HELAINA DE FÁTIMA VINHAS PEREIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO TEÓRICO DE ESTUDANTES DO QUINTO ANO NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS E DO CONCEITO DE MEDIDA

LAVRAS – MG
2021

HELAINA DE FÁTIMA VINHAS PEREIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO TEÓRICO DE ESTUDANTES DO QUINTO ANO NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS E DO CONCEITO DE MEDIDA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Educação, área de concentração em Formação de Professores, para obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Kleber Tüxen Carneiro
Orientador

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Co-orientador

LAVRAS – MG

2021

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Pereira, Helaina de Fátima Vinhas.
O desenvolvimento do pensamento teórico de estudantes do quinto ano na aprendizagem dos números racionais e do conceito de medida / Helaina de Fátima Vinhas Pereira. - 2021.
142 p. : il.

Orientador(a): Kleber Tüxen Carneiro.
Coorientador(a): José Antônio Araújo Andrade.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Lavras, 2021.
Bibliografia.

1. Educação Matemática. 2. Teoria Histórico-Cultural. 3. Formação de Professores. I. Carneiro, Kleber Tüxen. II. Andrade, José Antônio Araújo. III. Título.

HELAINA DE FÁTIMA VINHAS PEREIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO TEÓRICO DE ESTUDANTES DO QUINTO ANO NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS E DO CONCEITO DE MEDIDA

THE DEVELOPMENT OF FIFTH GRADE STUDENTS' THEORETICAL THINKING IN LEARNING RATIONAL NUMBERS AND THE CONCEPT OF MEASUREMENT

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Educação, área de concentração em Formação de Professores, para obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 24 de junho de 2021.

Prof. Dr. Kleber Tüxen Carneiro	UFLA
Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade	UFLA
Prof. Dr. Ronei Ximenes Martins	UFLA
Profa. Dra. Maria do Carmo de Sousa	UFSCar

Kleber T.

Prof. Dr. Kleber Tüxen Carneiro
Orientador

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Co-orientador

LAVRAS – MG
2021

A todos os Profissionais da Educação... Em especial, aos que despertaram em mim, desde a infância, o desejo de trilhar os caminhos do saber.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Lavras, seus gestores, professores e funcionários. A qualidade do ensino e o belo campus a tornam uma das melhores universidades do país.

Aos professores do Mestrado Profissional em Educação, em particular: Helena, Ronei, Francine, Vanderlei, Kleber, Fábio, Jacqueline, Marco, Mauriceia, Ilsa e Patrícia, por tantos ensinamentos!

Aos membros da banca, Maria do Carmo e Ronei, pelas valiosas contribuições.

Ao meu orientador, Kleber Tüxen Carneiro, por tornar possível a continuidade da pesquisa... Pela ética e gentileza de sempre!

Ao meu co-orientador, José Antônio Araújo Andrade, por me acolher no mestrado, pelos incontáveis encontros de orientação, pela confiança, por não me deixar desistir, por personificar o sonho dos meus alunos... Eternamente grata pelo carinho, dedicação e amizade!

Aos colegas do mestrado, pelas trocas de experiências e pelas amizades que brotaram na convivência; destaco a Isabely, pela parceria e *co-orientação*.

Aos colegas do grupo de pesquisa Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural, pela riqueza das nossas discussões – fundamento desta pesquisa.

À comunidade escolar: diretora, pedagoga, funcionários da escola e responsáveis pelos alunos, pela permissão, apoio e flexibilidade para a produção dos dados da pesquisa.

Aos estudantes do quinto ano, que *embarcaram* comigo nessa *viagem* inesquecível... Vocês foram maravilhosos!

Aos familiares e amigos que me incentivaram e orientaram na volta aos estudos... Em especial, Jeferson, Carla e Alessandro, meus *pré*-orientadores!

Ao Ideraldo, pelo amor incondicional, por suportar minhas ausências, por dar *asas* aos meus sonhos...

À Fernanda e à Mariana, pela paciência nos meus momentos difíceis... Filhas, o apoio de vocês me fortaleceu!

Aos meus pais, Haroldo (que foi para o *Céu* durante o mestrado) e Ofélia, pelo exemplo de amor, pelo encorajamento, por se preocuparem tanto comigo! O que sou hoje devo a vocês.

A Deus... pela vida, saúde e generosas bênçãos. Como Deus é bom!

Ninguém sabe tudo, assim como ninguém ignora tudo. [...] Quem tudo soubesse já não poderia saber, pois não indagaria. O homem, como um ser histórico, inserido num permanente movimento de procura, faz e refaz constantemente o seu saber.

PAULO FREIRE

RESUMO

A presente pesquisa visou analisar o desenvolvimento do pensamento teórico em processos de significação gerados por estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental em uma situação desencadeadora de aprendizagem (SDA) dos números racionais e do conceito de medida, intitulada *A viagem e o amigo misterioso*. Com base nos pressupostos do materialismo histórico-dialético (Karl Marx, Pável Kopnin) e na teoria histórico-cultural (Lev S. Vigotski, Alexei Leontiev, Vasily Davidov), realizou-se pesquisa exploratória, delineada como estudo de caso, de abordagem qualitativa, em uma escola pública do interior de Minas Gerais, para responder à seguinte questão: que sentidos e significados os estudantes explicitam, em sua atividade, em uma situação desencadeadora de aprendizagem dos números racionais e do conceito de medida? Os objetivos específicos foram analisar se a SDA suscitou a atividade dos estudantes e identificar os sentidos e significados produzidos. A análise dos dados se deu a partir da constituição de núcleos de significação, que explicitam os nexos conceituais do número racional e da medida, bem como as evidências do desenvolvimento da autonomia dos estudantes. A pesquisa propiciou maior aproximação entre os conhecimentos acadêmicos e a práxis escolar, além da ressignificação da prática docente e a autonomia intelectual dos estudantes, por meio do desenvolvimento do raciocínio e da argumentação matemática. Além deste relato, foi desenvolvido um produto educacional: uma unidade didática, apensada à pesquisa.

Palavras-chave: Educação Matemática. Teoria Histórico-Cultural. Teoria da Atividade. Nexos Conceituais. Formação de Professores.

ABSTRACT

The present research aimed to analyze the development of theoretical thinking in signification processes generated by fifth grade elementary school students in a triggering-situation of learning of rational numbers and the concept of measure, titled *The journey and the mysterious friend* . Based on the assumptions of historical-dialectical materialism (Karl Marx, Pável Kopnin) and the cultural-historical theory (Lev S. Vigotski, Alexei Leontiev, Vasily Davidov), it was presented this exploratory research, outlined as a case study, in a qualitative approach, in a public school in the interior of Minas Gerais, to answer the following question: what senses and meanings do students make explicit, in their activity, in a triggering-situation of learning of rational numbers and the concept of measurement? The specific objectives were to analyze whether the triggering-situation of learning elicited student activity and to identify the senses and meanings produced. The data analysis based on the constitution of the meaning cores, which make explicit the conceptual connections of the rational number and the measure, as well as the evidence of the development of students' autonomy. The research provided a closer relationship between academic knowledge and school praxis, furthermore the re-signification of teaching practice and the intellectual autonomy of students, through the development of mathematical argumentation and reasoning. In addition to this report, an educational product was developed: a didactic unit, attached to this research.

Keywords: Mathematics Education, Cultural-Historical Theory. Activity Theory. Conceptual Nexus. Teacher Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

AOE	Atividade Orientadora de Ensino
SDA	Situação Desencadeadora de Aprendizagem
THC	Teoria Histórico-Cultural
UD	Unidade Didática
ZDI	Zona de Desenvolvimento Iminente

LISTA DE SIGLAS

PPTHC	Grupo de Pesquisa Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural
UFLA	Universidade Federal de Lavras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática está em constante construção. Trata-se de uma ciência viva, impregnada de humanidade, "[...] com suas forças e fraquezas e subordinada às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação" (CARAÇA, 2010, p. XIII). A Matemática contribui para solucionar problemas práticos do cotidiano, científicos e tecnológicos; sua influência se estende desde o mundo do trabalho até as grandes descobertas da humanidade.

Devido à sua grande aplicação na vida social, de acordo com o Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2018, p. 653), o conhecimento matemático é

> [...] essencial para a formação de cidadãos críticos, capazes de compreender e transformar o mundo à sua volta, fazer observações sistemáticas identificando padrões e regularidades existentes, resolver situações-problema, estabelecer relações entre temas matemáticos de diferentes campos, e entre esses temas e conhecimentos de outros componentes curriculares e desenvolver nos estudantes a capacidade de interagir com seus pares de forma colaborativa.

Assim, os conhecimentos matemáticos desenvolvem o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, possibilitando ao sujeito compreender e atuar na sociedade.

Entretanto, percebe-se que alguns professores enfrentam desafios no ensino de conceitos, como os de número racional e medida. De modo geral, há pouco entendimento acerca dos sentidos e significados produzidos pelos estudantes e de como esse processo de significação possibilita o desenvolvimento do pensamento teórico, foco do trabalho docente.

A presente pesquisa partiu das inquietações da pesquisadora/professora que, há mais de vinte anos, atua nos anos iniciais em uma escola pública municipal de Ensino Fundamental. Apesar da vivência de dificuldades relacionadas a conceitos matemáticos em sua vida escolar, viu-se desafiada a assumir a educação matemática em uma turma de quinto ano do Ensino Fundamental. Além disso, buscou a oportunidade de ressignificar sua prática e foi admitida no Programa de Pós-Graduação em Educação na Universidade Federal de Lavras (UFLA).

Nessa universidade, a pesquisadora foi convidada a participar do grupo de pesquisa Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural (PPTHC), liderado por seu co-orientador. Portanto, o desafio desta pesquisa parte do foco dos estudos do PPTHC: estimular a autonomia intelectual dos estudantes por meio de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA), analisadas à luz da Teoria Histórico-Cultural (THC).

Na revisão bibliográfica realizada, entre janeiro de 2000 e maio de 2019, constatou-se dez produções que inter-relacionam os conceitos de números racionais e medida em uma perspectiva lógico-histórica. Foram analisadas pesquisas disponíveis nas seguintes bases de dados: Portal Periódicos Capes, com buscas que envolveram as palavras-chave *teoria histórico-cultural* e *matemática*; Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e Google Acadêmico (com as palavras-chave *números racionais* e *medidas*). No Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, após filtragens de grande área de conhecimento e área de concentração, foram encontrados 655 pesquisas, das quais foram selecionadas para leitura apenas as que forneceram indícios da perspectiva teórica histórico-cultural (por indicação no título, resumo ou bibliografia).

Destacam-se as dissertações de Amorim (2007) e Rodrigues (2015), ambas relacionadas a alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Salienta-se, ainda, a dissertação de Zeferino (2016), por sua contribuição à formação docente, ao estudar a relação entre o desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina Matemática e suas ações na organização do ensino.

Tais estudos demonstram que o ensino do número racional e da medida em uma perspectiva lógico-histórica pode contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e promover mudanças significativas no processo de aprendizagem; porém, a formação docente nem sempre contempla esses conhecimentos.

Além disso, o conhecimento matemático é cercado de mitos. Em dadas situações, a Matemática é vista como verdade absoluta. No entanto, é uma construção humana, acessível à compreensão e à construção coletiva (CARAÇA, 2010). Por isso, a educação matemática deve criar condições para que os alunos desenvolvam seu pensamento. Esse movimento de ideias – essa dialética – nos torna humanos e possibilita o surgimento e a consolidação do conhecimento, sua aceitação ou sua negação (KOPNIN, 1978).

Nesse sentido, a questão da pesquisa foi: *que sentidos e significados os estudantes explicitam, em sua atividade, em uma situação desencadeadora de aprendizagem dos números racionais e do conceito de medida?* O objetivo geral foi analisar o desenvolvimento do pensamento teórico em processos de significação gerados por estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental em uma SDA dos números racionais e do conceito de medida. Os objetivos específicos foram analisar se a SDA suscitou a atividade dos estudantes e identificar os sentidos e significados produzidos.

O alcance desses objetivos levou à aproximação entre os conhecimentos acadêmicos e a práxis escolar; além disso, a pesquisadora – e também professora dos sujeitos da pesquisa –

passou do ensino de conceitos isolados a uma prática ressignificada e fundamentada, o que possibilitou a reafirmação de sua autonomia docente, bem como o desenvolvimento da autonomia intelectual dos estudantes, por meio do raciocínio e da argumentação matemática.

Desse modo, pretende-se salientar a relevância de se considerar os aspectos lógico-históricos no desenvolvimento da atividade de ensino. Isso significa que o professor pode, em sua atividade, elaborar, desenvolver e analisar SDA: situações que tenham o potencial de gerar processos de significação e suscitar a atividade do sujeito, ao agir na zona de desenvolvimento iminente. Nessas SDA, o trabalho com os conceitos precisa partir de seus nexos conceituais, das necessidades históricas que os originaram e de suas inter-relações. Nesse sentido, a intencionalidade da mediação docente pode levar a esse movimento: a atividade de ensino (do professor) enquanto provocadora da atividade de estudo (do discente).

Assim, na segunda seção da pesquisa, apresentam-se os constructos da THC, os quais orientaram toda a pesquisa, desde a construção do projeto, passando pela produção dos dados e sua respectiva análise. A THC pauta-se no materialismo histórico-dialético enquanto método de movimento do pensamento no sentido de novos conhecimentos. Por isso, conceitos como *trabalho, atividade, lógico-histórico, mediação, zona de desenvolvimento iminente* e *pensamento teórico*, que permeiam toda a pesquisa, se inter-relacionam nesta seção.

Por fim, ainda na seção dois, ensaiam-se interfaces entre a Teoria da Atividade – cujo principal precursor é Alexei Leontiev – e as situações de jogo vivenciadas pelos sujeitos da pesquisa. Essa subseção partiu de uma inquietação da pesquisadora, ao estudar algumas teorias que fundamentam o jogo em uma disciplina do mestrado, ao mesmo tempo em que participava das discussões do grupo de pesquisa PPTHC. Nesta subseção buscou-se, sobretudo, a compreensão das possibilidades que a atividade subjetiva traz aos processos educacionais, enquanto movimento transformador e gerador de desenvolvimento, bem como possíveis aproximações e distanciamentos conceituais. Revela-se, ainda, a possibilidade de suscitar a atividade dos sujeitos por meio de um jogo de faz-de-conta.

Na terceira seção, perpassa-se o desenvolvimento lógico-histórico dos números racionais e do conceito de medida: o número e a medida, como outros conceitos, se desenvolveram a partir de necessidades dos seres humanos. Assim, considera-se uma alternativa didático-pedagógica promissora que os conceitos trabalhados na escola tomem como ponto de partida a compreensão dessas necessidades que os originaram, ou seja, o ensino dos conceitos de número racional e medida poderia partir de seus nexos conceituais. Os nexos compreendem o percurso lógico-histórico do pensamento do conceito, isto é, as ligações que se estabelecem entre os modos de pensar o conceito, que “[...] contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento” (SOUSA, 2004, p. 61).

A metodologia desta pesquisa qualitativa é apresentada ao longo da quarta seção: o objeto de investigação, os participantes, o contexto, a unidade didática elaborada e desenvolvida, os instrumentos de produção de dados e como se deu o estabelecimento das categorias para análise dos dados.

Finalmente, analisam-se os dados obtidos a partir do estabelecimento de categorias de análise: os núcleos de significação (AGUIAR; OZELLA, 2006) explicam o processo de constituição do objeto de estudo, numa perspectiva histórico-dialética. Nos núcleos de significação, verificam-se as contradições, semelhanças e complementaridades na articulação de conteúdos, levando em conta o contexto histórico e cultural da definição do conceito.

O primeiro núcleo de significação analisa os sentidos e significados produzidos pelos estudantes e as possibilidades de desenvolvimento do pensamento teórico ou, ao menos, a iminência desse desenvolvimento. O segundo núcleo de significação trata do desenvolvimento da autonomia dos estudantes nas relações estabelecidas no espaço escolar.

Em anexo, apresenta-se a unidade didática elaborada e desenvolvida. Ressalta-se que foi elaborada a partir de um contexto histórico e cultural específico – não se pretendeu criar *receita didática* – e que, por esse motivo, não há possibilidade de generalização direta dos resultados. Entretanto, o material apresentado pode servir de base para a construção de novas práticas e a análise pode contribuir para a constituição de futura generalização naturalística.

2 CONSTRUCTOS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

A presente pesquisa foi orientada pelos constructos da teoria histórico cultural (THC). A THC pauta-se no materialismo histórico-dialético, de Karl Marx, uma abordagem de interpretação da realidade que diz respeito a como o ser humano se comporta e modifica ao longo do tempo e da história, pelo movimento do pensamento (PIRES, 1997).

A filosofia marxista, além de pensar o mundo, concebe que este está em constante transformação por meio da práxis. Essa unidade entre teoria e prática pode ser considerada a tese metodológica mais importante da filosofia marxista. A práxis constitui a essência da atividade humana, em um movimento dialético de contrários: a ação gera o pensamento, enquanto o pensamento evoca a ação.

Nessa ótica, percebe-se a ciência como algo em constante desenvolvimento e observa-se a realidade por diferentes perspectivas. Para Caraça (2010, p. 108, grifos do autor),

> a Ciência não tem, *nem pode ter*, como objetivo descrever a realidade *tal como ela é*. Aquilo a que ela aspira é a construir quadros racionais de *interpretação* e *previsão*; a legitimidade de tais quadros dura enquanto durar o seu acordo com os resultados da observação e da experimentação.

Na dimensão das humanidades, por exemplo, a realidade é contextual e vivida pelo sujeito; na dimensão das ciências exatas, a realidade é factual, orientada por leis gerais e por fenômenos concretos. Assume-se, nesta pesquisa, a noção de realidade a partir do materialismo histórico-dialético, explicada a partir de verdades históricas, válidas para um dado momento.

Esta forma de abordagem da realidade trata da descoberta das leis fundamentais que regem a organização social da humanidade, através da história, pelo movimento do pensamento. Aliás, o materialismo histórico-dialético não se limita a pensar a realidade, mas busca transformá-la por meio da práxis.

A filosofia marxista mostra, ao estudar o ser e descobrir as leis do mundo objetivo, a importância metodológica dessas leis, seu papel no conhecimento e na atividade prática. Ao estudar o processo de movimento do pensamento, ela explicita seu conteúdo (KOPNIN, 1978).

Pelo prisma do materialismo histórico-dialético, é possível repensar a prática educativa, passando-se de uma percepção aparente a uma lucidez pensada e compreendida dos muitos e contraditórios aspectos da realidade educacional. Isso significa compreender a Educação a partir de uma consciência filosófica, muito além do senso comum, e questionar: estamos a serviço da humanização ou da alienação? (PIRES, 1997)

A Educação pode possibilitar ao sujeito o desenvolvimento de sua autonomia intelectual, para que compreenda e atue na sociedade. Entretanto, para Kopnin (1978), a base essencial do pensamento humano está na prática, ou seja, na transformação da natureza pelo homem. A atividade do sujeito objetiva o conteúdo do pensamento e produz conhecimento. Por isso, é preciso considerar-se a essência da categoria *trabalho* no contexto do materialismo histórico-dialético.

2.1 A categoria *trabalho* no materialismo histórico-dialético e a atividade educativa

O conhecimento humano é constituído dialeticamente e permanece nesse movimento de forma cíclica. Segundo Marx (2011), a categoria que melhor representa o movimento de produção de conhecimento pela humanidade é o trabalho, quando concebido como práxis. A práxis é unidade dialética entre o agir e o pensar, é a atividade humana na sua essência. Trata-se de um movimento que se estabelece na unidade de contrários, em que cada ação evoca a construção de uma forma de pensar sobre ela, assim como toda forma de pensar gera uma ação. Marx (2011, p. 335) afirma que

> [...] o processo de trabalho [...] é atividade orientada a um fim – a produção de valores de uso –, apropriação do elemento natural para a satisfação de necessidades humanas, condição universal do metabolismo entre homem e natureza, perpétua condição natural da vida humana e, por conseguinte, independente de qualquer forma particular dessa vida, ou melhor, comum a todas as suas formas sociais.

Portanto, a ação humana pode ser também educativa: por meio da práxis, o homem transforma a si mesmo e ao mundo. Para Marx (2011), por meio do trabalho o homem medeia e controla seu metabolismo com a natureza. Segundo Leontiev (2004, p. 76), "[...] o aparecimento e o desenvolvimento do trabalho [...] acarretaram a transformação e a hominização do cérebro, dos órgãos de atividade externa e dos órgãos dos sentidos". Nessa perspectiva, o homem é produto de seu trabalho, por meio do qual educa a si mesmo.

Davidov (1988, p. 39) destaca que o trabalho é a "[...] base genética para os demais tipos de atividades humanas"; é por meio dele que as futuras gerações se apropriam da cultura produzida pelas gerações anteriores. Portanto, enquanto modo de transformação da natureza, o trabalho é essencialmente humano; é a forma mais objetiva que o homem desenvolveu para se organizar em sociedade e deve aparecer como princípio educativo – educar pelo trabalho (PIRES, 1997).

Para Saviani (2003, p. 13) "[...] o trabalho educativo é o ato de produzir, direta e intencionalmente, em cada indivíduo singular, a humanidade que é produzida histórica e coletivamente pelo conjunto dos homens". No marxismo, entende-se que tudo que há no mundo é proveniente do trabalho humano. Até mesmo a história, por ser fundada na realidade material, está em constante construção e desenvolvimento, pois é produto da ação humana.

Nessa ótica, busca-se compreender a realidade e analisá-la à luz da história e do contexto cultural, econômico e político – um movimento histórico, mas também dialético. A dialética é um método do pensamento científico que permite penetrar na essência dos fenômenos. Trata-se de um dispositivo filosófico para se pensar a realidade. A realidade é dialética, pois está em constante movimento e é contraditória.

A dialética materialista, vista como um recurso da ciência, implica em um método universal de movimento do pensamento no sentido de novos conhecimentos (KOPNIN, 1978). Assim, esta pesquisa pauta-se nesse método científico para compreensão, análise e produção de conhecimento; do projeto à finalização, as etapas da pesquisa têm como fundamento a THC, a partir do materialismo histórico-dialético.

2.2 Metodologia lógico-histórica na produção do conhecimento

Segundo Kopnin (1978), o movimento do pensamento no sentido de novos conhecimentos precisa de apoio lógico que o oriente e permita a liberdade de criação. A lógica estuda a estrutura, os meios de demonstração, o surgimento e a evolução de uma teoria científica e relaciona-se à solução de problemas. Seu desenvolvimento

> [...] é possível somente por meio de sua aproximação cada vez maior às necessidades da ciência. Aprimorar a lógica dialética como método do conhecimento teórico-científico moderno, como teoria do conhecimento é impossível sem um estudo atento do processo de evolução do conhecimento humano, da análise do conhecimento científico (KOPNIN, 1978, p. 33).

Para o marxismo, o lógico é o reflexo do histórico, ou seja, o movimento do pensamento é o reflexo do movimento dos fenômenos da realidade objetiva (KOPNIN, 1978). A compreensão dessa unidade dialética é fundamental "[...] na solução dos problemas da inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história e seu desenvolvimento" (KOPNIN, 1978, p. 186). Há historicidade na construção de um conceito e também há uma lógica que explica como o processo ocorreu.

O processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento tornam-se objeto do pensamento. "Para atingir-se um degrau mais elevado no conhecimento do objeto, é necessário recorrer justamente à sua história" (KOPNIN, 1978, p. 185). Assim, o processo histórico é reproduzido através do lógico.

A realidade é dinâmica; uma das formas de analisá-la é o estabelecimento de categorias. No processo de pensamento, o homem pauta-se em seus conhecimentos anteriores fixados em categorias, que se tornam pontos de apoio na evolução do pensamento (KOPNIN, 1978).

Toda a filosofia enquanto ciência é constituída pela inter-relação das categorias do materialismo dialético, que podem ser entendidas como recortes da realidade – suportes do pensamento – e têm como ponto de partida a relação do pensamento com o ser. Kopnin (1978) afirma que as categorias devem ser incorporadas aos conceitos e que elas têm conteúdo lógico por serem formas de pensamento. Para o autor, "[...] sob a forma de categorias refletem-se as leis mais gerais e importantes do movimento dos fenômenos do mundo" (KOPNIN, 1978, p. 107): abstrato e concreto, empírico e teórico, lógico e histórico, entre outras.

Nenhuma categoria do materialismo dialético torna-se forma de pensamento sem considerar a prática histórica e social do ser humano. Foram as necessidades humanas que geraram os conhecimentos teóricos. Compreender o modo como o conhecimento é construído muda a forma de tratar a ciência. Ela passa a ser vista como algo em desenvolvimento, com suas hesitações e contradições, influenciada pela vida social e impregnada de humanidade (CARAÇA, 2010). Além disso, esse conhecimento demanda coerência na forma de pensar e agir.

A investigação científica, enquanto ato de produção de conhecimento, manifesta a natureza social da ciência, pois se baseia na interação prática do sujeito com o objeto. Para Kopnin (1978, p. 225), o homem deve dominar o pensamento, ou seja, "[...] transformá-lo em meio ainda mais eficiente na conquista prática das potencialidades da natureza e da sociedade". Desse modo, a investigação científica destaca-se como atividade humana, pois apreende a teoria em seu processo de formação.

Kopnin (1978, p. 237) define a teoria como "[...] um vasto campo do conhecimento que descreve e explica um conjunto de fenômenos, fornece o conhecimento dos fundamentos reais de todas as teses lançadas e reduz os descobrimentos em determinado campo e as leis a um princípio unificador único". A teoria é uma forma de pensamento que ocupa lugar no movimento de produção do conhecimento.

Ademais, o processo de pensamento passa por momentos de análise e síntese. Descobrem-se novas verdades por meio da análise; estabelecem-se as evidências por meio da síntese. Como se observa, há um movimento do desconhecido ao conhecido: uma relação dialética que reproduz o objeto de estudo no pensamento (KOPNIN, 1978).

Entretanto, para que haja autenticidade na teoria, é necessária a formulação de hipóteses – construídas, fundamentadas e demonstradas – no processo de movimento do pensamento. A hipótese faz o conhecimento avançar. São as necessidades humanas de conhecimento que fazem surgir hipóteses. No conhecimento matemático, sobremaneira, as hipóteses conduzem à obtenção de novos resultados e permitem o conhecimento das leis e propriedades do objeto.

A dialética materialista reconhece apenas um critério de veracidade das hipóteses: a prática. "Se à base da hipótese descobriu-se todo um conjunto de novos fatos e leis que podem ser explicados em dadas condições somente com base nessa e não em nenhuma outra hipótese, então ela deixa de ser hipótese e se torna teoria autêntica" (KOPNIN, 1978, p. 290). A hipótese se materializa no experimento; dessa forma, a teoria extraída do experimento reveste-se de concretude e relaciona o conhecimento empírico ao teórico num todo, em um movimento do abstrato ao concreto.

O conhecimento significativo transforma-se em instrumento cognitivo e amplia, tanto o conteúdo, quanto a forma do pensamento. Esse entendimento aproxima-se das contribuições da THC,

> [...] uma teoria sobre o movimento dialético entre a atividade humana objetivada nos conteúdos da cultura material e não material e a atividade dos sujeitos que, sendo seres sociais, só podem se desenvolver plenamente pela incorporação, à sua vida, das objetivações historicamente construídas pelo gênero humano (DUARTE, 2013, p. 8).

Por meio da atividade, entendida como movimento interno de apropriação e articulação do conhecimento, "[...] o indivíduo adquire a capacidade de planejar, de abstrair, de reconhecer conexões causais e de antecipar os acontecimentos imediatos" (NOGUEIRA; LEAL, 2018, p. 153). Portanto, o sujeito torna-se humano ao apropriar-se do conhecimento cultural e historicamente produzido pela humanidade. Assim, o desenvolvimento humano se dá por meio de atividades, de diferentes categorias, ao longo de toda a existência: a brincadeira, o estudo, o trabalho, entre outras.

2.3 O papel da mediação e a zona de desenvolvimento iminente[1]

A escola, enquanto espaço de socialização do conhecimento historicamente produzido, propicia o desenvolvimento quando são estabelecidas zonas de desenvolvimento iminente (ZDI), ou seja, "[...] desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em operação com seus companheiros" (VIGOTSKI, 1991, p. 60-61).

A ZDI configura-se, então, como foco do processo de ensino. A mediação do professor, atento às possibilidades de desenvolvimento da criança, age sobre essa *distância* entre o que o sujeito já é capaz de realizar sozinho e as possibilidades que emergem quando colocado em situação de aprendizagem, em colaboração com seus colegas.

Portanto, na transição entre o nível de desenvolvimento real (solução independente de problemas; aquilo que a criança consegue fazer por si mesma) e a ZDI (solução de problemas sob a orientação de um adulto ou um companheiro mais capaz), encontra-se o objeto de trabalho do professor: a intervenção pedagógica e a mediação da aprendizagem. A criança necessita de apoio por parte de adultos; na escola, encontra os benefícios de um contexto favorável para a aprendizagem. Embora dependente, a criança participa ativamente do próprio processo de aprendizagem (VIGOTSKI, 2001).

Em geral, a mediação se dá entre os sujeitos: nas relações entre professor e aluno ou entre estudantes. Porém, há que se considerar também o papel dos instrumentos e signos nesse processo. Isso porque a aprendizagem resulta das relações sociais do indivíduo com o mundo exterior por meio da linguagem. Assim, a palavra é vista como uma generalização latente, pois verbaliza o pensamento e carrega um significado (um aspecto interno).

Vigotski (2001) estudou a constituição histórico-social do pensamento, no processo de apropriação da cultura, através da comunicação com os outros. A relação do homem com o mundo é mediada através de instrumentos e signos. Essa comunicação envolve funções psíquicas superiores (como a memória consciente, a vontade, a abstração e o pensamento lógico) nas quais a linguagem, por meio dos signos, adquire sentido e significado na relação do sujeito com o mundo.

---

[1] Ao estudar as traduções dos textos de Vigotski a partir do original (em russo), Prestes (2012) afirma que a tradução mais fiel para *zona blijaichego razvitia* é zona de desenvolvimento *iminente*, e não *proximal*, como se lê nas traduções em língua portuguesa. Para a autora, o termo proximal é inadequado, pois caracteriza imediatismo e obrigatoriedade de ocorrência. Ao contrário, o termo iminente revela possibilidades de desenvolvimento. Por esse motivo, assume-se o termo *iminente* nesta pesquisa.

Segundo Leontiev (2004, p. 100), “[...] a significação é a generalização da realidade que é cristalizada e fixada num vetor sensível, ordinariamente a palavra ou a locução. É a forma ideal, espiritual da cristalização da experiência e da prática social da humanidade”. A experiência humana precedente – generalização da realidade, dos fenômenos historicamente objetivados – cristaliza-se nas significações. Portanto, é por esse processo que o sujeito apropria-se de toda a experiência da humanidade. A significação é

> [...] o reflexo generalizado da realidade elaborada pela humanidade e fixado sob a forma de conceitos [...]; é o reflexo da realidade independentemente da relação individual ou pessoal do homem a esta. O homem encontra um sistema de significações pronto, elaborado historicamente, e apropria-se dele tal como se apropria de um instrumento (LEONTIEV, 2004, p. 102).

Significado e sentido são conceitos intimamente ligados, porém distintos. O sentido se exprime no significado e não o contrário (LEONTIEV, 2004). O sentido é pessoal; expressa a relação do sujeito com o fenômeno objetivado em sua consciência. Leontiev (2004, p. 103) sintetiza: “[...] o sentido consciente traduz a relação do motivo ao fim”, ou seja, o sentido pode revelar o motivo da atividade.

O significado reflete a unidade do pensamento e da linguagem. Os significados podem sofrer mudanças em sua natureza interior e podem desenvolver-se, o que modifica a relação do pensamento com a palavra. Entretanto, a tomada de consciência dos diferentes significados reflete-se no desenvolvimento da comunicação da criança (VIGOTSKI, 2001).

Segundo Leontiev (2004), a linguagem reflete, fixa e dá estabilidade à significação. Similarmente, a fala aparece como principal instrumento de representação simbólica e torna-se objeto de atenção nos estudos de Vigotski (2001). Para o autor, a linguagem tem funções de comunicação, classificação e generalização do pensamento, pois seu uso implica uma compreensão generalizada do mundo.

O significado atribuído a uma palavra pode ser visto como um conceito. A formação de conceitos pela generalização, um dos mais importantes meios de conhecimento científico, é o foco do processo de aprendizagem. O processo de comunicação pressupõe a generalização e o desenvolvimento do significado da palavra. Para Vigotski (2001), o desenvolvimento se dá de fora para dentro, por meio da cultura: a aprendizagem define os rumos do desenvolvimento.

Pensamento e linguagem desenvolvem-se em vias diferenciadas, mas exercem uma importante função psicológica: a formação do pensamento verbal. Segundo Vigotski (2001), a linguagem egocêntrica da criança configura a atividade racional: acompanha a atividade prática, reflete e fixa o resultado ou os principais momentos, assume função de planejamento e direção da ação futura, ou seja, controla o próprio comportamento. À medida que essa fala se interioriza, transforma-se em pensamento verbal.

> A linguagem egocêntrica da criança não só pode não ser expressão do pensamento egocêntrico como ainda exercer uma função diametralmente oposta ao pensamento egocêntrico – a função de pensamento realista –, e assim aproximar-se [...] da lógica da ação e do pensamento racionais e sensatos (VIGOTSKI, 2001, p. 60).

Em relação ao desenvolvimento da linguagem e do intelecto, é importante destacar que "[...] um desenvolvimento não é a simples continuação direta de outro, mas ocorre uma mudança do próprio tipo de desenvolvimento – do biológico para o histórico-social" (VIGOTSKI, 2001, p. 149).

Assim, Vigotski (2001, p. 128) estabelece como proposição que "[...] só na adolescência a criança chega ao pensamento por conceitos". Por volta dos doze anos de idade, o sujeito começa a desenvolver os processos que levam à formação de conceitos. A questão central desses processos é o "[...] emprego funcional do signo ou da palavra como meio através do qual o adolescente subordina ao seu poder as suas próprias operações psicológicas [...] e lhes orienta a atividade no sentido de resolver os problemas que tem pela frente" (VIGOTSKI, 2001, p. 169).

Para expressar o conceito, as palavras são essenciais. A partir da necessidade, dos problemas propostos e das situações do meio social, o adolescente é conduzido à generalização. Portanto, o pensamento em conceitos não é possível sem o pensamento verbal: emprega-se a palavra como meio de expressar a formação do conceito.

> O conceito surge quando uma série de atributos abstraídos torna a sintetizar-se, e quando a síntese abstrata assim obtida se torna forma basilar de pensamento com o qual a criança percebe e toma conhecimento da realidade que a cerca. [...] O papel decisivo na formação do verdadeiro conceito cabe à palavra. É precisamente com ela que a criança orienta arbitrariamente a sua atenção para determinados atributos, com a palavra ela os sintetiza, simboliza o conceito abstrato e opera com ele como lei suprema entre todas aquelas criadas pelo pensamento humano (VIGOTSKI, 2001, p. 226).

A generalização conduz a criança à sistematização do conceito pela tomada de consciência – manifesta-se aí o papel decisivo do ensino. A formação dos conceitos ocorre com o auxílio e a participação de uma pessoa mais capaz (normalmente um adulto), através do uso funcional da linguagem, e leva ao amadurecimento das funções psicológicas superiores. Estas são as condições criadas no processo de ensino, mais especificamente entre professor e aluno.

As diferentes disciplinas do ensino escolar interagem no processo de desenvolvimento da criança; “[...] a tomada de consciência e a apreensão ocupam o primeiro plano no desenvolvimento” (VIGOTSKI, 2001, p. 325). Assim, o pensamento abstrato se desenvolve em todas as aulas, em todos os momentos do processo educativo.

A mediação abre caminhos para o desenvolvimento de conceitos possibilitando, inclusive, seu amadurecimento precoce por atuar na ZDI – a zona das possibilidades – da criança. Segundo Vigotski (2001), a ZDI tem, para a dinâmica do desenvolvimento intelectual e do aproveitamento escolar, maior importância que o nível atual de desenvolvimento da criança. Por isso, deve-se levar em conta, ao avaliar o desenvolvimento do estudante, não só o nível atual, mas principalmente a ZDI.

Ao tratar da importância da fala para o desenvolvimento da consciência humana, Vigotski (2001, p. 485-486) afirma que “[...] o traço distintivo fundamental da palavra é o reflexo generalizado da realidade. [...] O pensamento e a linguagem são a chave para a compreensão da natureza da consciência humana”. Nesse contexto, as expressões – em especial por meio da fala – constituem o ponto fundamental para revelar os sentidos e significados estabelecidos pelos estudantes, questão da presente pesquisa.

A construção do conhecimento é permeada pela história, cultura e necessidades humanas, que podem ser práticas ou teóricas. Torna-se necessário, por conseguinte, que o ensino parta das necessidades históricas e culturais da humanidade. Esse movimento de compreensão da ciência é dialético, exige fundamentação lógica e histórica e pode levar ao desenvolvimento do pensamento teórico.

2.4 O desenvolvimento do pensamento teórico

Para que a educação escolar contribua para a formação do sujeito, é preciso que o conhecimento tenha relevância clara, tanto para o docente quanto para o estudante. O desafio é tornar o conhecimento formal significativo, a fim de promover o desenvolvimento intelectual, valorizando-se o conhecimento teórico. Segundo Davidov (1988), o conteúdo das disciplinas escolares tem ampla importância para o desenvolvimento psíquico dos estudantes e deve ser estruturado de modo a propiciar a elevação do nível de pensamento.

Cunha (2008, p. 5) afirma que os conhecimentos científicos possibilitam o desenvolvimento do pensamento teórico, já que os conceitos “[...] em seu processo de construção histórica sintetizam as atividades realizadas para a sua formação e que foram movidas pelas necessidades histórico-culturais das civilizações que lhe deram origem”.

Segundo Kopnin (1978), juízo, dedução e conceito são formas de movimento do pensamento, ou seja, são modos de abstrações por meio das quais o sujeito representa a realidade. Essas formas de pensamento se inter-relacionam.

O juízo refere-se a toda ideia relativamente acabada, que reflete as propriedades, conexões e relações da realidade, de forma correta ou deturpada. O juízo estabelece algo; comunica, motiva e interroga sobre objetos e fenômenos do mundo material. Portanto, o juízo é a célula fundamental do pensamento, pois reflete o processo de apreensão do objeto.

O conceito reflete o resultado do processo de conhecimento e a essência do fenômeno: é um "[...] juízo, cujo predicado é a ideia do universal no fenômeno" (KOPNIN, 1978, p. 196). O conceito é indispensável no movimento do pensamento, pois nele se concentra o conhecimento dos aspectos essenciais do objeto. A síntese dos conhecimentos, expressa na teoria, é impossível sem o conceito. Além disso, a fonte objetiva da formação e desenvolvimento dos conceitos e da capacidade de abstração é a atividade humana em sua longa evolução.

Por outro lado, Kopnin (1978, p. 213) discute a dedução enquanto "[...] elemento indispensável do caráter criativo do trabalho humano"; é uma forma de mediação dos juízos, fundamenta os juízos e conceitos que integram uma teoria. Por meio da dedução, realiza-se a transição de um juízo a outro. "O conceito mais simples é antecedido por alguns juízos e deduções, além da experiência sensorial" (KOPNIN, 1978, p. 197).

No entanto, o mero ensino de conceitos nem sempre se concretiza em um movimento intelectual. Em geral, os estudantes apresentam dificuldade de raciocinar utilizando o conceito estudado; tal fato demonstra que, para que haja apropriação do conceito, é necessária uma mediação intencional e bem orientada.

Nessa perspectiva, apropriar-se de um conceito significa empregá-lo com consciência de sua estrutura. O indivíduo apropria-se do conhecimento socialmente produzido e reproduz a atividade humana histórica e cultural. Para Vigotski (2009, p. 14), por meio da atividade, o homem não apenas reproduz, mas também cria:

> [...] se a atividade do homem se restringisse à mera reprodução do velho, ele seria um ser voltado somente para o passado, adaptando-se ao futuro apenas na medida em que este reproduzisse aquele. É exatamente a atividade criadora que faz do homem um ser que se volta para o futuro, erigindo-o e modificando o seu presente.

Inicialmente, esse processo se dá na coletividade; posteriormente, ele é interiorizado, ou seja, a atividade externa e coletiva torna-se interna e individual. Tal processo promove o desenvolvimento do pensamento, em especial o pensamento teórico, formado durante a aprendizagem do conceito e orientado intencionalmente pelas ações do professor (SFORNI, 2003).

Kopnin (1978) considera dois tipos de pensamento: o empírico e o teórico. Sousa (2004, p. 75-76, grifo da autora) assume o lógico-histórico como forma de pensamento ao considerar

> [...] a flexibilidade, a relatividade, a interdependência, a fluência, o processo e o movimento do próprio pensamento que ocorre na totalidade do pensamento, enquanto define para si mesmo o que vem a ser a verdade elaborada pela *práxis* humana enquanto o homem tenta se humanizar pelo conhecimento.

Esse terceiro tipo de pensamento, denominado por Sousa (2004) *pensamento flexível*, aparece como *elo* de ligação entre os pensamentos empírico e teórico, fundamentado pelos aspectos lógico-históricos do conceito.

Contudo, considerar o lógico-histórico no desenvolvimento da atividade de ensino requer intencionalidade do professor. Ao elaborar, desenvolver e analisar SDA, ou seja, situações que podem gerar processos de significação e, ao agir na ZDI, suscitar a atividade do sujeito, o docente pode provocar esse movimento do pensamento – do empírico ao teórico, por meio do pensamento flexível.

De acordo com Kopnin (1978, p. 152), o conteúdo do pensamento empírico fundamenta-se na experiência imediata, enquanto o pensamento teórico "[...] reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do movimento deste, cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados do conhecimento empírico". Conhecimentos empíricos e teóricos se relacionam num todo, organicamente. Desse modo, o ser humano constrói as teorias, manifestando a aplicação prática quase ilimitada do conhecimento teórico.

Entretanto, a ascensão do pensamento empírico ao teórico não se reduz à mera transposição do conhecimento cotidiano para a linguagem científica; implica em alteração no conteúdo e na forma do conhecimento, em um movimento do empírico ao teórico (KOPNIN, 1978). Esse movimento do pensamento em busca da compreensão e apreensão do objeto é analisado por Sousa (2004, p. 58). A autora enfatiza a necessidade de se analisar a atividade do pensamento "[...] enquanto movimento, constituída, em sua totalidade, da fluência e da interdependência" dos diversos aspectos do conceito.

Para Davidov (1988), a origem do pensamento teórico está no trabalho produtivo: o pensamento teórico idealiza as possibilidades objetivas da prática sensorial. Por esse motivo, está internamente conectado à realidade sensorial. O autor afirma que o pensamento teórico se desenvolve através do domínio dos procedimentos lógicos do pensamento: o indivíduo torna-se capaz de aplicar tais procedimentos em diversas situações de aprendizagem e reproduz, em sua própria atividade, as capacidades humanas historicamente desenvolvidas. Por meio da representação mental, o sujeito apropria-se do objeto no plano das ideias e, ao expressar o objeto em forma de conceito, demonstra que compreendeu sua essência.

Outrossim, o pensamento nasce de necessidades humanas e se desenvolve pela interação entre o sujeito e o objeto, com o intuito de satisfazer àquelas necessidades. Por isso, o pensamento prático e o pensamento teórico estão intimamente relacionados – o teórico encontra no prático a sua materialização (KOPNIN, 1978).

Enfim, entende-se o desenvolvimento do pensamento teórico como um dos principais objetivos da educação escolar. Por esse motivo, a análise do desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes apresenta-se como objetivo desta pesquisa. Entretanto, o estudo das particularidades da atividade humana torna-se urgente: a atividade revela as relações existentes entre o sujeito e o objeto, fundamentada no desenvolvimento do pensamento.

2.5 Teoria da Atividade e jogo: interfaces e possibilidades

Leontiev (2004) investigou a atividade psíquica humana como meio de desenvolvimento do sujeito. Segundo o autor, a materialidade vivida transforma-se em atividade da consciência. O homem – sujeito da atividade – relaciona-se com os objetos da realidade, em seu contexto cultural. Assim, "[...] para se apropriar dos objetos ou dos fenômenos que são o produto do desenvolvimento histórico, é necessário desenvolver em relação a eles uma atividade que reproduza, pela sua forma, os traços essenciais da atividade encarnada, acumulada no objeto" (LEONTIEV, 2004, p. 286).

Dessa forma, o sujeito desenvolve-se por meio da atividade – a qual envolve ações, operações e tarefas, suscitadas por necessidades e motivos – em direção ao objeto. Para Leontiev (2004, p. 87-88), "[...] o conteúdo da atividade a que chamamos operações sofre também uma transformação qualitativa no processo de trabalho": o uso de instrumentos, bem como sua fabricação, requer do sujeito consciência das propriedades do objeto e do fim da ação. Por isso, o instrumento torna-se "[...] de certa maneira portador da primeira verdadeira abstração consciente e racional, da primeira generalização consciente e racional" (LEONTIEV, 2004, p. 88).

Leontiev (2004) defende a natureza histórico-cultural do psiquismo humano, ideia também expressa na psicologia de Vigotski. O autor critica as concepções segundo as quais os processos mentais superiores e as habilidades humanas dependeriam de fatores hereditários. Para Leontiev (2004, p. 73),

> [...] a passagem à consciência humana, assente na passagem a formas humanas de vida e na atividade do trabalho que é social por natureza, não está ligada apenas à transformação da estrutura fundamental da atividade e ao aparecimento de uma nova forma de reflexo da realidade; [...] o essencial, quando de passagem à humanidade, está na modificação das leis que presidem ao desenvolvimento do psiquismo. No mundo animal, as leis gerais que governam as leis do desenvolvimento psíquico são as da evolução biológica; quando se chega ao homem, o psiquismo submete-se às leis do desenvolvimento sócio-histórico.

Desse modo, o sujeito não herda as aquisições históricas da humanidade; ao contrário, apropria-se delas e, no decorrer de sua vida, humaniza-se por meio dessas aquisições. "Este processo coloca-o, por assim dizer, aos ombros das gerações anteriores [...]" (LEONTIEV, 2004, p. 301).

Baseado em Vigotski, Davidov (1988) afirma que a aprendizagem e o ensino levam à apropriação da cultura e, consequentemente, ao desenvolvimento do pensamento: o aluno forma conceitos científicos enquanto incorpora processos de pensamento e vice-versa; enquanto elabora o pensamento teórico, exercita ações mentais, em geral solucionando problemas, que suscitam sua atividade mental. Desse modo, o estudante apropria-se do conhecimento teórico, bem como das habilidades a ele relacionadas.

Portanto, é primordial que a intencionalidade da mediação docente esteja voltada à atividade do estudante, com vistas a elevá-lo a níveis superiores de seu desenvolvimento cognitivo. Ainda que se compreenda a dimensão subjetiva da atividade à luz dos estudos de Leontiev (1978; 2004), considera-se que é possível que a intervenção pedagógica suscite a atividade do sujeito. A intervenção pedagógica intenta gerar novas possibilidades de aprendizagem por atuar na ZDI: "[...] esse campo das transições acessíveis à criança, é a que representa o momento mais determinante na relação da aprendizagem com o desenvolvimento" (VIGOTSKI, 2001, p. 331).

Nesse sentido, destaca-se o papel fundamental da brincadeira e do jogo, analisados por Leontiev (1988, p. 122, grifo nosso) como principal atividade da criança em idade escolar:

> [...] é necessário compreender claramente em que consiste o papel capital das *brincadeiras*; as regras do *jogo* e seu desenvolvimento precisam ser apresentados. O desenvolvimento mental de uma criança é conscientemente regulado sobretudo pelo controle de sua relação precípua e dominante com a realidade, pelo controle de sua atividade principal.

Esse trecho de Leontiev (1988) não denota diferença entre os termos *brincadeira* e *jogo*. Todavia, antes que se discutam as interfaces entre atividade e jogo no contexto educacional, há que se delimitar os conceitos aqui mencionados.

2.5.1 Jogo e brincadeira: o fenômeno lúdico

Diversos autores dos campos da Educação, Filosofia, Sociologia e Psicologia, como Johan Huizinga (1872-1945), Roger Caillois (1913-1978), Lèvi Vigotski, os contemporâneos Gilles Brougère, João Batista Freire e muitos outros, estudam a brincadeira e o jogo. Citam-se nesta pesquisa alguns desses estudiosos, sem pretensão de esgotar o assunto ou encontrar consenso entre suas teorias; a intenção é compreender como seus estudos se aproximam ou se distanciam das ideias centrais da Teoria da Atividade, ainda que se encontrem em diferentes baluartes epistemológicos.

Essas diferenças epistemológicas são pontuadas por Vigotski (2009), ao tecer ponderações e críticas a respeito da epistemologia genética de Piaget. Embora muitas semelhanças possam ser verificadas em aspectos específicos das teorias de Piaget e Vigotski, existem diferenças substanciais concernentes ao papel da cultura humana, bem como quanto aos elementos advindos dos processos de significação e do desenvolvimento da fala e do pensamento.

Ademais, observa-se o uso de terminologias distintas pelos autores, quanto ao fenômeno lúdico. Não se trata de reconhecer a similaridade dos termos *brincadeira* e *jogo*, pois isso seria cair em uma emboscada semântica. Contudo, no decorrer do texto, mantém-se o termo tal qual o cita o autor referenciado.

Para Huizinga (2011), o jogo é um fenômeno cultural, por meio do qual a civilização se desenvolve, ou seja, possui função social. O autor afirma que esse fenômeno transcende as necessidades vitais imediatas e encerra em si mesmo um sentido; suas características primordiais são a intensidade e o poder de fascinação (mistério), os quais não podem ser analisados do ponto de vista biológico. Huizinga (2011) procurou integrar o conceito de jogo no de cultura e atribuiu ao jogo o desenvolvimento da sociedade, tal a amplitude do fenômeno.

Por sua vez, Freire (2012) aborda o jogo como necessidade básica do ser humano (substrato ontológico). O autor define o símbolo como matéria principal do jogo humano, por meio da imaginação e da fala, já que nossa existência é representativa; o ambiente do jogo é o interior, ou seja, o mundo da fantasia, o qual o autor nomeia *Senhor do Jogo*: “[...] quando o homem volta-se para si, livre das amarras da objetividade, pode jogar" (FREIRE, 2012, p. 65).

Apesar disso, admite o caráter utilitário do jogo, "[...] desde que a situação lúdica não fique comprometida" (FREIRE, 2012, p. 78). O jogo trabalha a memória, a sistematização de conhecimentos, mantém e aperfeiçoa o que foi aprendido e prepara o jogador para conhecimentos de nível superior. Portanto, tem caráter educativo, muito além do utilitarismo, por agir na esfera da subjetividade: é tematizador de aprendizagens, um fim em si mesmo, formador da inteligência criativa e da individualidade.

Inspirado em Freinet (1896-1966), que afirmava não ser necessário separar jogo e trabalho na escola, Freire (2012, p. 110) sugere que os conteúdos sejam tematizados de acordo com o objetivo educacional e que o aluno tome consciência das práticas realizadas: "[...] se bem planejados, até os conteúdos escolares podem ser ensinados na forma de jogo".

Caillois (1990), por sua vez, afirma que o jogo é atividade livre, delimitada e regulamentada, ou mesmo fictícia. Embora reconheça as contribuições de Huizinga, refuta a ideia de definir a cultura a partir do jogo. Para Caillois (1990), o jogo opõe-se ao trabalho e não tem consequências na vida real. Porém, admite que jogar aumenta as capacidades do indivíduo para lidar com as dificuldades da vida e sugere até mesmo uma sociologia a partir dos jogos.

O autor também discorda do caráter de mistério que Huizinga confere ao jogo: "[...] pelo contrário, quando o segredo, a máscara, o disfarce cumprem uma função sacramental, podemos estar certos de que aí não há jogo, mas instituição" (CAILLOIS, 1990, p. 24). Segundo o autor, no jogo devem prevalecer a ficção e o divertimento.

Caillois (1990) dividiu os jogos em categorias, de acordo com suas principais características: competição (Agôn), sorte (Alea), simulacro (Mimicry) e vertigem (Ilinx). Essa categorização foi criticada por outros estudiosos, visto que as fronteiras da classificação são extremamente tênues. Por exemplo, na categoria *simulacro* ou *Mimicry*, na qual o jogador adota o comportamento de um personagem, em situação de faz-de-conta, mímica e disfarce, o jogo também pode assumir características de rivalidade (competição).

Por outro lado, Prestes (2013) define a brincadeira como atividade em que a criança toma consciência de regras de comportamento e expressa suas impressões da realidade vivida, combinando elementos da realidade com outros que cria a partir de suas próprias experiências. Para a autora, o jogo é uma etapa superior da brincadeira, pois apresenta regras mais imperiosas.

Vigotski (2008) critica a intelectualização da atividade de brincar, ao enfatizar os impulsos e motivos relacionados a ela. Entretanto, a criança é livre ao brincar, apesar de se tratar de liberdade ilusória: a brincadeira exige da criança a submissão a regras, muitas vezes ocultas. Na idade escolar, a brincadeira tende a relacionar-se com a realidade; brincar proporciona o desenvolvimento afetivo e também o desenvolvimento intelectual, pelo amadurecimento das funções psíquicas.

Assim, verifica-se que a diversidade semântica atribuída ao fenômeno lúdico não impede que se compreenda sua íntima relação com os aspectos da atividade elucidados por Leontiev (1978; 2004). Desse modo, busca-se, com cautela, possíveis interfaces entre os conceitos.

2.5.2 Possibilidades de aproximação e mediação: atividade e jogo

O trabalho docente, a partir da atuação na ZDI, possibilita novas aprendizagens. Nesse sentido, considera-se a possibilidade da intervenção pedagógica para suscitar a atividade do sujeito, ainda que se compreenda a dimensão subjetiva da atividade à luz dos estudos de Leontiev (1978; 2004), com suas contradições e motivações internas.

De acordo com Prestes (2012), nos anos 30 começou-se a estudar sobre as especificidades da atividade de brincar como atividade-guia formadora do psiquismo e da consciência infantis. Assim, Vigotski (2008) diferencia as fases da vida humana pela atividade dominante naquela faixa etária: por volta dos três ou quatro anos, por exemplo, a brincadeira de faz-de-conta surge como atividade da criança – momento em que ela desenvolve sua capacidade de criação e revela suas possibilidades de desenvolvimento.

Nesse contexto, estaria o sujeito que joga em atividade? Seria possível dizer que um estudante está em atividade quando envolvido em uma situação lúdica desencadeada no ambiente escolar?

O vocábulo *atividade*, com frequência, é utilizado como sinônimo de prática, exercício, tarefa ou ação. Embora Huizinga (2011) trate o jogo como forma específica de *atividade*, não o faz na mesma perspectiva de Leontiev (1978; 2004); as bases epistemológicas distintas desses autores não permitem que se faça tal equiparação.

Entretanto, a amplitude do conceito de jogo como substrato do desenvolvimento da espécie humana poderia aproximá-lo do caráter histórico-cultural do desenvolvimento humano, no qual se baseia a THC. Ainda assim, Vigotski (2008) atribui o desenvolvimento humano às mediações culturais propiciadas pelo jogo ou outra categoria de atividade, e não ao jogo em si.

Por outro lado, ainda que se encontrem grandes aproximações entre o conceito de jogo elucidado por Freire (2012) e o conceito de atividade de Leontiev (1978; 2004), há que se considerar, com cautela, o entendimento de cada autor sobre *objetividade*, que elucida as diferentes bases epistemológicas de seus estudos.

Freire (2012, p. 118, grifo nosso), afirma que "[...] a ação do jogador não é marcada pelo resultado final, pelo compromisso externo, apesar de haver um resultado final e um compromisso. *A objetividade não é a marca do jogo*". Por sua vez, Leontiev (1978) traz a objetivação das necessidades como fator motivador da atividade; o objeto seria o motivo, gerado internamente (ideal), desencadeador da atividade. A atividade de jogar está orientada a um objeto, não é aleatória. No entanto, as ideias dos autores aproximam-se no que diz respeito à possibilidade de a mediação pedagógica promover o desenvolvimento de inúmeras capacidades, especialmente nos processos de interação social, enquanto os estudantes encontram-se em atividade/jogo.

Similarmente, Brougère (2011) considera que o educador pode construir um ambiente que estimule a atividade lúdica, organizando materiais para otimizar a brincadeira, em função dos resultados almejados. Segundo o autor, a disposição dos móveis, a diversificação dos papéis, material completo e um ambiente que proteja a privacidade das crianças podem influenciar na qualidade das brincadeiras. Os brinquedos trazem o suporte, o ambiente pode condicionar a brincadeira, mas a criatividade do brincante permite ultrapassar os limites materiais.

De acordo com Leontiev (2004), o desenvolvimento do psiquismo depende da atividade dominante, ou seja, aquela que tem maior importância para o desenvolvimento ulterior da personalidade. Para o autor, no interior da atividade dominante diferenciam-se novos tipos de atividade, que reorganizam os processos psíquicos e são responsáveis pelas mudanças fundamentais da personalidade naquela etapa da vida. Assim como Caillois (1990) categorizou os jogos de acordo com seu conteúdo, Leontiev (2004) preocupou-se com o conteúdo da atividade para o desenvolvimento humano.

Todavia, Caillois (1990) caracteriza o jogo como atividade incerta e improdutiva, o que conduz a outra reflexão: partindo do pressuposto de que a atividade humana, em um contexto histórico e cultural, é geradora de desenvolvimento, haveria atividade totalmente improdutiva?

Outras questões poderiam surgir diante da amplitude conceitual dos temas abordados. As aproximações e os distanciamentos descritos até o momento sintetizam percepções a respeito dos conceitos de atividade e jogo, orientadas pela THC e objetivadas na prática docente, no movimento dialético de construção do conhecimento por meio da pesquisa.

Contudo, pode-se afirmar que a apropriação de conceitos ou, ainda, a emersão de possibilidades de desenvolvimento cognitivo dos discentes, pode ser potencializada por situações de jogo vivenciadas no espaço educativo.

Para Freire (2012), a satisfação move o jogo e produz cultura. Ora, necessidades, motivos, desejos e emoções são elementos da atividade. Enquanto o sujeito joga, essa relação ativa com o objeto (seja ele real ou imaginário) desencadeia mecanismos que podem levá-lo a construir conceitos.

Os brinquedos e materiais podem influenciar o modo como as crianças interagem entre si. No entanto, o essencial do brincar é a liberdade de tempo, espaço e criação (CARNEIRO, 2017). Nas situações de aprendizagem, apesar de haver um contexto normalmente induzido pelo professor, é primordial o respeito a essa liberdade para que o jogador entre em atividade mental.

Há que se cuidar para que aspectos essenciais do jogo, como o ambiente lúdico e a liberdade de criação, sejam preservados. Não se trata, tampouco, de usar o jogo como ferramenta pedagógica, distração, lazer ou premiação. Conforme explicitado, os conceitos de jogo e brincadeira, bem como o conceito de atividade, são mais amplos do que prega o senso comum.

Vigotski (2008, p. 24) afirma que a imaginação, característica intrínseca à brincadeira, "[...] representa uma forma especificamente humana de atividade da consciência". As funções da consciência formam-se nas ações do sujeito; portanto, na atividade mental, assim como na brincadeira ou no jogo, o sujeito pode apropriar-se de conhecimentos socialmente produzidos e reproduzir as formas histórico-culturais da atividade humana.

Na brincadeira, a criança vivencia as principais categorias da atividade: "[...] a não separação entre a ação interna e a ação externa é a imaginação, a compreensão e a vontade, ou seja, processos internos numa ação externa" (VIGOTSKI, 2008, p. 32). Portanto, a brincadeira pode propiciar o desenvolvimento psíquico ao criar a ZDI. Ao brincar, a criança mobiliza os elementos da atividade: necessidades, motivos, objetivos, tarefas, ações, operações, em permanente estado de interligação. Além disso, a brincadeira direciona-se a um objeto material ou ideal.

Enquanto relaciona pensamento e realidade, a criança pode apropriar-se de conceitos e da forma de interação desses conceitos com a realidade. Assim, ao analisar as situações em que a brincadeira ou o jogo predominam, percebe-se estreita relação com os constructos da Teoria da Atividade.

As reflexões desta subseção partiram de possiblidades teóricas desencadeadas durante a pesquisa. Nas situações de aprendizagem organizadas, os estudantes vivenciaram momentos de faz-de-conta, ao mesmo tempo em que interagiram para solucionar as questões que geraram os processos de significação.

A relação entre atividade e jogo emergiu durante os estudos teóricos iniciais, anteriores à produção dos dados, e adquiriu consistência no decorrer da elaboração das situações e, especialmente, no desenvolvimento da unidade didática que gerou os dados da pesquisa. Embora o projeto da pesquisa não contemplasse a discussão teórica acerca dos conceitos de atividade e jogo, tal aproximação evidenciou-se na análise dos dados e suscitou à pesquisadora certa inquietação teórica.

Nessa perspectiva, o que se pretende é provocar a atenção do docente para que, ao identificar a atividade desencadeada em uma situação de jogo, ou ainda o jogo desencadeado em uma atividade, perceba as possibilidades emergentes. Afinal, a intencionalidade do professor pode facilitar o desenvolvimento intelectual dos estudantes. Na presente pesquisa, a situação de jogo de faz-de-conta de uma viagem imaginária pode ser vista como elemento desencadeador da atividade dos estudantes.

Também por essa ótica, conhecer o desenvolvimento lógico-histórico dos conceitos em estudo é primordial. Como já se mencionou, os conhecimentos são desenvolvidos a partir de necessidades humanas e os conceitos trabalhados na escola precisam partir dessas necessidades.

3 O DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DOS NÚMEROS RACIONAIS E DO CONCEITO DE MEDIDA

A Ciência pode ser vista de duas formas. De um lado, enquanto algo criado, sem contradições, bastando a si mesma. De outro, como algo construído historicamente, com suas contradições, influenciada pelas necessidades da atividade social, viva, impregnada de humanidade, "com suas forças e fraquezas e subordinada às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação" (CARAÇA, 2010, p. XIII).

Na antiguidade – e, por vezes, ainda hoje –, o conhecimento matemático era visto como algo inatingível, próprio de uma minoria que detinha o saber. "No mundo antigo, escrita e leitura eram, a um tempo, uma arte e um mistério" (HOGBEN, 1970, p. 20).

Desde os primórdios de sua existência, o ser humano recorria ao raciocínio lógico-matemático: contar, medir e calcular, ainda que sobre tais assuntos não houvesse raciocínio consciente, fazia parte de seu cotidiano. De acordo com Karlson (1961), o homem primitivo fracionava sua caça, media e comparava o comprimento da pele, fabricava vasos (os primeiros padrões de medida!) e determinava volumes, além de várias façanhas geométricas.

Segundo Hogben (1970), os sacerdotes egípcios elaboraram calendários de acordo com as estações do ano e encontraram meios para medir o nível do rio Nilo. Dessa forma, conseguiam prever as cheias e as vazantes do rio *sagrado*. Para o povo, aquelas previsões eram *profecias*. Todavia, os conhecimentos matemáticos conferiam àqueles sacerdotes o poder enquanto detentores do saber: as letras, os cálculos, a Ciência.

A Matemática encontra muitos de seus fundamentos na vida real. "Para o primitivo, e mesmo para o filósofo antigo, os números estavam impregnados de Natureza – a Natureza em cuja labuta o homem adquiriu todos os seus conhecimentos – os números estavam ligados às coisas de que eles se serviam para contar" (CARAÇA, 2010, p. 9). Aliás, contar e medir são situações ainda frequentes na vida cotidiana.

3.1 Construção do número e da medida

As necessidades da vida corrente exigem contagens e, assim, desenvolveram-se lentamente os números naturais. A contagem se realiza com a correspondência de um número da sucessão natural a cada objeto – para Caraça (2010, p. 7), "[...] uma das ideias basilares da Matemática".

As condições humanas também influenciaram no conhecimento dos números. A base decimal do nosso sistema de numeração, por exemplo, tem seu fundamento no conjunto dos dedos das mãos humanas. Contudo, é importante considerar que nem sempre a base do sistema de numeração foi decimal: segundo Hogben (1970), os matemáticos babilônicos valiam-se do princípio posicional, mas em base sexagesimal.

Com o surgimento das trocas comerciais e o estabelecimento do regime de propriedade, apareceram novos problemas e, com eles, a demanda de se aumentar gradativamente o conhecimento dos números. Um exemplo dessa ampliação é a criação relativamente recente – talvez nos primeiros séculos da era cristã – do símbolo *zero*, definido por Caraça (2010, p. 6) como "[...] um dos atos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão".

Inicialmente, o uso dos números se restringia à contagem ou à ordenação, associados a informações visíveis (experienciáveis), ou seja, em fenômenos como contar o rebanho e as estações do ano.

> No dia em que o homem passou a dividir os dias por meio da sombra solar, passou também a usar os velhos números de um modo inteiramente novo. [...] A necessidade de medições exatas surgiu, naturalmente, da prática de registrar o tempo, pré-requisito essencial da vida metropolitana (HOGBEN, 1970, p. 54).

O desenvolvimento da técnica da medição e da contagem foi lento. Sabe-se que o plantio de vegetais e a criação de animais trouxeram à humanidade a necessidade de observar o tempo – as luas (meses) e as estações do ano. "Os Egípcios, antes de 4000 a. C., já haviam fixado a duração do ano em 365 dias, e o fizeram contando os dias transcorridos entre as duas ocasiões sucessivas em que se via a estrela do cão, Sírius, nascer pouco antes do arrebol" (HOGBEN, 1970, p. 42). Essa consciência do passar do tempo, que deu origem ao calendário, denota que a experiência humana foi o princípio da racionalização da natureza "[...] e, a cada novo progresso na evolução dos instrumentos de medição, o homem teve de apurar os instrumentos da linguagem das grandezas" (HOGBEN, 1970, p. 37). Enquanto novas necessidades sociais emergiam, novos modos de mensurar grandezas eram construídos.

Segundo Hogben (1970, p. 62), "[...] por muitos milênios o homem contentou-se com usar grosseiras unidades anatômicas de comprimento para a maior parte das finalidades práticas". Os povos semitas, por exemplo, usavam o cúbito (distância da ponta do dedo médio ao cotovelo).

Entretanto, a medição requer um padrão, um termo de comparação: o estabelecimento de uma unidade de medida da grandeza de que se trata para, em seguida, definir o número de vezes que expresse o resultado da comparação com a unidade estabelecida. Chega-se, finalmente, à expressão da medida da grandeza em relação à unidade por um número. Salienta-se que a mesma grandeza pode ser medida com diferentes unidades de medição.

No antigo Egito, a construção das pirâmides (mausoléus dedicados a sepultar os faraós) e de monumentos apontando a direção de corpos celestes (os calendários da época) tornaram primordial a medição exata de distâncias. Além disso, de acordo com Heródoto (historiador grego do século V a.C.), o Rei Sesóstris dividiu todo o Egito igualmente entre os egípcios. Cada um recebeu uma porção retangular de terra, sobre a qual tinha a obrigação de pagar um imposto anual. Caso as terras fossem diminuídas pelas cheias do rio Nilo, os proprietários deveriam solicitar ao rei que enviasse seus medidores para recalcular o tributo (CARAÇA, 2010). Então, a expressão numérica da medição nasceu das relações do indivíduo com o Estado, com base na propriedade.

Observa-se aqui que os egípcios precisavam calcular a medida da superfície de suas terras – a área. Não se sabe ao certo que motivo levou-os à escolha do quadrado como unidade de área. Hogben (1970) sugere que a inspiração pode ter sido resultado da maneira de tecer uma cesta ou mesmo do uso de ladrilhos quadrados para pavimentação de assoalhos.

Desse modo, para medir uma superfície deveriam utilizar tantos ladrilhos quadrados (de mesma medida) quantos fossem necessários para cobrir toda a superfície; para medir um comprimento, o resultado viria do número de vezes em que uma unidade (padrão) caberia na distância medida.

Por outro lado, o desenvolvimento do comércio também impôs a necessidade da padronização das medidas. Assim, os produtos comercializados eram medidos em vasilhas apropriadas. Segundo Hogben (1970), é provável que os sumerianos tenham sido os pioneiros na utilização do cubo para medir o volume (contando os cubos necessários para preencherem um espaço vazio); as civilizações da Mesopotâmia e da Ásia Menor, anteriormente aos egípcios, já possuíam um sistema de pesos e medidas e até mesmo uma escola de aritmética para os comerciantes.

Portanto, os números racionais, assim como os demais números, foram construídos a partir de uma necessidade humana: o problema da medida, primeira grande crise da história da Matemática.

> Defrontado pela dificuldade de adaptar os números inteiros à expressão de medições feitas por seres humanos imperfeitos, com o recurso de órgãos sensoriais imperfeitos, instrumentos imperfeitos, num mundo imperfeito e mutável, o homem prático, durante muito tempo, contentou-se com acrescentar novas e novas divisões à sua escala de medida. O expediente surtiu efeito até certo ponto [...] (HOGBEN, 1970, p. 80).

Enquanto expressava frações como pequenas unidades de qualquer medida (fosse de massa, comprimento, quantia, tempo, etc.), o homem não considerava a fração como um número. As frações eram nada mais que subdivisões da sua unidade de medida padrão. De acordo com Ifrah (2001), os gregos foram pioneiros ao perceber que a representação de números de duas maneiras distintas era limitada e nem sempre conseguia expressar corretamente as grandezas. Eles tentaram atribuir uma notação geral às frações, mas sua numeração alfabética dificultava essa simbolização.

Portanto, as frações não foram consideradas desde sua origem como números. "Com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, ficou claro que as frações se submetiam às mesmas regras que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números" (IFRAH, 2001, p. 326). Isso possibilitou a comparação entre grandezas.

Segundo Ifrah (2001), os babilônicos foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional, ao convertê-las em frações sexagesimais (cujo denominador fosse igual a uma potência de sessenta). Contudo, os babilônicos não chegaram ao uso da vírgula para diferenciar os inteiros das frações sexagesimais da unidade. Os hindus, devido a seu sistema decimal de numeração, representaram as frações de forma bem semelhante à nossa. Os árabes, por sua vez, também adotaram essa notação e a aperfeiçoaram, ao inventar a barra horizontal.

Graças à descoberta das frações decimais (aquelas cujo denominador é uma potência de dez), surgiu o interesse em prolongar o sistema de numeração decimal no outro sentido (para a direita), o que permitiu a notação de todas as frações. A notação desses números veio sofrendo modificações até chegar, no século XVII, ao uso da vírgula pelo matemático neerlandês Wilbord Snellius (IFRAH, 2001).

De acordo com Ifrah (2001, p. 328), as consequências dessa racionalização da noção e da representação das frações são incalculáveis em todos os domínios, a começar pela invenção do sistema métrico, fundado sobre a base dez, "[...] totalmente coerente e perfeitamente adaptado ao cálculo numérico, [...] em substituição aos velhos sistemas de unidades arbitrárias incoerentes e variáveis".

Dessa forma, os números racionais aparecem como uma generalização dos números inteiros: houve o reconhecimento de uma dificuldade, a determinação do ponto onde essa dificuldade reside (negação) e a negação dessa negação, ou seja, "uma generalização passa sempre, por consequência, pelo ponto fraco duma construção, e o modo de passagem é a negação da negação; tudo está em determinar e isolar, com cuidado, esse ponto fraco" (CARAÇA, 2010, p. 37).

Caraça (2010) observa, ainda, que os números racionais se desenvolvem a partir de um dilema, uma negação: a impossibilidade da divisão (exata) de inteiros, que ocorre quando o dividendo não é múltiplo do divisor. Pelo princípio da extensão, criam-se novos números para reduzir essa impossibilidade: os números racionais, que abrangem os números inteiros[2] e os números fracionários.

No século XX, com a democratização das letras, a sociedade passou a ter acesso às descobertas científicas. Ainda assim, segundo Hogben (1970, p. 20-21, grifo do autor), "[...] o homem comum não sabe ler nem escrever a *linguagem das grandezas*. [...] O povo precisa aprender a ler e a escrever a linguagem das medições para que consiga compreender a bíblia aberta da ciência moderna", pois

> [...] vivemos imersos num oceano de números – receitas culinárias, horários de trens, estatísticas de desempregados, multas, impostos, dívidas de guerra, salários de horas-extra, limites de velocidade, apostas de jogo, 'cores' de bilhar, calorias, tabelas de peso de crianças, temperaturas clínicas, índices pluviométricos, horas de sol, recordes de automóveis, índices de potência, leituras de medidores de gás, taxas bancárias, fretes, descontos, juros, loterias, comprimentos de onda e pressão dos pneumáticos (HOGBEN, 1970, p. 22).

Porém, para a civilização atual, os números independem da realidade e são apropriações do pensamento humano. Desse modo, o princípio de extensão, por meio do qual o homem amplia as generalizações do pensamento, orienta o seu trabalho intelectual. Além disso, através da possibilidade de repetição de atos mentais, desenvolvem-se noções como a do *infinito*: sempre haverá a possibilidade de se juntar mais uma unidade a um número, o que torna a sucessão natural ilimitada – infinita (CARAÇA, 2010).

Portanto, observa-se que os números e o conceito de medida foram construídos gradativamente, pela humanidade, de acordo com as necessidades do cotidiano, e que os homens apropriaram-se desses conhecimentos para aprimorá-los e, ao mesmo tempo, ampliá-los. Por esse motivo, o percurso lógico-histórico do pensamento dos conceitos pode orientar a atividade docente, por meio dos nexos conceituais.

3.2 Nexos conceituais: os *elos* lógico-históricos dos conceitos

Os conhecimentos são historicamente construídos a partir de necessidades humanas. Nosso cotidiano está impregnado de saberes matemáticos que, em certa época do

---

[2] Caraça (2010) não considera o *zero* como um número *natural*; ao acrescentá-lo à sucessão dos números naturais, passa a denominá-los *inteiros*.

desenvolvimento da humanidade, foram motivo de inquietações. Para Sousa (2004, p. 72), "[...] entender o lógico-histórico do pensamento e dos objetos por ele apreendidos envolve entender o porquê nós, seres humanos, não nos habituamos a viver sob o jugo do imutável".

Considera-se uma alternativa didática promissora que o ensino da Matemática parta de sua história e das necessidades culturais que produziram suas teorias. Esse movimento de compreensão do conceito é dialético e exige fundamentação lógica e histórica; portanto, envolve o pensamento de nexos conceituais.

Entende-se por nexos conceituais as ligações que se estabelecem entre os modos de pensar um conceito. Esses *elos* mobilizam o movimento do pensamento: "[...] contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento" (SOUSA, 2004, p. 61). Cunha (2008, p. 7) define nexos conceituais como "[...] unidades dialéticas formadas por pares que, embora tenham diferentes significados, interdependem e implicam um no outro". Pode-se dizer que são conceitos dos quais o conceito em estudo é uma nova síntese.

Os nexos externos estão relacionados à representação formal do conceito – aos elementos perceptíveis. Por outro lado, os nexos internos envolvem o contexto histórico, social, político e econômico que deram origem ao conceito (SOUSA, 2004; CUNHA, 2008).

De acordo com Sousa (2004), o ensino que se baseia nos nexos externos do conceito é ineficiente, traz resultados parciais e prejudica a formação do pensamento teórico. Por exemplo: o ensino do conceito de medida, muitas vezes, limita-se ao ato de medir e à expressão numérica de seu resultado. Segundo Cunha (2008), esses são nexos externos do conceito de medida.

Assim, é preciso que o foco do professor esteja nos nexos internos. Os nexos internos do conceito – denominados por Sousa (2004) *nexos conceituais* – compreendem as diversas relações presentes no percurso histórico da concepção do conceito e que resultam em sua formalização lógica (REZENDE, 2010). Em sua tese, Sousa (2004) refere-se aos nexos do conceito de álgebra, não relevantes para esta pesquisa; dessa forma, considera-se nesta pesquisa sua concepção acerca dos *nexos conceituais*.

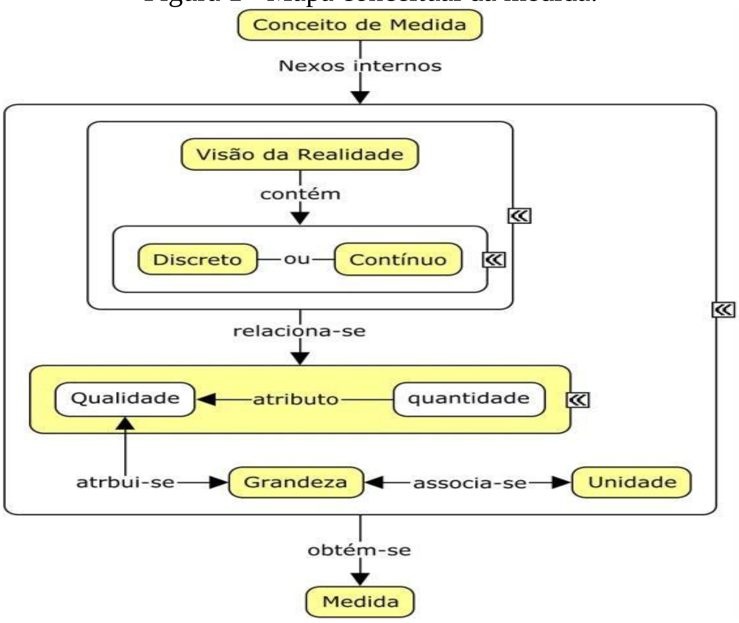
Os conceitos abordados na presente pesquisa – medida e números racionais – constituem-se pela inter-relação de outros conceitos, ou seja, por seus nexos conceituais. O conceito de medida é um importante nexo do conceito de número racional; por esse motivo, aborda-se, em primeiro lugar, a medida e seus nexos conceituais para, em seguida, tratar dos nexos do número racional.

3.2.1 Nexos conceituais da medida

A apropriação de um conceito matemático requer, do professor, a compreensão acerca dos nexos internos desse conceito. Isso permite que o docente planeje um percurso de aprendizagem que possibilite ao estudante o despertar da necessidade de compreender o conceito. No caso do conceito de medida, o percurso de aprendizagem precisa suscitar as necessidades de compreender a qualidade da grandeza a ser medida, de medir, de estabelecer unidades de medida e fracionar essas unidades, bem como de padronizar a unidade, estabelecendo um referencial.

Para Cunha (2008), os nexos internos da medida são relações de comparação (figura 1): quantidade/qualidade, grandeza, unidade, discreto/contínuo, além das diferentes linguagens de medida. Os nexos externos estão no próprio ato de medir, ou melhor, na expressão numérica de seu resultado.

Figura 1 - Mapa conceitual da medida.



Fonte: Grupo de Pesquisa PPTHC (2008).

A ação de medir é intencional e planejada; envolve a seleção da unidade, a comparação da unidade com a grandeza a ser medida e a expressão numérica dessa comparação (CARAÇA, 2010). Os aspectos da grandeza determinam a escolha da *unidade* de medida, enquanto a unidade escolhida adequa-se aos aspectos da *grandeza*: observa-se aqui uma unidade dialética formada por um par de conceitos que, embora tenham significados diferentes, possuem relação de interdependência – um implica no outro.

A escolha da unidade faz-se pelo critério de economia do pensamento. Caraça (2010) observa que, a princípio, pode-se escolher qualquer unidade; entretanto, por comodidade, condiciona-se a unidade pelo resultado da medição. Por exemplo, uma dose de remédio não costuma ser medida com a mesma unidade com que se mede o consumo de água de uma residência. Isso não significa que não se possa fracionar o litro em milésimos ou milionésimos, ou mesmo multiplicar o mililitro tantas vezes quantas forem necessárias. A questão da escolha da unidade deve-se simplesmente à praticidade ou economia.

Podem-se identificar inúmeras qualidades em um objeto. As qualidades não são inerentes ao objeto, mas resultam de comparações. Segundo Cunha (2008), do ponto de vista científico, são consideradas qualidades da medida: comprimento, volume, área, cor, temperatura, entre outras. A expressão numérica de uma qualidade – a quantidade – resulta de uma comparação. Então, “[...] para o entendimento do conceito de grandeza é importante a noção da relação *qualidade-quantidade* nos objetos” (CUNHA, 2008, p. 30, grifo nosso). Assim, a medida requer o estabelecimento de referências: define-se que qualidade da grandeza será considerada na comparação para, em seguida, quantificá-la.

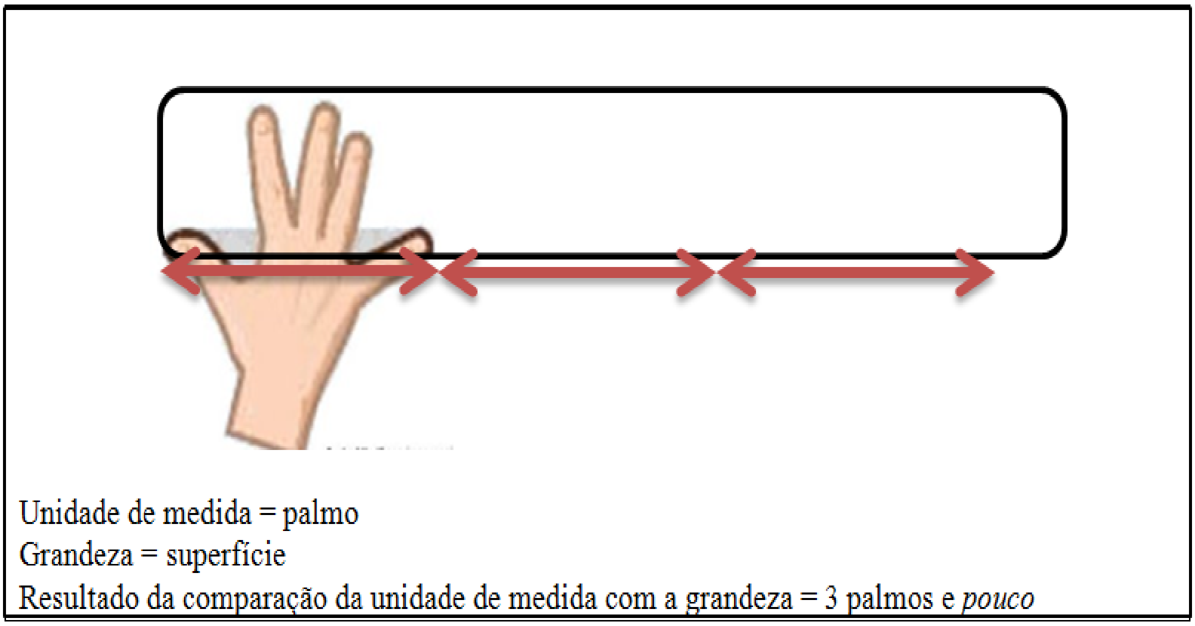
Outro par dialético fundamental para a compreensão do conceito de medida é *discreto/contínuo*. De modo geral, consideram-se grandezas discretas as que podem ser contadas e contínuas aquelas que são medidas sem fracionamento. Todavia, a relação que se estabelece com a grandeza pode ser de natureza discreta ou contínua. Por exemplo: no varejo, costumam-se comprar tecidos aos metros. Porém, há comerciantes que os vendem aos quilogramas e atacadistas que comercializam peças inteiras de tecido, vendidas em unidades.

O aspecto discreto ou contínuo da grandeza vai depender da relação com ela estabelecida, ou seja, a forma como se opta por medir um objeto pode ser de natureza contínua ou discreta. Isso não quer dizer que o objeto em si seja ora contínuo, ora discreto. No caso do tecido, pode-se optar por vendê-lo com base em uma forma de medir que é discreta – em pedaços com as mesmas dimensões – ou contínua, aos metros. A diferença não está no objeto, mas na forma como se escolhe realizar a medição. Isso pode estar relacionado, conforme o mapa conceitual da figura 1, com a forma como se concebe a realidade ou que aspecto se atribui àquele objeto da realidade, naquele momento, para se realizar a ação de medir. Desse modo, a percepção do que é contínuo ou discreto deve ser obtida ao se olhar o todo referência, ou seja, o total de tecido que foi comprado ou vendido. Olhando para o todo, pode-se observar o objeto como contínuo ou, então, fracioná-lo e contar os pedaços, o que o torna discreto.

Assim, a questão de uma grandeza ser discreta ou contínua não é estática – depende da característica predominante naquele contexto e momento. Caraça (2010) observa, acerca da história das repartições de terras em propriedades, que a grandeza contínua (terra) foi fracionada em partes menores que, em si, são contínuas; no entanto, o conjunto dessas partes constitui um todo discreto, já que se podem contar as partes fracionadas. Discretizou-se o contínuo, porém cada uma das partes (discretas) mantém-se contínua. Nesse sentido, a grandeza *comprimento* pode ajudar na compreensão teórica do conceito de medida.

Em situações que exigem medição, seja pelo uso de unidades de medida padronizadas ou não, é comum a obtenção de resultados que não podem ser representados por números inteiros. Por exemplo: numa situação em que se fará a medição de uma superfície qualquer, com o uso de palmos (a distância entre os dedos polegar e mínimo da mão, sendo que todos os dedos estejam bem afastados uns dos outros), temos:

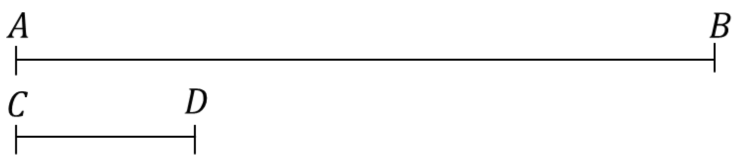
Figura 2 - Medida de uma superfície com palmos.



Fonte: Da autora (2021).

Desse modo, observa-se que a medição resulta da comparação entre o *discreto*, representado pelo palmo, e o *contínuo*, cuja imagem é a superfície. Se o comprimento da superfície da figura 2 for representado pelo segmento de reta $\overline{AB}$ e o comprimento do palmo, pelo segmento $\overline{CD}$ (figura 3), a pergunta fundamental é: quantas vezes $\overline{CD}$ cabe em $\overline{AB}$?

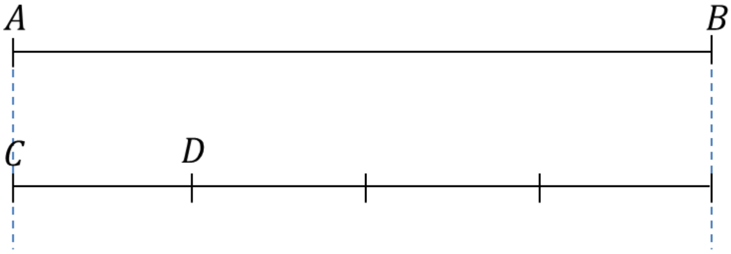
Figura 3 - Medida por comparação entre segmentos.



Fonte: Da autora (2021).

A resposta expressa o resultado da medida da grandeza em relação à unidade. Se $\overline{CD}$ couber uma quantidade de vezes inteira em $\overline{AB}$, então o conjunto dos números inteiros é suficiente para expressar o resultado de uma medida (m) nessas condições:

Figura 4 - Resultado da comparação entre segmentos.



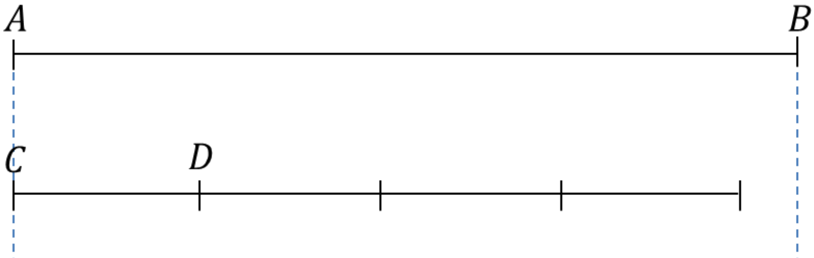
Fonte: Da autora (2021).

Para o caso da figura 4, tem-se que

$$\overline{AB} = 4 \cdot \overline{CD} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = m \cdot \overline{CD}$$

Entretanto, Caraça (2010) mostra que, historicamente, a medida se estabelece como um problema para um contexto cultural em que se conheciam apenas os números inteiros. O problema da medida reside no fato de que nem sempre é possível medir o segmento $\overline{AB}$ utilizando-se o segmento $\overline{CD}$ como parâmetro, como alíquota.

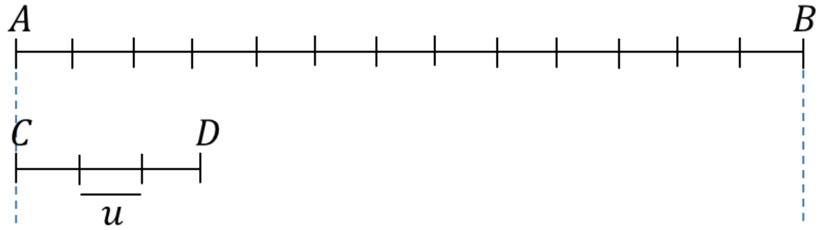
Figura 5 - Problema da medida representado por comparação de segmentos.



Fonte: Da autora (2021).

Nesse fato, representado pela figura 5, há a negação de que o quociente $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ sempre pode ser expresso por um número inteiro. A negação dessa negação ocorre quando se percebe a possibilidade de uma parte alíquota do segmento $\overline{CD}$, ou seja, uma subdivisão da unidade de medida, preencher todo o segmento $\overline{AB}$.

Figura 6 - Fracionamento da unidade de medida.



Fonte: Da autora (2021).

Na figura 6, o segmento $\overline{CD}$ pode ser dividido em n partes iguais, de tamanho u, de maneira que a alíquota obtida como medida do segmento $\overline{CD}$ passe a ser também uma medida alíquota do segmento $\overline{AB}$. Isto é, ao se dividir o segmento $\overline{CD}$ em n partes iguais, pode-se preencher o segmento $\overline{AB}$ com uma quantidade m dessas partes de $\overline{CD}$ de tamanho u. Assim, é possível escrever que

$$\frac{\overline{CD}}{n} \cdot m = \overline{AB} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{m}{n}\overline{CD}$$

Porém, se a divisão $\frac{m}{n}$ não for exata, ou melhor, se m não for divisível por n, nega-se a existência de quociente. A *negação dessa negação* resulta em uma *generalização*: a ampliação do conjunto dos números inteiros, pela criação de um novo conjunto numérico (o dos racionais); o resultado seria um número racional fracionário (CARAÇA, 2010).

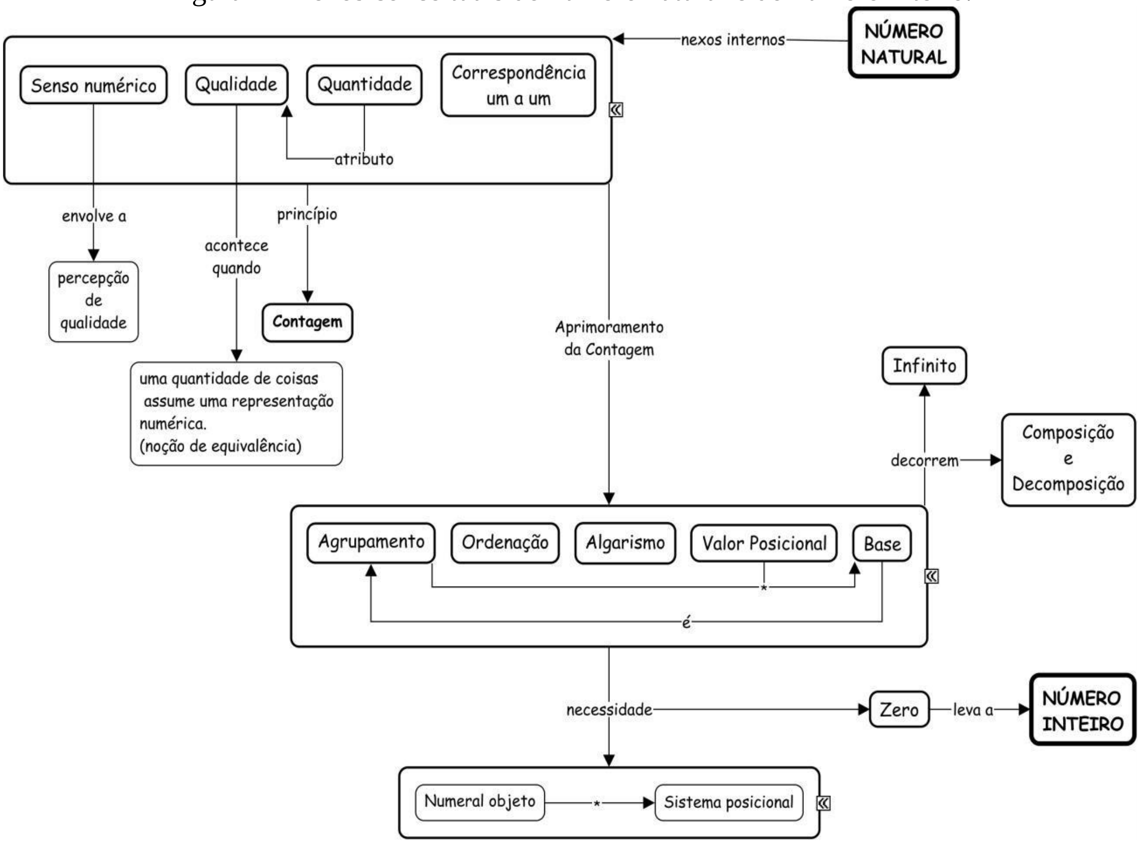
Assim, a divisão de grandezas contínuas dá origem às frações e considera-se a medida como elemento pedagógico tensionador para o ensino dos números racionais. O conceito de medida, modificado ao longo da história pelo contexto social, “[...] é ao mesmo tempo *gerado* (pela confluência de conceitos ou nexos conceituais) e *gerador* de outros conceitos (como fração e número racional)” (CUNHA, 2008, p. 2, grifo da autora). Por isso, observa-se como primordial que o ensino do número racional parta do problema da medida.

3.2.2 Nexos conceituais do número racional

Antes de se tratar dos números racionais, faz-se necessária uma digressão. Sabe-se que os números naturais formaram-se lentamente, a partir da prática cotidiana da contagem, e que o surgimento de novos problemas provocou a introdução de novos campos numéricos.

Desse modo, elencam-se os nexos do número natural, de acordo com Rezende (2010): senso numérico, correspondência um-a-um, qualidade/quantidade, agrupamento, ordenação, numeral e algarismo, valor posicional, base, composição e decomposição e infinito.

Figura 7 - Nexos conceituais do número natural e do número inteiro.



Fonte: Grupo de Pesquisa PPTHC (2020).

O mapa conceitual (figura 7) refere-se aos nexos internos do número natural e do número inteiro. O primeiro nexo (senso numérico) envolve a percepção de qualidade, mas também de quantidade que, junto à correspondência um a um, são advindos da ideia de contagem. O senso numérico envolve comparação de pequenos conjuntos e percepção de quantidades. De modo empírico, pode-se dizer que o sujeito possui senso numérico ao perceber a diferença de quantidade na comparação de dois conjuntos, ainda que não faça a contagem dos elementos.

Outros dois nexos associados são qualidade e quantidade. Esse par dialético resulta de comparações, tal como ocorre nos nexos da medida. A quantidade é a representação numérica de uma qualidade, ao mesmo tempo em que, ao se atribuir certa qualidade a uma coleção, corresponde-se também uma quantidade. Por isso, a quantidade aparece como atributo da qualidade.

A ideia de correspondência um a um é fundamental para o princípio da contagem. Ao relacionar cada elemento de um conjunto a uma marcação, os povos primitivos controlavam seus rebanhos: um entalhe em madeira ou uma pedrinha colecionada para cada animal, por exemplo. Aos poucos, criaram símbolos para as pequenas coleções e já não precisavam registrar cada unidade contada.

Assim, por agrupamentos, aperfeiçoam-se e ampliam-se as contagens. Esse nexo conduz à organização do número; passa-se a ter uma quantidade finita de símbolos para representar um conjunto com infinitos elementos: o conjunto dos números naturais. Isso é possível devido ao valor posicional: a posição que o número ocupa e o valor a ele atribuído relacionam-se ao tipo de agrupamento e à construção da ideia de base.

Toda base é um agrupamento, mas nem todo agrupamento é uma base. A contagem apenas por agrupamentos seria algo muito dispendioso. Nesse sentido, as noções de composição e decomposição levam à operação dentro de um sistema de bases. O conceito de base – um dos mais importantes em um sistema de numeração – é viabilizado por um conjunto de nexos conceituais (como mostra o mapa conceitual da figura 7), com especial destaque à ideia de valor posicional. Essa necessidade pode ser suscitada a partir de situações em que haja aumento da quantidade, de forma que o estudante perceba que apenas agrupar elementos não é suficiente. A partir desse elemento pedagógico tensionador, compreende-se que o sistema posicional é mais eficiente – daí a necessidade de se trabalhar com a ideia de base.

Sabe-se que os números naturais foram definidos pela necessidade da contagem. Porém, não era natural a contagem da ausência de algo. Por isso, Caraça (2010) considera os números naturais a partir do número 1, com a representação:

$$1,2,3,4,5,6, \ldots n \ldots$$

O número zero surge como necessidade teórica: a representação numérica da ausência de quantidade. O zero aparece também como necessidade no estabelecimento do valor posicional, que consolida o conceito de base. Desse modo, esse conjunto deixa de ser *natural* e passa a ser denominado por Caraça (2010) como conjunto dos *números inteiros.*

A noção de infinito também é de grande importância, pois, por maior que seja o número, sempre será possível obter um número maior ao acrescentar-lhe mais uma unidade, ou seja, há um infinito sequencial.

Por outro lado, o que dá materialidade ao conjunto numérico é o numeral: o objeto de aprendizagem do conjunto. O numeral é a representação da ideia de quantidade e é composto por algarismos. Porém, a compreensão do numeral vai além de associá-lo à quantidade que ele representa: é preciso que se considere o valor posicional.

Desse modo, as propriedades e os nexos do número natural, pelo princípio de economia, estão contidos nos nexos do número racional. O número racional abarca esses nexos e outros nexos na sua constituição.

Nacarato et al (2004) discutem *constructos* e *subconstructos* para o número racional. Para os autores, os constructos do número racional – baseados em Kieren (1976, 1981) – seriam: relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Os subconstructos são definidos como os significados centrais, as diferentes interpretações desses números, baseados em Behr et al (1983): medida fracionária (relação parte-todo), razão de um número racional, taxa de número racional, quociente, coordenada linear, decimal do número racional, operador e probabilidade.

Entende-se os *constructos* como aspectos mais gerais do conceito de número racional. Por sua vez, associa-se os *subconstructos* ao que se denomina como nexos conceituais, por se tratarem de relações essenciais ou significados centrais para o desenvolvimento do conceito de número racional. Além desses nexos conceituais, acrescentam-se outros aspectos importantes do número racional, analisados por Caraça (2010): infinidade, ordenação, densidade e continuidade.

Medida fracionária (relação parte-todo)

Entende-se o conceito de medida como nexo conceitual dos números racionais, além de ser elemento pedagógico tensionador para a apropriação desse conceito. Nacarato et al (2004) tratam desse nexo a partir da ideia de medida fracionária, subjacente à definição da relação parte-todo. Esse é o fundamento para a construção do conceito de número racional, conforme explicita a figura 2.

Entretanto, pode-se supor que, ao invés de medir a superfície (figura 2), o intento seja de reparti-la. Essa tarefa requer que se antecipe a solução final, por se tratar de grandeza contínua (a superfície), o que torna a ação um pouco mais complicada. Porém, a antecipação não se faz necessária no caso de grandezas discretas: a divisão de certa quantidade de um objeto é mais fácil, pois é possível manipular os objetos para reparti-los, sem alteração ao conjunto inicial (NACARATO et al, 2004).

Em um exemplo de fracionamento de água, por exemplo, no qual se considerasse que aproximadamente $\frac{3}{4}$ da água disponível são usados na agricultura, tem-se a unidade (o total de água) dividida em partes (subunidades). O denominador (4) indica que subunidades do inteiro são usadas e o numerador (3) indica a *medida* dessa subunidade.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em geral, a relação parte-todo é apresentada por meio de figuras geométricas fracionadas. Entretanto, é preciso que os estudantes tenham contato com outras situações em que compreendam, com maior amplitude, os significados desse nexo conceitual.

Razão de um número racional

Entende-se por razão a relação de comparação que se expressa entre duas quantidades ou grandezas da mesma espécie. Um exemplo simples seria a interpretação da receita de um suco concentrado: para beber, adicione 1 parte de suco para 8 partes de água, ou seja 1:8 ou $\frac{1}{8}$ (lê-se um para oito).

Observa-se a razão de um número racional também em textos de Geografia e História, bem como em notícias. Segundo Rodrigues (2015, p. 40), essa interpretação requer maior requinte cognitivo, pois "[...] trata da ideia de proporcionalidade de magnitudes relativas, enquanto para a fração enquanto medida ou quociente as magnitudes são absolutas".

Taxa de número racional

A taxa de número racional pode ser entendida como a relação entre duas grandezas de espécies diferentes. Alguns exemplos: peso = massa x aceleração da gravidade; velocidade = deslocamento (distância) x intervalo de tempo; entre outros.

Nesses casos, nos quais se notam relações entre grandezas de qualidades diferentes, obtém-se uma taxa. Essa taxa representa a variação que uma grandeza sofre em consequência da variação da outra grandeza e está associada a grandezas vetoriais. Entretanto, o foco deste capítulo são as grandezas escalares, onde se comparam grandezas da mesma espécie.

Quociente

Quociente é o resultado de uma divisão. Representa-se também a divisão 1:2 na forma $\frac{1}{2}$. Essa forma é uma das mais frequentes para a interpretação da fração.

Segundo Rodrigues (2015), geralmente os exemplos relacionados a essa interpretação referem-se à partilha de objetos ou alimentos para certa quantidade de pessoas, como no exemplo: se eu tiver 6 chocolates para distribuir entre 5 crianças, quanto cada um receberá?

Para Nacarato et al (2004), a falta de entendimento da fração como quociente pode ser uma das causas da não compreensão do número racional em sua representação fracionária.

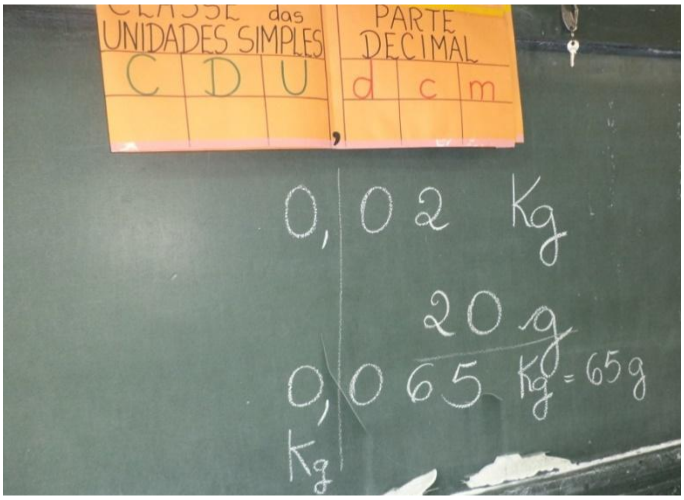
Decimal do número racional

Esse nexo refere-se às propriedades do número racional, associadas ao sistema de numeração decimal, decorrentes do valor posicional.

Nacarato et al (2004) entendem que a exploração do número decimal como um subconstructo do número racional deve ser ampla no Ensino Fundamental, antes mesmo do estudo dos números racionais em forma fracionária. Os autores justificam esse posicionamento a partir da larga utilização do sistema monetário e dos sistemas de medidas em bases decimais.

Desse modo, diversos materiais didáticos estruturados podem servir como ferramentas de mediação na compreensão desse nexo, como o ábaco, o quadro posicional, o material dourado, entre outros.

Figura 8 - Uso do quadro posicional do ensino dos números decimais.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Operador

O nexo operador relaciona-se à ideia de função. É importante para o estudo de equivalência de frações e de multiplicação de frações, que envolvem a composição de funções.

Neste caso, o número fracionário é visto como um transformador: “[...] em um objeto contínuo pode ser pensado como uma combinação de ampliação-redução; em um objeto discreto, de multiplicador-divisor” (RODRIGUES, 2015, p. 40).

Entretanto, há situações mais simples, que permitem contemplar este nexo conceitual com estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, como por exemplo: $\frac{3}{4}$ de uma dúzia de ovos, quantos ovos são?

A situação pode ser resolvida abordando-se o nexo parte-todo: divide-se o total (doze) por quatro, para se obter o valor de $\frac{1}{4}$. Em seguida, multiplica-se pelo número de partes consideradas (três): $3 \cdot 3 = 9$. Outra forma de resolução, a partir da concepção da fração $\frac{3}{4}$ como operador, seria: $\frac{3}{4}$ de $12 = (3 \cdot 12) : 4 = 9$.

Probabilidade

Os povos antigos associavam a ideia do *acaso* a intervenções de divindades. Coutinho (2007) afirma que as primeiras tentativas de se estabelecer probabilidades surgiram na antiguidade (a partir de jogos) e que o raciocínio combinatório e o cálculo de proporções são conhecidos há séculos. Segundo o autor, somente após o século XVI apareceram os primeiros estudos de probabilidades, baseados em análises de jogos.

Hoje em dia, as ideias relacionadas a chances e previsões são corriqueiras em textos jornalísticos, conforme o exemplo da figura 9.

Figura 9 - Manchete de notícia referente a probabilidade.

G1 ECONOMIA BUSCAR

1 em cada 4 brasileiros terá mais de 65 anos em 2060, aponta IBGE

Pesquisa divulgada nesta quarta-feira (24) aponta tendência de envelhecimento dos brasileiros. A partir de 2039, haverá mais pessoas idosas que crianças vivendo no país.

Por Darlan Alvarenga e Carlos Brito, G1 — São Paulo e Rio de Janeiro
25/07/2018 10h00 · Atualizado há 3 anos

Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/noticia/2018/07/25/1-em-cada-4-brasileiros-tera-mais-de-65-anos-em-2060-aponta-ibge.ghtml>. Acesso em: 26 jul. 2021.

Nesse caso, a probabilidade expressa na notícia é de 1 em 4 $\left(\frac{1}{4}\right)$.

É comum, também, a expressão de probabilidade por porcentagem. Esse conceito é desenvolvido a partir de frações com denominadores iguais a 100, como $\frac{25}{100}$ (vinte e cinco centésimos ou vinte e cinco por cento).

No contexto escolar, o estudo de situações que envolvam a relação entre a parte e o todo possibilita o desenvolvimento da relação entre o possível e o necessário e se constitui em nexo do conceito de número racional.

Infinidade, Ordenação, Densidade e Continuidade a partir da ideia de coordenada linear

Um último estágio para o desenvolvimento do pensamento teórico acerca dos números racionais advém da crítica realizada ao problema da medida. A possibilidade de, ao se comparar as medidas de dois segmentos, o resultado não ser necessariamente expresso por um número racional, demonstra uma insuficiência do instrumento numérico (número racional), detectada pelo problema da incomensurabilidade. Esse problema foi explicitado por Caraça (2010) a partir de uma *monstruosidade aritmética*, em comparações obtidas a partir da definição de número racional ($\overline{AB} = \frac{m}{n}\overline{CD}$) com o teorema de Pitágoras[3], ao tentar utilizar um dos catetos de um triângulo retângulo isósceles como alíquota para medir a hipotenusa do mesmo triângulo. Esse problema será tratado um pouco adiante.

Antes disso, para que se conheça melhor a essência do conjunto dos números racionais, é necessário compará-lo ao conjunto de pontos da reta, que é perfeito e contínuo. Segundo Caraça (2010), pode-se dizer que dois conjuntos são equivalentes se puder ser estabelecida entre eles uma correspondência biunívoca. Em linhas gerais, essa comparação se faz necessária para verificar se o conjunto dos números racionais tem os mesmos aspectos ou propriedades que o conjunto de pontos da reta. Daí se definem os nexos conceituais infinidade, ordenação, densidade e continuidade.

A reta numérica pode auxiliar a compreensão de muitos aspectos fundamentais da Matemática. Para Caraça (2010, p. 58), “[...] a imagem ideal da continuidade é a linha reta”. Um desses aspectos é a noção de infinitude: seja qual for o conjunto numérico considerado, a sucessão sequencial será sempre infinita. Além disso, entre dois pontos da reta, por mais próximos que estejam, há um conjunto denso, sem lacunas. Esse conjunto pode ser visto como um infinito intervalar. “Um trabalho exploratório com a reta numérica deveria estar mais presente em todas as séries do ensino fundamental” (NACARATO et al, 2004, p. 56). Portanto, é fundamental que a compreensão dos números racionais contemple seu entendimento enquanto pontos sobre uma reta numérica.

Para Nacarato et al (2004), a representação de números racionais sobre a reta numérica fundamenta também a representação gráfica em eixos coordenados, daí a importância de um trabalho pedagógico mais sistemático com a noção de coordenada linear. Além disso, pode-se

---

[3] Relação entre os lados de qualquer triângulo retângulo: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos ($a^2=b^2+c^2$).

propor a coordenada linear como elemento mobilizador dos nexos conceituais definidos por Caraça (2010): infinidade, ordenação, densidade e continuidade.

Infinidade

Sabe-se que o conjunto dos números inteiros tem uma sequência infinita de elementos, pois sempre há possibilidade de se acrescentar mais uma unidade, por maior que um número seja. Assim, o conjunto dos números racionais é infinito, uma vez que incorpora o conjunto dos números inteiros.

O conjunto de pontos de uma reta também é infinito, já que há uma infinidade de elementos – o que se verifica pela correspondência um a um entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto de pontos da reta. Portanto, há um infinito sequencial.

Ordenação

Embora a *ordenação* já tenha sido admitida como nexo conceitual nos conjuntos dos números naturais e inteiros, para o conjunto dos racionais, em comparação com conjunto de pontos da reta, cabe um reexame. Ao se observar a reta, é simples notar um *critério de ordenação*: “[...] dados dois pontos A e B, diz-se que A precede B se estiver à sua esquerda” (CARAÇA, 2010, p. 55). Observa-se ainda que esse critério é transitivo, pois se A precede B e B precede P, então o ponto A precede o ponto P.

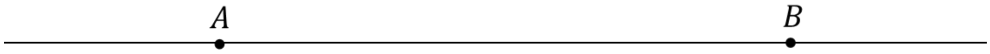
Assim, Caraça (2010, p. 56) define que: "[...] todo conjunto em que haja um critério de ordenação, transitivo, diz-se um conjunto ordenado", o que é verificado no conjunto de pontos da reta que, por consequência, pode ser dito ordenado.

O mesmo pode ser dito do conjunto dos números racionais? Evidente que sim, pois na comparação entre dois números racionais cabe o critério *maior que* ou *menor que*. Assim, dados dois números racionais não equivalentes, r e s, pode-se dizer que r precede s, se $r < s$. Além disso, neste critério cabe a transitividade, pois se $r<s$ e $s < t$, então $r < t$.

Densidade

O critério de densidade na reta pode ser verificado ao se constatar que, entre dois pontos quaisquer, há infinitos pontos. A mesma ideia pode ser usada para provar que a reta é constituída por infinitos pontos. Considere: A e B, pontos quaisquer que determinem sobre a reta um segmento $\overline{AB}$, conforme ilustrado na figura 10.

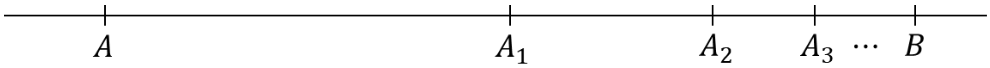
Figura 10 - Uma reta, com dois pontos em destaque.



Fonte: Da autora (2021).

Agora, efetua-se um processo de sucessivas divisões da seguinte maneira (figura 11): divide-se o segmento $\overline{AB}$ ao meio, de forma a obter um ponto A_1; depois, divide-se o segmento $\overline{A_1B}$ ao meio, obtendo-se o ponto A_2; o segmento $\overline{A_2B}$, assim determinado, é divido ao meio novamente, obtendo-se o ponto A_3; e assim sucessivamente.

Figura 11 - Ilustração da operação de divisões sucessivas.



Fonte: Caraça (2010, p. 13).

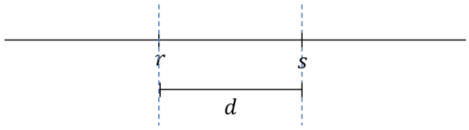
Essa operação de sucessivas divisões de um segmento cada vez menor ao meio tem uma limitação do ponto de vista prático. Porém, do ponto de vista teórico, pode-se invocar o princípio de extensão, admitindo-se que esse processo poderia continuar infinitamente. Examinando essa questão, Caraça (2010, p. 13, grifo do autor) faz a seguinte consideração:

> [...] só é possível uma de duas coisas – ou o ponto geométrico é um pequeno corpúsculo com dimensões, embora muito pequenas, e a operação de divisão ao meio termina quando se obtiver um segmento de comprimento igual ao comprimento do corpúsculo; ou o ponto geométrico tem comprimento *zero* e então, por mais pequeno que seja o segmento $\overline{A_nB}$ obtido numa divisão ao meio, é sempre possível pensar uma nova divisão ao meio. Neste caso, o ato mental de divisão ao meio pode repetir-se ilimitadamente, e teremos sobre o segmento AB uma infinidade de pontos $A_1, A_2, \ldots An\ldots$ – *teremos um novo conjunto infinito*.

De toda essa argumentação, conclui-se que a reta tem infinitos pontos, que um segmento tem infinitos pontos e que, portanto, o conjunto de pontos da reta é denso, isto é, há também um infinito intervalar: uma infinidade de pontos entre quaisquer dois pontos da reta. Desse modo, define-se a *densidade* do conjunto de pontos da reta, por se considerar que os pontos não têm dimensão e nem extensão definidas.

Assim como a reta, é denso também o conjunto dos números racionais? Para demonstrar a densidade do conjunto dos números racionais, Caraça (2010) considera dois números racionais quaisquer, r e s, arbitrariamente próximos um do outro, e supõe que $r < s$. Em seguida, considera a distância d entre esses dois números r e s, de modo que $d = s - r$ (figura 12).

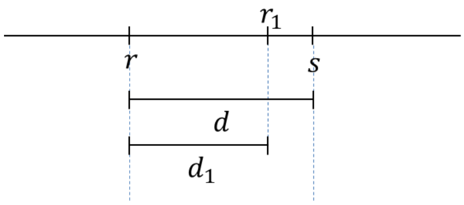
Figura 12 - Distância entre dois números racionais.



Fonte: Da autora (2021).

Se somar a r um segmento de tamanho $d_1 < d$, obtêm-se o número r_1 maior que r, mas menor do que s. “Portanto, a existência de números racionais r_1 entre r e s está dependente apenas da existência de números racionais d_1 menores que d, e os r_1 serão tantos quantos forem os d_1" (CARAÇA, 2010, p. 56).

Figura 13 - Ilustração de um dos infinitos racionais maiores que *r* e menores que *s*.



Fonte: Da autora (2021).

Verifica-se, facilmente, que há uma infinidade de números racionais d_1, d_2, d_3, ... d_p, ... cada um deles menor do que d, pois d, por ser a diferença de dois números racionais, é também um número racional. Isso implica que $d = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros. Por outro lado, ao aumentar o valor do denominador, mantendo o mesmo valor para o numerador, sempre será obtido um número menor que d, ou seja, todo número racional da forma $\frac{m}{n+p}$, com p inteiro, será menor que d. Logo, todos os números da sucessão

$$d_1, d_2, d_3, \cdots d_p, \cdots = \frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+2}, \frac{m}{n+3}, \cdots \frac{m}{n+p}, \cdots$$

são números $d_p < d$. Há infinidade, uma vez que se admite que a associação nos números inteiros é ilimitada. Conclusão: o conjunto dos números racionais “[...] é *denso* e esta propriedade depende apenas do caráter infinito do conjunto dos números inteiros” (CARAÇA, 2010, p. 57, grifo do autor). Porém, isso garante que há uma relação biunívoca entre o conjunto de pontos da reta e o conjunto dos números racionais? Examina-se isto no próximo subtópico.

Continuidade

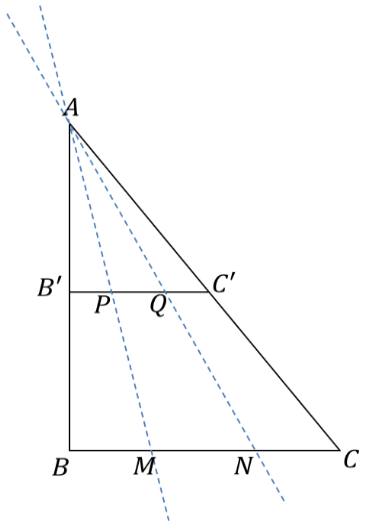
Entre dois conjuntos de mesma natureza, com uma infinidade de elementos, pode haver uma relação biunívoca. Caraça (2010) apresenta dois exemplos interessantes, ao fazer uma relação de correspondência entre conjuntos infinitos. Em um deles, o autor mostra que a correspondência entre dois conjuntos discretos, o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares, é biunívoca:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

o que, por consequência, os torna equivalentes, mesmo um que um deles seja parte do outro.

Outro caso em que a biunivocidade pode ser verificada é na comparação de dois segmentos de reta de tamanhos diferentes, mas ambos com uma infinidade de pontos e contínuos: considere um triângulo retângulo ABC e um segmento definido pelos pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, tal que o segmento $\overline{B'C'}$ seja paralelo ao lado $\overline{BC}$ do triângulo (figura 14). Nessas condições, sabe-se que, na geometria, o segmento $\overline{B'C'}$ tem metade do comprimento do segmento $\overline{BC}$.

Figura 14 - Relação biunívoca entre dois conjuntos contínuos.



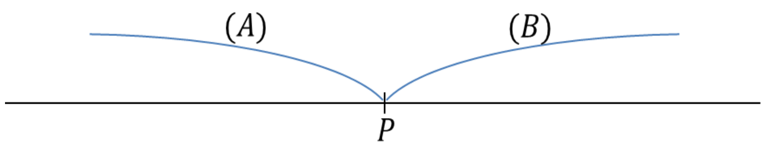
Fonte: Caraça (2010, p. 15).

Apesar disso, o conjunto com infinitos pontos que formam o segmento $\overline{B'C'}$ é equivalente ao conjunto com infinitos de pontos do segmento $\overline{BC}$? Para verificar, basta que seja possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre esses dois conjuntos. Caraça (2010) faz essa verificação da seguinte forma: a cada ponto P pertencente a $\overline{B'C'}$ faz-se corresponder o ponto M (único) em $\overline{BC}$, encontrado pela intersecção da reta $\overline{AP}$, com o lado $\overline{BC}$; e a cada ponto N de $\overline{BC}$ faz-se corresponder o ponto Q (único) em $\overline{B'C'}$ que é definido pela intersecção da reta $\overline{NA}$ com o segmento $\overline{B'C'}$. Isto demonstra que os dois conjuntos são equivalentes, mesmo que $\overline{B'C'}$ tenha comprimento igual à metade de $\overline{BC}$.

Vale destacar que, nos dois casos apresentados – quando se trata de conjuntos infinitos, de mesma natureza, ambos discretos ou ambos contínuos –, o todo e a parte podem ser equivalentes, desde que haja correspondência biunívoca entre eles. Será que essa mesma conclusão pode ser tirada a respeito da comparação entre o conjunto de pontos da reta e o conjunto dos números racionais? Esses conjuntos são equivalentes? Para responder a essas questões, ainda falta examinar o critério da continuidade. Sabe-se que o conjunto de pontos da reta é contínuo; será também contínuo o conjunto dos números racionais?

Para esclarecer esses questionamentos, Caraça (2010) recorre ao conceito de corte, formulado por Ricardo Dedekind, conhecido como axioma da continuidade de Dedekind-Cantor. Ao se aplicar essa ideia na reta, ou seja, ao se realizar um corte na reta, observa-se que sempre vai ser atingido algum de seus pontos, dividindo-a em duas classes, de maneira que nenhum ponto escape a essa repartição: à esquerda do ponto de corte estão todos os pontos da reta que pertencem à classe (A) e à direita do ponto de corte estão todos os pontos da reta que pertencem à classe (B), como mostra a figura 15.

Figura 15 - O conceito de corte de Ricardo Dedekind.



Fonte: Caraça (2010, p. 59).

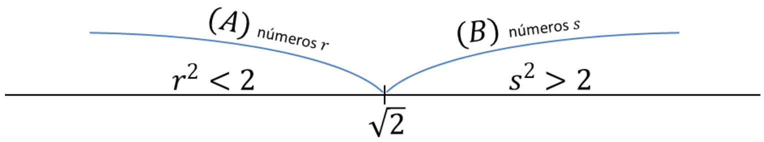
Por outro lado, no conjunto dos números racionais, ao se escolher um número, este também dividirá o conjunto em duas classes: na classe (A) estarão todos os números racionais menores que r e o próprio r e, na classe (B), estarão todos os números racionais maiores que r. Entretanto, se for considerada a possibilidade de escolher arbitrariamente o número, pode acontecer de o número escolhido não ser racional, pois se trata de um corte aleatório. Esse raciocínio demonstra que o conjunto dos números racionais é denso, mas não é contínuo; além disso, o conjunto dos números racionais não é equivalente ao conjunto de pontos da reta, pois não há correspondência biunívoca.

Para se verificar a questão da continuidade, é preciso questionar: o elemento que dividirá o conjunto dos racionais em duas classes será sempre um elemento do próprio conjunto? Em um exemplo muito simples, verifica-se que há cortes que não têm um número racional como elemento de separação.

Assim, propõe-se efetuar uma repartição dos números racionais em duas classes (A) e (B), de forma que na classe (A) esteja todo número racional r cujo quadrado seja menor que

2, $r^2 < 2$; e, na classe (B), esteja todo número racional s cujo quadrado seja maior que 2, $s^2 > 2$. Empiricamente, pode-se escolher um número racional qualquer e verificar a qual classe ele pertence, como por exemplo: dado o número 0,8 verifica-se que o seu quadrado resulta em 0,64 – o que nos mostra este número pertence à classe (A); dado o número 1,5 verifica-se que o seu quadrado resulta em 2,25 – o que nos mostra que este número pertence à classe (B). O importante é perceber que o critério de repartição do conjunto em duas classes é um critério definido sem ambiguidade. Por consequência, este critério abrange todos os números racionais, com exceção daquele cujo quadrado seja igual a 2.

Figura 16 - O conceito de corte de Ricardo Dedekind em um número irracional.



Fonte: Caraça (2010, p. 59).

Nesse caso, o corte realizado não atingirá um número racional, embora esse número divida o conjunto dos números racionais em duas partes, de forma que na classe (A) estarão todos os números racionais, tais que $r^2 < 2$; e na classe (B) estarão todos os números racionais, tais que $s^2 > 2$. Nota-se que a escolha desse número se constitui em um contraexemplo e mostra a descontinuidade do conjunto dos números racionais, uma vez que a relação entre os números racionais e os pontos da reta não será biunívoca: haverá correspondência entre um número que não é racional e um ponto da reta. Dito de outra forma, o conjunto dos números racionais não é contínuo: entre dois números racionais há uma infinidade de números e, ainda assim, esse infinito intervalar não o torna equivalente aos pontos da reta.

Desse modo, o problema da incomensurabilidade permite um estudo mais criterioso dos números racionais e conduz à negação da negação e a uma generalização: a construção de outro conjunto numérico – o dos números irracionais – e, por consequência, a união dos números racionais com os irracionais, constituindo o conjunto dos números reais.

Assim, percebe-se a incomensurabilidade como nexo conceitual dos números reais e até mesmo como nexo dos racionais, já que essa ideia permite uma inspeção analítica ao conjunto dos racionais, de forma a trazer elementos que podem contribuir para o pleno desenvolvimento do pensamento teórico do conceito.

Em geral, essas questões não são discutidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Porém, a análise crítica do problema da medida precisa ser bem compreendida pelo docente; ao contemplar os nexos internos do conceito em estudo, o professor compreende a essência teórica e volta-se para os aspectos lógico-históricos que deram origem ao conceito.

Enfim, partiu-se do pressuposto que o desenvolvimento do pensamento teórico envolve a mobilização e apropriação dos nexos do conceito em estudo. Por isso, o problema desta pesquisa – análise dos sentidos e significados que os estudantes explicitaram na aprendizagem dos números racionais e do conceito de medida – gerou a necessidade de elaborar, desenvolver e analisar uma unidade didática (UD) que contemplasse os nexos conceituais do número racional e da medida. "Os nexos conceituais são lógico-históricos e se apresentam no movimento do pensamento, tanto daquele que ensina, como daquele que aprende" (SOUSA, 2004, p. 63).

Não se pretendeu esgotar as possibilidades de trabalho nesse campo, nem tampouco criar uma receita didática. Afinal, o contexto, as necessidades e os interesses dos estudantes envolvidos precisam ser considerados no planejamento da ação docente. Esta UD representa uma construção adequada a uma realidade específica, conhecida pela pesquisadora e voltada a uma prática docente mediadora, para que se esclarecessem os significados das inter-relações dos conceitos matemáticos e o pensamento resultante desses entendimentos. Portanto, a partir do desenvolvimento dessa UD, que compõe uma situação desencadeadora de aprendizagem (SDA), tornou-se possível suscitar a atividade dos estudantes e analisar os sentidos e significados produzidos.

4 ITINERÁRIO METODOLÓGICO

Apresentam-se, nesta seção, os percursos metodológicos da pesquisa: a abordagem, o contexto, os instrumentos de produção de dados e as possibilidades de análise dos dados obtidos. A metodologia volta-se à questão da pesquisa, a saber: que sentidos e significados os estudantes explicitam, em sua atividade, em uma SDA dos números racionais e do conceito de medida?

O caminho metodológico da pesquisa é pautado no materialismo histórico-dialético e na THC: a partir da riqueza das expressões humanas (como a fala e a escrita), busca-se compreender as relações que constituem esses sujeitos, inseridos num contexto e que, nem por isto, perdem sua individualidade e sua historicidade. Nesse sentido, almeja-se refletir a realidade material – histórica e cultural – por meio da realidade dada, ou seja, pelo material empírico.

A pesquisa é exploratória, delineada como estudo de caso, de abordagem qualitativa. O objeto de estudo determina a escolha do método, visto que “[...] os objetos não são reduzidos a simples variáveis, mas sim representados em sua totalidade, dentro de seus contextos cotidianos” (FLICK, 2009, p. 24), o que justifica a abordagem qualitativa.

O estudo de caso, definido como observação detalhada de um contexto, refere-se ao foco da pesquisa: estudantes que interagem, que se identificam, partilham expectativas em relação ao comportamento uns dos outros e partilham características comuns ao ambiente escolar (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Desse modo, entende-se o *caso* como o contexto desta turma de quinto ano, nesta escola pública, composta pelos trinta estudantes e a professora regente, em suas interações e expressões, consideradas em seu aspecto coletivo.

4.1 Objeto de investigação, participantes e contexto da pesquisa

A pesquisa se sustenta nos pressupostos da THC, a partir do materialismo histórico-dialético. O problema da pesquisa é como os estudantes, em atividade, explicitam sentidos e significados, que levam à discussão do desenvolvimento do pensamento teórico.

Buscam-se analisar os sentidos e significados produzidos pelos estudantes e de que forma eles possibilitam o desenvolvimento do pensamento teórico em uma SDA. Em tal situação, verifica-se se foi suscitada a atividade dos estudantes na elaboração dos conceitos matemáticos.

Para tanto, foi elaborada e desenvolvida uma unidade didática (UD), composta por dez momentos, cuja intencionalidade foi mobilizar a apropriação dos nexos conceituais do número racional e da medida, em uma escola da rede pública de ensino do sul de Minas Gerais, com uma turma de quinto ano do Ensino Fundamental, da qual a pesquisadora era professora regente.

A turma era composta por trinta estudantes com faixa etária entre dez e doze anos. Assim, os sujeitos da pesquisa são o grupo como um todo, ou seja, a turma do quinto ano, composta pelos trinta estudantes. Ainda que considere as expressões individuais, a análise dos dados privilegia o aspecto coletivo do trabalho, sem especificar o desenvolvimento individual dos participantes. Além disso, o desenvolvimento da UD e, consequentemente, a produção dos dados da pesquisa, ocorreram nos meses de outubro e novembro do ano de 2019, em período regular de aulas, o que garantiu a presença e participação de todos os estudantes da turma.

Optou-se por preservar a identidade dos estudantes envolvidos na pesquisa, bem como dos demais membros da comunidade escolar: diretora, supervisora, bibliotecária e outros professores foram nomeados na transcrição dos dados por meio de sua função. Ainda assim, fez-se necessária a autorização de todos os órgãos relacionados ao desenvolvimento da pesquisa: a Pró-Reitoria de Pesquisa, aliada ao Comitê de Ética/UFLA, sob o parecer número 3.545.032, bem como a Secretaria Municipal de Educação, a direção da escola, os pais, por meio de assinatura do Termo de Consentimento Livre Esclarecido e os alunos, mediante assinatura do Termo de Assentimento, como participantes da pesquisa.

4.2 Unidade didática: a situação desencadeadora de aprendizagem

A unidade didática elaborada e desenvolvida pela pesquisadora foi orientada e fundamentada pela THC e demandou a compreensão dos nexos conceituais do número racional e da medida, além de um processo criativo adequado à realidade da turma. Exigiu coerência entre a teoria estudada e a prática docente para que se estimulasse a autonomia intelectual dos estudantes em uma situação desencadeadora de aprendizagem.

Ao assumir a THC como fundamento da pesquisa, considera-se o movimento do pensamento dos sujeitos no processo de apropriação do conhecimento. Por meio da atividade – esse movimento interno de apropriação e articulação do conhecimento –, os estudantes desenvolvem o pensamento teórico e incorporam, à sua vida, as objetivações construídas pela humanidade ao longo da história. O pensamento teórico envolve o pensamento de nexos conceituais, ou seja, das ligações que se estabelecem entre os conceitos e que mobilizam o pensamento.

Assim, a compreensão do conceito de atividade pode orientar a organização do ensino. De acordo com Moura (2002, p. 157), "[...] tomar o ensino como uma atividade implica em definir o que se busca concretizar com a mesma, isto é, a atividade educativa tem por finalidade aproximar os sujeitos de um determinado conhecimento".

Parte-se do pressuposto que a atividade principal do professor é o ensino – seu trabalho, enquanto ato de transformação da realidade – e a atividade principal do discente é o estudo. Nesse sentido, Moura et al (2010, p. 221) definem Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como um "[...] modo geral de organização do ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento".

Para que a atividade de ensino tenha intencionalidade bem definida e potencialidade de mediação, é necessário que o professor compreenda a essência do conceito (objeto), ou seja, é preciso que o docente organize sua ação de acordo com o contexto lógico-histórico do conceito, de modo a suscitar a atividade de estudo. A atividade de ensino pode envolver, por parte do professor, a criação de uma UD para o desenvolvimento dos conceitos. Nesse processo, é necessário proporcionar ao estudante a necessidade de se apropriar do conhecimento em uma SDA, na qual há momentos que mobilizam a atividade de estudo e a apropriação dos conceitos.

A SDA, organizada pelo professor a partir de seus objetivos de ensino, mobiliza as necessidades, os motivos, os objetivos, as ações e as operações do próprio professor e dos alunos, no sentido de interagir com os companheiros e apropriar-se da solução, o que leva a outro nível de compreensão do conceito. Esse modo de se aproximar do conceito propicia aos sujeitos uma nova forma de resolver problemas e de se apropriar do conhecimento, ou seja, possibilita o desenvolvimento do pensamento teórico (MOURA et al, 2010). Portanto, "[...] educar seria proporcionar ao aluno um encontro pedagógico com os conceitos; a formação de uma visão de transformação e de movimento contínuo da realidade humana" (SOUSA, 2009, p. 88).

> A situação desencadeadora de aprendizagem deve contemplar a gênese do conceito, ou seja, a sua essência; ela deve explicitar a necessidade que levou a humanidade à construção do referido conceito, como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico-histórico (MOURA et al, 2010, p. 223).

A SDA pode ser organizada de diversos modos, dentre eles: o jogo, por possuir caráter de problema; as situações emergentes do cotidiano, que propiciam ao aluno a vivência de problemas significativos; a história virtual do conceito, que possibilita ao aluno envolver-se em uma situação semelhante àquela vivenciada pela humanidade na gênese do conceito em estudo (MOURA et al, 2010). A UD desta pesquisa contemplou uma SDA com momentos de faz-de-conta, classificados como *jogo* por Caillois (1990) e entendidos por Vigotski (2008) como *atividade* na qual a criança pode revelar suas possibilidades de desenvolvimento.

Ainda que o foco da pesquisa fosse o desenvolvimento do pensamento matemático, a professora considerou relevante o estímulo a práticas de leitura e escrita em todos os momentos da SDA. Esse contexto vivenciado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em que o mesmo professor ministra as disciplinas Língua Portuguesa e Matemática, favoreceu uma abordagem interdisciplinar e flexível das aulas.

Para a criação da UD, a professora baseou-se no interesse dos alunos em conhecer lugares diferentes, observado em uma excursão a cidades históricas, bem como no entusiasmo dos estudantes em situações desafiadoras, jogos e tarefas em equipe. No contexto criado, um amigo misterioso enviava cartas à turma e convidava os estudantes para uma viagem imaginária pelo mundo. O quadro 1 explicita o contexto e os objetivos da UD.

Quadro 1 - Contexto e objetivos da UD.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">A viagem e o amigo misterioso</td></tr>
<tr><td>Disciplinas: Matemática e Língua Portuguesa</td><td>Tempo previsto: 1200 min (24 aulas)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contexto: um amigo misterioso envia cartas à turma e convida os alunos para uma viagem imaginária pelo mundo. Em cada momento, eles se deparam com situações nas quais precisarão mobilizar nexos conceituais do número inteiro, do número racional e da medida.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos de ensino:
Suscitar a atividade dos estudantes.
Gerar processos de significação dos conceitos construídos.
Mediar o processo de aprendizagem por meio da identificação das possibilidades da ZDI.
Desenvolver o espírito de equipe, a colaboração, o sentido de pertença e a criatividade.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos da UD:
Mobilizar os nexos conceituais do número natural e do número inteiro: senso numérico, correspondência um a um, qualidade/quantidade, agrupamento, ordenação, valor posicional, base, composição/decomposição.
Mobilizar os nexos conceituais da medida: qualidade/quantidade, grandeza, discreto/contínuo e unidade.
Mobilizar os nexos conceituais do número racional: medida fracionária, quociente, razão, decimal, operador, infinidade e ordenação.
Construir o significado do número com base em seus diversos usos na sociedade.
Ampliar o significado de número natural através de situações desafiadoras para construir o significado de número racional e suas representações.
Compreender, valorizar e exercitar o uso da escrita com diferentes funções e em diferentes gêneros.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No movimento de elaboração da SDA, a pesquisadora deparou-se, em uma feira de livros, com a obra de Malba Tahan *O homem que calculava*[4] e, ao folheá-la, obteve ideias para criar. Utilizou algumas situações do livro e criou outras semelhantes, com adaptações ao contexto da viagem imaginária e à linguagem para facilitar a interpretação do texto e para possibilitar que os estudantes se sentissem participantes da situação, e não apenas leitores.

Em cada momento da SDA, os estudantes se depararam com situações nas quais precisariam mobilizar nexos conceituais do número racional e da medida, bem como nexos do número natural e do número inteiro que, pelo *princípio de economia* (CARAÇA, 2010), estão contidos nos nexos do número racional. Em momentos colaborativos, os estudantes foram provocados a resolver os problemas. No quadro 2, observam-se os nexos conceituais mobilizados em cada momento da SDA.

Quadro 2 - Nexos conceituais na SDA.

MOMENTO	*Nexos da medida*	*Nexos do número racional*	*Nexos do número natural e do número inteiro*
2	Quantidade/qualidade Grandeza Contínuo/discreto Unidade	Decimal	-
3	-	Quociente Medida fracionária (relação parte-todo)	-
4	Grandeza Contínuo/discreto	Medida fracionária (relação parte-todo)	-
5	Unidade	Medida fracionária (relação parte-todo)	-
6	Quantidade/qualidade Grandeza Contínuo/discreto Unidade	Infinidade Ordenação Decimal	Correspondência um a um Ordenação
8	Quantidade/qualidade Grandeza Contínuo/discreto Unidade	Medida fracionária (relação parte-todo) Quociente Razão Decimal Operador	Quantidade/qualidade Valor posicional Base Composição/decomposição Agrupamento
9	Quantidade/qualidade Grandeza Contínuo/discreto Unidade	Medida fracionária (relação parte-todo) Quociente Decimal	Senso numérico Correspondência um a um Quantidade/qualidade Agrupamento

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

---

[4] Malba Tahan é o pseudônimo do professor de matemática Júlio César de Mello e Souza (1895-1974), autor de vários livros que abordam lendas e costumes árabes. Sua obra, além de manter as características de ficção, aventura e romance, possui enorme valor pedagógico.

A UD é composta por uma SDA, dividida em dez momentos. Nos momentos 1, 7 e 10 não houve intencionalidade de mobilizar nexos conceituais; essas aulas constituíram-se em momentos de contextualização, nos quais se buscou o envolvimento dos estudantes na SDA, ou seja, almejou-se suscitar a atividade dos sujeitos da pesquisa. Desse modo, ainda que esses momentos não sejam abordados de forma direta na análise dos nexos conceituais mobilizados, constituem-se em importante fonte de dados para a verificação da atividade de estudo dos sujeitos.

As cartas do amigo misterioso apresentaram aos estudantes situações nas quais, por meio de ações e operações, deveriam apropriar-se dos nexos conceituais do número racional e da medida, em um movimento do abstrato ao concreto, do geral ao particular. O contexto da viagem imaginária fez com que os sujeitos se envolvessem na construção de soluções para problemas que se tornaram necessidades reais para a turma.

Para que os estudantes resolvessem as situações, precisariam mobilizar conhecimentos matemáticos anteriores, que são teóricos. Segundo Davidov (1988), o aluno forma conceitos científicos enquanto incorpora processos de pensamento; por outro lado, enquanto elabora o pensamento teórico, em geral solucionando problemas, suscita sua atividade mental. Desse modo, o trabalho em equipes foi fundamental, já que garantiu a interação e colaboração entre os pares para explicitar, em sua atividade, os sentidos e significados produzidos.

Nesse sentido, pressupõe-se que, a partir da compreensão geral do conceito, os estudantes, consigam resolver particularidades. Por esse método de pensamento – a dialética materialista – propõe-se a progressão do abstrato ao concreto, em um movimento da parte para o todo e do todo para a parte.

Buscou-se abordar, ainda, o incentivo à capacidade leitora e escritora dos alunos. Ao final de todos os momentos da unidade didática, os estudantes marcavam no mapa o percurso da viagem e eram convidados a registrar em seu *Diário de Bordo*[5] as experiências vivenciadas naquele dia. Desse modo, a ação docente transcendeu a fragmentação curricular, por meio da cartografia e da produção escrita, aliadas à aprendizagem matemática. A figura 17 traz o mapa no momento final da viagem imaginária.

---

[5] A nomenclatura *diário de bordo* faz alusão à viagem imaginária realizada durante a SDA.

Figura 17 - Mapa com marcações em barbante.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na figura 18, estudantes registram suas impressões após um dos momentos da SDA. O registro ocorreu ao final de todos os momentos, de forma espontânea e particular, ao mesmo tempo em que a pesquisadora fazia suas anotações no diário de campo. Esses cadernos – *diários de bordo* – também compõem o conjunto dos dados produzidos na pesquisa; portanto, alguns trechos, escritos pelos estudantes em seu diário de bordo, são abordados como excertos na análise dos dados.

Figura 18 - Estudantes durante a escrita do *diário de bordo*.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

4.3 Instrumentos para a produção de dados e a documentação da pesquisa

A produção dos dados se deu por meio de gravações em áudio e vídeo, fotografias, produções escritas dos alunos e o diário de campo da pesquisadora. O diário de campo contém o "[...] relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 150).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), é importante compreender que as anotações de campo não são isentas da influência do observador. Destaca-se que, no contexto desta pesquisa, a professora é, ao mesmo tempo, pesquisadora e pesquisada. Por isso mesmo, seu objetivo é o relato detalhado do que ocorreu no curso da pesquisa, para que se dê conta de como desenvolveu o pensamento e de onde as ideias surgiram. Ao relatar no diário de campo suas impressões sobre as aulas, a pesquisadora garante fidedignidade às observações e relata de modo descritivo e reflexivo os acontecimentos.

No entanto, enquanto professora e pesquisadora, não seria possível que as anotações fossem feitas durante as aulas. Tornam-se essenciais outros meios para recordar e estudar os detalhes da observação (BOGDAN; BIKLEN, 1994): fotografias e gravações em vídeo incluem os aspectos não verbais da interação entre os estudantes, isto é, participação, curiosidade, ânimo, empolgação, mas também apatia, desinteresse, desânimo, fadiga, entre outras expressões. Esses meios "[...] permitem o registro das ações enquanto estas são produzidas", além de possibilitar "[...] a captura de uma maior quantidade de aspectos e de detalhes" e reduzir o aspecto seletivo de outros métodos de produção dos dados (FLICK, 2009, p. 228).

Gravações em áudio em cada equipe tornaram possível a apreensão dos sentidos e significados explicitados pelos estudantes em sua atividade (objeto da pesquisa), visto não ser viável a compreensão do som captado pela filmagem de uma classe numerosa, na qual vários grupos trabalham simultaneamente. Além disso, a pesquisadora não conseguiria observar a discussão de todos os grupos ao mesmo tempo. Outra questão a ser considerada é que nem sempre os alunos conseguem registrar com detalhes os sentidos e significados, porém verbalizam com maior facilidade na interação com os colegas. Todas as gravações em áudio foram transcritas pela pesquisadora.

O conjunto desses elementos – diário de campo, gravações em áudio, somadas a suas transcrições, gravações em vídeo, fotografias e produções escritas dos estudantes – produz a documentação da pesquisa. Os instrumentos de produção dos dados se complementam e reduzem a possibilidade de incompletude e incompatibilidade de informações.

4.4 Organização dos dados para o estabelecimento das categorias de análise

A análise dos dados obtidos se deu a partir da constituição de núcleos de significação (AGUIAR; OZELLA, 2006). Essa metodologia pauta-se na explicação do processo de constituição do objeto de estudo em uma perspectiva histórico-dialética, isto é, os núcleos de significação são constituídos a partir de conteúdos que se articulam ou contradizem, considerando-se seus aspectos históricos. No

> [...] processo de organização dos núcleos de significação – que tem como critério a articulação de conteúdos semelhantes, complementares ou contraditórios –, é possível verificar as transformações e contradições que ocorrem no processo de construção dos sentidos e dos significados, o que possibilitará uma análise mais consistente que nos permita ir além do aparente e considerar tanto as condições subjetivas quanto as contextuais e históricas (AGUIAR; OZELLA, 2006, n.p.).

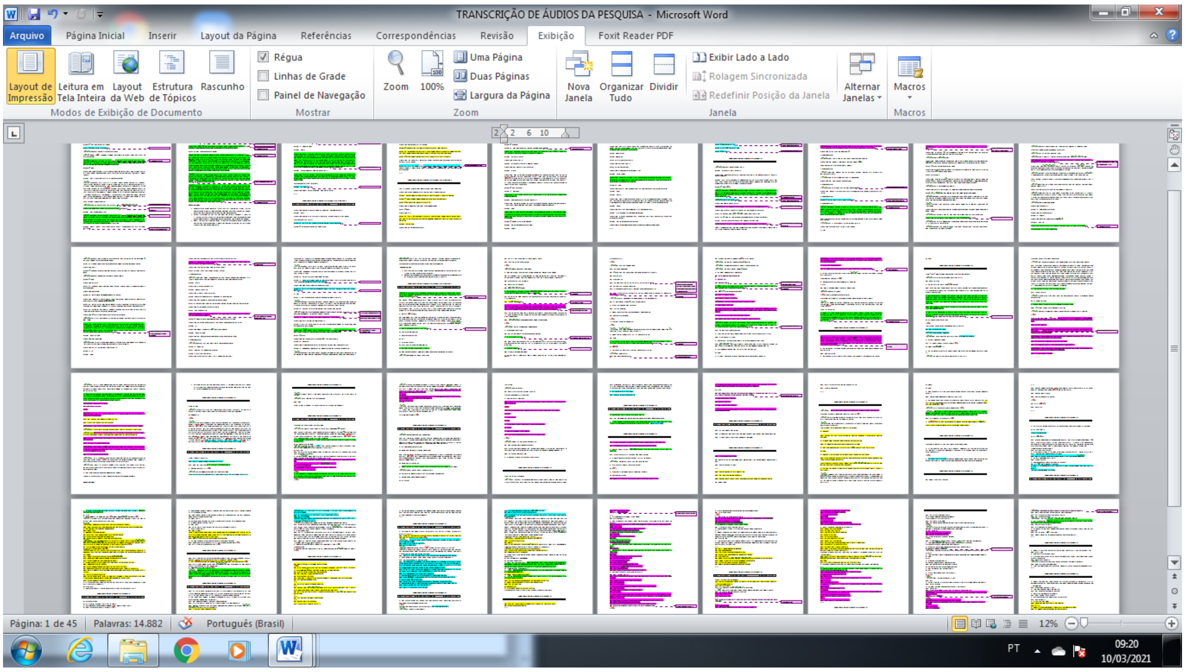
No processo de análise – do empírico ao interpretativo – os núcleos resultantes expressam os pontos fundamentais, apresentados por meio de episódios e cenas. Cada núcleo de significação se constitui em um episódio, do qual foram extraídas cenas, isto é, excertos que trazem a evidência do núcleo de significação estabelecido. Por exemplo: para o primeiro episódio – o primeiro núcleo de significação – foram selecionadas expressões orais, escritas e imagens que evidenciam os sentidos e significados produzidos pelos estudantes.

Desse modo, é possível a apreensão dos sentidos e significados produzidos pelos estudantes, o que caracteriza o desenvolvimento do pensamento teórico nas situações de aprendizagem desenvolvidas. Entende-se, assim, que o pesquisador precisa se aproximar das condições históricas e sociais do objeto em investigação para que haja efetiva compreensão (AGUIAR; SOARES; MACHADO, 2015).

O exercício de análise iniciou-se três meses após a produção dos dados. Considerou-se esse espaço de tempo salutar para permitir o afastamento da pesquisadora, ao mesmo tempo professora, do contexto da pesquisa. A princípio, a pesquisadora realizou leituras flutuantes dos dados obtidos, isto é, um primeiro contato com os textos com o objetivo de identificar impressões e direcionamentos; em seguida, passou a uma observação mais intensa dos dados, em especial as gravações em áudio e os registros escritos (diário de campo da pesquisadora e registros escritos dos estudantes) para a constituição dos núcleos de significação.

A pesquisadora leu e observou os dados por diversas vezes, durante as quais fazia comentários e grifos sinalizados por cores, de acordo com as semelhanças e contradições identificadas, como ilustra a figura 19.

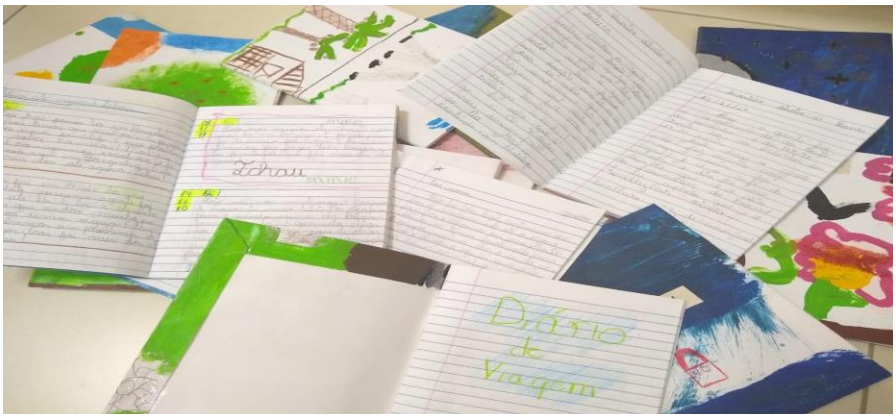
Figura 19 - Tela do computador da pesquisadora durante análise dos áudios transcritos.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os registros escritos dos estudantes, especialmente o caderno em que registraram suas impressões sobre as aulas, também foram objetos de análise. De modo geral, as expressões orais revelam com maior fidelidade o desenvolvimento do pensamento dos sujeitos; entretanto, alguns trechos escritos nesses cadernos também foram considerados na análise.

Figura 20 - *Diários de bordo* dos estudantes.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Desse modo, foram selecionados pré-indicadores para os núcleos. Devido à diversidade de temas encontrados, a pesquisadora reportou-se aos objetivos da pesquisa, a fim de manter fidelidade ao projeto inicial. A riqueza de dados constitui-se em material para análises diversas; por isso, a validação dos pré-indicadores deu-se a partir de sua relevância para responder à questão da pesquisa: *que sentidos e significados os estudantes explicitam, em sua atividade, em uma SDA dos números racionais e do conceito de medida?*

A verificação da importância dos pré-indicadores para o objetivo da pesquisa é um critério básico, apontado por Aguiar e Ozella (2006) como filtro. Por meio de legendas, a pesquisadora agrupou os pré-indicadores em quatro grupos, compostos por temas relacionados à pesquisa, que se constituíram em indicadores para a constituição dos núcleos de significação.

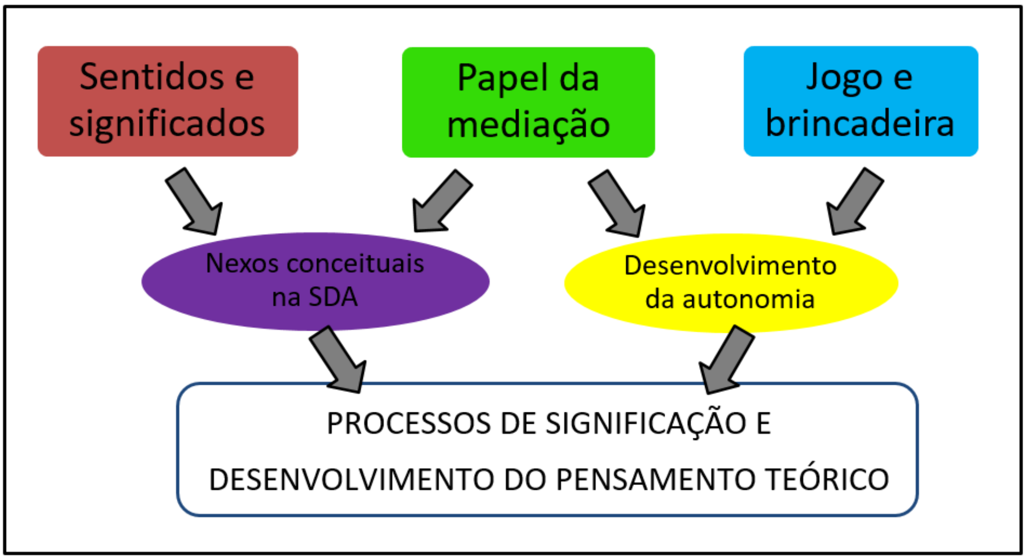
Figura 21 - Pré-indicadores e indicadores.

PRÉ-INDICADORES			
MISTÉRIO	CURIOSIDADE	A DOCENTE DIRECIONA O TRABALHO	DECEPÇÃO
APOIO DA PROFESSORA PARA COMPREENSÃO	FORMAÇÃO DE EQUIPES	A PROFESSORA NÃO RESPONDE DE FORMA DIRETA	ALUNO ENVOLVIDO NO CONTEXTO DA SDA
SURPRESA	LIDERANÇA / INICIATIVA	DESMANCHA-PRAZERES (JOGO)	ALEGRIA EMPOLGAÇÃO AGITAÇÃO
REFERÊNCIA: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	USO DO CORPO COMO UNIDADE DE MEDIDA	NECESSIDADE DE ESTABELECER UNIDADE (REFERÊNCIA)	AGRUPAMENTO DA UNIDADE DE MEDIDA
RACIOCÍNIO EQUIVOCADO, ERRO CONCEITUAL	REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA DO NÚMERO RACIONAL	INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA	ENSINAR COM PERGUNTAS (QUESTIONAR)
PREOCUPAÇÃO COM O REGISTRO (RESPOSTA)	MEDIDA FRACIONÁRIA	MANEJO DO TEMPO NO PROCESSO DE ENSINO	PARTICIPAÇÃO COOPERAÇÃO
SOCIALIZAÇÃO DE CONHECIMENTOS	APROVAÇÃO/CORREÇÃO DE RESPOSTAS	CANSAÇO	RELAÇÃO PARTE-TODO
RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	USO DE MATERIAL MANIPULATIVO	CONTEXTUALIZAÇÃO	LUDICIDADE
DECIMAL DO NÚMERO RACIONAL	GRANDEZA	QUANTIDADE/QUALIDADE	REGRAS
INSTRUMENTOS DE MEDIDA CONVENCIONAIS	ORGANIZAÇÃO DE ESTRATÉGIAS	ORDENAÇÃO	VERBALIZAÇÃO DO RACIOCÍNIO
DESAFIO	CRIATIVIDADE	QUOCIENTE REPARTIÇÃO	CONHECIMENTOS PRÉVIOS
PESQUISA	ATENÇÃO	SENSO NUMÉRICO	VALOR POSICIONAL
	RAZÃO	OPERADOR	CONTÍNUO/DISCRETO
INDICADORES			
DESENV. AUTONOMIA	PAPEL DA MEDIAÇÃO	SENTIDOS E SIGNIFICADOS	JOGO E BRINCADEIRA

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nesse movimento dialético de articulações e contradições, destacaram-se os indicadores: desenvolvimento da autonomia; papel da mediação; sentidos e significados; jogo e brincadeira. Os indicadores contêm falas e expressões escritas que, articuladas pela recorrência ou contradição, apresentam robustez para compor os núcleos de significação. Enfim, os indicadores foram agrupados em duas categorias de análise e compuseram dois núcleos de significação: os nexos conceituais na SDA e o desenvolvimento da autonomia. Ambos os núcleos foram organizados a fim de responder a questão da pesquisa e, por isso, explicitam a análise dos processos de significação dos estudantes no desenvolvimento do pensamento teórico.

Figura 22 - Composição dos núcleos de significação.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O primeiro núcleo de significação trata dos nexos conceituais na SDA, isto é, analisa os sentidos e significados explicitados pelos estudantes, em atividade de estudo. A análise privilegia os nexos conceituais presentes na SDA; na apropriação e mobilização desses nexos, os estudantes demonstraram mover o pensamento – do empírico ao teórico – no sentido da apropriação dos conceitos de número racional e medida.

O segundo núcleo de significação diz respeito à progressão dos estudantes, da dependência à autonomia, no processo de apropriação do conhecimento. Isso ficou claro nas falas dos alunos que, nos primeiros momentos da pesquisa, solicitavam com frequência a presença da professora nas equipes a fim de questionar se a resposta estava correta. Nos momentos subsequentes, essas solicitações se reduziram e os alunos demonstraram, tanto nas falas quanto nos comportamentos, maior autonomia.

A análise dos núcleos constituídos é construtiva e interpretativa: considera o contexto de produção e articula-se com a teoria, podendo vir a ser útil para outras pesquisas. Ressalta-se, entretanto, que a contribuição desta pesquisa é estritamente teórica, pois não há possibilidade de generalização direta dos resultados obtidos. Por exemplo: não é possível afirmar que todos os estudantes de quinto ano desenvolvem o pensamento teórico ou expressam os mesmos sentidos e significados em situações semelhantes. Esta pesquisa refere-se à realidade de uma turma de quinto ano, em um contexto histórico e cultural específico, o que não permite a generalização direta dos resultados; porém, contribui para a constituição de futura generalização naturalística.

5 DOS SENTIDOS E SIGNIFICADOS AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO TEÓRICO

O embasamento teórico da pesquisa permite uma reflexão da realidade a partir do empírico (a realidade dada), por meio das elaborações do pensamento (as abstrações), para que se possa chegar ao concreto, isto é, à compreensão mais elaborada da essência do objeto. Esse caminho – empírico-abstrato-concreto – possibilita uma consciência filosófica na compreensão da prática educativa.

Nesse contexto, passa-se à análise dos documentos produzidos na pesquisa, por meio de uma metodologia denominada *núcleos de significação* (AGUIAR; OZELA, 2006). Os núcleos de significação foram estabelecidos a partir da relevância dos dados dos diversos instrumentos utilizados, complementares ou contraditórios, em consonância com os objetivos da pesquisa.

Com a constituição dos núcleos de significação, pretende-se delimitar as situações para que o problema da pesquisa seja contemplado, a saber: *que sentidos e significados os estudantes explicitam, em sua atividade, em uma SDA dos números racionais e do conceito de medida?* Na análise das expressões dos estudantes, pretende-se identificar os processos de significação produzidos a partir dos nexos conceituais do número racional e da medida. É importante ressaltar que a construção da análise privilegia o processo (o desenvolvimento do pensamento) e não o produto (resultado).

No primeiro núcleo de significação abordam-se os nexos conceituais explicitados pelos estudantes na SDA e, no segundo núcleo, a progressão dos estudantes, da dependência à autonomia, na apropriação do conhecimento. Ressalta-se que as situações se complementam, fazem parte do mesmo contexto escolar e não são analisadas na sequência cronológica das aulas; portanto, a análise parte da relevância dos dados, consonantes aos objetivos da pesquisa, que constituíram os dois núcleos de significação.

5.1 “Talvez esse raciocínio funcione!” Os nexos conceituais na SDA

A apropriação do conhecimento científico e, por conseguinte, dos conceitos historicamente construídos pela humanidade, está muito além da mera descrição dos fenômenos. Assim, a compreensão da constituição e funcionamento do objeto de estudo pode levar o sujeito a se aproximar da essência do conceito e seus nexos internos.

Nesse sentido, o entendimento da grandeza comprimento pode possibilitar a compreensão teórica do conceito de medida. No processo de apropriação do conceito, o indivíduo precisa reproduzir, em sua atividade, as capacidades historicamente desenvolvidas pela humanidade. O percurso da aprendizagem deve suscitar no estudante as necessidades de compreender a qualidade da grandeza a ser medida, de estabelecer unidades de medida e fracionar essas unidades, bem como a necessidade de padronização da unidade, por meio do estabelecimento de um referencial.

No momento 2, a apropriação dos nexos conceituais da medida *contínuo/discreto, grandeza, qualidade/quantidade e unidade* deu-se pela partilha e medição de terras entre as equipes. Em tal situação, a intencionalidade docente foi conduzir a turma à compreensão das necessidades históricas que deram origem ao conceito de medida. Os estudantes envolveram-se no faz-de-conta que os levou à necessidade de criar, reproduzir e utilizar uma unidade referência de medida, além de registrar essas medições e seus fracionamentos.

O momento 3 trouxe os nexos conceituais do número racional *razão, quociente e medida fracionária* em uma adaptação do clássico problema da divisão dos 35 camelos, de Malba Tahan[6]. Por meio da mediação docente, três das cinco equipes conseguiram resolver o problema e, em seguida, explicaram matematicamente essa resolução com o uso de réguas de frações.

No momento 4, os nexos da medida *contínuo/discreto e grandeza* e os nexos do número racional *razão e medida fracionária* estiveram presentes em uma situação de repartição de galões de água com volumes diferentes. Dessa vez, duas equipes chegaram à resolução convencional do problema por meio de desenhos e esquemas; as outras três equipes criaram soluções diferentes (e até criativas); porém, não cumpriram as exigências da situação descrita.

É importante observar que, na resolução dos desafios matemáticos, nem todas as equipes conseguiram elaborar o significado matemático esperado, mas formularam hipóteses. Para Kopnin (1978, p. 247), a construção, fundamentação e demonstração de hipóteses apresenta-se como caminho essencial para o desenvolvimento do conhecimento: “[...] a hipótese faz o nosso conhecimento avançar porque permite construir um sistema de conhecimento que leva a novos resultados”.

---

[6] Trata-se da resolução do clássico problema dos 35 camelos, adaptado do livro O homem que calculava, de M. Tahan (vide referências). Na solução, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$, ou seja, a soma das partes não equivale ao total de camelos.

Durante o momento 5, os nexos da medida *quantidade/qualidade e unidade*, bem como o nexo do número racional *medida fracionária,* foram abordados pela manipulação do Material Cuisinaire. Os estudantes criaram questões para as outras equipes resolverem com o uso desse material. Segundo Davidov (1988), enquanto o estudante elabora o pensamento teórico, exercita ações mentais que suscitam sua atividade mental. Por isso, ao criar ou solucionar problemas, os estudantes podem desenvolver o conhecimento teórico e habilidades relacionadas a esse conhecimento.

No momento 6, enquanto mediram a estatura uns dos outros, os estudantes exercitaram nexos conceituais da medida (*grandeza, contínuo/discreto e unidade*) e também do número racional (*infinidade, ordenação e decimal*). Nesse momento, também estiveram contidos os nexos do número natural e inteiro *correspondência um a um e ordenação*. A medição da estatura apareceu como elemento pedagógico tensionador, pois a regra para entrada no parque era a ordenação decrescente da turma. Além disso, a turma do quinto ano não tinha permissão para brincar no parquinho infantil da escola e esse desejo gerou nos estudantes o desejo de cumprir a tarefa.

Nos momentos 8 e 9, os nexos conceituais da medida (*quantidade/qualidade, grandeza, contínuo/discreto e unidade*) e os nexos do número racional (*medida fracionária, quociente, razão, decimal e operador*) foram abordados pela interpretação, adequação e execução de receitas culinárias. Incluíram-se, nesses momentos, os nexos do número natural e inteiro: *quantidade/qualidade, valor posicional, base, composição/decomposição, agrupamento, senso numérico e correspondência um a um*. Cabe ressaltar que as receitas foram adaptadas pela pesquisadora, de modo que contivessem números racionais nas formas decimal e fracionária, bem como diferentes unidades de medida.

As diferentes unidades de medida, bem como a exposição de números racionais em formas decimal e fracionária desencadearam nos estudantes ações e operações: realizaram conversões de medidas, operaram com números inteiros e racionais, estabeleceram conjecturas, comparações, agrupamentos, composições e decomposições, a fim de possibilitar a execução das receitas culinárias. Sem dúvida, pode-se considerar esse o ponto culminante da SDA, já que, nesses momentos (8 e 9), encontra-se a maior intensidade do trabalho com os nexos conceituais da medida e do número racional: em atividade de estudo, as equipes concentraram-se em tornar possível o café da manhã com o amigo misterioso.

Quadro 3 - Receitas culinárias na SDA.

SALADA DE FRUTAS	BOLO VERDE	TORRADINHAS COM PATÊ
Ingredientes: 1 mamão pequeno 1/3 dúzia de bananas 1/6 dúzia de maçãs 1/4 dúzia de laranjas 0,13 Kg de leite condensado 0,065 Kg de creme de leite Modo de fazer: Lave as frutas. Descasque e pique o mamão, as bananas e maçãs. Esprema as laranjas e despeje o caldo sobre as frutas picadas. Despeje também o leite condensado e o creme de leite. Misture tudo. Rendimento: 10 porções.	Ingredientes: 1/3 de dúzia de ovos 0,2 l de óleo 0,17 Kg de iogurte natural 0,02 Kg de pó para gelatina de limão 0,4 Kg de mistura para bolo de laranja 0,02 Kg (ou 1 colher de sopa) de fermento em pó Modo de fazer: Coloque todos os ingredientes no liquidificador e bata por aproximadamente 3 min. Unte uma forma com margarina e farinha de trigo e despeje a massa. Leve ao forno médio por aproximadamente 30 min. Para saber se está pronto, abra o forno com cuidado e finque um palito (se o palito sair limpo, o bolo está assado). Rendimento: 15 porções	Ingredientes: 1/3 de um queijo (ricota) 0,065 Kg de creme de leite 1/3 de um envelopinho de tempero em pó ½ dúzia de azeitonas sem caroço ½ cenoura ralada Modo de fazer: Pique o queijo. Coloque todos os ingredientes no processador e bata por aproximadamente 1 min. Prove e, se necessário, acrescente uma pitada de sal. Sirva com torradas. Rendimento: 10 porções
MINI-SANDUÍCHES	SUCO DE UVA	LEITE COM ACHOCOLATADO
Ingredientes: 0,3 Kg de pão de forma 0,08 Kg de maionese 1/5 Kg de presunto fatiado 0,17 Kg de queijo fatiado Modo de fazer: Separe as fatias de pão de forma em pares. Passe maionese, coloque uma fatia de presunto, uma fatia de queijo e feche o sanduíche. Depois de pronto, fracione cada sanduíche em 4 partes. Rendimento: 10 porções	Ingredientes: ½ l de suco concentrado 1000 ml de água filtrada 0,08 Kg de açúcar (ou 8 colheres de sopa) Modo de fazer: Coloque todos os ingredientes em uma jarra e misture bem. Sirva gelado. Rendimento: 8 copos	Ingredientes: 1000 ml de leite 0,030 Kg de achocolatado em pó (ou 5 colheres de sopa) Modo de fazer: Coloque todos os ingredientes no liquidificador e bata por aproximadamente 1 min. Sirva gelado. Rendimento: 6 copos

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A análise parte dos nexos conceituais da medida, presentes nos momentos 2, 4, 5, 6, 8 e 9 e, posteriormente, apresenta os nexos do número racional, abordados nos momentos 3, 4, 5, 6, 8 e 9 da SDA. Ressalta-se que os nexos conceituais são como elos que possibilitam a compreensão de um conceito; portanto, estão interligados – relacionam-se entre si. No planejamento de cada momento da SDA, três ou mais nexos conceituais estavam presentes; no entanto, nem todos foram destacados ou contemplados no desenvolvimento da situação.

Por isso, a análise prioriza as expressões dos estudantes, ou seja, os sentidos e significados explicitados durante a SDA. Os processos de significação ocorreram por meio da interação: nas equipes, os estudantes geraram, a partir da expressão dos sentidos (pessoais), conceitos com significados socialmente legitimados.

5.1.1 Nexos conceituais da medida na SDA

Contar, medir e calcular fazem parte da vida humana desde os primórdios da humanidade. O estabelecimento de um sistema de propriedade de terras fez surgir novas necessidades para o ser humano, como a criação de uma unidade referência para a medida, a comparação dessa unidade com a grandeza (comprimento) e a expressão numérica desse resultado que, muitas vezes, contém uma fração da unidade. Além disso, o comércio de mercadorias gerou outras necessidades relacionadas às medidas de massa, volume, velocidade, temperatura, entre outras, que também resultam em uma representação fracionária.

Portanto, a medida aparece como necessidade humana e nexo conceitual do número racional, ou seja, a partir do fracionamento das escalas de medidas, tornou-se necessário criar uma forma de expressar as grandezas, o que gerou a ampliação do sistema numérico: os números racionais, que abrangem os números inteiros e os números fracionários.

Dessa forma, faz-se necessário um percurso de aprendizagem que suscite, no estudante, necessidades semelhantes às vivenciadas pela humanidade. Por isso, o estudo da grandeza comprimento partiu dos nexos conceituais da medida para o desenvolvimento da compreensão teórica do conceito.

Contínuo/discreto

De acordo com Caraça (2010), nas repartições de terras em propriedades (antigo Egito), a grandeza contínua (terra) foi fracionada em partes menores que, em si, são contínuas. No entanto, o conjunto dessas partes constitui um todo discreto, já que se podem contar as partes fracionadas, ou seja, os terrenos ou frações de terras.

Nesse sentido, o momento 2 da SDA suscitou nos estudantes a necessidade de discretizar a área (contínua) em cinco (uma para cada equipe); porém, cada uma das partes (discretas) manteve-se contínua. Afinal, a questão de uma grandeza ser discreta ou contínua não é estática – depende da característica predominante naquele contexto e momento.

O momento 4 também trouxe o desafio de discretizar uma grandeza contínua. O habitual na medição da grandeza volume é o uso da unidade litro, seus múltiplos e submúltiplos. Nesse caso, porém, os estudantes deveriam repartir os galões (sete cheios, sete meio cheios e sete vazios) em três partes iguais; o que importava não era o volume contido nos recipientes, mas a equidade na divisão – tanto do volume, quanto dos recipientes.

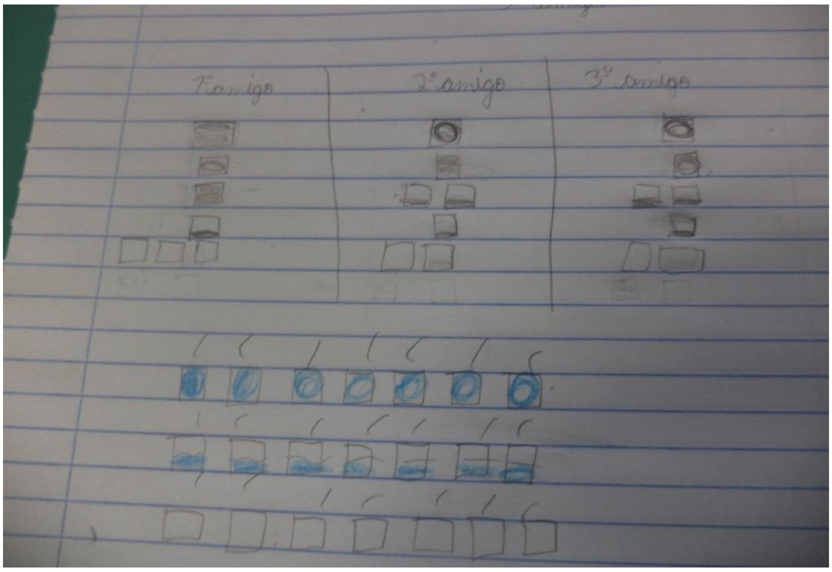
Quadro 4 - Transcrição de trecho da carta número 4.

[...] Pois bem, vou contar-lhes o que aconteceu a três amigos que vivem aqui no Chade. Eles são criadores de carneiros e venderam alguns desses animais. Aceitaram, como pagamento, 21 preciosos galões de água, sendo: 7 cheios, 7 meio cheios e 7 vazios. Querem, agora, dividir os 21 galões de modo que cada um deles receba o mesmo número de galões e a mesma quantidade de água. Repartir os galões é fácil. Cada um dos amigos deve ficar com sete galões. A dificuldade está em repartir a água sem abrir os galões, isto é, conservando-os exatamente como estão. Qual é a solução possível para este problema?

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Alguns estudantes tentaram, sem sucesso, executar operações matemáticas para resolver a situação. A equipe roxa encontrou o significado matemático por meio de desenhos, conforme mostra a figura 23.

Figura 23 - Resolução da partilha dos galões de água (momento 4).



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nessa repartição, os estudantes esquematizaram os galões iniciais da situação e fizeram a partilha pelo uso de desenhos, com expressões de sentidos pessoais, até que pudessem atender às peculiaridades apresentadas pelo texto da carta. Assim, o desenho foi utilizado para atribuir significado matemático à situação: a grandeza contínua *volume* permaneceu contínua, apesar de discretizada nos galões.

No momento 6, os nexos contínuo/discreto ficaram evidentes com a medição da estatura de cada estudante. Nesse caso, a grandeza contínua comprimento foi discretizada em metros e centímetros.

Quadro 5 - Medição de estatura da equipe laranja (momento 6).

Aluna 2: Cento e trinta e cinco. Nome: Aluna 23. Um metro e trinta e cinco. Agora vamos medir a Aluna 25. [...] Aluna 23: Cento e quarenta e sete. Agora a Aluna 2. Aluna 25: Vai passar de cento e cinquenta. Aluna 23: Vamos pegar a régua... Mais quatro centímetros. Cento e cinquenta e quatro. Aluna 2: Agora o Aluno 7. Aluna 23: Mais três centímetros: cento e cinquenta e três. Aluna 25: Pronto, acabamos.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A forma como se opta por medir um objeto pode ser de natureza discreta ou contínua e depende da relação que se estabelece com o objeto. Nos momentos 8 e 9, a adequação e execução das receitas culinárias possibilitou aos estudantes o estabelecimento de diferentes relações com a forma de medir: discretas e contínuas.

Quadro 6 - Cálculo de leite condensado e creme de leite (momento 8).

Aluna 3: Cento e trinta gramas vezes três... Trezentos e noventa gramas. Aluna 6: Trezentos e noventa gramas é uma lata de leite condensado! [...] Aluna 6: Aí faz três vezes sessenta e cinco. Três vezes seis, dezoito. Mais um, dezenove. Aluna 3: Cento e noventa e cinco gramas. Aluna 6: Acho que a caixinha vem duzentos. Professora: E podemos arredondar? O que vocês acham? Aluna 6: Isso, uma caixinha de creme de leite.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na receita, as medidas do leite condensado e do creme de leite são contínuas e medidas em gramas. Contudo, ao arredondar o resultado das quantidades triplicadas, as estudantes optaram por atribuir um aspecto discreto a esses ingredientes: uma lata de leite condensado e uma caixinha de creme de leite. Isso não quer dizer que o objeto em si seja ora contínuo, ora discreto; a diferença não se encontra no objeto, mas na forma escolhida para medi-lo.

Assim, a percepção do aspecto contínuo ou discreto do objeto partiu da observação do todo referência, ou seja, o total do ingrediente a ser providenciado. Ao olhar para o todo, a equipe poderia observar o objeto como contínuo e permanecer com o resultado de seus cálculos (390 gramas de leite condensado e 195 gramas de creme de leite). Porém, a decisão foi pela aquisição dos ingredientes em lata ou caixa, o que os tornou discretos.

Unidade e grandeza

Segundo Caraça (2010), a ação de medir é intencional e planejada; envolve a seleção da unidade, a comparação da unidade com a grandeza a ser medida e a expressão numérica dessa comparação. Os aspectos da grandeza determinam a escolha da unidade de medida e a unidade deve adequar-se aos aspectos da grandeza. Então, unidade e grandeza são conceitos, ao mesmo tempo, distintos e interdependentes.

No momento 2, os estudantes expressaram sentidos pessoais para estabelecer um padrão (uma unidade de medida não convencional) e, ao fazerem referência à história da Matemática, cogitaram o uso do cúbito da professora como unidade de medida, que seria padronizada em um nó na corda.

Quadro 7 - Estabelecimento de unidade de medida.

Professora: Como vamos dividir? Aluna 23: Podemos usar o corpo... O cúbito. Só que podemos usar o seu! Professora: A Aluna 23 quer usar o cúbito... Por que o meu, Aluna 23? Aluna 23: Porque você é *mais grande*... Você é o faraó! (risos) Aluna 29: É, você é a líder! Mede o cúbito com corda. A gente tem cordas... Aluno 5: Pega uma corda e mede então... Pode dar um nozinho.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Um estudante – o menor da turma – propôs o uso de sua própria estatura como unidade de medida. O uso de uma unidade maior que o cúbito ou o pé, às quais se referiam os demais alunos, deve-se à comparação com a grandeza a ser medida, isto é, o uso de uma unidade de medida maior poderia facilitar a medição da superfície. Mais tarde, outra aluna criou um agrupamento da unidade de medida convencionada pela turma (o pé de um aluno), tendo em vista tornar mais ágil a medição.

Quadro 8 - Estabelecimento da unidade de acordo com a grandeza a ser medida.

Aluno 14: Ô tia, é só eu deitar no chão e ver quantos *tamanhos* eu tenho! [...] Aluna 28: Tia, eu peguei o pé do Aluno 9 e medi essa corda. Deu onze pés do Aluno 9, aí ficou mais rápido pra medir.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Ao optarem por medir utilizando o pé, alguns estudantes iniciaram a execução da tarefa sem se atentar para a necessidade de um referencial para a medida. Uma aluna percebeu a diferença ao comparar o tamanho de seu pé com o de outro colega. A partir das expressões dos sentidos pessoais, a turma estabeleceu o significado matemático e consentiu que a unidade fosse o pé de um menino.

Quadro 9 - Necessidade de padronização da unidade.

Aluna 1: Mas se for com o pé tem que pegar um pé só, porque olha a diferença da medida. [...] Aluna 23: Tia, pode medir na corda ou no barbante o tamanho do pé do Aluno 9, aí a gente vai ter uma medida.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Estabelecido o padrão, uma estudante tratou de reproduzi-lo em pedaços de barbante para que todos tivessem acesso à unidade padronizada.

Figura 24 - Reprodução da unidade de medida em barbante.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Segundo Caraça (2010), a questão da escolha da unidade deve-se à praticidade ou economia do pensamento. Os estudantes poderiam escolher qualquer unidade; contudo, ao condicionar a escolha da unidade aos aspectos da grandeza, o resultado da medição pode ser obtido com maior praticidade. Desse modo, os aspectos da grandeza determinaram a escolha da unidade de medida, ao mesmo tempo em que a unidade adequou-se aos aspectos da grandeza.

No momento 6, enquanto mediam a estatura uns dos outros, os estudantes também compararam a unidade de medida com a grandeza. Entretanto, ao disponibilizar instrumentos de medida (fita métrica e trena), a professora delimitou a escolha da unidade àquelas dos instrumentos utilizados: metro e centímetro. Afinal, os instrumentos de medida contêm em si o significado matemático da unidade. Ainda assim, esse processo de comparar a unidade com a grandeza e expressar numericamente o resultado da comparação – o ato de medir – pode fundamentar a aprendizagem do número racional.

Quantidade/qualidade

A medida requer o estabelecimento de referências: define-se que qualidade da grandeza será considerada na comparação para, em seguida, quantificá-la. Para Cunha (2008), do ponto de vista científico, são consideradas qualidades da medida: comprimento, volume, área, cor, temperatura, entre outras.

No momento 2 da SDA, os estudantes identificaram a qualidade comprimento e, por meio da comparação da unidade escolhida para referência (pé do aluno) com a grandeza, expressaram-na numericamente, isto é, quantificaram essa qualidade.

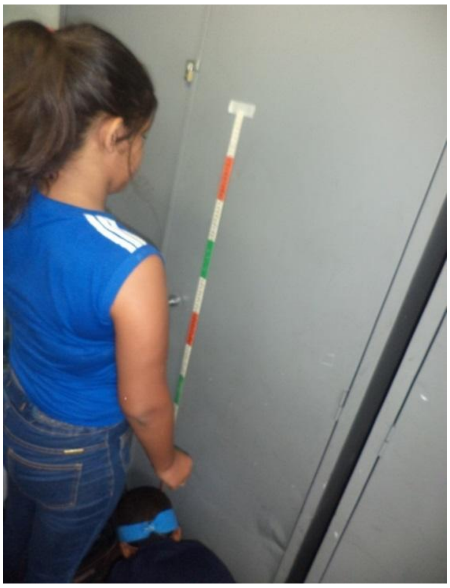
Quadro 10 - Medição do comprimento com uso de pés.

Aluno 9: Vinte e oito, vinte e nove, trinta, trinta e um, trinta e dois, trinta e três, trinta e quatro, trinta e cinco, trinta e seis, trinta e sete! Aqui tem trinta e sete pés!

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Por outro lado, no momento 6, as equipes estabeleceram estratégias para a medição da estatura de cada integrante. Desse modo, a qualidade *comprimento* foi quantificada em metros e centímetros. Nesse caso, a unidade referência (metro e centímetro) não foi estabelecida pelos estudantes, mas pelo instrumento de medida utilizado: a fita métrica.

Figura 25 - Medição da estatura com uso de fita métrica.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A identificação da qualidade da grandeza também pode fundamentar o uso adequado da unidade de medida. Nos momentos 8 e 9, ao lidarem com receitas culinárias, os estudantes precisaram relacionar a unidade grama à qualidade *massa*, bem como a unidade litro (ou mililitro) à qualidade *volume*.

Quadro 11 - Fragmentos de discussões durante a conversão de medidas.

Aluna 18: Agora esse está mais difícil, em gramas. [...] Aluno 10: Como assim dois décimos de litro? São vinte gramas? Professora: Não está em gramas, está em litro. Aluno 5: Vinte litros? [...] Aluna 25: Mil e setecentos gramas de iogurte natural? Aluna 23: Mil e setecentos *ml*! Aluna 25: Tia, aqui seria mil e setecentos *ml* de iogurte natural?

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Portanto, ao realizar as conversões das medidas, os estudantes expressaram seus sentidos pessoais acerca da qualidade das grandezas, implícita nas unidades de medida apresentadas na receita. A docente notou que alguns estudantes possuíam sentidos individuais dos conceitos, relacionados à sua vivência cotidiana. Nesse contexto, o aprendizado se dá de modo simples, por meio da troca de experiências e saberes.

Por fim, reforça-se a tese de Sarmento (2019, p. 264):

> Na objetivação do ensino do conceito de medida, o processo de significação é o reflexo do modo como se dá a apropriação do desenvolvimento lógico-histórico desse conceito pelo sujeito cognoscente e da negociação dos significados culturais subjacentes às medidas, adquiridos no contexto das práticas sociais particulares, como mecanismos que conduzem o processo de formação de uma consciência sobre as medidas.

Nesse sentido, ao considerar o desenvolvimento lógico-histórico do conceito, a professora procurou evidenciar a relação entre o processo de formação desse conceito e as práticas sociais a ele relacionadas, por meio da ação direcionada aos nexos conceituais da medida e do número racional.

5.1.2 Nexos conceituais do número racional na SDA

A primeira grande crise da história da Matemática – o problema da medida – gerou a necessidade de se ampliar o sistema numérico. A grande dificuldade era adaptar os números inteiros à expressão das medições**:** era preciso fracionar as unidades de medida e expressar esse resultado de modo coerente. Assim, a partir dessa impossibilidade de divisão exata dos números inteiros, o conjunto dos números racionais define-se como generalização (CARAÇA, 2010).

Nessa ótica, a compreensão do número racional se dá a partir de sua história e das necessidades culturais que produziram suas teorias, num movimento dialético. Esse movimento envolve o pensamento de nexos conceituais, pois exige fundamentação lógica e histórica, bem como a compreensão dos significados centrais e das diferentes interpretações desses números.

Medida fracionária

Na escola, costuma-se direcionar a divisão ao aspecto de partilha em partes iguais. Tal direcionamento pode limitar a compreensão do conceito de medida fracionária. Isso ficou claro no momento 3 da SDA: ao tentar resolver o clássico problema da divisão dos camelos, os sentidos expressados pelos estudantes foram, a princípio, para divisão do total de camelos em três partes iguais e, em seguida, o fracionamento de cada parte.

Quadro 12 - Ideia inicial da equipe vermelha para repartir os camelos.

Aluna 6: Um tem que receber a nona parte, o outro a metade e o outro a terça parte. O que a gente faz? Aluna 3: *Fez aí trinta e cinco por três?* Quanto deu? Onze? Aluna 18: Metade vai dar cinco e meio.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em seguida, a equipe vermelha tentou fazer a partilha dos camelos sem refletir sobre o conceito de cada fração expresso no problema. A professora questionou acerca do significado de *metade* e *nona parte* e, a partir dessa mediação, os estudantes revisitaram seus sentidos pessoais.

Quadro 13 - Sentidos pessoais ao expressar o raciocínio.

Aluna 3: Tia, eu acho que nós conseguimos! Professora: O que vocês pensaram? Aluna 3: Assim, o filho mais velho recebeu oito camelos. Professora: E a *metade* de 35 são oito? Aluna 3: Não, é que nós fizemos assim: 35 dividido por 2 é 17 e 50, mas não dá pra dividir meio camelo. Então a gente fez 18 e 17. *A nona parte vai ser 18*, o filho mais velho 8 e o outro 9. Professora: O que é a *nona parte*? Aluna 6: *É o total dividido por nove!* Professora: Então, isso é a nona parte, não é? Vocês precisam ver se isso aí deu como o pai pediu.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A aluna 6 expressou o significado da fração $\frac{1}{9}$; entretanto, os estudantes da equipe vermelha não se atentaram à medida fracionária da divisão proposta na situação. A equipe não havia compreendido a relação da parte com o todo, expressa nas frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, e insistia em considerar a parte restante para a próxima divisão (não o total). Foi necessária a intervenção da professora para recordar à equipe o conceito de fração enquanto parte do inteiro.

Quadro 14 - Tentativa de resolução do problema dos camelos pela equipe vermelha.

Aluna 3: Tia, nós fizemos trinta e seis por nove e deu quatro. Professora: Aí vocês conseguiram a nona parte! Aluna 3: Aí, o do meio nós fizemos trinta e dois... Professora: Por que trinta e dois? Aluna 3: Porque tirou quatro. Professora: Hum... Deixa eu te contar uma coisa. *Quando você faz a fração é do total, não é do que sobrou. Precisa considerar sempre o total.* Aluna 6: Nossa, tá pior que quebra-cabeça!

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Por fim, ao considerar o total de camelos (36), a equipe conseguiu solucionar a partilha e atribuir significado à medida fracionária. A segunda parte da carta confirmava a solução encontrada pelos estudantes e pedia uma explicação matemática para o problema. Para isso, a professora incentivou a turma a utilizar as réguas de frações. Esse material pedagógico contém o significado do conceito de medida fracionária, ou seja, da relação entre a parte e o todo inerente a qualquer fração; além disso, são possíveis diversas operações com o uso dessas réguas, como comparar, ordenar, adicionar ou subtrair frações.

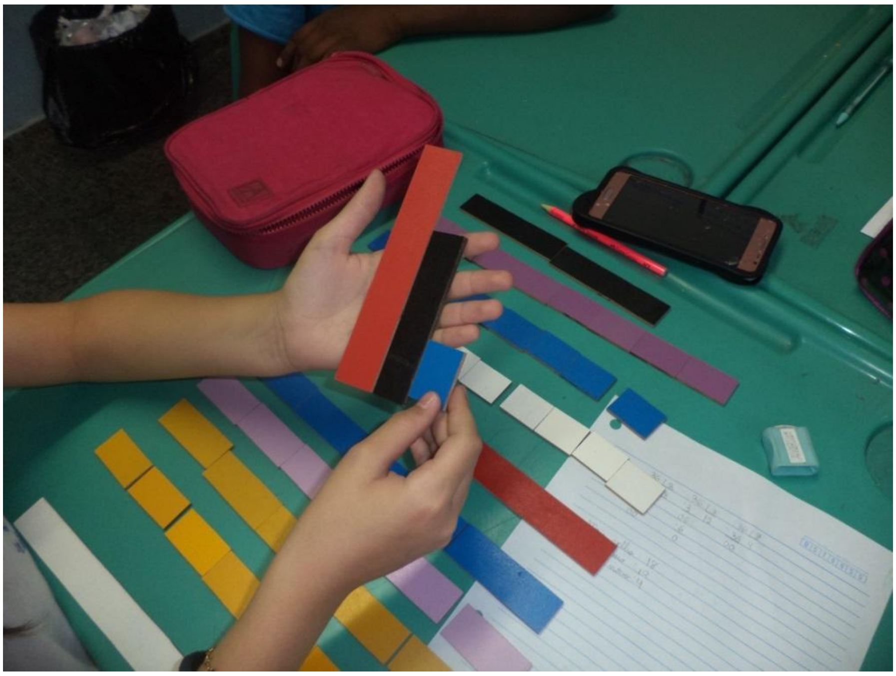
Figura 26 - Descrição do material contido em cada caixa de réguas de frações (as cores das réguas variam).

RÉGUAS	DESCRIÇÃO
	Uma régua preta que representa a unidade.
	Duas réguas amarelas, cada uma com metade do tamanho da régua preta.
	Três réguas verdes, cada uma medindo um terço da régua preta.
	Quatro réguas roxas, cada uma medindo um quarto da régua preta.
	Cinco réguas vermelhas, cada uma medindo um quinto da régua preta.
	Seis réguas azuis, cada uma medindo um sexto da régua preta.
	Sete réguas laranja, cada uma medindo um sétimo da régua preta.
	Oito réguas rosa, cada uma medindo um oitavo da régua preta.
	Nove réguas marrons, cada uma medindo um nono da régua preta.
	Dez réguas cinza, cada uma medindo um décimo da régua preta.

Fonte: http://matematicacomvida.uff.br/2020/01/23/fracoes-uma-introducao-com-reguas-de-fracoes/

Em busca do significado matemático para o problema dos camelos, uma estudante da equipe laranja iniciou seu raciocínio pela identificação das réguas referentes a um meio, um terço e um nono. É importante lembrar que a identificação dessas peças requer comparações, já que não possuem qualquer inscrição de números ou palavras.

Figura 27 - Identificação das peças referentes a *um meio*, *um terço* e *um nono*.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Após identificar a peça correspondente a cada fração do problema, a equipe decidiu comparar a soma dessas réguas com o inteiro e, finalmente, chegou à explicação matemática para a questão.

Figura 28 - Comparação da soma de *um meio*, *um terço* e *um nono* com o inteiro.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Por fim, a equipe conseguiu compreender que a soma das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ não equivale ao inteiro e, por esse motivo, sobraram dois camelos.

Quadro 15 - Explicação matemática da divisão dos camelos com uso de régua de frações.

Aluna 23: Eu fingi que esse inteiro valia 36. Eu coloquei todas as peças em cima da minha mesa, juntas. Essa daqui, como é a metade desse, é a parte do primeiro irmão. Esse daqui corresponde a um terço porque deu três pecinhas dessa, então coloquei aqui. E esse daqui corresponde a um nono porque tinha nove dessa. E esse pedaço que sobrou são os dois camelos que sobraram.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em outros momentos da SDA também se observa o conceito de medida fracionária. No momento 4, o estudante, por meio de cálculo mental, obteve um inteiro ao adicionar dois meios. Conforme afirma Leontiev (2004), a fala do aluno reflete a significação:

Quadro 16 - Cálculo mental de ½ + ½.

Aluno 14: É, aí dá dois galões desses meio cheios pra cada um também, que equivale a um pra cada, certo?

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No momento 5, os estudantes manipularam outro material didático estruturado: o Material Cuisinaire. As barras desse material, à semelhança das réguas de frações, não são numeradas e não possuem repartições. Porém, alguns estudantes atribuíram valores às barras por meio de comparações, ou seja, estabeleceram relações entre a parte e o todo e vice-versa para encontrar a medida fracionária.

Quadro 17 - Atribuição de valores às barras do Material Cuisinaire.

Aluno 22: Eu peguei uma barrinha de dez, igualzinho o Material Dourado, e uma de um. Professora: E dá pra comparar com as outras? Quanto valem as outras? Aluna 1: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2... Professora: Como você conseguiu encontrar esses valores, Aluna 1? Aluna 1: Fui vendo o tamanho delas.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Subjacentes à medida fracionária, encontram-se os nexos da medida *unidade* e *quantidade/qualidade*: a peça menor foi eleita unidade referência para quantificar as demais peças do material; a qualidade da medida *comprimento* foi quantificada na comparação com a unidade estabelecida.

Nesse momento da SDA, as equipes elaboraram tarefas ou perguntas para os colegas solucionarem com o uso do Material Cuisinaire. A mesma equipe que explicou matematicamente o problema dos camelos (momento 3) precisou de mediação da professora para solucionar uma questão, também referente à medida fracionária.

Quadro 18 - Medida fracionária em comparação de peças do Material Cuisinaire.

Aluna 23: A que fração da barra laranja corresponde a barra vermelha? Cinco décimos... [...] Professora: Cinco décimos são cinco partes em 10? Uma peça dessa vale quanto? Aluna 23: Dois. Professora: E essa maior? Aluna 11: Dez. Professora: E dentro dessa outra peça, quantas da menor vão caber? Aluna 11: Cinco. Professora: Uma corresponde a quanto então? Aluna 11: Um quinto, porque é uma barrinha só e cabem cinco.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A aluna 23 tentou atribuir um valor a cada peça e expressou seu sentido pessoal da medida fracionária. Em relação ao conjunto de peças dessa caixa, a barra vermelha equivalia a 2 e a laranja, 10. Como soluções para a questão, a equipe poderia encontrar $\frac{2}{10}$ ou a fração equivalente $\frac{1}{5}$. A resposta inicial da aluna 23 (cinco décimos) pode ter sido a junção dos dois denominadores, como se formassem uma única fração. Por sua vez, a colega (aluna 11) conseguiu relacionar a parte ao todo, ou seja, expressou o significado da medida fracionária $\frac{1}{5}$ por meio da comparação entre as duas peças.

Os momentos 8 e 9 da SDA também levaram os estudantes à apropriação do conceito de medida fracionária. O texto de cada receita foi adaptado pela pesquisadora, com o intuito de conter números inteiros, decimais e fracionários nos ingredientes; além disso, o rendimento não era compatível ao número de alunos – o que tornou necessário à equipe triplicar a receita. A equipe verde expressou os sentidos pessoais do conceito de medida fracionária ao triplicar a fração $\frac{1}{3}$ e a professora mediou o processo de significação.

Quadro 19 - Expressões de sentidos da medida fracionária.

Professora: Vamos ver o que está acontecendo aqui... Um terço de um queijo ricota. Aluno 9: Nós fizemos vezes três, deu um nono. Professora: Um nono? Por quê? Aluno 9: Porque três vezes três dá nove. Professora: *O que é um terço?* Aluna 17: *É um inteiro dividido em três partes.* Professora: Um inteiro (desenhando) dividido em três partes. Então isso aqui é um terço (colorindo uma parte)? Aluno 9: É. Professora: E você está triplicando a receita... Aluno 9: Ah, entendi! Então vão ser *três terços*. Aluna 17: *Então vai ser um inteiro!*

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Por meio de um desenho, a professora conduziu o estudante ao significado da medida fracionária $\frac{1}{3}$. Observa-se que o aluno 9 triplicou mentalmente e, ao final, encontrou o resultado esperado ($\frac{3}{3}$). No entanto, a síntese se encontra na expressão da aluna 17, que demonstrou apropriar-se do significado do conceito de medida fracionária.

Portanto, o conceito de medida, além de nexo conceitual do número racional, também pode ser considerado um elemento pedagógico tensionador para a apropriação desse conceito. Isso porque a relação dialética parte-todo é fundamental para a compreensão do número racional enquanto fração do inteiro (NACARATO et al, 2004). Por esse motivo, dentre os nexos do número racional, o conceito de medida fracionária (e nele, os nexos da medida) foi o mais recorrente nesta SDA. Afinal, encontra-se nesse conceito a essência para a compreensão do número racional.

Razão

Expressa-se a razão de um número racional por meio da relação de comparação entre duas quantidades ou grandezas da mesma espécie. Esse nexo conceitual apareceu na receita do suco em forma de proporção (½ litro de suco concentrado para cada litro de água). A equipe demorou um pouco na compreensão da razão e foi necessária mediação docente para a execução da receita.

Quadro 20 - Discussão da razão entre suco e água (momento 9).

Professora: Nesta jarra vocês colocaram um litro de suco. Quanto vocês vão colocar de água? Aluna 24: Meio. [...] Professora: Então, se tem um litro de suco, quanto vocês vão colocar de água? Aluna 28: Um litro. Professora: A mesma medida os dois? Que tal olharmos na receita de novo? Aluno 14: Não, vão ser dois litros de água pra um litro de suco.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O nexo razão do número racional também foi abordado pela equipe roxa, na confecção da lista de ingredientes necessários para o bolo (momento 8). Os estudantes poderiam calcular $\frac{1}{3}$ de 12 ovos valendo-se de outros nexos conceituais, como operador ou quociente; a outra equipe que recebe a mesma receita, por exemplo, realizou o cálculo dividindo o total de ovos pelo denominador da fração e obteve o mesmo resultado. Porém, a opção de dois integrantes da equipe roxa foi pela noção de razão do número racional.

Quadro 21 - Cálculo dos ovos por meio de razão (momento 8).

Aluno 10: Quantos ovos? Aluna 29: Na minha opinião são três. *Um terço é um ovo de três*. Professora: O que é um terço de uma dúzia de ovos? Aluna 29: *De cada três ovos, eu pego um*. Professora: E quanto é uma dúzia? Aluno 13: Doze. Aluno 10: Dá quatro ovos. Professora: Por que quatro? Aluna 29: Uma dúzia é uma bandejinha com doze. Aluno 10: Aí *tem quatro fileiras, não tem? Aí pega um de cada.*

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Houve coerência no sentido pessoal da aluna 29, apesar do equívoco no total de ovos (três em vez de quatro). Nesse processo, o aluno 10 valeu-se de seu conhecimento prévio da bandeja de ovos em formato 4x3 e expressou seu sentido pessoal no significado do conceito de razão.

Nesse contexto, pode-se compreender o desenvolvimento do pensamento como reflexo da realidade, ou seja, “[...] o resultado da atividade subjetiva que parte da fonte objetiva e conduz à imagem cognitiva” (KOPNIN, 1978, p. 124). Essa concepção possibilita o entendimento de como o conhecimento se torna instrumento da atividade humana, ou seja, o conhecimento reflete o objeto.

Portanto, no processo de pensamento, “[...] o homem se propõe a determinados fins, que têm significado objetivo e são produto das necessidades práticas” (KOPNIN, 1978, p. 130), com base em todo o conhecimento anteriormente apropriado. Desse modo, torna-se possível a verificação material dos resultados do pensamento.

Decimal

O nexo conceitual *decimal* diz respeito às propriedades do número racional que decorrem do valor posicional, associadas ao sistema de numeração decimal. Nacarato et al (2004) defendem que, devido ao largo uso social do sistema monetário e dos sistemas de medidas, deve haver ampla exploração do número decimal como um subconstructo do número racional no Ensino Fundamental.

Essa *familiaridade* com o número decimal foi observada no momento 2 da SDA. Ao registrar a medição dos terrenos das equipes, os estudantes expressaram a fração da unidade de medida pelo número decimal *meio*.

Quadro 22 - Registro das medições dos terrenos (momento 2).

Aluno 9: Anota aí: lado um, dezoito. Lado dois: dezesseis *vírgula cinco*... [...] Aluna 27: Ficou oito de frente, dezenove *e meio* no outro, oito e dezenove *e meio.* [...] Aluna 23: Lado um, doze; lado dois, doze *e meio*; lado três, doze e lado quatro, doze *e meio* também.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

De acordo com Ifrah (2001), a descoberta das frações decimais possibilitou o prolongamento do sistema de numeração decimal para a direita. Essa racionalização da noção e da representação das frações relaciona-se, inclusive, ao sistema de medidas, fundado sobre a base dez.

Portanto, os nexos conceituais da medida revelam-se como nexos do número racional e, ainda, como elementos tensionadores para essa aprendizagem. No momento em realizava o registro coletivo das medições no quadro, a professora tentou chamar a atenção dos estudantes tanto para a representação fracionária, quanto para a representação decimal do número racional. A opção da turma manteve-se em representar o número em sua forma decimal.

Quadro 23 - Registro das medições em tabela coletiva (momento 2).

Professora: [...] vamos observando a nossa tabela. Para escrever, usei as palavras que vocês falaram. Esse *e meio*, como é que nós representamos na tabela? Alunos: Vírgula cinco. [...] Professora: Pra gente representar aqui o quatorze e meio, posso fazer o *meio* assim? (Escreve no quadro: ½) Aluno 9: Pode, ou então você pode colocar quatorze vírgula cinco. Professora: Então deu quatorze e mais metade da unidade de medida, é isso? Alunos: É. Professora: Vocês acham mais fácil representar como? Alunos: Vírgula cinco.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No momento 6, os estudantes mediram a estatura uns dos outros e registraram essa medição sem expressar dificuldades, inclusive com conversão mental dos valores da fita métrica: de centímetros para metros e centímetros.

Quadro 24 - Medição de estatura no momento 6.

Aluna 2: Cento e trinta e cinco. Nome: Aluna 23. Um metro e trinta e cinco. Agora vamos medir a Aluna 25.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Para as medições com resultados maiores que o total da fita métrica (150 centímetros), os estudantes complementaram o instrumento com uma régua. É provável que essa desenvoltura na expressão dos valores das medidas se deva ao largo uso social do sistema de medidas, o que simplifica a compreensão do número decimal.

Figura 29 - Cena da equipe verde utilizando régua como complemento na medição da estatura.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os momentos 8 e 9 da SDA também contemplaram o nexo *decimal* do número racional: as equipes precisaram efetuar conversões de medidas das receitas culinárias antes de fazer a lista de ingredientes e executar as receitas. Algumas equipes tentaram iniciar a listagem de ingredientes necessários sem fazer as conversões das medidas, mas verificaram que o resultado não seria prático. Por exemplo, não se compram treze centésimos de um quilograma de leite condensado, nem dois décimos de litro de óleo.

Quadro 25 - Conversão de medida de massa (equipe verde).

Aluna 18: Agora esse está mais difícil, em gramas. Aluno 21: *Põe no quadro!* (O aluno refere-se ao quadro posicional) Aluna 3: Tia, e esse aqui? Professora: São treze centésimos do quilograma. Quanto isso dá em gramas? Aluna 6: São treze vezes... Professora: Calma. Um quilograma são quantos gramas? Aluna 3: Mil gramas. Professora: Cadê aquele quadro posicional que vocês têm? (uma aluna pega o quadro) E agora vocês precisam saber quanto é zero vírgula treze... Coloca aí no quadro, vamos ver. Quantos gramas são? Aluna 3: Cento e trinta gramas. Então aqui (aponta outro número) são seiscentos! Aluna 6: *Nossa, aqui no quadro fica bem melhor!* Aluna 3: Cento e trinta gramas vezes três... Trezentos e noventa gramas. Aluna 6: Trezentos e noventa gramas é uma lata de leite condensado!

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nesse momento, o quadro posicional foi instrumento mediador das conversões de medidas. Os estudantes dessa turma já possuíam e utilizavam um quadro posicional em seu material de Matemática. Na conversão de medidas das receitas, esse recurso foi facilitador do processo de aprendizagem.

Como se observa, o nexo *valor posicional* do número inteiro, pelo princípio de economia, está contido nos nexos do número racional. Por isso, o uso de um material didático estruturado que contenha o significado matemático, como o quadro posicional, torna-se essencial no processo de significação.

Quadro 26 - Conversão de medida de capacidade (equipe roxa).

Aluno 10: Como assim dois décimos de litro? São vinte gramas? Professora: Não está em gramas, está em litro. Aluno 5: Vinte litros? Aluno 10: São vinte milésimos? Como chama o negócio de litro, sem ser litro? Aluna 29: Mililitro. Aluno 10: São vinte mililitros? Professora: Tenta transformar o litro em mililitro. (A professora coloca o número no quadro posicional.) Aluno 10: Então são duzentos mililitros.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Portanto, o uso do quadro posicional, enquanto instrumento de mediação para a compreensão do valor posicional do número, foi fundamental para que os estudantes convertessem as medidas dos ingredientes das receitas.

Quadro 27 - Conversão de medida de massa (equipe roxa).

Aluna 29: E como vamos saber o que é isso aqui: zero vírgula zero dois quilogramas de gelatina de limão? Professora: A gelatina de limão é vendida em quilogramas ou em gramas? Aluno 10: Gramas, porque é pequena. Aluna 29: Quando eu faço gelatina na minha casa eu vejo que na caixinha vem vinte gramas. Professora: Isso é a mesma coisa? (A professora escreve o número 0,02 no quadro posicional.) Aluno 10: Não. Aluna 29: É! Professora: É ou não é a mesma coisa? Aluno 5: É, porque no quadro fica no mesmo lugar. Aluna 29: Quilograma é maior que grama, não é? Aluno 10: Então são vinte milésimos do quilograma. Professora: Um quilograma tem quantos gramas? Aluno 10: Mil. Aluna 29: Então são vinte gramas!

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Desse modo, destaca-se o *decimal* como nexo fundamental para a apropriação do conceito de número racional. O número decimal é utilizado amplamente no cotidiano (no sistema monetário e nas medidas, por exemplo); por isso, a larga exploração desse nexo conceitual pode configurar como um elemento pedagógico tensionador para a aprendizagem do número racional.

Quociente e operador

Uma das formas mais frequentes para se compreender a representação fracionária do número racional é interpretar a fração como quociente, isto é, como resultado de uma divisão. No momento 3 da SDA, os estudantes resolveram o problema da divisão dos camelos pela interpretação da fração como quociente.

Quadro 28 - Resolução do problema dos camelos (fração como quociente).

Aluna 3: Nós fizemos trinta e seis por nove, que deu quatro. Aí sabemos que a nona parte são quatro. Aí fizemos trinta e seis por três, que deu doze. O filho do meio recebeu doze. Depois nós fizemos a metade de trinta e seis, que são dezoito. [...] Aluno 9: Trinta e seis dividido por dois dá dezoito. Trinta e seis dividido por três dá doze. E trinta e seis dividido por quatro dá nove. Aí tudo deu trinta e quatro. [...]

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Já no momento 8, todas as receitas culinárias exigiram dos estudantes a interpretação de números racionais fracionários. Na equipe verde, responsável pela salada de frutas, a aluna 3, a princípio, igualou o denominador da fração ao total de elementos ($\frac{1}{6}$ de 12 = 6). Por sua vez, a aluna 6 associou o denominador da fração ao cálculo de porcentagem ($\frac{1}{6} = \frac{6}{10}$). Nesse contexto, a professora interveio para direcionar a discussão.

Quadro 29 - Significação de fração como quociente na equipe verde (momento 8).

Aluna 6: Um sexto de uma dúzia? Aluna 3: *Meia dúzia* de maçãs. Professora: Um sexto de dúzia de maçãs... são trinta maçãs? Aluna 6: *De cada dez, são seis*. Seis vezes três... Professora: Um minutinho... O que é mesmo uma dúzia? Aluna 3: São doze! Professora: E o que é um sexto de uma dúzia? Aluna 3: Seis. Professora: Ah... um sexto é a metade? (Alunos ficam em dúvida.) Vamos tentar no papel. Um sexto da dúzia de maçãs: eu tenho um inteiro e dividi em... Aluna 3: Em seis. Professora: Então dessas partes, vou considerar uma só, certo? Se esse inteiro é uma dúzia... Aluna 6: O total são doze! Professora: E quanto vale cada parte dessas (um sexto)? Aluna 3: *Dividiu doze em seis partes.* Cada parte vale dois. Professora: Então, quanto vale um sexto da dúzia? Aluna 6: *Dois! Aí são dois vezes três, dá seis maçãs!* Aluna 3: Não, Aluna 6. São só duas! Aluna 6: Duas maçãs é uma receita, a gente vai fazer três! E as laranjas também são seis! Aluna 3: (Faz o desenho no papel.) *Um quarto de dúzia são três. Três vezes três, nove laranjas.*

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No quadro 29, observa-se que a aluna 6 concentrou-se em triplicar a receita, o que era realmente necessário ao se atentar para o rendimento. De modo simples, o nexo conceitual *operador* foi abordado a partir do nexo *medida fracionária* (parte-todo): dividiu-se o total pelo denominador da fração e, em seguida, multiplicou-se pelo número de partes consideradas. Posteriormente, a aluna 3 demonstrou apropriação do significado de fração como *quociente* e *operador* ao calcular a quantidade de laranjas.

O nexo *operador* relaciona-se à ideia de função; porém, de modo simplificado, pode ser abordado nos anos iniciais do Ensino Fundamental com a ideia de ampliação-redução para objetos contínuos ou, como no caso dos objetos das receitas (discretos), de multiplicação-divisão. Nesse sentido, para calcular o triplo de ¼ de 12, a estudante expressou o cálculo mental $3 \cdot \frac{1}{4}$ de $12 = (12:4) \cdot 3 = 9$, utilizando o número fracionário como transformador (multiplicador-divisor).

Em outra equipe, a professora questionou os estudantes sobre a lista de ingredientes a serem providenciados, ao verificar que a equipe repetiu a informação que constava na receita ($\frac{1}{3}$ de uma dúzia de ovos). Com clareza, a aluna 23 expressou sua apropriação do significado da fração como quociente e obteve aprovação de seus colegas.

Quadro 30 - Fração como quociente no cálculo dos ovos (equipe laranja).

Professora: O que é um terço de uma dúzia de ovos? Aluna 23: *Uma dúzia são doze ovos. Aí vai ser um terço. Vou repartir doze em três partes*? Professora: Hum. Aluna 23: São quatro? Aluno 20: É isso mesmo!

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Portanto, o entendimento da fração como *quociente* – resultado de uma divisão – é essencial para a compreensão do número racional em sua forma fracionária. A partir dessa interpretação, pode-se iniciar a abordagem da fração como *operador*, ou seja, como transformador de grandezas discretas ou contínuas.

Em suma, a análise do desenvolvimento dos conceitos em seu aspecto lógico-histórico leva à compreensão de que são as necessidades humanas que movem o pensamento e a produção de novos conhecimentos. A partir da mobilização e apropriação dos nexos do conceito, ampliam-se as possibilidades de avanço no sentido do desenvolvimento do pensamento teórico.

Sousa (2004, p. 63) admite que “[...] os nexos conceituais são lógico-históricos e se apresentam no movimento do pensamento, tanto daquele que ensina, como daquele que aprende”. Por isso, a professora organizou a SDA de modo que se contemplassem nexos dos conceitos matemáticos em estudo, bem como a inter-relação desses conceitos.

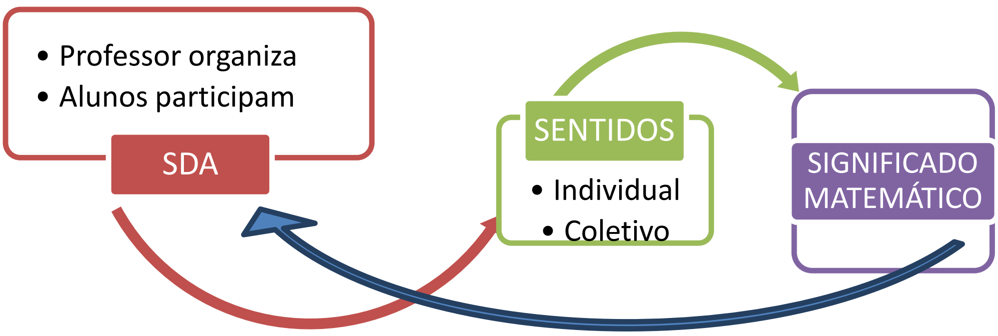
A intencionalidade docente no ensino a partir dos nexos conceituais procurou possibilitar aos sujeitos percorrer, ainda que de forma abreviada, o trajeto lógico-histórico do desenvolvimento dos conceitos. A mediação pedagógica – do professor, dos signos e dos instrumentos – foi fundamental para gerar, nos estudantes, necessidades de se apropriarem dos conceitos a partir de seus nexos, por meio de elementos pedagógicos tensionadores.

O papel do professor destaca-se na organização da SDA, em uma interposição entre os sujeitos e o objeto (conhecimento). É o docente quem define os procedimentos de ensino e escolhe os instrumentos e recursos adequados aos fins que almeja. Moura (2002, p. 155) nomeia Atividade Orientadora de Ensino (AOE) “[...] aquela que se estrutura de modo a permitir que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação problema”. Nessa perspectiva, pode-se dizer que, naquele espaço educativo, docente e estudantes mobilizaram-se, em atividade de estudo.

O uso de materiais didáticos estruturados – como réguas de fração, Material Cuisinaire, quadro posicional, entre outros – permite que o instrumento exerça o papel de mediador entre o sujeito e o conhecimento. Esses instrumentos contêm em si o significado matemático e têm grande importância no processo de significação, pois possibilitam que os estudantes revejam seus sentidos pessoais.

É importante que se organize, na escola, situações em que o conteúdo adquira significado para os estudantes. O significado pode ser comum a todos; por outro lado, o sentido é atribuído pelo sujeito, no modo como internaliza o conhecimento. Aliás, pode-se considerar que o processo de significação envolve elementos que se relacionam de modo dialético (figura 30).

Figura 30 - Elementos do processo de significação.



Fonte: Da autora (2021).

O professor, atento às necessidades de seus alunos e a seus objetivos de ensino, pensa, elabora e organiza uma UD, que pode conter uma ou mais SDA; os estudantes aceitam participar e colaboram no desenvolvimento da UD. Nas equipes de trabalho, os aspectos individual e coletivo se relacionam: os estudantes expressam seus sentidos pessoais que se direcionam ao significado matemático; os processos de significação se dão pela interação, pois geram conceitos com significado socialmente legitimado. Esse significado constitui a intencionalidade do trabalho docente e pode desencadear a necessidade de criar novas situações de aprendizagem.

Por fim, na perspectiva histórico-cultural, percebe-se a necessidade de se discutir as relações estabelecidas no contexto escolar. Ressalta-se que, nessa ótica, o trabalho docente pode estimular o desenvolvimento da autonomia intelectual dos estudantes, por meio do raciocínio e da argumentação matemática. Assim, fez-se necessária a constituição de um segundo núcleo de significação, no qual se pudesse abordar o desenvolvimento da autonomia discente a partir do trabalho orientado pela THC.

5.2 "*Tá* certo, tia?" Da dependência à autonomia nas relações escolares

A busca pela resposta *correta*, *única* e *verdadeira* na figura docente pode ser situação comum nas escolas. Isso se torna um possível entrave para a ascensão ao pensamento teórico. Em geral, os alunos procuram pelo professor para que ele endosse (ou não) os resultados obtidos, sem atentar-se ao processo de produção do conhecimento. Tal situação denota uma relação de dependência, já que os estudantes passam a considerar como válido apenas aquilo que o professor diz ou aprova.

A escola precisa ensinar os alunos a pensar, para que se orientem de forma independente nas informações de que dispõem: um ensino que promova o desenvolvimento integral. É necessário que a ação educativa volte-se à formação de sujeitos críticos e ativos, muito além do universo exclusivo do pensamento empírico-discursivo.

Para Davidov (1988, p. 28, grifo do autor), "a atividade é a *substância* da consciência humana". O autor afirma que a atividade humana media as relações entre os sujeitos e com o mundo e, por esse motivo, está intimamente relacionada à formação e ao desenvolvimento da consciência.

Desse modo, neste núcleo de significação, discutem-se as relações que se estabelecem no contexto escolar, numa perspectiva histórico-cultural e à luz da Teoria da Atividade. O foco inicial são as situações em que os alunos solicitavam o *aval* da professora para as soluções encontradas pela equipe na resolução das situações de aprendizagem.

O momento 3 da SDA, por exemplo, trouxe aos estudantes a necessidade de resolver uma divisão fracionária, na qual o total de partes não equivalia ao todo. No quadro 31, a equipe verde explica à professora seu raciocínio.

Quadro 31 - Resolução do problema dos camelos pela equipe verde.

Aluna 3: Deu 12! Agora certeza. Aluna 6: 12 mais 12 mais 12 são 36! Aluna 18: Tia, nós chegamos ao resultado. *Está certo?* Professora: Como vocês pensaram? Aluna 3: Nós fizemos 36 por 9 que deu 4. Aí sabemos que a nona parte são 4. Aí fizemos 36 por 3, que deu 12. O filho do meio recebeu 12. Depois nós fizemos a metade de 36, que são 18. Professora: Interessante! E a soma deu o total dos camelos? Aluna 3: Hum... Deu 34! E agora? Nossa, eu pensei que estava certo...

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A pergunta inicialmente dirigida à docente reflete uma relação de dependência e até mesmo insegurança. A professora, apesar de ter verificado que o raciocínio dos estudantes era coerente, preferiu ater-se ao processo de desenvolvimento de seu pensamento, com o intuito de estimular comportamentos mais autônomos. O fato de não obterem resposta imediata (*Está certo?*) pareceu desestabilizar os discentes; ao deixar de agir com imediatismo, a professora possibilitou aos estudantes repensarem o caminho percorrido e serem sujeitos de sua própria atividade.

Em outro momento, ao fazer a conversão de medidas de uma receita culinária (nesse caso, a equipe precisava descobrir a quantos gramas equivalem 0,4 Kg), o aluno 10 não confiou na solução encontrada pela colega e buscou a confirmação da professora.

Quadro 32 - Conversão de medidas pela equipe roxa.

Aluna 29: Acho que não é quarenta, é quatrocentos! Aluno 10: *É, tia?* Professora: Vocês já sabem como fazer... Confiram aí no quadro de vocês. Aluna 29: É, porque aqui tem que pôr um zero na frente.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Para Kopnin (1978), o ser humano muda o mundo por meio da prática; porém, a ideia é o reflexo da realidade, a premissa mais importante da ação humana, em relação imediata com a ação prática. Nesse sentido, Pires (1997) afirma que o processo educativo não se retém na dimensão prática, mas precisa contribuir para formar sujeitos plenos de humanidade.

Em outra situação – momento 6 da SDA –, os estudantes deveriam medir a estatura de todos os integrantes da equipe, organizar os resultados em ordem decrescente e, por último, localizá-los na reta numérica.

Quadro 33 - Medição da estatura pela equipe vermelha.

Aluno 14: Ô tia, acho que a nossa fita está errada! Professora: Por quê? Aluno 14: Porque em cima estão ficando os números pequenos e embaixo os números maiores. Professora: E o que vocês vão fazer? Vão medir de cima para baixo? Aluno 14: É, porque os números estão virados pra esse lado... Professora: Aluno 14, você vai medir a altura assim. Então a minha altura vai ser zero? Alunos: Não. Professora: Como a altura é medida, de baixo para cima ou de cima para baixo? Aluno 14: É de baixo pra cima, mas aqui os números maiores estão pra baixo... Acho melhor inverter. (O aluno tenta segurar as duas pontas da fita métrica sozinho. Não há iniciativa dos outros integrantes da equipe para ajudá-lo.) Professora: Pessoal, os outros integrantes da equipe vão ficar só olhando? Que tal ajudar e participar?

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A dificuldade da equipe poderia ter sido solucionada sem intervenção docente; porém, os demais integrantes não participaram até o instante em que foram chamados a agir. Os estudantes que compunham essa equipe demonstraram morosidade nos comportamentos e pouca habilidade para encontrar soluções em equipe de modo autônomo.

Quadro 34 - Observação da medição da estatura na equipe vermelha.

"Na resolução das situações, há alunos que são líderes em seus grupos e procuram resolver os problemas. Infelizmente, nem todos participam. Há os que se contentam em ficar só observando" (Diário de campo da pesquisadora).

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A mesma equipe (vermelha) teve dificuldades na organização do momento 9, na execução das receitas culinárias. Apesar de terem recebido as receitas mais simples (leite com achocolatado e suco de uva), os integrantes da equipe precisaram do apoio de outros grupos para finalizar a tarefa. Na figura 31, a equipe despeja todo o conteúdo do suco concentrado (1,5 litro) em um recipiente com capacidade para três litros, sem considerar que a proporção da água para o suco era de 2:1 e que o rendimento da receita seria de quatro litros e meio.

Figura 31 - Equipe vermelha no momento da culinária.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A colaboração de outros colegas foi fundamental para que a equipe concluísse sua tarefa. Durante toda a SDA, essa equipe demonstrou maior necessidade de intervenção pedagógica em questões relacionadas a comportamentos: organização do trabalho, participação de todos nas tarefas, cooperação. Isso não significa que a equipe vermelha possuía dificuldades de aprendizagem; a professora primou pela heterogeneidade na organização das equipes, conforme descrito adiante.

No entanto, de acordo com Prestes (2013), a socialização relaciona-se intimamente à transformação da criança em um ser cultural. Ela desenvolve-se por meio do relacionamento com outros sujeitos e da participação na vida social, ao atribuir sentido aos objetos, tornando-se protagonista de seu comportamento e de sua atividade.

Por outro lado, há estudantes que participam o tempo todo e parecem exercer liderança sobre os demais. Em uma leitura rápida das transcrições de áudios da pesquisa, nota-se que alguns alunos participaram de quase todas as discussões – importante lembrar que se trata de uma turma com trinta estudantes.

Essa percepção levou a docente a interferir na formação inicial das equipes e na participação dos estudantes em alguns momentos. No quadro 35, a pesquisadora explica o formato escolhido para a divisão das equipes, no primeiro momento da SDA.

Quadro 35 - Anotações sobre a organização das equipes.

“Decidi que eu mesma farei a divisão das equipes. Mas as crianças vão pensar que é um sorteio! [...] Gostaria de poder ser mais democrática e permitir que eles mesmos escolhessem as equipes de trabalho. [...] Além da questão disciplinar, essencial para que o trabalho flua, considerei que, para que houvesse mediação entre colegas, seria preciso mesclar os alunos mais capazes com os que apresentam dificuldades para o raciocínio matemático; mesclar os líderes com aqueles que quase não participam.”

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Para Vigotski (2009, p. 329), em colaboração, a criança pode fazer mais do que sozinha, mas em limites determinados pelo estado do seu desenvolvimento e pelas suas potencialidades intelectuais; "[...] depois a dificuldade da solução cresce e finalmente se torna insuperável até mesmo para a solução em colaboração". Davidov (1988, p. 45) afirma que "a atividade consciente do homem está mediatizada pelo coletivo; durante sua realização o homem leva em consideração as posições de outros membros do coletivo". Por isso, a constituição de equipes na sala de aula é de suma importância para o processo de aprendizagem e requer, do professor, atenção e cuidado.

A figura 32 refere-se ao momento 6 da SDA; após a medição da estatura, cada estudante deveria localizar o resultado obtido na reta numérica. A orientação da professora para que cada um fixasse na reta numérica seu próprio nome foi uma forma de propiciar a participação de todos os estudantes e evitar que os líderes cumprissem toda a tarefa sozinhos.

Figura 32 - Alunos durante a localização de pontos na reta numérica (momento 6).

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As iniciativas mais autônomas foram ganhando força à medida que os estudantes se envolviam nas vivências da SDA. A rotina da pesquisa de campo, da qual participaram conscientemente, bem como a organização do espaço da sala de aula, também passaram a fazer parte do cotidiano.

Quadro 36 - Excerto do diário de campo da pesquisadora no momento 4.

"As crianças mesmas já deixaram a sala de aula organizada em grupos e combinaram entre si quem iria fazer a gravação com o celular."

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Davidov (1988) afirma que a atividade dominante de crianças em idade escolar é o estudo, cujo conteúdo deve ser o conhecimento teórico-científico. Assim, o papel do professor é ensinar aos estudantes competências e habilidades para aprender por si mesmos e formar o pensamento teórico-científico. Por esse motivo, mostra-se primordial a organização de situações que promovam esse desenvolvimento.

Outro aspecto a se observar nesta SDA é o ambiente de jogo que se pode criar numa situação de faz-de-conta. O envolvimento dos estudantes na situação foi facilitado pelas condições disponibilizadas pela professora: utilização da sala de TV da escola, organização estratégica das carteiras, sonorização da *viagem*, simulação, narrativa nos moldes de contação de histórias. Na figura 33, os estudantes estavam na sala de TV, dentro de um espaço delimitado por uma faixa de tecido preto que representava os limites do *barco*.

Figura 33 - Estudantes no *barco*.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em diferentes momentos da SDA, os estudantes demonstraram vivenciar o *faz-de-conta*. Nesta pesquisa, considera-se o faz-de-conta como atividade (VIGOTSKI, 2008) e também como situação de jogo (CAILLOIS, 1990). Conforme se observa no quadro 37, o envolvimento dos estudantes no faz-de-conta foi crescente no decorrer da SDA.

Quadro 37 - Falas que exemplificam o envolvimento dos estudantes na situação de faz-de-conta.

Amigo: [...] E aí fiquei curioso para saber se vocês gostaram dessa jornada... Alunos: Sim! Amigo: Ainda estão viajando? Aluno 13: Não, olha lá no mapa. Amigo: Já fizeram todo esse percurso? Que legal! Aluna 18: Olha lá as cartas! Amigo: E o que vocês mais gostaram? Qual lugar? Aluno 4: O parquinho! Aluna 25: O México! Aluno 9: A ilha! Aluna 29: Eu gostei da Bélgica, a gente comeu chocolate belga. Aluno 14: A gente afogou no oceano. Amigo: E alguém salvou vocês? Aluno 14: Salvou sim... (risos)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Para Vigotski (2008), a brincadeira propicia o desenvolvimento psíquico ao criar a ZDI. Ao brincar, a criança mobiliza os elementos da atividade: necessidades, motivos, objetivos, tarefas, ações e operações, sempre interligados. Desse modo, o faz-de-conta suscitou a atividade de estudos em direção ao objeto (conhecimento) e, consequentemente, a participação, o interesse, o entusiasmo e o desejo.

Quadro 38 - Excertos do *diário de bordo* dos estudantes sobre a situação de faz-de-conta.

“Tenho uma história louca pra te contar! Entramos num barco de madeira, pra lá de velho, fomos para uma ilha e lá encontramos mais uma carta do nosso ‘amigo’. Ele pediu pra gente medir o nosso terreno.” “Hoje fiz uma viagem incrível do Brasil a uma ilha do Oceano Pacífico. Lá a gente formou seis grupos. Depois dividimos as terras. Vi o mar, ele é lindo e belo! Depois voltamos de barco. Vimos peixes, golfinhos, tubarões e baleias. O máximo!” “Construímos um barco e bebi água salgada! Fomos pelo Oceano Atlântico a uma ilha e fizemos as marcações.” “Meu grupo ficou com a parte maior e ela ainda ficava do lado do mar. Então nós podíamos nadar e os outros grupos não. Eu achei um tesouro!” “Hoje nós fomos para Bagdá. Lá é tão bonito! Tivemos que desvendar um mistério do camelo. Tivemos que fazer muitas continhas e colocar a nossa cabeça pra funcionar mais!” “Hoje eu viajei para um dos países mais lindos da minha vida: a Bélgica. E ainda por cima andei de avião, dá pra acreditar? Melhor viagem! Depois voltamos de avião para o Brasil e estou contando essa maravilhosa viagem. E também estou comendo um chocolate da Bélgica.” “Aaaaa... Pela primeira vez, com muito medo, andei de avião, atravessando as nuvens com o sol bem laranja e chegamos na Bélgica. A capital é Bruxelas.” “Tudo começou com a carta. Dessa vez não era da cor do grupo, era pra todos. Embarcamos. Quando chegamos... tivemos que arrumar todo mundo em ordem decrescente. A tia nos deu uma trena. Medimos até nossos bichinhos: Juquinha e Coelhita! Ai, ai... E fomos pro meu país de origem: México!!! Que saudades de lá... Tantos prédios lindos! Enfim, fomos até o parque. Era lindo e mágico, mas não durou muito tempo.” “Diário, ontem voltamos para o Brasil para conhecer o amigo pessoalmente e tomar um delicioso café da manhã. Fizemos um desafio para ele e eu acho que o amigo é um cara legal. Agora quero que ele nos acompanhe nas nossas viagens!”

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Quadro 39 - Excertos do diário de campo da pesquisadora sobre a situação de faz-de-conta.

"As crianças entraram no *clima* da viagem, fizeram de conta, ouviram o barulho do mar, nadaram até a praia quando chegamos." "Essa euforia superou as minhas expectativas. Eu esperava envolvê-los nesse faz-de-conta, mas para eles está muito real... Eles entraram mesmo na história!" "A primeira pergunta que ouço todos os dias é: *Professora, hoje vai ter viagem?*"

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No momento 7, a turma foi surpreendida com uma carta que trazia a possibilidade de desvendar o mistério no qual estava envolvida. Essa carta causou grande euforia, já que poderia significar a concretização do faz-de-conta, isto é, sugeria que o *amigo* deixaria de ser imaginário e misterioso e se tornaria real, conhecido.

Quadro 40 - Texto da carta número 7.

"Olá, viajantes do mundo! Vocês são uma turma muito esperta! Estou no Brasil e gostaria de conhecê-los pessoalmente. Conseguem imaginar quem sou eu? Pensei em tomarmos um gostoso café da manhã juntos... Que tal? Aguardo ansioso pela sua resposta! O Amigo."

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os estudantes, apesar do desejo de conhecer o *amigo misterioso*, sugeriram propor-lhe um desafio como condição para a visita e o café da manhã. Nesse momento, não se preocupavam mais com a aprovação da professora para desenvolver suas ideias; ao contrário, participavam ativamente de todo o processo ao expressar suas ideias com desenvoltura, questionar, enfim, ser eles mesmos os sujeitos de sua aprendizagem.

Quadro 41 - Discussão após a chegada da carta número 7.

Aluna 3: Podemos escrever assim: nós aceitamos o seu convite. Aluna 29: Não, escreve assim: querido amigo, nós aceitamos um café da manhã com você. [...] Aluno 9: A gente precisa colocar uma condição! Aluna 6: A gente aceita, porém a gente não quer que acabe... Aluna 29: Tia, nós podemos falar assim pra ele: depois desse trabalhão todo que ele deu para a gente, vamos fazer um desafio para ele porque ele fez muitos desafios para a gente. [...] Aluna 17: Agora temos que saber qual desafio vamos colocar. Aluna 18: Acho que poderíamos esconder uns objetos pra ele achar. Aluna 15: A gente pode dar dicas com nossos nomes. [...] Aluno 27: Podemos fazer um enigma! Aluna 6: A gente pode esconder uma coisa em um lugar e dar dicas. Aluna 3: Podemos escrever palavras com símbolos diferentes, tipo carta enigmática. Aluna 29: Ou ele poderia tentar descobrir quantos grupos tem e o total de alunos da sala inteira. Aluna 1: Mas ele já deve saber isso! Aluna 29: Então vamos fazer assim: eu faço uns símbolos, a gente escreve uma frase com isso. A gente pode colocar esse código escondido em algum lugar... Aluno 14: A gente poderia esconder as dicas!

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na sala de aula, as equipes se reuniram para a elaboração dos desafios. Nenhuma equipe solicitou apoio ou aprovação da professora; o quadro 42 demonstra o envolvimento das equipes na tarefa.

Quadro 42 - Equipe azul durante a elaboração do desafio para o amigo.

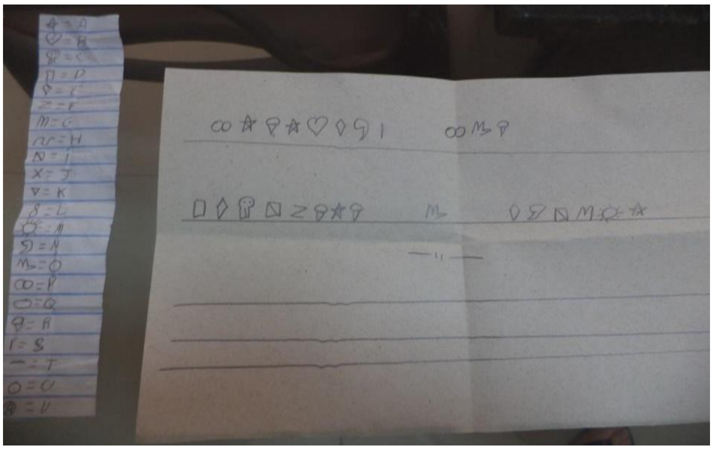
Aluno 9: Gente, vamos lá! Símbolos para o alfabeto. [...]
Aluno 9: E se a gente fizer assim: tem um alfabeto aí que volta sete letras para a letra certa. Símbolo pro A é esse aqui. Um X com um tanto de bolinhas.
Aluno 4: O E vai ser um V com uma bolinha dentro.
Aluno 9: Ah, não. Mas isso vai demorar muito!
Aluno 4: Escreve aqui: ideia um.
Aluno 9: Ideia dois: a gente vai fazer o alfabeto normal, só que com duas letras voltando.
Aluno 4: Faz o alfabeto ao contrário. [...]
Aluno 9: Vamos fazer um caça-palavras com essas letras. No caça-palavras, tem a palavra biblioteca, refeitório, alguma coisa... Uma dica de algum lugar.
Aluno 4: Eu ia dar uma ideia assim, a gente fazer um enigma, tipo: vá na biblioteca e ache outro papel.
Aluna 2: Faz o enigma em forma de desenhos!
Aluno 9: Vamos pôr ali na recepção.
Aluna 17: A gente está cheio de ideias, tia!

"Conforme a ideia que surgiu durante a viagem, pedi que cada grupo elaborasse o desafio. Duas equipes elaboraram cartas enigmáticas. Outra equipe começou a elaborar os símbolos, mas, devido ao tempo, não conseguiu finalizar. A equipe do Aluno 14 queria elaborar uma caça ao tesouro para o amigo, em que uma dica levaria a outra, finalizando na sala de aula, onde ele encontraria todos os diários de bordo e uma conchinha no meio; na conchinha haveria uma mensagem e, enquanto ele lesse, a turma apareceria de surpresa (ele criou uma grande aventura, que seria organizada pela própria turma). Também devido ao tempo, conseguiram elaborar só a primeira dica." (Diário de campo da pesquisadora)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A resposta da turma à proposta do amigo misterioso foi produzida de modo colaborativo e autônomo: uma carta enigmática, cujo código para decifração encontrava-se escondido no próprio envelope.

Figura 34 - Carta enigmática para o *amigo*.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

É importante destacar que não havia, no planejamento da SDA, a elaboração desses desafios; a previsão para esse momento era a criação de um desfecho para a viagem imaginária que a turma realizava. De acordo com Sforni (2003, p. 7),

> [...] há indicadores relevantes que orientam a tomada de decisões no ensino, mas não há modelos. Na organização da atividade educativa é fundamental ter clareza quanto à sua intencionalidade e aos instrumentos adequados ao alcance dos objetivos, mas garantindo flexibilidade suficiente para permitir mudanças de rumos conforme as necessidades surgidas na interação entre alunos e professores e o novo objeto de aprendizagem.

A flexibilidade no planejamento foi fundamental para que os estudantes continuassem em atividade, envolvidos na tarefa que eles mesmos criaram. Assim, a percepção do professor pode garantir a participação dos estudantes, atento às necessidades que emergem das interações escolares.

Outro aspecto a ser destacado é que, ao longo da SDA, a turma passou a solicitar cada vez menos a ajuda da professora. Nos últimos momentos, os estudantes se tornaram mais autônomos, participativos e independentes na resolução das situações. No quadro 43, a professora relata a discussão da turma sobre a proposta recebida no momento 8.

Quadro 43 - A turma decide preparar o café da manhã para receber o amigo.

"A Aluna 29 leu a carta para a turma e eles entenderam que irão executar as receitas. O Aluno 10 disse que, se ele quer tomar um café conosco, o amigo deveria trazer tudo; a Aluna 29 disse que se eles mesmos prepararem fica muito mais divertido. Todos concordaram em prepararmos o café da manhã." (Diário de campo da pesquisadora)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Logo que cada equipe recebeu sua receita, antes que a professora explicasse que não precisariam comprar os ingredientes, os estudantes fizeram entre si a divisão dos custos. A pesquisadora esclareceu que não seria necessário que a turma arcasse com as despesas; porém, destaca-se essa atitude de autonomia no contexto da pesquisa.

Para Kopnin (1978), o homem deve apreender, dominar e governar o pensamento. Isso significa transformar o pensamento em meio eficiente para a conquista das potencialidades da natureza e da sociedade. O quadro 44 destaca o movimento dos estudantes nesse sentido.

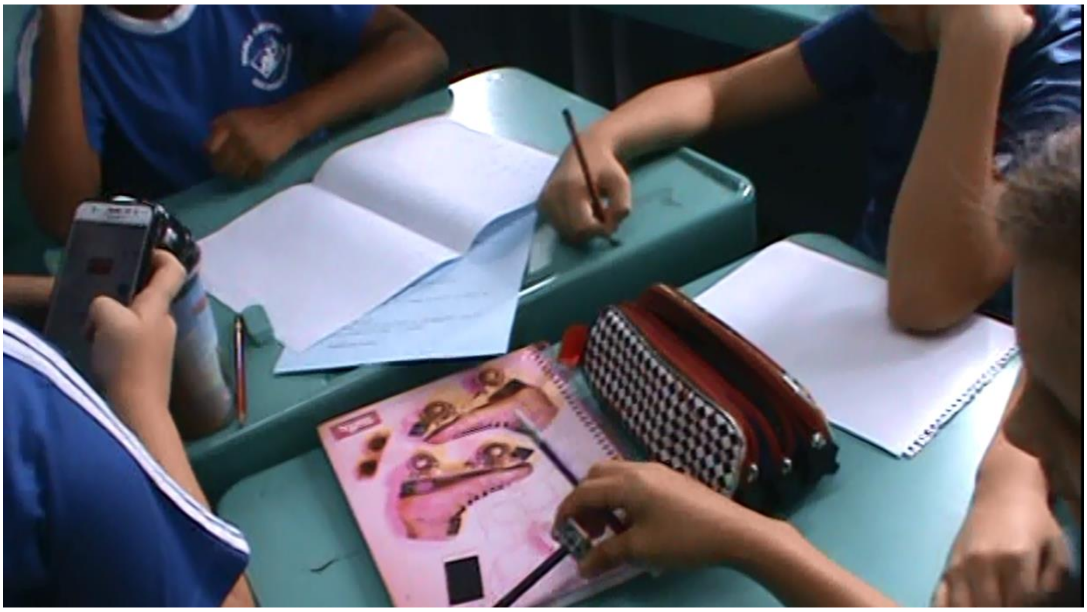
Quadro 44 - Organização das equipes para o preparo do café da manhã.

Aluna 18: A gente tem que trazer os ingredientes ou fazer em casa... Aluna 2: Podemos fazer lá na cozinha! [...] Aluna 6: Meu pai trabalha no mercado de frutas... Quem vai trazer cada coisa? [...] Aluno 10: Só que vai precisar de um forno e de liquidificador. Quem vai trazer um forno de casa? Aluna 29: Usa o da escola! Aluno 10: Quem vai trazer os ovos? Aluno 13: Eu vou trazer gelatina. [...] Aluna 29: Quem vai trazer o óleo? Aluno 10: Mas aqui nós temos quatro pessoas e são seis ingredientes! Aluna 29: Alguém vai ter que trazer a mais! Aluna 30: Eu vou trazer isso aqui: fermento. [...] Aluno 10: A mistura para bolo eu pego na padaria do meu irmão. Deixa eu ver quanto é... quarenta quilogramas e quarenta gramas é a mesma coisa, não é? Aluno 5: Não. Aluno 10: Tia, nós já separamos, cada um vai trazer uma coisa.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Ainda no momento 8, os estudantes utilizaram o celular para realizar pesquisa de preços na internet, com o objetivo de calcular o custo financeiro para a execução das receitas. Para tanto, converteram medidas, listaram ingredientes, escolheram sites para a busca, multiplicaram e somaram valores decimais.

Figura 35 - Cena de pesquisa de preços com uso de aparelho celular.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Davidov (1988, p. 11) defende o ensino que impulsione o desenvolvimento (ensino desenvolvimental). Para o autor, é preciso que se considere “[...] o papel desenvolvimental do ensino e da educação no processo de formação da personalidade da criança” e que se busque meios para “[...] uma influência substantiva tanto no desenvolvimento mental geral das crianças quanto no desenvolvimento de suas capacidades especiais”.

Nesse contexto, nos últimos momentos da SDA, apesar da euforia, os estudantes executaram as tarefas com competência e autonomia. As equipes colaboraram entre si na organização e execução das receitas, além da preparação da sala de aula para o café da manhã, conforme mostra a figura 36.

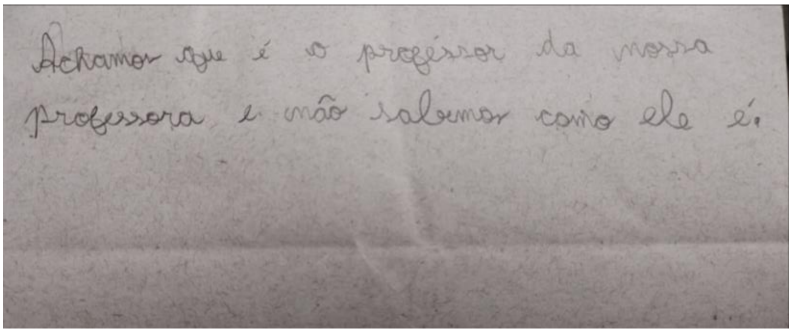
Figura 36 - Preparo do café da manhã.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O último momento previsto na SDA foi o encontro com o *amigo misterioso* em um café da manhã preparado pela turma. Segundo o planejamento da UD, o final da história seria criado pelos próprios estudantes, de acordo com as possibilidades para sua realização. Os *palpites* variaram entre o professor de Educação Física, o policial, o vice-diretor e o co-orientador da professora[7].

[7] Os alunos participaram da UD com ciência de se tratar de uma pesquisa para obtenção de título de mestre em Educação pela UFLA; além disso, a docente conversava frequentemente com a turma acerca da dedicação e do esforço em seus estudos.

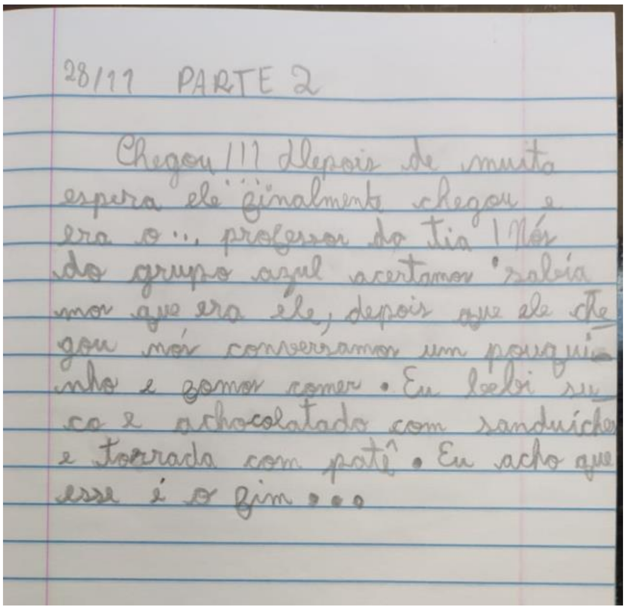
Figura 37 - Opinião de uma das equipes sobre a identidade do *amigo*.


Achamos que é o professor da nossa
professora e não sabemos como ele é.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em um momento orientação, a pesquisadora comentou sobre os opiniões dos alunos e o co-orientador se dispôs a personificar o amigo misterioso. Na data agendada, o professor compareceu à escola e possibilitou a realização do final da história previsto por uma das equipes. Foi um momento de euforia para a turma; ao mesmo tempo, a oportunidade de trocar experiências com um professor de uma universidade federal descortinou aos estudantes possibilidades de muitas conquistas futuras por meio dos estudos.

Figura 38 - Página do *diário de bordo* de um estudante da equipe azul.


28/11 PARTE 2
Chegou!!! depois de muita
espera ele finalmente chegou e
era o... professor da tia! Nós
do grupo azul acertamos 'sabía
mos que era ele, depois que ele che
gou nós conversamos um pouqui
nho e fomos comer. Eu bebi su
co e achocolatado com sanduíche
e torrada com patê. Eu acho que
esse é o fim...

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Pode-se perceber, na trajetória da SDA, uma mudança de comportamento dos estudantes, da dependência à autonomia, nas relações escolares. As interferências da docente, a mediação da aprendizagem e o acompanhamento de todo o processo continuaram a ocorrer;

todavia, os estudantes posicionaram-se como sujeitos de sua aprendizagem, provavelmente por estarem em atividade de estudo.

No quadro 45, apresenta-se um conjunto de comportamentos antes e durante/após a SDA. Em diversos aspectos, procura-se comparar o movimento convencional – observado no início da SDA – com as mudanças promovidas intencionalmente pelo desenvolvimento da SDA. Com isso, pretende-se evidenciar em que aspectos houve mudanças promovidas pela intervenção pedagógica.

Quadro 45 - Comportamentos antes/no início e durante/após o desenvolvimento da SDA.

SITUAÇÃO/ASPECTO	COMPORTAMENTO ANTERIOR À SDA	COMPORTAMENTO DURANTE A SDA
Novas tarefas de estudo.	Aguardar a explicação da professora.	Discutir com a equipe para compreender a tarefa.
Solução de dúvidas durante a execução de tarefas.	Solicitar a ajuda da professora.	Solicitar o apoio dos colegas mais próximos.
Solução de conflitos entre colegas.	A professora precisava intervir na maioria das vezes.	Os próprios integrantes da equipe gerenciavam os conflitos, com pouca ou nenhuma intervenção da professora.
Uso de aparelho celular em sala de aula.	O uso não era permitido; alguns estudantes utilizavam escondido.	Permitido; usado para pesquisas e também nas gravações (coleta de áudios).
Organização da sala de aula e outros espaços de aprendizagem.	A professora organizava o espaço sozinha ou com apoio de alguns alunos.	Colaboração da maioria dos estudantes por iniciativa própria.
Tomada de decisões.	Competia à professora, ainda que ouvisse a opinião dos alunos.	Participação ativa da turma; decisões coletivas e democráticas.
Entendimento da professora sobre a disciplina da turma.	Turma silenciosa; pouca conversa; muita escrita.	Turma mais barulhenta; muitos e ricos diálogos, discussões, trocas de ideias.
Interesse e participação dos estudantes	Estudantes passivos; pouco interesse.	Estudantes ativos, protagonistas de sua aprendizagem.
Foco do processo de ensino e aprendizagem	A professora era a principal agente do processo.	O objeto de aprendizagem tornou-se o centro do processo.

Fonte: Da pesquisadora (2021).

Portanto, não se pode deixar de mencionar o posicionamento da docente mediante a turma. Os estudos da THC e, em particular, da Teoria da Atividade possibilitaram à professora/pesquisadora uma mudança no modo de lidar com os estudantes, passando de uma postura mais autoritária à atividade colaborativa, por meio da qual professor e alunos se apropriam coletivamente do conhecimento.

O modo de organização do processo de ensino pode suscitar a atividade do estudante. Davidov (1988, p. 158) defende a criação de condições adequadas para que os estudantes desenvolvam uma *atividade de estudo*. Para o autor, a atividade de estudo "[...] tem um conteúdo e uma estrutura especiais" e não deve ser equiparada ao termo *aprendizagem.* Isso porque as crianças aprendem em momentos diversos, como na atividade de brincar, por exemplo. Porém, a atividade principal da fase da infância é a atividade de estudo. "Ela determina o surgimento das principais formações psicológicas básicas de uma faixa etária, define o desenvolvimento mental geral das crianças em idade escolar e, também, o desenvolvimento de sua personalidade" (DAVIDOV, 1988, p. 159).

Por esse motivo, considera-se essencial que o professor crie situações de aprendizagem que suscitem a atividade de estudo, a criatividade e a autonomia dos estudantes. Desse modo, pode-se dizer que o ensino cumpre seu papel no desenvolvimento omnilateral do sujeito, com vistas a garantir sua formação integral.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ato de ensinar exige que o professor assuma posicionamentos teóricos, ainda que de modo inconsciente, que revelam seu modo de perceber o conhecimento. Os estudos da Teoria Histórico-Cultural possibilitam ao docente encarar o saber como algo em constante desenvolvimento, permeado por dúvidas e contradições, ao longo da história da humanidade.

Os conceitos matemáticos, como todo conhecimento, foram desenvolvidos a partir de necessidades humanas. Assim, é importante que os estudantes se apropriem desses conceitos a partir das necessidades que os geraram, sejam empíricas ou teóricas.

Nesta pesquisa, buscou-se analisar o desenvolvimento do pensamento teórico nos processos de significação gerados pelos estudantes em uma situação desencadeadora de aprendizagem (SDA) dos números racionais e do conceito de medida. Os objetivos específicos foram analisar se a SDA suscitou a atividade dos estudantes e identificar os sentidos e significados produzidos, para responder à questão: *que sentidos e significados os estudantes explicitam, em sua atividade, em uma SDA dos números racionais e do conceito de medida?*

A partir da perspectiva histórico-cultural, a pesquisadora – e também professora da turma de quinto ano do Ensino Fundamental – elaborou uma unidade didática composta por uma SDA, que contemplou os nexos conceituais do número racional e da medida. Isso porque os nexos contêm a gênese do conceito: “[...] a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento” (SOUSA, 2004, p. 61).

A unidade didática, intitulada *A viagem e o amigo misterioso*, foi elaborada de acordo com os interesses e necessidades da turma e buscou estimular a interação e o desenvolvimento da autonomia na apropriação dos conceitos matemáticos. No contexto de uma viagem imaginária, os estudantes vivenciaram uma situação de faz-de-conta, na qual um amigo misterioso enviava cartas à turma e propunha a resolução de desafios matemáticos. Nesse ambiente de jogo de faz-de-conta, a curiosidade, a surpresa e a imaginação podem ter sido os elementos desencadeadores da atividade dos estudantes.

A etapa da pesquisa de campo ocorreu no ano de 2019, período anterior à pandemia do Covid-19; isso tornou viável a participação de todos os estudantes da turma. Nesse contexto, ressalta-se a facilidade de acesso da pesquisadora ao local (escola), estudantes, responsáveis, coordenação pedagógica e equipe gestora. Por outro lado, destacam-se os desafios inerentes à prática docente somados à pesquisa de campo: gestão do tempo, articulação de conteúdo programático e objetivos de ensino, turma numerosa, espaço físico restrito, barulho ou interferência externa no momento das gravações, indisciplina e desinteresse de alguns estudantes, dificuldade de acesso e escassez de materiais pedagógicos, entre outros.

Se o fato de conhecer os sujeitos da pesquisa, seus interesses e preferências favoreceu a elaboração e o desenvolvimento da SDA, a análise dos dados constituiu um desafio maior e exigiu o afastamento da pesquisadora. Isso permitiu um salto qualitativo no *ser* e no *agir* dessa professora, a partir da reflexão da própria práxis docente.

Na análise dos dados, foram constituídos dois núcleos de significação, ou seja, duas categorias de análise. O primeiro núcleo aborda os processos de significação dos estudantes e responde à questão da pesquisa, isto é, analisa as expressões individuais de sentidos e significados dos nexos dos conceitos. Nesse núcleo, evidencia-se que a abordagem dos nexos conceituais possibilita ao sujeito apropriar-se do conceito e avançar no sentido do desenvolvimento do pensamento teórico. Isso não significa que todos os estudantes atingiram tal nível de pensamento, mas que, ao menos, observou-se a iminência desse desenvolvimento.

A mediação pedagógica foi fundamental para gerar, nos estudantes, necessidades de se apropriarem dos conceitos a partir de seus nexos, por meio de elementos pedagógicos tensionadores. Por isso, a intencionalidade docente no ensino a partir dos nexos conceituais procurou possibilitar aos sujeitos percorrer, ainda que de modo abreviado, o trajeto lógico-histórico do desenvolvimento dos conceitos.

Constatou-se que a criança pode apropriar-se dos conceitos na atividade de estudo, em ações semelhantes àquelas pelas quais os conceitos foram historicamente construídos, isto é, reproduz, em sua atividade, o processo histórico real da formação e do desenvolvimento do conceito. A atividade de estudo "[...] conduz as crianças na esfera do conhecimento teórico e assegura nelas o desenvolvimento das bases da consciência e pensamento teóricos" (DAVIDOV, 1988, p. 242).

O segundo núcleo de significação trata de um aspecto exploratório relevante da pesquisa: a ressignificação da prática docente e a autonomia intelectual dos estudantes, por meio do desenvolvimento do raciocínio e da argumentação matemática. Nos dados da pesquisa, pode-se observar esse *salto*, da dependência à autonomia, tanto no comportamento dos estudantes, quanto nos argumentos matemáticos que expressaram seu raciocínio.

Essa mudança de comportamento relaciona-se diretamente ao modo de organização do ensino; a partir dos estudos da THC, a professora mudou a forma de organização da sala de aula e, sobretudo, o modo de pensar o ensino, com maior atenção aos sentidos pessoais dos estudantes. É preciso, em primeiro lugar, que o professor desenvolva sua autonomia para ensinar e promova oportunidades para que os alunos criem, expressem seus sentidos individuais e desenvolvam sua autonomia intelectual.

A constituição desse núcleo fez-se necessária ao se considerar o caráter exploratório da pesquisa: inicia-se com objetivos previsíveis, mas pode haver ampliação dos resultados e respectiva análise. Ademais, a análise explicitada no segundo núcleo de significação pode gerar novos desdobramentos deste trabalho, tais como: há evidências de permanência no comportamento autônomo dos estudantes após o término da SDA? Que elementos pedagógicos podem ser considerados essenciais no desenvolvimento da autonomia discente? Que aspectos da formação inicial podem influenciar o docente para que propicie aos estudantes oportunidades de exercer a autonomia? De que forma a gestão escolar interfere no desenvolvimento da autonomia do professor?

Por fim, observou-se a importância da organização das situações de aprendizagem de modo que o conteúdo adquira significado para os estudantes, pois os processos de significação se dão pela interação. Na maioria das vezes, os estudantes expressaram o sentido que atribuíram ao conceito, ou seja, o modo como internalizaram aquele conhecimento. Porém, por meio da interação e da mediação (do professor, colegas, instrumentos ou signos), conseguiram também gerar conceitos com significado socialmente legitimado.

A ação docente pode criar zonas de desenvolvimento iminente e novas possibilidades de aprendizagem (VIGOTSKI, 2001). Nessa ótica, a apropriação da gênese do conceito possibilita o desenvolvimento do pensamento teórico e facilita a significação de particularidades do conceito. Por essas razões, a presente pesquisa teve como pressupostos a THC e sua base: o materialismo histórico-dialético.

Portanto, a intencionalidade docente é fundamental para que o ensino cumpra seu propósito no desenvolvimento do educando. A consciência da fundamentação teórica de seu trabalho torna o professor agente de transformação de sua práxis, pois passa a agir com coerência e percebe que toda ação é permeada e fundada em teorias. Além disso, quanto mais o professor se apropria dos fundamentos históricos dos conceitos, maiores as possibilidades de se libertar dos meios convencionais de ensino, como o livro didático, e criar situações adequadas aos seus alunos, isto é, o professor torna-se produtor do conhecimento. A pesquisadora e docente percebeu que esse movimento de autonomia parte de sua práxis e se estende aos estudantes a ela confiados.

Para Freire (1996, p. 12), “a reflexão crítica sobre a prática se torna uma exigência da relação Teoria/Prática sem a qual a teoria pode ir virando blablablá e a prática, ativismo”. Por isso, a formação inicial do professor precisa contemplar esse aspecto: mais do que técnicas e métodos, é essencial que se forme professores conscientes dos fundamentos teóricos que permearão sua prática. Além disso, há que se cuidar da formação continuada do professor – a formação em serviço – para que se constitua essa consciência teórica e uma constante ressignificação da prática docente.

A riqueza dos dados produzidos nesta pesquisa, bem como a amplitude do tema escolhido, permitiriam gerar outras análises e desdobramentos. Contudo, o tempo hábil para conclusão do processo encarregou-se de limitar, por ora, esse movimento, e deixar espaço à continuidade da produção do conhecimento. Afinal, nesse contexto histórico-cultural de produção do conhecimento, percebe-se a ciência exatamente desse modo: sempre em desenvolvimento, recheada de dúvidas, incertezas e incompletudes, mas também das necessidades históricas da humanidade que produz esse saber. Espera-se que, a partir das contribuições teóricas desta pesquisa, esse movimento de produção se perpetue.

7 REFERÊNCIAS

AGUIAR, W. M.; OZELLA, S. Núcleos de significação como instrumento para a apreensão da constituição dos sentidos. Psicologia: Ciência e Profissão, Brasília, v. 26, n. 2, p. 222-245, jun. 2006. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1414-98932006000200006&script=sci_abstract&tlng=pt>. Acesso em: 30 mai. 2019.

AGUIAR, W. M. J. de; SOARES, J. R.; MACHADO, V. C. Núcleos de Significação: uma proposta histórico-dialética de apreensão das significações. Cadernos de Pesquisa, v.45, n.155, p.56-75, jan./mar. 2015. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/cp/v45n155/1980-5314-cp-45-155-00056.pdf>. Acesso em: 02 jun. 2019.

AMORIM, M. P. Apropriação de significações do conceito de números racionais: um enfoque histórico-cultural. Dissertação (Mestrado), 2007. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_nlinks&ref=000128&pid=S1516-73132013000100007000006&lng=pt>. Acesso em: 12 mai. 2019.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994. p. 150 a 172.

BROUGÈRE, G. **Brinquedo e Cultura.** 3 ed. Campinas: Cortez, 2011.

CAILLOIS, R. **Os jogos e os homens**. Lisboa: Cotovia, 1990.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 7. ed. Lisboa: Gradiva, 2010.

CARNEIRO, K. T. **Por uma memória do jogo**: a presença do jogo na infância das décadas de 20 e 30. Curitiba: Appris, 2017.

COUTINHO, C. de Q. e S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 50-67, jan. 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12991/12092>. Acesso em: 14 jun. 2020.

CUNHA, M. R. K. Estudo das elaborações dos professores sobre o conceito de medida em atividades de ensino. Tese (Doutorado), 2008. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/251783/1/Cunha_MichelineRiscallahKanaanda_D.pdf>. Acesso em: 23 set. 2019.

DAVIDOV, V. V. Problemas no Ensino Desenvolvimental: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Trad. de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. Soviet Education, August, v. 30, n. 8, 1988.

DUARTE, N. Vigotski e a pedagogia histórico-crítica: a questão do desenvolvimento psíquico. Nuances: estudos sobre Educação, Presidente Prudente, SP, v. 24, n. 1, p. 19-29, jan./abr. 2013. Disponível em: <http://revista.fct.unesp.br/index.php/Nuances/article/view/2150/duarte>. Acesso em: 28 mai. 2019.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa.** Tradução de Joice Elias Costa. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 405 p.

FREIRE, J. B. **Jogo**: entre o riso e o choro. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FREIRE, P. **Extensão ou comunicação?** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1985.

__________. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

HOGBEN, L. **As Maravilhas da Matemática**: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**: o jogo como elemento da cultura. 8 ed. São Paulo: Perspectiva, 2011.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. 10. ed. São Paulo: Editora Globo, 2001.

KARLSON, P. **A magia dos números.** Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento.** Trad. de Paulo Bezerra. Rio de Janeiro: Ed. Civilização Brasileira S.A., coleção Perspectivas do Homem, vol. 123, 1978.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo.** Trad. de Rubens Eduardo Frias. 2. ed. São Paulo, SP: Centauro, 2004.

LEONTIEV, A. N. Atividade, Consciência e Personalidade. Trad. de Maria Silvia Cintra Martins. The Marxists Internet Archive, 1978. Disponível em: <https://ler.amazon.com.br/?asin=B00AGZDT84>. Acesso em 27 abr. 2020.

________________. Os princípios psicológicos da brincadeira pré-escolar. In: VIGOTSKI, L.S.; LURIA, A.R.; LEONTIEV, A.N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** São Paulo: Ícone, 1988, pp. 119-142.

MARX, K. **O capital:** crítica da economia política. Livro I: O processo de produção do capital. Trad. Rubens Enderle. 2. ed. São Paulo: Boitempo Editorial, 2011.

MINAS GERAIS, Secretaria de Estado de Educação de. Currículo Referência de Minas Gerais, 2018. Disponível em: <http://www2.educacao.mg.gov.br/images/documentos/20181012%20-%20Curr%C3%ADculo%20Refer%C3%AAncia%20de%20Minas%20Gerais%20vFinal.pdf>. Acesso em 24 mai. 2019.

MOURA, M. O. de. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. de. (Org.). **Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média**. São Paulo: Pioneira Thompson, 2002.

MOURA, M. O. de et al. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. Revista Diálogo Educacional, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, PR, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=189114444012>. Acesso em: 29 fev. 2020.

NACARATO, A. M. et al. Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 53-64, jan./jun. 2004.

NOGUEIRA, M. O. G.; LEAL, D. **Teorias da aprendizagem:** um encontro entre os pensamentos filosófico, pedagógico e psicológico. Curitiba: InterSaberes, 2018.

PIRES, M. F. de C. O materialismo histórico-dialético e a Educação. Interface — Comunicação, Saúde, Educação, v.1, n.1, 1997. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/icse/v1n1/06.pdf>. Acesso em 24 mai. 2019.

PRESTES, Z. A sociologia da infância e a teoria histórico-cultural: algumas considerações. Revista Educação Pública, Cuiabá, v. 22, n. 49/1, p. 295-304, mai/ago. 2013. Disponível em: <http://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/educacaopublica/article/view/916>. Acesso em: 04 ago. 2019.

__________. **Quando não é quase a mesma coisa**: traduções de Lev Seminovitch Vigotski no Brasil. Campinas: Autores Associados, 2012.

SARMENTO, A. K. C. O desenvolvimento lógico-histórico do conceito de medida e o processo de significação na atividade pedagógica. Tese (Doutorado), 2019. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-10122019-094300/pt-br.php>. Acesso em: 05 mai.2021.

SAVIANI, D. **Pedagogia histórico-crítica**: primeiras aproximações. Campinas: Autores Associados, 2003.

SOUSA, M. C. de. O Ensino de Álgebra numa Perspectiva Lógico-Histórica: um estudo das elaborações conceituais correlatas de professores do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado), 2004. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/25237>. Acesso em: 04 set. 2019.

_______________. Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de matemática na perspectiva lógico-histórica. Bolema, Rio Claro, ano 22, n. 32, p. 83-99, 2009. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2088>. Acesso em: 06 set. 2019.

REZENDE, J. P. Nexos conceituais de número natural como sustentação para o desenvolvimento de atividades de ensino. TCC, 2010.

RODRIGUES, C. I. Uma proposta de ensino de frações no 6º ano do Ensino Fundamental a partir da teoria histórico-cultural. Dissertação (Mestrado), 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/17773>. Acesso em: 12 mai. 2019.

SFORNI, M. S. de F. Aprendizagem conceitual e organização do ensino: contribuições da teoria da atividade. Anais da 26ª Reunião Anual da ANPED, 2003. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/item/001305641>. Acesso em: 04 mai. 2019.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava.** 4. ed. Rio de Janeiro: BestBolso, 2012.

VIGOTSKI, L. S. A brincadeira e o seu papel no desenvolvimento psíquico da criança. Revista Virtual de Gestão de Iniciativas Sociais, jun. 2008, p. 23-36. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_nlinks&pid=S1413-73722014000400058700023&lng=en>. Acesso em: 20 abr. 2020.

_______________. **A construção do pensamento e da linguagem.** Trad. de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

_______________. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1991.

_______________. **Imaginação e criação na infância**: ensaio psicológico. Apresentação e comentários de Ana Luiza Smolka. Trad. de Zoia Prestes. São Paulo: Ática, 2009.

ZEFERINO, L. C. Aprender a ensinar frações a partir do conceito de Atividade Orientadora de Ensino: um estudo com professores de quartos e quintos anos do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado), 2016. Disponível em: <http://repositorio.unifesp.br/handle/11600/46976>. Acesso em: 13 mai. 2019.

ANEXO

ANEXO – Unidade didática: medida e números racionais

<table>
<tr><td colspan="2">Unidade didática: A viagem e o amigo misterioso</td></tr>
<tr><td colspan="2">Disciplinas: Matemática e Língua Portuguesa</td></tr>
<tr><td>Turma: 5º ano</td><td>Tempo previsto: 1200 min (24 aulas)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contexto:
Um amigo misterioso envia cartas à turma e convida os alunos para uma viagem imaginária pelo mundo. Em cada momento, eles se deparam com situações-problema, nas quais precisarão mobilizar nexos conceituais de número, número racional e medida.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos de ensino:
● Suscitar a atividade dos estudantes.
● Gerar processos de significação dos conceitos construídos.
● Mediar o processo de aprendizagem por meio da identificação das possibilidades da ZDI.
● Desenvolver o espírito de equipe, a colaboração, o sentido de pertença e a criatividade.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos da UD:
● Mobilizar os nexos conceituais do número natural e do número inteiro: senso numérico, correspondência um a um, qualidade/quantidade, agrupamento, ordenação, valor posicional, base, composição/decomposição.
● Mobilizar os nexos conceituais da medida: qualidade/quantidade, grandeza, discreto/contínuo e unidade.
● Mobilizar os nexos conceituais do número racional: medida fracionária, quociente, razão, decimal, operador, infinidade e ordenação.
● Construir o significado do número com base em seus diversos usos na sociedade.
● Ampliar o significado de número natural através de situações desafiadoras para construir o significado de número racional e suas representações.
● Compreender, valorizar e exercitar o uso da escrita com diferentes funções e em diferentes gêneros.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 1: A CARTA DO AMIGO MISTERIOSO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Local: sala de aula</td><td>Tempo previsto: 100 min (2 aulas)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">- Familiarizar-se com o tema da SDA e compreender a dinâmica dos momentos subsequentes.
- Compor equipes de estudo com responsabilidade e respeito ao outro.</td><td>- Carta 1 (confeccionada em tamanho grande, em um envelope grande)
- Cartaz: mapa mundi
- Diários de viagem (cadernos para registro individual dos alunos)</td><td rowspan="3">- Solicitar a um funcionário da escola que entregue a carta misteriosa (em horário previamente combinado).
- Ler com a turma a carta. Observar as reações e conversar sobre a proposta.
- Definir com a turma a melhor maneira para a divisão das equipes.
- Disponibilizar material para que cada equipe se identifique (viseira, faixa, etc.).
- Afixar a carta e o mapa na parede da sala de aula.
- Combinar com a turma como será construído o barco.</td></tr>
<tr><th>OUTROS MATERIAIS</th></tr>
<tr><td>- Folhas de rascunho
- E.V.A. em cores distintas (uma para cada equipe)
- Rolinhos de lastex
- Cola de silicone</td></tr>
</table>

Texto da carta misteriosa (carta 1):

“Olá, estudantes do 5º ano 3!

Sou um amigo que, por enquanto, não pode se identificar. Quero convidá-los para uma aventura por lugares distantes, novos conhecimentos e muito raciocínio... Garanto que irão gostar! Vocês topam?

Para facilitar a viagem, vocês devem formar seis equipes, identificadas por cores. Peçam a ajuda da professora para essa organização.

Durante a viagem, levem sempre material para anotação. Vocês certamente irão precisar!

Estou enviando também um mapa mundi, onde poderão marcar os lugares “visitados” pela turma e um “diário de viagem” para que cada um possa registrar as suas aventuras e descobertas.

Vocês devem estar se perguntando: que meio de transporte vamos usar? Respondo: a imaginação e um barco que vocês mesmos construirão. Lembrem-se: a imaginação pode nos levar a lugares longínquos, às terras mais distantes, ao mundo do impossível!

Boa viagem!!!”

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 2: A ILHA INEXPLORADA NO OCEANO PACÍFICO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Locais: sala de aula vazia, sala da turma e pátio</td><td>Tempo previsto: 150 min (3 aulas)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">- Mobilizar os nexos da medida: grandeza; contínuo/discreto; unidade.
- Construir o significado de medida ao comparar grandezas de mesma natureza.
- Reconhecer grandezas mensuráveis.
- Medir elaborando estratégias próprias de medida, utilizando unidades de medida padronizadas ou não.
- Fazer estimativas de medidas.
- Representar numericamente os resultados das medições.
- Interpretar e</td><td>- Carta 2 (confeccionada em tamanho grande, em um envelope grande)
- Cordas e barbantes
- Giz, apagador e lousa
- Cartaz: mapa mundi
- Diários de viagem</td><td rowspan="2">- Retomar a aula anterior (reler a carta 1).
- Pedir que as equipes se organizem para o início da viagem.
- Organizar outra sala com o barco, conforme combinado com a turma. Todos devem imaginar-se dentro de um barco. Usar fundo sonoro: https://www.youtube.com/watch?v=ih3b46D_PR8
- Enquanto navegam, a professora conta uma história do antigo Egito: o problema da medida das terras (ver abaixo: texto de apoio). Conversar sobre a história.
- A professora diz que estão no Oceano Pacífico, avista uma ilha e observa que parece desabitada. Convidar os alunos para desbravá-la.
- Levar os alunos ao pátio (a ilha). Eles encontrarão uma carta endereçada à turma (carta 2).
- Após a leitura, conversar sobre a melhor forma de fazer a divisão das terras. O desafio é dividir o território em partes iguais e justas, usando o próprio corpo, mas sem usar réguas, trenas, etc. Sugerir a demarcação com barbante.
- Solicitar que cada equipe meça um território do modo que considerar mais conveniente e anote as medidas.
- Conversar sobre as medições obtidas por eles: são confiáveis? A divisão das terras foi justa? Instigar a turma a perceber a necessidade de uma medida padrão, que eles mesmos deverão construir.
- Pedir que meçam novamente (agora, usando a</td></tr>
<tr><td>OUTROS MATERIAIS</td></tr>
</table>

produzir escritas numéricas por meio de linguagem oral, registros informais e linguagem matemática. - Realizar pesquisa que envolva variáveis categóricas e numéricas e organizar os dados coletados por meio de tabelas.	- Folhas de rascunho - Identificação das equipes (faixas, viseiras, etc.) - Material para o barco (TNT e caixa de som)	unidade padrão que escolheram) e registrem o território de cada equipe (a medida dos quatro lados). - Retornar à sala de aula. Marcar no mapa o local visitado. - Construir uma tabela coletiva (no quadro) com todas as informações coletadas – territórios e medidas atribuídas a eles pela equipe. A professora fará o registro no quadro do mesmo modo que as equipes fizeram em suas anotações. Instigar a percepção dos alunos quanto ao registro numérico de frações da medida. - Pedir aos alunos que preencham o diário de viagem.

Texto de apoio – para a professora contar durante a “viagem” (entre parênteses há algumas questões que podem ser discutidas com a turma, dependendo do interesse):

As medidas no antigo Egito

Conta um historiador grego que viveu no século V a.C. – Heródoto – que, por volta de 3000 anos a.C., o Rei Sesóstris dividiu todo o território do país igualmente entre os egípcios.

Cada um recebeu uma porção retangular de terra para morar, cultivar e criar animais. Em contrapartida, deveria pagar ao governo um imposto que era calculado de acordo com o tamanho do terreno.

(E no Brasil, vocês sabem me dizer se pagamos imposto sobre o lugar onde moramos? Será que o imposto é igual para todos? Como vocês imaginam que ele é calculado?)

Mas no Egito há um rio muito importante. (Quem sabe o nome do rio?)

O rio Nilo ainda é, para o povo egípcio, fonte de vida e de fartura. Isso porque, na época das cheias (mais ou menos de junho a setembro), ele sobe muito acima de seu leito normal, inundando uma grande região ao longo de suas margens. Quando as águas baixam, deixam descoberta uma faixa de terras férteis, prontas para o cultivo.

(E aqui no Brasil? Vocês sabem dizer o nome da região em que isso também acontece?)

Desde a Antiguidade, as águas do Nilo fertilizam os campos, beneficiando a agricultura do Egito. Naquela época ele era chamado de “rio sagrado”.

Ao avançar sobre as margens, o rio derrubava as marcações de pedra que os agricultores usavam para marcar os limites do seu terreno. E quando as águas baixavam, *funcionários do governo tinham que medir novamente os limites do terreno de cada agricultor.*

(O que vocês acham que esses funcionários do governo usavam para medir os terrenos?)

Naquela época não existiam os instrumentos de medida que temos hoje. No Egito eles usavam o cúbito, que era a medida do comprimento do cotovelo até a ponta do dedo médio do faraó. E como as pessoas têm tamanhos variados, isso dava a maior confusão nos resultados das medições! (Vamos comparar nossos cúbitos? Eles têm a mesma medida? Como vocês resolveriam essa confusão?)

Criaram, então, o cúbito padrão (que era a medida do cúbito do faraó). Primeiro foi feito de pedra e depois, para facilitar o transporte, usaram a madeira. (E se o faraó morresse e outra pessoa fosse ocupar o lugar dele, o que vocês acham que aconteceria? O cúbito seria o mesmo?)

Texto da carta 2:

"Valentes desbravadores,
Esta ilha será de vocês se conseguirem realizar a justa repartição das terras.
Por aqui ainda não existem instrumentos de medida! Vocês poderão usar o corpo e criar um modo de dividir as terras. Bom trabalho!"

Modelo de tabela para representação das medições das equipes:

EQUIPE	LADO 1	LADO 2	LADO 3	LADO 4

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 3: PELO DESERTO, NO IRAQUE</th></tr>
<tr><td colspan="2">Locais: sala de aula vazia e sala de aula da turma</td><td>Tempo previsto: 150 min (3 aulas)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">- Mobilizar os nexos do número racional: razão de um número racional; quociente; medida fracionária (relação parte-todo).
- Identificar e representar frações, associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo.</td><td>- Cartas 3 – parte A e parte B (confeccionadas em tamanho pequeno, em um envelope com a cor de cada equipe)
- Régua de frações
- Diários de viagem</td><td rowspan="3">- Retomar a aula anterior (podem reler as cartas).
- Pedir que as equipes se organizem para o início da viagem.
- Todos devem imaginar-se dentro do barco. Usar fundo sonoro: https://www.youtube.com/watch?v=ih3b46D_PR8
- A professora conta que hoje visitarão o Iraque. Os países árabes são bastante quentes; alguns deles têm grandes territórios desérticos (perguntar como imaginam o deserto).
- A professora avisa que chegaram ao Iraque, mas precisam ainda caminhar um pouco no deserto. Dizer que precisam se proteger do sol e tomar bastante líquido. Levá-los aos bebedores.
- Enquanto todos se hidratam, deverão encontrar o desafio do dia – escondido próximo aos bebedores (carta 3 – parte A).
- De volta à sala de aula, as equipes devem resolver a situação da forma que considerarem melhor (mas respeitando a vontade do pai). Caso não encontrem uma solução, a professora sugerirá que peçam emprestado o camelo do narrador da história e tentem fazer a partilha novamente.
- Cada grupo exporá aos demais como resolveu a questão da partilha dos 35 camelos.
- Receberão, a seguir, a continuação da história (carta 3 – parte B).
- As equipes poderão utilizar diferentes meios para demonstrar o que houve na partilha. Disponibilizar régua de frações e papéis.
- Socializar com a turma as descobertas.
- Marcar no mapa o país visitado.
- Pedir que os alunos preencham o diário de viagem.</td></tr>
<tr><th>OUTROS MATERIAIS</th></tr>
<tr><td>- Folhas de rascunho
- Identificação das equipes (faixas, viseiras, etc.)
- Material para o barco (TNT e caixa de som)</td></tr>
</table>

Texto da carta 3 – parte A:

“Caros viajantes,

Nessas terras, os camelos eram animais de grande valor. Eles eram a principal forma de transporte antes da invenção dos veículos motorizados. Quando precisávamos viajar pelo *deserto, os camelos conseguiam ficar sem água por meses! Assim, eram muito úteis para transportar mercadorias para lá e para cá.*

Certa vez, atravessando o deserto em meu camelo, encontrei três irmãos brigando por causa de uma cáfila (um conjunto de camelos):

- Não pode ser!

- Isso é um roubo!

- Eu não aceito!

É que o pai deles havia morrido e deixado de herança esses 35 camelos. A vontade do pai era a seguinte: o filho mais velho deveria receber a metade; o do meio, a terça parte; o mais novo, a nona parte. Porém, eles não sabiam como realizar a partilha.

Quantos camelos cada irmão deve receber? Vocês podem ajudá-los?"

Texto da carta 3 – parte B:

"E então, conseguiram fazer a partilha? Vou contar-lhes como fiz. É muito simples!

Pude realizar, com justiça, a divisão porque me permitiram que juntasse aos 35 camelos da herança o belo animal que me trouxe até aqui.

De posse dos 36 camelos, fiz a divisão justa e exata. O irmão mais velho deveria receber a metade de 35, ou seja, 17,5. Recebeu a metade de 36, portanto, 18. Nada teve a reclamar, pois saiu lucrando com esta divisão.

O segundo herdeiro deveria receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Recebeu um terço de 36, ou seja, 12. Não pôde protestar, pois também ele saiu com lucro da transação.

O mais novo, segundo a vontade de seu pai, deveria receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Recebeu a nona parte de 36, ou seja, 4. Teve também um lucro notável.

Pela divisão realizada, couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dava um resultado (18 + 12 + 4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um me pertencia. O outro também caberia, por direito, a mim, por ter resolvido o complicado problema da herança!

Os três irmãos aceitaram a partilha, que foi feita com justiça e equidade.

Agora respondam: qual a explicação matemática para a partilha dos camelos, que além de ser vantajosa aos irmãos, ainda fez sobrar um camelo para mim?"

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 4: NO CONTINENTE AFRICANO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Locais: sala vazia e sala de aula da turma</td><td>Tempo previsto: 100 min (2 aulas)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">- Mobilizar os nexos do número racional: razão de um número racional; medida fracionária (relação parte-todo).
- Mobilizar os nexos da medida: discreto/contínuo; grandeza.
- Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em partes desiguais, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.</td><td>- Carta 4 (confeccionada em tamanho pequeno, em um envelope com a cor de cada equipe)
- Diários de viagem</td><td rowspan="3">- Retomar a aula anterior e pedir que as equipes se organizem para o início da viagem.
- Hoje a turma viajará de trem até o Chade, um país que fica no centro do continente africano (deixar que organizem a sala).
- Todos devem imaginar-se dentro de um trem. Usar fundo sonoro: https://www.youtube.com/watch?v=rAAxZnh0jpQ
- Durante a viagem, explicar aos alunos que o Chade, assim como muitas partes do mundo, enfrenta uma grande escassez de água. Perguntar como seria ficar sem água e o que a falta de água pode causar.
- A turma desembarca na estação e encontra a carta (4).
- De volta à sala de aula, as equipes devem resolver a situação da forma que considerarem melhor. Cada grupo exporá aos demais como resolveu a questão da partilha dos 21 galões de água.
- Marcar no mapa o país visitado.
- Pedir que os alunos preencham o diário de viagem.</td></tr>
<tr><th>OUTROS MATERIAIS</th></tr>
<tr><td>- Folhas de rascunho
- Identificação das equipes (faixas, viseiras, etc.)
- Material para o barco (TNT e caixa de som)</td></tr>
</table>

Texto da carta 4:

Prezados aventureiros,

Vocês estão indo muito bem até agora! Tenho reparado grandes progressos nas equipes durante a viagem...

A água é tão rara e tão cara, que está valendo mais que dinheiro, mais que ouro! Soube que algumas pessoas estão aceitando água como pagamento por aqui.

Pois bem, vou contar-lhes o que aconteceu a três amigos que vivem aqui no Chade. Eles são criadores de carneiros e venderam alguns desses animais. Aceitaram, como pagamento, 21 preciosos galões de água, sendo:7 cheios, 7 meio cheios e 7 vazios.

Querem, agora, dividir os 21 galões de modo que cada um deles receba o mesmo número de galões e a mesma quantidade de água.

Repartir os galões é fácil. Cada um dos amigos deve ficar com sete galões. A dificuldade está em repartir a água sem abrir os galões, isto é, conservando-os exatamente como estão.

Qual é a solução possível para este problema?"

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 5: AS CAIXAS DO PROFESSOR BELGA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Locais: sala de aula vazia (barco) e sala da turma</td><td>Tempo previsto: 150 min (3 aulas)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">- Mobilizar o nexo do número racional: medida fracionária (relação parte-todo).
- Mobilizar os nexos da medida: unidade, quantidade/qualidade.
- Identificar frações equivalentes.</td><td>- Carta 5 (confeccionada em tamanho pequeno, em envelope com a cor de cada equipe)
- Material Cuisinaire (um para cada equipe)
- Retângulos de sulfite (1/4 da folha) para as equipes anotarem as tarefas elaboradas
- Diários de viagem</td><td rowspan="3">- Retomar a aula anterior (podem reler as cartas).
- Pedir que as equipes se organizem para o início da viagem.
- Hoje a turma viajará de avião até o continente europeu, para a Bélgica. Usar fundo sonoro: https://www.youtube.com/watch?v=08C_wOiyx0c
- Ver texto de apoio para a viagem. Conversar sobre o material criado pelo professor belga. Alguém conhece? Existem outros materiais que a turma se lembra de ter usado e que tenham ajudado na compreensão de algum conceito?
- A professora anuncia a chegada à Bélgica. Voltar à sala de aula, onde as caixas com o Material Cuisinaire estarão disponíveis.
- Deixar que as equipes manipulem livremente o material por alguns instantes.
- Lembrar os alunos de procurarem o desafio do dia – carta 5 (as cartas estarão escondidas na própria sala).
- A professora instigará as equipes a utilizarem conceitos como: ordem crescente / decrescente, maior / menor, parte / todo (exemplos: quantas barras brancas são necessárias para formar uma amarela; a barra branca corresponde a que fração da amarela?).
- Elaboradas as tarefas, organizar a turma de forma que todas as equipes possam cumprir a tarefa elaborada por outra equipe. A turma terá a possibilidade de transformar as tarefas em um jogo, estabelecendo coletivamente as regras.
- Marcar no mapa o país visitado.
- Pedir que os alunos preencham o diário de viagem.</td></tr>
<tr><th>OUTROS MATERIAIS</th></tr>
<tr><td>- Folhas de rascunho
- Identificação das equipes (faixas, viseiras, etc.)
- Material para o barco (TNT e caixa de som)</td></tr>
</table>

Texto de apoio – para a professora contar durante a *viagem*:

Vamos à Bélgica!

A Bélgica fica no continente europeu. Sua capital é Bruxelas. Viveu lá um professor chamado Georges Cuisenaire Hottelet (1891-1980).

Depois de ter observado o desespero de um aluno, numa de suas aulas, decidiu criar um material que ajudasse no ensino dos conceitos básicos da Matemática. Então cortou algumas réguas de madeira em 10 tamanhos diferentes e pintou cada peça de uma cor.

Esse material, chamado hoje Escala Cuisinaire, ajudou vários alunos a entenderem conceitos básicos da Matemática. Durante 23 anos, Cuisenaire estudou e experimentou o material na aldeia belga de Thuin. Só 23 anos depois da sua criação (a partir de um encontro com outro professor – o egípcio Caleb Gattegno), é que o seu uso se difundiu.

O professor egípcio morava na Inglaterra e passou a divulgar o trabalho de Cuisenaire – a quem chamava de Senhor Barrinhas. Em apenas 13 anos o material passou a ser conhecido nas escolas de quase todo o mundo.

(Fonte: http://www.utfpr.edu.br/cornelioprocopio/cursos/licenciaturas/Ofertados-neste-Campus/ matematica/laboratorios/material-didatico/escala-cuisenaire)

Texto da carta 5:

"Nobres viajantes,

É muito bom vê-los brincando com o material inventado por um professor!

Hoje vocês deverão criar cinco tarefas matemáticas para as outras equipes usando o Material Cuisinaire.

Usem seus conhecimentos e sejam criativos!"

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 6: PROMOÇÃO NO PARQUE!</th></tr>
<tr><td colspan="2">Locais: sala de aula vazia (barco), sala da turma, pátio e parquinho da escola.</td><td>Tempo previsto: 150 min (3 aulas)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">- Mobilizar os nexos do número natural e do número inteiro: correspondência um a um e ordenação.
- Mobilizar os nexos do número racional: infinidade, ordenação e decimal.
- Mobilizar os nexos da medida: grandeza, discreto/contínuo, unidade.
- Estimar, medir e comparar comprimentos utilizando unidades de medida padronizadas.
- Ler, escrever, comparar e ordenar números racionais na forma decimal, bem como localizá-los na reta numérica.
- Realizar pesquisa que envolva variáveis categóricas e numéricas e organizar os dados coletados por meio de tabelas.</td><td>- Carta 6 (confeccionada em tamanho grande, endereçada à turma)
- Tabelas para registro de medida da altura dos integrantes de cada equipe
- Fitas métricas
- Fita adesiva
- Reta numérica confeccionada em cartolinas emendadas (de 0 a 2 metros)
- Etiquetas adesivas em branco
- 30 diários de viagem</td><td rowspan="3">- Retomar a aula anterior (podem reler as cartas).
- Solicitar a um funcionário da escola que entregue a carta 6 na sala de aula em horário previamente combinado.
- Ler com os alunos a carta.
- Pedir que as equipes se organizem para a partida. (Todos dentro do barco). Usar fundo sonoro: https://www.youtube.com/watch?v=ih3b46D_PR8
- Durante a viagem, discutir como cada equipe se organizará. Esta situação envolve medições exatas. Conversar sobre a diferença entre este momento e aquele em que mediram usando partes do corpo. Sugerir que façam estimativas das medidas antes de efetuá-las. Construir coletivamente as estratégias para que as medições sejam corretas.
- Anunciar a chegada ao México. A turma deve dirigir-se ao pátio para efetuar as medições e registrar na tabela.
- Retornar à sala de aula. Cada aluno localizará na reta numérica o ponto correspondente à sua altura, colando uma etiqueta com seu nome.
- Localizada na reta a estatura de todos, resta que se organizem em ordem decrescente para ir ao parque de diversões.
- Levar a turma ao parquinho da escola.
- Retornar à sala de aula e marcar no mapa o país visitado.
- Pedir que os alunos preencham o diário de viagem.</td></tr>
<tr><th>OUTROS MATERIAIS</th></tr>
<tr><td>- Folhas de rascunho
- Identificação das equipes (faixas, viseiras, etc.)
- Material para o barco (TNT e caixa de som)</td></tr>
</table>

Texto da carta 6:

“Queridos estudantes,

Hoje gostaria de alegrar cada criança desta turma...

Há um parque de diversões no México que está com uma promoção interessante: ‘turmas escolares, organizadas em ordem decrescente de estatura, não pagam ingresso’. Que tal vocês aproveitarem a promoção?

Para ajudá-los a se organizarem, estou enviando uma tabela para cada equipe.

Boa viagem... Divirtam-se!”

Modelo de tabela para registro da estatura dos integrantes das equipes:

Nome	Metro (m)	Centímetros (cm)	

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 7: O RETORNO E POSSÍVEL DESFECHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Locais: sala de aula vazia (barco) e sala da turma</td><td>Tempo previsto: 50 min (1 aula)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">- Estimular a curiosidade e o interesse dos estudantes.
- Avaliar os momentos vivenciados até agora.
- Produzir um final para a história com coerência e criatividade.</td><td>- Carta 7 (confeccionada em tamanho grande, endereçada a toda a turma)
- Diários de viagem</td><td rowspan="3">- Retomar a aula anterior.
- Solicitar a um funcionário da escola que entregue a carta 7 na sala de aula em horário previamente combinado. Ler com os alunos a carta.
- Pedir que as equipes se organizem para o retorno ao Brasil (todos dentro do “barco”). Usar fundo sonoro: https://www.youtube.com/watch?v=ih3b46D_PR8
- Durante a viagem, escrever uma resposta da turma (produção coletiva) ao amigo misterioso (espera-se que a turma concorde com sua visita e deseje conhecê-lo pessoalmente).
- Anunciar a chegada ao Brasil.
- Retornar à sala de aula e marcar no mapa a chegada ao Brasil.
- Conversar com a turma sobre a viagem imaginária feita até agora (fazer uma breve retrospectiva, utilizando o mapa).
- Agora as equipes se tornarão as autoras. Cada equipe escreverá um desfecho para a história (como será último dia, quem é o amigo, como ele é.). Quem sabe um dos textos se concretiza?
- Pedir que os alunos preencham o diário de viagem.</td></tr>
<tr><th>OUTROS MATERIAIS</th></tr>
<tr><td>- Folhas de rascunho
- Identificação das equipes (faixas, viseiras, etc.)
- Material para o barco (TNT e caixa de som)</td></tr>
</table>

Texto da carta 7:

“Olá, viajantes do mundo!

Vocês são uma turma muito esperta! Estou no Brasil e gostaria de conhecê-los pessoalmente.

Conseguem imaginar quem sou eu?

Pensei em tomarmos um gostoso café da manhã juntos... Que tal?

Aguardo ansioso pela sua resposta!”

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 8: PREPARANDO A CHEGADA DO AMIGO MISTERIOSO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Local: sala de aula e sala de informática</td><td>Tempo previsto: 150 min (3 aulas)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">- Mobilizar os nexos do número natural e do número inteiro: qualidade/quantidade, valor posicional, base, composição/decomposição e agrupamento.
- Mobilizar os nexos do número racional: medida fracionária (relação parte-todo), quociente, razão, decimal e operador.
- Mobilizar os nexos da medida: qualidade/quantidade, grandeza, discreto/contínuo, unidade.
- Identificar frações com os significados de parte de um todo e resultado de uma divisão.
- Resolver problemas de adição e multiplicação com números racionais cuja representação decimal é finita.
- Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.
- Resolver problemas que envolvam as unidades de grandeza, massa e capacidade recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais.
- Resolver problemas usando valores do sistema monetário brasileiro.
- Realizar pesquisa que envolva variáveis categóricas e numéricas e organizar os dados coletados por meio de tabelas.</td><td>- Carta 8 (confeccionada em tamanho grande, endereçada a toda a turma)
- Quadro posicional
- Computadores com conexão de internet
- Diários de viagem</td><td rowspan="3">- Retomar a aula anterior.
- Solicitar a um funcionário da escola que entregue a carta 8 na sala de aula em horário previamente combinado. Ler com os alunos a carta.
- As equipes receberão a receita de um dos itens do café da manhã. Deverão observar a necessidade de adaptar a quantidade dos ingredientes.
- Resolver coletivamente algumas situações em que seria necessária a conversão de unidades de medida (exemplos: quilogramas em gramas, litros em mililitros, etc.). Recordar o princípio de agrupamento do sistema de numeração decimal. Utilizar o quadro posicional.
Observações: o rendimento das receitas equivale a um terço da quantidade de pessoas, portanto, as equipes deverão triplicar a receita (exceto as duas equipes do bolo, que deverão duplicar a receita); as receitas incluem medidas variadas (dúzias, quilogramas, gramas, litros, mililitros, etc.) expressas em números inteiros e fracionários. Cada equipe reformulará sua lista de acordo com a quantidade adequada de ingredientes.
- A professora convidará os estudantes a elaborarem uma lista de compras. Pedir que organizem uma tabela que inclua: item pesquisado, valor unitário, quantidade e valor total.
- Levar a turma para a pesquisa de preços na sala de informática.
- De volta à sala de aula, cada equipe deve calcular o valor que será gasto em sua receita.
- Elaborar uma tabela coletiva com o custo do café da manhã (somar os valores pesquisados pelas equipes).
- Combinar as providências necessárias para a execução das receitas (lembrar da higiene: cabelos presos, trazer avental, unhas cortadas e limpas, etc.).
- Pedir que os alunos preencham o diário de viagem.</td></tr>
<tr><th>OUTROS MATERIAIS</th></tr>
<tr><td>- Folhas de rascunho
- Identificação das equipes (faixas, viseiras, etc.)</td></tr>
</table>

Texto da carta 8:

"Bom dia, amigos!

Que bom que irão me receber aí na escola! Ficarei muito honrado em conhecê-los.

Vou ajudar vocês a se organizarem para o nosso café da manhã. Como já perceberam, os números estão em toda parte... E não poderia ser diferente na preparação do nosso encontro! Gostaria que executassem o cardápio abaixo. Cada equipe ficará com uma receita. Fiquem atentos às medidas e teremos um encontro delicioso! Mãos à obra..."

CARDÁPIO – CAFÉ DA MANHÃ:
Salada de frutas
Mini sanduíches
Torradinhas com patê
Bolo verde
Suco e achocolatado

Receitas (uma para cada grupo):

SALADA DE FRUTAS	BOLO VERDE	TORRADINHAS COM PATÊ
<u>Ingredientes:</u> 1 mamão pequeno 1/3 dúzia de bananas 1/6 dúzia de maçãs 1/4 dúzia de laranjas 0,13 Kg de leite condensado 0,065 Kg de creme de leite <u>Modo de fazer:</u> Lave as frutas. Descasque e pique o mamão, as bananas e maçãs. Esprema as laranjas e despeje o caldo sobre as frutas picadas. Despeje também o leite condensado e o creme de leite. Misture tudo. <u>Rendimento</u>: 10 porções.	<u>Ingredientes</u>: 1/3 de dúzia de ovos 0,2 l de óleo 0,17 Kg de iogurte natural 0,02 Kg de pó para gelatina de limão 0,4 Kg de mistura para bolo de laranja 0,02 Kg (ou 1 colher de sopa) de fermento em pó <u>Modo de fazer:</u> Coloque todos os ingredientes no liquidificador e bata por aproximadamente 3 min. Unte uma forma com margarina e farinha de trigo e despeje a massa. Leve ao forno médio por aproximadamente 30 min. Para saber se está pronto, abra o forno com cuidado e finque um palito (se o palito sair limpo, o bolo está assado). <u>Rendimento</u>: 15 porções	<u>Ingredientes</u>: 1/3 de um queijo (ricota) 0,065 Kg de creme de leite 1/3 de um envelopinho de tempero em pó ½ dúzia de azeitonas sem caroço ½ cenoura ralada <u>Modo de fazer:</u> Pique o queijo. Coloque todos os ingredientes no processador e bata por aproximadamente 1 min. Prove e, se necessário, acrescente uma pitada de sal. Sirva com torradas. <u>Rendimento</u>: 10 porções

<table>
<tr>
<td>MINI-SANDUÍCHES

Ingredientes:
0,3 Kg de pão de forma
0,08 Kg de maionese
1/5 Kg de presunto fatiado
0,17 Kg de queijo fatiado

Modo de fazer:
Separe as fatias de pão de forma em pares. Passe maionese, coloque uma fatia de presunto, uma fatia de queijo e feche o sanduíche. Depois de pronto, fracione cada sanduíche em 4 partes.

Rendimento: 10 porções</td>
<td>SUCO DE UVA

Ingredientes:
½ l de suco concentrado
1000 ml de água filtrada
0,08 Kg de açúcar (ou 8 colheres de sopa)

Modo de fazer:
Coloque todos os ingredientes em uma jarra e misture bem. Sirva gelado.

Rendimento: 8 copos</td>
<td>LEITE COM ACHOCOLATADO

Ingredientes:
1000 ml de leite
0,030 Kg de achocolatado em pó (ou 5 colheres de sopa)

Modo de fazer:
Coloque todos os ingredientes no liquidificador e bata por aproximadamente 1 min. Sirva gelado.

Rendimento: 6 copos</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 9: HORA DA CULINÁRIA!</th></tr>
<tr><td>Local: sala de aula e cozinha</td><td colspan="2">Tempo previsto: 150 min (3 aulas)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">- Mobilizar os nexos do número natural e do número inteiro: senso numérico, correspondência um a um, qualidade/quantidade e agrupamento.
- Mobilizar os nexos do número racional: medida fracionária (relação parte-todo), quociente e decimal.
- Mobilizar os nexos da medida: qualidade/quantidade, grandeza, discreto/contínuo e unidade.
- Resolver problemas de adição e multiplicação com números racionais cuja representação decimal é finita.
- Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.
- Resolver problemas que envolvam as unidades de grandeza, massa e capacidade recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais.</td><td>- Ingredientes para as receitas, copos-medida e equipamentos de cozinha
- Diários de viagem</td><td rowspan="3">- Retomar a aula anterior.
- Solicitar às equipes que se organizem para o preparo das receitas.
- Após o preparo, higienizar o ambiente e preencher o diário de viagem.</td></tr>
<tr><th>OUTROS MATERIAIS</th></tr>
<tr><td>- Identificação das equipes (faixas, viseiras, etc.)
- Itens de higiene (toucas, toalhas de mesa, panos de prato)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">MOMENTO 10: O FINAL DA HISTÓRIA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Local: sala de aula</td><td>Tempo previsto: 50 min (1 aula)</td></tr>
<tr><th>OBJETIVO</th><th>ELEMENTO DE MEDIAÇÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">- Vivenciar o final da história escrito pela turma.</td><td>- Diários de viagem</td><td rowspan="3">- Solicitar às equipes que se organizem para o café da manhã.
- Receber o amigo misterioso (final da história escrito por uma das equipes).
- Após o lanche, higienizar o ambiente e preencher o diário de viagem.</td></tr>
<tr><td>OUTROS MATERIAIS</td></tr>
<tr><td>- Identificação das equipes (faixas, viseiras, etc.).
- Itens de higiene (toalhas de mesa, panos de prato).
- Comidas e bebidas preparadas pela turma.</td></tr>
</table>