

**MARCUS VINÍCIUS CARNEIRO MARTINS**

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE SISTEMAS DINÂMICOS**

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do curso de Ciência da Computação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

LAVRAS  
MINAS GERAIS - BRASIL

2006

**MARCUS VINÍCIUS CARNEIRO MARTINS**

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE SISTEMAS DINÂMICOS**

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do curso de Ciência da Computação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Área de Concentração:

Modelos Analíticos e de Simulação

Orientadora:

Prof. Iraziet da Cunha Charret

LAVRAS

MINAS GERAIS - BRASIL

2006

**Ficha Catalográfica preparada pela Divisão de Processos Técnico  
da Biblioteca Central da UFLA**

Carneiro, Marcus Vinícius

Simulação Computacional de Sistemas Dinâmicos / Marcus Vinícius Carneiro Martins. Lavras - Minas Gerais, 2006. 86p : il.

Monografia de Graduação - Universidade Federal de Lavras. Departamento de Ciência da Computação.

1.Sistemas Dinâmicos. 2. Dinâmica de Populações. 3. Simulação Computacional. I. CARNEIRO, M.V. II. Universidade Federal de Lavras. III. Simulação Computacional de Sistemas Dinâmicos.

**MARCUS VINÍCIUS CARNEIRO MARTINS**

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE SISTEMAS DINÂMICOS**

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do curso de Ciência da Computação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

*Aprovada em 28 de abril de 2006*

---

Prof. Dr. Júlio Neil Cassa Louzada

---

Prof. Dr. Heitor Augustus Xavier Costa

---

Prof. Dr. Antônio Tavares da Costa Jr.  
(Co-Orientador)

---

Profa. Dra. Iraziet da Cunha Charret  
(Orientadora)

LAVRAS  
MINAS GERAIS - BRASIL

*Dedico este trabalho a minha mãe, Eliana, que lutou com seu trabalho por dias e noites sem cessar dando-me condições de prosseguir e terminar meus estudos. Dedico esse trabalho a minha tia Heloísa que sempre foi um símbolo de grande luta e dedicação à pesquisa..*

## **Agradecimentos**

Agradeço inicialmente a todos os meus amigos, em especial, Luiz Gustavo, Michelle, Eduardo e Fernanda, por serem meus grandes companheiros de caminhada, dando-me apoio e sendo pacientes com as minhas imperfeições.

Agradeço ao meu amigo Renato, por seu companheirismo na caminhada acadêmica.

E o mais importante, agradeço aos meus orientadores, Iraziet e Toninho, pela oportunidade de trabalho e aprendizado, por todo apoio emocional e intelectual que precisei ao longo do curso e, por todas as conversas e descontrações onde pude descobrir o quão fantásticas essas pessoas são e o quanto eu os admiro. Muito Obrigado!

## **Resumo**

A simulação computacional em conjunto com a modelagem matemática é uma ferramenta muito eficaz na análise do comportamento de sistemas dinâmicos. Através de modificações realizadas nas variáveis e parâmetros que descrevem esses sistemas, é possível realizar um estudo mais rápido e eficiente do comportamento dos mesmos para determinadas regiões de interesse. O primeiro sistema dinâmico estudado, a pilha de areia, foi simulado com a finalidade de verificar o comportamento das distribuições das avalanches quando se altera a forma de distribuição inicial dos grãos. O trabalho seguinte foi a simulação estocástica, através de um autômato celular, de um modelo de dinâmica populacional, com estrutura espacial, onde se investigou a variável que possuía maior influência no comportamento do sistema. As distribuições espaciais dos indivíduos encontradas estão fortemente relacionadas com alguns dos parâmetros do modelo.

## **Abstract**

Computational simulations allied to mathematical modelling are very powerful tools in the analysis of the behavior of the system when variables and parameters are changed. The first system, the sandpile model, is simulated with the objective of investigating the behavior of the topplings distribution as a function of the manner that sand is distributed among the neighboring sites. The next work consists in the stochastic simulation of a model for population dynamics, where it has been investigated the most critical variable of the model using cellular automata. The spatial distributions of the individuals are directly related to the parameters of the model.

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b>                                | <b>4</b>  |
| 2.1      | Introdução . . . . .  | 4         |
| 2.1.1    | Tipo de derivadas . . . . .                                 | 5         |
| 2.1.2    | Ordem das derivadas . . . . .                               | 5         |
| 2.1.3    | Linearidade . . . . .                                       | 6         |
| 2.2      | Equações Diferenciais Lineares . . . . .                    | 8         |
| 2.2.1    | Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem . . . . .  | 8         |
| 2.2.2    | Equações Diferenciais de Segunda Ordem . . . . .            | 11        |
| 2.2.3    | Teorema da Existência e Unicidade das Soluções . . . . .    | 13        |
| 2.3      | Sistemas de Equações Diferenciais . . . . .                 | 14        |
| 2.4      | Estabilidade . . . . .                                      | 17        |
| 2.5      | Equações Diferenciais Parciais . . . . .                    | 19        |
| 2.6      | Equações Diferenciais Não-Lineares . . . . .                | 24        |
| 2.7      | Técnicas de Análise de Equações Diferenciais . . . . .      | 28        |
| <b>3</b> | <b>INTRODUÇÃO À ECOLOGIA DE POPULAÇÕES</b>                  | <b>31</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .  | 31        |
| 3.2      | O Modelo Presa-Predador . . . . .                           | 32        |
| <b>4</b> | <b>TÉCNICAS COMPUTACIONAIS</b>                              | <b>42</b> |
| 4.1      | Métodos Numéricos . . . . .                                 | 42        |
| 4.1.1    | Aproximações das derivadas por diferenças finitas . . . . . | 43        |
| 4.1.2    | Alguns Métodos Numéricos . . . . .                          | 45        |



|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.2      | Solução Numérica do Modelo Presa-Predador . . . . .            | 49        |
| 4.3      | Autômatos Celulares . . . . .                                  | 52        |
| 4.4      | Geração de Números Aleatórios . . . . .                        | 55        |
| <b>5</b> | <b>SIMULAÇÃO DO MODELO DA PILHA DE AREIA</b>                   | <b>58</b> |
| 5.1      | Introdução . . . . .   | 58        |
| 5.2      | Simulação da Pilha de Areia . . . . .                          | 60        |
| 5.3      | Implementação do Modelo . . . . .                              | 62        |
| 5.4      | Resultados e Conclusões . . . . .                              | 63        |
| 5.5      | Algoritmo . . . . .  | 68        |
| <b>6</b> | <b>SIMULAÇÃO DE MODELOS DE DINÂMICA DE POPULAÇÕES</b>          | <b>69</b> |
| 6.1      | Versão Estocástica do Modelo Presa-Predador . . . . .          | 69        |
| 6.1.1    | Introdução . . . . .   | 69        |
| 6.1.2    | Implementação do Modelo . . . . .                              | 70        |
| 6.1.3    | Resultados . . . . .   | 71        |
| 6.2      | Versão Espacial Estocástica do Modelo Presa-Predador . . . . . | 72        |
| 6.2.1    | Introdução . . . . .   | 72        |
| 6.2.2    | Implementação do Modelo . . . . .                              | 72        |
| 6.2.3    | Resultados e Conclusões . . . . .                              | 74        |
| <b>7</b> | <b>CONCLUSÕES</b>  | <b>83</b> |

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Representação esquemática para um modelo de crescimento populacional. . . . .   | 8  |
| 2.2 | Família de soluções para a equação $N(t) = Ce^{\alpha t}$ . A solução particular do problema para $N(0) = 3$ e $\alpha = 0.8$ está em destaque. . . . .   | 10 |
| 2.3 | Solução da equação diferencial $4y'' - 8y' + 3 = 0$ , com $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1/2$ . . .  | 13 |
| 2.4 | Representação esquemática do instante inicial de um sistema. A partícula encontra-se inicialmente no ponto A, de equilíbrio instável. . . . .   | 18 |
| 2.5 | Dada uma pequena perturbação no sistema é possível retirar-se a partícula do seu estado de equilíbrio. . . . .  | 18 |
| 2.6 | O ponto B representa um ponto de equilíbrio estável do sistema, também chamado de <i>atrator</i> do sistema. . . . .  | 19 |
| 2.7 | Ao receber uma perturbação a partir do ponto B, a partícula poderá retornar ao ponto de origem, ou poderá oscilar em torno de uma trajetória próxima do ponto B, dependendo das características do sistema. . . . .   | 19 |
| 2.8 | Classificação dos pontos de equilíbrio de acordo com o sinal da derivada. Se a derivada da função no ponto é positiva, simbolicamente ela recebe uma seta para a direita. Caso contrário, ela recebe uma seta para a esquerda. Se as setas convergem ao ponto, este é classificado com o estável. Caso contrário, ele é classificado como instável. As setas indicam a tendência de aproximação e afastamento do ponto. . . . . | 27 |
| 3.1 | Esquema representativo da relação de predação envolvendo duas espécies. . . . .   | 32 |
| 3.2 | Plano de fase do Modelo Lotka-Volterra, composto por trajetória fechadas, onde cada trajetória depende das populações iniciais no sistema . . . . .   | 36 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.3  | Séries temporais do Modelo Lotka-Volterra apresentando um comportamento oscilatório e periódico. A curva mais clara representa a população de presas, enquanto que a curva mais escura representa a população de predadores. . . . .   | 37 |
| 3.4  | Séries temporais do modelo Lotka-Volterra utilizando o fator logístico. A curva mais clara representa a população de presas e a mais escura representa a população de predadores. . . . .  | 41 |
| 4.1  | Representação gráfica da diferença regressiva . . . . .  | 44 |
| 4.2  | Representação gráfica da diferença progressiva . . . . .   | 44 |
| 4.3  | Estimativa da diferença percentual entre soluções calculadas adotando-se $h = 0.02$ e $h = 0.002$ para a) Método de Runge-Kutta e b) Método de Euler. . . . .  | 48 |
| 4.4  | Solução numérica com $h = 0.02$ adotando-se: $\alpha = 0.8$ , $\mu = 0.01$ , $\beta = 0.55$ , $\gamma = 0.25$ , $\delta = 0.1$ , $N(0) = 0.5$ , $P(0) = 0.5$ . . . . .   | 51 |
| 4.5  | Solução numérica do modelo presa-predador com $h = 0.002$ adotando-se: $\alpha = 0.8$ , $\mu = 0.01$ , $\beta = 0.55$ , $\gamma = 0.25$ , $\delta = 0.1$ , $N(0) = 0.5$ , $P(0) = 0.5$ . . . .   | 52 |
| 4.6  | Diferença percentual entre o método de solução de Euler e Runge-Kutta, adotando o mesmo valor de $h$ . . . . .   | 53 |
| 4.7  | Representação esquemática de um autômato celular unidimensional . . . . .  | 54 |
| 4.8  | Representação esquemática de um automato celular bidimensional . . . . .   | 54 |
| 4.9  | Representação esquemática de vizinhanças do tipo Von Neumann e de Moore . . . .  | 55 |
| 4.10 | Comparação entre o gerador de números pseudo-aleatórios padrão da linguagem C++ e o gerador proposto por Oliveira considerando: a) $10^3$ sorteios; b) $10^5$ sorteios e c) $10^7$ sorteios. A curva clara representa os resultados obtidos através do gerador proposto em [17]. . . . . | 57 |
| 5.1  | Relação entre os valores de $s$ , tamanho da avalanche, e $N(s)$ , número de ocorrências. . . . .  | 60 |
| 5.2  | Esquema representativo da simulação de uma avalanche de tamanho 6 da Pilha de Areia em uma matriz finita $6 \times 6$ . . . . .  | 62 |
| 5.3  | Simulação com 15.000 iterações, em um plano de tamanho $65 \times 65$ . . . . .  | 64 |
| 5.4  | O gráfico apresenta uma divisão em 3 regiões distintas. Esta simulação foi realizada em uma rede de tamanho $65 \times 65$ com 150000 iterações . . . . .  | 65 |
| 5.5  | Simulação feita em um plano de tamanho $129 \times 129$ com distribuição uniforme dos grãos. . . . .   | 66 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 5.6 | Figura da Pilha de Areia obtida com distribuição uniforme dos grãos, iterada 100000 vezes em uma matriz com $129 \times 129$ sítios. . . . .  | 66 |
| 5.7 | Simulação feita em um plano de tamanho $129 \times 129$ com distribuição aleatória dos grãos. . . . .   | 67 |
| 5.8 | Figura da Pilha de Areia obtida com distribuição não-uniforme dos deslizamentos, iterada 100000 vezes em uma matriz com $129 \times 129$ sítios. . . . .  | 67 |
| 6.1 | Simulações estocásticas do modelo presa-predador. <i>a)</i> Séries temporais obtidas com $\gamma = 0.3$ <i>b)</i> Séries temporais obtidas com $\gamma = 0.7$ , <i>c)</i> e <i>d)</i> Planos de fase referentes às series temporais de <i>a</i> e <i>b</i> . . . . .                              | 71 |
| 6.2 | Representação esquemática dos vários eventos que ocorrem em um passo da simulação.  | 73 |
| 6.3 | Resultado de uma simulação que apresenta coexistência entre as espécies usando o conjunto A de parâmetros da tabela 6.1 e $N_0 = 7000$ e $P_0 = 7000$ . . . . .   | 75 |
| 6.4 | Planos de fase obtidos com diferentes distribuições de indivíduos para o conjunto de parametros . . . . .   | 76 |
| 6.5 | Simulação com ambas populações iniciais iguais a 20, distribuídas em uma rede de $300 \times 300$ sítios. . . . .   | 77 |
| 6.6 | Distribuição inicial de 20 indivíduos de cada população em uma rede de $300 \times 300$ sítios, utilizando os diferentes conjuntos de parâmetros apresentados na tabela 6.1 . . . . .   | 79 |
| 6.7 | Series temporais resultante de simulações que utilizaram diferentes valores de taxa de nascimento de predadores. <i>a)</i> A taxa de nascimento dos predadores é de 25. <i>b)</i> A taxa foi aumentada para 85. <i>c)</i> e <i>d)</i> apresentam os planos de fase para essas simulações. . . . . | 80 |
| 6.8 | <i>a)</i> Bacia de atração do sistema utilizando o conjunto de parâmetros da linha I da tabela 6.1. <i>b)</i> Bacia de atração do sistema utilizando o conjunto de parâmetros da linha A da tabela 6.1. . . . .   | 81 |

# Lista de Tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Classificação dos diferentes pontos críticos para um sistema linear. . . . .  | 16 |
| 4.1 | Valores obtidos pelo método de Euler adotando os seguintes valores para $h$ : 0.2 e 0.1.<br>A última coluna apresenta os valores exatos da solução. . . . . | 46 |
| 6.1 | Conjuntos de parâmetros utilizados para a simulação. Valores dados em (%). . . . .  | 78 |

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

No estudo do mundo real, os modelos são utilizados como forma de representar os fenômenos e as interações entre diferentes indivíduos e sistemas, possibilitando o tratamento matemático e computacional dessas situações reais.

Modelar é representar um sistema físico real, ou parte dele, em uma linguagem simbólica, convenientemente preparada para *prever* ou *descrever* o seu comportamento. Modelagem é a atividade de construir um modelo para representar o sistema físico real. A modelagem matemática consiste na descrição de fenômenos físicos, através de fórmulas, símbolos e relações matemáticas entre parâmetros internos e variáveis de entrada e saída. A partir dessas relações matemáticas, é possível obter informações que indiquem como o sistema evolui com o tempo [1].

Os sistemas físicos reais, em sua grande maioria, recebem influência de variáveis do ambiente e de características que estão ligadas à sua própria constituição. Essas influências são inúmeras e cabe ao pesquisador investigar e selecionar as características que têm maior impacto no comportamento do sistema. Essa filtragem é fundamental, pois, se um modelo contiver todas as características que o sistema físico real apresenta, provavelmente será tão difícil de tratar quanto o fenômeno que se propõe a modelar. Essas características são denominadas de *variáveis* do sistema [1].

Os modelos matemáticos podem ser classificados de acordo com a influência da variável temporal. O modelo será considerado estático, caso seu comportamento seja constante para qualquer intervalo de tempo, como por exemplo o modelo de um circuito elétrico simples. Entretanto, para modelos onde o tempo é relevante, como por exemplo, o crescimento populacional em uma cidade, estes são denominados de modelos dinâmicos, ou ainda, sistemas dinâmicos.

A modelagem matemática possui várias vantagens, das quais ressaltam-se:

- *Minimização de Riscos*: A modelagem matemática pode ser utilizada para descrever o comportamento de reações físico-químicas, por exemplo. É possível saber quais as proporções dos elementos químicos que poderão ser usadas e as respostas que o experimento produzirá à mistura realizada sem que haja maiores riscos de acidentes;
- *Minimização de Custos*: Consiste em usar a modelagem matemática como meio racionalizador de recursos em ocasiões onde uma tentativa pode demandar grandes recursos financeiros, por exemplo, a escavação de poços de petróleo. Através dos modelos, é possível obter uma idéia das regiões onde existe uma maior probabilidade de encontrar poços de petróleo, ao invés de realizar tentativas aleatoriamente;
- *Minimização de Tempo*: Esta ocorre frequentemente nos estudos de sistemas biológicos. Quando se deseja modelar uma resposta de uma cultura a certo tipo de variável, experimentalmente, é necessário aguardar todo o ciclo de vida do sistema que se está observando. Entretanto, com o auxílio de recursos computacionais, é possível obter essa resposta utilizando um tempo relativamente menor através do uso de um modelo matemático.

Acompanhando o desenvolvimento dos modelos matemáticos, está o desenvolvimento de técnicas e equipamentos computacionais que tem como objetivo a otimização dos cálculos demandados pela modelagem em tempo hábil.

A finalidade principal no desenvolvimento de um modelo não é a obtenção exata do resultado de um experimento, mas uma aproximação satisfatória que permita a compreensão do sistema, com uma dada precisão, dentro de alguns limites aceitáveis, previamente estabelecidos.

Em qualquer área das ciências, os modelos têm por finalidade básica a representação dos conhecimentos científicos obtidos. Essa é a maneira lógica e estruturada que possibilita a compreensão das descobertas científicas em qualquer parte do mundo. Através dos modelos, os experimentos podem ser reproduzidos, verificados e comprovados por qualquer pesquisador.

A modelagem matemática pode ser aplicada a vários tipos de fenômenos. O objetivo deste trabalho é estudar modelagem matemática e realizar simulações computacionais de alguns Sistemas Dinâmicos.

A principal característica da modelagem matemática em sistemas dinâmicos é a interdisciplinaridade. Neste trabalho abordam-se esses aspectos da forma descrita a seguir. No capítulo 2, é apresentado o referencial teórico de matemática, onde é realizado um estudo de equações diferenciais, ferramenta matemática utilizada para a modelagem de sistemas dinâmicos. No capítulo 3, é apre-

sentada uma pequena introdução à ecologia de populações, contendo estudos iniciais sobre o modelo presa-predador. No capítulo 4, são apresentadas algumas técnicas computacionais utilizadas nas simulações dos sistemas dinâmicos. Nos capítulos 5 e 6, são apresentados o estudo e os resultados da simulação computacional para alguns sistemas dinâmicos. A pilha de areia é apresentada no capítulo 5 e o capítulo 6 discute alguns modelos de dinâmica de populações. No capítulo 7, são apresentadas as conclusões do trabalho.



## Capítulo 2

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

### 2.1 Introdução

As equações diferenciais são uma ferramenta fundamental para a modelagem matemática de diversos fenômenos em várias áreas. Por exemplo, muitos fenômenos físicos, tais como movimento de partículas, movimento ondulatório, fenômenos de difusão e de turbulência, podem ser descritos utilizando-se equações diferenciais. Em ecologia, a modelagem da dinâmica de populações usa, fundamentalmente, equações diferenciais. Alguns desses modelos podem ser descritos por equações diferenciais triviais, que possuem soluções analíticas. No entanto, o mundo real comporta vários sistemas que, quando modelados, podem resultar em equações diferenciais altamente complexas que, na maioria das vezes, não possuem soluções analíticas. Nesses casos, os métodos de solução numéricos são utilizados e, muitas vezes, processos de simulação computacional são usados para a obtenção de informações sobre o comportamento desses sistemas.

"Uma equação diferencial é, basicamente, uma equação que envolve as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma ou mais variáveis independentes"[2]. São exemplos de equações diferenciais:

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v(s, t) \quad (2.1)$$

$$\frac{d^3 x}{dz^3} + y \frac{d^2 x}{dz^2} = \ln(z) \quad (2.2)$$

Baseado nessa definição, pode-se perceber que existem inúmeras possibilidades para a construção

de uma equação diferencial. As eqs. (2.1) e (2.2) mostram duas dessas possibilidades. A eq. (2.1) representa uma equação diferencial parcial - uma variável dependente e duas variáveis independentes. A eq. (2.2) representa uma equação diferencial ordinária de terceira ordem - uma variável dependente e uma variável independente, contendo derivadas de ordem menor ou igual a três.

Uma abordagem útil no estudo de equações diferenciais é a sua classificação quanto à algumas características importantes.

### 2.1.1 Tipo de derivadas

As equações diferenciais que apresentam somente derivadas ordinárias são chamadas de Equações Diferenciais Ordinárias. Um exemplo conhecido em Física é a equação que descreve o comportamento da carga  $Q(t)$  em um circuito RLC [2].

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t), \quad (2.3)$$

sendo  $C$  a capacitância,  $R$  a resistência e  $L$  a indutância.

As equações diferenciais que apresentam derivadas parciais em relação a um número qualquer de variáveis independentes são classificadas como Equações Diferenciais Parciais. Exemplos de modelos conhecidos que usam equações diferenciais parciais são a equação de calor (2.4) e a equação de onda (2.5):

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

sendo  $\alpha$  e  $a$  coeficientes físicos do sistema e  $u(x, t)$  a equação de concentração de calor em um ponto em um dado instante e  $v(x, t)$  a função de onda [3].

### 2.1.2 Ordem das derivadas

A ordem de uma equação diferencial é dada pela derivada de maior ordem da equação [3], não importando o tipo de derivada incluída. As equações de difusão de calor, de onda e do circuito RLC são classificadas como equações de segunda ordem.

O modelo de crescimento exponencial descrito pela eq.(2.6):

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad (2.6)$$

é classificado como uma equação diferencial de primeira ordem e a eq.(2.7):

$$\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} + y \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = z^4, \quad (2.7)$$

é classificada como uma equação de terceira ordem.

### 2.1.3 Linearidade

A classificação das equações diferenciais quanto a linearidade é muito importante, pois vários métodos de solução dependem dessa característica. Uma equação diferencial linear é uma equação que tem a forma geral para uma equação diferencial linear ordinária de ordem  $n$ ,

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (2.8)$$

onde  $a_0(x)$  não é identicamente nulo,  $x$  é a variável independente e  $y(x)$  é a variável dependente.

Veja que uma equação diferencial linear não pode conter funções transcendentais tais como  $\text{sen}(x)$ ,  $\text{cos}(x)$  e  $\ln(x)$  e também não pode conter produtos entre variáveis dependentes, entre variáveis dependentes e suas derivadas ou entre derivadas de variáveis dependentes, por exemplo [2]:

$$[y(x)]^2, \left(\frac{dt}{dh}\right)^2, y(x) \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dt} \frac{dh}{dt}, x(y, z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \frac{\partial x}{\partial y} \quad (2.9)$$

É muito frequente encontrar métodos de solução de equações diferenciais lineares que falham ao serem aplicados a equações diferenciais não lineares. Além disso, vários métodos analíticos usados para tratar equações diferenciais não lineares têm se mostrado pouco satisfatórios, embora sejam bem mais complexos que os métodos de solução de equações diferenciais lineares, mais simples e mais numerosos.

Uma abordagem utilizada no tratamento de equações diferenciais não lineares é o processo de linearização, que pode ser ilustrado utilizando-se o modelo matemático que descreve o comportamento de um pêndulo sujeito apenas a ação da gravidade [3].

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \text{sen}(\theta) = 0. \quad (2.10)$$

Este modelo contém a função  $\text{sen}(\theta)$  que faz com que a equação seja não-linear. Entretanto, para valores pequenos de  $\theta$ , pode-se expandir a função  $\text{sen}(\theta)$  em torno de zero em uma série de Taylor e considerar apenas o termo linear [4].

$$\begin{aligned}\text{sen}(\theta) &= \text{sen}(0) + \cos(0)\theta - \frac{\text{sen}(0)}{2}\theta^2 - \frac{\cos(0)}{3!}\theta^3 + \dots \\ \text{sen}(\theta) &\simeq \theta\end{aligned}\tag{2.11}$$

Usando essa aproximação na eq.(2.10), tem-se que para  $\theta \rightarrow 0$ ,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0,\tag{2.12}$$

A partir dessa aproximação, é possível aplicar métodos de solução para equações diferenciais lineares, lembrando que  $\theta$  deve ter valores bem pequenos, pois a medida que seu valor cresce, essa aproximação torna-se ruim.

## 2.2 Equações Diferenciais Lineares

### 2.2.1 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

“A solução geral de uma equação diferencial linear de ordem  $n$  é a solução que contém  $n$  constantes arbitrárias” [3]. Um modelo para o crescimento populacional, isto é, que seja capaz de descrever a variação no número de indivíduos em uma determinada região em relação ao tempo, é composto por um fator correspondente aos nascimentos, proporcional ao número de indivíduos presentes num dado instante, e por outro fator correspondente as mortes, também proporcional ao número de indivíduos presentes em um dado instante, representado esquematicamente na Figura (2.1)

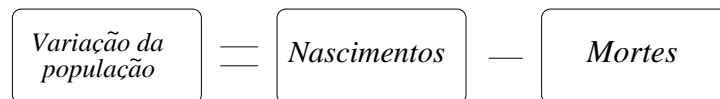


Figura 2.1: Representação esquemática para um modelo de crescimento populacional.

A equação diferencial que descreve esse modelo é dada por:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN \quad (2.13)$$

sendo  $a$  a taxa de natalidade e  $b$  a taxa de mortalidade, ambas consideradas constantes. Fazendo  $\alpha = a - b$  tem-se que

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N. \quad (2.14)$$

A solução dessa equação pode ser obtida através do método de separação de variáveis [3], como segue.

$$\frac{dN}{\alpha N} = dt \quad (2.15)$$

Integrando-se ambos os membros da eq. (2.15), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{N} dN &= \int dt \\
\frac{1}{\alpha} \ln(N) + C_1 &= t + C_2 \\
\ln(N) &= \alpha t + C \\
e^{\alpha t + C} &= N(t) \\
N(t) &= e^C e^{\alpha t} \\
N(t) &= C e^{\alpha t}, \tag{2.16}
\end{aligned}$$

mostrando que  $N(t)$  tem um comportamento exponencial. O método de separação de variáveis consiste em transformar equações do tipo

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \tag{2.17}$$

em equações da forma

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0 \tag{2.18}$$

Basicamente, esse método é aplicado em equações que apresentam um membro que pode ser escrito somente em função de uma variável e o outro membro somente em função da outra variável.

A partir dessa separação, é possível integrar cada membro da eq. (2.18) em relação a uma dessas variáveis:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx + \int \frac{g(y)}{G(y)}dy = C. \tag{2.19}$$

Observe que a integração de ambos os termos está acompanhada do acréscimo de uma constante de integração  $C$ .

A solução geral do modelo de crescimento exponencial significa que a constante  $C$  pode assumir quaisquer valores arbitrários, fazendo com que a equação diferencial tenha infinitas soluções. Para problemas específicos, utiliza-se as *condições iniciais*, que representam o valor da função para  $t = 0$ ,  $N(0) = k$ . Quando tem-se o valor das condições iniciais ou o valor da função em qualquer outro ponto, consegue-se obter a curva de uma solução específica que passa pelo ponto dado dentro a família de soluções. Para equações diferenciais lineares de primeira ordem, denomina-se este tipo de solução como *Solução Particular do Problema de Cauchy* [5], dado por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

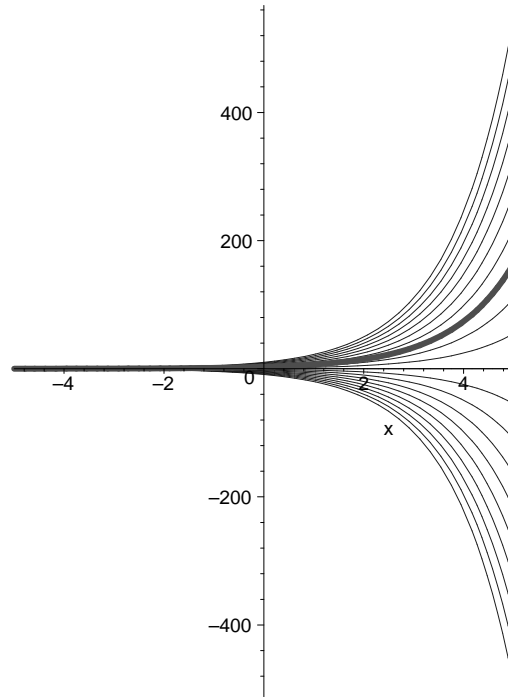


Figura 2.2: Família de soluções para a equação  $N(t) = Ce^{\alpha t}$ . A solução particular do problema para  $N(0) = 3$  e  $\alpha = 0.8$  está em destaque.

Por exemplo, se para o problema de crescimento exponencial dado pela eq.(2.14),  $N(0) = 3$ , tem-se

$$3 = Ce^{\alpha 0}$$

$$C = 3.$$

(2.20)

Utilizando-se esse valor na eq. (2.16), tem-se que a solução particular do problema será  $N(t) = 3e^{\alpha t}$ . Para  $\alpha = 0,8$ , a solução constitui-se em  $N(t) = 3e^{0.8t}$ . A Figura (2.2) mostra o conjunto de soluções incluindo a solução particular em destaque.

"Quando são conhecidos os valores de  $x(t)$  e/ou de suas derivadas em diferentes instantes, tem-se um *problema de condição de contorno*. Por exemplo, tem-se um problema de condição de con-

torno quando se deseja solucionar uma equação diferencial linear de segunda ordem, conhecendo-se  $x(t_0)$  e  $x(t_1)$ , ou seja, a partir dos valores de  $x(t)$  nos instantes  $t_0$  e  $t_1$ , ou  $x(t_0)$  e  $dx(t)/dt|_{t=t_1}$ ; ou  $dx(t)/dt|_{t=t_0}$  e  $dx(t)/dt|_{t=t_1}$ ” [6].

## 2.2.2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Uma equação diferencial linear de segunda ordem se apresenta na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0\end{aligned}\tag{2.21}$$

ou na forma geral

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x).\tag{2.22}$$

A eq.(2.22) será classificada como homogênea, se  $g(x) = 0$ . Caso contrário, será classificada como uma equação não-homogênea. Para analisar a solução da equação, aborda-se primeiramente o caso para uma equação homogênea. Considere o seguinte exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0.\tag{2.23}$$

Pode-se perceber que existe uma relação de igualdade entre a derivada segunda de uma função e a própria função. De acordo com as primeiras lições de cálculo [7], é possível concluir-se que somente a função exponencial poderia ter essa propriedade. Logo, uma solução particular da eq. (2.23) seria uma função exponencial. Considerando que  $y(x) = Ae^{rx}$  é uma solução da eq. (2.23), então

$$\begin{aligned}y'(x) &= Aree^{rx} \\ y''(x) &= Ar^2e^{rx}\end{aligned}$$

Substituindo-se as derivadas de  $y(x)$  em (2.23), temos

$$\begin{aligned}Ar^2e^{rx} - Ae^{rx} &= 0 \\ Ae^{rx}(r^2 - 1) &= 0\end{aligned}\tag{2.24}$$



Existem duas possibilidades para a solução da eq. (2.24):

$$r = 1 \text{ e } r = -1;$$

Para construir a solução geral, deve-se considerar as duas possibilidades.

Das propriedades das transformações lineares sabe-se que, considerando-se a derivada como um operador linear  $L$  [8],

$$\begin{aligned}L[g(t)] &= F_1(t) \\L[h(t)] &= F_2(t) \\L[g(t) + h(t)] &= L[g(t)] + L[h(t)] = F_1(t) + F_2(t)\end{aligned}\tag{2.25}$$

Utilizando-se essa propriedade, a solução geral da eq.(2.23) é dada pela combinação linear de duas funções exponenciais [8]

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},\tag{2.26}$$

com  $r_1 = 1$  e  $r_2 = -1$ . As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são encontradas através das condições iniciais.

Para encontrar a solução geral da equação cujos parâmetros são constantes, é necessário encontrar-se as raízes da chamada equação característica, que no caso da eq.(2.23) é dada por  $r^2 - 1$ . “Seu significado reside no fato de que, se  $r$  é uma raiz da equação polinomial, então  $y = e^{rt}$  é a solução da equação diferencial. A equação resultante é uma equação de segundo grau com coeficientes reais que podem ter raízes reais e distintas, reais e iguais ou complexas conjugadas.” [3]. Por exemplo, dada a equação:

$$\begin{aligned}4\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 3 &= 0 \\y(0) &= 2 \\y'(0) &= 1/2\end{aligned}\tag{2.27}$$

Se  $y = e^{rx}$ , tem-se então que a equação característica é

$$4r^2 - 8r + 3 = 0,$$

com raízes  $r_1 = 3/2$  e  $r_2 = 1/2$ . Logo, a solução geral é

$$y = c_1 e^{3x/2} + c_2 e^{x/2}. \quad (2.28)$$

Aplicando-se as condições iniciais tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 &= 1/2 \end{aligned}$$

Portanto, a eq. (2.27) tem como solução particular a eq.(2.29) cujo gráfico é representado na fig. 2.3.

$$y = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}, \quad (2.29)$$

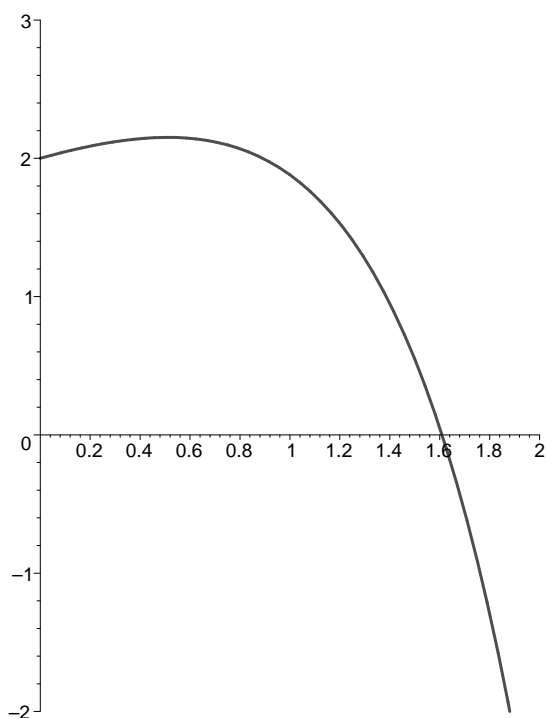


Figura 2.3: Solução da equação diferencial  $4y'' - 8y' + 3 = 0$ , com  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = 1/2$ .

### 2.2.3 Teorema da Existência e Unicidade das Soluções

Um teorema relevante no processo de solução de uma equação diferencial linear trata da *Existência e Unicidade de Soluções*. Esse teorema afirma que “dadas duas funções  $p$  e  $g$  contínuas em um intervalo

aberto contendo um ponto  $t = t_0$  tal que,

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (2.30)$$

é possível encontrar uma solução  $y = \phi(t)$ , sendo que essa solução é única [3]. Esse teorema diz que, ao encontrar uma solução para a equação diferencial linear, não é necessário buscar outras soluções que atendam as condições da equação. Essa vantagem é relevante quando tenta-se solucionar a equação diferencial manualmente ou mesmo quando se busca auxílios computacionais para fazê-lo. Entretanto, para as equações diferenciais não-lineares, não se verifica essa propriedade. É possível provar que existem soluções de uma equação diferencial não-linear. Entretanto, não é possível afirmar que essa solução seja única [3].

## 2.3 Sistemas de Equações Diferenciais

Considere um sistema composto por duas equações diferenciais:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2 \quad (2.31)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = cx_1 + dx_2 \quad (2.32)$$

Definindo um vetor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  e uma matriz  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , pode-se reescrever o sistema da seguinte forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathcal{A}\vec{x} \quad (2.33)$$

que representa a forma vetorial para o sistema dado. É possível transformar um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem de  $n$  equações em uma equação diferencial de ordem  $n$ . Para o exemplo anterior, derivando a primeira equação em relação a  $t$ , tem-se

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dx_2}{dt}. \quad (2.34)$$

Utilizando-se o valor de  $dx_2/dt$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a\frac{dx_1}{dt} + b(cx_1 + dx_2). \quad (2.35)$$

Na eq. (2.35), ainda sobra um termo dependente de  $x_2$  que pode ser substituído se o valor de  $x_2$  for isolado na eq. (2.31). Substituindo esse valor na eq.(2.35), obtém-se a eq. (2.36), que é uma equação de segunda ordem para  $x_1$ .

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + (d - a)\frac{dx_1}{dt} + (bc - da)x_1 = 0. \quad (2.36)$$

A solução geral da eq. (2.36), conforme visto na seção 2.2.2 é

$$x_1 = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (2.37)$$

Adotando uma notação vetorial, a solução será dada por:

$$\vec{x} = c_1 \vec{\xi}_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 \vec{\xi}_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (2.38)$$

sendo  $\alpha$  um autovalor e  $\vec{\xi}$  um autovetor associado a matriz  $\mathcal{A}$ .

O produto de um *autovalor*, representado por uma constante  $\alpha$ , por um *autovetor*  $\vec{\xi}$  constitui um múltiplo de uma transformação linear  $\mathcal{A}$  aplicada a esse mesmo autovetor, ou seja [8],

$$\mathcal{A}\vec{\xi} = \alpha\vec{\xi}. \quad (2.39)$$

A partir da eq.(2.39), tem-se [8],

$$\det(A - \alpha I) = 0, \quad (2.40)$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ . Para o caso específico em questão, inicialmente calcula-se os autovalores  $\alpha$  da matriz  $\mathcal{A}$ .

$$\det \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\begin{vmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha^2 - \alpha(d + a) + ad - cb = 0 \quad (2.41)$$

Como o determinante acima é de segunda ordem, dois autovalores poderão ser encontrados,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , soluções da eq. (2.41). Conhecidos os autovalores, é possível encontrarem os autovetores da matriz, resolvendo a seguinte equação para cada valor de  $\alpha$ :

$$A\vec{\xi}_i = \alpha_i\vec{\xi}_i \quad (2.42)$$

Com os autovalores e autovetores da matriz calculados, é possível escrever a solução geral da equação diferencial, dada pela eq. (2.38).

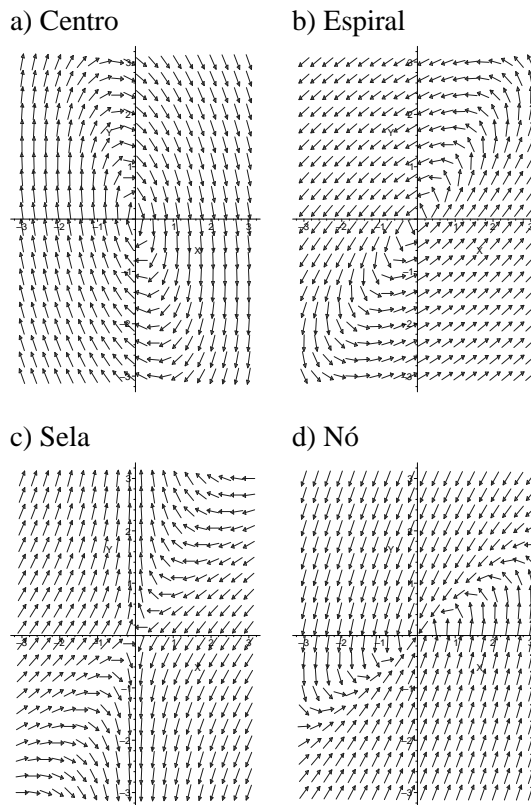
O ponto relevante acerca da solução dessa equação é que se trata de uma função vetorial paramétrica, que poderá desenhar um caminho ou uma trajetória percorrida por uma partícula com velocidade  $dx/dt$  em um espaço cujos eixos representam cada componente do sistema  $x_1$  e  $x_2$ . Este espaço é chamado de espaço de fase do sistema, e quando existe uma trajetória traçada através da solução do sistema nesse espaço, ele passa a ser chamado de retrato de fase [3].

A estabilidade do sistema será definida em função de seus autovalores. A Tabela 2.1 mostra todos os tipos de soluções de equilíbrio ou ponto crítico para cada tipo de autovalor.

Tabela 2.1: Classificação dos diferentes pontos críticos para um sistema linear.

| Estabilidade de Sistemas Lineares       |                         |                          |
|---|-------------------------|--------------------------|
| Autovalores                             | Tipo de Ponto Crítico   | Estabilidade             |
| $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$               | Nó                      | Instável                 |
| $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$               | Nó                      | Assintoticamente estável |
| $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$               | Ponto de Sela           | Instável                 |
| $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$               | Nó Próprio ou Impróprio | Instável                 |
| $\alpha_1 = \alpha_2 < 0$               | Nó Próprio ou Impróprio | Assintoticamente estável |
| $\alpha_1, \alpha_2 = \lambda \pm i\mu$ | Ponto Espiral           |                          |
| $\lambda > 0$                           |                         | Instável                 |
| $\lambda < 0$                           |                         | Assintoticamente estável |
| $\alpha_1 = i\mu, \alpha_2 = -i\mu$     | Centro                  | estável                  |

Alguns exemplos de pontos críticos que estão expostos na Tabela 2.1 são representados abaixo:



## 2.4 Estabilidade

De acordo com a Tabela 2.1 o tipo de comportamento do sistema no seu estado estacionário depende dos seus autovalores e dos seus autovetores. O ponto de estabilidade de um sistema pode ser classificado como instável, estável ou assintoticamente estável. Para melhor elucidar esses conceitos, considere uma partícula situada inicialmente no ponto A, conforme Figura 2.4.

Considere que o ponto A seja um ponto de equilíbrio do sistema onde a variação da posição em relação ao tempo é nula. No instante inicial do sistema, tem-se da Figura 2.4 que  $x(0) = x(b) = A$ ,  $b \rightarrow \infty$ . O ponto onde  $x(b) = A$  é classificado como instável, pois dada uma pequena perturbação  $x^* = A + \delta$ ,  $|\delta| \ll 0$ , esta será suficiente para retirar o sistema desse ponto de equilíbrio, fazendo com que a partícula se afaste do ponto A.

O sistema por sua vez pode migrar para um ponto estável ou assintoticamente estável ou tender ao infinito.

Considere agora um sistema dissipativo levando em consideração uma força de atrito não desprezível. Dada uma pequena perturbação no sistema da Figura 2.6, através da aplicação de uma força no sentido de B, a partícula oscilará em torno do ponto B e, quando  $t \rightarrow \infty$ , estará centrada no ponto

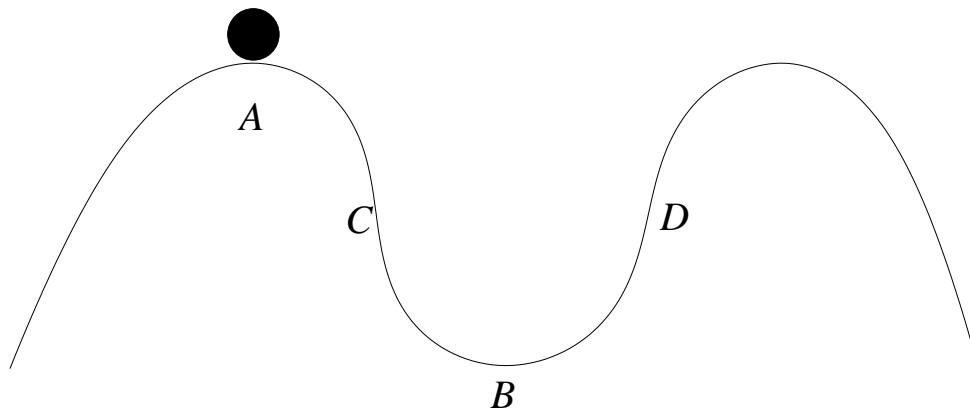


Figura 2.4: Representação esquemática do instante inicial de um sistema. A partícula encontra-se inicialmente no ponto A, de equilíbrio instável.

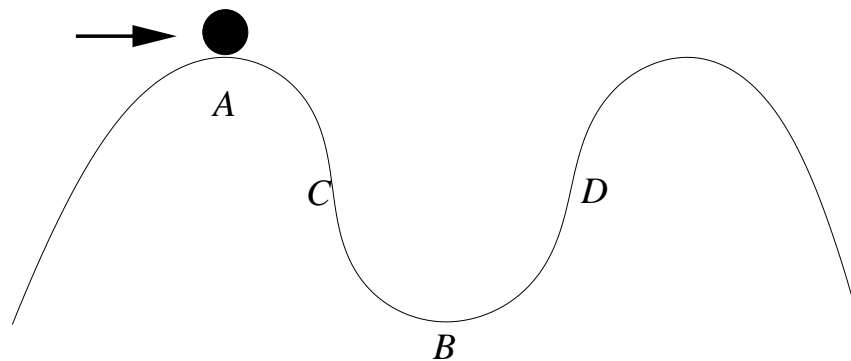


Figura 2.5: Dada uma pequena perturbação no sistema é possível retirar-se a partícula do seu estado de equilíbrio.

B.

Esse tipo de solução de equilíbrio é denominado assintoticamente estável. Um sistema localizado em seu ponto assintoticamente estável sempre retorna ao mesmo ponto caso haja uma perturbação.

Entretanto, se o sistema for conservativo, uma perturbação do sistema no ponto B, fará com que a partícula fique oscilando em torno de B atingindo os pontos máximos C e D quando  $t \rightarrow \infty$ . Este tipo de solução de equilíbrio é classificado como estável. Esse tipo de estabilidade está associado ao aparecimento de trajetórias fechadas no retrato de fase. Cada trajetória é denominada órbita. Logo, se o sistema se apresenta em uma órbita que contém o ponto  $(x, y)$  e recebe uma perturbação  $(x^*, y^*)$ , ele passará a oscilar em torno da órbita que possui o ponto  $(x + x^*, y + y^*)$ .

A essas soluções estáveis do sistema dá-se o nome de *atrator* do sistema. Um sistema pode possuir mais de um atrator, cada um apresentando um tipo de estabilidade.

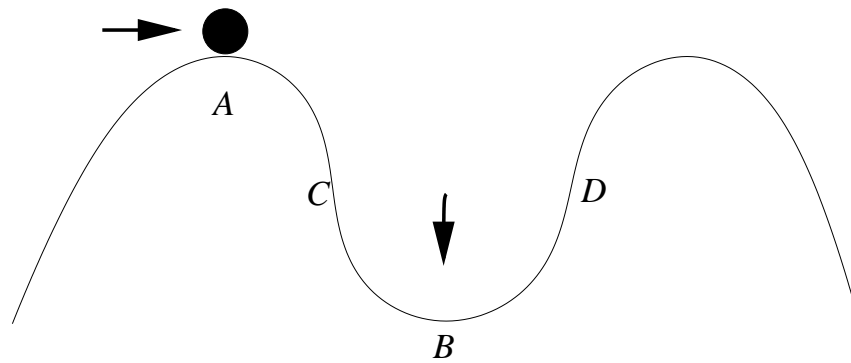


Figura 2.6: O ponto B representa um ponto de equilíbrio estável do sistema, também chamado de *atrator* do sistema.

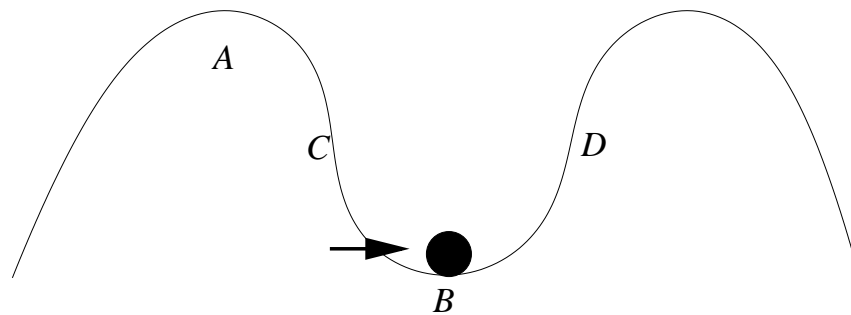


Figura 2.7: Ao receber uma perturbação a partir do ponto B, a partícula poderá retornar ao ponto de origem, ou poderá oscilar em torno de uma trajetória próxima do ponto B, dependendo das características do sistema.

## 2.5 Equações Diferenciais Parciais

As equações diferenciais tratadas nas seções anteriores relacionavam apenas funções de uma única variável. Entretanto, os sistemas físicos, em sua maioria, dependem de duas ou mais variáveis, sendo espaço e tempo as mais comuns.

As equações diferenciais parciais exigem métodos de solução muito mais complexos do que as equações diferenciais ordinárias, sendo que muitos desses métodos não são exatos, o que faz com que as equações diferenciais parciais sejam alvo de muitas pesquisas na atualidade.

Junto com o estudo das equações diferenciais parciais, surge um novo tipo de problema, muito comum em sistemas físicos. Dada uma equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t), \quad (2.43)$$



tem-se que as condições iniciais do problema são dadas por:

$$y(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = y'_0$$

Observe que as condições iniciais apresentam o valor da função e o valor da derivada da função em um mesmo ponto  $t_0$ . Entretanto, muitos problemas trazem informações sobre a função em pontos diferentes. Essas informações são classificadas como condições de contorno. Para a eq. (2.43) tem-se que as condições de contorno são dadas por:

$$y(\alpha) = y_0$$

$$y(\beta) = y_1$$

Em sistemas físicos, as condições de contorno se referem ao comportamento que o sistema tem em suas fronteiras ou extremidades, para todo valor de  $t$ .

Para modelar um sistema utilizando equações diferenciais parciais, é necessário ter a equação que descreve o sistema, juntamente com as condições de contorno e/ou as condições iniciais.

Um exemplo clássico tratado no estudo de equações diferenciais parciais é o problema da difusão de calor. Nesse problema, considere uma barra de metal homogênea de comprimento 1, com espessura e largura desprezíveis. A função  $u(x, t)$  determina a temperatura da barra em um ponto  $x$  em um instante  $t$ . Considere para este problema que a barra está isolada termicamente em suas laterais e que só é possível troca de calor nas extremidades, no sentido do comprimento da barra. O modelo é descrito pela seguinte equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 u, \quad (2.44)$$

onde  $\nabla^2$  é chamado *operador laplaciano*. Esse operador tem a forma [4]

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.45)$$

Quando aplicado sobre  $\phi(x, y, z)$ , o operador laplaciano produz a função:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.46)$$

Como existe troca de calor somente no sentido do comprimento, a equação pode ser reescrita na forma unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.47)$$

onde  $\alpha$  é a constante conhecida como *difusividade térmica*, característica do material que compõe a barra.

As condições de contorno descrevem a temperatura da barra nas extremidades. No problema dado pela eq. (2.47), a temperatura das extremidades da barra é fixa e igual a zero, logo:

$$u(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = 0$$

A distribuição inicial de calor é dada por um função  $\phi(x)$ ,

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (2.48)$$

O método de solução mais comum de uma equação diferencial parcial é o método de separação de variáveis [9]. Este método consiste em supor que a função  $u(x, t)$  é formada pelo produto de duas funções de uma variável, uma dependendo somente do espaço e outra dependendo somente do tempo.

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.49)$$

Realizando a substituição da eq. (2.49) na eq. (2.47), tem-se a seguinte relação:

$$\alpha^2 \frac{d^2 X}{dx^2} T = X \frac{dT}{dt} \quad (2.50)$$

Separando as funções dependentes de cada variável em cada lado da equação, obtêm-se

$$\frac{d^2 X/dx^2}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{dT/dt}{T} \quad (2.51)$$

Note que agora um termo da equação depende exclusivamente do espaço, enquanto o outro termo depende exclusivamente do tempo. Como ambos os termos dependem de variáveis diferentes, mas obedecem a uma igualdade, é possível adicionar à relação de proporcionalidade uma constante  $k$

$$\frac{d^2X/dx}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{dT/dt}{T} = k. \quad (2.52)$$

A partir dessa relação, pode-se construir o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dX^2}{dx^2} - kX &= 0 \\ \frac{dT}{dt} - \alpha^2 kT &= 0 \end{aligned}$$

Com isso, uma equação diferencial parcial é transformada em duas equações diferenciais ordinárias.

Para que a função  $T(t)$  não vá a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , a seguinte transformação é feita:

$$k = -\lambda^2$$

obtendo-se,

$$\frac{dX^2}{dx^2} + \lambda^2 x = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{dT}{dt} + \alpha^2 \lambda^2 T = 0 \quad (2.54)$$

A eq. (2.54) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, obtendo-se a seguinte solução:

$$T(t) = Ce^{-(\alpha\lambda)^2 t} \quad (2.55)$$

A eq. (2.53) pode ser resolvida fazendo-se:

$$X = e^{rx}, \quad (2.56)$$

e obtendo-se a equação característica

$$r^2 + \lambda^2 = 0, \quad (2.57)$$

que possui as seguintes soluções:

$$r_1 = +\lambda i$$

$$r_2 = -\lambda i$$

Dessa forma, a solução geral da eq.(2.53) é dada por:

$$X(x) = Ae^{\lambda xi} + Be^{-\lambda xi}, \quad (2.58)$$

que pode ser reescrita na forma de senos e cossenos:

$$X(x) = A' \text{sen}(\lambda x) + B' \text{cos}(\lambda x). \quad (2.59)$$

Logo, a solução geral da equação diferencial parcial dada por (2.47) pode ser escrita na forma:

$$u(x, t) = e^{-(\alpha\lambda)^2 t} [D \text{sen}(\lambda x) + E \text{cos}(\lambda x)] \quad (2.60)$$

Para encontrar a solução particular do problema é necessário aplicar as condições de contorno e as condições iniciais à solução geral. Usando, inicialmente, a condição  $u(0, t) = 0$  em (2.60) tem-se:

$$0 = e^{-(\alpha\lambda)^2 t} [D \text{sen}(0) + E \text{cos}(0)] \quad (2.61)$$

$$0 = E e^{-(\alpha\lambda)^2 t}$$

$$0 = E$$

Em seguida, utiliza-se o valor encontrado de E para encontrar o valor de D, aplicando-se a segunda condição de contorno,  $u(1, t) = 0$ .

$$0 = e^{-(\alpha\lambda)^2 t} [D \text{sen}(\lambda) + 0 \text{cos}(\lambda)]$$

$$0 = e^{-(\alpha\lambda)^2 t} [D \text{sen}(\lambda)]$$

$$0 = D e^{-(\alpha\lambda)^2 t} \text{sen}(\lambda) \quad (2.62)$$

Na eq. (2.62), o termo exponencial nunca assume o valor zero. Logo, a raiz dessa equação é dada pela raiz de  $\text{sen}(\lambda) = 0$ , o que resulta em

$$\lambda = \pm n\pi, n = 1, 2, 3... \quad (2.63)$$

A raiz dessa função é dada por infinitas possibilidades. Logo, a solução geral da eq. (2.47) deve ser escrita na forma de uma combinação linear de cada uma dessas possibilidades. A equação passa a ser escrita na forma de um somatório onde cada índice representa uma possibilidade da eq. (2.63), e cada  $D_n$  representa um coeficiente da combinação linear.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \text{sen}(n\pi x). \quad (2.64)$$

Em seguida, é necessário aplicar as condições iniciais  $u(x, 0) = \phi(x)$ .

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(n\pi\alpha)^2 0} \text{sen}(n\pi x) = \phi(x).$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{sen}(n\pi x).$$

Essa solução é simplesmente uma série de Fourier [10], onde seus coeficientes são dados por:

$$\frac{2}{L} \int_0^1 \phi(x) \text{sen}(n\pi x) dx = \frac{2}{L} \int_0^1 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{sen}(n\pi x) \right] \text{sen}(m\pi x) dx \quad (2.65)$$

$$\int_0^1 \phi(x) \text{sen}(n\pi x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^1 \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(m\pi x) dx \quad (2.66)$$

Para essa última equação, os únicos valores de  $m$  e  $n$  onde a integral não é nula é quando  $n = m$ , sendo que nessa situação a integral vale  $1/2$ .

$$\int_0^1 \phi(x) \text{sen}(n\pi x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^1 \text{sen}^2(m\pi x) dx$$

$$\int_0^1 \phi(x) \text{sen}(n\pi x) dx = \frac{D_m}{2}$$

$$D_m = 2 \int_0^1 \phi(x) \text{sen}(m\pi x) dx \quad (2.67)$$

A eq. (2.64) juntamente com a eq. (2.67) resultam na solução particular da eq. (2.47).

## 2.6 Equações Diferenciais Não-Lineares

Na modelagem de sistemas físicos reais, percebe-se que muitos sistemas não apresentam um comportamento linear. Por exemplo, o consumo de combustível de um automóvel de passeio não é uma

função linear da velocidade, mas apresenta um ponto mínimo para uma velocidade constante em torno de  $80\text{km/h}$  [6].

Muitos modelos não-lineares não apresentam solução analítica, devido ao fato de não se conhecerem métodos para solucionar equações não-lineares. Entretanto, algumas *técnicas de análise* são utilizadas para prever o comportamento de um sistema não linear em regiões muito próximas de seus pontos de equilíbrio. Esse processo é chamado de *linearização* e consiste em aproximações lineares utilizando-se a série de Taylor.

Considere a eq.(2.68):

$$\frac{dN}{dt} = f(N), \quad (2.68)$$

onde  $f(N)$  é uma equação não-linear. Seus pontos de equilíbrio são encontrados fazendo-se  $dN/dt = 0$ . Conseqüentemente,  $f(N) = 0$  tem como solução o ponto  $N^*$ . Após encontradas as soluções de equilíbrio, define-se uma nova função  $n(t)$  que relaciona a distância da trajetória com relação ao ponto  $N^*$ .

$$\begin{aligned} n(t) &\equiv N(t) - N^*, |n(t)| \ll 1 \\ N(t) &\equiv N^* + n(t), \end{aligned} \quad (2.69)$$

sendo  $N^*$  uma constante. Então:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dN}{dt} \quad (2.70)$$

Substituindo (2.70) em (2.68),

$$\frac{dn}{dt} = f(N(t)) \quad (2.71)$$

$$\frac{dn}{dt} = f(N^* + n(t)) \quad (2.72)$$

Realizando a expansão em série de Taylor para  $f(N^* + n(t))$  em torno de  $n(t)$

$$f(N) \simeq f(N^*) + f'(N^*)(N - N^*) + f''(N^*)\frac{(N - N^*)^2}{2!} + f'''(N^*)\frac{(N - N^*)^3}{3!} + \dots$$

$$f(N) \simeq f(N^*) + f'(N^*)n(t) + f''(N^*)\frac{n(t)^2}{2!} + f'''(N^*)\frac{n(t)^3}{3!} + \dots$$

Para essa série, somente é interessante a aproximação linear, pois  $|n(t)| \ll 1$ . Visto que  $n(t) \rightarrow 0$ , desconsidera-se os termos superiores ao termo linear.

No ponto crítico, tem-se  $f(N^*) = 0$  e substituindo na série, tem-se

$$f(N) = f'(N^*)n(t) \quad (2.73)$$

Substituindo (2.73) em (2.71), obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dn}{dt} = f'(N^*)n(t), \quad (2.74)$$

que, de acordo com a seção 2.2.1, tem como solução

$$n(t) \propto e^{f'(N^*)t}. \quad (2.75)$$

Logo, a função da distância é escrita em termos de uma exponencial do valor da derivada da função no ponto de equilíbrio. Se  $f'(N^*) < 0$ , a distância  $n(t) \rightarrow 0$ . Com isso, o ponto de equilíbrio é classificado como assintoticamente estável, pois o sistema retornará a ele após a perturbação,  $N(t) \rightarrow N^*$ .

Se  $f'(N^*) > 0$  a função de distância tende a  $+\infty$  ou  $-\infty$ , fazendo com que  $N(t) \rightarrow +\infty$  ou  $N(t) \rightarrow -\infty$ . Consequentemente, o ponto  $N^*$  é um ponto instável, pois dada uma pequena perturbação, o sistema tenderá ao infinito ou buscará um outro ponto de equilíbrio estável. Caso  $f'(N^*) = 0$ , é necessário considerar-se termos de ordem superior na expansão da função na série de Taylor.

A Figura 2.8 considera uma função hipotética onde se pode avaliar a estabilidade dos pontos críticos de acordo com os sinais de sua derivada.

Suponha que a função esteja definida apenas para  $N > 0$ . As setas indicam a estabilidade do ponto. Se as setas divergem, o ponto é classificado como instável. Se o sistema estiver no ponto  $N_1$  e receber uma perturbação  $\delta$ , tal que,  $N_1 < \delta < N_3$ , o sistema irá buscar o ponto estável  $N_2$ . Caso  $\delta > N_3$ , o sistema irá buscar o ponto  $N_4$ , pois este também é um ponto estável do sistema. Se o sistema se encontrar em  $N_2$  e receber uma perturbação tal que,  $N_1 < \delta < N_3$ , o sistema irá retornar ao ponto  $N_2$ .

Este método pode ser estendido a casos de mais de uma dimensão. Considere um sistema de duas equações não-lineares:

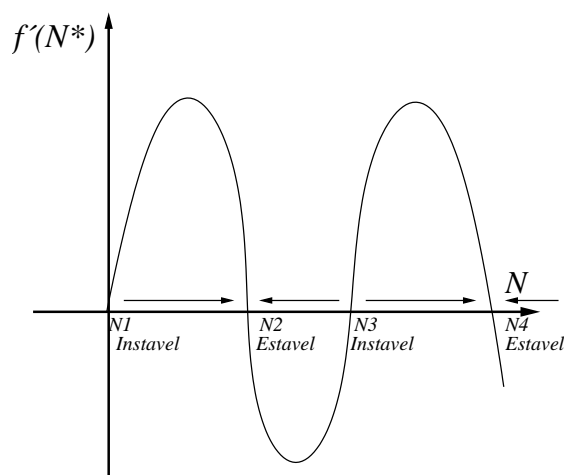


Figura 2.8: Classificação dos pontos de equilíbrio de acordo com o sinal da derivada. Se a derivada da função no ponto é positiva, simbolicamente ela recebe uma seta para a direita. Caso contrário, ela recebe uma seta para a esquerda. Se as setas convergem ao ponto, este é classificado como estável. Caso contrário, ele é classificado como instável. As setas indicam a tendência de aproximação e afastamento do ponto.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}$$

Igualando as duas derivadas a zero e resolvendo o sistema, tem-se que um ponto de equilíbrio do sistema é  $P = (x^*, y^*)$ . Expandindo cada equação e considerando apenas a aproximação linear em séries de potência, tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = f(x^*, y^*) + f_x(x^*)(x - x^*) + f_y(y^*)(y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = g(x^*, y^*) + g_x(x^*)(x - x^*) + g_y(y^*)(y - y^*)\end{aligned}$$

Definindo-se as equações de distância,

$$\begin{aligned}\bar{X}(t) &= x(t) - x^* \\ \bar{Y}(t) &= y(t) - y^*,\end{aligned}$$



e repetindo o processo anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{X}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\bar{Y}}{dt} &= \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

Como consequência da translação, tem-se:

$$\begin{aligned}f(x^*, y^*) &= 0 \\ g(x^*, y^*) &= 0.\end{aligned}\tag{2.76}$$

Desconsiderando os termos superiores e aplicando os valores dados pela eq.(2.76):

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{X}}{dt} &= f_x(P)\bar{X} + f_y(P)\bar{Y} \\ \frac{d\bar{Y}}{dt} &= g_x(P)\bar{X} + g_y(P)\bar{Y}\end{aligned}$$

Esse sistema pode ser escrito na forma matricial,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}\tag{2.77}$$

onde a matriz de coeficientes é denominada matriz jacobiana. Essa matriz deve ser aplicada nos pontos de equilíbrio a fim de se encontrar a expressão que determina a estabilidade do sistema, através do método de resolução de sistemas de equações apresentados na seção 2.3.

Uma consideração relevante a ser feita em relação à técnica de análise de modelos não-lineares é sobre o *Teorema de Hartman and Grobman*. Segundo esse teorema, um sistema não-linear de dimensão  $n$  apresenta um comportamento equivalente ao sistema linear correspondente, desde que todos os autovalores calculados a partir da versão linearizada das equações originais tenham a parte real não-nula [6].

## 2.7 Técnicas de Análise de Equações Diferenciais

Como citado anteriormente, no trabalho de modelagem matemática, pode surgir uma grande variedade de equações diferenciais. Entretanto, existem várias formas de analisar o comportamento das equações

diferenciais sem que, necessariamente, se encontre a sua solução analítica da equação diferencial. Segundo Monteiro [6], existem 3 tipos de técnicas que podem ser utilizadas para analisar um modelo matemático:

- **Técnica analítica:** Integram-se as equações, determinando a solução em termos de fórmulas gerais;

*Vantagem:* obtém-se fórmulas que valem para quaisquer condições iniciais e quaisquer valores dos parâmetros. Assim, de posse dessas fórmulas, pode-se escrever qualquer solução possível para esse sistema: basta substituir os valores dos parâmetros e das condições iniciais escolhidas. Novas escolhas não obrigam a uma nova integração das equações originais;

*Desvantagem:* nem sempre é possível se determinar tais fórmulas (ou melhor, quase nunca a integração analítica é factível);

- **Técnica Numérica:** Integram-se numericamente as equações, calculando-se valores para as variáveis dependentes  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  em pontos pré-selecionados da variável independente  $t$ . Assim, constrói-se uma tabela com  $n + 1$  colunas, sendo  $n$  colunas para as variáveis dependentes  $x_j (j = 1, \dots, n)$  e uma coluna para a variável independente  $t$ . Cada linha dessa tabela é formada pelo valores de  $x$  num determinado instante  $t$ ;

*Vantagem:* grande parte do trabalho é feito pelo computador;

*Desvantagem:* a solução calculada é aproximada e só é válida para a situação calculada, ou seja, vale apenas para aqueles valores de condições iniciais e de parâmetros usados na integração. Quando se altera algum desses valores, é necessário integrar novamente as equações do sistema;

- **Técnica Qualitativa:** através de cálculos analíticos relativamente simples, obtém-se pistas de como o sistema evolui. Essa técnica usa a descrição das variáveis de estado e seus resultados são representados no espaço de estados, também chamado de espaço de fase;

*Vantagem:* os cálculos analíticos realizados são, em geral, mais simples do que aqueles necessários para uma integração analítica. Através desses cálculos, tem-se uma idéia sobre a evolução qualitativa do sistema. Basicamente, determinam-se as soluções assintóticas (os possíveis comportamentos do sistema quando  $t \rightarrow \infty$ ) e a estabilidade dessas soluções;

*Desvantagem:* parte da informação quantitativa é perdida. De fato, perde-se a informação

sobre o comportamento transiente do sistema, isto é, sobre o comportamento que o sistema apresenta antes de atingir um regime estacionário;

## Capítulo 3

# INTRODUÇÃO À ECOLOGIA DE POPULAÇÕES

### 3.1 Introdução

A interação de seres vivos que habitam espaços comuns e que se relacionam entre si é hoje objeto de vários estudos. Em ecologia, essas relações podem ser classificadas como harmônicas ou desarmônicas.

Em comunidades bióticas, encontram-se várias formas de interações entre os seres que as compõem. Essas interações podem ser classificadas de acordo com o tipo de dependência que eles têm entre si. As relações harmônicas são as relações em que ambos os indivíduos se beneficiam, ou apenas um deles se beneficia sem causar prejuízo ao outro. Por exemplo, nas sociedades de abelhas, existe um benefício mútuo, enquanto o tubarão não se beneficia e nem se prejudica em sua relação com a rêmora, onde o segundo ingere os restos de comida do primeiro em uma relação classificada como comensalismo. Nas relações desarmônicas, um dos indivíduos se beneficia com o prejuízo de outro, como é o caso do lince que caça a lebre para se alimentar ou a lombriga que parasita o cão [11].

Torna-se útil ressaltar que a classificação dessas interações não deve tomar o aspecto pejorativo da palavra, pois uma relação desarmônica não implica em um prejuízo para o meio ambiente.

Essas relações harmônicas/desarmônicas podem ocorrer com seres de mesma espécie ou de espécies distintas. Um exemplo de relação intra-específica (entre indivíduos de mesma espécie) é a relação de competição. Neste caso, dois indivíduos competem entre si em busca de alimento e um indivíduo obtém sucesso em prejuízo do outro. Logo, esta relação é considerada como desarmônica e

intra-específica. Por outro lado, é possível ter situações como a dos líquens, onde existe a associação necessária à sobrevivência de duas espécies distintas (relação inter-específica), fungos e algas, em que ambas se beneficiam. A esta relação se dá o nome de mutualismo [11].

### 3.2 O Modelo Presa-Predador

A relação de predação ocorre quando indivíduos de uma espécie precisam caçar indivíduos de outra espécie para obter energia. Essa relação tem um grande impacto no comportamento do número de indivíduos que compõe essas duas populações. Trabalhos pioneiros foram realizados por Alfred James Lotka (1925) e Vito Volterra (1926) com o objetivo de analisar o comportamento de duas espécies interagentes que coabitam a mesma região [11].

Neste modelo, o número de indivíduos da população de presas depende diretamente da quantidade de indivíduos predadores na região e vice-versa. A variação do número de indivíduos é representada esquematicamente na Figura 3.1.

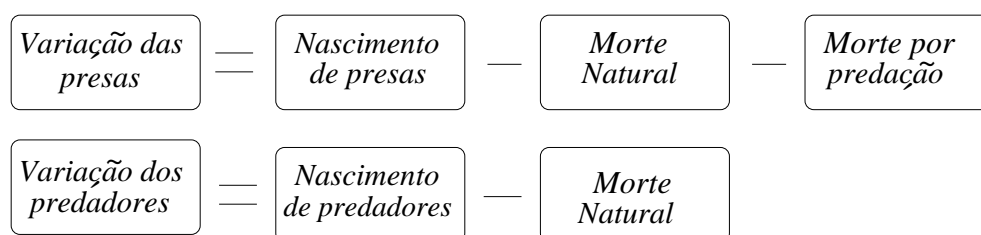


Figura 3.1: Esquema representativo da relação de predação envolvendo duas espécies.

A partir dessa idéia inicial, várias equações são propostas a fim de tornar o modelo mais realístico. Supondo-se que a alimentação da presa é abundante, não existem restrições para sua reprodução. Nesse caso, o Modelo de Lotka-Volterra apresenta um crescimento exponencial para a população de presas na ausência de predadores. De acordo com esse modelo, a variação do número de presas é proporcional ao tamanho da população e a um termo de interação envolvendo as duas populações. Este termo, que representa morte por predação, será negativo para a população de presas, pois há uma "retirada de energia" da população de presas, e é dependente da quantidade de predadores que há no sistema. Logo, se muitos predadores habitam a região, uma grande quantidade de energia será retirada da população de presas, ou seja, ocorrerão muitas predações. Este termo de interação também é dependente do número de presas disponíveis na região e de uma taxa de predação que está relacionada com a habilidade do predador caçar determinada presa.

Para a população de predadores, a equação diferencial possui um termo de interação positivo, pois existe um acréscimo de energia na população devido a predação. Este termo é acompanhado de uma constante que representa a porcentagem de energia coletada que é "transformada" em novos indivíduos. Logo, este primeiro termo representa a reprodução dos predadores. Nesta abordagem, os predadores não possuem outra forma de morte além da morte natural. O termo de morte da população é proporcional à uma constante  $\delta$  e ao número de indivíduos. Neste caso, se a população de presas for nula, a população de predadores tende a decrescer exponencialmente, indo a extinção.

Se  $N(t)$  é a população de presas e  $P(t)$  a população de predadores em um instante  $t$ , então o modelo é dado pelas seguintes equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \alpha N - \beta NP \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma \beta NP - \delta P\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $\alpha$  é a taxa intrínseca de crescimento,  $\beta$  a probabilidade de sucesso de caça,  $\gamma$  é a taxa de transformação de energia em novos predadores e  $\delta$  é a taxa de mortalidade dos predadores.

Conforme tratado na seção 2, este modelo é não-linear. Logo, para este sistema, não é possível a obtenção de uma solução analítica geral. Entretanto, além dos métodos numéricos, é possível uma abordagem qualitativa sobre o comportamento das soluções, que pode substituir a informação quantitativa pormenorizada. Uma maneira de se obter informações sobre o comportamento é realizando uma análise em torno dos pontos de equilíbrio do sistema.

No entanto, o processo de manipulação e de análise das equações pode ser muito complicado devido a grande quantidade de parâmetros. Uma medida utilizada para minimizar este fato é transformar o sistema em um sistema *adimensional*. Este processo consiste em manipular as equações de forma a reduzir o número de constantes parâmetros sem a modificação das propriedades do sistema.

Adotando,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{N}{\alpha} \\
y &= \frac{\beta}{\alpha} P \\
\tau &= \alpha t \\
K &= \gamma \beta \\
C &= \frac{\delta}{\alpha}
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

pode-se reescrever a eq.(3.1) como:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= x - xy \\
\frac{dy}{d\tau} &= Kxy - Cy
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

Aplicando-se o processo de linearização demonstrado na seção 2.6, obtém-se o seguinte sistema vetorial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ Ky & Kx-C \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}
\tag{3.4}$$

A eq.(3.3) pode ser reescrita na forma vetorial,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathcal{A}\vec{x},
\tag{3.5}$$

onde  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}$  e  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ Ky & Kx-C \end{pmatrix}$ .

Para encontrar os estados de equilíbrio desse sistema, deve-se igualar as equações a zero, pois nesse estado a variação do sistema com o tempo é nula.

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \quad e \quad \frac{dy}{d\tau} = 0
\tag{3.6}$$

A partir da eq. (3.6) obtém-se

$$\begin{aligned}x(1-y) &= 0 \\y(Kx-C) &= 0\end{aligned}$$

Esse sistema possui dois pontos críticos distintos como soluções:

$$\begin{aligned}P_1 &= (0,0) \\P_2 &= \left(\frac{C}{K}, 1\right)\end{aligned}$$

O primeiro estado é obtido quando ambas as populações são nulas. Este estado pode ser considerado como uma solução trivial do sistema. O segundo estado de equilíbrio ocorre quando duas populações coabitam a região apresentando um comportamento oscilatório.

A fim de conhecer o tipo de estabilidade de cada estado, a matriz  $\mathcal{A}$  será aplicada em cada ponto de equilíbrio para se analisar os autovalores de cada solução de equilíbrio.

Para  $P_1$ , tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}$$

Conforme tratado na seção 2.6, é necessário calcular os autovalores da matriz  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -C$$

De acordo com a tabela 2.1, esse ponto é um ponto de sela instável - autovalores reais de sinais contrários.

Para  $P_2$ , tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -C/K \\ K & 0 \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Nesse caso, os autovalores da matriz  $\mathcal{A}$  são:



$$\begin{vmatrix} -\lambda & -C/K \\ K & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -i\sqrt{C}, \lambda_2 = i\sqrt{C}$$

Os autovalores para  $P_2$  são complexos e puramente imaginários. Portanto, de acordo com a tabela 2.1, esse ponto é estável e é do tipo centro. Para esse ponto de equilíbrio, as populações são oscilatórias e possuem uma diferença de fase entre si.

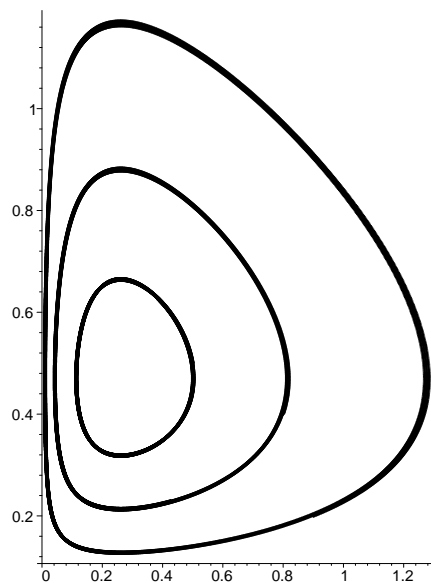


Figura 3.2: Plano de fase do Modelo Lotka-Volterra, composto por trajetória fechadas, onde cada trajetória depende das populações iniciais no sistema

Para o Modelo de Lotka-Volterra, o sistema poderá seguir uma trajetória fechada ou órbita de valores em torno do ponto crítico, que dependem das populações iniciais, como se pode ver na Figura 3.2. Isso significa que as soluções do sistema são periódicas ao longo do tempo. Cada uma das trajetórias na Figura 3.2 representa uma amplitude diferente assumida pelas séries temporais das populações. Cada trajetória foi construída utilizando-se o mesmo conjunto de parâmetros, porém com condições iniciais distintas. Com auxílio destes gráficos, é possível fazer algumas considerações sobre o sistema.

A série temporal da população predadora é atrasada em relação a série da população de presas, conforme pode-se observar na Figura 3.3. Começando em um estado no qual ambas populações, de presas e de predadores, são relativamente pequenas, há primeiro um aumento no número de presas, pois há poucos predadores. Então, a população de predadores, com comida abundante, também cresce.

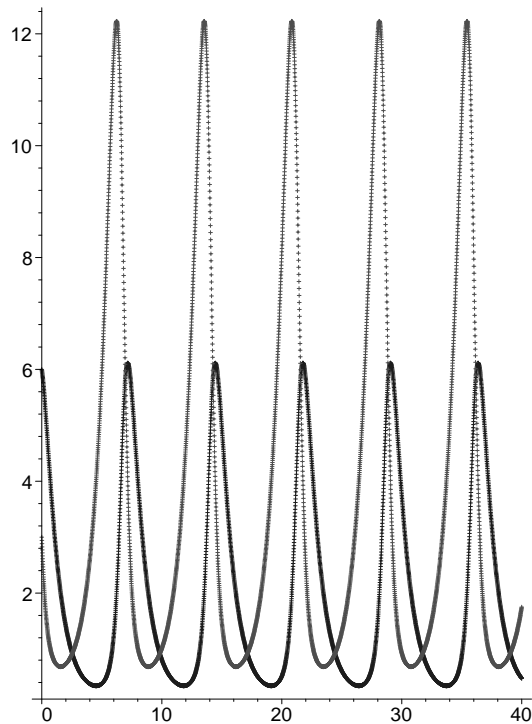


Figura 3.3: Séries temporais do Modelo Lotka-Volterra apresentando um comportamento oscilatório e periódico. A curva mais clara representa a população de presas, enquanto que a curva mais escura representa a população de predadores.

Isso aumenta a caça e a população de presas tende a diminuir. Finalmente, com uma disponibilidade menor de comida, a população de predadores também diminui e o ciclo continua [3].

Entretanto, essa abordagem do Modelo Lotka-Volterra não é muito realista. Este modelo prevê que as presas apresentam um crescimento exponencial na ausência de predadores. Logo, a população tende ao infinito quando  $t \rightarrow \infty$ . Entretanto, Pierre Verhulst(1850) supôs que uma população, vivendo em um determinado meio, deverá crescer até um *limite máximo sustentável* [5], isto é, ela tende a estabilizar devido a disponibilidade limitada de recursos. A equação incorpora a queda de crescimento da população, que deve estar sujeita a um fator inibidor de crescimento. De acordo com o modelo proposto por Verhulst a taxa de morte natural considerada é proporcional ao quadrado do número de indivíduos presentes em um dado instante. O modelo populacional de Verhulst é dado pela equação,

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \mu N^2 \quad (3.8)$$

denominada função logística. Uma população padrão poderia ser representada por este modelo, sendo que esta população poderia crescer até um limite, que é chamado de capacidade suporte do

ambiente, alcançando a estabilidade.

Combinando a eq. (3.8) com a eq. (3.1), o modelo Lotka-Volterra obedecerá ao seguinte sistema de equações diferenciais,

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \alpha N - \mu N^2 - \beta NP \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma \beta NP - \delta P\end{aligned}\tag{3.9}$$

onde  $\mu$  é a taxa de mortalidade. É importante realizar a análise em torno do ponto de equilíbrio nesse novo modelo para observar se a mudança realizada afeta significativamente os resultados anteriores.

Com as mudanças de variáveis a seguir,

$$\begin{aligned}x &= \frac{\mu}{\alpha} N \\ y &= \frac{\beta}{\alpha} P \\ \tau &= \alpha t \\ K &= \frac{\gamma \beta}{\mu} \\ C &= \frac{\delta}{\alpha}\end{aligned}$$

obtém-se o sistema de equações adimensionais definido por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= x[(1-x) - y] = f(x, y) \\ \frac{dy}{d\tau} &= y(Kx - C) = g(x, y)\end{aligned}$$

Aplicando-se o processo de linearização demonstrado na seção 2.6, obtém-se o seguinte sistema:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ ky & Kx - C \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}.$$

Fazendo,

$$\begin{aligned}x [(1-x) - y] &= 0 \\ y [Kx - C] &= 0\end{aligned}$$

(3.10)

Tem-se que este sistema apresenta três estados de equilíbrio distintos,

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0) \\ P_2 &= (1, 0) \\ P_3 &= \left( \frac{C}{K}, 1 - \frac{C}{K} \right) \end{aligned}$$

O primeiro estado é obtido quando ambas as populações são nulas. O segundo estado é obtido quando a população de predadores se extingue e a população de presas é diferente de zero. O terceiro estado de equilíbrio ocorre quando as duas populações coabitam a região, apresentando um comportamento oscilatório.

A fim de conhecer o tipo de estabilidade de cada estado, a nova matriz  $\mathcal{A}$  será aplicada em cada ponto para se analisar os autovalores de cada solução de equilíbrio.

Para  $P_1$ , tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}$$

Conforme tratado no capítulo 1, é necessário calcular os autovalores da matriz  $A$ .

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -C$$

De acordo com a tabela 2.1,  $P_1$  é classificado como ponto de sela instável.

Para  $P_2$ , tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & K - C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}$$

Realizando os cálculos dos autovalores tem-se que,

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 0 & K - C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = K - C$$

A classificação desses pontos é dependente dos valores que as constantes podem assumir. Caso  $K < C$ , o autovalor será negativo. Logo, o estado de equilíbrio será um nó assintoticamente estável. Caso contrário, a solução de equilíbrio será um ponto de sela instável. Para o terceiro estado de equilíbrio, tem-se:

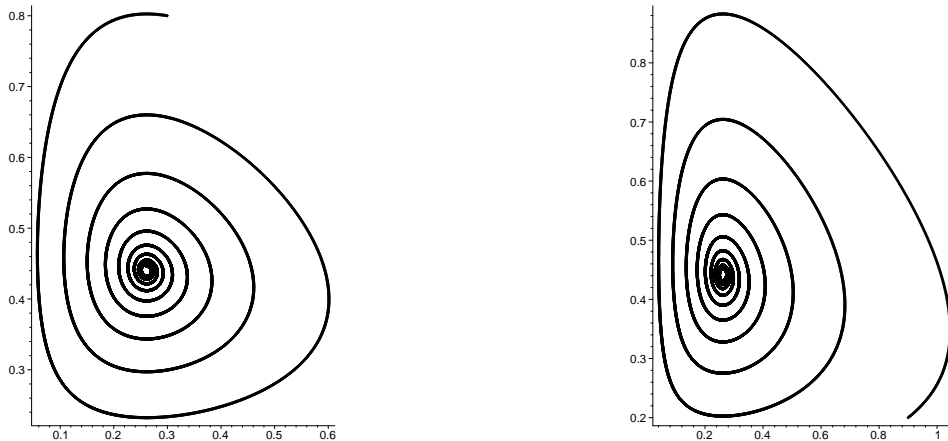
$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-C}{K} & \frac{-C}{K} \\ K - C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}$$

Neste caso, os autovalores são:

$$\begin{vmatrix} \frac{-C}{K} - \lambda & \frac{-C}{K} \\ K - C & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{-C}{K} \pm i\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{onde,} \quad \Delta = C^2 \left( \frac{1}{K^2} + \frac{4}{K} \right) - 4C$$

Com o acréscimo do termo não-linear ( $\mu N^2$ ) ao modelo de Lotka-Volterra, o ponto crítico tem seu valor alterado e se torna um ponto assintoticamente estável. Ele é um nó ou um ponto espiral, dependendo das constantes das equações diferenciais. Em qualquer dos casos, as trajetórias não são mais fechadas, como no modelo de Lotka-Volterra (Figura 3.2), mas se aproximam do ponto crítico quando  $t \rightarrow \infty$  [3]. Desse modo, as condições iniciais deixam de ser determinantes para o comportamento do sistema no estado de equilíbrio, pois grande parte das soluções terá seu estado de equilíbrio próximo ao ponto crítico, conforme as figuras a seguir:



Na série temporal, as populações apresentam comportamento oscilatório inicial. Entretanto, essas oscilações convergem para o ponto crítico quando  $t \rightarrow \infty$ , conforme pode ser visto na Figura 3.4.

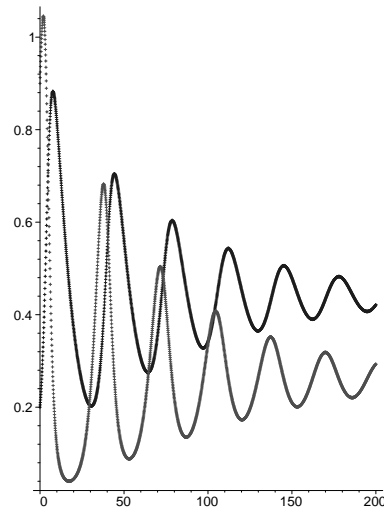


Figura 3.4: Séries temporais do modelo Lotka-Volterra utilizando o fator logístico. A curva mais clara representa a população de presas e a mais escura representa a população de predadores.

Observando a equação de autovalores, verifica-se que no limite em que  $K \rightarrow \infty$  a parte real dos autovalores na eq. (3.11) tende a *zero*. Altos valores para  $K$ , correspondem a valores de  $\mu$  muito próximos a zero, o que corresponde a desprezar o fator logístico. Neste caso, as trajetórias do modelo se aproximam às de Lotka-Volterra, no limite em que  $\mu$  tende a *zero*.

## Capítulo 4

# TÉCNICAS COMPUTACIONAIS

### 4.1 Métodos Numéricos

Conforme visto em seções anteriores, uma das técnicas utilizadas para analisar uma equação diferencial é o método numérico. Estes métodos têm como objetivo apresentar uma solução aproximada para a solução exata do problema. Em geral, esta ferramenta é mais utilizada na análise de equações diferenciais que não possuem soluções analíticas e, é o que mais demanda recursos computacionais.

Em modelagem matemática, o sistema pode ser classificado como contínuo ou discreto, dependendo da sua variável independente. “Um sistema é de tempo contínuo se o tempo  $t$  é um número real positivo, ou seja, se  $t \in \mathcal{R}_+$ . A evolução de um sistema contínuo é governada por uma ou mais equações diferenciais. [6].”

Todos os modelos apresentados até agora são sistemas de tempo contínuo.

Um sistema é considerado de tempo discreto se  $t$  é um número inteiro positivo, ou seja, se  $t \in \mathcal{Z}_+$ . A evolução de um sistema de tempo discreto é governada por uma ou mais equações de diferenças finitas, que é um tipo de equação que relaciona o valor de uma variável  $x \in \mathcal{R}$  no instante  $t$  a valores de  $x$  em outros instantes, tais como  $t + 1, t + 2, t - 2$  [6]. São exemplos de equações de diferenças finitas:

$$\begin{aligned}x_{t+1} - 2x_t &= 0 \\x_{t+2} - t^2x_t - t &= 0 \\x_{t+3} - 3x_{t+2} &= 0\end{aligned}$$

Estas equações contém relações de recorrência e são resolvidas por métodos de iterações a partir

das condições iniciais. Ambas as abordagens dependem do fenômeno que se deseja modelar. Por exemplo, para a modelagem da difusão de calor em uma barra é recomendado que se use equações diferenciais. Entretanto, se o objeto de estudo for uma população de insetos que permanece constante a maior parte do ano e que somente sofre alterações significativas no número de indivíduos na época de reprodução, a ferramenta mais apropriada para a modelagem é a equação de diferenças finitas. A época de reprodução poderia ser encarada como um marco pontual, pois uma simples interferência no sistema, durante essa época, poderia ser significativa para a perturbação ou a extinção da população.

É importante ressaltar que ambas ferramentas podem modelar os mesmos fenômenos. No entanto, quando uma equação diferencial é discretizada, ela pode simplificar o tratamento computacional nos casos em que existe necessidade de fazer alguma simulação computacional.

#### 4.1.1 Aproximações das derivadas por diferenças finitas

“A essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo. É esta discretização que torna finito o problema e, portanto, viabiliza sua solução por computadores.” [12]

“Seja  $x_0$  um número real qualquer e  $h$  um número positivo. Define-se malha de passo  $h$  associada a  $x_0$  como o conjunto de pontos

$$x_i = x_0 \pm ih, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Nos pontos dessa malha, serão calculadas as aproximações de uma função  $y(x)$ . De fato, a idéia geral do método de diferenças finitas é a discretização do domínio e a aproximação das derivadas de  $y(x)$  que aparecem na equação diferencial. Interessa, portanto, o cálculo aproximado das derivadas nos pontos da malha” [12].

O processo de discretização de uma equação diferencial tem como ponto inicial a série de Taylor. Esta série consiste em obter uma aproximação de uma função  $f$  em torno de uma vizinhança limitada de um ponto  $x_0$  [4]. A série é inicialmente definida por

$$P_n(x) = f(x) + f'(x)(x - x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^n(x)}{n!}(x - x_0)^n \quad (4.1)$$

que pode ser reescrita nas formas



$$y(x - h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) - \dots + \frac{h^n}{n!}y^n \quad (4.2)$$

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^n \quad (4.3)$$

onde  $h$  é a medida de vizinhança em relação ao ponto. Considerando apenas a aproximação linear da série, os termos de ordem superior podem ser agrupados em uma função de Erro.

As eqs. (4.2) e (4.3) descrevem a mesma aproximação. Entretanto, a eq.(4.2) considera  $x_0$  e um ponto anterior a  $x_0$ ,  $x_0 - h$ , conforme fig. 4.1 Essa aproximação é denominada regressiva:

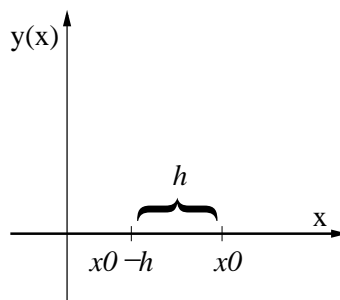


Figura 4.1: Representação gráfica da diferença regressiva

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x - h)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi) \quad (4.4)$$

Por outro lado, a série da eq.(4.3) considera um ponto  $x_0$  e um ponto posterior,  $x_0 + h$ , conforme a fig. 4.2. Tal aproximação dá origem a fórmula de diferença progressiva.

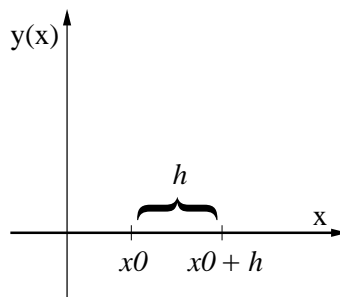


Figura 4.2: Representação gráfica da diferença progressiva

$$y'(x) = \frac{y(x + h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi) \quad (4.5)$$

### 4.1.2 Alguns Métodos Numéricos

Baseado na aproximação por diferença progressiva, Euler elaborou em 1768, um método numérico para aproximação de equações diferenciais chamado Método de Euler [12].

Considere a seguinte equação diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Pela definição de derivada, tem-se que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y). \quad (4.6)$$

$f(x, y)$  pode ser reescrita na forma de um limite de diferenças progressivas:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = f(x, y). \quad (4.7)$$

A aproximação feita pelo método de Euler consiste em considerar que, para valores muito pequenos de  $\Delta x$ , isto é, nas vizinhanças do ponto  $x$ , a eq.(4.7) pode ser aproximada por:

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \simeq f(x, y). \quad (4.8)$$

Essa idéia está relacionada ao conceito de derivada e variação instantânea. Logo, se  $\Delta x$  assume valores grandes a aproximação apresenta valores distantes dos valores exatos.

A eq. (4.8) representa uma aproximação para uma função de domínio contínuo. Para estender essa aproximação ao eixo de valores discretos considera-se um intervalo para  $x$  tal que  $a < x < b$ , onde  $b$  é uma constante positiva maior que  $a$ . O intervalo  $[a, b]$  é dividido em  $N$  partes iguais, cada uma com o comprimento  $h$ , formando um conjunto discreto com  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ ,  $R_{n+1} = x_i = a + ih; i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Aqui  $h = (b - a)/N$ .

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \simeq f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (4.9)$$

Seja  $y_i = y(x_i)$ . Então,  $y_0 = a$  e, em cada um dos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , a aproximação discretizada da equação diferencial é dada por:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (4.10)$$

Para exemplificar o processo, é apresentada a discretização para a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -y + x, \quad y(0) = 1 \quad (4.11)$$

Essa equação de primeira ordem e linear possui a seguinte solução exata:

$$y(x) = x - 1 + 2e^{-x} \quad (4.12)$$

Para aplicar o método de Euler, considere que

$$f(x, y) = -y + x \quad (4.13)$$

Aplicando a eq. (4.9) na eq. (4.13), tem-se a forma discretizada da eq.(4.11)

$$y_{i+1} = y_i + (-y_i + x_i)h, \quad y_0 = 1, \quad (4.14)$$

Para encontrar  $x_{i+1}$  temos que fazer  $x_{i+1} = x_i + h$ . Os cálculos serão feitos para  $h = 0.2$  e  $h = 0.1$ .

Os dados produzidos pelo método estão expostos na Tabela 4.1 juntamente com os valores exatos da função.

Tabela 4.1: Valores obtidos pelo método de Euler adotando os seguintes valores para  $h$ : 0.2 e 0.1. A última coluna apresenta os valores exatos da solução.

| Iteração | h = 0.2 | h = 0.1  | Exato    |
|----------|---------|----------|----------|
| $f(0)$   | 1       | 1        | 1        |
| $f(0.1)$ | –       | 0.9      | 0.909675 |
| $f(0.2)$ | 0.8     | 0.82     | 0.837462 |
| $f(0.3)$ | –       | 0.758    | 0.781636 |
| $f(0.4)$ | 0.68    | 0.7122   | 0.74064  |
| $f(0.5)$ | –       | 0.68098  | 0.713061 |
| $f(0.6)$ | 0.624   | 0.662882 | 0.697623 |
| $f(0.7)$ | –       | 0.656594 | 0.693171 |
| $f(0.8)$ | 0.6192  | 0.660934 | 0.698658 |
| $f(0.9)$ | –       | 0.674841 | 0.713139 |
| $f(1.0)$ | 0.65536 | 0.697357 | 0.735759 |

Através da análise dos resultados numéricos, pode-se observar que quanto menor for o valor assumido por  $h$ , mais os resultados se aproximam dos resultados exatos. Isso pode ser justificado lembrando que o erro para a aproximação linear progressiva é da ordem de  $h$ .

Para obter a fórmula geral da discretização de uma equação diferencial de segunda ordem, basta realizar a soma das eqs.(4.2) e (4.3), obtendo:

$$y''(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} \quad (4.15)$$

O método de Euler é o método mais simples de aproximação de equações diferenciais existente na literatura. Entretanto, para alguns modelos, este método não apresenta resultados próximos da solução exata, sendo necessário o desenvolvimento de algumas modificações com o objetivo de obter resultados mais próximos do exato.

Para se obter uma aproximação mais precisa, é realizada uma média dos valores das extremidades do intervalo  $y_n$  e  $y_{n+1}$ . Esta modificação tem o nome de *Método do Trapézio*, dada pela eq.(4.16), e fornece valores mais próximos dos valores exatos do que os métodos anteriores [12].

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]}{2} \quad (4.16)$$

Outro método utilizado é o método de *Runge-Kutta*. Este método consiste em uma média ponderada de valores de  $f(x, y)$  em pontos diferentes no intervalo  $t_n \ll t \ll t_{n+1}$  dada por [3]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6}, \quad (4.17)$$

onde,

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(x_n, y_n) \\ k_{n2} &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right) \\ k_{n3} &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right) \\ k_{n4} &= f(x_n + h, y_n + hk_{n3}) \end{aligned}$$

Um discussão relevante em torno da utilização dos métodos numéricos diz respeito ao erro. Quanto maior a ordem da função de erro, menor será a diferença entre a aproximação e o valor exato, visto que um número decimal menor que 1 elevado a potências cada vez maiores tem seu valor cada vez mais reduzido.

O método de Euler baseado em diferença progressiva apresenta uma função de erro da ordem de  $h$ , conforme visto no início da seção. Entretanto, o método de Runge-Kutta apresenta um função de erro da ordem de  $h^5$ , possuindo uma precisão maior. Para o método de Runge-Kutta, valores não muito pequenos de  $h$  apresentam boas aproximações e não possuem grandes diferenças percentuais dos valores obtidos para soluções onde  $h$  é bem pequeno, conforme grafico *a* na Figura 4.3 . Nesse gráfico, a estimativa da diferença percentual entre as duas soluções não ultrapassa a margem de 2% quando se adotam valores de  $h$  com uma ordem de grandeza de diferença ( $h = 0.02$  e  $h = 0.002$ ). Quando o mesmo procedimento é adotado no método de Euler, a estimativa da diferença se aproxima de 300%, em alguns pontos utilizando-se os mesmos valores de  $h$  adotados no método de Runge-Kutta, conforme pode ser visto no gráfico *b* da Figura 4.3.

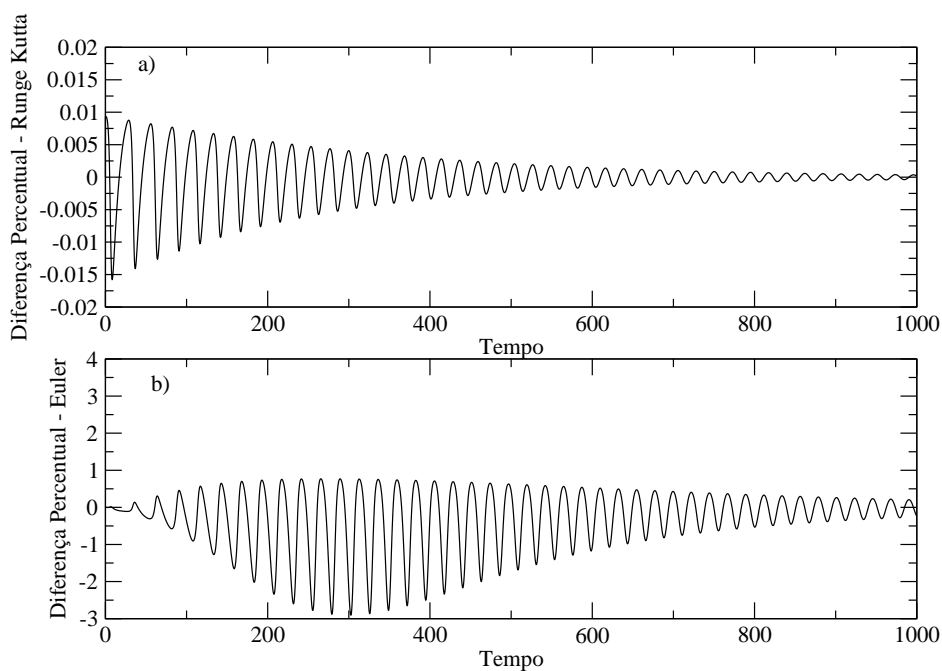


Figura 4.3: Estimativa da diferença percentual entre soluções calculadas adotando-se  $h = 0.02$  e  $h = 0.002$  para *a*) Método de Runge-Kutta e *b*) Método de Euler.

Essa propriedade tem um impacto direto na parte computacional do problema, pois os valores de  $h$  estão diretamente relacionados ao número de iterações necessárias para a convergência da solução. Quanto menor for o valor de  $h$ , maior será o número de iterações necessárias para solucionar a equação.

É possível estender o método de Euler para obter soluções de Equações Diferenciais Parciais. Para isso, é necessário estender a série de Taylor para funções com mais de uma variável.

$$\begin{aligned}
 y(x+h, t) &= y(x, t) + y_x(x, t)h + y_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} + \dots \\
 y(x-h, t) &= y(x, t) - y_x(x, t)h + y_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} + \dots \\
 y(x, t+k) &= y(x, t) + y_t(x, t)k + y_{tt}(x, y)\frac{k^2}{2!} + \dots \\
 y(x, t-k) &= y(x, t) - y_t(x, t)k + y_{tt}(x, y)\frac{k^2}{2!} + \dots
 \end{aligned}$$

Observe que as séries de Taylor foram expandidas ao redor do ponto considerando os deslocamentos de  $x$  e  $y$  de forma separada. Isso é justificado pelo uso de derivadas parciais, pois, quando existe o deslocamento em relação a uma variável, a outra variável permanece constante. Repetindo o processo realizado nos exemplos anteriores, tem-se:

$$\begin{aligned}
 y_x(x, t) &\simeq \frac{y(x+h, t) - y(x, t)}{h} \\
 y_{xx}(x, t) &\simeq \frac{y(x+h, t) - 2y(x, t) + y(x-h, t)}{h^2} \\
 y_t(x, t) &\simeq \frac{y(x, t+k) - y(x, t)}{k} \\
 y_{tt}(x, t) &\simeq \frac{y(x, t+k) - 2y(x, t) + y(x, t-k)}{k^2}
 \end{aligned}$$

## 4.2 Solução Numérica do Modelo Presa-Predador

Aplicando-se o método de Euler ao modelo presa-predador dado pela eq. (3.9), tem-se

$$\begin{aligned}
 N_{t+1} &= N_t + hf(N_t, P_t) \\
 P_{t+1} &= P_t + hg(N_t, P_t)
 \end{aligned}$$

obtendo:

$$\begin{aligned}
 N_{t+1} &= N_t + h(\alpha N_t - \mu N_t^2 - \beta N_t P_t) \\
 P_{t+1} &= P_t + h(\gamma \beta N_t P_t - \delta P_t)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Aplicando Runge-Kutta, tem-se

$$\begin{aligned}
N_{t+1} &= N_t + \frac{h}{6}(k_{1N} + 2k_{2N} + 2k_{3N} + k_{4N}) \\
P_{t+1} &= P_t + \frac{h}{6}(k_{1P} + 2k_{2P} + 2k_{3P} + k_{4P})
\end{aligned} \tag{4.19}$$

com

$$\begin{aligned}
k_{1N} &= f(N_t, P_t) \\
k_{1P} &= g(N_t, P_t) \\
k_{2N} &= f\left(N_t + \frac{h}{2}K_{1N}, P_t + \frac{h}{2}k_{1P}\right) \\
k_{2P} &= g\left(N_t + \frac{h}{2}K_{1N}, P_t + \frac{h}{2}k_{1P}\right) \\
k_{3N} &= f\left(N_t + \frac{h}{2}K_{2N}, P_t + \frac{h}{2}k_{2P}\right) \\
k_{3P} &= g\left(N_t + \frac{h}{2}K_{2N}, P_t + \frac{h}{2}k_{2P}\right) \\
k_{4N} &= f(N_t + hK_{3N}, P_t + hk_{3P}) \\
k_{4P} &= g(N_t + hK_{3N}, P_t + hk_{3P})
\end{aligned}$$

Conhecendo-se as condições iniciais do sistema,  $N_0$  e  $P_0$ , e usando-se as eqs. (4.18) e (4.19), pode-se implementar a solução numérica em um código computacional, utilizando-se diferentes valores para o tamanho do passo  $h$ . As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam soluções para  $h = 0.02$  e  $h = 0.002$ , respectivamente, para os dois métodos.

Pode-se observar que existem diferenças significativas entre os resultados obtidos com os dois métodos. A fig. 4.6 mostra a diferença percentual entre as soluções para cada valor de  $t$ , comparando-se os dois métodos.

De acordo com a Figura 4.4 e o gráfico *a* da Figura 4.6, os resultados alcançados pelos dois métodos são distintos e possuem uma estimativa de diferença que pode chegar a 400%. Essa diferença caiu consideravelmente quando as simulações foram realizadas usando-se  $h = 0.002$ , como mostrado na parte de *b* da Figura. 4.6. Entretanto, mesmo nesse caso, a diferença entre as duas aproximações cresce com  $t$ , chega a ultrapassar a margem de 10% e, logo depois, se estabiliza em torno de 5% quando as soluções se aproximam de seu estado estacionário. Como a função de erro de Runge-Kutta tem ordem superior à função de erro de Euler, é possível concluir que o método de Runge-Kutta possui uma melhor precisão e é o método mais recomendado quando se precisa ter um rigor maior sobre os

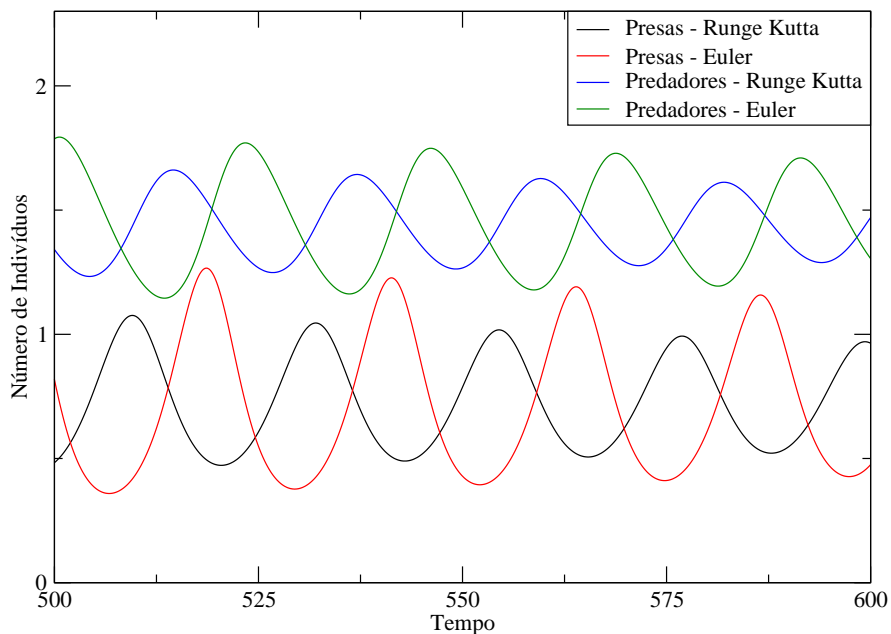


Figura 4.4: Solução numérica com  $h = 0.02$  adotando-se:  $\alpha = 0.8$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\beta = 0.55$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $N(0) = 0.5$ ,  $P(0) = 0.5$

resultados da equação diferencial. Entretanto, o método de Euler ainda pode ser usado quando se deseja fazer uma análise qualitativa das soluções da equação diferencial.

Baseado na Figura 4.3, observa-se que a diferença percentual entre as soluções obtidas por Runge-Kutta quando  $h = 0.02$  e  $h = 0.002$  é muito pequena. Logo, é possível a utilização de valores mais altos de  $h$ . Consequentemente, o número de iterações necessárias para o mesmo intervalo de tempo será menor, reduzindo o custo computacional da simulação.

Os resultados obtidos pela solução numérica utilizando os métodos de Runge-Kutta e Euler seguem as características expostas pela análise de autovalores do modelo na seção 3.2. As soluções apresentam comportamento oscilatório com a curva da população de presas adiantada em relação a curva da população de predadores, conforme Figura 4.5.



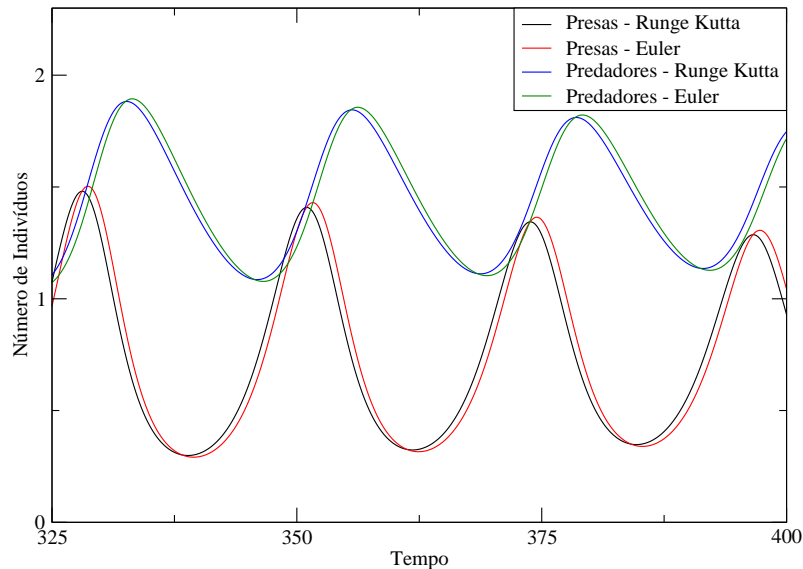


Figura 4.5: Solução numérica do modelo presa-predador com  $h = 0.002$  adotando-se:  $\alpha = 0.8$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\beta = 0.55$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $N(0) = 0.5$ ,  $P(0) = 0.5$

### 4.3 Autômatos Celulares

Inicialmente propostos por Stanislaw Ulam e John Von Neumann no fim da década de 40, os autômatos celulares são sistemas dinâmicos de dimensão espacial e temporal discreta. Eles são compostos por um reticulado ou grade *n-dimensional*, onde são dispostas células com comportamento idêntico, delineado por um conjunto de regras de transição universais [13].

As regras de evolução são locais, isto é, cada unidade só influencia diretamente algumas poucas vizinhanças [14]. A definição formal de um autômato celular se baseia em uma 4-tupla  $(L, S, N, F)$ , onde:

- $L$  é um reticulado regular, cada unidade é denominada célula;
- $S$  é um conjunto finito de estados;
- $N$  é um conjunto finito de índices vizinhos, tal que para todo  $r$  em  $N$  e todo  $c$  em  $L$ :  $r + c$  está em  $L$ ;
- $F$  é um conjunto de funções de transição que pode ser aplicado sobre as células, de forma a

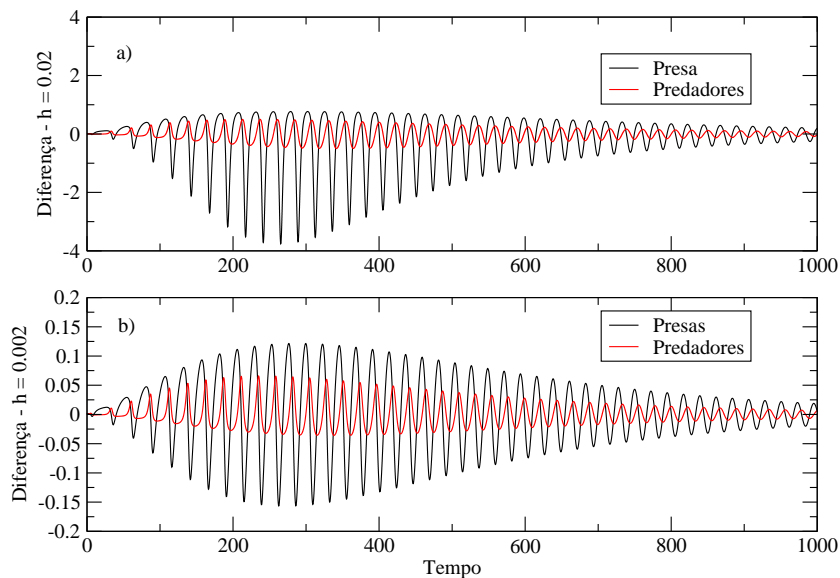


Figura 4.6: Diferença percentual entre o método de solução de Euler e Runge-Kutta, adotando o mesmo valor de  $h$

definir seu próximo estado a partir do seu estado atual e vizinhança.

Atualmente, existem muitas pesquisas sobre o comportamento dos autômatos celulares, pois, assim como os sistemas dinâmicos, os autômatos celulares possuem interações locais simples que podem apresentar comportamentos globais imprevisíveis.

Autômatos celulares podem ser construídos utilizando basicamente estruturas de dados simples e tipos de dados primitivos.

Como estrutura de dados, o espaço pode ser representado utilizando vetores unidimensionais e matrizes bidimensionais e tridimensionais. A escolha da dimensão do autômato celular depende do sistema físico real que se deseja representar. O estado ou a informação de cada célula pode ser representado por um tipo de dado primitivo, como um bit (0 ou 1). Esta representação é muito utilizada em estados binários do tipo *vivo* ou *morto*, *spin up* ou *spin down*, etc. Outros tipos de dados também podem ser utilizados como inteiros ou reais.

Acompanhando o tipo de estruturas de dados abstraído em sistemas computacionais, os autômatos celulares podem ser unidimensionais (Figura 4.7), bidimensionais (Figura 4.8) e tridimensionais. O tipo mais utilizado é o bidimensional.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |         |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---------|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $t = 0$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | $t = 1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $t = 2$ |

Figura 4.7: Representação esquemática de um autômato celular unidimensional

|         |   |   |   |   |   |         |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|
| 1       | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0       | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1       | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0       | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0       | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0       | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1       | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0       | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0       | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0       | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0       | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $t = 0$ |   |   |   |   |   | $t = 1$ |   |   |   |   |   |
| 1       | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |         |   |   |   |   |   |
| 1       | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |         |   |   |   |   |   |
| 0       | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |         |   |   |   |   |   |
| 1       | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |         |   |   |   |   |   |
| 0       | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |         |   |   |   |   |   |
| 0       | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |         |   |   |   |   |   |
| $t = 2$ |   |   |   |   |   |         |   |   |   |   |   |

Figura 4.8: Representação esquemática de um automato celular bidimensional

Para definir as funções de transição, é necessário estabelecer qual o conjunto de células que será denominada de vizinhança da célula  $M_{(x,y)}$ . As células formadas por esse conjunto recebem influência direta sobre o que acontece em  $M_{(x,y)}$  de acordo com as regras de transição estabelecidas no autômato celular.

Para o caso bidimensional, os dois tipos de vizinhança mais conhecidos são as de *Von Neumann* e de *Moore* [13]. Von Neumann determina que a célula  $M_{(x,y)}$  possua quatro primeiros vizinhos, enquanto Moore estabelece que o número de vizinhos seja igual a 8, ambos dispostos conforme a Figura 4.9. Alguns exemplos e tipos de autômatos são encontrados em Barone [13] e Moysés [14].

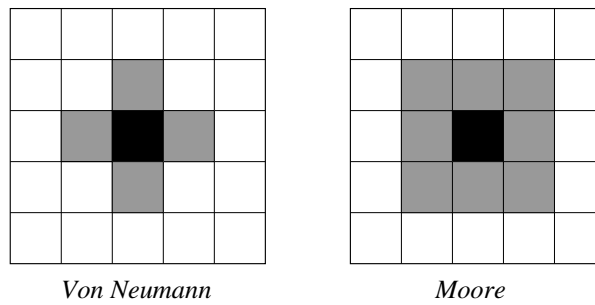


Figura 4.9: Representação esquemática de vizinhanças do tipo Von Neumann e de Moore

## 4.4 Geração de Números Aleatórios

Os geradores de números aleatórios são uma ferramenta essencial em vários processos de simulação em computação científica. Possuem aplicações diretas em jogos eletrônicos e em estudos de otimização. São semelhantes ao lançamento de dados "honestos".

Entretanto, em meios computacionais, não existe um processo de geração de números realmente aleatórios. Isso ocorre porque qualquer processo computacional tradicional é intrinsecamente determinístico. Nos processos computacionais, é fornecido um número qualquer inicial para um algoritmo, chamado de *semente*. Este produz um segundo termo da sequência que, por sua vez, é utilizado para gerar o terceiro número da sequência, e assim por diante. Conforme a semente muda, essa sequência de números também sofre alterações. O processo de geração de números aleatórios torna-se determinístico. Portanto, ele é denominado de gerador de números *pseudo-aleatórios*, pois as mesmas sementes geram sequências iguais.

As linguagens de programação de auto nível, tais como JAVA [16] e C++ [15] possuem rotinas intrínsecas de geradores de números pseudo-aleatórios. Entretanto, existem simulações que demandam milhões de números aleatórios. Logo, é necessário um gerador de números muito eficiente, onde um número sorteado não tenha correlação com os números sorteados anteriormente.

Baseado nessa grande demanda, pesquisadores construíram um algoritmo gerador de números pseudo-aleatórios como alternativa para os geradores padrões fornecidos pelas linguagens. Este método consiste em gerar números aleatórios  $R$  em um intervalo que vai de 1 até o maior número inteiro positivo que pode ser representado pelo computador, denominado *maxint*. O método de geração consiste na seguinte expressão [17]:

$$R' = R + (R \ll 1) + (R \ll 16) \tag{4.20}$$

onde  $R$  e  $R'$  números inteiros ímpares sem sinal representados por 32 bits, onde  $maxint$  é  $2^{32} - 1 = 4294967295$  e o operador  $\ll$  é o operador de deslocamento à esquerda. A expressão  $a \ll b$  estabelece que os bits de  $a$  sejam deslocados para a esquerda  $b$  vezes. Para ilustrar a operação de deslocamento, considere números  $k$  de 4 bits, onde  $0 < k < 16$ :

$$0011 = 3$$

$$0101 = 5$$

$$1001 = 9$$

Quando tem-se  $3 \ll 2$ , desloca-se à esquerda todos os bits que compõem o número, de modo que os bits da extremidade esquerda são abandonados e os bits da direita são completados com zero, conforme os seguintes exemplos:

$$0011 \ll 2 = 1100 = 12$$

$$0101 \ll 2 = 0100 = 4$$

O análogo é feito para o operador  $\gg$ :

$$0011 \gg 2 = 0000 = 0$$

$$0101 \gg 2 = 0010 = 2$$

Tendo em vista as duas opções de geradores de números aleatórios apresentadas, alguns testes foram realizados para comparar o número de ocorrências de cada número no intervalo de 0 a 100, com um determinado número de sorteios. Os resultados são apresentados na fig. 4.10. A situação ideal é que o número de ocorrências de cada elemento seja o mais uniforme possível, pois todos os elementos devem ter a mesma probabilidade de serem sorteados.

A Figura 4.10 mostra três histogramas com diferentes números de sorteios ( $10^3$ ,  $10^5$ ,  $10^7$ ), onde fica claro que o gerador proposto por Oliveira [17] produz resultados mais uniformes sendo portanto, o mais aconselhável para o uso em sistemas de simulação computacional.

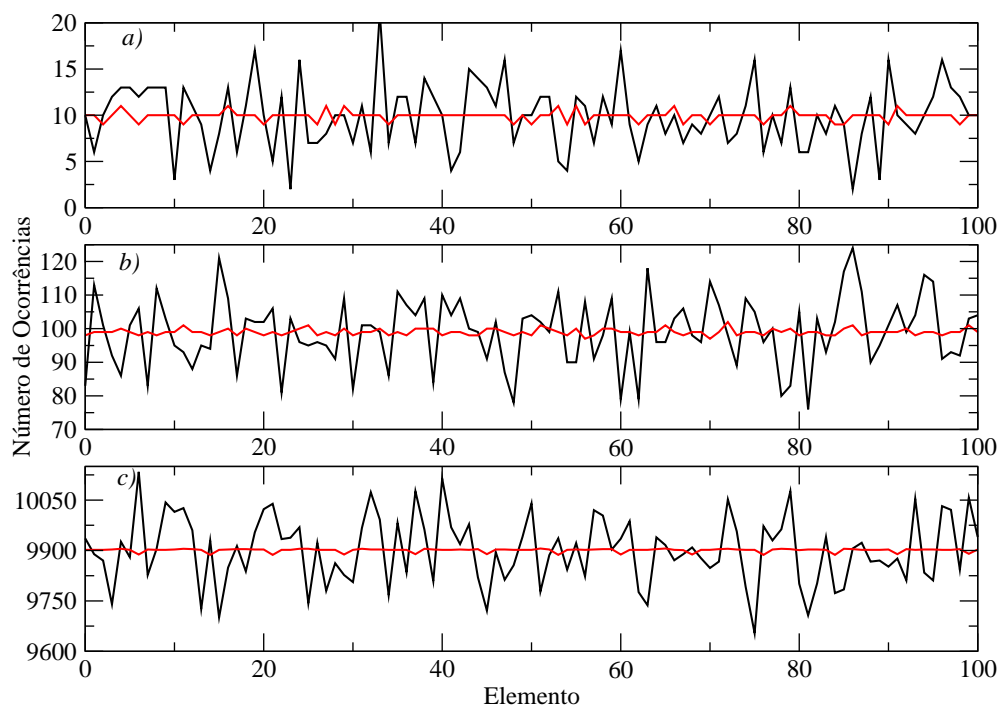


Figura 4.10: Comparação entre o gerador de números pseudo-aleatórios padrão da linguagem C++ e o gerador proposto por Oliveira considerando: a)  $10^3$  sorteios; b)  $10^5$  sorteios e c)  $10^7$  sorteios. A curva clara representa os resultados obtidos através do gerador proposto em [17].

## Capítulo 5

# SIMULAÇÃO DO MODELO DA PILHA DE AREIA

### 5.1 Introdução

A pilha de areia é um exemplo típico de um sistema dinâmico [18]. Elaborado por Per Bak [19], o modelo da pilha de areia ilustra o surgimento da criticalidade auto-organizada em um sistema complexo. Considere um fluxo constante de areia sendo despejado sobre um plano qualquer. Inicialmente, a pilha de areia estará baixa, ocorrendo alguns deslizamentos quando o tamanho e a inclinação da pilha começarem a aumentar. Entende-se por deslizamentos apenas pequenos movimentos de grãos de areia nas vizinhanças do grão. Neste modelo, é interessante notar que, apesar de se conhecer todas as propriedades do grão tais como tamanho, massa e formato, isso não é suficiente para entender e prever como e quando estes deslizamentos ocorrerão. Estes deslizamentos são consequências da interação de um grão de areia com seus vizinhos.

À medida que a altura da pilha atinge dimensões proporcionalmente maiores que a sua base, deslizamentos maiores começam a acontecer envolvendo todo o sistema, e não apenas os vizinhos locais, até que surge uma certa forma de organização.

O sistema alcança um estado estacionário, onde a pilha passa a ter a inclinação constante chamada de ângulo de estabilidade, e a média dos grãos que entram no sistema é comparável com a média dos grãos que o deixam. Neste estado estacionário, o sistema encontra-se também no que é chamado de estado crítico, que é caracterizado pela imprevisão, não sendo possível prever qual o tamanho e o instante em que as avalanches irão ocorrer. Isto significa que quando deslizamentos locais acontecem,

podem ou não ser geradas avalanches de grandes tamanhos envolvendo todo o sistema. O sistema atingiu, a criticalidade auto-organizada.

É incorreto dizer que o sistema atinge um estado de equilíbrio quando alcança este estado crítico, pois segundo Per Bak [20], sistemas em equilíbrio não são tidos como complexos, já que estes devem ser sistemas dinâmicos. Se um sistema em equilíbrio sofre uma ligeira perturbação, nada demais acontece além de pequenas reações locais. Isso não pode ser afirmado para um sistema crítico auto-organizado como a pilha de areia, pois a probabilidade de que ocorra uma resposta intensa à uma pequena perturbação é comparável a probabilidade de nada ocorrer. Para a pilha de areia, a probabilidade de grandes avalanches ocorrerem não pode ser desprezada frente às pequenas avalanches.

Este modelo serve de *toy model* para o estudo dos fenômenos sísmicos que ocorrem na crosta terrestre. Não é possível estabelecer uma relação fiel entre os números de terremotos e o valor de suas respectivas intensidades, devido a escassez de dados, consequência do intervalo finito de tempo, visto que o espaçamento temporal entre os fenômenos é muito grande. Portanto, é difícil coletar dados referentes a todos os tamanhos de terremotos. Daí surge a importância do modelo, pois neste caso os fenômenos acontecem em espaços de tempo bem mais curtos, permitindo uma maior coleta de dados. Com isso é possível a realização de comparações do caso micro, a pilha de areia, com o caso macro, a crosta terrestre<sup>1</sup>. [21]

Para o modelo da pilha de areia, a distribuição dos tamanhos das avalanches com o número de ocorrências obedece a uma Lei de Potência (Figura 5.1). A relação entre o logaritmo do número de avalanches de um determinado tamanho  $N(s)$  e o logaritmo do tamanho dessas avalanches  $s$  decresce de forma linear. Esta é uma característica marcante de sistemas que se encontra no estado crítico auto-organizado.

$$\begin{aligned} \log[N(s)]/\log(s) &= -t \\ \log[N(s)] &= -t \log(s), \\ N(s) &= s^{-t} \end{aligned}$$

onde  $N(s)$  é o número de avalanches de um dado tamanho  $s$  e o expoente  $-t$  é a inclinação da reta.

---

<sup>1</sup>Este trabalho de simulação do modelo da pilha de areia resultou em um artigo publicado pela Revista Brasileira de Ensino em Física no ano de 2006.



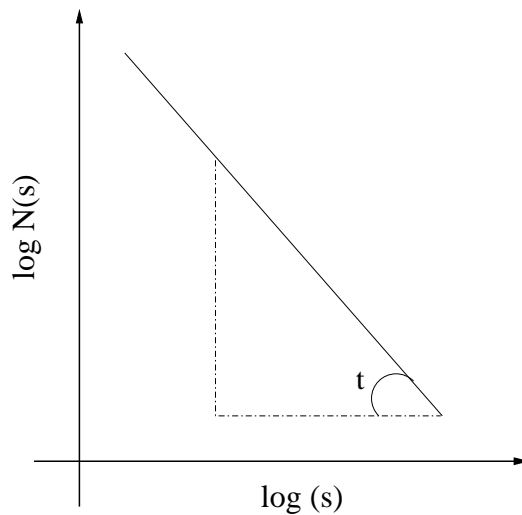


Figura 5.1: Relação entre os valores de  $s$ , tamanho da avalanche, e  $N(s)$ , número de ocorrências.

## 5.2 Simulação da Pilha de Areia

A forma mais simples para simular computacionalmente uma pilha de areia é modelá-la na forma de um autômato celular.

Um autômato celular [14] é um sistema dinâmico formado por muitas unidades interagindo umas com as outras. Como visto na seção 4.3, um autômato pode ser considerado na forma de uma matriz de sítios onde existe uma regra de interação muito simples que influencia apenas os vizinhos mais próximos.

Para a pilha de areia, uma matriz quadrada de qualquer dimensão, inicialmente povoada ou não, pode servir de início. Cada sítio poderá ter uma quantidade finita de grãos,  $M_{(x,y)}$ , variando de zero até  $n - 1$ , sendo  $n$  um valor crítico necessário para que ocorra um deslizamento. Nas simulações, adotou-se  $n = 4$ . Logo, cada sítio poderá conter  $0 \leq x \leq 3$  grãos.

Desde o início, pode-se optar se a adição dos grãos ao sistema será feita em uma célula pré-definida ou em células aleatórias. Ao adicionar um grão ao valor de  $M_{(x,y)}$ , ele será acrescido de "1". O processo poderá ser realizado várias vezes de modo que quando qualquer  $M_{(x,y)}$  atingir o valor 4, haverá um deslizamento. Quando este deslizamento ocorre o seguinte processo é implementado:

$$\begin{aligned}
M_{(x,y)} &= M_{(x,y)} - 4 \\
M_{(x\pm 1,y)} &= M_{(x\pm 1,y)} + 1 \\
M_{(x,y\pm 1)} &= M_{(x,y\pm 1)} + 1
\end{aligned}
\tag{5.1}$$

Isto significa que os quatro grãos que estavam no sítio se distribuíram entre os vizinhos (de baixo, de cima, da esquerda e da direita), considerando apenas primeiros vizinhos (vizinhança de Von Neuman[13]). Inicialmente, a distribuição foi feita em partes iguais, onde cada vizinho recebeu um grão de areia do sítio central. Se o sítio estiver localizado em uma das quatro bordas do plano, o grão que corresponderia ao vizinho não existente abandonará o sistema, caracterizando o seu comportamento finito.

Caso algum sítio receba um grão de um vizinho e complete quatro grãos, o processo se repetirá. Consequentemente, haverá um novo deslizamento e uma outra distribuição de grãos, podendo resultar em uma reação em cadeia de longo alcance.

Denomina-se deslizamento o fato de um sítio completar quatro grãos e realizar a distribuição a seus vizinhos e de avalanche o conjunto formado por estes deslizamentos. Uma avalanche será caracterizada pelo seu tamanho, que é contabilizado pela quantidade de deslizamentos que foram gerados desde o momento em que foi acrescentado o último grão. Por exemplo, se ao colocar um grão e este gerar um deslizamento, concluí-se que ocorreu uma avalanche de tamanho um. Entretanto, se ao colocar um grão e este gerar nove deslizamentos, pode-se dizer que ocorreu uma avalanche de tamanho nove.

Este processo pode ser melhor visualizado na Figura 5.2. Inicialmente, tem-se uma certa distribuição de grãos de areia. Deixa-se cair um grão de areia na célula  $M_{(3,3)}$  que completa a condição inicialmente estabelecida no problema para a ocorrência de um deslizamento. Haverá então um espalhamento dos grãos deste sítio para os seus primeiros vizinhos. Estes, em consequência, também podem alcançar a condição e realizar o mesmo processo anterior. Neste esquema, é mostrada uma avalanche de tamanho 6, pois seis deslizamentos ocorreram com o acréscimo de um grão apenas.

Quando este sistema alcança estágios mais avançados, avalanches de tamanhos inesperados podem acontecer em comparação com o tamanho do sistema.

Esse modelo é uma simplificação grosseira da pilha de areia real, visto que os grãos apresentam formas e propriedades diversas entre eles, e o ambiente também pode contribuir com a gravidade,

resistência do ar, etc. Entretanto, ele captura os elementos essenciais da dinâmica de um sistema real além de ser um modelo é extremamente útil, por exemplo na análise da ocorrência de terremotos em várias escalas. A Lei de Richter para terremotos apresenta uma incrível semelhança com a Lei de Potência que se obtém a partir do modelo da Pilha de Areia [20]. Embora os terremotos possuam um grande número de agravantes e atenuantes que precisam ser levados em conta, pode-se modelar esse fenômeno com auxílio de algumas regras simples de interações, produzindo resultados semelhantes. Este modelo dá ainda a liberdade de implementar diversos tipos de modificações, como por exemplo, alterações no tamanho da pilha, distribuições aleatórias, lançamento de grãos em pontos aleatórios e até mesmo inclinação da rede, o que seria possível se as probabilidades de distribuição dos deslizamentos fossem alteradas.

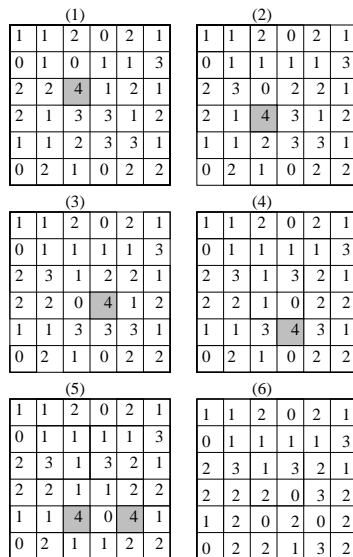


Figura 5.2: Esquema representativo da simulação de uma avalanche de tamanho 6 da Pilha de Areia em uma matriz finita  $6 \times 6$

### 5.3 Implementação do Modelo

Para a realização das simulações, o autômato celular foi implementado em um programa computacional usando a linguagem C++, cujo algoritmo proposto para esse modelo é apresentado na seção 5.5.

Considerou-se que os grãos de areia ingressam na pilha somente através do sítio central. O método principal do algoritmo consiste em um *emphloop* que faz chamadas sucessivas à função *pingar*. Esta

função, por sua vez, incrementa a quantidade de areia do sítio especificado e, em seguida, verifica se o sítio alcançou sua capacidade crítica. Em caso afirmativo, os grãos desse sítio serão distribuídos aos seus vizinhos, zerando o sítio local e chamando a função *pingar* para cada um dos quatro vizinhos.

É interessante ressaltar que o algoritmo utilizado tem carácter recursivo, de modo que possa ser realizada uma reação em cadeia até que nenhum sítio tenha grãos em número igual à capacidade crítica, o que fará com que as chamadas recursivas cessem naquela iteração.

Após implementar o caso apresentado na seção anterior, introduziu-se no problema uma distribuição probabilística para os deslizamentos. A modificação consiste em distribuir os grãos de forma não-uniforme, ou seja, os sítios vizinhos não vão receber, necessariamente, um grão cada. Estes grãos podem ser divididos de forma que um sítio possa receber nenhum grão ou os 4 grãos de seu sítio vizinho. A proposta gera um problema de análise combinatória: "De quantas maneiras seria possível distribuir quatro bolinhas em quatro caixas diferentes", supondo que as caixas são os sítios e as bolinhas são os grãos de areia. O resultado para esse problema é uma combinação de 7, 3 a 3, ou seja, 35 distribuições diferentes. A partir daí, estipulou-se que cada distribuição distinta receberia um índice que poderia variar de 1 a 35. Quando um sítio completasse 4 grãos de areia, um número aleatório era gerado e uma distribuição de sítios vizinhos, cujo índice coincidissem com o número sorteado, era selecionada e utilizada no deslizamento. Todas as distribuições tinham a mesma probabilidade de ocorrer, isto é,  $1/35$ .

## 5.4 Resultados e Conclusões

A implementação do modelo da Pilha de Areia ajudou na visualização de algumas propriedades comuns aos sistemas complexos tais como a imprevisibilidade e o aparecimento de estados críticos.

Os dados produzidos pelas simulações foram traçados em um plano cartesiano  $\text{Log}[N(s)] \times \text{Log}[(s)]$ , permitindo a verificação da existência da Lei de Potência, através de um ajuste linear da curva.

Os resultados obtidos estão muito próximos do valor esperado onde a reta ajustada tem um coeficiente angular de -1 [20]. Os dados obtidos variaram entre -1.13 e -1.18 nas diversas circunstâncias testadas, como pode-se ver nas Figuras 5.4, 5.5 e 5.7. Os testes realizados foram feitos em matrizes de tamanho mínimo  $16 \times 16$  e tamanho máximo de  $129 \times 129$ .

Para tamanhos muito pequenos da pilha, não é muito claro o surgimento de uma reta. Pode-se dividir o gráfico em 3 partes, como mostrado na Figura 5.4

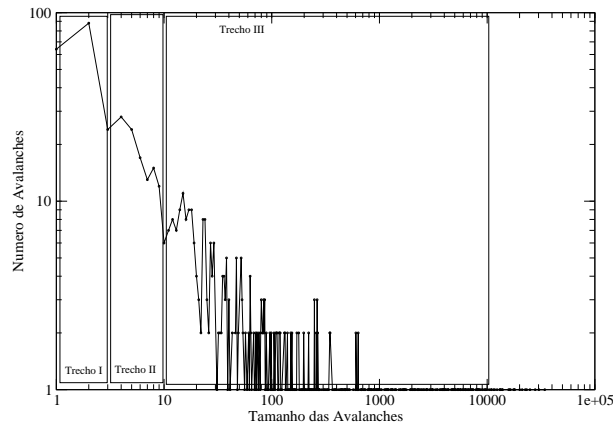


Figura 5.3: Simulação com 15.000 iterações, em um plano de tamanho  $65 \times 65$ .

A parte I corresponde a flutuações que são consequência do tamanho finito do sistema. O trecho II é o utilizado para ajuste da curva. Esta região é pequena em relação as outras para tamanhos reduzidos de pilha. A parte III é a região onde ocorre uma maior dispersão dos dados. Eles não contribuem para o ajuste da reta. Isso é consequência de um número muito grande de iterações realizadas no sistema, visto que, quando poucas iterações são feitas, a região tende a ficar consideravelmente menos densa, como pode-se ver comparando as Figuras 5.4 e 5.5. Entretanto, se o número de iterações for pequeno, o sistema não terá alcançado um estado crítico.

Complementando os testes, foram realizadas simulações que também incluíram probabilidades na distribuição das avalanches, como mencionado na seção 5.3. As curvas obtidas com a distribuição probabilística (Figura 5.7) não apresentaram modificação em relação as curvas retiradas de testes usando a distribuição uniforme (Figura 5.5). Os valores obtidos para a inclinação da reta em ambos os testes se mantiveram dentro do intervalo registrado anteriormente. Este resultado pode parecer óbvio, entretanto o padrão gerado pela organização dos grãos em ambos os testes é totalmente distinto. Note que no teste com distribuição de probabilidade uniforme, em um plano  $129 \times 129$  (Figura 5.6), registra-se um padrão simétrico com regiões com maior concentração de sítios com a mesma quantidade de grãos. De modo que, se um sítio localizado em uma região com grande concentração de grãos sofrer um deslizamento, enormes avalanches acontecerão. Mas, isso não ocorre no plano  $129 \times 129$ , onde foi usada a distribuição de probabilidade não-uniforme, como pode-se ver na Figura 5.8. Nesta simulação, a configuração é mais homogênea, com os grãos distribuídos aleatoriamente.

Pelo que se pode verificar nas Figuras 5.5 e 5.7, o tamanho das avalanches continua muito se-

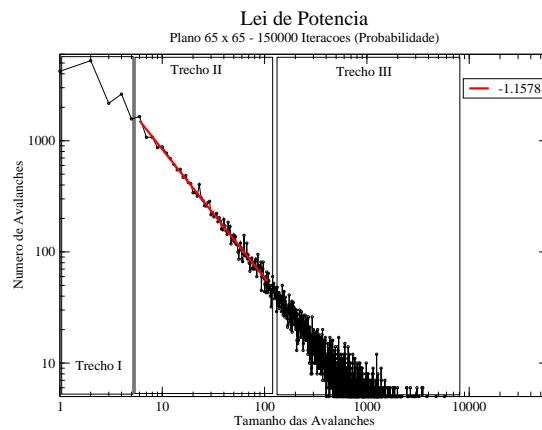


Figura 5.4: O gráfico apresenta uma divisão em 3 regiões distintas. Esta simulação foi realizada em uma rede de tamanho  $65 \times 65$  com 150000 iterações

melhante e o coeficiente da reta mantém-se entre -1.13 e -1.18. Pode-se concluir então que a forma da distribuição dos grãos no sistema não influi na ocorrência das avalanches, uma vez que a lei de potência não apresenta variações significativas entre as duas abordagens.

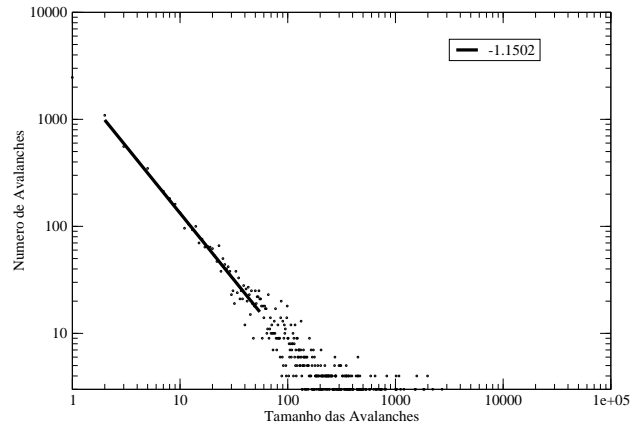


Figura 5.5: Simulação feita em um plano de tamanho  $129 \times 129$  com distribuição uniforme dos grãos.



Figura 5.6: Figura da Pilha de Areia obtida com distribuição uniforme dos grãos, iterada 100000 vezes em uma matriz com  $129 \times 129$  sítios.

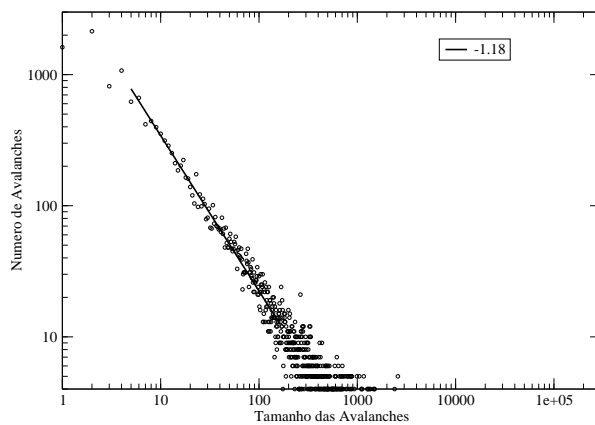


Figura 5.7: Simulação feita em um plano de tamanho  $129 \times 129$  com distribuição aleatória dos grãos.



Figura 5.8: Figura da Pilha de Areia obtida com distribuição não-uniforme dos deslizamentos, iterada 100000 vezes em uma matriz com  $129 \times 129$  sítios.



## 5.5 Algoritmo

```
pingar (int posicaoI, int posicaoJ){
    /* Incrementar o sitio local*/
    Matriz[posicaoI][posicaoJ] = Matriz[posicaoI][posicaoJ] + 1;
    se a Matriz[posicaoI][posicaoJ] atingiu a capacidade suporte {
        Matriz[posicaoI][posicaoJ] = 0;
        se existe um sitio vizinho acima do sitio local{
            pingar(posicaoI - 1, posicaoJ);
        }
        se existe um sitio vizinho a esquerda do sitio local{
            pingar(posicaoI, posicaoJ - 1);
        }
        se existe um sitio vizinho abaixo do sitio local{
            pingar(posicaoI + 1, posicaoJ);
        }
        se existe um sitio vizinho a direita do sitio local{
            pingar(posicaoI, posicaoJ + 1);
        }
    }
}

metodoMain(){
    Para i = 0 ate o numero total de iteracoes{
        /*Os graos de areia somente ingressaram na pilha pelo sitio central*/
        pingar(tamanho da matriz/2, tamanho da matriz/2);
    }
}
```

## Capítulo 6

# SIMULAÇÃO DE MODELOS DE DINÂMICA DE POPULAÇÕES

### 6.1 Versão Estocástica do Modelo Presa-Predador

#### 6.1.1 Introdução

Um sistema é dito estocástico se pelo menos uma de suas variáveis de saída for uma variável aleatória. De forma geral, o estado de um sistema estocástico tem um comportamento que somente pode ser descrito probabilisticamente [22].

O modelo presa-predador determinístico apresentado na seção 3.2 e resolvido numericamente na seção 4.2 não inclui a aleatoriedade nas diferentes interações entre os indivíduos das populações. Essa componente probabilística pode ser incluída no modelo discreto através de uma simulação computacional baseada em geradores de números aleatórios, onde estarão representados os indivíduos das populações com as respectivas probabilidades de interação local.

Um dos objetivos dessa abordagem é simular o comportamento das populações de forma mais realista, obtendo resultados mais próximos dos dados experimentais, onde flutuações aleatórias podem ter grande influência sobre o comportamento das populações, principalmente no caso em que o número inicial de indivíduos é pequeno.

Além disso, essa abordagem deve também ser capaz de reproduzir o tipo de comportamento encontrado no modelo presa-predador determinístico em condições similares.

### 6.1.2 Implementação do Modelo

Para implementar a simulação computacional estocástica do modelo presa-predador, utilizou-se a versão discreta dada pela eq. (4.18) como base. As regras de interação entre os indivíduos tiveram que ser reinterpretadas para incluir a estocasticidade.

A partir de uma população inicial de presas e predadores, simula-se a evolução temporal do sistema sujeito às novas regras. Para isso, são realizados sorteios de números aleatórios que controlarão a ocorrência de cada evento (reprodução, morte e predação) para cada indivíduo da população em um instante  $t$ .

Inicialmente, no instante  $t_0$ , sorteia-se para cada indivíduo das populações iniciais um número aleatório ( $a_1$ ). Com o resultado do primeiro sorteio, testa-se se este número ( $a_1$ ) é menor que a taxa de nascimento de presas ( $\alpha$ ). Caso  $a_1 < \alpha$ , a presa reproduz e a população de presas tem um acréscimo de um indivíduo para o passo posterior,  $t_1$ . Caso contrário, não houve sucesso na reprodução e o número de presas permanece o mesmo. O mesmo processo é realizado para cada termo de interação da equação. Sorteia-se um novo número aleatório ( $a_2$ ) e testa-se a probabilidade deste indivíduo morrer por morte natural. O número aleatório deve ser menor que  $\mu N$  (probabilidade de morte natural). Este termo é diretamente proporcional ao número de indivíduos no tempo  $t_0$ . Logo, quanto maior o número de indivíduos no sistema, maior é a probabilidade desse indivíduo vir a falecer por morte natural. O próximo número aleatório ( $a_3$ ) diz respeito a probabilidade deste animal ser caçado. Para o sucesso da caça, o número aleatório deve ser menor que  $\beta P$ , que é a probabilidade de caça ( $\beta$ ) multiplicada pelo número de predadores existentes em  $t_0$ .

Esses três sorteios são feitos para cada presa no sistema e o valor atualizado da população de presas será o valor inicial da próxima iteração  $t_1$ .

Para a população de predadores, o mesmo processo é utilizado. Para o nascimento de novos indivíduos, o número aleatório deve ser inferior ao termo  $\gamma \beta N$ . Caso isso seja verdade, o predador é capaz de reproduzir e dar origem a mais um indivíduo no sistema. Para a morte dos predadores, o número sorteado deve ser inferior apenas a constante de mortalidade da população, pois o modelo adotado é o exponencial. Se este indivíduo falece, a população de predadores tem seu valor diminuído de uma unidade. O número de predadores ao final da iteração  $t_1$  será o número inicial para a próxima iteração.

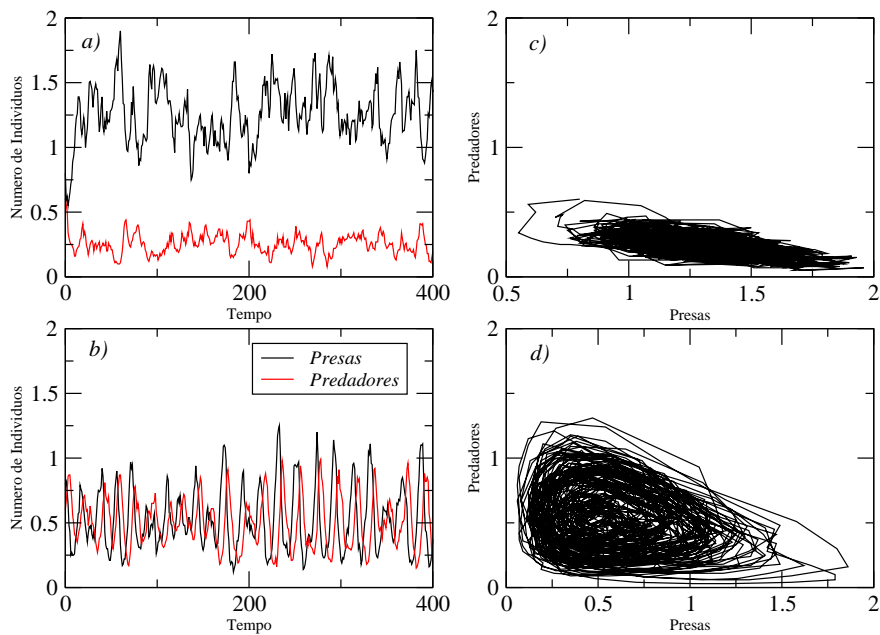


Figura 6.1: Simulações estocásticas do modelo presa-predador. *a)* Séries temporais obtidas com  $\gamma = 0.3$  *b)* Séries temporais obtidas com  $\gamma = 0.7$ , *c)* e *d)* Planos de fase referentes às series temporais de *a* e *b*.

### 6.1.3 Resultados

A Figura 6.1 mostra o resultado final para duas simulações. Esses resultados confirmam o comportamento oscilatório das populações e estão de acordo com as análises do modelo apresentadas na seção 3.2. Características importantes do modelo como tipo de ponto crítico, estabilidade e oscilação foram verificadas nestas simulações. É importante ressaltar que os resultados correspondem a simulações estocásticas, que é um processo diferente da solução numérica do sistema realizado nas seções 3.2 e 4.2.

Na parte *a* da Figura 6.1, tem-se um exemplo de um sistema onde a população de presas no estado de equilíbrio é maior que a população de predadores. Nesta simulação, o parâmetro  $\gamma$ , que representa a taxa de conversão de presas em predadores, recebeu um valor baixo ( $\gamma = 0.3$ ). Com isso, a energia originada da conversão da caça em novos predadores é muito pequena. O resultado é uma baixa população de predadores que não impede o crescimento da população de presas. Entretanto, na parte *b* da Figura 6.1, as populações se mantêm em quantidades aproximadas, devido ao alto valor atribuído

a esse parâmetro ( $\gamma = 0.7$ ). Neste caso, a população de predadores pode assumir valores bem mais altos interferindo no crescimento da população de presas.

## 6.2 Versão Espacial Estocástica do Modelo Presa-Predador

### 6.2.1 Introdução

A simulação do sistema presa-predador apresentada na seção anterior é uma versão simplificada da interação que ocorre entre essas duas populações. Em um sistema real, é necessário investigar quais as variáveis que possuem impactos relevantes na interação entre presas e predadores. Nas simulações realizadas na seção anterior, uma presa tinha uma probabilidade  $\beta P$  de ser predada, onde  $P$  é o número total de predadores no sistema. Independente da localização dos predadores, a presa tinha uma possibilidade de ser predada por aquele indivíduo. Nessa abordagem, a probabilidade de predação não dependia da distância entre a presa e o predador e a posição não era um parâmetro importante.

Entretanto, em modelos reais, a capacidade de movimentação no espaço, bem como a posição dos indivíduos, são fatores importantes para a sobrevivência do mesmo, pois um predador somente é capaz de caçar indivíduos que estão localizados em suas proximidades, por exemplo.

Levando em conta essa dependência, realizou-se uma simulação para representar o comportamento das populações em um ambiente espacial, baseada na utilização de um autômato celular com regras simples de movimentação e interação vistos na seção 4.2.

### 6.2.2 Implementação do Modelo

Para a simulação proposta, considerou-se primeiramente uma matriz contendo um número de indivíduos  $N$  e  $P$  distribuídos de forma aleatória. A partir dessa configuração inicial, foi realizada a simulação dos eventos como reprodução, predação e morte dos indivíduos.

Nesta matriz, indivíduos de mesma espécie não podem ocupar a mesma célula, de modo que duas presas não podem se situar em uma mesma célula da matriz no mesmo instante. Entretanto, essa célula pode ser ocupada por uma presa e um predador no mesmo tempo.

A primeira etapa da iteração é o movimento dos indivíduos. Nesta etapa cada indivíduo tem uma probabilidade de se movimentar. Cada população possui uma probabilidade de movimentação diferente, onde presas podem ser mais rápidas do que os predadores e vice-versa. Em caso de sucesso, o indivíduo poderá se movimentar para um dos sítios vizinhos, onde foi considerada vizinhança do tipo Von Neumann, desde que a célula desta direção não esteja ocupada por um indivíduo da mesma

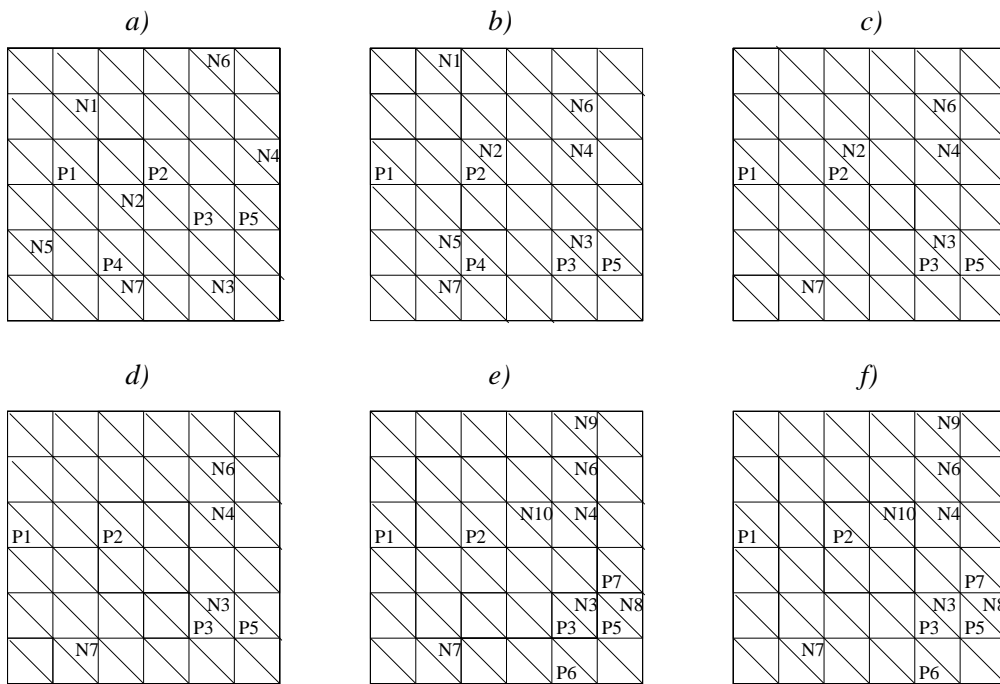


Figura 6.2: Representação esquemática dos vários eventos que ocorrem em um passo da simulação.

espécie. Portanto, quando todas as células estão ocupadas o indivíduo está impossibilitado de se locomover naquele instante.

Foi estabelecido também que o alimento das presas é abundante e que o movimento das presas não possui um custo. Entretanto, esta característica não é válida para os predadores, que dependem de energia para se movimentar. A contabilização desta energia é armazenada em uma variável atribuída a cada predador no sistema, denominada *fome*.

Na próxima etapa, ocorrem as mortes naturais, onde é feito um teste de falecimento natural para cada indivíduo. As probabilidades de morte natural também podem ser diferentes dependendo do caso que se quer representar.

A seguir, é realizada a predação, onde é feito um teste para cada predador que se localiza na mesma célula de uma presa. Caso não haja sucesso no teste, presa e predador ficam localizados na mesma célula que estavam anteriormente. Caso contrário, o predador se alimenta da presa, que é retirada do sistema logo em seguida. O predador tem sua variável "fome" diminuída.

Após esta etapa, busca-se no sistema todos os predadores que estão há muitas iterações sem se alimentar. Todos os predadores que têm a variável fome maior ou igual a uma constante de tolerância, que é determinada no programa, são mortos por fome.

Por último, é realizada a etapa da reprodução. Nesta etapa, considera-se somente que as po-

pulações sejam compostas por fêmeas as quais são capazes de reproduzir de forma assexuada. Os indivíduos que nascem ficam em alguma célula vizinha da mãe. Caso não haja espaço para o nascimento, este não ocorre. Entretanto, existe uma pequena diferença entre as duas populações no que diz respeito a alimentação. Como o alimento das presas é ilimitado, todas as presas podem reproduzir, e é feito um sorteio para isso. Para os predadores, o sorteio só poderá ser realizado caso este tenha se alimentado na iteração atual ou na anterior. Esta restrição inibe a explosão populacional de predadores. Neste modelo, se a população de presas for nula, a população de predadores, que depende das presas, não terá recursos para reproduzir, indo à extinção.

A Figura 6.2 mostra de maneira simplificada como ocorrem os eventos considerados na simulação durante um passo. Dada uma configuração inicial, cada matriz representa o estado dos indivíduos após a realização de cada evento considerado. Cada célula da matriz pode suportar até dois indivíduos de espécies diferentes.

O resultado da movimentação é mostrado na parte *b*, onde todos os indivíduos se movimentaram para células vizinhas, com exceção do predador P4. Na parte *c*, nota-se que as presas N1 e N5 e o predador P4 faleceram por morte natural. A parte *d* mostra o resultado da predação, onde a presa N2 foi caçada, pois se localizava na mesma célula que um predador. Na parte *e*, é mostrado o resultado da reprodução, onde presas e predadores deram a origem aos indivíduos N8, N9, N10, P6 e P7, gerando a configuração final desse passo da interação, mostrado em *f*.

### 6.2.3 Resultados e Conclusões

As primeiras simulações tiveram como objetivo encontrar o conjunto de parâmetros e condições iniciais para os quais os resultados apontassem coexistência das duas espécies. A simulação que foi realizada para este modelo possui um número maior de parâmetros do que o modelo presa-predador apresentado nas seções anteriores. Entre eles, está o fator de difusão, representado pela mobilidade. Devido a essa diferença, não é possível a utilização dos mesmos valores de parâmetros utilizados anteriormente. Os parâmetros iniciais encontrados onde se verificou a coexistência podem ser vistos na linha A da tabela 6.1 e considerou-se ainda que a variável FOME dos predadores tinha um limite de 3 iterações. A coexistência foi verificada em todas as simulações que utilizavam um grande número para a população inicial das duas espécies. A Figura 6.3 mostra um resultado obtido pela simulação do sistema adotando o conjunto A de parâmetros da tabela 6.1. A partir desse conjunto, foram realizadas mudanças em cada parâmetro com o objetivo de analisar a sua importância para o modelo.

Além disso, foi testada a dependência dos resultados com relação a maneira com que os indivíduos

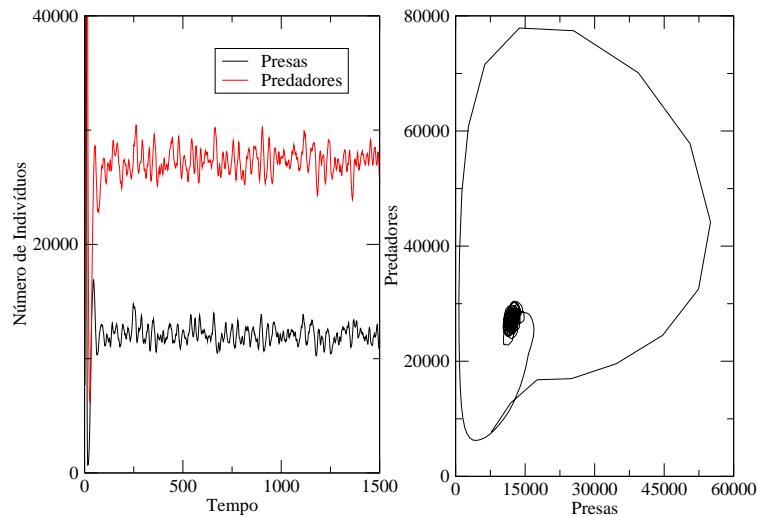


Figura 6.3: Resultado de uma simulação que apresenta coexistência entre as espécies usando o conjunto A de parâmetros da tabela 6.1 e  $N_0 = 7000$  e  $P_0 = 7000$

eram distribuídos inicialmente na rede. Em alguns modelos simulados através de autômatos celulares, as condições iniciais podem ter grande influência no comportamento do sistema. As seguintes distribuições foram testadas:

- A) Distribuição aleatória dos indivíduos em uma pequena região centrada da rede;
- B) Distribuição uniforme dos indivíduos em uma pequena região centrada da rede. Nessa distribuição todos os sítios da região selecionada são preenchidos com uma presa e um predador;
- C) Distribuição uniforme dos indivíduos realizada separadamente em uma pequena região no centro da rede. Nesta distribuição, a região central foi dividida em duas sub-regiões, onde cada região foi totalmente preenchida com indivíduos de uma espécie. Vale ressaltar que essas duas regiões são vizinhas;
- D) Distribuição aleatória dos indivíduos na rede.

Os planos de fase mostrados pela Figura 6.4 indicam que a simulação em que a distribuição inicial



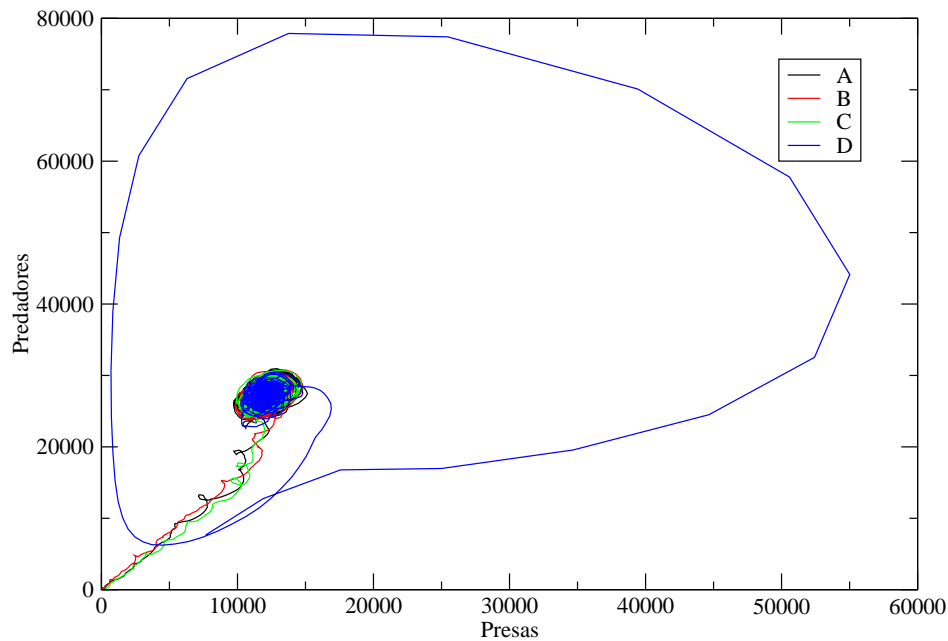


Figura 6.4: Planos de fase obtidos com diferentes distribuições de indivíduos para o conjunto de parâmetros

de indivíduos foi aleatória em toda a rede levou muito mais iterações para convergir para o ponto de equilíbrio. As outras simulações convergiram mais rapidamente para o ponto de equilíbrio. Entretanto, não existem diferenças no estado estacionário para qualquer das distribuições.

Os efeitos da estocasticidade podem ser melhor visualizados quando o número inicial de indivíduos é muito pequeno e a região onde estão distribuídos é muito extensa. Isso ocorre porque os predadores necessitam estar próximos a um grupo de presas para serem capazes de reproduzir e, em algumas distribuições iniciais, todos os predadores ficam longe do grupo de presas; portanto, não são aptos a reproduzir. Como a população é pequena, os predadores são extintos. Com isso, é possível ter duas simulações com mesmos valores de parâmetros e população inicial apresentando resultados diferentes, coexistência entre as duas espécies e a população de predadores indo a extinção. Os gráficos da Figura 6.5 mostram a população de predadores de quatro simulações onde vinte indivíduos de cada espécie foram inicialmente distribuídos em uma região quadrada de  $300 \times 300$  sítios. Essas simulações utilizam os mesmos valores de parâmetros e duas delas resultaram em coexistência entre as espécies e, nas outras duas simulações, a população de predadores foi a extinção.

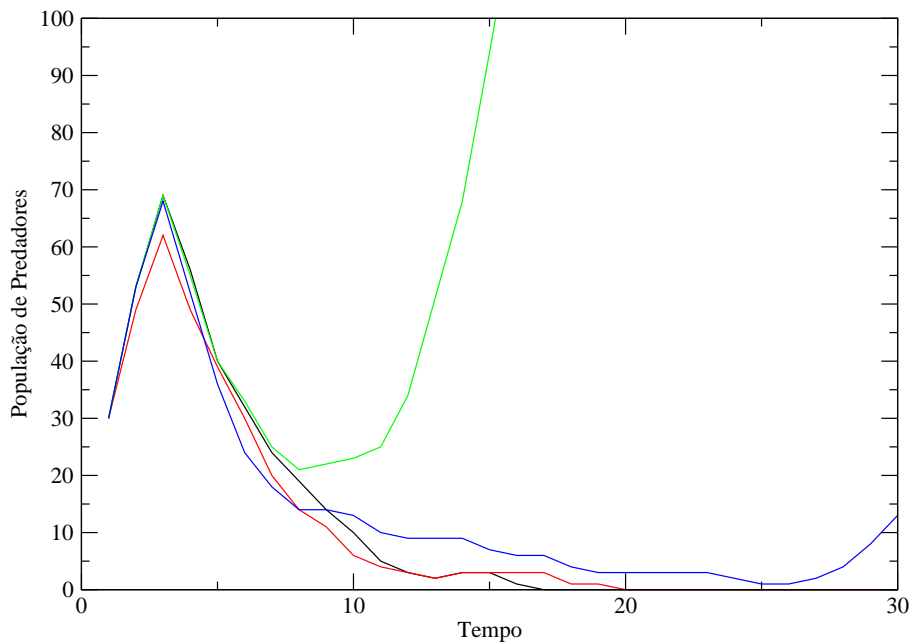


Figura 6.5: Simulação com ambas populações iniciais iguais a 20, distribuídas em uma rede de  $300 \times 300$  sítios.

A partir dessas observações, várias simulações foram feitas utilizando valores aleatórios de população inicial dentro de um mesmo intervalo. Devido ao comportamento estocástico, valores iguais de populações iniciais podem resultar em extinção ou coexistência, sob essas condições críticas. A Figura 6.8 contém um gráfico comparativo contendo todos esses valores e é denominada de Bacia de Atração.

No primeiro gráfico da Figura 6.8, o conjunto de constantes adotado são as constantes apresentadas na linha I da tabela 6.1, onde há muita dificuldade para o predador se fixar no ambiente. Neste gráfico, não existe uma região clara onde possa haver certeza sobre a coexistência das duas espécies. Entretanto, utilizou-se o conjunto de parâmetros da linha A da tabela 6.1. Com o aumento da constante de nascimento de predadores, é possível visualizar, no segundo gráfico da Figura 6.8, uma região de valores iniciais onde há grandes chances de coexistência de ambas espécies, que sempre convergirão ao ponto assintoticamente estável.

Realizando-se 100 simulações para esse conjunto de parâmetros, a extinção foi verificada em 82% contra 18% de simulações com coexistência. Tendo esse resultado em mãos, pequenas alterações

Tabela 6.1: Conjuntos de parâmetros utilizados para a simulação. Valores dados em (%).

|   | Caça | Nasc. N | Nasc. P | Mob. N | Mob. P | Morte N | Morte P | Coexist |
|---|------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|
| A | 85   | 85      | 85      | 40     | 80     | 10      | 10      | 18      |
| B | 95   | 85      | 85      | 40     | 80     | 10      | 10      | 15      |
| C | 85   | 95      | 85      | 40     | 80     | 10      | 10      | 23      |
| D | 85   | 85      | 95      | 40     | 80     | 10      | 10      | 23      |
| E | 85   | 85      | 85      | 80     | 80     | 10      | 10      | 19      |
| F | 85   | 85      | 85      | 40     | 40     | 10      | 10      | 15      |
| G | 85   | 45      | 85      | 40     | 80     | 10      | 10      | 10      |
| H | 45   | 85      | 85      | 40     | 80     | 10      | 10      | 4       |
| I | 85   | 85      | 45      | 40     | 80     | 10      | 10      | 1       |

foram realizadas com o objetivo de verificar a influência dos parâmetros na estabilidade, conforme mostrado pela tabela 6.1.

Foram realizados alguns testes envolvendo valores críticos das constantes. São valores limites entre a extinção e a coexistência das duas espécies que, se diminuídos, fazem com que o sistema vá a extinção independentemente da condição inicial.

Inicialmente, conclui-se que a influência da maioria dos parâmetros no sistema é bem pequena. Entretanto, quando diminui-se drasticamente o valor de alguns deles, o número de extinções aumenta consideravelmente.

Uma outra comparação a ser feita nesses casos é quanto ao estado estacionário das simulações que não registraram a extinção da população de predadores. O objetivo é observar a influência de cada parâmetro no ponto de equilíbrio do sistema. Os resultados dessas simulações são mostrados na Figura 6.6. Pode-se observar pela figura que as alterações nas probabilidades de nascimento de presas e na movimentação de ambas as espécies não têm qualquer influência no estado de equilíbrio do sistema. Pequenas alterações ocorrem quando se aumenta os valores de caça e o nascimento de predadores. Diminuições drásticas feitas no nascimento de presas e predadores e na caça resultam em grandes alterações no estado estacionário do sistema.

Para visualizar alterações significativas no comportamento do sistema, analisou-se um parâmetro de grande influência, a probabilidade de nascimento de predadores. Os gráficos da Figura 6.7 mostram os resultados de duas simulações. Em ambas séries temporais, nota-se o comportamento oscilatório

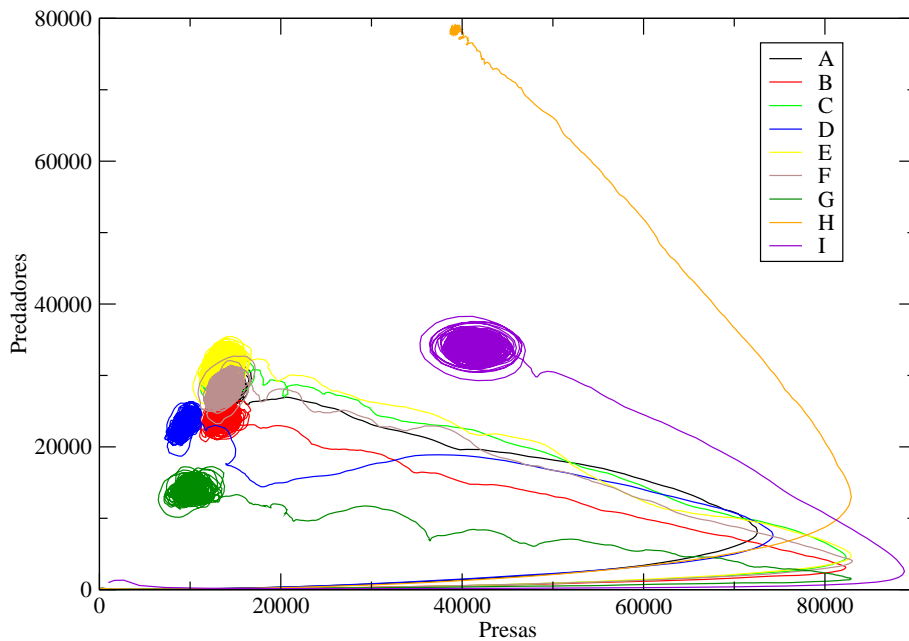


Figura 6.6: Distribuição inicial de 20 indivíduos de cada população em uma rede de  $300 \times 300$  sítios, utilizando os diferentes conjuntos de parâmetros apresentados na tabela 6.1

das duas populações concordando com as considerações feitas na seção 5.2. Na parte *a* da Figura 6.7, a série temporal apresenta um número de presas maior do que o número de predadores. Nesta simulação, adotou-se um número muito baixo para a reprodução dos predadores (25), o que impediu que esta população alcançasse valores muito altos. Em consequência, a população de presas pôde crescer e obter valores superiores à população de predadores. Na parte *b* da Figura 6.7, foi adotada uma alta taxa de reprodução dos predadores (85). Os resultados obtidos desta simulação são bem distintos dos resultados da simulação anterior, pois a população de predadores é capaz de alcançar altos valores fazendo com que as presas tenham valores menores devido a predação.

Nos planos de fase da Figura 6.7 (partes *c* e *d*), as duas simulações confirmam as considerações feitas na seção 2, evidenciando a existência de um ponto assintoticamente estável para o sistema e que são independentes das condições iniciais.

Uma consequência importante para o sistema é o tipo de distribuição espacial das populações que é relacionado a taxa de caça dos predadores. Em situações onde o predador é mais hábil, a formação final é constituída de agrupamentos de presas, com os predadores nas proximidades desses grupos.

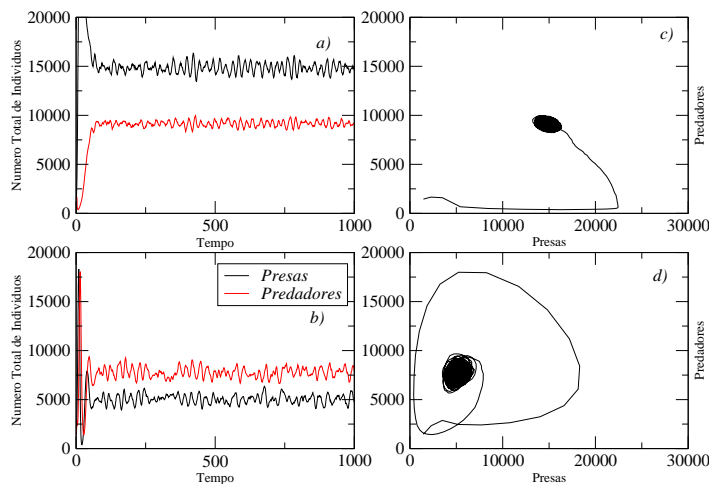


Figura 6.7: Series temporais resultante de simulações que utilizaram diferentes valores de taxa de nascimento de predadores. *a)* A taxa de nascimento dos predadores é de 25. *b)* A taxa foi aumentada para 85. *c)* e *d)* apresentam os planos de fase para essas simulações.

Isso pode ser encarado como um meio de proteção das presas devido à alta probabilidade de caça. É relevante citar que as populações são distribuídas de forma aleatória inicialmente e a rede não possui sítios que privilegiam o desenvolvimento de qualquer população. Em situações onde a taxa de caça elevada é elevada, existe o aparecimento de grupos populacionais, com as presas se agrupando para sobreviver e os predadores vivendo em volta desses grupamentos no estado estacionário do sistema. Em situações onde a taxa de caça dos predadores é baixa, as presas conseguem habitar a região de maneira uniforme, pois os predadores não apresentam obstáculos significativos para a proliferação da população na região. As fotos nas páginas seguintes apresentam as distribuições espaciais para diversos instantes em duas simulações onde foram adotados uma taxa de caça de 85 e 45, respectivamente, onde evidenciam-se claramente essas diferenças na configuração espacial final.

Portanto, os resultados obtidos na simulação do modelo presa-predador com dinâmica espacial mostram que a distribuição inicial dos indivíduos não possui influência no ponto de equilíbrio do sistema, quando o conjunto de parâmetros adotados levarem a coexistência. Entretanto, com a estocasticidade, é possível obter situações onde simulações com os mesmos valores de parâmetros apresentam resultados distintos. Essa característica é mais comum em situações onde o número inicial de indivíduos é baixo. Pode-se concluir que as taxas de mobilidade não possuem influência sobre os pontos

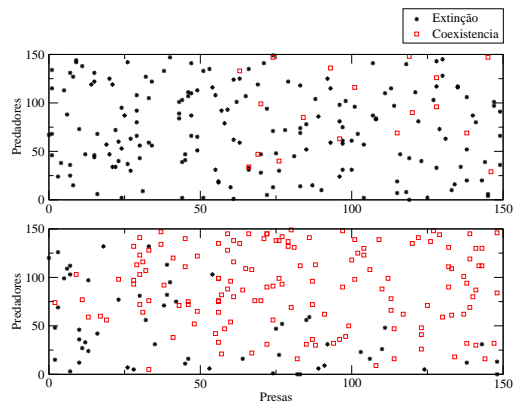
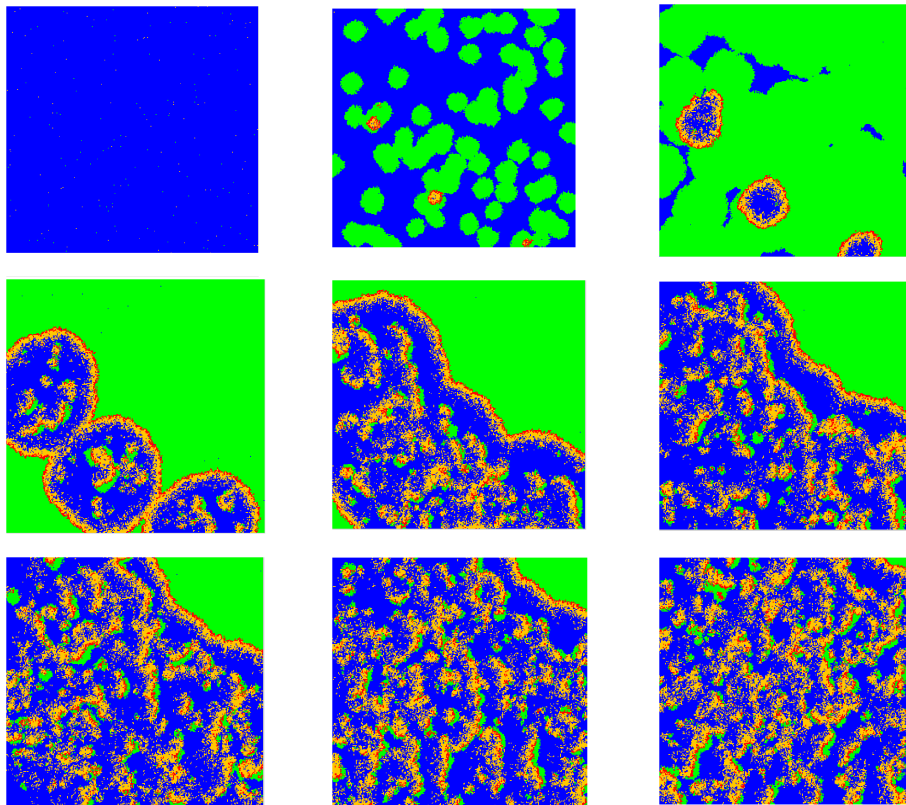
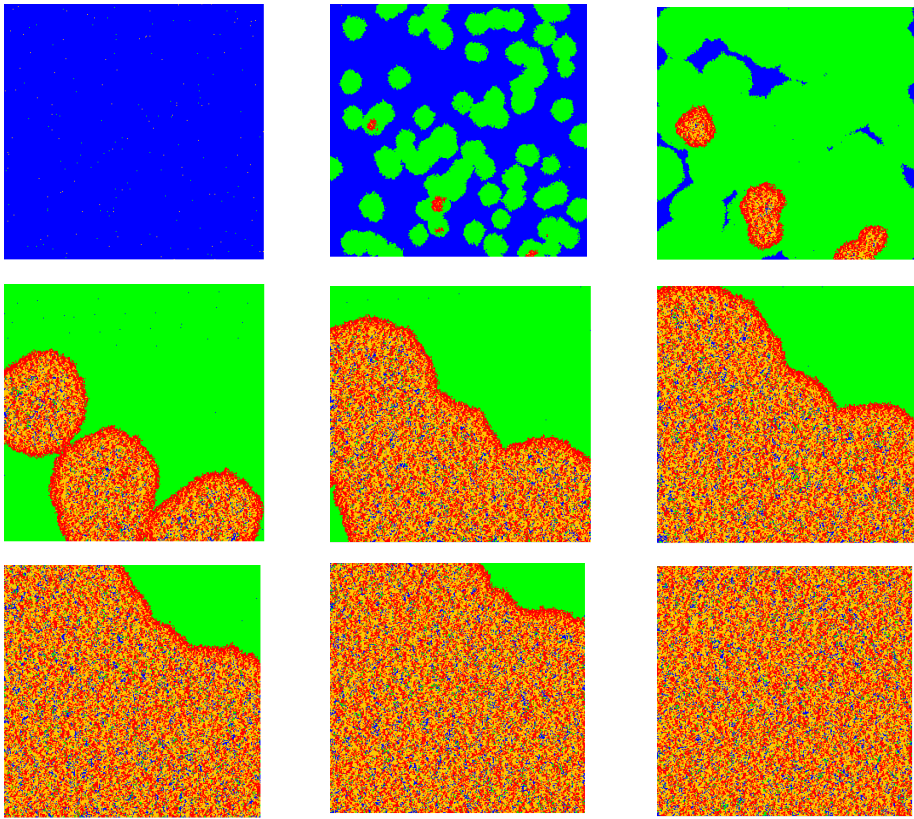


Figura 6.8: *a)* Bacia de atração do sistema utilizando o conjunto de parâmetros da linha I da tabela 6.1. *b)* Bacia de atração do sistema utilizando o conjunto de parâmetros da linha A da tabela 6.1.

de equilíbrio do sistema. Os parâmetros de maior influência são a taxa de nascimento de predadores e de presas e a taxa de caça, sendo este último fator determinante na maneira como as populações se distribuem na região. Predadores hábeis geram populações agrupadas e predadores não hábeis geram populações distribuídas de maneira mais uniforme, no estado estacionário.





## Capítulo 7

# CONCLUSÕES

Utilizando simulação computacional foi possível observar, no modelo da pilha de areia, que a forma de distribuição dos grãos não tem influência no coeficiente angular da reta que caracteriza a Lei de Potência que relaciona o tamanho das avalanches com o número de ocorrências. Independentemente da forma com que os grãos são distribuídos inicialmente nos sítios, encontra-se a mesma Lei de Potências que caracteriza o fenômeno. No entanto, a configuração espacial final dos grãos é suscetível a forma como é realizada a distribuição dos grãos em cada passo. Padrões mais homogêneos são obtidos quando os grãos são distribuídos uniformemente entre os vizinhos. Distribuições não-uniformes geram padrões espaciais não-aleatórios.

Na simulação espacial do modelo Presa-Predador com duas populações, a maneira com que os indivíduos são distribuídos no passo inicial não influi no estado estacionário do sistema. Entretanto, para uma pequena população inicial, os efeitos da estocasticidade são mais acentuados, pois os predadores precisam chegar até as regiões ocupadas por presas antes de alcançarem o limite para a variável fome. Caso alcancem esse grupo, os predadores são capazes de se alimentar e reproduzir. Caso a população de predadores tenha sucesso em sobreviver a esse estado transiente, ela alcançará a capacidade suporte da mesma forma que uma outra população que possua um número inicial elevado de indivíduos. Essa barreira não existe quando a simulação não considera a difusão dos indivíduos. Deve-se ressaltar que, nesse caso, o sistema apresenta grande sensibilidade com relação às variáveis de caça e nascimento de predadores. Essas variáveis estão muito relacionadas entre si, pois, em conjunto, ambas determinam a quantidade de predadores existentes na região. Alterações nessas variáveis causam significativos deslocamentos do ponto de equilíbrio das populações. Em consequência, o sistema apresenta diferentes respostas na maneira com que os indivíduos são distribuídos nos espaço. Predadores numerosos e



hábeis geram configurações espaciais finais caracterizadas por formações de agrupamentos, caso contrário essa distribuição é mais uniforme. A extensão dessa abordagem para um modelo presa-predador com mais populações é o objetivo futuro desse trabalho. De acordo com trabalhos recentes na área, espera-se obter padrões espaciais mais ricos, incluindo a formação de ondas espirais, além dos aglomerados. Espera-se também ser possível relacionar esses diferentes padrões espaciais finais com o estado estacionário do sistema.

# Referências Bibliográficas

- [1] JUNG, C. F., Metodologia para pesquisa e Desenvolvimento - Aplicando a Novas Tecnologias, Produtos e Processos, Ed. Axcel Books, Rio de Janeiro, 2004
- [2] MACHADO. K. D., Equações Diferenciais Aplicadas à Física, Editora UEPG, 1999.
- [3] BOYCE, W.E., DIPRIMA, R. C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, cap. 9, Editora LTC, 1999.
- [4] ANTON, H., Cálculo - Um Novo Horizonte, Volume 2, 6<sup>a</sup> Edição, Ed. Bookman, 2000.
- [5] BASSANEZI, R.C., Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática, Ed. Contexto, 2004.
- [6] MONTEIRO, L.H.A, Sistemas Dinâmicos, ed. Livraria da Fisica, 2002.
- [7] ANTON, H., Cálculo - Um novo horizonte Volume 1, 6<sup>a</sup> Edição, Ed. Bookman, 2000.
- [8] LIMA, E.L., Algebra Linear, IMPA, 1995.
- [9] FARLOW, S. J., Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Dover Publications, INC.,1993
- [10] KREIDER, D.L., An introduction to linear analysis, Ed. Addison-Wesley, 1966.
- [11] MURRAY, J.D., Mathematical Biology, cap.3, ed. Springer, 1993.
- [12] CUMINATO, J.A., MENEGUETTE Jr., M., Discretização de Equações Diferenciais Parciais - Técnicas de Diferenças Finitas, XIX CNMAC, 1996.
- [13] BARONE, D., Sociedades Artificiais: A Nova Fronteira da Inteligência nas Máquinas, ed. Bookman, Porto Alegre, 2003.

- [14] NUSSENZVEIG, H.M, in Introdução à Complexidade, PALIS, J., in Sistemas Caóticos e Sistemas Complexos, OLIVEIRA, P.M.C., in Autômatos Celulares, GOMES, M.A.F., in Criticalidade Auto-Organizada, editado por H. M. Nussenzveig, Complexidade e Caos, ed. UFRJ/COPEA, Rio de Janeiro, 1999.
- [15] DEITEL, H.M., DEITEL, P.J., C++ Como Programar, terceira edição, ed. Bookman, 2001.
- [16] DEITEL, H.M., DEITEL, P.J., Java Como Programar, cap. 11, quarta edição, ed. Bookman, 2003.
- [17] OLIVEIRA, P.M.C., Computing Boolean Statistical Models, ed. World Scientific, 1990.
- [18] DHAR, D., Self-Organized Critical State of Sandpile Automaton Models, Phys. Rev. Lett. 64, 1613 (1990).
- [19] BAK, P., TANG, C., and WIESENFELD, K., Self-Organized Criticality, Phys. Rev. A. 38, 364, (1988).
- [20] BAK, P., How Nature Works, (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [21] CARNEIRO, M. V., CHARRET, I. C., A Criticalidade Auto-Organizada na Pilha de Areia, Rev. Bras. Ens. Física 27, 571, (2005).
- [22] TOMÉ, T., OLIVEIRA, M.J., Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade, caps. 5 e 11, ed. EDUSP, 2001.