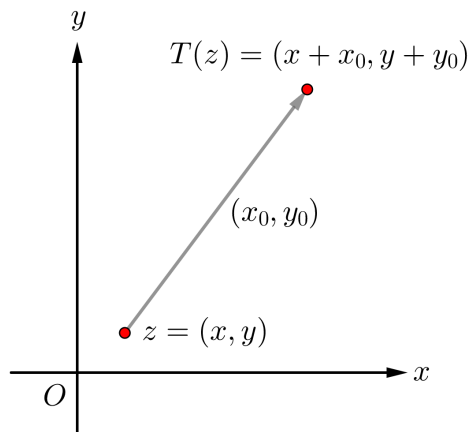
$$T(z) = z + b, \quad b \neq 0 \quad (3.1)$$

é chamada de **translação**. Se tomarmos  $z = x + yi$  e  $b = x_0 + y_0i$ , então temos que:

$$T(z) = z + b = (x + yi) + (x_0 + y_0i) = x + x_0 + (y + y_0)i. \quad (3.2)$$

Podemos ver que a função  $T$  leva o ponto  $z = (x, y)$  ao ponto  $(x + x_0, y + y_0)$ , isto é, a imagem de  $z$  através de  $T$  é a translação do ponto  $(x, y)$  para o ponto  $(x + x_0, y + y_0)$ . De maneira conveniente, mapearemos o ponto  $z$  através de  $T$  em um único plano complexo para evidenciar a translação:

Figura 3.2 – Translação  $T$  no ponto  $z$ .



Fonte: Próprio autor.

Dá para notar que esse processo de translação é análogo ao praticado nos reais e, neste caso, é mais vantajoso representar o mapeamento  $T$  em um único plano complexo, pois facilita ainda mais a interpretação. Note que o vetor de origem em  $z$  e extremidade  $T(z)$  é justamente o valor de  $b = x_0 + y_0i = (x_0, y_0)$ . Por conta disso, também podemos chamar o mapeamento linear  $T(z) = z + b$  de translação de  $b$ . Vejamos a seguir um exemplo mais completo de translação:

**Exemplo 3.1. Imagem de um quadrado sob uma translação**

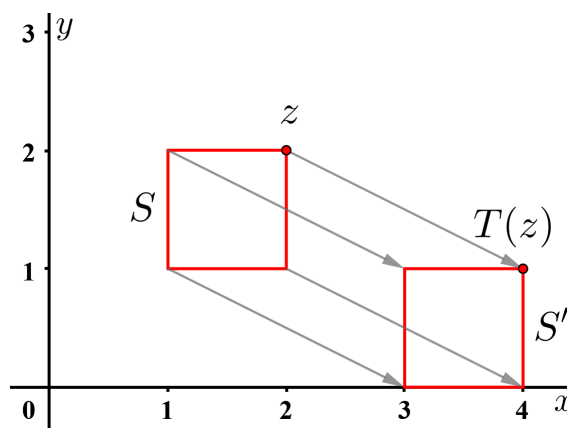
Encontre a imagem  $S'$  do quadrado  $S$  de vértices  $1 + i, 2 + i, 2 + 2i$ , e  $1 + 2i$  através do mapeamento linear  $T(z) = z + 2 - i$ .

Para a solução, primeiramente devemos notar que trata-se de uma translação, cujo valor de  $b = 2 - i = (2, -1)$ . Como vimos, ele é o vetor responsável pela translação. Além disso, antes de partirmos para o mapeamento no gráfico, convém calcular algebricamente o valor de  $T(z)$  para os vértices dados no enunciado:

$$\begin{aligned} T(1 + i) &= (1 + i) + (2 - i) = 3 & T(2 + i) &= (2 + i) + (2 - i) = 4 \\ T(2 + 2i) &= (2 + 2i) + (2 - i) = 4 + i & T(1 + 2i) &= (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i. \end{aligned}$$

Portanto as imagens dos vértices de  $S$  são os pontos  $(3, 0), (4, 0), (4, 1)$  e  $(3, 1)$ , que também representam vértices de um quadrado. Chegou a hora de construir o gráfico. Faremos o mapeamento em um único plano complexo (plano- $z$ ) para facilitar a visualização da translação.

Figura 3.3 – Imagem  $S'$  do quadrado  $S$  sob translação.



Fonte: Próprio autor.

A figura 3.3 acima mostra, portanto, o mapeamento linear do quadrado  $S$  dado pela translação  $T(z) = z + 2 - i$ . É evidente que a região  $S$  não é formada somente pelos vértices dados, mas qualquer que seja o ponto de  $S$ , sua imagem através de  $T$  está no quadrado  $S'$ .

Por fim, é notório que um mapeamento linear de translação não modifica o tamanho, forma ou inclinação da região no plano complexo, isto é, tanto  $S$  quanto sua imagem  $S'$  são idênticas, mudando somente sua posição de acordo com o valor de  $b$ . Um quadrado, círculo ou triângulo sob uma translação continuará sendo, portanto, um quadrado, círculo ou triângulo, respectivamente.

### 3.2.2 Ampliações

Uma função complexa linear do tipo

$$M(z) = az, \quad a > 0, \text{ com } a \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

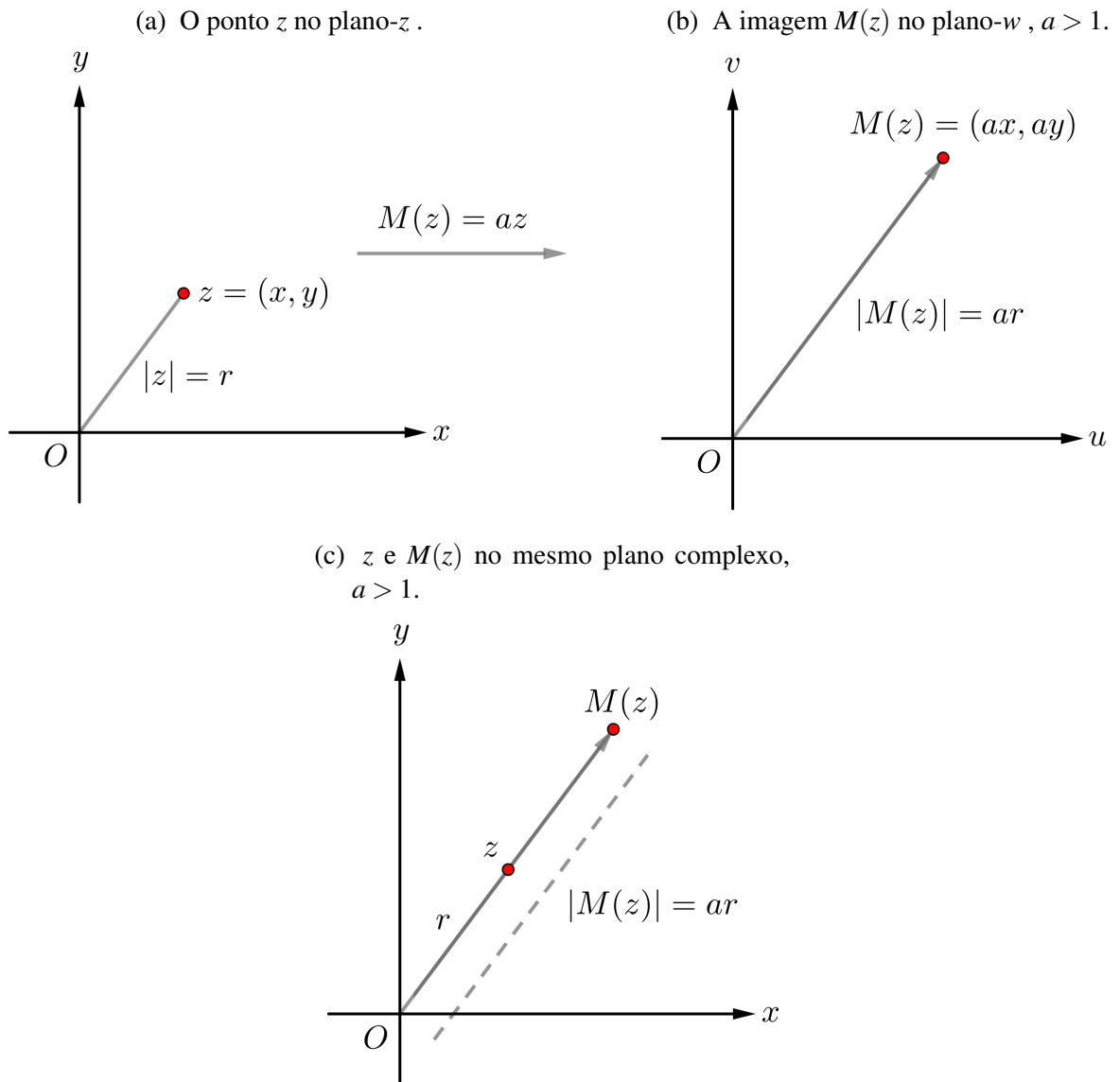
é chamada de **ampliação (ou contração)**. Apesar de começar com "A", usaremos a notação  $M$  para representar o mapeamento linear de ampliação, pois é mais comum e evita ambiguidades. Também é importante ressaltar que a constante  $a$  é sempre real, mesmo que isso não esteja explicitado no texto, uma vez que escrever  $a > 0$  já deixa subentendido que se trata de uma constante real. Ao tomar  $z = x + yi$ , temos então que

$$M(z) = az = a(x + yi) = ax + ayi. \quad (3.4)$$

Isso significa que a imagem do ponto  $z = (x, y)$  através da ampliação  $M$  é o ponto  $M(z) = (ax, ay)$ , ou seja,  $z$  sofre uma ampliação (ou contração) cujo fator de aumento (ou diminuição) é  $a$ . Quando  $0 < a < 1$ , também podemos dizer que  $M(z) = az$  é uma **contração**, pois ela reduz o "tamanho" de  $z$ . Se usarmos a forma exponencial  $z = re^{i\theta}$  de  $z$ , com  $r = |z|$ , podemos escrever a expressão (3.3) da seguinte forma:

$$M(z) = az = a \left( re^{i\theta} \right) = (ar) e^{i\theta}. \quad (3.5)$$

Note que os coeficientes  $a$  e  $r$  são números reais, portanto o produto  $(ar)$  também é. Mesmo escrito sob a forma exponencial é fácil ver que o mapeamento linear  $M$  aplica uma ampliação no ponto  $z = (x, y)$  cujo fator é  $a$ , pois  $|z| = r$ , enquanto  $|M(z)| = ar$ . Essas relações ficam evidenciadas nos gráficos a seguir:

Figura 3.4 – Ampliação  $M$  no ponto  $z$ .

Fonte: Próprio autor.

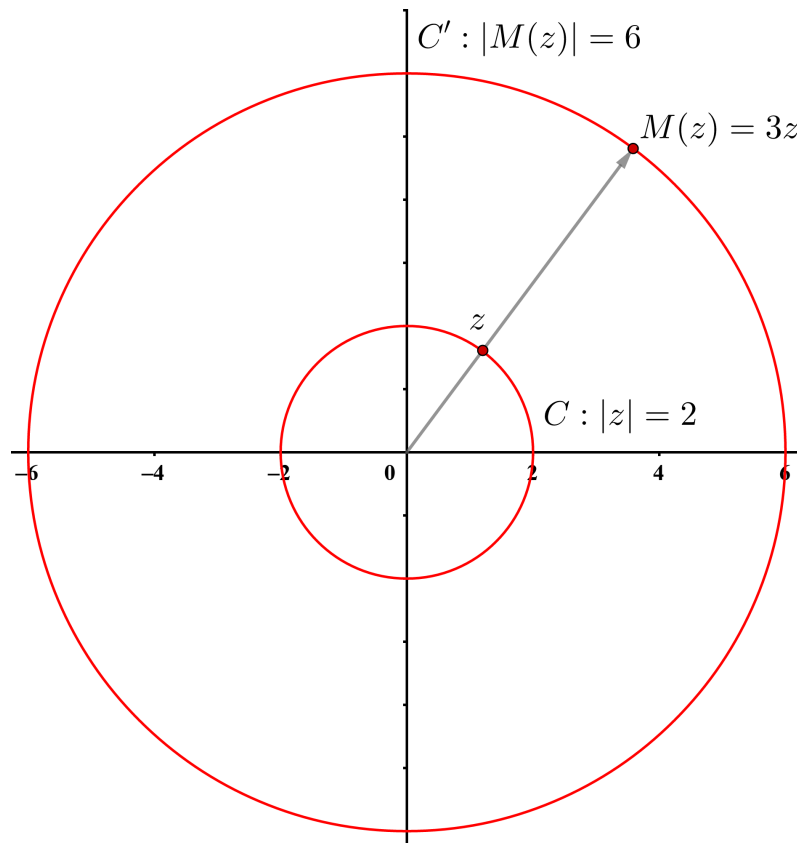
As figuras 3.4a e 3.4b mostram o mapeamento linear  $M$  no plano- $z$  e plano- $w$  separadamente, enquanto a 3.4c mostra tudo em um único plano complexo. Quisemos mostrar as duas situações, pois talvez não ficasse evidente em um único plano que a ampliação  $M$  também parte da origem, assim como o ponto  $z$ . Além disso, por mais que  $|z| \neq |M(z)|$ , temos que  $\theta = \arg(z) = \arg(M(z))$ , isto é, a ampliação  $M$  conserva o mesmo argumento. Por fim, é possível notar que a situação vista na figura 3.4 descreve uma ampliação cujo fator  $a > 1$ . Caso contrário, veríamos  $M(z)$  entre a origem e o ponto  $z = (x, y)$ . Vejamos a seguir um exemplo mais completo de ampliação:

**Exemplo 3.2. Imagem de uma circunferência sob uma ampliação**

Encontre a imagem da circunferência  $C$  dada por  $|z| = 2$  sob o mapeamento linear  $M(z) = 3z$ .

Sabemos que se trata de uma ampliação cujo fator é  $a = 3$ . Sendo assim, cada um dos pontos sobre a circunferência  $C : |z| = 2$  terão suas coordenadas ampliadas pelo fator 3, isto é,  $|M(z)| = 3 \cdot 2 = 6$ , mantendo o mesmo argumento  $\theta$ , conforme podemos conferir na figura a seguir:

Figura 3.5 – Imagem  $C'$  da circunferência  $C$  sob ampliação.



Fonte: Próprio autor.

É notório para este caso que foi mais vantajoso representar o mapeamento  $M$  no mesmo plano complexo, no entanto é importante ressaltar que  $M$  parte da origem assim como  $z$ . Isso precisa ficar claro, uma vez que se a região  $C$  fosse, por exemplo, o disco  $C : |z| \leq 2$ , a ampliação  $M(z) = 3z$  seria o disco  $C' : |M(z)| \leq 6$ , não a coroa circular compreendida entre  $C$  e  $C'$ . Para finalizar, podemos dizer que um mapeamento linear por ampliação retorna a mesma figura, mas com dimensões maiores ou menores, dependendo do fator de ampliação  $a$ , gerando duas figuras semelhantes entre si.

### 3.2.3 Rotações

Uma função complexa linear do tipo

$$R(z) = az, \quad \text{com } |a| = 1 \text{ e } a \in \mathbb{C} \quad (3.6)$$

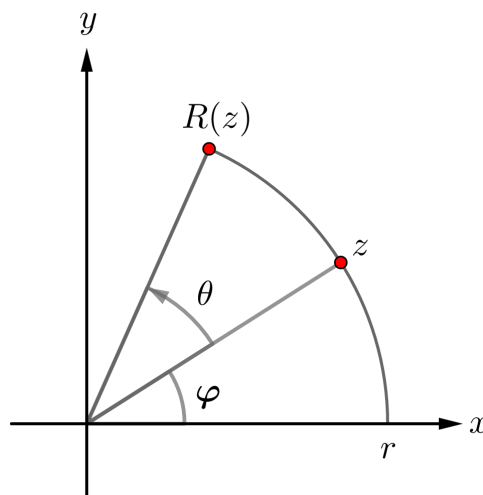
é chamada de **rotação**. Repare que, neste caso,  $a$  não é uma constante real como na ampliação, ela é um número complexo cujo módulo deve ser necessariamente unitário. Por mais que isso pareça muito restritivo, qualquer que seja o complexo  $\alpha \neq 0$ , temos que  $R(z) = \frac{\alpha}{|\alpha|}z$  é uma rotação.

Considerando a rotação  $R$  dada em (3.6) tal que  $|a| = 1$  e supondo que  $\theta = \text{Arg}(a) > 0$ , ou seja,  $0 < \theta \leq \pi$ , podemos usar a forma exponencial de  $a = e^{i\theta}$  e  $z = re^{i\varphi}$ , com  $r = |z|$ , e, mediante a Propriedade (2) da seção 1.6, obter a seguinte expressão para  $R$ :

$$R(z) = az = e^{i\theta}re^{i\varphi} = re^{i(\theta+\varphi)}. \quad (3.7)$$

Da expressão (3.7) acima, podemos ver que  $|R(z)| = |z| = r$  e  $\arg(R(z)) = (\theta + \varphi)$ , portanto o mapeamento de  $z$  através de  $R$  tem o mesmo módulo, mas um argumento  $\theta$  radianos a mais que  $z$ . Isto fica evidenciado na figura a seguir:

Figura 3.6 – Rotação  $R$  no ponto  $z$ .



Fonte: Próprio autor.

Mais uma vez a representação em um único plano mostrou-se mais vantajosa, pois ela deixa claro a questão do módulo e argumento. Para a figura 3.6 usamos um ângulo entre 0 e  $\pi$ , o que implicou numa rotação no sentido anti-horário de  $\theta$  radianos a partir da reta suporte que

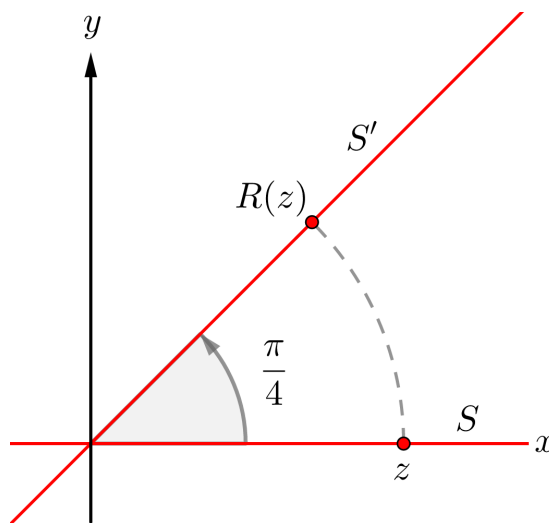
passa na origem e em  $z$ . Porém, caso o ângulo  $\theta$  fosse negativo, é natural para nós que a rotação seria no sentido horário. Por conta disso, chamaremos  $\theta = \text{Arg}(a)$  de ângulo de rotação de  $R$ . A seguir veremos mais um exemplo de rotação.

**Exemplo 3.3. Imagem de uma reta sob uma rotação**

Encontre a imagem do eixo real  $y = 0$  através do mapeamento linear  $R(z) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)z$ .

O primeiro passo é ver que trata-se de uma rotação e que  $\left|\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right| = 1$ . Ao calcular o argumento principal do complexo  $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ , podemos dizer que trata-se de uma rotação de  $\theta = \frac{\pi}{4}$  no sentido anti-horário de cada um dos pontos sobre a reta  $y = 0$ . Agora, considerando como pré-imagem o conjunto  $S: \{y = 0\}$ , temos que qualquer  $z \in S$  é um número real, isto é,  $z = x$ , cujo argumento principal  $\varphi = 0$  e cujo módulo  $|z| = |x|$ . Sendo assim, o mapeamento linear  $R$  é da forma  $R(z) = |x|e^{\frac{\pi}{4}i}$ , que pode ser visto como a equação de uma reta com inclinação  $\theta = \frac{\pi}{4}$  passando pela origem, como podemos ver na imagem a seguir:

Figura 3.7 – Imagem  $S'$  da reta  $y = 0$  sob rotação.



Fonte: Próprio autor.

Fica evidente no mapeamento da figura ?? acima que a rotação  $R(z)$  mantém o mesmo módulo de  $z$  e rotaciona  $\theta = \frac{\pi}{4}$  no sentido anti-horário, descrevendo a reta  $v = u$ , mas como  $S$  e  $S'$  foram representadas no mesmo plano, não é necessário utilizar as coordenadas  $u$  e  $v$ , e  $S'$  pode ser vista como a reta  $y = x$ . Note que, assim como a translação, uma rotação não altera o tamanho ou forma da região a ser mapeada, isto é, tanto  $S$  quanto sua imagem  $S'$  são idênticas, mudando somente sua inclinação de acordo com o valor de  $\theta$ . Uma reta, um quadrado, ou triângulo sob uma rotação continuará sendo, portanto, uma reta, quadrado ou triângulo, respectivamente.

Ao finalizar este terceiro caso especial, que chamamos de rotação, estamos aptos a avançar para o caso geral dos **mapeamentos lineares**. Uma função complexa linear do tipo  $f(z) = az + b$  nada mais é do que um mapeamento composto por uma rotação, ampliação e translação. No entanto, as noções de composição de funções complexas ainda é algo inédito para nós. Pois bem, falaremos sobre isto agora, pois trata-se de uma operação simples e absolutamente análoga à praticada no ambiente real. Com efeito, dadas duas funções complexas  $f$  e  $g$ , a composição de  $f$  e  $g$  é a função  $f \circ g$  definida por  $f \circ g(z) = f(g(z))$ , e o valor de  $w = f \circ g(z)$  é determinado através da aplicação de  $g$  em  $z$  e, na sequência, de  $f$  em  $g(z)$ . Note que esse é exatamente o mesmo processo utilizado nas funções reais. Além disso, o mapeamento de uma região  $S$  através da função composta  $f \circ g$  é determinado da seguinte forma: primeiro encontramos a imagem  $S'$  de  $S$  através de  $g$  e em seguida a imagem  $S''$  de  $S'$  através de  $f$ .

Tomando então uma função complexa linear do tipo  $f(z) = az + b$ , com  $a, b \in \mathbb{C}$ , e assumindo que  $a \neq 0$  de modo que  $f$  não seja uma função constante  $f(z) = b$ , cujo mapeamento levaria qualquer que seja o ponto do plano- $z$  num único ponto  $b$  do plano- $w$ , podemos escrever a função  $f$  da seguinte forma:

$$f(z) = az + b = |a| \left( \frac{a}{|a|} z \right) + b. \quad (3.8)$$

Considere agora as funções  $T(z) = z + \beta$ ,  $M(z) = \alpha z$  e  $R(z) = \lambda z$  tal que  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta, \lambda \in \mathbb{C}$  e  $|\lambda| = 1$ . Vemos que  $T, M$  e  $R$  são, respectivamente, uma translação, ampliação e rotação e a composição  $T \circ M \circ R(z)$  é dada por:

$$T \circ M \circ R(z) = T(M(R(z))) = T(M(\lambda z)) = T(\alpha(\lambda z)) = \alpha(\lambda z) + \beta. \quad (3.9)$$

De (3.8), (3.9) e considerando que  $\beta = b$ ,  $\alpha = |a|$  e  $\lambda = \frac{a}{|a|}$ , temos que

$$T \circ M \circ R(z) = |a| \left( \frac{a}{|a|} z \right) + b$$

e podemos dizer, enfim, que  $f(z) = T \circ M \circ R(z)$ , isto é, um mapeamento linear  $f(z) = az + b$  é dado pela composição de uma translação, ampliação e rotação, nesta ordem. Como resultado disto, dado um  $z_0$  no plano complexo, se o mapearmos em  $w_0 = f(z_0)$  através de  $f$  em um único plano, digamos plano- $z$ ,  $w_0$  será obtido:

- (i) rotacionando  $z_0$  através do ângulo  $\text{Arg}(a)$  em relação à origem do plano- $z$ ;



- (ii) ampliando (ou contraindo) o resultado pelo fator  $|a|$ ;
- (iii) transladando o resultado de acordo com o valor de  $b$ .

Essa descrição pode ser generalizada para qualquer região  $S$ , cuja imagem  $S'$  mediante o mapeamento linear  $f(z) = az + b$  é o conjunto de todos os pontos obtidos ao rotacionar  $S$  em  $\text{Arg}(a)$  radianos, ampliar (ou contrair) pelo fator  $|a|$  e transladar por  $b$ . Isoladamente, sabemos que uma rotação, ampliação e translação não alteram a forma da região mapeada, somente sua posição e tamanho. Sendo assim, é de se esperar que a composição desses mapeamentos também não o façam, isto é, o mapeamento linear  $f(z) = az + b$  pode alterar o tamanho e a posição de uma figura no plano complexo, mas sempre preserva sua forma. Vamos ao exemplo prático.

**Exemplo 3.4. Imagem de um retângulo através de um Mapeamento Linear**

*Encontre a imagem do retângulo de vértices  $-1 + i$ ,  $1 + i$ ,  $1 + 2i$ , e  $-1 + 2i$  sob o mapeamento linear  $f(z) = 4iz + (2 + 3i)$ .*

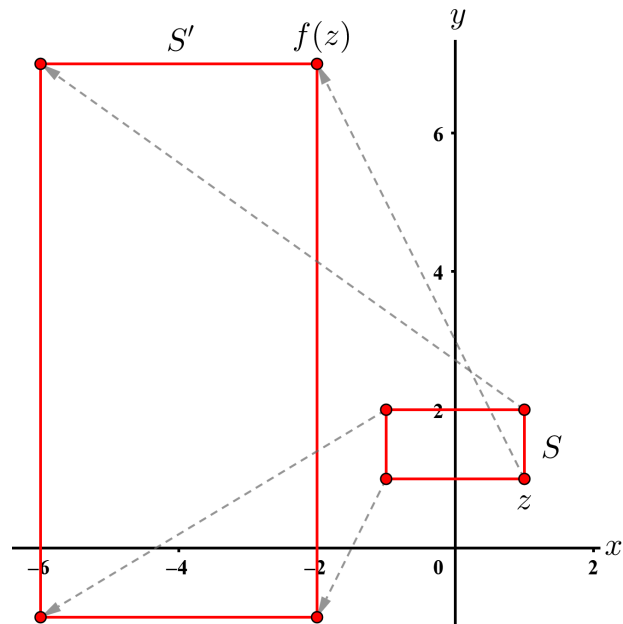
Considere que o referido retângulo seja denotado por  $S$  e sua imagem por  $S'$ . Sabemos que  $S'$  também é um retângulo, pois o mapeamento linear  $f$  não altera a forma da região  $S$ , mas aplica nela uma rotação, ampliação e translação. Com efeito, de  $f(z) = az + b$ , temos que  $a = 4i$  implica em  $|4i| = 4$  e  $\text{Arg}(a) = \frac{\pi}{2}$ , indicando uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos em relação ao semieixo positivo das abscissas e uma ampliação de fator 4 nos pontos de  $S$ . Por fim, depois da translação de  $b = 2 + 3i$ , obtemos a imagem  $S'$  de  $S$  através de  $f$ . Efetuando os cálculos, obtemos os seguintes mapeamentos para os vértices de  $S$ :

$$\begin{aligned} f(-1 + i) &= -2 - i; & f(1 + i) &= -2 + 7i; \\ f(1 + 2i) &= -6 + 7i; & f(-1 + 2i) &= -6 - i. \end{aligned}$$

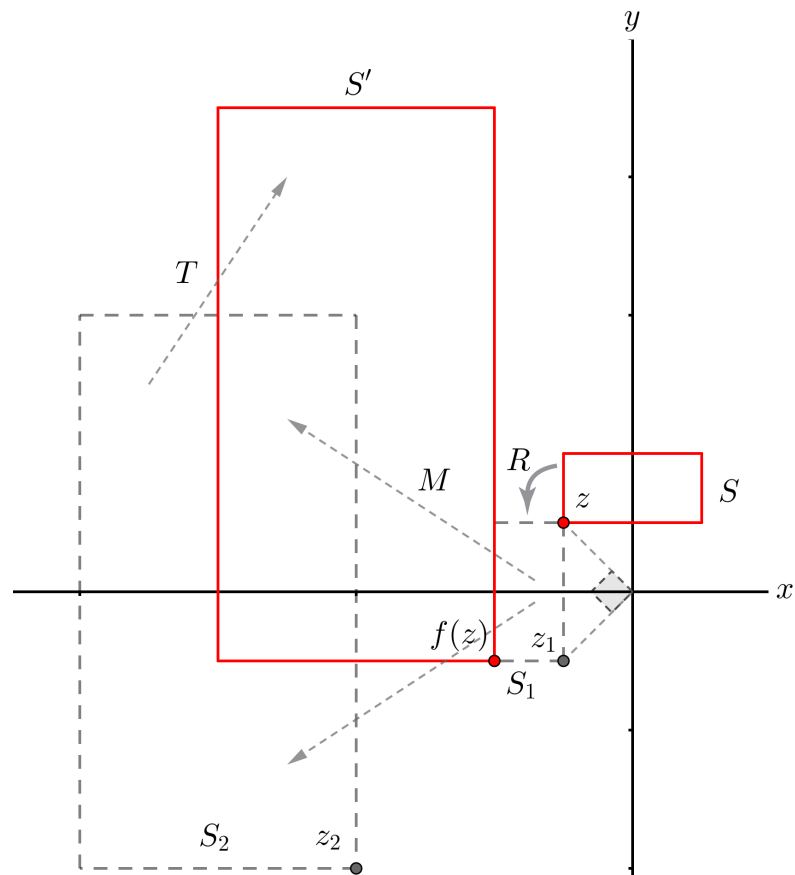
Sendo assim,  $S'$  é o retângulo de vértices  $-2 - i$ ,  $-2 + 7i$ ,  $-6 + 7i$  e  $-6 - i$ , conforme figura a seguir:

Figura 3.8 – Imagem  $S'$  do retângulo  $S$  sob mapeamento linear.

(a) Mapeamento linear em  $S$ .



(b) Passo a passo do mapeamento linear em  $S$ .



Fonte: Próprio autor.

Vemos na figura 3.8a o mapeamento linear do retângulo  $S$  através de  $f(z) = 4iz + 2 + 3i$  no plano- $z$ . Esta figura visa mostrar o mapeamento sem evidenciar a rotação, ampliação e translação, priorizando o resultado final. Em contrapartida, podemos ver na figura 3.8b o passo a passo da construção, porém a imagem pode ficar um pouco “poluída”. Nela é possível ver a rotação  $R$ , a ampliação  $M$  e a translação  $T$ . Observe que o ponto  $z$  sofre inicialmente uma rotação de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  rad no sentido anti-horário, representado por  $z_1$  em  $S_1$ . Em seguida, o retângulo  $S_1$  é ampliado mediante o fator de ampliação  $|a| = 4$ , obtendo como imagem o retângulo  $S_2$ . Veja que  $z_1$  é mapeado em  $z_2$  através de  $M$ . Por fim,  $S_2$  é transladado através de  $T$  por  $b = 2 + 3i$ , obtendo então o retângulo  $S'$ , que é o resultado final do mapeamento linear  $f$ . Repare que  $z_2$  é mapeado em  $f(z)$  através de  $T$ , pois  $f(z) = z_2 + b$ , completando o trajeto do mapeamento linear de  $z$  até  $f(z)$ .

### 3.3 Mapeamentos Inversos

Nesta seção estudaremos o mapeamento da função complexa inversa  $f(z) = \frac{1}{z}$ , cuja principal característica para nós é mapear determinadas linhas em círculos. Por se tratar da função inversa, é natural que o mapeamento receba o nome de **mapeamento inverso**, o qual, além de muito interessante, também exerce uma grande importância no estudo do Teorema do Círculo Preservado.

Tomando então a função complexa inversa  $f(z) = \frac{1}{z}$ , cujo domínio é composto por todos os números complexos não nulos, isto é,  $z \neq 0$ , e escrevendo  $z$  em sua forma exponencial, temos que

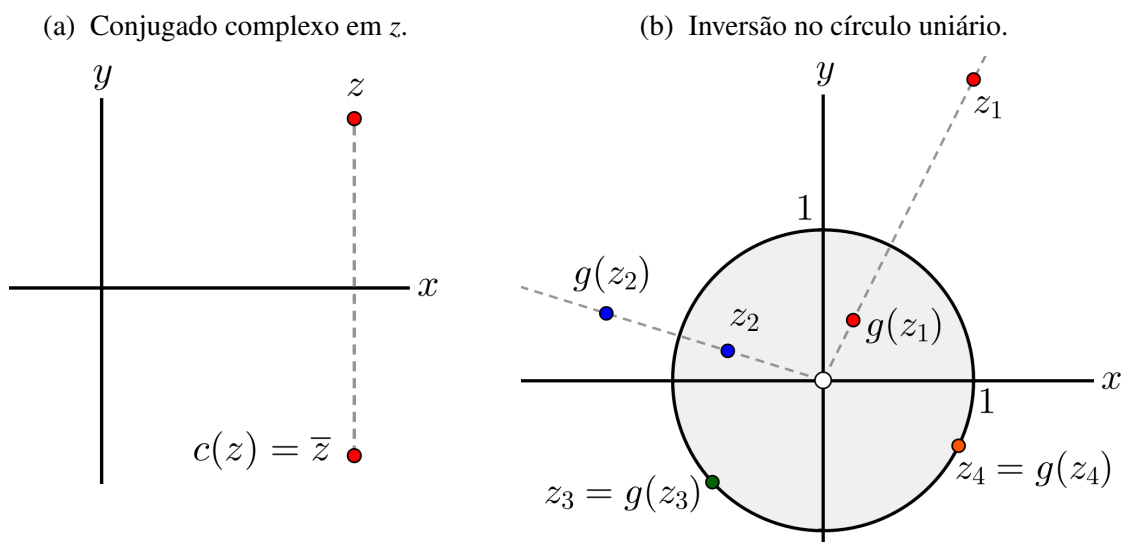
$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}. \quad (3.10)$$

De  $|z| = r$  e  $\theta = \arg(z)$ , podemos concluir que  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{r} = |f(z)|$ , ou seja, o módulo de  $f(z)$  é o inverso do módulo de  $z$  e que  $\arg(f(z)) = -\arg(z) = -\theta$ . Isso significa que, dado  $w_0 = f(z_0)$ , um mapeamento inverso de  $z_0$  faz com que  $w_0$  tenha um módulo inversamente proporcional ao de  $z_0$  e que  $w_0$  seja simétrico de  $z_0$  em relação ao eixo  $x$ . Note que, assim como nos mapeamentos lineares, esses dois passos no mapeamento inverso sugerem uma composição de duas funções. Com efeito, sabendo que  $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$ , dadas as funções  $c(z) = \bar{z} = re^{-i\theta}$  e  $g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}$ , com  $z \neq 0$ , podemos escrever (3.10) como a composição de  $c$  e  $g$ , veja:

$$c \circ g(z) = c(g(z)) = c\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{z} = f(z). \quad (3.11)$$

O mapeamento  $c(z) = \bar{z} = re^{-i\theta}$  é chamado de **conjugado complexo**, cuja imagem  $c(z)$  é simétrica de  $z$  em relação ao eixo real. Nada inédito para nós. Já o mapeamento  $g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}$  é chamado de **inversão no círculo unitário**. Pelo que o próprio nome já diz, a imagem  $g(z)$  sofre uma inversão a partir do círculo unitário em relação a  $z$ . Em outras palavras, o círculo unitário é o marco zero para a inversão e  $g(z)$  desloca-se para dentro ou fora do círculo de maneira inversa à posição de  $z$ . Tanto o mapeamento  $c$  quanto  $g$  estão representados graficamente na figura a seguir:

Figura 3.9 – Conjugado complexo e inversão no círculo unitário.



Fonte: Próprio autor.

A figura 3.9a mapeia  $z$  através do conjugado  $c$ , obtendo como imagem o ponto  $c(z) = \bar{z}$ . Já a figura 3.9b mostra o mapeamento dos pontos  $z_1, \dots, z_4$  através da inversão no círculo unitário, obtendo como imagem  $g(z_1), \dots, g(z_4)$ . Note que pelo fato de  $z_1$  estar fora do círculo unitário,  $|z_1| > 1$  e, conseqüentemente,  $|g(z_1)| < 1$ , fazendo com que  $g(z_1)$  fique dentro do círculo. O oposto ocorre com o ponto  $z_2$ , uma vez que ele está dentro do círculo unitário e sua imagem  $g(z_2)$ , fora ( $|z_2| < 1 \Rightarrow |g(z_2)| > 1$ ). Os pontos  $z_3$  e  $z_4$  pertencem ao círculo unitário, ou seja,  $|z_3| = |z_4| = 1$ , logo  $|g(z_3)| = |g(z_4)| = 1$  e tanto o ponto quanto a sua imagem estão sobre o círculo. De um modo geral, dado o complexo  $z \neq 0$  e o mapeamento  $g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}$ , podemos concluir que:

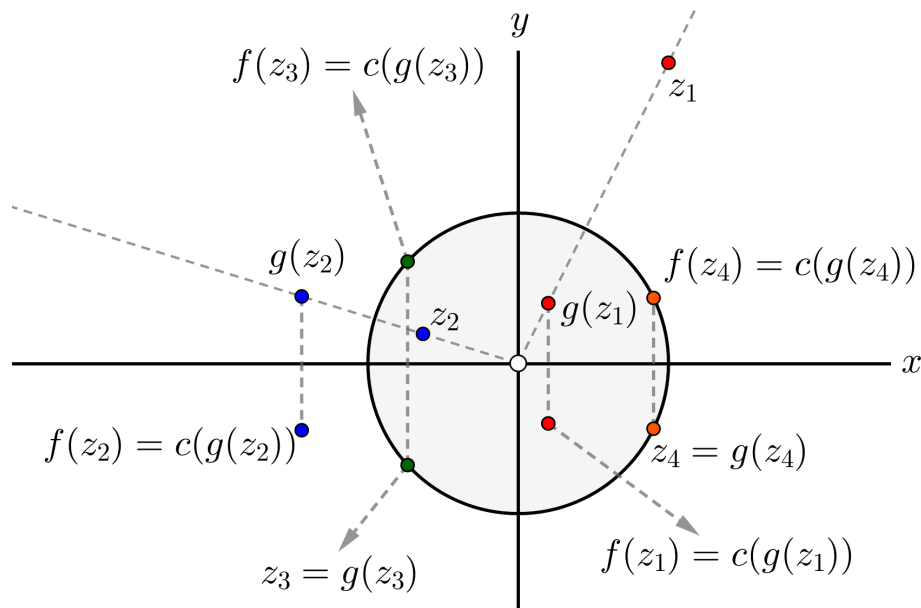
- (i)  $|z| = 1 \Rightarrow |g(z)| = 1$  e tanto  $z$  quanto  $g(z)$  estão sobre o círculo unitário;

(ii)  $|z| > 1 \Rightarrow |g(z)| < 1$  e enquanto  $z$  está fora do círculo unitário,  $g(z)$  está dentro;

(iii)  $|z| < 1 \Rightarrow |g(z)| > 1$  e enquanto  $z$  está dentro do círculo unitário,  $g(z)$  está fora.

Pelo fato de  $f(z) = \frac{1}{z}$  ser uma composição do conjugado complexo e da inversão no círculo unitário, esperamos ver no mapeamento inverso a seguir os efeitos mostrados na figura 3.9.

Figura 3.10 – Mapeamento inverso para os pontos  $z_1, \dots, z_4$  da figura 3.9b .



Fonte: Próprio autor.

De fato, veja que  $f(z_1)$  é a inversão de  $z_1$  no círculo unitário e, em seguida, a reflexão de  $g(z_1)$  no eixo real. O mesmo ocorre com os demais pontos  $z_2, z_3$  e  $z_4$ . Logo, dado um  $z_0$  não nulo no plano complexo, se o ponto  $w_0 = f(z_0) = \frac{1}{z_0}$  for representado no mesmo plano complexo de  $z_0$ , então  $w_0$  será obtido:

- (i) invertendo  $z_0$  no círculo unitário;
- (ii) refletindo o resultado no eixo real.

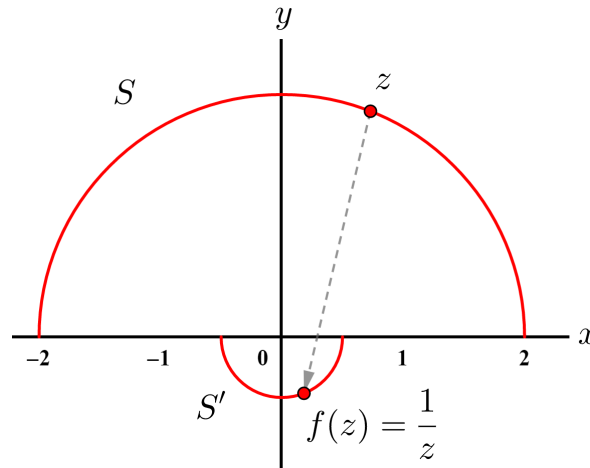
### Exemplo 3.5. Imagem de um semicírculo através de um Mapeamento Inverso

Encontre a imagem do semicírculo  $|z| = 2, 0 \leq \arg(z) \leq \pi$ , sob o mapeamento inverso  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

Sabemos que o mapeamento inverso é composto por uma inversão no círculo unitário e uma reflexão em relação ao eixo real, isto é, de  $|z| = 2$  e  $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ , temos que

$|f(z)| = \frac{1}{2}$  e  $-\pi \leq \arg(z) \leq 0$ . Sendo assim, denotando o semicírculo por  $S$ , sua imagem através do mapeamento inverso  $f(z) = \frac{1}{z}$  será o semicírculo  $S' : |f(z)| = \frac{1}{2}$  e  $-\pi \leq \arg(f(z)) \leq 0$ . Representaremos este mapeamento de  $S$  em um único plano complexo a seguir:

Figura 3.11 – Imagem  $S'$  do semicírculo  $S$  sob mapeamento inverso.



Fonte: Próprio autor.

Por mais que o exemplo da figura 3.11 seja específico, ele nos abre os olhos para além do caso particular. Uma função inversa  $w = \frac{1}{z}$  mapeia qualquer que seja o círculo  $|z| = k$ ,  $k \neq 0$ , no círculo  $|w| = \frac{1}{k}$ .

**Exemplo 3.6. Imagem de uma reta através de um mapeamento inverso.**

Encontre a imagem da reta vertical  $x = 1$ , sob o mapeamento inverso  $w = \frac{1}{z}$ .

Os pontos sobre a reta  $x = 1$  são do tipo  $z = 1 + yi$ , com  $y \in (-\infty, \infty)$ . Desta maneira, sem usar forma exponencial, ao substituir  $z$  em  $w = \frac{1}{z}$ , obtemos:

$$w = \frac{1}{1 + yi} = \left( \frac{1}{1 + yi} \right) \left( \frac{1 - yi}{1 - yi} \right) = \frac{1}{1 + y^2} - \frac{y}{1 + y^2}i.$$

Isso nos mostra que a imagem dos pontos sobre a reta  $x = 1$  através do mapeamento  $w = \frac{1}{z}$  são todos os pontos  $w = u + iv$  tais que:

$$u = \frac{1}{1 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{1 + y^2}, \quad \text{e } y \in (-\infty, \infty). \quad (3.12)$$

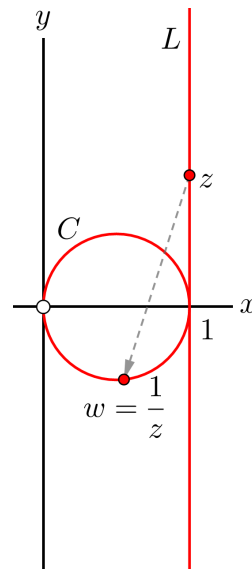
Note em (3.12) que  $u \neq 0$ ,  $v = \frac{-y}{1 + y^2} = -y \left( \frac{1}{1 + y^2} \right) = -yu$  e podemos escrever  $y = -\frac{v}{u}$ . Substituindo  $y$  em  $u = \frac{1}{1 + y^2}$  e simplificando obtemos a equação  $u^2 - u + v^2 = 0$ . Ao

completar quadrados em  $u$ , vemos que a imagem dada em (3.12) também pode ser escrita sob a forma:

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}, \quad u \neq 0. \quad (3.13)$$

Repare que a equação dada em (3.13) é uma circunferência de centro  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  e raio  $\frac{1}{2}$ . Porém, pelo fato de  $u \neq 0$ , temos que  $v \neq 0$  e o ponto  $(0, 0)$  não faz parte da imagem. Denotando a reta vertical  $x = 1$  por  $L$  e sua imagem por  $C$ , segue de (3.13) que  $C : \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ,  $w \neq 0$  e podemos representar  $L$  e  $C$  no mesmo plano complexo, conforme figura abaixo:

Figura 3.12 – Imagem  $C$  da reta vertical  $L$  sob mapeamento inverso.



Fonte: Próprio autor.

A figura 3.12 mostra o que queríamos ver desde o início: o mapeamento de uma linha reta em um círculo. Porém, ver que a origem  $(0, 0)$  não é imagem de nenhum ponto nos incomoda bastante, pois a impressão que fica é que existe um “buraco” no círculo  $C$ . Note que por maiores que sejam os módulos dos pontos sobre a reta  $x = 1$ , suas respectivas imagens estão extremamente próximas da origem do plano complexo, mas nenhum desses pontos são mapeados em  $(0, 0)$ . Para resolver este problema, lançaremos mão do conceito de **plano complexo estendido**. Trata-se de um artifício para inserir um “ponto ideal” no plano complexo padrão, de modo que a imagem desse “ponto ideal” seja o ponto  $(0, 0)$  (ou qualquer outro com característica similar). Com efeito, sabemos que independentemente das coordenadas de um número complexo  $z = x + yi$ , se ele cresce muito em módulo, podemos dizer que ele está se afastando cada vez mais da origem do plano complexo, isto é, se  $|z| \rightarrow \infty$ , então  $x \rightarrow \infty$  ou  $y \rightarrow \infty$ , logo

podemos dizer que  $z \rightarrow \infty$ . Sendo assim, o “ponto ideal” para nós é esse  $z$  cujo módulo é extremamente grande. Ele é denotado por  $\infty$  e um plano complexo padrão acrescido do “ponto ideal” é chamado então de **plano complexo estendido**, ou **esfera de Riemann**. Em termos de Geometria Algébrica, esse conjunto pode também ser interpretado como a reta projetiva complexa  $P_{\mathbb{C}}^1$ . Além disso, a imagem do ponto ideal através de um mapeamento no plano complexo estendido é chamado de **polo**.

Utilizaremos esta nova correspondência para analisar o mapeamento inverso apresentado em (3.10) de modo a obter imagens para 0 e  $\infty$  (entenda 0 como sendo o ponto  $z = 0 + 0i$  e  $\infty$  o ponto ideal). Observe que se  $z = re^{i\theta}$  é um ponto próximo de 0, então  $r$  é um número real muito pequeno e  $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$  é um ponto cujo módulo é grande, isto é, no plano complexo estendido, se  $z$  é um ponto próximo de 0, então  $w = \frac{1}{z}$  é um ponto que está próximo do ponto ideal  $\infty$ . Portanto, é razoável pensar que podemos definir a função inversa  $f(z) = \frac{1}{z}$  no plano complexo estendido de modo que  $f(0) = \infty$ . Por outro lado, se  $z$  é um ponto próximo a  $\infty$  no plano complexo estendido, então  $f(z)$  é um ponto próximo de 0 e também é razoável definir no plano complexo estendido que  $f(\infty) = 0$ . É importante ressaltar que escrevemos  $f(0) = \infty$  e  $f(\infty) = 0$  pelo fato de  $\infty$  ser um ponto no plano complexo estendido. Em situações normais isto não faria o menor sentido.

**Definição 3.1.** *A função inversa no plano complexo estendido é a função definida por:*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{se } z \neq 0 \text{ ou } z \neq \infty; \\ \infty, & \text{se } z = 0; \\ 0, & \text{se } z = \infty. \end{cases} \quad (3.14)$$

Usaremos a mesma notação vista em (3.10) para representar a função inversa no plano complexo estendido dada na equação (3.14). Sempre que o ponto ideal  $\infty$  for mencionado devemos assumir que  $f(z) = \frac{1}{z}$  representa a função definida em 3.14 acima.

Considerando o Exemplo 3.6, podemos agora dizer que, pela Definição 3.1, o ponto  $(0,0)$  é a imagem do ponto ideal  $\infty$  através do mapeamento inverso e a circunferência  $C$  não possui mais aquele “buraco”. À luz deste mesmo exemplo, é possível enxergar uma generalização para mapeamentos inversos de linhas verticais. Pelo fato do ponto ideal  $\infty$  pertencer a qualquer que seja a linha vertical, a imagem de  $x = k$ , com  $k \neq 0$ , é a circunferência  $\left|w - \frac{1}{2k}\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|$  sob o mapeamento inverso no plano complexo estendido. O mesmo ocorre para as linhas hori-



zontais  $y = k$ , com  $k \neq 0$ . Para resumir, a função inversa definida no plano complexo estendido mapeia:

- (i) A reta vertical  $x = k$ , com  $k \neq 0$ , na circunferência

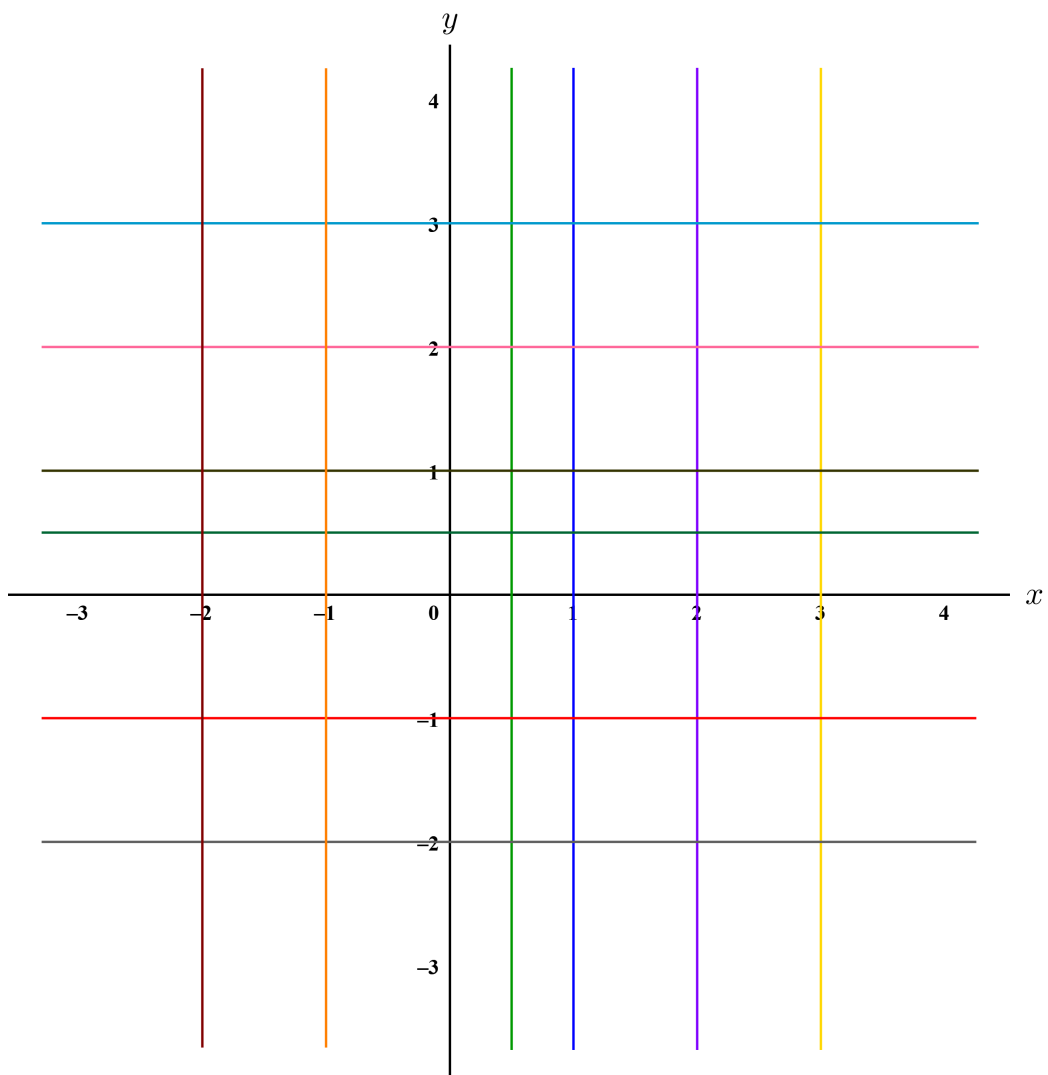
$$\left| w - \frac{1}{2k} \right| = \left| \frac{1}{2k} \right|, \text{ e} \quad (3.15)$$

- (ii) A reta horizontal  $y = k$ , com  $k \neq 0$ , na circunferência

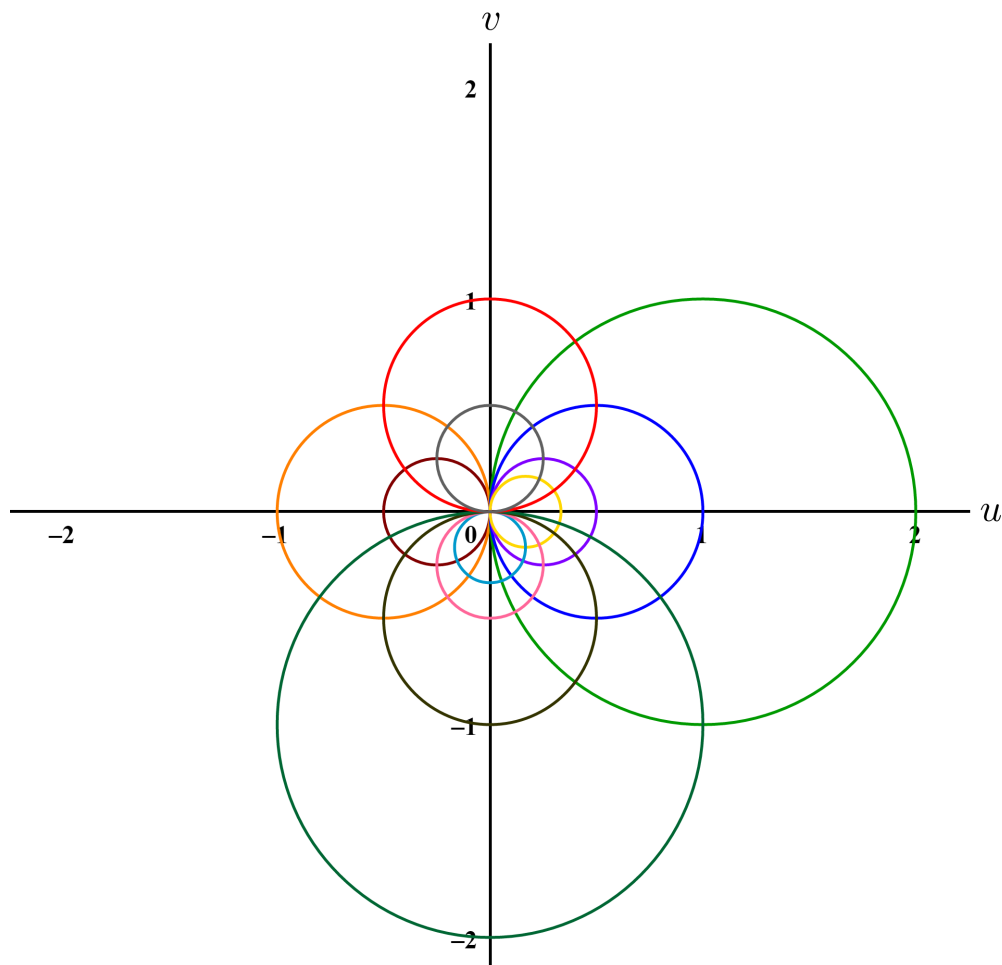
$$\left| w + \frac{1}{2k}i \right| = \left| \frac{1}{2k} \right|. \quad (3.16)$$

Os dois mapeamentos (3.15) e (3.16) serão exemplificados na figura a seguir:

Figura 3.13 – Retas a serem mapeadas no plano- $z$  estendido.



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.14 – Respectivas imagens das retas no plano- $w$  estendido.

Fonte: Próprio autor.

Podemos ver pelo esquema de cores das figuras 3.13 e 3.14 que uma determinada reta no plano- $z$  estendido tem como respectiva imagem uma circunferência da mesma cor no plano- $w$  estendido. Como exemplo, veja a reta  $x = 1$  em azul, a reta  $x = \frac{1}{2}$  em verde-claro e a reta  $y = -1$  em vermelho. Elas têm como imagem as circunferências  $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$ ,  $|w - 1| = |1|$  e  $\left|w + \frac{1}{2}i\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$  respectivamente. A escala utilizada nas imagens da figura ?? é diferente de forma conveniente para facilitar a visualização. Para ver a construção no *GeoGebra* que gerou a figura ?? acesse o link <<https://www.geogebra.org/m/fc3tufzt>>.

Por fim, dada a função inversa  $f(z) = \frac{1}{z}$  definida no plano complexo estendido, é fácil ver que  $f$  sempre retorna imagens diferentes para elementos distintos do domínio, isto é, dados  $z_1$  e  $z_2$  no plano- $z$  estendido, se  $z_1 \neq z_2$ , então  $f(z_1) \neq f(z_2)$  no plano- $w$  estendido, pois  $\frac{1}{z_1} \neq \frac{1}{z_2}$ . Além disso, qualquer que seja  $w$  do plano- $w$  estendido, sabemos que  $w = f(z)$ , para algum  $z = \frac{1}{w}$  do plano- $z$  estendido. Isso nos leva a pensar que existe uma função  $g$  tal que  $g(w) =$

$f^{-1}(w)$ , com  $w = f(z)$ . De fato,  $g(w) = \frac{1}{w} = f^{-1}(w)$ , uma vez que  $f(g(w)) = f\left(\frac{1}{w}\right) = w$  e  $g(f(w)) = g\left(\frac{1}{w}\right) = w$ , isto é,  $f(g(w)) = g(f(w)) = w$ . Por conta disto e pelo fato de termos visto em (3.15) e (3.16) que um mapeamento inverso mapeia uma reta em uma circunferência, podemos dizer que a imagem das circunferências  $\left|w - \frac{1}{2k}\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|$  e  $\left|w + \frac{1}{2k}i\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|$  através de um mapeamento inverso são as retas  $x = k$  e  $y = k$ , respectivamente.

### 3.4 Transformações Lineares Fracionárias

Nesta seção estudaremos as Transformações Lineares Fracionárias, as quais são uma generalização dos mapeamentos lineares e inversos que vimos nas seções 3.2 e 3.3. Estas transformações têm como característica principal mapear linhas em círculos e vice-versa, além de serem a base para o Teorema do Círculo Preservado.

**Definição 3.2.** *Se  $a, b, c$  e  $d$  são constantes complexas com  $ad - bc \neq 0$ , então a função complexa definida por:*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (3.17)$$

*é chamada de uma transformação linear fracionária.*

Uma transformação linear fracionária também pode ser chamada de **transformação de Möbius**, ou **transformação bilinear**. Temos duas situações a considerar:  $c = 0$  ou  $c \neq 0$ . Se  $c = 0$ , temos que a transformação  $T$  dada em (3.17) é um mapeamento linear, pois  $T(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \alpha z + \beta$ , com  $\alpha = \frac{a}{d}$  e  $\beta = \frac{b}{d}$ . Caso contrário, se  $c \neq 0$ , então temos que

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \left(\frac{c^2}{c^2}\right) \left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{c^2az + c^2b}{c^2(cz + d)} \\ &= \frac{c^2az + c^2b + (adc - adc)}{c^2(cz + d)} \\ &= \frac{c(bc - ad) + ac(cz + d)}{c^2(cz + d)} \\ &= \frac{c(bc - ad)}{c^2(cz + d)} + \frac{ac(cz + d)}{c^2(cz + d)} \\ &= \frac{bc - ad}{c(cz + d)} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A igualdade anterior é uma daquelas “sacadas geniais” e é através dela que conseguimos enxergar uma transformação linear fracionária como a composição de outras três funções. Com efeito, se tomarmos  $A = \frac{bc - ad}{c}$  e  $B = \frac{a}{c}$ , a equação vista em (3.18) pode ser escrita sob a forma  $f \circ g \circ h(z)$ , onde  $f(z) = Az + B$  e  $h(z) = cz + d$  são funções lineares e  $g(z) = \frac{1}{z}$  é a função inversa, vejamos:

$$\begin{aligned} f \circ g \circ h(z) &= f(g(h(z))) = f(g(cz + d)) \\ &= f\left(\frac{1}{cz + d}\right) \\ &= A\left(\frac{1}{cz + d}\right) + B \\ &= \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} \\ &= T(z). \end{aligned}$$

De  $A = \frac{bc - ad}{c}$  também podemos entender melhor o motivo da restrição  $ad - bc \neq 0$  vista na Definição 3.2. Se  $ad - bc$  fosse igual a zero, a função  $f(z) = Az + B$  seria constante e, no fim das contas, a transformação  $T(z)$  também, isto é,  $f(z) = T(z) = B = \frac{a}{c}$ . Além disso, pelo fato de estarmos analisando o caso  $c \neq 0$ , não existem restrições em (3.18) para os termos  $\frac{bc - ad}{c}$  e  $\frac{a}{c}$ , sobrando somente o termo  $\frac{1}{cz + d}$  para analisar, cujo denominador deve necessariamente ser não nulo. Sendo assim, de  $cz + d \neq 0$ , segue que  $z \neq -\frac{d}{c}$  e o domínio de  $T$  é, desta forma, composto por todos os números complexos diferentes do polo  $z = -\frac{d}{c}$ .

Quando a transformação  $T$  não é uma função linear, isto é, quando  $c \neq 0$ , convém defini-la como um mapeamento no plano complexo estendido, pois assim conseguiremos acrescentar o ponto ideal  $\infty$  e o polo  $z = -\frac{d}{c}$  ao domínio e imagem de  $T$ . Do contrário, veremos aquele “buraco” na representação gráfica de  $T$  como na figura 3.12, por exemplo. Para consolidar esta ideia, devemos analisar o que acontece com  $T(z)$  quando tomamos um  $z$  cada vez mais próximo do ponto ideal  $\infty$  e também do polo  $z = -\frac{d}{c}$ . Escrevendo então  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}$ , se  $z \rightarrow \infty$ , temos que  $T(z) = \frac{a + 0}{c + 0} = \frac{a}{c}$ . Por outro lado, se  $z \rightarrow -\frac{d}{c}$ , o numerador de  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  se aproxima do complexo  $z_0 = a\left(-\frac{d}{c}\right) + b = \left(-\frac{ad}{c}\right) + b$ , enquanto o denominador se torna cada vez mais próximo de 0, fazendo com que o resultado de  $T(z)$  se aproxime do ponto ideal  $\infty$ . Logo, se  $c \neq 0$  e  $ad - bc \neq 0$ , podemos definir uma transformação linear fracionária no plano

complexo estendido da seguinte forma:

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{se } z \neq 0 \text{ ou } z \neq \infty; \\ \infty, & \text{se } z = -\frac{d}{c}; \\ \frac{a}{c}, & \text{se } z = \infty. \end{cases} \quad (3.19)$$

Note que se tomarmos  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ , e  $d = 0$  em (3.19), temos que a transformação  $T$  é o caso especial  $T(z) = \frac{1}{z}$ , que é a função inversa definida no plano complexo estendido vista na Definição 3.1. Como exemplo de transformação linear fracionária, vamos encontrar a imagem dos pontos  $0$ ,  $1+i$ ,  $i$ , e  $\infty$  sob  $T(z) = \frac{2z+1}{z-i}$ . Veja que o ponto ideal é citado, portanto  $T$  está definida no plano complexo estendido, cujo polo é  $-\frac{d}{c} = -\frac{-i}{1} = i$  e  $\frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$ . Temos então que:

$$T(0) = \frac{2(0)+1}{0-i} = \frac{1}{-i} = i; \quad T(1+i) = \frac{2(1+i)+1}{(1+i)-i} = \frac{3+2i}{1} = 3+2i;$$

$$T(i) = T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{e} \quad T(\infty) = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2.$$

Vimos anteriormente em (3.19) que um mapeamento inverso é um caso especial de transformação linear fracionária. Esses mapeamentos inversos possuem a propriedade de mapear círculos em círculos (figura 3.11), linhas em círculos (figura ??) e vice-versa. Com isso, pelo fato de já termos definido a transformação linear fracionária e sabermos que ela é uma generalização dos mapeamentos lineares e inversos, podemos partir para o entendimento do Teorema do Círculo Preservado.

### **Teorema 3.1. Teorema do Círculo Preservado**

*Seja  $C$  um círculo no plano- $z$  e  $T$  uma transformação linear fracionária dada em (3.19), então a imagem de  $C$  através de  $T$  é um círculo ou uma reta no plano- $w$  estendido. A imagem é uma reta se, e somente se,  $c \neq 0$  e o polo  $z = -\frac{d}{c}$  está sobre o círculo  $C$ .*

*Demonstração.*

Para  $c = 0$ , temos que  $T$  é uma função linear e vimos na seção 3.2 que um mapeamento linear leva círculo em círculo e está acabado. Caso contrário, se  $c \neq 0$ , de (3.18) temos que  $T(z) = f \circ g \circ h(z)$ , onde  $f(z) = Az + B$  e  $h(z) = cz + d$  são funções lineares e  $g(z) = \frac{1}{z}$  é a função inversa. Pelo fato de  $h$  ser um mapeamento linear, a imagem  $C'$  do círculo  $C$  através de

$h$  é um círculo. Falta ver, portanto, o que acontece quando aplicamos  $g$  em  $h(z)$ , pois  $f$  também é linear e não é capaz de alterar a forma de uma figura mapeada. Em suma, temos dois casos a considerar:

**Caso 1:** Vamos assumir que o ponto  $w = 0$  pertence ao círculo  $C'$ . Isso acontece se, e somente se, o polo  $z = -\frac{d}{c}$  pertence ao círculo  $C$ , pois  $h\left(-\frac{d}{c}\right) = 0$ . Por outro lado, vimos no final da seção 3.3 que o mapeamento inverso dos círculos  $\left|w - \frac{1}{2k}\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|$  e  $\left|w + \frac{1}{2k}i\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|$  tem como imagem as retas  $x = k$  e  $y = k$ , respectivamente. Observe que  $w = 0$  satisfaz ambas as equações. Sendo assim, como  $w = 0$  pertence ao círculo  $C'$ , podemos dizer que  $C'$  é um dos dois círculos mencionados acima e, por conta disso, a imagem de  $C'$  através de  $g(z) = \frac{1}{z}$  é necessariamente uma reta vertical ou horizontal, que chamaremos de  $L$ . Por fim, por  $f$  é ser uma função linear, sabemos que a imagem de  $L$  através de  $f$  continua sendo uma reta. Logo, quando o polo  $z = -\frac{d}{c}$  pertence ao círculo  $C$ , a imagem de  $C$  sob a transformação linear fracionária  $T$  é uma reta.

**Caso 2:** Vamos assumir desta vez que o ponto  $w = 0$  não pertence ao círculo  $C'$  e por esta razão o polo  $z = -\frac{d}{c}$  não pertence ao círculo  $C$ . Considere então que  $C'$  seja dado pela equação  $|w - w_0| = \rho$ . Se tomarmos  $\xi = g(w) = \frac{1}{w}$  e  $\xi_0 = g(w_0) = \frac{1}{w_0}$ , então para qualquer ponto  $w \in C'$ , temos que

$$|\xi - \xi_0| = \left|\frac{1}{w} - \frac{1}{w_0}\right| = \left|\frac{w_0 - w}{ww_0}\right| = \frac{|w - w_0|}{|w||w_0|} = \frac{\rho}{|w||w_0|} = \rho \frac{1}{|w|} \frac{1}{|w_0|} = \rho |\xi| |\xi_0|. \quad (3.20)$$

Considere agora que  $a = \xi_0$  e  $\lambda = \rho |\xi_0|$ . Podemos reescrever (3.20) da seguinte forma:

$$|\xi - a| = \lambda |\xi|. \quad (3.21)$$

Pondo  $\xi = u + iv$  e  $a = a_1 + ia_2$ , podemos escrever (3.21) mediante a equação:

$$\begin{aligned} |\xi - a| = \lambda |\xi| &\Rightarrow |u + iv - (a_1 + ia_2)| = \lambda |u + iv| \\ &\Rightarrow |(u - a_1) + (v - a_2)i| = \lambda |u + iv| \\ &\Rightarrow \sqrt{(u - a_1)^2 + (v - a_2)^2} = \lambda \sqrt{u^2 + v^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para  $\lambda = 1$ , elevando ao quadrado ambos os lados de (3.22) e fazendo as devidas manipulações, chegamos na equação de uma reta e, para  $\lambda > 0$  e  $\lambda \neq 1$ , na equação de um círculo (omitimos as contas para não poluir demasiadamente a demonstração). Pelo fato de  $w = 0$  não pertencer ao círculo  $C'$  e  $\lambda = \rho|\xi_0|$ , temos que  $|w_0| \neq \rho \Rightarrow \rho|\xi_0| \neq 1 \Rightarrow \lambda \neq 1$ . Com isto, o conjunto dos pontos em (3.20) é um círculo. Logo, já que  $f$  é uma função linear, a imagem deste círculo também é um círculo e podemos concluir que a imagem do círculo  $C$  inicial através do mapeamento  $T$  é um círculo. ■

Um fato interessante é que usando um raciocínio similar ao do Teorema do Círculo Preservado podemos mapear linhas em círculos através de uma transformação linear fracionária. De um modo geral, se  $T$  é uma transformação linear fracionária dada em (3.19), então a imagem de uma reta  $L$  através de  $T$  é uma reta ou um círculo. A imagem é um círculo se, e somente se,  $c \neq 0$  e o polo  $z = -\frac{d}{c}$  não pertence a  $L$ .

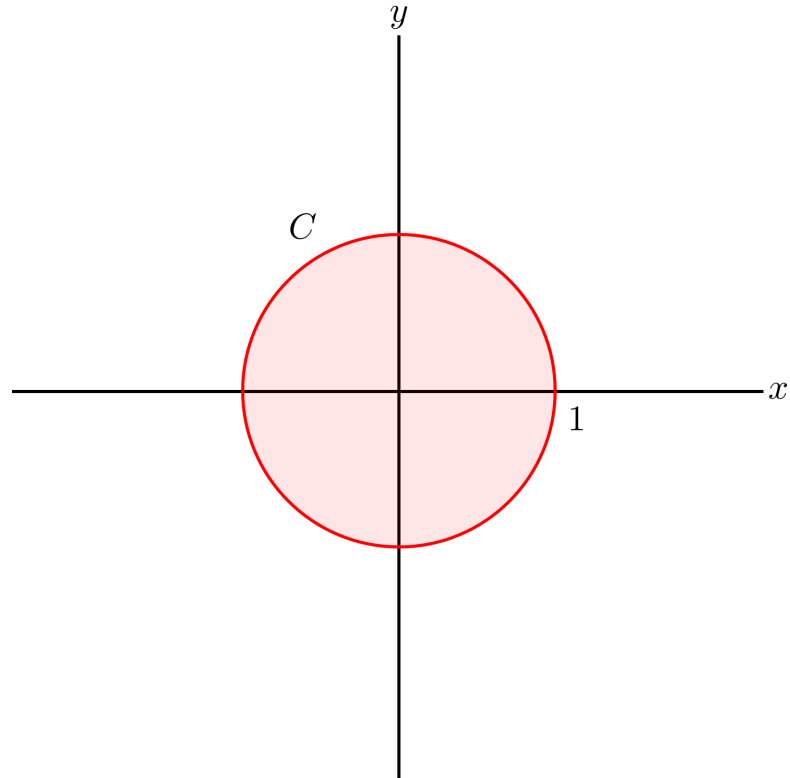
**Exemplo 3.7. Imagem de um disco sob uma transformação linear fracionária**

Encontre a imagem do círculo unitário  $|z| = 1$  através da transformação linear fracionária  $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ . Qual é a imagem do interior  $|z| < 1$  desse círculo?

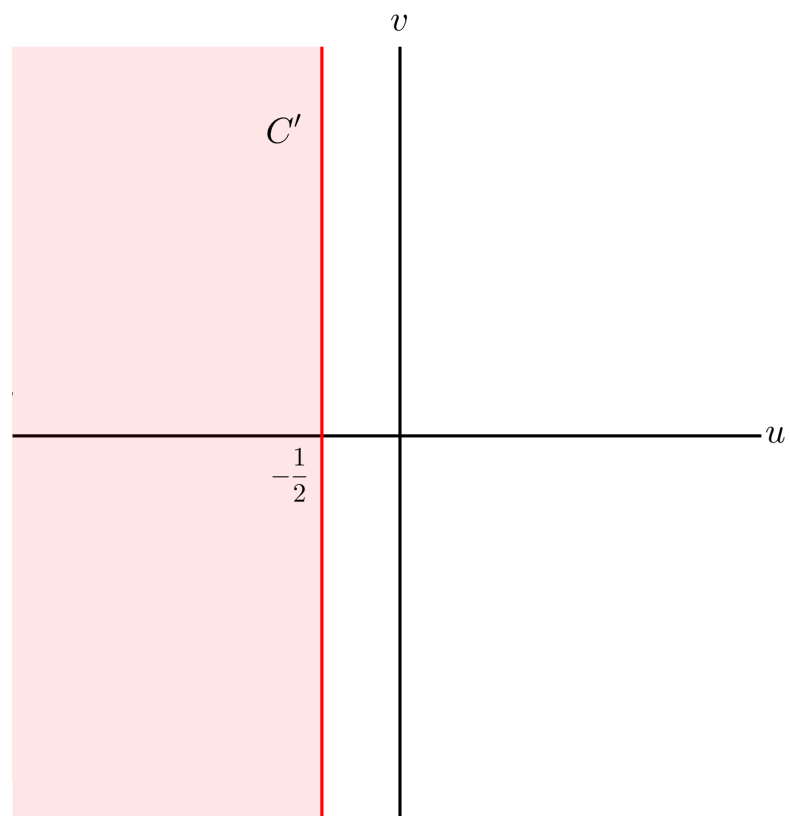
Note inicialmente que  $z = -\frac{d}{c} = 1$  é o polo de  $T$  e ele está sobre o círculo unitário  $|z| = 1$ . Por conta disso, baseando-se no Teorema 3.1, segue que a imagem do círculo unitário é uma reta, podendo ser determinada por dois pontos quaisquer. Para  $z = -1$ , temos que  $T(-1) = -\frac{1}{2}$  e para  $z = i$ ,  $T(z) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$  e podemos dizer que a imagem é a reta  $u = -\frac{1}{2}$ . Para o segundo questionamento, devemos ver o que acontece com os pontos no interior do círculo unitário, isto é, dentro do disco  $|z| < 1$ . Fácil, pois podemos interpretar o disco como sendo a união de infinitos círculos concêntricos com raios entre 0 e 1, cujas imagens são retas distintas que formam o semiplano  $u > -\frac{1}{2}$  ou  $u < -\frac{1}{2}$ . Para saber qual deles é o certo, basta testar um ponto qualquer dentro do disco e ver em qual dos semiplanos a imagem está. Convenientemente, calculando  $T(z)$  para  $z = 0$ , temos que  $T(0) = -2$  e a imagem do disco  $|z| < 1$  é o semiplano  $u < -\frac{1}{2}$ , conforme ilustrado na figura a seguir:

Figura 3.15 – A transformação linear fracionária  $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ .

(a) O disco  $C : |z| \leq 1$  no plano- $z$ .



(b) A imagem de  $C$  no plano- $w$  através de  $w = \frac{z+2}{z-1}$ .



Fonte: Próprio autor.



**Exemplo 3.8. Imagem de um disco sob uma transformação linear fracionária**

Encontre a imagem do círculo  $|z| = 2$  através da transformação linear fracionária  $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ . Qual é a imagem do interior  $|z| < 2$  desse círculo?

Note que, diferentemente do Exemplo 3.7, o polo  $z = 1$  não pertence ao círculo  $|z| = 2$  e o Teorema 3.1 garante então que a imagem  $C'$  de  $|z| = 2$  também é um círculo. Sabendo disto, devemos nos esforçar para encontrar uma expressão algébrica que equaciona  $C'$ . Um dos caminhos para obter tal equação é calcular as coordenadas de três de seus pontos e substituir na equação reduzida de uma circunferência, vamos lá:

$$T(-2) = 0; \quad T(2) = 4 \quad \text{e} \quad T(2i) = \frac{2}{5} - \frac{6}{5}i.$$

Sendo assim, o círculo  $C'$  de centro  $(a, b)$  e raio  $r$  passa pelos pontos  $(u_1, v_1) = (0, 0)$ ,  $(u_2, v_2) = (4, 0)$  e  $(u_3, v_3) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right)$  e gera as equações

$$\begin{cases} (a-0)^2 + (b-0)^2 = r^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = r^2 \\ (a-4)^2 + (b-0)^2 = r^2 \Rightarrow a^2 - 8a + 16 + b^2 = r^2 \\ \left(a - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(b + \frac{6}{5}\right)^2 = r^2 \Rightarrow a^2 - \frac{4}{5}a + \frac{4}{25} + b^2 + \frac{12}{5}b + \frac{36}{25} = r^2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos  $a = 2$  e  $b = 0$ , isto é, o centro e o raio de  $C'$  são, respectivamente  $(a, b) = (2, 0)$  e  $r = 2$ , pois é trivial que essa é a distância entre os pontos  $(0, 0)$  e  $(2, 0)$ . Com isso, temos que a equação da circunferência  $C'$  é dada por  $(u-2)^2 + v^2 = 4$ , ou  $|w-2| = 2$ . Para encontrarmos a imagem do disco  $|z| < 2$ , usaremos a mesma estratégia do Exemplo 3.7. Fazendo o teste com  $z = 0$ , temos que  $T(0) = -2$  é um ponto externo ao círculo  $|w-2| = 2$  e podemos concluir que a imagem do disco  $|z| < 2$  é a região  $|w-2| > 2$ .

Antes de partirmos para o mapeamento no gráfico, achamos que seria legal mostrar uma forma mais intuitiva de determinar a imagem  $C'$  através de  $T$ . Em suma, se lembrarmos que qualquer reta que passa pelo centro de uma circunferência é um eixo de simetria, então o eixo das abscissas no plano- $z$  é um eixo de simetria do círculo  $|z| = 2$ . Além disso, para qualquer  $z \in \mathbb{C}$ , temos que

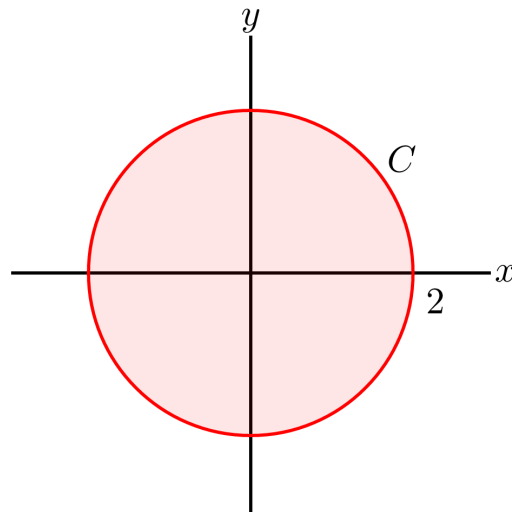
$$T(\bar{z}) = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}-1} = \frac{\overline{z+2}}{\overline{z-1}} = \overline{\left(\frac{z+2}{z-1}\right)} = \overline{T(z)}.$$

Isso nos permite dizer que se  $z$  e  $\bar{z}$  estão sobre o círculo  $|z| = 2$ , então  $w = T(z)$  e  $\bar{w} = T(\bar{z}) = \overline{T(z)}$  também pertencem à imagem  $C'$ , que por sua vez tem como eixo de simetria o

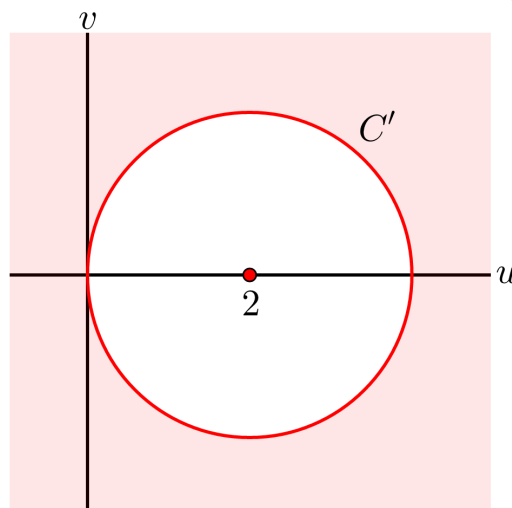
eixo das abscissas no plano- $w$ . Por outro lado, pelo fato dos pontos  $z_1 = -2$  e  $z_2 = 2$  pertencerem ao círculo  $|z| = 2$ , os pontos  $T(-2) = 0$  e  $T(2) = 4$  estão sobre  $C'$  e também sobre o eixo- $u$ , que é um eixo de simetria. Por consequência disto, tanto  $T(-2) = 0$  quanto  $T(2) = 4$  são os extremos de um diâmetro de  $C'$  cujo centro é  $(2, 0)$  e o raio  $r = 2$ .  $C'$  tem, portanto, a equação  $|w - 2| = 2$ . O raciocínio para determinar a imagem do disco  $|z| < 2$  seria o mesmo utilizado anteriormente.

Figura 3.16 – A transformação linear fracionária  $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ .

(a) O disco  $C : |z| \leq 2$  no plano- $z$ .



(b) A imagem de  $C$  no plano- $w$  através de  $w = \frac{z+2}{z-1}$ .



Fonte: Próprio autor.

Repare que o disco  $|z| \leq 1$  da figura 3.15a está contido no disco  $|z| \leq 2$  da figura 3.16a. Por esta razão, esperamos que a imagem de  $|z| \leq 1$  esteja contida na imagem de  $|z| \leq 2$ . Com

efeito, vemos na figura 3.16b que a região  $|w - 2| > 2$  contém o semiplano  $u < -\frac{1}{2}$  da figura 3.15b.

### 3.5 Proposta de Sequência Didática

Vislumbrar novos rumos e conhecimentos para o ensino da Matemática é uma tarefa de extrema importância. Estes novos conhecimentos e novas ações, no entanto, nem sempre demandam a descoberta de coisas inéditas dentro do universo matemático. Com os materiais certos em mãos, mesmo que eles sejam velhos conhecidos, é possível construir novas ferramentas e estratégias cuja utilização também seja significativa. O desafio então é conseguir encontrar dentre os conteúdos já consolidados de Matemática aqueles com potencial para se conectarem, tendo como base premissas didático-pedagógicas e metodologias construtivas, para que o elo entre esses conteúdos seja realmente capaz de proporcionar um ambiente educacional favorável.

Muitas vezes a Matemática é tida como fria, austera e monótona, pois é comum ouvir de professores frases do tipo: “decora isso e pronto”, “aceita e memoriza”, “algum gênio descobriu e nós só temos que aceitar”, etc. Não que isso esteja totalmente errado, afinal existem coisas na Matemática que realmente assumimos como verdadeiro e ponto final, mas com certeza isso é algo que pode ser evitado ou contornado. Por exemplo, no que diz respeito ao Conjunto dos Números Complexos, podemos trabalhar em sala de aula, inclusive de forma interdisciplinar, com a sua caracterização história vista na seção 1.1. Lá, vimos que a motivação para o surgimento dos números complexos se deu a partir da disputa entre os matemáticos Girolamo Cardano e Nicoló Fontana (Tartaglia), cujos desdobramentos são um ótimo “enredo” a ser aplicado em sala de aula, o que insere os estudantes no contexto e motiva-os a conhecer melhor esses números.

A formalização dos conceitos e propriedades também é de suma importância, pois não existe aprendizado sem embasamento teórico, mas é ainda mais importante dar sentido prático ao que foi visto. Note que isso não é, necessariamente, aplicar o conteúdo em outras áreas, ou usá-lo como ferramenta para modelar e resolver uma situação real. É tornar a teoria tangível, factível, incorporada a exemplos, problemas, representações gráficas, etc. Desta forma, através de uma Sequência Didática voltada para alunos do último ano do ensino médio, acreditamos que os mapeamentos complexos têm o potencial para dar este sentido à teoria que vimos ao longo deste trabalho.

### 3.5.1 O Mapeamento Inverso de Figuras no Plano Complexo através do *GeoGebra* - Uma Sequência Didática

Analisando o que foi abordado desde o capítulo 1, é possível ver que o estudo dos Números Complexos fornece-nos uma vasta gama de opções para a construção de objetos de aprendizagem significativos. A presente sequência didática propõe, então, uma abordagem inovadora para o estudo de figuras no plano complexo, pautada na utilização dos Mapeamentos Complexos, um recurso proveniente das Funções Complexas, através do *software GeoGebra*, tendo como motivação principal a necessidade de ver o que acontece com uma figura representada no plano complexo quando ela é submetida simultaneamente à inversão no círculo unitário e reflexão em relação ao eixo das abscissas.

Vimos nas seções 3.1 e 3.3 o que é e como se comporta um mapeamento complexo em geral e, em particular, o inverso. Não é necessário, portanto, repetirmos aqui. Em primeiro lugar, saiba que isso faz parte apenas da fundamentação teórica e metodológica da sequência didática, pois os alunos não precisam saber tudo isto. Eles apenas devem dominar o plano complexo, as operações com números complexos e terem noções da função complexa inversa, ou seja, eles precisam saber escrevê-la e manipulá-la, sem muito rigor ou formalismos.

Como criar então o *link* entre o plano complexo e os mapeamentos inversos sem uma carga teórica pesada? Simples, basta partir direto para a ação. Devemos considerar uma figura qualquer no plano complexo e, através das funções pré-definidas do *GeoGebra*, aplicar simultaneamente uma inversão no círculo unitário e uma reflexão em relação ao eixo das abscissas em um ponto (pelo menos) sobre a figura. Em outra janela de visualização, construir a mesma figura, definir um ponto sobre ela e, a partir das coordenadas deste ponto, calcular a imagem dele através da função inversa  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Depois disto, basta habilitar o rastro dos pontos obtidos após as devidas manipulações em cada janela, mover os pontos iniciais sobre a figura e comparar os resultados. Notaremos que a figura formada pelo rastro dos pontos em ambas as janelas de visualização será a mesma, mostrando que um mapeamento inverso de uma figura no plano complexo nada mais é do que uma inversão no círculo unitário e uma reflexão em relação ao eixo real. Detalharemos a sequência didática logo mais, cujo passo a passo para as construções esta na metodologia.

No que diz respeito ao *GeoGebra*, ele é um *software* livre, extremamente fácil, intuitivo e mesmo uma pessoa inexperiente consegue utilizá-lo sem muita dificuldade. Todavia, o canal “O GeoGebra”, no *YouTube*, por exemplo, apresenta excelentes tutoriais em vídeo para quem

quiser aprender mais sobre esta ferramenta educacional incrível.

**Disciplina:** Matemática.

**Conteúdo Explorado:** O mapeamento inverso de figuras no plano complexo.

**Pré-requisitos:** Operações básicas em  $\mathbb{C}$ , plano complexo e noções de função complexa, os quais serão detalhados mais adiante na Metodologia.

**Tempo Previsto:** 4 aulas.

**Ano/Série:** Último ano do ensino médio.

**Objetivos:** Estão abarcadas nesse trabalho as seguintes finalidades:

- Tornar o ensino dos Números Complexos mais dinâmico e interessante;
- Criar novas ferramentas de ensino com potencial para a aprendizagem, e
- Utilizar técnicas do Cálculo Complexo atreladas aos conteúdos comuns do ensino básico.

**Recursos Didáticos:** Giz (pincel), quadro (lousa), datashow, computador (laboratório de informática) ou notebook, celular e tablet (em sala).

**Resultados Esperados:** Esperamos que os alunos sejam capazes de compreender que mapear uma região no plano complexo através da função complexa inversa é o mesmo que submeter esta região às funções inversão no círculo unitário e conjugado complexo.

**Metodologia:** Primeiramente, convém exemplificar aqui o que se espera do aluno como pré-requisitos, uma vez que, provavelmente, o professor terá que reforçá-los com a turma. O aluno precisa:

- (i) Saber que os eixos das abscissas e ordenadas no plano complexo são, respectivamente a parte real e imaginária de um número complexo. Com isso, um ponto  $z = x + yi$  no plano complexo tem coordenadas  $(x, y)$ ;

- (ii) Saber escrever a expressão  $\frac{1}{z}$  em termos de  $x$  e  $y$ , e usar o conjugado para obter a simplificação

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right), \text{ e}$$

- (iii) Considerar que uma função complexa inversa é da forma

$$f(z) = \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right), \quad (3.23)$$

onde  $\frac{x}{x^2+y^2}$  é a parte real de  $f$  e  $\frac{-y}{x^2+y^2}$  é a parte imaginária de  $f$ .

Os itens mencionados são perfeitamente cabíveis para o público alvo. É importante, no entanto, citar alguns exemplos numéricos de modo que os estudantes possam ver que  $f(z) \in \mathbb{C}$  e que é um número da forma  $f(z) = u + vi$ . Feito isto, vamos para as construções no *software*. Lembre-se que estamos considerando o plano do *GeoGebra* como sendo o plano complexo.

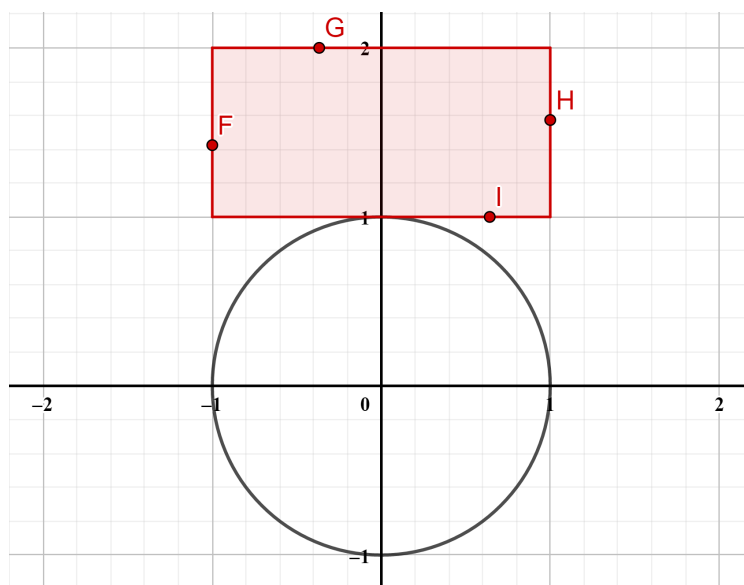
**Janela de Visualização 1:** Construa o círculo unitário  $|z| = 1$ , isto é,  $x^2 + y^2 = 1$ . Este é o círculo no qual faremos a inversão. Escolha uma das figuras a seguir e represente-a no *GeoGebra* (É claro que não precisa ser só uma, ou especificamente estas. São só exemplos convenientes).

1. O retângulo de vértices  $-1 + i$ ,  $-1 + 2i$ ,  $1 + 2i$  e  $1 + i$ ;
2. A reta  $x = 1$ ;
3. A circunferência  $|z| = 2$ ;
4. A circunferência  $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ , ou seja, de centro em  $z_0 = \frac{1}{2}$  e raio  $\frac{1}{2}$ ;
5. A circunferência  $|z - 3 - 3i| = 4$ , ou seja, de centro em  $z_0 = 3 + 3i$  e raio 4;
6. O triângulo de vértices  $-2 - \frac{1}{2}i$ ,  $2 - \frac{1}{2}i$  e  $-i$ .

Considerando a representação no *GeoGebra* do retângulo do exemplo 1, obtemos como vértices os pontos  $B = (-1, 1)$ ,  $C = (-1, 2)$ ,  $D = (1, 2)$  e  $E = (1, 1)$ . Marque então os pontos  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $I$  sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$  e  $\overline{EB}$ , respectivamente. Certifique-se de que ao arrastá-los, eles permaneçam sobre os lados do retângulo. Nos casos em que a figura é um polígono devemos marcar um ponto sobre cada um de seus lados, pois um único ponto não percorrerá

todo o perímetro da figura. Para melhorar a visualização, oculte o centro  $A = (0,0)$ , os vértices  $A, B, C$  e  $D$  e os rótulos de tudo, deixando somente os pontos  $F, G, H$  e  $I$  visíveis e rotulados. Se quiser, mude o estilo e cores da figura. O resultado será algo parecido com a ilustração a seguir:

Figura 3.17 – O retângulo de vértices  $-1 + i, -1 + 2i, 1 + 2i$  e  $1 + i$ .



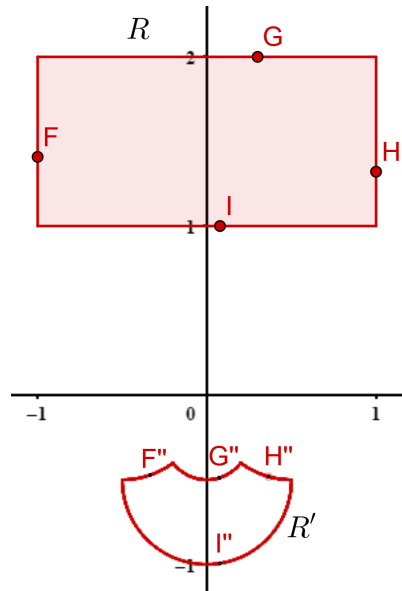
Fonte: Próprio autor.

Agora é hora de aplicar a inversão no círculo unitário e a reflexão em relação ao eixo real, nesta ordem. Para isto, escolha a opção “Inversão”, selecione o ponto  $F$  e o círculo unitário, gerando o ponto  $F'$ , que é o inverso de  $F$ . Na sequência, escolha a opção “Reflexão em Relação a uma Reta”, selecione o ponto  $F'$  e o eixo real (eixo  $x$ ), obtendo o Ponto  $F''$ . Note que o ponto  $F''$  é, portanto, resultado de uma inversão no círculo unitário e a reflexão em relação ao eixo real. Habilite o rastro de  $F''$  clicando com o botão direito do *mouse* sobre ele. Repita o mesmo processo com os demais pontos  $G, H$  e  $I$ .

Novamente, para despoluir a construção, oculte a malha quadriculada, o círculo unitário e os pontos  $F', G', H'$  e  $I'$ , mantendo na tela somente o retângulo e os pontos  $F, G, H, I, F'', G'', H''$  e  $I''$ . Nossa construção está pronta! Clique e arraste os pontos sobre o retângulo. Observe que  $F'', G'', H''$  e  $I''$  descrevem a trajetória que representa o retângulo sob inversão e reflexão. Para iniciar a animação, basta clicar com o botão direito do *mouse* sobre os pontos do retângulo e marcar “Animação”, ou dar *play* nos pontos cujas coordenadas estão na Janela de Álgebra no canto esquerdo. Uma boa dica é diminuir o tamanho dos pontos  $F'', G'', H''$  e  $I''$  para 1 (um), pois o rastro fica mais estreito e melhora a visualização. Denotaremos o retângulo por  $R$  e o

resultado obtido após a inversão e reflexão, de  $R'$ . Esperamos que o resultado obtido seja similar ao mostrado na figura a seguir:

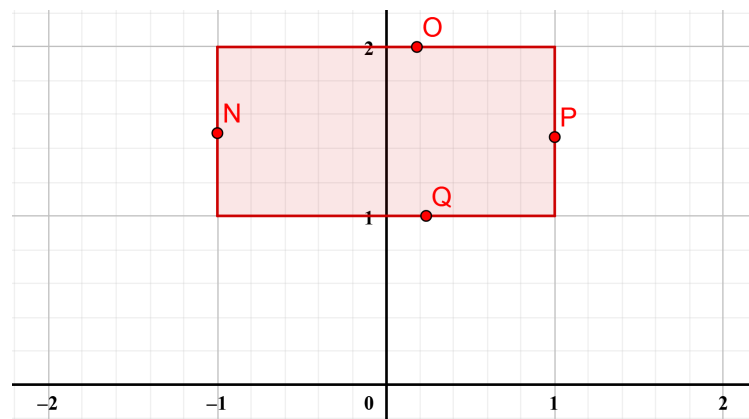
Figura 3.18 – A região  $R'$ , resultado da inversão e reflexão do retângulo  $R$ .



Fonte: Próprio autor.

**Janela de Visualização 2:** Para que essa janela apareça, basta acessar o menu do *GeoGebra* no canto superior direito (três barrinhas horizontais), clicar em “Exibir” e marcar a opção “Janela de Visualização 2”. Nosso foco agora é criar um comparativo entre as duas janelas de visualização, construindo a região  $R'$  da figura 3.18 a partir da aplicação da função inversa  $f(z) = \frac{1}{z}$  nos pontos do retângulo  $R$ . Na nova janela, o primeiro passo é construir novamente o retângulo  $R$  e marcar os pontos sobre seus lados, seguindo exatamente as instruções dadas para a primeira janela, não sendo necessário o círculo unitário, conforme ilustrado a seguir:

Figura 3.19 – O retângulo de vértices  $-1 + i$ ,  $-1 + 2i$ ,  $1 + 2i$  e  $1 + i$ .



Fonte: Próprio autor.



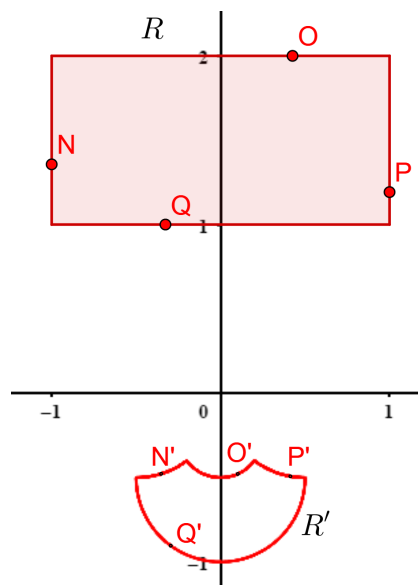
Agora vem a parte mais importante! Temos que aplicar  $f$  nas coordenadas dos pontos  $N$ ,  $O$ ,  $P$  e  $Q$ . Sabemos que  $f(z) = u + vi$ , com  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$  e  $v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ , sendo  $x$  a parte real de  $z$  e  $y$  a parte imaginária. Sendo assim, no campo “Entrada” na Janela de Álgebra do *GeoGebra*, digitamos as coordenadas dos pontos a seguir:

$$N' = \left( \frac{x(N)}{x(N)^2 + y(N)^2}, \frac{-y(N)}{x(N)^2 + y(N)^2} \right); \quad O' = \left( \frac{x(O)}{x(O)^2 + y(O)^2}, \frac{-y(O)}{x(O)^2 + y(O)^2} \right);$$

$$P' = \left( \frac{x(P)}{x(P)^2 + y(P)^2}, \frac{-y(P)}{x(P)^2 + y(P)^2} \right), \quad e \quad Q' = \left( \frac{x(Q)}{x(Q)^2 + y(Q)^2}, \frac{-y(Q)}{x(Q)^2 + y(Q)^2} \right).$$

Quando escrevemos, por exemplo,  $x(N)$  e  $y(N)$ , o *software* entende que é para usar a coordenada  $x$  e  $y$  do ponto  $N$ , respectivamente, e à medida que  $N$  se move, esses valores atualizam automaticamente. Notem também que a primeira coordenada do ponto  $N'$  calcula a parte real de  $f$  aplicada em  $N$ , enquanto a segunda coordenada de  $N'$  retorna a parte imaginária de  $f$  sobre  $N$ . O mesmo ocorre para os demais pontos. É necessário fazer exatamente dessa maneira, pois só assim os pontos  $N'$ ,  $O'$ ,  $P'$  e  $Q'$  vão se mover quando arrastarmos ou animarmos os pontos  $N$ ,  $O$ ,  $P$  e  $Q$ . Feito isto, basta habilitar o rastro de  $N'$ ,  $O'$ ,  $P'$  e  $Q'$  e seguir as mesmas dicas de antes para melhorar a visualização. Ao arrastar ou animar os pontos sobre  $R$ , este deve ser o resultado obtido:

Figura 3.20 – A região  $R'$ , resultado da aplicação de  $f$  no retângulo  $R$ .



Fonte: Próprio autor.

É fácil ver que as figuras 3.18 e 3.20 são idênticas, pois sabemos que mapear o retângulo  $R$  através da função inversa  $f(z) = \frac{1}{z}$  é o mesmo que aplicar em  $R$  as funções **inversão no círculo unitário** e **conjugado complexo** vistas na seção 3.3. No entanto, os alunos não sabem disto, pelo contrário. É justamente o que queremos mostrar a eles. Vamos então à pergunta principal:

**Pergunta Principal:** Mesmo sabendo que as figuras tiveram processos de construção distintos em cada janela, o que podemos concluir?

Antes ou além da pergunta principal, outros questionamentos norteadores e reflexões com a turma também podem ser feitos, tais como:

1. Qual número complexo tem a propriedade de simetria em relação ao eixo real?

*Resposta Esperada: O Conjugado.*

2. Vocês são capazes de definir uma função complexa que sempre retorna o conjugado? Se sim, qual lei de formação ela tem?

*Resposta Esperada: Sim. Seria uma função do tipo  $c(z) = \bar{z}$ .*

3. Dado um número complexo  $z$  qualquer e considerando somente a inversão no círculo unitário, o que acontece com  $|z|$  e sua inversão à medida que  $z$  se afasta ou se aproxima da origem  $(0,0)$ ?

*Resposta Esperada: Quanto mais  $z$  se afasta, mais a inversão se aproxima da origem, e quanto maior é  $|z|$ , menor é o módulo da inversão.*

4. O que é preciso fazer com  $z$  para equacionar o que foi constatado na pergunta anterior?

*Resposta Esperada: Dividir  $z$  por  $|z|^2$ .*

5. Qual expressão pode representar a inversão no círculo unitário?

*Resposta Esperada:  $h(z) = \frac{z}{|z|^2}$ .*

6. Sabendo que  $z = x + yi$  e  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , como podemos escrever a expressão da pergunta anterior em termos de  $x$  e  $y$ ?

*Resposta Esperada:  $h(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{x + yi}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \frac{x + yi}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ .*

7. Qual é o conjugado da expressão obtida na pergunta anterior? Em outras palavras, qual é expressão para  $\overline{h(z)}$ ?

*Resposta Esperada:*  $\overline{h(z)} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$

8. O que podemos dizer sobre o resultado acima e a expressão dada em (3.23)?

*Resposta Esperada:* São iguais, isto é, a função inversa é o resultado da aplicação do conjugado na expressão de inversão no círculo unitário.

9. Como podemos escrever isto em termos de função composta e o que podemos concluir?

*Resposta Esperada:*  $f(z) = c \circ h(z) = c(h(z)).$  Podemos concluir que a função inversa é a composição de uma inversão no círculo unitário com o conjugado complexo.

Reiteramos que as perguntas acima são apenas norteadoras e esperamos que suas respectivas respostas sejam concluídas através da experimentação dentro do *GeoGebra*, não apenas de abstrações e deduções formais, pois o objetivo principal é mostrar que um mapeamento inverso é obtido através de uma inversão no círculo unitário seguida de uma reflexão no eixo real, usando as perguntas norteadoras ou não. Quanto mais natural isto acontecer, mais significativo será para os alunos.

Lembramos também que o mais importante para o momento é desenvolver a interpretação, raciocínio lógico e pensamento crítico nos alunos e que todas as descobertas e relações devem ser consideradas e anotadas no caderno. Para fixação e exercício, ficam as demais figuras apresentadas anteriormente, no início da metodologia. Podemos dizer que o exemplo abordado aqui foi o mais desafiador, pois precisamos de quatro pontos sobre a figura, enquanto os demais são mais simples, pois usam no máximo três.

**Avaliação:** A avaliação deve ser feita de forma contínua, considerando desde a anotação e estudos prévios (10%), construções no *GeoGebra* (30%), resolução dos exercícios propostos (40%), até a participação e discussão no desfecho da atividade (20%).

**Considerações Finais:** Sabemos que podem existir barreiras que dificultam a aplicação desta sequência didática, tais como falta de laboratório de informática, pouco ou nenhum domínio de funções compostas por parte dos alunos, etc, mas o professor pode contornar essas dificuldades e fazer adaptações. Podemos abordar também outros temas além do mapeamento inverso, tais

como: caracterização história de um número complexo; representação matricial; mapeamentos lineares; transformações lineares fracionárias, ou até mesmo o teorema do círculo preservado, só que numa visão mais simplificada e familiar. Os caminhos são muitos.

Como se pode ver, a presente proposta didática mostra o quanto o estudo dos Números Complexos tem potencial no ensino da Matemática. No entanto, para garantir um ensino significativo, não apenas mecânico, é preciso reconhecer que os Números Complexos devem ser abordados em sala de aula evidenciando não somente suas relações e propriedades, mas também suas origens históricas e representações gráficas, evitando a memorização indiscriminada de fórmulas e algoritmos.

O uso da tecnologia também se faz necessário, já que ela está cada vez mais presente na vida e cotidiano das pessoas. Quando utilizada de forma correta, as novas tecnologias de ensino servem de ferramenta para a busca do conhecimento útil, pois torna as aulas mais dinâmicas, onde o professor assume o papel de mediador; propicia a observação e compreensão de relações em uma construção; permite a experimentação de hipóteses e elaboração de conclusões; instiga discussões, etc, contribuindo significativamente para a aprendizagem, da qual os alunos precisam ser os protagonistas.

## REFERÊNCIAS

- AGUILAR, I.; DIAS, M. S. **A Construção dos Números Reais e suas Extensões**. 4. ed. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, 2015.
- CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. História dos números complexos. **Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática - CAEM. Instituto de Matemática e Estatística da USP**, I, n. 1, p. 1–13, 2001. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>>.
- LIMA, E. L. **Análise Real - vol. 2**. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2016.
- LIMA, E. L. **Álgebra Linear - vol. 1**. 9. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2016.
- LIMA, E. L. **Números e Funções Reais - Coleção PROFMAT**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2017.
- NETO, A. L. **Funções de uma variável complexa**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2016.
- SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 1999.
- ZILL, D. G.; SHANAHAN, P. D. **A First Course in Complex Analysis with Applications**. [S.l.]: Jones and Bartlett Publishers, 2003.