



JAILSON DE ARAUJO RODRIGUES

**DISTRIBUIÇÕES BIVARIADAS GAMA,
EXPONENCIAL E A DISTRIBUIÇÃO BETA
TIPO II UNIVARIADA APLICADAS A DADOS
DE PRECIPITAÇÃO PLUVIOMÉTRICA**

LAVRAS - MG

2013

JAILSON DE ARAUJO RODRIGUES

**DISTRIBUIÇÕES BIVARIADAS GAMA, EXPONENCIAL E A
DISTRIBUIÇÃO BETA TIPO II UNIVARIADA APLICADAS A DADOS
DE PRECIPITAÇÃO PLUVIOMÉTRICA**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós - Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

Orientador
Dr. Lucas Monteiro Chaves

LAVRAS - MG

2012

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Rodrigues, Jailson de Araujo.

Distribuições bivariadas Gama, Exponencial e a distribuição Beta Tipo II univariada aplicadas a dados de precipitação pluviométrica / Jailson de Araujo Rodrigues. – Lavras : UFLA, 2013.

136 p. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2012.

Orientador: Lucas Monteiro Chaves.

Bibliografia.

1. Fenômenos climáticos. 2. Hidrologia. 3. Probabilidade. 4. Produto de variáveis. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.24

JAILSON DE ARAUJO RODRIGUES

**DISTRIBUIÇÕES BIVARIADAS GAMA, EXPONENCIAL E A
DISTRIBUIÇÃO BETA TIPO II UNIVARIADA APLICADAS A DADOS
DE PRECIPITAÇÃO PLUVIOMÉTRICA**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós - Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 23 de Novembro de 2012.

Dr. Fredy Walther Castellares Cáceres UFMG

Dr. João Domingos Scalon UFLA

Dr. Joel Augusto Muniz UFLA

Dr. Marcos Antônio da Cunha Santos UFMG

Dr. Renato Ribeiro de Lima UFLA



Dr. Lucas Monteiro Chaves
Orientador

LAVRAS - MG

2012

Por todo amor, trabalho e carinho, Aos meus amados pais,
Manoel (*in memoriam*) e Luzia.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

A todos os profissionais da Universidade Federal de Lavras (UFLA), e em particular a todos os professores do Departamento de Ciências Exatas (DEX), um verdadeiro centro de excelência, formador de grandes mentes;

Ao Programa Nacional de Cooperação Acadêmica (PROCAD/CAPES), cujo auxílio financeiro foi imprescindível para realização deste trabalho;

Ao professor Dr. Lucas Monteiro Chaves por ser, além de excelente orientador, uma pessoa amiga e possuidora de imenso saber.

Ao professor Dr. Fredy Walther Castellares Cáceres, que no papel de co-orientador foi um dos responsáveis pelo rumo deste trabalho;

Ao professor Dr. Lurimar Smera Batista do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), pela sua competência e presteza.

Aos membros da banca examinadora, pelas críticas e sugestões que tanto contribuíram para o engrandecimento deste trabalho;

Aos amigos e colegas de doutorado: Ângela, Azly, Cleide, Edmary, Isabel, José Otaviano (*in memoriam*), Norma, Tânia e Walter, pela amizade e companheirismo nas longas horas de estudo;

Quero expressar a minha gratidão aos amigos Jaime, Marcinho, Nelson, Luís Vasquez e Regilson, pela participação nos bons momentos vivenciados;

Agradeço também aos amigos Dani, Leandro, Luzia, Edcarlos, verdadeiros "irmãos de orientação";

Não poderia deixar de agradecer a ajuda da amiga Ana Paula, uma pessoa maravilhosa de uma generosidade ímpar;

A todos que não foram citados, mas que direta ou indiretamente contribuíram de alguma forma para a realização deste sonho, sou eternamente grato.

Jaílson de Araújo Rodrigues

APRESENTAÇÃO

Os estudos realizados para esta pesquisa fazem parte da linha de pesquisa Teoria Matemática e Métodos Estatísticos, do Grupo de Pesquisa em Planejamento e Análise de Experimentos, do Departamento de Ciências Exatas (DEX), da Universidade Federal de Lavras (UFLA), cadastrado e certificado na base de grupos de pesquisa do CNPq. Está inserida no projeto Seguro Agrícola: Modelagem Estatística e Precificação, do Programa Nacional de Cooperação Acadêmica (PRO- CAD/CAPES), que envolve as seguintes instituições federais de ensino superior: ESALQ/USP, IME/USP, UFLA e UFMG.

RESUMO

As precipitações pluviométricas são fenômenos cíclicos com ocorrência e intensidade aleatória, resultante da água condensada na atmosfera que atinge gravitacionalmente a superfície terrestre. A intensidade e frequência com que esse fenômeno ocorre influencia diretamente nos habitats naturais, ecossistemas e em muitos setores econômicos e sociais desde a agricultura, transportes até o fornecimento urbano de água. Neste trabalho, são apresentadas algumas propriedades das distribuições gama bivariada de Smith, Adelfang e Tubbs, exponencial bivariada Gumbel tipo I e da distribuição beta tipo I univariada. Esses modelos são utilizados na análise das importantes variáveis: período com precipitação pluviométrica e o período contíguo sem precipitação pluviométrica. Os resultados obtidos apontam a adequação dos modelos. Utilizando a cópula de Gumbel-Barnett, foi construída uma distribuição exponencial bivariada que generaliza a distribuição Gumbel tipo I. As principais propriedades dessa distribuição foram deduzidas. O modelo foi utilizado na análise da estrutura de correlação existente entre as sequências de dias com precipitação e as sequências de dias sem ocorrência de precipitação. Os resultados indicaram a viabilidade do modelo.

Palavras-chave: Fenômenos climáticos. Hidrologia. Probabilidade. Produto de variáveis aleatórias. Quociente de variáveis aleatórias. Secas.

ABSTRACT

The rainfalls are recurrent phenomena with random uncertain occurrence and intensity resulting from the condensed water in the atmosphere that reaches the earth's surface by gravity. The intensity and frequency that this phenomenon occurs, direct influence on the natural habitats, ecosystems and many economic and social sectors from agriculture, transport, urban water supply. In this work, we present some properties of bivariate gamma distributions for Smith, Adelfang and Tubbs's bivariate gamma distributions, Gumbel's type I bivariate exponential and univariate beta type I distribution. These models are used in the analysis of important variables, period rainfall and the contiguous period without rainfall. The results indicate the adequacy of the three models. Using the Gumbel-Barnett co- pula was built a bivariate exponential distribution which generalizes the Gumbel's type I bivariate exponential. The main properties of this distribution were derived. The model was used to analyze the structure between the sequences of days with rainfall and sequences of days without rainfall. The results indicate that the model is viable.

Keywords: Climatic phenomena. Drought. Hydrology. Probability. Product of random variables. Ratio of random variables.

LISTA DE FIGURAS

PRIMEIRA PARTE

Figura 1	Funções densidade de probabilidade beta tipo II	22
Figura 2	Funções densidade de probabilidade exponencial.....	23
Figura 3	Funções densidade de probabilidade gama.....	25
Figura 4	Funções densidade de probabilidade log-normal	27
Figura 5	Funções densidade de probabilidade Pareto tipo I	28
Figura 6	Funções densidade de probabilidade tipo II.....	29
Figura 7	Funções densidade de probabilidade Weibull.....	31

SEGUNDA PARTE – ARTIGOS

ARTIGO 1

Figura 1	Fdp Gumbel tipo I, $\theta = 0, 2$	54
Figura 2	Fdp Gumbel tipo I, $\theta = 0, 9$	54
Figura 3	Fdp de $U = X + Y$	58
Figura 4	Fdp de $P = XY$	60
Figura 5	Fdp de $Q = X/(X + Y)$	60
Figura 6	Gráficos de dispersão do período com precipitação versus período sem precipitação para as quatro cidades estudadas.	66
Figura 7	Gráficos de probabilidade para o período de dias com ocorrência de precipitações (X) para as quatro cidades estudadas.	68
Figura 8	Gráficos de probabilidade para o período de dias sem ocorrência de precipitação (Y) para as quatro cidades estudadas.	68
Figura 9	Fdp de U para as cidades pesquisadas.....	69
Figura 10	Fdp de Q para as cidades pesquisadas.	69

ARTIGO 2

Figura 1	Gráficos da fdp (27) para $a = 1, 0, b = 1, 0, \theta = 0, 5$ (preta); $a = 0, 5, b = 3, 5, \theta = 0, 9$ (azul); $a = 3, 0, b = 0, 9, \theta = 0, 3$ (vermelha) e $a = 2, 0, b = 3, 0, \theta = 0, 5$ (verde).	84
Figura 2	Gráficos da fdp (30) para $a = 2, 0, b = 0, 9, \theta = 0, 5$ (preta); $a = 2, 0, b = 4, 0, \theta = 0, 9$ (azul); $a = 0, 6, b = 0, 7, \theta = 1, 0$ (vermelha) e $a = 8, 0, b = 0, 1, \theta = 0, 9$ (verde).	86
Figura 3	Gráficos da fdp (32) para $a = 1, 0, b = 1, 0, \theta = 0, 3$ (preta); $a = 5, 0, b = 4, 0, \theta = 0, 5$ (azul); $a = 0, 9, b = 0, 3, \theta = 0, 6$ (vermelha) e $a = 0, 4, b = 0, 9, \theta = 1, 1$ (verde).	87
Figura 4	Gráficos de dispersão do período de precipitação versus período sem precipitação para as quatro cidades estudadas.	89
Figura 5	Fdp de Q para as cidades de Capela (preta); Lagarto (azul); Laranjeiras (vermelha) e São Cristóvão (verde).	90
Figura 6	Gráficos de probabilidade para o período de dias com ocorrência de precipitações (X) para as quatro cidades estudadas.	91
Figura 7	Gráficos de probabilidade para o período de dias sem ocorrência de precipitação (Y) para as quatro cidades estudadas.	92

ARTIGO 3

Figura 1	Fdp de $U = X + Y$	104
Figura 2	Fdp de $P = XY$	104
Figura 3	Fdp de $Q = X/(X + Y)$	104
Figura 4	Fdp conjunta para os dados ajustados.	110
Figura 5	Fdp ajustada de U	110
Figura 6	Fdp ajustada de Q	110
Figura 7	Gráfico de probabilidade para o período sem precipitação.	111

Figura 8	Gráfico de probabilidade para o período com ocorrência de precipitação.....	1
----------	---	---

ARTIGO 4

Figura 1	Gráficos da fdp de $P = XY$ para diferentes valores paramétricos.	120
Figura 2	Gráficos da fdp de $R = X/Y$ para diferentes valores paramétricos.....	123
Figura 3	Gráficos da fdp de $Q = X/(X + Y)$ para diferentes valores paramétricos.....	123
Figura 4	Fdp ajustada de Q para as cidades de Aracaju e Boquim.....	127
Figura 5	Fdp ajustada de Q para as cidades de Porto da Folha e Umbaúba..	127
Figura 6	Gráficos de probabilidade para o período de dias com ocorrência de precipitações (X) para quatro cidades selecionadas.....	129
Figura 7	Gráficos de probabilidade para o período de dias sem ocorrência de precipitação (Y) para quatro cidades selecionadas.....	130

LISTA DE TABELAS

SEGUNDA PARTE - ARTIGOS

ARTIGO 1

Tabela 1	Localização das estações hidrometeorológicas.	65
Tabela 2	p-valor do teste ρ de Spearman.	66
Tabela 3	Estimativas do parâmetro θ	67

ARTIGO 2

Tabela 1	Localização das estações hidrometeorológicas.	88
Tabela 2	p-valor do teste ρ de Spearman.	89
Tabela 3	Estimativas dos parâmetros.	90

ARTIGO 4

Tabela 1	Localização e tipo das estações.	124
Tabela 2	p-valores do teste ρ de Spearman.	124
Tabela 3	Estimativas dos parâmetros e erros padrões.	126
Tabela 4	Estimativas da média de $Q = X/(X + Y)$	128

SUMÁRIO

	PRIMEIRA PARTE	
1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	16
1.2	Estrutura do trabalho	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	Precipitações pluviométricas	19
2.2	Modelos probabilísticos univariados contínuos utilizados em processos hidrológicos	20
2.3	Distribuição beta do tipo II	21
2.3.1	Distribuição exponencial	22
2.3.2	Distribuição gama	24
2.3.3	Distribuição log-normal	26
2.3.4	Distribuições Pareto	27
2.3.5	Distribuição Weibull	30
2.4	Modelos probabilísticos bivariados contínuos utilizados em processos hidrológicos	31
2.4.1	Distribuição gama bivariada de Izama	32
2.4.2	Distribuição gama bivariada de Cherian	33
2.4.3	Distribuição gama bivariada de Smith, Adelfang e Tubbs	34
2.4.4	Distribuição gama bivariada de Loáiciga e Leipnik	35
2.4.5	Distribuição gama bivariada de Crovelli	36
2.4.6	Distribuição gama Pareto bivariada	36
2.4.7	Distribuição exponencial bivariada de Friday e Patil	37
2.4.8	Distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I	38
2.4.9	Distribuição Pareto bivariada	39
2.4.10	Distribuição bivariada com marginais gama e beta	39
2.5	Cópulas bivariadas	40
3	CONSIDERAÇÕES GERAIS	46
	REFERÊNCIAS	47
	SEGUNDA PARTE - ARTIGOS	52
	ARTIGO 1 Algumas propriedades da distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I com uma aplicação a dados de precipitação pluviométrica	52

ARTIGO 2 Uma nova distribuição exponencial bivariada construída a partir da cópula de Gumbell-Barnett com uma aplicação em modelagem de precipitações pluviométricas	73
ARTIGO 3 Distribuição gama bivariada de Smith, Adelfang e Tubbs: soma, produto e quociente das variáveis componentes.....	96
ARTIGO 4 Combinações de variáveis aleatórias beta tipo II aplicadas em modelagem hidrológica	114
CONSIDERAÇÕES FINAIS	135

PRIMEIRA PARTE

1 INTRODUÇÃO

As precipitações pluviométricas, ou chuvas, ocorrem quando a água condensada na atmosfera precipita-se sobre a superfície terrestre. São fenômenos climáticos periódicos que se apresentam em todo planeta. Sua frequência em déficit ou excesso são agentes causadores de impactos negativos em diversos setores econômicos e sociais, refletindo diretamente na qualidade de vida da população.

A persistência de valores de precipitação abaixo do normal ocasiona um fenômeno natural conhecido como seca. Contrariamente a outros desastres naturais, que geralmente atuam de forma imediata e com impactos instantâneos, a seca é um desastre natural mais complexo que se manifesta com intensidades diferentes, dependendo dos índices de precipitações pluviométricas, e que afeta um maior número de pessoas durante um longo tempo. No Brasil, por exemplo, a seca age como um dos principais fatores para que a Região Nordeste possua o pior Índice de Desenvolvimento Humano do País (IDH).

Os impactos resultantes do excesso de precipitação pluviométrica variam conforme a escala espacial e temporal em que o fenômeno ocorre. Podendo provocar graves prejuízos de ordem socioeconômica, nomeadamente em setores agrícola e recursos hídricos, originando muitas vezes o desenvolvimento e propagação de pragas e pestes, o que designadamente em países com economias débeis, leva à escassez de alimentos e água potável, e conseqüentemente à perda de um número significativo de vidas humanas.

Em face dos problemas apresentados, existe uma preocupação crescente em criar mecanismos eficazes para descrever e prever tal fenômeno, para

tomada de decisões por parte dos órgãos competentes, proporcionando o planejamento de ações preventivas conscientes e minimizando seus efeitos.

1.1 Objetivos

O autor do presente trabalho teve como objetivo geral propor a utilização de determinados modelos probabilísticos como uma alternativa viável para analisar, descrever e prever variáveis meteorológicas importantes associadas as precipitações pluviométricas.

Dentre os objetivos específicos, pode-se destacar:

- a) Estudar a distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I no ajuste de dados reais de precipitações pluviométricas. Este modelo é muito utilizado em hidrologia e análise de sobrevivência;
- b) A partir do estudo dos modelos já existentes, construir um modelo bivariado robusto, tratável do ponto de vista matemático, que possa ser empregado no estudo de processos hidrológicos, principalmente na análise de eventos de precipitação;
- c) Determinar a distribuição da soma, produto e proporção das variáveis componentes do modelo gama bivariado de Smith, Adelfang e Tubbs, bem como seus respectivos momentos, aplicando os resultados obtidos na modelagem de precipitações pluviométricas;
- d) Estudar o potencial do modelo beta tipo II na análise de precipitações pluviométricas.

Neste contexto, são deduzidas as distribuições do produto, razão e proporção de componentes beta tipo II.

1.2 Estrutura do trabalho

O texto está organizado em formato de coletânea de artigos sobre modelagem de precipitações pluviométricas, conforme as normas da Universidade Federal de Lavras - UFLA (2010).

1. Na primeira parte são apresentados de forma breve, a motivação, contextualização e objetivos do trabalho. A segunda parte é composta por quatro artigos sobre utilização de modelos contínuos no estudo de precipitações pluviométricas.

- a) No artigo 1 são deduzidas as distribuições exatas das importantes variáveis $X + Y$, XY e $X/(X + Y)$, juntamente com seus respectivos momentos, quando X e Y seguem o modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I. Os resultados obtidos são utilizados no estudo da pluviometria das cidades de Aquidabã, Aracaju, Boquim, Nossa Senhora da Glória, Itabaiana, Porto da Folha, Poço Redondo e Umbaúba todas situadas no Estado de Sergipe.
- b) No artigo 2 é utilizada a cópula de Gumbel-Barnett para construir uma distribuição exponencial bivariada, que é uma generalização do modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I. A nova distribuição é aplicada na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas em cidades do Estado de Sergipe. As principais propriedades dessa distribuição são deduzidas.

- c) No artigo 3 são deduzidas as distribuições exatas das combinações de variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = Y/(X + Y)$, juntamente com seus respectivos momentos, quando X e Y seguem o modelo gama bivariado de Smith, Adelfang e Tubbs. Os resultados obtidos são aplicados em dados de precipitações pluviométricas ocorridas na cidade de Passo Fundo, Rio Grande do Sul.
- d) No artigo 4 são deduzidas as distribuições exatas das combinações de variáveis $P = XY$, $R = X/Y$ e $Q = Y/(X + Y)$ quando X e Y são variáveis beta tipo II e independentes. Os resultados obtidos são empregados na modelagem de dados reais de precipitação.

2. Nas considerações finais são apresentados, de forma sucinta, os aspectos principais deste trabalho e algumas perspectivas de trabalhos futuros

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Precipitações pluviométricas

Medir dados de precipitação pluviométrica é muito importante em diversos contextos, tais como: produtividade de culturas agrícolas, manejo dos recursos hídricos, avaliação ambiental, erosão hídrica etc. A obtenção da correta distribuição temporal para precipitação é relevante no planejamento agrícola, no que diz respeito à instalação de culturas. Além da influência na agricultura, períodos de estiagens muito longos afetam o nível de água dos mananciais e dos reservatórios das usinas hidrelétricas, trazendo problemas para o abastecimento urbano e na geração de energia elétrica. A quantificação das chuvas é importante no planejamento agrícola e ambiental para o correto dimensionamento das obras, tanto na construção civil quanto na conservação do solo (VIEIRA; CARVALHO, 2001).

Botelho e Morais (1999) destacam o papel das precipitações pluviométricas, como principal fonte de água para a agricultura, que por vezes tem comprometido o desenvolvimento da produção agrícola, em função de sua variabilidade não uniforme, ora com grandes períodos de estiagem, ora com consideráveis aguaceiros de curta duração, que superam a capacidade de retenção de água pelo solo, provocando enchentes e inundações. Sampaio et al. (2007) também alertam sobre a impossibilidade de saber qual a evolução exata dos valores de precipitação ao longo do tempo e do espaço em função de sua natureza aleatória. A partir dessas dificuldades, modelos probabilísticos foram introduzidos para ajustar séries históricas de precipitações. Modelos probabilísticos como os modelos gama, exponencial e Pareto são utilizados para o cálculo tanto da precipitação esperada como da duração do período de precipitação.

No Brasil, os estudos envolvendo precipitação pluviométrica são difíceis de serem executados devido ao fato das séries históricas disponíveis serem, na maioria dos casos, muito pequenas para efetua-los. Segundo Genneville e Boock (1983), quanto mais reduzidas forem as séries de precipitação disponíveis, maiores as chances de se ter resultados tendenciosos.

Para o monitoramento de precipitações pluviométricas é utilizado o Índice Pluviométrico que representa a somatória da quantidade da precipitação (chuva, neve, granizo) ocorrida num determinado local durante um dado período de tempo. Através desse índice, pode-se determinar a ocorrência de chuvas e sua intensidade.

2.2 Modelos probabilísticos univariados contínuos utilizados em processos hidrológicos

A modelagem probabilística pode ser destacada como uma das técnicas empregadas na análise de vários fenômenos hidrológicos, incluindo precipitação pluviométrica.

Quantidades como duração, intensidade e magnitude são importantes elementos que são utilizados para descrever precipitações. Através da Teoria das Probabilidades esses elementos podem ser caracterizados por variáveis aleatórias, cujos comportamentos são descritos por distribuições de probabilidade.

Em consequência de sua natureza estocástica, essas variáveis podem ser estudadas utilizando-se diferentes modelos. Qual é o mais simples? Qual é o mais flexível?

Qual apresenta melhor ajuste? Essas são questões práticas que exigem respostas por parte dos cientistas que pesquisam na área.

Diversos estudos envolvendo modelagem probabilística de processos hidrológicos podem ser encontrados na literatura. Diferentes distribuições univariadas contínuas têm sido utilizadas para descrever o comportamento desses processos.

Nas subseções a seguir são apresentadas algumas dessas distribuições.

2.3 Distribuição beta do tipo II

Uma variável aleatória X tem distribuição beta tipo II quando sua função densidade de probabilidade é da forma:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} (1+x)^{-(\alpha+\beta)}}{B(\alpha, \beta)}, \quad (1)$$

em que $x > 0$, $\alpha > 0$ é um parâmetro de forma, $\beta > 0$ é um parâmetro de escala e $B(\alpha; \beta)$ representa a função beta,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt. \quad (2)$$

Na Figura 1 são exibidas algumas formas possíveis da densidade beta tipo II para diferentes valores paramétricos.

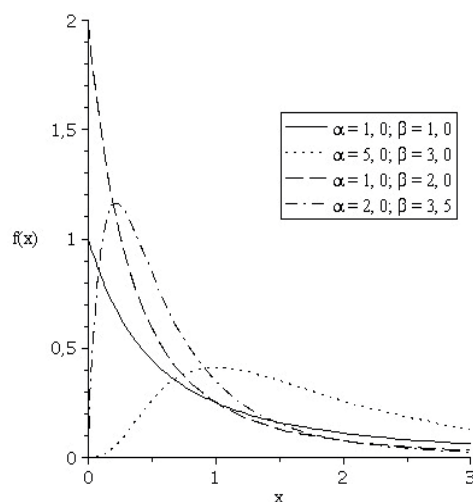


Figura 1 Funções densidade de probabilidade beta tipo II

A distribuição beta tipo II foi empregada por Rodrigues et al. (2012) para estudar precipitações pluviométricas ocorridas nas cidades de Aquidabã, Aracaju, Boquim, Nossa Senhora da Glória, Itabaiana, Porto da Folha, Poço Redondo e Umbaúba, todas situadas no Estado de Sergipe. Critérios gráficos indicaram a adequação do modelo em relação ao conjunto de dados estudado.

Silva (2011) estudou a pluviometria da cidade de Passo Fundo no Rio Grande do Sul utilizando o modelo beta tipo II. O teste χ^2 evidenciou o bom ajuste do modelo em relação às condições pluviométricas da região.

2.3.1 Distribuição exponencial

Uma variável aleatória X tem distribuição exponencial quando sua função densidade de probabilidade é da forma:

$$f(x) = \beta \exp(-\beta x), \quad (3)$$

sendo que $x > 0$ e $\beta > 0$ é um parâmetro de escala. Na Figura 2 são ilustradas algumas formas dessa função densidade de probabilidade.

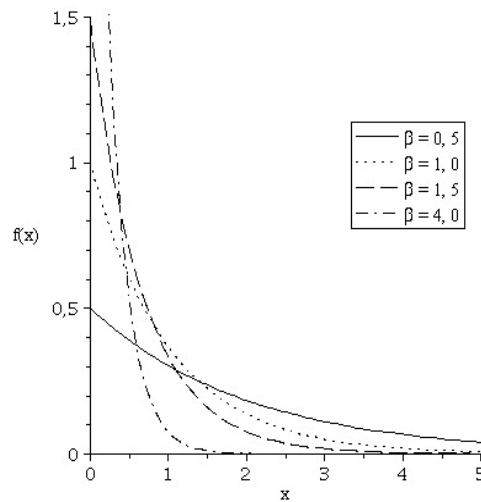


Figura 2 Funções densidade de probabilidade exponencial.

O modelo exponencial foi utilizado por Shiau e Morrades (2009) para descrever período de seca. Os dados analisados foram coletados nas estações de Abadan localizada no sul do Iran e Anzali no norte do Iran. A qualidade de ajuste da distribuição foi verificada utilizando critérios gráficos, os resultados indicaram a adequação do modelo.

Yang e Nadarajah (2006) utilizaram a distribuição exponencial para descrever o período de seca e as distribuições exponencial, gama, Pareto, Weibull e log-normal para descrever a intensidade da seca, com isso foi possível analisar a magnitude da seca, obtida pelo produto, período de seca x intensidade. O modelo exponencial descreveu adequadamente os dados de duração de seca.

Entretanto, na descrição da intensidade de seca, a distribuição exponencial apresentou ajuste inferior em relação aos demais modelos analisados.

A modelagem da duração de secas utilizando a distribuição exponencial também foi feita por Shiau (2006). Foram analisadas as secas ocorridas em Wushantou, no sul de Taiwan, no período de 1932 a 2001. O modelo apresentou um bom ajuste, o que foi comprovado via critério gráfico P-P plot.

2.3.2 Distribuição gama

Uma variável aleatória X tem distribuição gama quando sua função densidade de probabilidade para $x > 0$ é da forma:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta x), \quad (4)$$

sendo que $\alpha > 0$ é um parâmetro de forma, $\beta > 0$ é um parâmetro de escala e $\Gamma(\cdot)$ indica a função matemática gama, definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x) dx. \quad (5)$$

Devido a sua versatilidade, a gama é uma das distribuições mais utilizadas na Estatística. Dependendo dos valores dos parâmetros esse modelo recebe nomes especiais. Para $\alpha = 1$, tem-se a distribuição exponencial. Caso $\alpha = n / 2$ com n inteiro positivo e $\beta = 1 / 2$, tem-se o importante modelo qui-quadrado, com n graus de liberdade. Quando $\alpha = n$ com n inteiro positivo, a distribuição gama reduz-se ao modelo Erlang de ordem n .

Para exemplificar a versatilidade do modelo gama, é apresentado na Figura 3 o gráfico de sua densidade para alguns valores paramétricos.

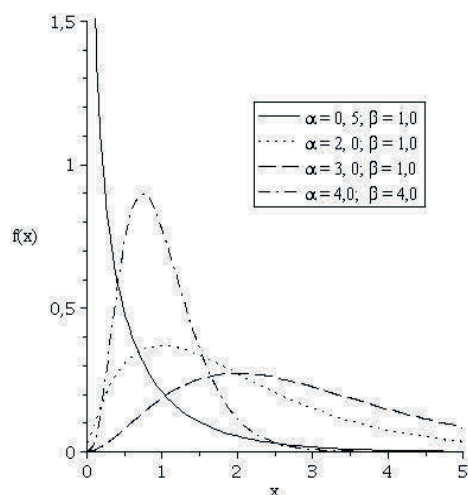


Figura 3 Funções densidade de probabilidade gama

Botelho e Moraes (1999) utilizaram uma série histórica de trinta anos com dados diários de precipitações ocorridas na cidade de Lavras - MG para ajuste do modelo gama o que possibilitou descrever parte da pluviometria da região.

Araújo et al. (2001) estudaram o potencial da distribuição gama na previsão de precipitações para o município de Boa Vista, no Estado de Roraima. Foram utilizados dados de precipitação pluviométrica mensal de uma série histórica compreendida entre os anos de 1923 a 1997. Verificou-se um bom ajuste dos valores mensais de precipitação pluviométrica, exceto para os meses secos, de janeiro e fevereiro.

Longo et al. (2006) avaliaram o uso das distribuições gama e log-normal na estimação de precipitações pluviais prováveis quinzenais no Estado do Paraná, utilizando como testes de aderência, o teste qui-quadrado e o teste de Kolmogorov-Smirnov. Foram analisados dados diários de precipitação de vinte duas estações de medição. Os resultados mostraram que a distribuição gama obteve melhor ajuste das condições pluviométricas do Estado.

Sampaio et al. (2007), considerando as distribuições gama e log-normal, estudaram a distribuição da precipitação mensal para o Estado do Paraná. Os resultados obtidos indicaram que a distribuição gama ajustou-se adequadamente à pluviometria do Estado.

A distribuição gama tem sido o modelo tradicionalmente utilizado na descrição de intensidade de seca. Este fato levou Nadarajah e Gupta (2007), a introduzirem uma generalização do modelo gama para estudar a intensidades de secas ocorridas no Estado de Nebraska. Os resultados indicaram que a nova distribuição fornecia um excelente ajuste para os dados de seca, melhor que o ajuste obtido com o modelo gama usual. Para a comparação dos dois modelos foi utilizado o logaritmo da função de verossimilhança.

Shakil e Kibria (2009) utilizaram a distribuição da combinação linear de variáveis gama e Rayleigh para modelar dados de precipitações. A boa qualidade de ajuste do modelo foi verificada por meio do teste qui-quadrado de aderência.

A distribuição gama foi empregada por Rodrigues et al. (2011b) para modelagem das probabilidades de sequências de dias com precipitação na cidade de Vitória da Conquista no sudoeste da Bahia. O critério gráfico P-P plot indicou o bom ajuste do modelo.

2.3.3 Distribuição log-normal

Uma variável aleatória X tem distribuição log-normal quando sua função densidade de probabilidade para $x > 0$ é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (6)$$

sendo que $-\infty < \mu < +\infty$ é um parâmetro de escala e $\sigma > 0$ é um parâmetro de forma.

Algumas formas possíveis da densidade log-normal podem ser visualizadas na Figura 4.

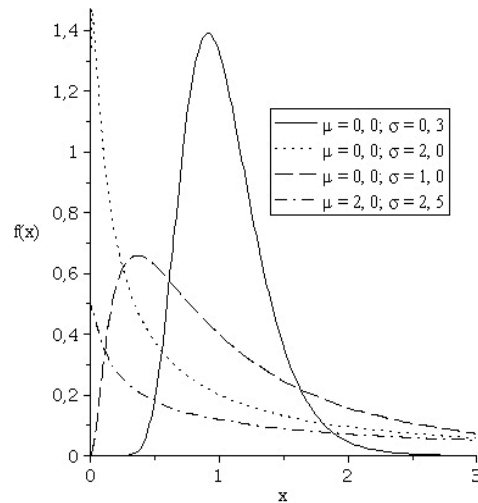


Figura 4 Funções densidade de probabilidade log-normal

Rodrigues, Silva e Santos Filho (2012), considerando os modelos gama e log-normal, analisaram a distribuição da precipitação mensal na cidade de Bento Gonçalves no Rio Grande do Sul. Os dados utilizados correspondiam às precipitações pluviométricas mensais no período de janeiro de 2001 a dezembro de 2011. O teste de Kolmogorov-Sminorv foi empregado para verificar a aderência dos modelos e ambos os modelos apresentaram aderência à nível de 5%.

2.3.4 Distribuições Pareto

Uma variável aleatória X tem distribuição Pareto tipo I quando sua função densidade de probabilidade é da forma:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{\alpha+1}, \quad (7)$$

em que $x \geq \beta > 0$, $\alpha > 0$ é um parâmetro de forma e $\beta > 0$ é um parâmetro de escala.

Uma variável aleatória X tem distribuição Pareto tipo II quando sua função densidade de probabilidade é da forma:

$$f(x) = \alpha\beta^\alpha (x + \beta)^{-\alpha-1}, \quad (8)$$

em que $x \geq \beta > 0$, $\alpha > 0$ é um parâmetro de forma e $\beta > 0$ é um parâmetro de escala.

Nas Figuras 5 e 6 são ilustradas algumas formas das densidades Pareto tipo I e tipo II para diferentes valores paramétricos.

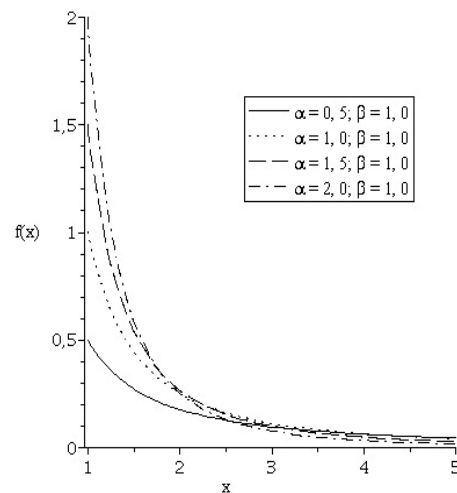


Figura 5 Funções densidade de probabilidade Pareto tipo I

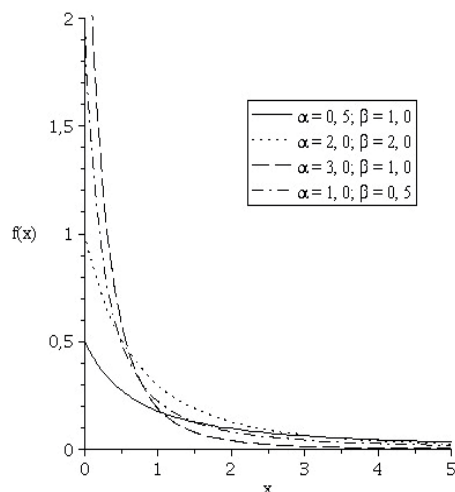


Figura 6 Funções densidade de probabilidade tipo II

Nadarajah (2008) empregou as distribuições da soma, produto e proporção de componentes Pareto generalizada, a qual foi introduzida por ele, para caracterizar secas através do seu tempo de retorno, sua magnitude e sua proporção, respectivamente.

Os dados consistiam em uma série histórica de mais de cem anos de medições mensais do Índice de Severidade de Seca de Palmer no Estado de Nebraska.

Nadarajah e Ali (2008) modelaram a precipitação diária máxima anual utilizando a distribuição Pareto tipo II. Os dados consistiam das medições diárias do índice pluviométrico de quatorze estações meteorológicas situadas na Flórida, no período compreendido de 1901 até 2003.

2.3.5 Distribuição Weibull

Uma variável aleatória X tem distribuição Weibull quando sua função densidade de probabilidade para $x > 0$ é dada por:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right], \quad (9)$$

sendo que $\alpha > 0$ é um parâmetro de forma e $\beta > 0$ é um parâmetro de escala.

A distribuição Weibull reduz-se a exponencial quando $\alpha = 1$ e é denominada distribuição Rayleigh caso $\alpha = 2$. Algumas formas da densidade Weibull são exibidas na Figura 7.

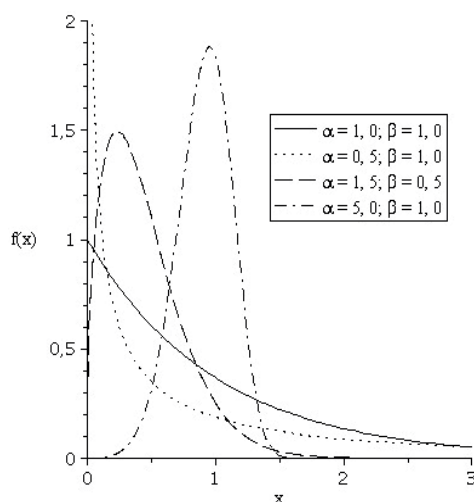


Figura 7 Funções densidade de probabilidade Weibull

Utilizando os modelos gama, Weibull, exponencial e log-normal, Silva et al. (2007) observaram que as distribuições gama e Weibull foram as que apresentaram melhores resultados na descrição da variação da probabilidade de ocorrência de precipitação diária, durante os meses do ano, em Santa Maria, RS.

Yang e Nadarajah (2006) estudaram o potencial da distribuição do produto de variáveis aleatórias XY , quando X é exponencialmente distribuída e Y é proveniente da família gama, Weibull, Pareto ou log-normal, na descrição da magnitude de secas ocorridas em Nebraska-EUA. O modelo Weibull foi o que apresentou melhor ajuste em relação aos dados de intensidade de seca.

2.4 Modelos probabilísticos bivariados contínuos utilizados em processos hidrológicos

A dependência entre duas variáveis aleatórias surge em diversas áreas aplicadas, dentre elas a hidrologia. Nesse caso, os fenômenos apresentam-se

com natureza bidimensional, exigindo o uso de modelos bivariados correlacionados.

A simples análise unidimensional fornece informações limitadas do evento, não sendo suficiente para descrevê-lo em sua plenitude. Nesse contexto, diversos modelos bivariados têm sido propostos na literatura, destacando-se os modelos gama bivariado, exponencial bivariado e Pareto bivariado.

2.4.1 Distribuição gama bivariada de Izama

Izama (1965) propôs um modelo bigama tri-paramétrico para analisar dados de precipitações ocorridas na região sul do Distrito de Kanto no Japão. A função densidade de probabilidade conjunta dessa distribuição é dada por:

$$f(x, y) = \frac{(xy)^{(\nu-1)/2}}{\Gamma(\nu) (\beta_1\beta_2)^{(\nu+1)/2} (1-\rho) \rho^{(\nu-1)/2}} \exp\left[-\frac{1}{1-\rho} \left(\frac{x}{\beta_1} + \frac{y}{\beta_2}\right)\right] \times I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho xy}}{\beta_1\beta_2(1-\rho)}\right), \quad (10)$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $0 < \rho < 1$ e $I_{\nu-1}(\cdot)$ denota a função de Bessel modificada de tipo I,

$$I_{\nu-1}(x) = \frac{x^{\nu-1}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu)_k k}. \quad (11)$$

As marginais de X e Y são gama distribuídas com densidades:

$$f_Y(x) = \frac{x^{\nu-1}}{\beta_1^\nu \Gamma(\nu)} \exp(-x/\beta_1)$$

$$e \quad f_Y(y) = \frac{y^{\nu-1}}{\beta_2^\nu \Gamma(\nu)} \exp(-y/\beta_2).$$

2.4.2 Distribuição gama bivariada de Cherian

A função densidade de probabilidade conjunta da distribuição gama bivariada de Cherian (1941) é dada por:

$$f(x, y) = \frac{\exp(-x-y)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha_3)} \int_0^{\min(x,y)} (x-z)^{\alpha_1} (y-z)^{\alpha_2-1} z^{\alpha_3-1} \exp(z) dz, \quad (12)$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ e $\alpha_3 > 0$. As marginais são gama distribuídas com parâmetros de forma $\alpha_1 + \alpha_3$ e $\alpha_2 + \alpha_3$.

Nadarajah e Gupta (2006a) utilizaram essa distribuição para modelar a duração do período de seca e a duração do período sem seca, o que possibilitou determinar a distribuição da proporção do período com seca. O ajuste do modelo se deu por meio de uma base de dados de secas ocorridas em Nebraska. A qualidade de ajuste do modelo foi verificada utilizando intervalos de confiança para média das variáveis estudadas.

Vrac, Naveau e Drobinski (2007) empregaram com sucesso esse modelo na análise da dependência espacial de precipitações ocorridas nas cidades de St Alban, Perreux e Riorges na Região Mediterrânea da França. Os dados observados cobrem eventos de precipitações ocorridas entre 01 de janeiro de 1994 e 31 de dezembro de 2004.

2.4.3 Distribuição gama bivariada de Smith, Adelfang e Tubbs

Smith, Adelfang e Tubbs (1982) apresentaram uma distribuição gama bivariada com função densidade de probabilidade conjunta,

$$f(x, y) = \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \exp[-(x+y)/(1-\eta)]}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k I_{\beta+k-1} \left(\frac{2\sqrt{\eta xy}}{1-\eta} \right), \quad (13)$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\beta > \alpha$,

$$a_k = \frac{(\eta y)^k \Gamma(\beta - \alpha + k) (1 - \eta)^{\beta-1}}{k! (\eta xy)^{(\beta+k-1)/2}}$$

e

$$\eta = \rho \frac{\bar{\beta}}{\alpha} \quad \text{com } 1 > \eta > 0.$$

O parâmetro ρ denota o coeficiente de correlação linear entre X e Y . As marginais X e Y são gama distribuídas com densidades:

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-x)$$

e

$$f_Y(y) = \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \exp(-y).$$

Yue (2001) utilizou uma generalização dessa distribuição para estudar dados de precipitações ocorridas na província de Quebec no Canadá. Foram analisados dados diários de precipitações ocorridas no período de 1919 até 1995. O bom ajuste da distribuição foi comprovado utilizando procedimentos gráficos.

Em uma revisão bibliográfica da utilização de distribuições gama bivariadas em aplicações hidrológicas, Yue, Ouarda e Bobee (2001), apontaram as vantagens e desvantagens desse modelo na análise de precipitações. A estimação dos parâmetros foi feito por meio do método de inferência via marginais. O teste de aderência de Kolmogorov-Sminorv aplicado nas distribuições marginais indicou o bom ajuste do modelo.

Rodrigues et al. (2011c) empregou essa distribuição na modelagem de sequência de dias com ocorrência de precipitação e sem ocorrência de precipitação. Foram analisados dados de precipitação pluviométrica da cidade de Passo Fundo no Rio Grande do Sul. O modelo foi ajustado pelo método da máxima verossimilhança via marginais. Os resultados obtidos indicaram o bom ajuste do modelo em relação aos dados observados.

2.4.4 Distribuição gama bivariada de Loáiciga e Leipnik

A distribuição gama bivariada de Loáiciga e Leipnik (2005) é uma generalização de uma distribuição gama bivariada já existente (KIBBLE, 1941). Sua função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n A_{nkj} x^{\lambda'_1+k-n} y^{\lambda'_2+j-n} \exp\left(-\frac{x}{b_1} - \frac{y}{b_2}\right), \quad (14)$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\lambda'_i = \lambda_i - 1$, $\lambda_i = \alpha_i(n + \gamma)$ e

$$A_{nkj} = \frac{(-1)^{n+k+j} \beta^n (n!)^2}{b_1^{\lambda'_1+k+1} b_2^{\lambda'_2+j+1} \Gamma(\lambda_1) \Gamma(\lambda_2)} \binom{-\gamma}{n} \binom{\lambda'_1}{n-k} \binom{\lambda'_2}{n-j}, \quad (15)$$

em que $\gamma > 0$, $\alpha_i > 0$ e $b_i > 0$, $i = 1, 2$. As marginais X e Y são gama distribuídas com parâmetros de forma $\gamma\alpha_i > 0$ e parâmetros de escala $b_i > 0$, respectivamente.

Esse modelo foi construído com a finalidade de avaliar a qualidade da água através da correlação entre coliformes fecais e estreptococos fecais, para isso foram utilizadas amostras de água de Las Palmas Creek e Santa Barbara na Califórnia (LOÁICIGA; LEIPNIK, 2005).

Nadarajah e Kotz (2007) deduziram as distribuições exatas da soma $X + Y$ e do produto XY , quando X e Y seguem esse modelo.

2.4.5 Distribuição gama bivariada de Crovelli

Dentre os diferentes modelos gama bivariados existentes na literatura (BALAKRISHNAN; LAI, 2009), um modelo simples e flexível é o modelo de Crovelli, cuja função densidade de probabilidade conjunta é dada a seguir:

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha\beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{se } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \quad (16) \\ \alpha\beta \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)] & \text{se } 0 \leq \beta y \leq \alpha x \quad (17) \end{cases}$$

sendo que $x > 0$, $y > 0$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Silva (2011) estudou as principais características dessa distribuição. Expressões para os momentos e as distribuições das combinações de coordenadas $X+Y$, XY e $X/(X + Y)$ foram deduzidas. Os resultados obtidos foram utilizados na análise de dados pluviométricos da cidade de Passo Fundo. O bom ajuste do modelo foi comprovado utilizando critérios gráficos.

2.4.6 Distribuição gama Pareto bivariada

Partindo do modelo gama bivariado de Arnold e Strauss (1988), foi proposta por Nadarajah (2007) uma distribuição bivariada, cuja função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f(x, y) = \frac{\theta (\alpha x)^\beta}{\Gamma(\beta)} \exp(-\alpha x - \theta xy), \quad (18)$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\theta > 0$. As marginais X e Y são, respectivamente, gama e Pareto tipo II, ou seja,

$$f_X(x) = \frac{\alpha^\beta x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \exp(-\alpha x)$$

e

$$f_Y(y) = \theta \beta \alpha^\beta (\alpha + \theta y)^{-\beta-1}.$$

Essa distribuição foi aplicada com sucesso por Nadarajah (2007) na modelagem de eventos de seca. As distribuições da soma $X + Y$, do produto XY e da proporção $X/(X + Y)$ foram utilizadas na descrição de períodos de retorno de seca, sua magnitude e proporção em relação ao período sem seca. A base de dados utilizada no ajuste do modelo correspondeu às medições mensais do Índice de Palmer Modificado de Severidade de Seca no período de 1895 até 2004.

2.4.7 Distribuição exponencial bivariada de Friday e Patil

Uma variável aleatória $(X; Y)$ tem distribuição exponencial bivariada de Friday e Patil se sua função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \gamma \alpha \exp\{-(\alpha + \beta - \gamma)x - \gamma y\}, & \text{se } 0 < x < y \quad (19) \\ \delta \beta \exp\{-(\alpha + \beta - \delta)y - \delta x\} & \text{if } 0 < y \leq x, \quad (20) \end{cases}$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ e $\delta > 0$.

Nadarajah e Gupta (2006b) empregaram essa distribuição no estudo do período de seca e do período contíguo com seca. Foram analisados dados de secas ocorridas nas oito regiões climáticas do Estado Norte Americano de Nebraska e no ajuste dos parâmetros do modelo foi utilizado o método da máxima verossimilhança.

2.4.8 Distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I

A função densidade de probabilidade conjunta da distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I, conforme definida por Gumbel (1960) é dada por

$$f(x, y) = [(1 + \theta x)(1 + \theta y) - \theta] \exp[-(x + y + \theta xy)], \quad (21)$$

em que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 1$. As densidades marginais de X e de Y têm distribuição exponencial com parâmetros de escala unitários.

Silva (2011) utilizou essa distribuição no estudo de períodos com precipitação e períodos sem precipitação. Foi utilizado na análise, uma base de dados composta com 730 observações ocorridas em Passo Fundo. No ajuste do modelo foi empregado o método da máxima verossimilhança. Os resultados indicaram que o modelo não ajustou-se adequadamente aos dados observados.

Rodrigues et al. (2011a) avaliou o uso dessa distribuição na modelagem de sequência de dias com ocorrência de precipitação e sem ocorrência de precipitação.

Foram analisados dados de precipitação pluviométrica de cidades do Estado de Sergipe. Após os dados serem transformados para se corrigir a escala, foi feito o ajuste do modelo pelo método da máxima verossimilhança. Os resultados obtidos indicaram a viabilidade do modelo.

2.4.9 Distribuição Pareto bivariada

Nadarajah (2009b), utilizando dados observados de secas ocorridas em regiões do Estado de Nebraska, determinou o período de retorno de seca, sua magnitude e proporção em relação ao período sem seca. Para isso, foram deduzidas as distribuições da soma $X + Y$, produto XY e proporção $X/(X + Y)$ das variáveis aleatórias X e Y quando estas seguem o modelo Pareto bivariado com função densidade de probabilidade conjunta,

$$f(x, y) = \theta(\theta + 1) (\alpha\beta)^{\theta+1} (\alpha x + \beta y + \alpha\beta)^{-\theta-2}, \quad (22)$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\theta > 0$. Sob esse modelo, as marginais X e Y tem distribuição Pareto tipo II, com densidades,

$$f_X(x) = \theta\beta^\theta (x + \beta)^{-\theta-1}$$

e

$$f_Y(y) = \theta\alpha^\theta (y + \alpha)^{-\theta-1}.$$

2.4.10 Distribuição bivariada com marginais gama e beta

Com o objetivo de analisar a correlação entre a duração da seca e sua proporção em relação ao período sem seca, Nadarajah (2009a) introduziu a primeira distribuição bivariada não trivial com marginais gama e beta. A descrição dessa distribuição foi realizada apresentando-se as funções densidade de probabilidade condicionais, a entropia, os momentos, a função geradora de momentos e a função característica foram determinados. Essa nova distribuição tem fdp conjunta,

$$f(x, y) = \frac{x^{\alpha+\beta-1} y^{-(\beta+1)} (1-y)^{\beta-1} \exp[-x/(\lambda y)]}{\lambda^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}, \quad (23)$$

em que $x > 0$, $0 < y < 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\lambda > 0$. Sob esse modelo, as marginais X e Y possuem densidades dadas por:

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp(-x/\lambda)$$

e

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}.$$

2.5 Cópulas bivariadas

Atualmente um dos problemas mais estudados em Teoria das Probabilidades e Estatística Matemática é como tratar de forma eficiente a dependência entre variáveis aleatórias e como modelar tal dependência. Para atacar esse tipo de problema muitas ferramentas sofisticadas foram desenvolvidas ao longo do tempo. As cópulas são uma dessas ferramentas. Dessa forma, as cópulas tem sido utilizadas nas mais diversas áreas, a saber, economia, finanças, hidrologia, análise de sobrevivência, entre outras.

As cópulas são funções que fazem a conexão entre uma função de distribuição conjunta e suas marginais. Equivalentemente, pode-se dizer que as cópulas são funções de distribuições cujas marginais são uniformes no intervalo $[0, 1]$. Uma das características mais importantes das cópulas que tem atraído o interesse de pesquisadores é que estas, sozinhas, possuem todas as informações relevantes a respeito da estrutura de correlação existente entre as variáveis aleatórias em questão.

Nesse contexto, as cópulas são ferramentas flexíveis na modelagem de funções de distribuições conjuntas e suas marginais. Além disso, as cópulas são

eficientes na construção de medidas de dependência livres de escala. De maneira rigorosa, uma cópula é uma função $C: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para todos $u, v \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} C(u, 0) &= C(0, v) = 0, \\ C(u, 1) &= u \quad \text{e} \quad C(1, v) = v. \end{aligned} \quad (24)$$

2. Para todo retângulo $R = [u_1, v_1] \times [u_2, v_2] \subset [0, 1] \times [0, 1]$,

$$C(u_1, u_2) + C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) \geq 0. \quad (25)$$

Sob o ponto de vista matemático as cópulas possuem propriedades bastante desejáveis para uma função, a seguir são enumeradas duas delas.

1. As cópulas satisfazem a condição de Lipschitz,

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq \|(u_2, v_2) - (u_1, v_1)\| \quad (26)$$

e, portanto, são uniformemente contínuas.

2. Para toda cópula $C(u, v)$ vale a desigualdade de *Fréchet-Hoeffding*,

$$C^-(u, v) \leq C(u, v) \leq C^+(u, v), \quad \forall (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (27)$$

em que $C^-(u, v) = \min(u, v)$ e $C^+(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ são cópulas, denominadas limite inferior de *Fréchet-Hoeffding* e limite superior de *Fréchet-Hoeffding*, respectivamente.

O principal resultado referente à Teoria das Cópulas é o Teorema de *Sklar*, o qual é o responsável pela maioria das aplicações das cópulas em Estatística.

Esse teorema, elucidada o papel desempenhado pelas cópulas na descrição da relação entre as funções de distribuição conjunta e suas marginais.

O principal resultado referente à Teoria das Cópulas é o Teorema de *Sklar*, o qual é o responsável pela maioria das aplicações das cópulas em Estatística.

Esse teorema, elucidada o papel desempenhado pelas cópulas na descrição da relação entre as funções de distribuição conjunta e suas marginais.

Teorema 1 (SKLAR; 1959)

Se $H(x, y)$ é uma função de distribuição conjunta com distribuições marginais $F(x)$ e $G(y)$, então, existe uma cópula $C(u, v)$ tal que,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (28)$$

Se $F(x)$ e $G(x)$ são contínuas, então, $C(u, v)$ é única. Reciprocamente, se $C(u, v)$ é uma cópula, $F(x)$ e $G(y)$ são funções de distribuição univariadas. Então, $H(x, y)$ dada por $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ é uma função de distribuição conjunta com marginais $F(x)$ e $G(y)$.

O Teorema de Sklar oferece uma maneira de expressar uma função de distribuição conjunta em termos de sua cópula e de suas marginais. Note que, dada duas funções de distribuição univariadas $F(x)$ e $G(y)$, variando a cópula na expressão (28), pode-se obter uma infinidade de distribuições conjuntas com

marginais $F(x)$ e $G(y)$. A seguir, a título de ilustração, são exibidas algumas distribuições Weibull bivariadas construídas a partir de diferentes cópulas.

1. Cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern,

$$C(u, v) = uv[1 + \theta(1 - u)(1 - v)] \quad 1 \geq \theta \geq -1$$

com função de distribuição Weibull bivariada associada:

$$F(x, y) = \left\{ 1 - \exp \left[\left(-\frac{x}{\alpha_1} \right)^{\sigma_1} \right] \right\} \left\{ 1 - \exp \left[\left(-\frac{y}{\alpha_2} \right)^{\sigma_2} \right] \right\} \\ \times \left\{ 1 + \theta \exp \left[\left(-\frac{x}{\alpha_1} \right)^{\sigma_1} \right] \exp \left[\left(-\frac{y}{\alpha_2} \right)^{\sigma_2} \right] \right\}; \quad (29)$$

2. Cópula de Clayton,

$$C(u, v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} \right)^{-1/\theta} \quad \theta > 0,$$

com função de distribuição Weibull bivariada associada:

$$F(x, y) = \left\{ \left[1 - \exp \left(-\left(\frac{x}{\alpha_1} \right)^{\sigma_1} \right) \right]^{-\theta} + \left[1 - \exp \left(-\left(\frac{y}{\alpha_2} \right)^{\sigma_2} \right) \right]^{-\theta} - 1 \right\}^{-\frac{1}{\theta}}; \quad (30)$$

3. Cópula de Ali-Mikhail-Haq,

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)} \quad 1 \geq \theta \geq -1,$$

com função de distribuição Weibull bivariada associada:

$$F(x, y) = \frac{\left\{1 - \exp\left[\left(-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\sigma_1}\right]\right\} \left\{1 - \exp\left[\left(-\frac{y}{\alpha_2}\right)^{\sigma_2}\right]\right\}}{1 - \theta \exp\left[\left(-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\sigma_1}\right] \exp\left[\left(-\frac{y}{\alpha_2}\right)^{\sigma_2}\right]}. \quad (34)$$

4. Cópula de Nelsen-Ten,

$$C(u, v) = \frac{uv}{[1 - (1 - u^\theta)(1 - v^\theta)]^{1/\theta}} \quad 1 \geq \theta > 0, \quad (35)$$

com função de distribuição Weibull bivariada associada:

$$F(x, y) = \frac{\left\{1 - \exp\left[\left(-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\sigma_1}\right]\right\} \left\{1 - \exp\left[\left(-\frac{y}{\alpha_2}\right)^{\sigma_2}\right]\right\}}{\left\{1 + \left\{\exp\left[\left(-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\sigma_1}\right]\right\}^\theta \left\{\exp\left[\left(-\frac{y}{\alpha_2}\right)^{\sigma_2}\right]\right\}^\theta\right\}^\theta}. \quad (36)$$

Todas as distribuições descritas possuem marginais Weibull, com funções densidade de probabilidade acumuladas dadas por:

$$F(x) = 1 - \exp\left[\left(-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\sigma_1}\right]$$

e

$$F(y) = 1 - \exp\left[\left(-\frac{y}{\alpha_2}\right)^{\sigma_2}\right],$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\alpha_i > 0$ e $\sigma_i > 0$ ($i = 1, 2$).

A diferença entre essas distribuições reside na estrutura de correlação fornecida pela cópula. É importante observar que na aplicação do Teorema de Sklar, as marginais podem ser provenientes de famílias diferentes de distribuições univariadas.

Um exemplo interessante de aplicação desse fato é dado por Shiau, Feng e Nadarajah (2007) que utilizaram a cópula de Clayton para construir uma distribuição bivariada em que uma das marginais tinha distribuição dada por uma mistura de duas variáveis exponenciais com diferentes parâmetros de escala e a outra tenha marginal gama. A distribuição obtida foi aplicada em dados de secas ocorridas no Rio Amarelo na China com o objetivo de modelar a correlação entre a duração da seca e sua intensidade. Os resultados obtidos possibilitaram calcular períodos de retorno para duração de seca e sua intensidade.

3 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Foi apresentada uma revisão bibliográfica de trabalhos referentes à modelagem hidrológica. Além disso, algumas das principais distribuições utilizadas em estudos de variáveis meteorológicas foram abordadas, incluindo os modelos utilizados nos artigos. Posteriormente, realizou-se uma breve introdução a Teoria das Cópulas, indicando como são obtidas distribuições bivariadas com estrutura de correlação controlada e marginais previamente estabelecidas. Acreditamos que a apresentação destes elementos é de fundamental importância para o entendimento dos artigos que compõem o trabalho.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, W. F. et al. Precipitação pluviométrica mensal provável em Boa Vista, Estado de Roraima, Brasil. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 5, n. 3, p. 563-567, set./dez. 2001.

ARNOLD, B. C.; STRAUSS, D. Pseudolikelihood estimation. **Sankhya**, Kolkata, v. 53, n. 2, p. 233-243, maio/jun. 1988.

BALAKRISHNAN, N.; LAI, C. D. **Continuous bivariate distributions**. Ottawa: Springer Vergland, 2009. 684 p.

BOTELHO, V. A. V. A.; MORAIS, A. R. Estimativas dos parâmetros da distribuição gama de dados pluviométricos de Município de Lavras, Estado de Minas Gerais. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 23, n. 3, p. 697-706, maio/jun. 1999.

CHERIAN, K. C. A bivariate correlated gamma type distribution function. **Journal of the Indian Math Society**, New Delhi, v. 5, p. 133-144, 1941.

GENNEVILLE, M. S.; BOOCK, A. Modelo estocástico para simulação da precipitação pluviométrica diária de uma região. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 18, n. 9, p. 959-966, set. 1983.

GUMBEL, E. J. Bivariate exponential distributions. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v. 55, p. 698-707, 1960.

IZAWA, T. Two or multi-dimensional gamma-type distribution and its application to rainfall data. **Meteorological Research Institute**, Boston, v. 15, p. 167-200, 1965.

KIBBLE, W. F. A two-variate gamma type distribution. **Sankhyā**, Kolkata, v. 5, p. 137-150, 1941.

LOAICIGA, H. A.; LEIPNIK, R. B. Correlated gamma variables in the analysis of microbial densities in water. **Water Resources**, New York, v. 28, n. 4, p. 329-335, 2005.

LONGO, J. L. et al. Uso das distribuições gama e log-normal na estimativa de precipitação provável quinzenal. **Revista Varia Scientia**, Cascavel, v. 6, n. 11, p. 107-118, ago. 2006.

NADARAJAH, S. A bivariate distribution with gamma and beta marginals with application to drought data. **Journal of Applied Statistics**, Abingdon, v. 36, n. 3, p. 277-301, 2009a.

———. Bivariate gamma exponential distribution with application to drought data. **Journal Applied Mathematical and Computer Modelling**, Oxford, v. 24, n. 1/2, p. 221-130, 2007.

———. A bivariate Pareto model for drought. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, New York, v. 23, n. 6, p. 811-822, Aug. 2009b.

———. Generalized Pareto models with application to drought data. **Environmetrics**, Malden, v. 19, n. 4, p. 395-408, June 2008.

NADARAJAH, S.; ALI, M. M. Pareto random variables for hydrological modeling. **Water Resource Management**, Ann Arbor, v. 22, n. 10, p. 1381-1393, Oct. 2008.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. Cherian's bivariate gamma distributions as a model for drought data. **Agrociencia**, Montevideo, v. 40, n. 4, p. 483-490, 2006a.

———. Friday and Patil's bivariate exponential distribution with application to drought data. **Water Resource Management**, Ann Arbor, v. 20, n. 5, p. 749-759, 2006b.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. A generalized gamma distribution with application to drought data. **Mathematics and Computers in simulation**, Amsterdam, v. 74, n. 1, p. 1-7, Feb. 2007.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. Sums, products and ratios for Downton's bivariate exponential distribution. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, New York, v. 20, n. 3, p. 164-170, Apr. 2006.

RODRIGUES, J. A. et al. Algumas propriedades da distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I com uma aplicação a dados de precipitação pluviométrica. **Revista Brasileira de Biometria**, Jaboticabal, v. 29, n. 3, p. 435-451, 2011a.

———. Combinação de variáveis aleatórias beta tipo II aplicada em modelagem hidrológica. In: REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA, 57., 2012, Piracicaba. **Anais...** Piracicaba: RBras, 2012b. 1 CD-ROM.

———. Distribuição gama bivariada aplicada na modelagem de períodos de chuva. In: REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA, 56., 2011, Maringá. **Anais...** Maringá: RBras, 2011a. 1 CD-ROM.

———. Distribuição gama bivariada de Smith, Adelfang e Tubbs: soma, produto e proporção das variáveis componentes. **Revista Ciências Exatas e Naturais**, Guarapuava, v. 13, n. 2, p. 185-200, 2011b.

RODRIGUES, J. A.; SILVA, A. L.; SANTOS FILHO, J. Distribuição gama e log-normal aplicadas na modelagem de precipitação provável mensal. In: REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA, 57., 2012, Piracicaba. **Anais...** Piracicaba: RBras, 2012b. 1 CD-ROM.

SAMPAIO, S. C. et al. Estimativa e distribuição da precipitação mensal provável no Estado do Paraná. **Irriga**, Botucatu, v. 12, n. 1, p. 38-53, 2007.

SHAKIL, M.; KRIBIA, B. M. G. Exact distributions of the linear combination of gamma and Rayleigh random variables. **Austrian Journal of Statistics**, Graz, v. 38, n. 1, p. 33-44, 2009.

SHIAU, J. T. Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas. **Water Resource Management**, Ann Arbor, v. 20, n. 5, p. 795-815, 2006.

SHIAU, J. T.; FENG, S.; NADARAJAH, S. Assessment of hydrological droughts for the Yellow River, China, using copulas. **Hydrological Processes**, Chichester, v. 21, n. 16, p. 2157-2163, June 2007.

SHIAU, J. T.; MORRADES, R. Copula-Based drought severity-duration-frequency analysis in Iran. **Meteorological Applications**, Malden, v. 16, n. 4, p. 481-489, June 2009.

SILVA, A. P. C. M. **Propriedades das distribuições bivariadas de Crovelli, Gumbel tipo I e gama beta tipo II, com uma aplicação a dados de precipitação pluviométrica**. 2011. 114 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

SILVA, J. C. et al. Análise de distribuição de chuva para Santa Maria, RS. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 11, n. 1, p. 67-72, 2007.

SKLAR, K. Fonctions de repartition à n dimensions et leurs margens. **Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris**, Paris, v. 8, p. 229-231, 1959.

SMITH, O. E.; ADELFGANG, S. I.; TUBBS, J. D. **A bivariate gamma probability distribution with application to gust modeling**. Huntsville: Marshall Space Flight Center, 1982. 101 p.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS. Biblioteca da UFLA. **Manual de normalização e estrutura de trabalhos acadêmicos**: TCC, monografias, dissertações e teses. Lavras, 2010. Disponível em: <<http://www.biblioteca.ufla.br/site/index.pha>>. Acesso em: 6 jun. 2012.

VIEIRA, S. R.; CARVALHO, J. R. P. de. **Estudo da periodicidade temporal de chuvas em bacia hidrográfica dos Rios Turvo/Grande**: uma proposta. Campinas: EMBRAPA Informática Agropecuária, 2001. 17 p. (Documentos, 10).

VRAC, M.; NAVEAU, P.; DROBINSKI, P. Modeling pairwise dependencies in precipitation intensities. **Nonlinear Processes in Geophysics**, Katlenburg-Lindau, v. 14, n. 6 p. 789-797, 2007.

YANG, D. W.; NADARAJAH, S. Drought modeling and products of random variables with exponential kernel. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, New York, v. 23, n. 6, p. 811-822, Sept. 2008.

YUE, S. A bivariate gamma distribution for use in multivariate flood frequency analysis. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 15, n. 6, p. 1033-1045, Apr. 2001.

YUE, S.; OUARDA, T. B. M. J.; BOBEE, B. A review of bivariate gamma distributions for hydrological application. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 246, n. 1/4, p. 1-18, June 2001.

SEGUNDA PARTE - ARTIGOS

ARTIGO 1 Algumas propriedades da distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I com uma aplicação a dados de precipitação pluviométrica

Artigo redigido conforme a Revista Brasileira de Biometria

ALGUMAS PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA GUMBEL TIPO I COM UMA APLICAÇÃO A DADOS DE PRECIPITAÇÃO PLUVIOMÉTRICA[◊]

Jailson de Araujo RODRIGUES*

Ana Paula Coelho Madeira SILVA*

Lucas Monteiro CHAVES[†]

Fredy CASTELLARES[‡]

RESUMO: As distribuições exponenciais bivariadas têm sido utilizadas com sucesso na modelagem de processos hidrológicos. Neste trabalho, são deduzidas as distribuições exatas das importantes variáveis hidrológicas $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ juntamente com seus respectivos momentos quando X e Y seguem o modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I. Os resultados obtidos são aplicados na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas em cidades do Estado de Sergipe.

PALAVRAS-CHAVE: Distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I, soma de variáveis aleatórias, produto de variáveis aleatórias, quociente de variáveis aleatórias, momentos, modelagem hidrológica.

1 INTRODUÇÃO

A distribuição exponencial é certamente uma das mais utilizadas na análise de frequência em hidrologia (Zelenhasic e Salvai (1987); Wijayarathne e Golub

[◊]Revista Brasileira de Biometria, Jaboticabal, v. 29, n. 3, p. 435-451, 2011.

*Universidade Federal de Lavras - UFLA, Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil, E-mail: *jailson-dearaujo@yahoo.com.br* *apcmadeira@hotmail.com*

[†]Universidade Federal de Lavras - UFLA, Departamento de Ciências Exatas - DEX, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil, E-mail: *lucas@dex.ufla.br*

[‡]Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Departamento de Estatística - ICEX, Caixa Postal 702, CEP: 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil, E-mail: *fredy@est.ufmg.br*

(1991); Wilkinson et al. (1998); Kjeldsen et al. (2000); Tate e Freeman (2000), Bonta (2001, 2004), Nadarajah (2007a)). A simples análise unidimensional fornece informações limitadas do evento, não sendo suficiente para descrevê-lo em sua plenitude.

A dependência entre variáveis exponenciais surge em diversas áreas aplicadas, incluindo, hidrologia e análise de sobrevivência. Os fenômenos apresentam-se com natureza multidimensional, exigindo o uso de modelos correlacionados. Nadarajah e Gupta (2006a), por exemplo, utilizaram a distribuição exponencial bivariada de Friday e Patil (1977) para descrever duração de períodos de seca e o período contíguo sem ocorrência de secas, eventos evidentemente correlacionados.

Dentre todos os modelos exponenciais bivariados existentes na literatura, um dos mais simples e flexíveis é o modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I cuja função densidade de probabilidade (fdp) conjunta é dada a seguir:

$$f(x, y) = [(1 + \theta x)(1 + \theta y) - \theta] \exp[-(x + y + \theta xy)] \quad (1)$$

em que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 1$. As fdp marginais de X e de Y têm distribuição exponencial e Balakrishnan e Lai (2009) apresentam propriedades e aplicações dessa distribuição.

Nas Figuras 1 e 2 são apresentadas as superfícies Gumbel tipo I.

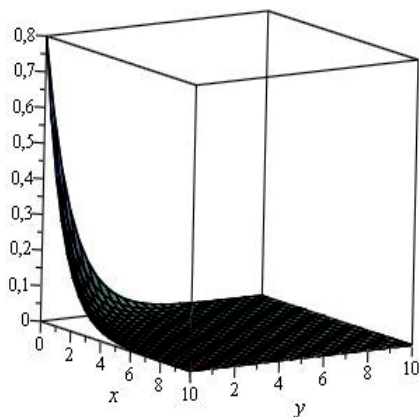


Figura 1 Fdp Gumbel tipo I, $\theta = 0,2$.

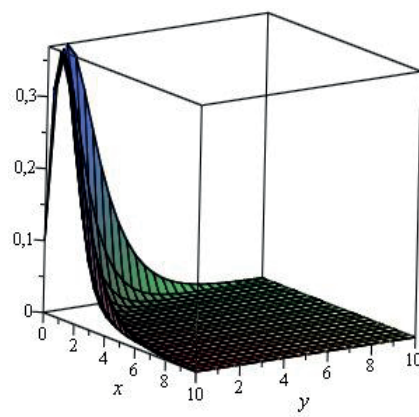


Figura 2 Fdp Gumbel tipo I, $\theta = 0,9$.

Combinações de variáveis do tipo $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ são importantes no estudo de processos hidrológicos (Nadarajah (2005), Nadarajah e Gupta (2006a,2006b,2006c), Nadarajah e Kotz (2006)). Por exemplo, se X representa o período de seca e Y o período contíguo sem ocorrência de seca, $U = X + Y$ denota o período climático e $Q = X/(X + Y)$ a proporção da seca (Nadarajah (2007b, 2009), Nadarajah e Gupta (2006d)). Se X representa o período de seca e Y sua intensidade, a variável aleatória $P = XY$ denota a magnitude da seca (Nadarajah e Gupta(2006c)). Dessa forma, é importante que as distribuições de U , P e Q sejam totalmente caracterizadas.

O objetivo do trabalho é deduzir a distribuição exata das variáveis $U = X+Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ quando X e Y seguem o modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I. Na Seção 2 são deduzidas as fdp dessas variáveis, na Seção 3 são deduzidos seus respectivos momentos e na Seção 4 é feita uma aplicação do modelo na análise de precipitações ocorridas em cidades do Estado de Sergipe.

Os cálculos envolvidos incluem o uso de várias funções especiais como a função gama incompleta dada por:

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} \exp(-t) dt \quad (2)$$

a função gama incompleta complementar dada por:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt \quad (3)$$

a função exponencial integral dada por:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp(t)}{t} dt \quad (4)$$

a função cilíndrica parabólica dada por:

$$D_a(x) = \frac{2^{a/2} \exp(-x^2/4)}{\Gamma(-a/2)} \int_0^\infty t^{-(1+a/2)} (1+t)^{-(1+a/2)} \exp(-x^2 t/2) dt \quad (5)$$

a função de Bessel modificada tipo III definida a seguir:

$$K_m(x) = \frac{\sqrt{\pi} x^m}{2^m \Gamma(m+1/2)} \int_1^\infty (t^2 - 1)^{m-1/2} \exp(-xt) dt \quad (6)$$

e a função de Kummer definida por:

$$\Psi(\alpha, \beta; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-\alpha-1} \exp(-xt) dt. \quad (7)$$

As propriedades dessas funções especiais podem ser vistas em Oldham et al. (2009) e Prudnikov et al. (1998). Serão utilizados os dois importantes lemas:

Lema 1 (Equação 2.3.16.1, Prudnikov et al. (1998)). Se $q > 0$,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp\left(-rx - \frac{q}{x}\right) dx = 2 \left(\frac{q}{r}\right)^{\alpha/2} K_\alpha(2\sqrt{rq}).$$

(Equação 2.3.15.1, Prudnikov et al. (1998)). Se $r > 0$,

Lema 2

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-rx^2 - qx) dx = \Gamma(\alpha) (2r)^{-\alpha/2} \exp\left(\frac{q^2}{8r}\right) D_{-\alpha}\left(\frac{q}{\sqrt{2r}}\right).$$

2 FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Nos Teoremas 1, 2 e 3 são deduzidas as fdp das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ quando X e Y seguem o modelo (1).

Teorema 1 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então:

$$f_U(u) = [u(1-\theta) + \theta u^2] \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^{-(j+1)}}{j!} \gamma(2j+1, \theta u^2) \\ + \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^{-(j+2)}}{j!} \left[\gamma(2j+2, \theta u^2) - \frac{\gamma(2j+3, \theta u^2)}{\theta u^2} \right]$$

em que $u > 0$ e $1 \geq \theta > 0$.

Prova: Aplicando o Teorema de Mudança de Variáveis no modelo (1), pode-se expressar a fdp conjunta das combinações de variáveis $U = X+Y$ e $Q = X/(X+Y)$ da seguinte forma:

$$f(u, q) = [u(1-\theta) + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1-q)] \exp[\theta(uq)^2 - \theta u^2 q - u]. \quad (8)$$

Desse modo, a fdp de U pode ser escrita como:

$$f_U(u) = \int_0^1 [u(1-\theta) + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1-q)] \exp[\theta(uq)^2 - \theta u^2 q - u] dq \\ = \int_0^1 [u(1-\theta) + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1-q)] \exp(-\theta u^2 q - u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta q^2 u^2)^j}{j!} dq \\ = u(1-\theta + \theta u) \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{1}{(\theta u^2)^{2j+1}} \int_0^{\theta u^2} t^{2j} \exp(-t) dt \right] + \\ + \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{1}{(\theta u^2)^{2(j+1)}} \int_0^{\theta u^2} t^{2j+1} \exp(-t) dq \right] - \\ - \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{1}{(\theta u^2)^{2j+3}} \int_0^{\theta u^2} t^{2(j+1)} \exp(-t) dq \right].$$

Nos cálculos acima foi efetuada a mudança de variável $t = \theta u^2 q$. O resultado segue da aplicação da definição (2).

A Figura 3 ilustra a forma da fdp de U para diferentes valores paramétricos.

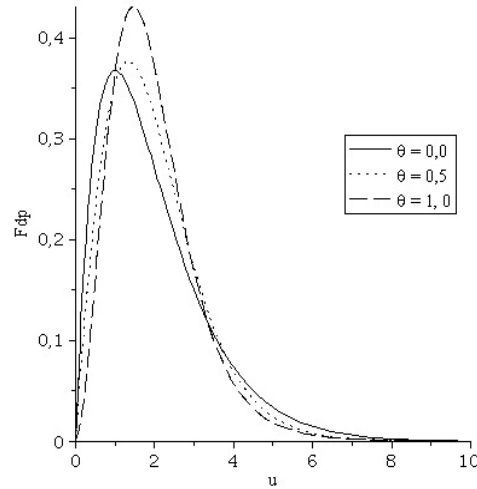


Figura 3 Fdp de $U = X + Y$.

Teorema 2 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então:

$$f_P(p) = 2 \left[(1 + \theta^2 p - \theta) K_0(2\sqrt{p}) + 2\theta\sqrt{p} K_1(2\sqrt{p}) \right] \exp(-\theta p)$$

em que $p > 0$ e $1 \geq \theta \geq 0$.

Prova: Aplicando o Teorema de Mudança de Variáveis no modelo (1), pode-se expressar a fdp conjunta das combinações de variáveis X e $P = XY$ da seguinte forma:

$$f(x, p) = \left[\left(\frac{1}{x} + \theta \right) \left(1 + \frac{\theta p}{x} \right) + \frac{\theta}{x} \right] \exp \left[- \left(x + \frac{p}{x} + \theta p \right) \right] \quad (9)$$

A fdp da variável P é dada por:

$$f_P(p) = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{x} + \theta \right) \left(1 + \frac{\theta p}{x} \right) - \frac{\theta}{x} \right] \exp \left[- \left(x + \frac{p}{x} + \theta p \right) \right] dx,$$

ou seja,

$$f_P(p) = \theta \exp(-\theta p) \left[\int_0^{\infty} \exp \left(-x - \frac{p}{x} \right) dx + p \int_0^{\infty} x^{-2} \exp \left(-x - \frac{p}{x} \right) dx \right] + \\ + (1 + \theta^2 p - \theta) \exp(-\theta p) \int_0^{\infty} x^{-1} \exp \left(-x - \frac{p}{x} \right) dx$$

Aplicando o Lema 1 a cada uma das parcelas, obtém-se:

$$f_P(p) = 2 \exp(-\theta p) \left[(1 + \theta^2 p - \theta) K_0(2\sqrt{p}) + \theta \sqrt{p} K_1(2\sqrt{p}) \right] \\ + 2\theta \sqrt{p} \exp(-\theta p) K_{-1}(2\sqrt{p})$$

O resultado segue da aplicação da propriedade de reflexão da ordem das funções de Bessel modificadas, ver Oldham et al. (2009).

Teorema 3 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então

$$f_Q(q) = \frac{(1-\theta)}{2\theta q(1-q)} \exp \left(\frac{1}{8\theta q(1-q)} \right) D_{-2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}} \right) \\ + \frac{1}{q(1-q)\sqrt{2\theta q(1-q)}} \exp \left(\frac{1}{8\theta q(1-q)} \right) D_{-3} \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}} \right) \\ + \frac{3}{2q(1-q)} \exp \left(\frac{1}{8\theta q(1-q)} \right) D_{-4} \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}} \right) \quad (10)$$

sendo que $1 > q > 0$ e $1 \geq \theta > 0$.

Prova: Usando (8), pode-se escrever,

$$f_Q(q) = \int_0^{\infty} u[1 - \theta + \theta u + \theta^2 q(1 - q)u^2] du,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f_Q(q) &= (1 - \theta) \int_0^{\infty} u \exp[-\theta q(1 - q)u^2 - u] du \\ &+ \theta \int_0^{\infty} u^2 \exp[-\theta q(1 - q)u^2 - u] du \\ &+ \theta^2 q(1 - q) \int_0^{\infty} u^3 \exp[-\theta q(1 - q)u^2 - u] du. \end{aligned} \quad (11)$$

O teorema resulta da aplicação do Lema 2 em cada parcela da soma (11).

As Figuras 4 e 5 ilustram as formas das fdp de P e Q para diferentes valores de θ .

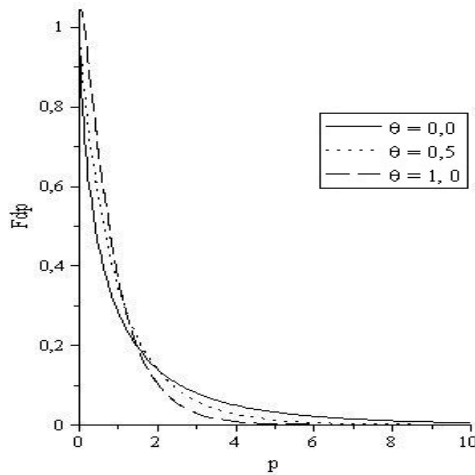


Figura 4 Fdp de $P = XY$.

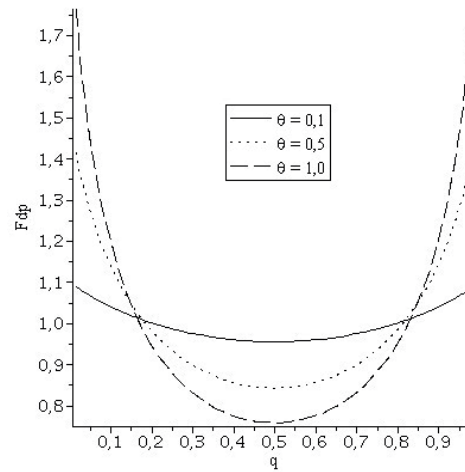


Figura 5 Fdp de $Q = X/(X + Y)$.

3 MOMENTOS

Nesta seção são deduzidos os momentos das variáveis $U = X+Y$ e $P = XY$ quando X e Y seguem o modelo (1).

Lema 3 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então:*

$$E(X^n Y^m) = \frac{m! n!}{\theta^{n+1}} \left[\Psi\left(n+1, n-m+2, \frac{1}{\theta}\right) + m \theta \Psi\left(n+1, n-m+1, \frac{1}{\theta}\right) \right]$$

para todos inteiros $n \geq 1$, $m \geq 1$ e $1 \geq \theta \geq 0$.

Prova: Partindo de (1), podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} E(X^n Y^m) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^n y^m [(1+\theta x)(1+\theta y) - \theta] \exp[-(x+y+\theta xy)] dy dx \\ &= \int_0^\infty x^n \exp(-x) (1+\theta x) \int_0^\infty (y^m + \theta y^{m+1}) \exp[-(y+\theta xy)] dy dx \\ &\quad - \int_0^\infty x^n \exp(-x) \int_0^\infty \theta y^m \exp[-(y+\theta xy)] dy dx \\ &= \int_0^\infty x^n \exp(-x) \left[\frac{\Gamma(m+1)}{(1+\theta x)^m} + \frac{\theta \Gamma(m+2)}{(1+\theta x)^{m+1}} - \frac{\theta \Gamma(m+1)}{(1+\theta x)^{m+1}} \right] dx \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{m! x^n}{(1+\theta x)^m} + \frac{\theta (m+1)! x^n}{(1+\theta x)^{m+1}} - \frac{\theta m! x^n}{(1+\theta x)^{m+1}} \right] \exp(-x) dx. \end{aligned} \tag{12}$$

O resultado segue da mudança de variáveis $v = \theta x$ e da aplicação de (7) em (12).

Teorema 4 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1) então:*

$$E(U^n) = n! \sum_{j=0}^n \frac{(n-j)}{\theta^j} \Psi\left(j+1, 2j-n+1, \frac{1}{\theta}\right) + \sum_{j=0}^n \frac{n!}{\theta^{j+1}} \Psi\left(j+1, 2j+2-n, \frac{1}{\theta}\right) \quad (13)$$

para todo inteiro $n \geq 1$ e $1 \geq \theta \geq 0$.

Prova: O teorema resulta aplicação do Lema 3 juntamente com a seguinte propriedade:

$$E(U^n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E(X^j Y^{n-j})$$

Em particular,

$$\begin{aligned} E(U) &= \frac{1}{\theta} \left[\Psi\left(1, 1, \frac{1}{\theta}\right) + \theta \Psi\left(1, 0, \frac{1}{\theta}\right) \right] + \frac{1}{\theta^2} \Psi\left(2, 3, \frac{1}{\theta}\right) \\ &= \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \left[\Gamma\left(0, \frac{1}{\theta}\right) + \Gamma\left(-1, \frac{1}{\theta}\right) \right] + 1 \\ &= \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \left[Ei\left(-\frac{1}{\theta}\right) - Ei\left(-\frac{1}{\theta}\right) + \theta \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right) \right] + 1 \\ &= 2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} E(U^2) &= \frac{2}{\theta} \left[\Psi\left(1, 0, \frac{1}{\theta}\right) + \Psi\left(2, 1, \frac{1}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta} \Psi\left(2, 2, \frac{1}{\theta}\right) + 2\theta \Psi\left(1, -1, \frac{1}{\theta}\right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{\theta^3} \Psi\left(3, 4, \frac{1}{\theta}\right) \\ &= \frac{4}{\theta^2} \exp\left(\frac{2}{\theta}\right) \left[\Gamma\left(-1, \frac{1}{\theta}\right) + \Gamma\left(-2, \frac{1}{\theta}\right) \right] + \frac{2}{\theta} \Psi\left(2, 1, \frac{1}{\theta}\right) + 2, \\ &= \frac{2}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) Ei\left(-\frac{1}{\theta}\right) + \Psi\left(2, 1, \frac{1}{\theta}\right) + 2\theta^2 + 1 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
E(U^3) &= \frac{6}{\theta^4} \left\{ \Psi \left(4, 5, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \Psi \left(3, 3, \frac{1}{\theta} \right) + \theta^2 \left[\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + \Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{6}{\theta} \left[\Psi \left(1, -1, \frac{1}{\theta} \right) + 2\Psi \left(2, 0, \frac{1}{\theta} \right) + 3\theta \Psi \left(1, -2, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\
&= \frac{6}{\theta^3} \left\{ \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) \left[2\Gamma \left(-2, \frac{1}{\theta} \right) + 3\Gamma \left(-3, \frac{1}{\theta} \right) \right] + \theta \left[\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + \theta^2 \right] \right\} \\
&\quad + \frac{18}{\theta^3} \Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) \\
&= \frac{3}{\theta^2} \left[2\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 6\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 4\theta^2 + \theta - 1 \right] \\
&\quad - \frac{3}{\theta^3} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right) \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(U^4) &= \frac{24}{\theta^2} \left\{ \Psi \left(2, 0, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \left[\Psi \left(1, -2, \frac{1}{\theta} \right) + 3\Psi \left(2, -1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \right\} + \\
&\quad + 96\Psi \left(1, -3, \frac{1}{\theta} \right) + \frac{24}{\theta^4} \left\{ \Psi \left(4, 4, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \left[\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + \Psi \left(4, 3, \frac{1}{\theta} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{48}{\theta^3} \theta \Psi \left(3, 1, \frac{1}{\theta} \right) + \frac{24}{\theta^5} \Psi \left(5, 6, \frac{1}{\theta} \right) \\
&= \frac{48}{\theta^3} \left[\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \Psi \left(3, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 2\Psi \left(4, 3, \frac{1}{\theta} \right) + \frac{\theta^3}{2} \right] \\
&\quad + \frac{24}{\theta^4} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) \left[2\Gamma \left(-3, \frac{1}{\theta} \right) + 4\Gamma \left(-4, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\
&= \frac{4}{\theta^4} \left\{ \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right) + \theta \left[12\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 24\Psi \left(4, 3, \frac{1}{\theta} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{8}{\theta^3} \left[6\theta \Psi \left(3, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 6\theta^3 + \theta^2 - \theta + 1 \right]. \tag{17}
\end{aligned}$$

A variância (σ^2), o coeficiente de assimetria (α^3) e o coeficiente de curtose (α^4) de U podem ser definidos usando as relações:

$$\sigma^2 = E(U^2) - E^2(U) \tag{18}$$

$$\alpha^3 = \frac{E(U^3) - 3E(U)E(U^2) + 2E^3(U)}{(\sigma^2)^{3/2}} \tag{19}$$

$$\alpha^4 = \frac{E(U^4) - 4E(U)E(U^3) + 6E(U^2)E^2(U) - 3E^4(U)}{(\sigma^2)^2} \quad (20)$$

Teorema 5 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então:*

$$E(P^n) = \frac{(n!)^2}{\theta^{n+1}} \left[\Psi \left(n+1, 2, \frac{1}{\theta} \right) + n\theta \Psi \left(n+1, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right]$$

para todo inteiro $n \geq 1$ e $1 \geq \theta \geq 0$.

Prova: Imediata a partir do Lema 3.

Em particular,

$$\begin{aligned} E(P) &= \frac{1}{\theta^2} \left[\Psi \left(2, 2, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\theta^2} \left[\exp \left(\frac{1}{\theta} \right) \Gamma \left(-1, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\theta^2} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta} \left[\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 1 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$E(P^2) = \frac{4}{\theta^3} \left[\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 2\theta \Psi \left(3, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \quad (22)$$

$$E(P^3) = \frac{36}{\theta^4} \left[\Psi \left(4, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 3\theta \Psi \left(4, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \quad (23)$$

$$E(P^4) = \frac{576}{\theta^5} \left[\Psi \left(5, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 4\theta \Psi \left(5, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \quad (24)$$

A variância, o coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose de P podem ser calculados utilizando fórmulas análogas às expressões (18), (19) e (20).

4 APLICAÇÃO

Nesta seção é feita uma aplicação do modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas nas cidades de Capela, Lagarto, Laranjeiras e São Cristóvão, situadas no Estado de Sergipe.

Tabela 1 Localização das estações hidrometeorológicas.

Cidade	Latitude	Longitude	Altitude
Capela	$-10,53^0$	$-37,06^0$	163 m
Lagarto	$-10,95^0$	$-37,64^0$	163 m
Laranjeiras	$-10,81^0$	$-37,17^0$	13 m
São Cristóvão	$-10,92^0$	$-37,20^0$	30 m

Os dados explorados foram coletados em estações hidrometeorológicas do Centro de Meteorologia da Secretaria de Meio Ambiente e dos Recursos Hídricos do Estado de Sergipe (SEMARH). As coordenadas geográficas das estações são exibidas na Tabela 1. O conjunto de dados pode ser acessado livremente no endereço eletrônico: <http://www.semarh.se.gov.br/meteorologia/modules/tinyd0/index.oroologia/modules/tinyd0/index.php?id=50>. A base de dados corresponde às medições diárias do índice pluviométrico no período de 01 de janeiro de 2009 até 31 de dezembro de 2010.

Utilizando as medições do índice pluviométrico, obtém-se os dados sobre período de dias com ocorrência de precipitações (X) e período contíguo de dias sem ocorrência de precipitação (Y). O objetivo é determinar as distribuições das variáveis:

1. Período climático (U): período de dias com precipitação (X) + período contíguo de dias sem precipitação (Y);
2. Proporção de dias com precipitação (Q): período de dias com precipitação (X)/(período de dias com precipitação (X) + período contíguo de dias sem precipitação (Y)).

A premissa básica de existência de correlação entre os dados foi verificada através de teste de independência. A Tabela 2 mostra os p-valores originados do

teste ρ de Spearman, ver Best e Roberts (1975). Os p-valores foram inferiores a 0,05 indicando que há evidências de associação entre as variáveis X e Y .

Tabela 2 p-valor do teste ρ de Spearman.

Cidades	p-valor
Capela	0,025
Lagarto	0,042
Laranjeiras	0,000
São Cristóvão	0,029

Os gráficos de dispersão do período de dias com precipitação versus o período contíguo de dias sem precipitação para as cidades pesquisadas são apresentados na Figura 6 e evidenciam a existência de correlação negativa entre as variáveis.

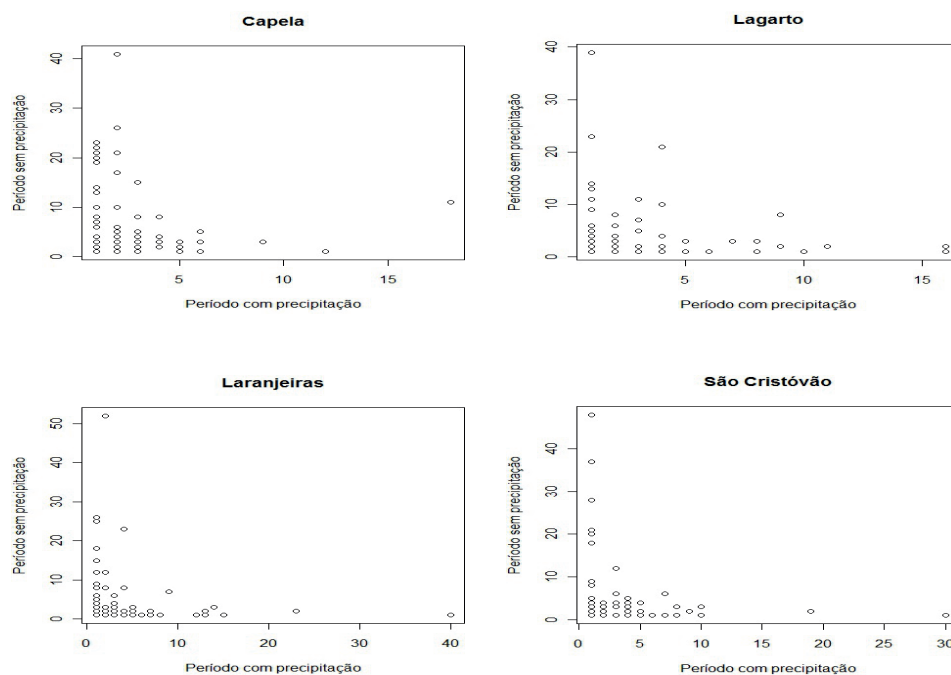


Figura 6 Gráficos de dispersão do período com precipitação versus período sem precipitação para as quatro cidades estudadas.

Como a distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I possui marginais exponencialmente distribuídas com parâmetros de escala unitário, os dados observados para X e Y sofreram uma transformação para corrigir a escala. A transformação utilizada foi $(X, Y) \rightarrow (C_1X, C_2Y)$, C_1 e C_2 são fatores de correção de escala,

$$C_1 = \frac{n}{\sum_{k=0}^n x_k} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{n}{\sum_{k=0}^n y_k}$$

O ajuste do modelo fdp exponencial bivariada Gumbel tipo I foi feito pelo Método de Máxima verossimilhança. Os valores obtidos para $\hat{\theta}$ são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 Estimativas do parâmetro θ .

Cidades	$\hat{\theta}$
Capela	0,252
Lagarto	0,273
Laranjeiras	0,508
São Cristóvão	0,406

A qualidade de ajuste da distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I foi verificada utilizando gráficos de probabilidade. Para a variável X foi plotado o gráfico de $F_X(x_{(i)})$ versus $(i - 0,375)/(n + 0,25)$ conforme discutido por Chambers et al. (1983), em que $F_X(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de X e $x_{(i)}$ representa os valores amostrais de X em ordem crescente. Da mesma forma para Y foi plotado o gráfico de $F_Y(y_{(i)})$ versus $(i - 0,375)/(n + 0,25)$ em que $F_Y(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de Y e $y_{(i)}$ representa os valores amostrais de Y em ordem crescente. Os gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de X para as quatro cidades são visualizados na Figura 6. Na Figura 7 são exibidos os gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de Y para as cidades estudadas.

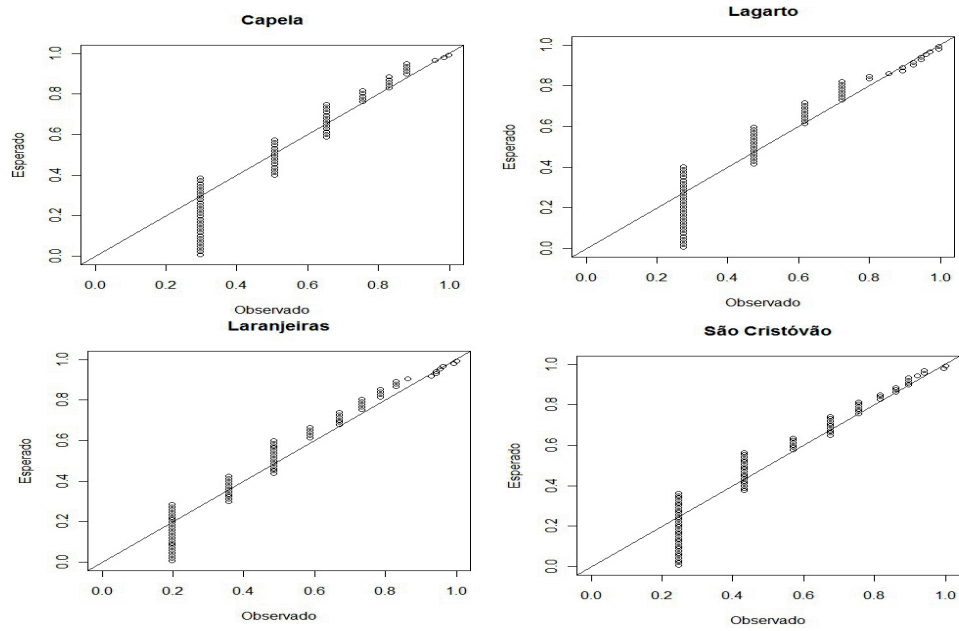


Figura 7 Gráficos de probabilidade para o período de dias com ocorrência de precipitações (X) para as quatro cidades estudadas.

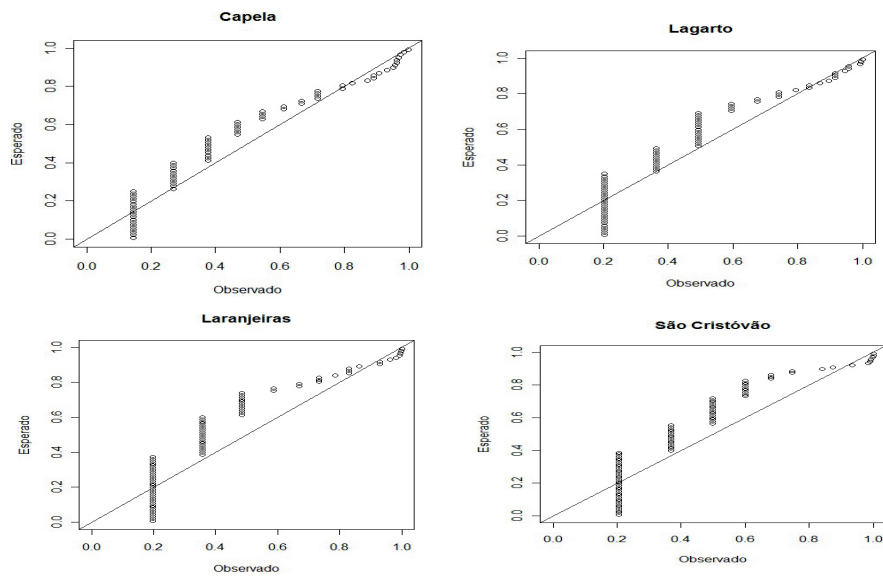


Figura 8 Gráficos de probabilidade para o período de dias sem ocorrência de precipitação (Y) para as quatro cidades estudadas.

Nas Figuras 9 e 10 são exibidas as fdp ajustadas de U e de Q para as quatro cidades pesquisadas.

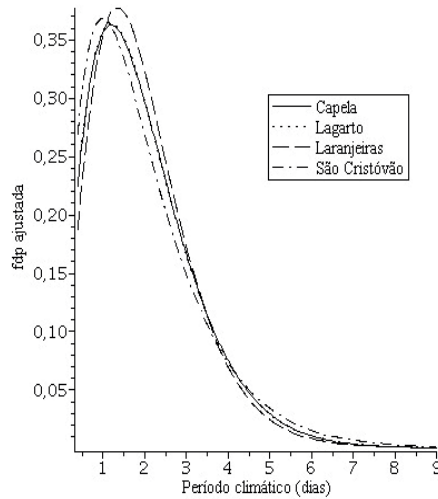


Figura 9 Fdp de U para as cidades pesquisadas.

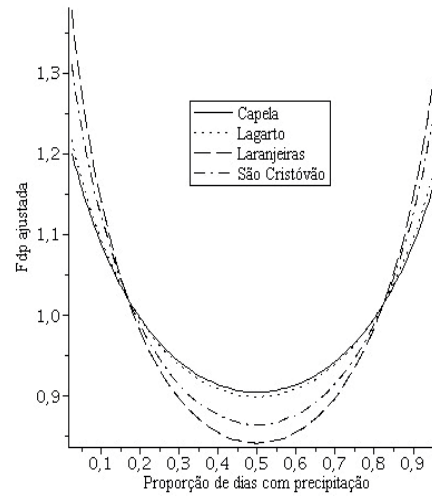


Figura 10 Fdp de Q para as cidades pesquisadas.

5 CONCLUSÕES

Considerando que X e Y seguem o modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I, foi possível deduzir as distribuições exatas e os momentos das variáveis aleatórias $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ utilizando funções especiais. A aplicação do modelo na análise de dados de precipitações apresentou resultados satisfatórios.

RODRIGUES, J. A.; SILVA, A. P. C.; CHAVES, L. M.; CASTELLARES, F. Some properties of the Gumbel's type I bivariate exponential distribution with application to rainfall data. *Revista Brasileira de Biometria*, São Paulo, v. 29, n.3, p. 435-451, 2011.

ABSTRACT: Bivariate exponential distributions have been used successfully on modeling hydrological processes. In this work, supposing that X and Y follow the Gumbel's type I bivariate exponential model, it was deduced the exact distributions of the functions $U = X + Y$, $P = XY$ and $Q = X/(X + Y)$, as well as their respective moments. The results are applied to the data analysis of rainfall occurred in cities in the state of Sergipe.

KEYWORDS: Gumbel's type I bivariate exponential distribution, sum of random variables, product of random variables, ratio of random variables, moments, hydrological modeling.

REFERÊNCIAS

BALAKRISHNAN, N.; LAI, C. D. *Continuous Bivariate Distributions*, 2. ed., Canadá: Springer Verlag, 2009. 688p.

BEST, D. J.; ROBERTS, D. E. *Algorithm AS 89: The Upper Tail Probabilities of Spearman's rho*. Appl. Stat., v. 24, p. 377-379, 1975.

BONTA, J. V. *Characterizing and estimating spatial and temporal variability of times between storms*. Trans. ASAE, v. 44, p. 1593-1601, 2001.

BONTA, J. V. *Stochastic simulation of storm occurrence, depth, duration, and within-storm intensities*. Trans. ASAE, v. 47, p. 1573-1584, 2004.

CHAMBERS, J.; CLEVELAND, W.; KLEINER, B.; TUKEY, P. *Graphical Methods for Data Analysis*, Boston: Duxbury Press, 1983, 395p.

FRIDAY, D.S.; PATIL, G.P. *A bivariate exponential model with applications to reliability and computer generation of random variables*. In: *The Theory and Applications of Reliability*, C.P. Tsokos and I.N. Shimi (eds.). Academic Press: New York, v. 1, p. 527-549, 1977.

KJELDSEN, T. R.; LUNDORF, A.; ROSBJERG. *Use of a two-component exponential distribution in partial duration modelling of hydrological droughts in Zimbabwean rivers*. Journal Hydrol. Sci., v. 45, p. 285-298, 2000.

NADARAJAH, S. *Products, and ratios for a bivariate gamma distribution* . J. Appl. Math and Computing, v. 171, p. 581-595, 2005.

NADARAJAH, S. *The bivariate gamma exponential distribution with application to drought data*. J. Appl. Math and Computing, v. 24, p. 221-230, 2007a.

NADARAJAH, S. *A bivariate gamma for drought* . Water Resource Research, v. 43, W08501, 2007b.

NADARAJAH, S. *A bivariate distribution with gamma and beta marginals with application to drought data*. Journal of App. Stat., v. 36, p. 277-301, 2009.

NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. *Friday and Patil's bivariate exponential distribution with application to drought data*. Water Resour Manage, v. 20, p. 749-759, 2006a.

NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. *Sums, products and rations for Mackay's bivariate gamma distributions* J. Appl. Math and Computing, v. 43 , p. 185-193, 2006b.

NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. *Intensity-duration models on bivariate gamma distributions*. Hiroshima Math Journal , v. 36 , p. 3887-395, 2006c.

NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. *Cherian's bivariate gamma distribution as a model for drought data*. Agrocienca, v. 40, p. 483-490, 2006d.

NADARAJAH, S; KOTZ, S. *Sums, products and ratios for Downton's bivariate exponential distribution*. Stochastic Env. Res. Risk Assess, v. 20, p. 164-170, 2006.

OLDHAM, K.; MYLAND, J.; SPANIER, J. *An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator*. 2. ed., Canadá: Springer Verlag, 2009. 700p.

PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. *Integrals and series, vol.1*, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. 808p.

TATE, E. L.; FREEMAN, S. N. *Three modelling approaches for seasonal stream-flow in southern Africa: the use of censored data*. *Hydrol. Sci. J.*, v. 45, p. 27-42. Academic Press: New York, 2000.

WIJAYARATNE, L. H.; GOLUB, E. *Multiyear drought simulation*. *Water Res. Bull.*, v. 27, p. 387-395, 1991.

WILKINSON, B. H.; DRIEDRICH, N. W.; DRUMMOND, C. N.; ROTHMAN, E. D. *Michigan hochey, meteoric precipitation, and rhythmicity of accumulation on peritidal carbonate platforms*. *Geol. Soc. Am. Bull.*, v. 110, p. 1075-1093, 1998.

ZELENHASIC, E.; SALVAI, A. *A method of streamflow drought analysis*. *Water Resou. Res.*, v. 23, p. 156-168, 1987.

ARTIGO 2 Uma nova distribuição exponencial bivariada construída a partir da cópula de Gumbell-Barnett com uma aplicação em modelagem de precipitações pluviométricas

Artigo redigido conforme a norma da Revista Brasileira de Biometria.

UMA NOVA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA CONSTRUÍDA A PARTIR DA CÓPULA DE GUMBELL-BARNETT COM UMA APLICAÇÃO EM MODELAGEM DE PRECIPITAÇÕES PLUVIOMÉTRICAS[◇]

Jailson de Araujo RODRIGUES*

Ana Paula Coelho Madeira SILVA*

Lucas Monteiro CHAVES[†]

Fredy CASTELLARES[‡]

RESUMO: Os modelos exponenciais são muito utilizados na análise de processos hidrológicos. Nesse contexto, foi utilizada a cópula de Gumbel-Barnett para construir uma distribuição exponencial bivariada aplicada na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas em cidades do Estado de Sergipe. As principais propriedades dessa distribuição são deduzidas e as expressões obtidas fazem uso de várias funções especiais.

PALAVRAS-CHAVE: Cópula de Gumbel-Barnett, distribuição exponencial bivariada, modelagem hidrológica.

1 INTRODUÇÃO

As cópulas foram inicialmente desenvolvidas por Sklar (1959) e sua construção e propriedades têm sido extensivamente estudadas nos últimos 20 anos por

[◇]Revista Brasileira de Biometria, Jaboticabal, v. 29, n. 4, p. 583-598, 2011.

*Universidade Federal de Lavras - UFLA, Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil, E-mail: *jailson-dearaujo@yahoo.com.br* *apcmadeira@hotmail.com*

[†]Universidade Federal de Lavras - UFLA, Departamento de Ciências Exatas - DEX, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil, E-mail: *lucas@dex.ufla.br*

[‡]Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Departamento de Estatística - ICEX, Caixa Postal 702, CEP: 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil, E-mail: *fredy@est.ufmg.br*

vários autores, sendo um dos campos mais ativos de pesquisa em teoria das distribuições. Hutchinson e Lai (1990) estão entre os primeiros autores que popularizaram seu estudo. Nelsen (2006) apresenta um tratado abrangente com os principais resultados sobre o tema.

Cópulas são transformações que a partir de distribuições univariadas formam distribuições multivariadas com um certo controle sobre os diversos tipos de coeficientes de correlação. As razões principais que tornam o trabalho com cópulas interessantes na estatística são: estudar medidas de dependência independentes de escala e construção de famílias bivariadas. De fato, uma vez que permite separar os efeitos de dependência dos efeitos das distribuições marginais, a utilização de cópulas torna-se bastante vantajosa na análise de muitos fenômenos multidimensionais, ver Balakrishanan e Lai (2009).

A utilização de cópulas em hidrologia é algo novo e certamente muitos resultados importantes ainda estão para serem descobertos ou derivados. Por exemplo, Chowdhary et al. (2010), Ghosh (2010) e Zhang e Singh (2007) utilizaram a teoria de cópulas para modelagem de precipitações, Kao e Govindaraju (2010), Shiau et al. (2007) e Shiau (2006) apresentam o uso de cópulas como alternativa na modelagem de secas e Salvadori e De Michele (2006) estudaram a estrutura temporal de tempestades por meio de cópulas.

O objetivo deste artigo é construir uma distribuição bivariada utilizando cópula para analisar elementos da pluviometria de regiões. Em adicional, as principais propriedades dessa distribuição serão investigadas. Dados reais de precipitações são explorados utilizando os resultados obtidos.

O texto é organizado da seguinte forma: na Seção 2 é construído o modelo bivariado utilizando uma cópula e são apresentadas algumas funções especiais empregadas nos cálculos; na Seção 3 são deduzidas as funções densidade de probabilidade condicionais e funções de distribuições acumuladas condicionais; na Seção 4 são deduzidos os momentos, na Seção 5 são deduzidas a função geradora de momentos e função característica e na Seção 6 são deduzidas a fdp exatas das combinações de coordenadas $P = XY$, $R = X/Y$ e $Q = X/(X + Y)$. Finalmente, na Seção 7 o modelo é aplicado na análise de precipitações ocorridas em

idades do Estado de Sergipe.

2 CONSTRUÇÃO DO MODELO EXPONENCIAL BIVARIADO

O teorema de Sklar (1959) estabelece que se $F(x)$ e $F(y)$ são funções de distribuição univariadas e $C(u, v)$ é uma cópula. Então a função

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F(x), F(y)), \quad (1)$$

é uma função de distribuição bivariada com distribuições marginais $F(x)$ e $F(y)$. Reciprocamente, se $F_{X,Y}(x, y)$ é uma função de distribuição bivariada com distribuições marginais $F(x)$ e $F(y)$, então, existe uma cópula $C(u, v)$, $0 \leq u, v \leq 1$ tal que (1) vale. Além disso, se $F(x)$ e $F(y)$ são contínuas, C é única e tem representação:

$$C(u, v) = F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)).$$

Sob a hipótese que as distribuições marginais são contínuas com fdp $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, a fdp conjunta pode ser escrita como:

$$f_{X,Y}(x, y) = c(F(x), F(y)) f_X(x) f_Y(y), \quad (2)$$

em que $c(u, v)$ é a densidade de C , dada por:

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

Para a construção da distribuição bivariada será utilizada a cópula de Gumbel-Barnett, ver Barnett (1980), dada por:

$$C(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) \exp[-\theta \log(1 - u) \log(1 - v)] \quad (3)$$

com fdp

$$\begin{aligned} c(u, v) &= \{-\theta + [1 - \theta \log(1 - u)][1 - \theta \log(1 - v)]\} \\ &\times \exp[-\theta \log(1 - u) \log(1 - v)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando as funções de distribuições $F_X(x) = 1 - \exp(-ax)$ e $F_Y(y) = 1 - \exp(-by)$ de duas variáveis aleatórias exponenciais X e Y de parâmetros a e b , respectivamente, obtém-se através de (1) e (3) a fdp conjunta

$$F_{X,Y}(x, y) = 1 - \exp(-ax) - \exp(-by) + \exp[-(ax + by + \theta abxy)]. \quad (5)$$

Dessa forma, a função densidade conjunta da distribuição bivariada apresentada em (5) é dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = ab[(1 + \theta ax)(1 + \theta by) - \theta] \exp[-(ax + by + \theta abxy)], \quad (6)$$

em que $0 < a, 0 < b, 0 < \theta \leq 1, 0 < x$ e $0 < y$.

Serão utilizadas nos cálculos algumas funções especiais como a função gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt, \quad (7)$$

a função gama incompleta,

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt, \quad (8)$$

a função cilíndrica parabólica,

$$D_\nu(x) = \frac{\exp(-x^2/4)}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} t^{-(\nu+1)} \exp[-(xt + t^2/2)] dt, \quad (9)$$

e a função de Kummer,

$$\Psi(\alpha, \beta; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-\alpha-1} \exp(-xt) dt, \quad (10)$$

a função modificada de Bessel tipo I,

$$I_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)_k k!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k, \quad (11)$$

e a função de Macdonald,

$$K_\nu(x) = \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2 \sin(\nu\pi)}, \quad (12)$$

em que $(z)_k = z(z+1)\dots(z+k-1)$ representa o fatorial ascendente. As propriedades dessas funções especiais podem ser vistas em Oldham et al. (2009).

3 FDP CONDICIONAIS E FDA CONDICIONAIS

Nos Teoremas 1 e 2 são deduzidas as fdp condicionais e as fda condicionais correspondentes a distribuição dada em (6).

Teorema 1 *Para a fdp (6), a fdp condicional de X dado $Y = y$ pode ser expressa da seguinte forma:*

$$f_X(x | Y = y) = a[(1 + \theta ax)(1 + \theta by) - \theta] \exp[-a(1 + \theta by)x], \quad (13)$$

sendo que $0 < x$ e $0 < y$. A fdp condicional de Y dado $X = x$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$f_Y(y | X = x) = b[(1 + \theta ax)(1 + \theta by) - \theta] \exp[-b(1 + \theta ax)y], \quad (14)$$

sendo que $0 < x$ e $0 < y$.

Prova: Imediata, a partir da expressão (6) e do fato que $X \sim \text{Exp}(a)$ e $Y \sim \text{Exp}(b)$.

Teorema 2 *Para a fdp (6), a fda condicional de X dado $Y = y$ pode ser expressa da seguinte forma:*

$$F_X(x | Y = y) = 1 - (1 + \theta ax) \exp[-a(1 + \theta by)x],$$

sendo que $0 < x < \infty$ e $0 < y < \infty$. A fda condicional de Y dado $X = x$ pode

ser expressa da seguinte forma:

$$F_Y(y | X = x) = 1 - (1 + \theta by) \exp[-b(1 + \theta ax)y],$$

sendo que $0 < x < \infty$ e $0 < y < \infty$.

Prova: Os resultados seguem utilizando (13) e (14), respectivamente, através de integração elementar.

3 MOMENTOS

Nesta seção são deduzidos os momentos do produto de (X, Y) quando X e Y tem distribuição dada por (6).

Lema 1 (Equação (2.3.6.9), Prudnikov (1998)). Se $0 < \operatorname{Re}(\alpha)$, $0 < \operatorname{Re}(p)$ e $|\arg(z)| < \pi$, então,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (x+z)^{-\rho} \exp(-px) dx = \Gamma(\alpha) z^{\alpha-\rho} \Psi(\alpha, \alpha+1-\rho; pz).$$

Teorema 3 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (6), então,

$$\begin{aligned} E(X^m Y^n) &= \frac{n!m!}{\theta^{m+1} a^m b^n} \Psi(m+1, m-n+2; 1/\theta) \\ &\quad + \frac{n!m!n}{(\theta a)^m b^n} \Psi(m+1, m-n+1; 1/\theta), \end{aligned} \quad (15)$$

sendo que $1 \leq n$ e $1 \leq m$.

Prova: Usando (6) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} E(X^n Y^m) &= ab \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^n y^m [(1 + \theta ax)(1 + \theta by) - \theta] \\ &\quad \times \exp[-(ax + by + \theta abxy)] dy dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} E(X^n Y^m) &= ab \int_0^\infty x^m \exp(-ax) \int_0^\infty [(1 - \theta + \theta ax) y^n + \theta b (1 + \theta ax) y^{n+1}] \\ &\quad \times \exp[-b(1 + \theta ax) y] dy dx \\ &= ab \int_0^\infty x^m \exp(-ax) [(1 - \theta + \theta ax) I_n + \theta b (1 + \theta ax) I_{n+1}] dx, \end{aligned}$$

sendo que

$$I_k = \int_0^\infty y^k \exp[-b(1 + \theta ax) y] dy, \quad k = n, n + 1. \quad (16)$$

A expressão (16) é resolvida efetuando a transformação $t = b(1 + \theta ax) y$ e aplicando a definição (7):

$$I_k = \frac{\Gamma(k + 1)}{[b(1 + \theta ax)]^{k+1}} = \frac{k!}{[b(1 + \theta ax)]^{k+1}}. \quad (17)$$

Então,

$$\begin{aligned} E(X^n Y^m) &= abn! \int_0^\infty x^m \left[\frac{1 + \theta ax + n\theta}{[b(1 + \theta ax)]^{n+1}} \right] \exp(-ax) dx \\ &= \frac{an!}{b^n} \int_0^\infty x^m (1 + \theta ax)^{-n} \exp(-ax) dx \\ &\quad + \frac{n\theta an!}{b^n} \int_0^\infty x^m (1 + \theta ax)^{-(n+1)} \exp(-ax) dx. \quad (18) \end{aligned}$$

Chega-se ao fim da demonstração aplicando o Lema 1 em cada integral de (18).

5 FUNÇÕES GERADORA DE MOMENTOS E CARACTERÍSTICA

O Teorema 4 estabelece a função geradora de momentos e a função característica correspondente a fdp (6).

Teorema 4 Para a fdp (6) a função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned}
M(s, t) &= \frac{(1-\theta)}{\theta} \exp\left[\frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right] \Gamma\left[0, \frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right] \\
&\quad + \left[\frac{a(b-t) + b(a-s)}{\theta ab}\right] \exp\left[\frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right] \\
&\quad \times \Gamma\left[-1, \frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right] + \Psi\left[2, 1; \frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right], \quad (19)
\end{aligned}$$

sendo que $s < a$ e $t < b$. A função característica correspondente é dada por:

$$\begin{aligned}
\Phi(s, t) &= \frac{(1-\theta)}{\theta} \exp\left[\frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right] \Gamma\left[0, \frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right] \\
&\quad + \left[\frac{a(b-it) + b(a-is)}{\theta ab}\right] \exp\left[\frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right] \\
&\quad \times \Gamma\left[-1, \frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right] + \Psi\left[2, 1; \frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right]. \quad (20)
\end{aligned}$$

Prova: Utilizando (6), podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}
M(s, t) &= ab \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(sx + ty) [(1 + \theta ax)(1 + \theta by) - \theta] \\
&\quad \times \exp[-(ax + by + \theta abxy)] dy dx \\
&= ab \int_0^\infty \exp[-(a-s)x] \int_0^\infty [(1 - \theta + \theta ax) + \theta b(1 + \theta ax)y] \\
&\quad \times \exp\{-[b(1 + \theta ax) - t]y\} dy dx \\
&= ab \int_0^\infty \exp[-(a-s)x] [(1 - \theta + \theta ax) I_0 + \theta b(1 + \theta ax) I_1] dx,
\end{aligned}$$

sendo que

$$I_k = \int_0^\infty y^k \exp\{-[b(1 + \theta ax) - t]y\} dy, \quad k = 0, 1. \quad (21)$$

A expressão (21) é resolvida efetuando a transformação $u = [b(1 + \theta ax) - t]y$ e em seguida aplicando a definição (7):

$$I_k = \frac{\Gamma(k+1)}{[b(1 + \theta ax) - t]y^{k+1}} = \frac{k!}{[b(1 + \theta ax) - t]^{k+1}}. \quad (22)$$

Então,

$$M(s, t) = ab \int_0^\infty \exp[-(a-s)x] \left[\frac{1 - \theta + \theta ax}{b(1 + \theta ax) - t} + \frac{\theta b(1 + \theta ax)}{[b(1 + \theta ax) - t]^2} \right] dx \quad (23)$$

e assim, tem-se:

$$\begin{aligned} M(s, t) &= \frac{(1-\theta)}{\theta} \underbrace{\int_0^\infty \left(\frac{b-t}{\theta ab} + x \right)^{-1} \exp \left[-\frac{(a-s)x}{\theta ab} \right] dx}_{I_0^*} \\ &\quad + a \underbrace{\int_0^\infty x \left(\frac{b-t}{\theta ab} + x \right)^{-1} \exp \left[-\frac{(a-s)x}{\theta ab} \right] dx}_{I_1^*} \\ &\quad + \frac{1}{\theta a} \underbrace{\int_0^\infty \left(\frac{b-t}{\theta ab} + x \right)^{-2} \exp \left[-\frac{(a-s)x}{\theta ab} \right] dx}_{I_2^*} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^\infty x \left(\frac{b-t}{\theta ab} + x \right)^{-2} \exp \left[-\frac{(a-s)x}{\theta ab} \right] dx}_{I_2^*}. \end{aligned} \quad (24)$$

Chega-se ao fim da demonstração da primeira parte do teorema, aplicando-se o Lema 1 em cada uma das integrais I_k^* e em seguida utilizando as seguintes propriedades da função hipergeométrica confluyente degenerada:

$$\Psi(1, \beta; x) = x^{1-\beta} \exp(x) \Gamma(\beta - 1, x) \quad (25)$$

e

$$\Psi(\alpha, \alpha; x) = \exp(x) \Gamma(1 - \alpha, x). \quad (26)$$

A demonstração da segunda parte, referente a função característica, é análoga.

5 FDP DE $P = XY$, $R = X/Y$ E $Q = X/(X + Y)$

Nos Teoremas 5, 6 e 7 são deduzidas as fdp de $P = XY$, $R = X/Y$ e $Q = X/(X + Y)$ quando X e Y tem distribuição dada por (6).

Lema 2 (Equação (2.3.6.9), Prudnikov (1998)). Se $0 < p$ e $0 < q$, então,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp\left(-px - \frac{q}{x}\right) dx = 2 \left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha/2} K_{\alpha}(2\sqrt{pq}).$$

Teorema 5 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (6), então,

$$f_P(p) = 2ab \left[(1 - \theta + \theta^2 abp) K_0(2\sqrt{abp}) + 2\theta\sqrt{abp} K_1(2\sqrt{abp}) \right] \times \exp(-\theta abp), \quad (27)$$

sendo que $0 < p$.

Prova: De (6), tem-se que a fdp conjunta de $(X, P) = (X, XY)$ pode ser expressa como:

$$f_{X,P}(x, p) = ab \left(\theta a + \frac{ab\theta^2 p - \theta + 1}{x} + \frac{\theta bp}{x^2} \right) \exp \left[- \left(\theta abp + ax + \frac{bp}{x} \right) \right].$$

Assim, a fdp de p pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f_P(p) &= ab \exp(-\theta abp) \int_0^{\infty} \left(\theta a + \frac{ab\theta^2 p - \theta + 1}{x} + \frac{\theta bp}{x^2} \right) \\ &\quad \times \exp \left[- \left(ax + \frac{bp}{x} \right) \right] dx \\ &= ab \exp(-\theta abp) \left[\theta a I_0 + (ab\theta^2 p - \theta + 1) I_1 + \theta bp I_2 \right], \end{aligned} \quad (28)$$

sendo que

$$I_k = \int_0^{\infty} x^{-k} \exp \left[- \left(ax + \frac{bp}{x} \right) \right] dx, \quad k = 0, 1, 2.$$

Aplicando o Lema 2, $I_0 = 2 (bp/a)^{1/2} K_1 (2\sqrt{abp})$, $I_1 = 2K_0 (2\sqrt{abp})$ e $I_2 = 2 (bp/a)^{-1/2} K_{-1} (2\sqrt{abp}) = 2 (bp/a)^{1/2} K_1 (2\sqrt{abp})$.

A conclusão da demonstração decorre da substituição desses resultados em (28).

A partir de (15), pode-se afirmar que:

$$E(P^n) = \frac{(n!)^2}{\theta^{n+1}(ab)^n} [\Psi(n+1, 2, 1/\theta) + n\theta\Psi(n+1, 1, 1/\theta)], \quad (29)$$

em que $1 \leq n$.

Na Figura 1 são ilustradas as formas da fdp (27) para diferentes valores paramétricos.

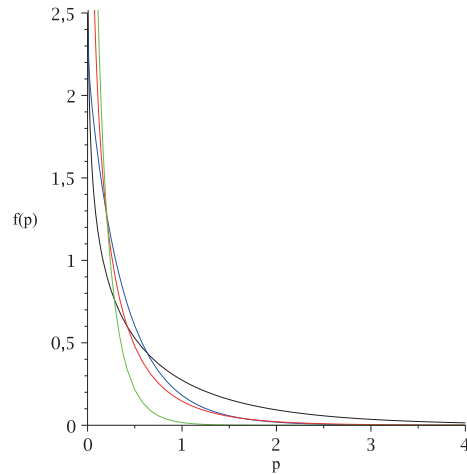


Figura 1 Gráficos da fdp (27) para $a = 1, 0$, $b = 1, 0$, $\theta = 0, 5$ (preta); $a = 0, 5$, $b = 3, 5$, $\theta = 0, 9$ (azul); $a = 3, 0$, $b = 0, 9$, $\theta = 0, 3$ (vermelha) e $a = 2, 0$, $b = 3, 0$, $\theta = 0, 5$ (verde).

Lema 3 (Equação (2.3.15.3), Prudnikov (1998)). Se $0 < \alpha$ e $0 < p$, então,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-px^2 - sx) dx = \Gamma(\alpha) (2p)^{-\alpha/2} \exp\left(\frac{s^2}{8p}\right) D_{-\alpha}\left(\frac{s}{\sqrt{2p}}\right).$$

Teorema 6 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (6), então,

$$\begin{aligned} f_R(r) = & \exp\left[\frac{(b+ar)^2}{8\theta abr}\right] \left[\frac{(1-\theta)}{2\theta r} D_{-2}\left(\frac{b+ar}{\sqrt{2\theta abr}}\right) + \frac{3}{2r} D_{-4}\left(\frac{b+ar}{\sqrt{2\theta abr}}\right) \right] \\ & + \frac{(b+ar)}{r\sqrt{2\theta abr}} \exp\left[\frac{(b+ar)^2}{8\theta abr}\right] D_{-3}\left(\frac{b+ar}{\sqrt{2\theta abr}}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

sendo que $0 < r$.

Prova: De (6), tem-se que a fdp de $R = X/Y$ pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} f_R(r) = & ab \int_0^{\infty} [(1-\theta)x + \theta(b+ar)x^2 + \theta^2 abrx^3] \\ & \times \exp\{-[\theta abrx^2 + (b+ar)x]\} dx \\ = & ab[(1-\theta)I_1 + \theta(b+ar)I_2 + \theta^2 abrxI_3], \end{aligned} \quad (31)$$

sendo que:

$$I_k = \int_0^{\infty} x^k \exp\{-[\theta abrx^2 + (b+ar)x]\} dx.$$

Aplicando o Lema 3 em I_k para $k = 1, 2, 3$ e substituindo os resultados em (31), chega-se a conclusão da demonstração.

Na Figura 2 são ilustradas as formas da fdp (30) para diferentes valores paramétricos.

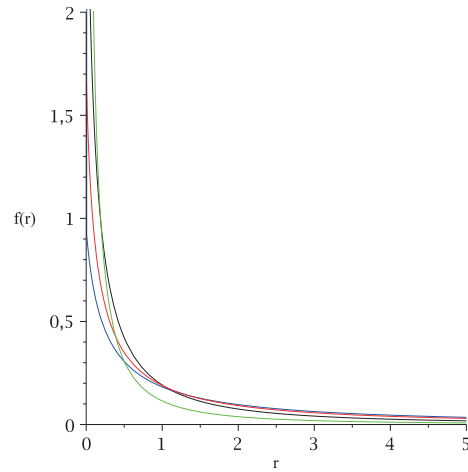


Figura 2 Gráficos da fdp (30) para $a = 2, 0$, $b = 0, 9$, $\theta = 0, 5$ (preta); $a = 2, 0$, $b = 4, 0$, $\theta = 0, 9$ (azul); $a = 0, 6$, $b = 0, 7$, $\theta = 1, 0$ (vermelha) e $a = 8, 0$, $b = 0, 1$, $\theta = 0, 9$ (verde).

Teorema 7 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (6), então,

$$\begin{aligned}
 f_Q(q) &= \frac{(1-\theta)}{2\theta q(1-q)} \exp\left\{\frac{[aq+b(1-q)]^2}{8\theta abq(1-q)}\right\} D_{-2}\left(\frac{aq+b(1-q)}{\sqrt{2\theta abq(1-q)}}\right) \\
 &+ \frac{3}{2q(1-q)} \exp\left\{\frac{[aq+b(1-q)]^2}{8\theta abq(1-q)}\right\} D_{-4}\left(\frac{aq+b(1-q)}{\sqrt{2\theta abq(1-q)}}\right) \\
 &+ \frac{[aq+b(1-q)]}{q(1-q)\sqrt{2\theta abq(1-q)}} \exp\left\{\frac{[aq+b(1-q)]^2}{8\theta abq(1-q)}\right\} \\
 &\times D_{-3}\left(\frac{aq+b(1-q)}{\sqrt{2\theta abq(1-q)}}\right), \tag{32}
 \end{aligned}$$

sendo que $0 < q < 1$.

Prova: Sob a transformação $(S, Q) = (X + Y, X/(X + Y))$ a fdp conjunta de (S, Q) é dada por:

$$\begin{aligned}
f(s, q) &= ab[(1 - \theta)s + \theta[aq + b(1 - q)]s^2 + \theta^2 abq(1 - q)s^3] \\
&\quad \times \exp\{-[(aq + b(1 - q))s + \theta abq(1 - q)s^2]\} \\
&= ab[(1 - \theta)I_1 + \theta[aq + b(1 - q)]I_2 + \theta^2 abq(1 - q)abrI_3], \quad (33)
\end{aligned}$$

sendo que:

$$I_k = \int_0^\infty x^k \exp\{-[(aq + b(1 - q))s + \theta abq(1 - q)s^2]\} dx.$$

Aplicando o Lema 3 em I_k para $k = 1, 2, 3$ e substituindo os resultados em (33), chega-se a conclusão da demonstração.

Na Figura 3 são ilustradas as formas da fdp (32) para diferentes valores paramétricos.

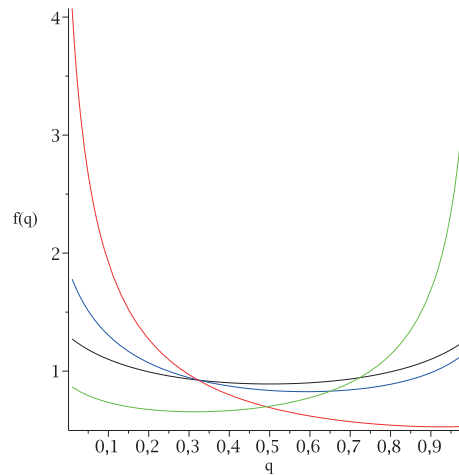


Figura 3 Gráficos da fdp (32) para $a = 1, 0, b = 1, 0, \theta = 0, 3$ (preta); $a = 5, 0, b = 4, 0, \theta = 0, 5$ (azul); $a = 0, 9, b = 0, 3, \theta = 0, 6$ (vermelha) e $a = 0, 4, b = 0, 9, \theta = 1, 1$ (verde).

6 APLICAÇÃO

Nesta seção é feita uma aplicação do modelo (6) na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas nas cidades de Capela, Lagarto, Laranjeiras e São Cristóvão todas situadas no Estado de Sergipe.

Os dados explorados foram coletados em estações hidrometeorológicas do Centro de Meteorologia da Secretaria de Meio Ambiente e dos Recursos Hídricos do Estado de Sergipe (SEMARH), as coordenadas geográficas das estações são exibidas na Tabela 1. O conjunto de dados pode ser acessado livremente no endereço eletrônico: <http://www.semarh.se.gov.br/meteorologia/modules/tinyd0/index.php?id=50>. A base de dados corresponde as medições diárias do índice pluviométrico no período de 01 de janeiro de 2009 até 31 de dezembro de 2010.

Tabela 1 Localização das estações hidrometeorológicas.

Cidades	Latitude	Longitude	Altitude
Capela	$-10,53^0$	$-37,06^0$	163 m
Lagarto	$-10,95^0$	$-37,64^0$	163 m
Laranjeiras	$-10,81^0$	$-37,17^0$	13 m
São Cristóvão	$-10,92^0$	$-37,20^0$	30 m

Utilizando as medições do índice pluviométrico, obtém-se os dados sobre período de dias com ocorrência de precipitações (X) e período contíguo de dias sem ocorrência de precipitação (Y). O objetivo é de modelar a proporção de dias com ocorrência de precipitações, isso pode ser feito por meio da distribuição de $Q = X/(X + Y)$.

A premissa básica de existência de correlação entre os dados foi verificada através de teste de independência. A Tabela 2 mostra os p-valores originados do teste ρ de Spearman, ver Best e Roberts (1975). Os p-valores foram inferiores a 0,05 indicando que há evidências significativas de associação entre os dados. Os gráficos de dispersão do período de dias com ocorrência de precipitação versus o período contíguo de dias sem ocorrência de precipitação para as cidades pesquisadas são apresentados na Figura 4 e evidenciam a existência de correlação negativa

entre as variáveis.

Tabela 2 p-valor do teste ρ de Spearman.

Cidades	p-valor
Capela	0,025
Lagarto	0,042
Laranjeiras	0,000
São Cristóvão	0,029

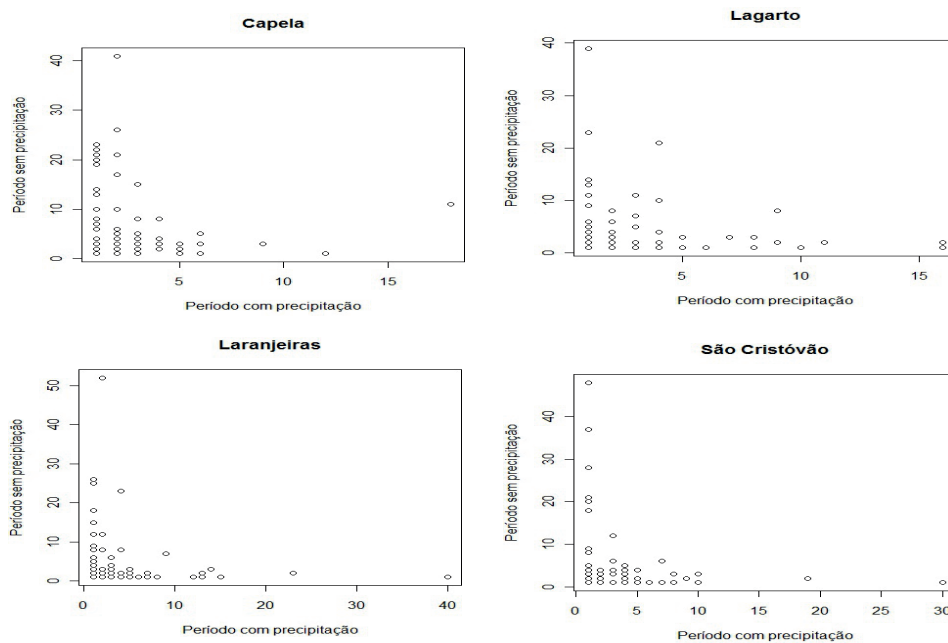


Figura 4 Gráficos de dispersão do período de precipitação versus período sem precipitação para as quatro cidades estudadas.

O ajuste do modelo (9) foi feito pelo Método de Inferência pelas Marginais (IFM), ver Joe (1997) e Shiao et al. (2007). O IFM é dividido em duas etapas: primeiramente, são ajustadas as distribuições marginais pelo Método da Máxima Verossimilhança e em seguida estima-se o parâmetro de dependência da cópula. Os valores obtidos para \hat{a} e para \hat{b} são exibidos na Tabela 3 juntamente com os respectivos intervalos de confiança IC_a e IC_b em nível de 95%.

Para completar o processo de estimação, estima-se o parâmetro da cópula a partir da função de log-verossimilhança do modelo bivariado:

$$\ln L(x, y; a, b, \theta) = \ln L_c(x, y; a, b, \theta) + \ln L_X(x; a) + \ln L_Y(y; b), \quad (34)$$

em que $\ln L_c$ é a função de log-verossimilhança da cópula. Substituindo-se os parâmetros já estimados \hat{a} e \hat{b} na equação (34) e em seguida maximizando a função de log-verossimilhança L , obtém-se a estimativa $\hat{\theta}$ do parâmetro da cópula. Os valores obtidos para $\hat{\theta}$ são exibidos na Tabela 3. Na Figura 5 são exibidas as fdp ajustadas de Q para as cidades pesquisadas.

Tabela 3 Estimativas dos parâmetros.

Cidades	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$IC_a 95\%$	$IC_b 95\%$
Capela	0,352	0,158	0,989	(0,277; 0,437)	(0,124; 0,195)
Lagarto	0,321	0,226	1,000	(0,253; 0,397)	(0,178; 0,279)
Laranjeiras	0,221	0,221	1,000	(0,175; 0,272)	(0,175; 0,272)
São Cristóvão	0,282	0,229	1,000	(0,225; 0,345)	(0,183; 0,280)

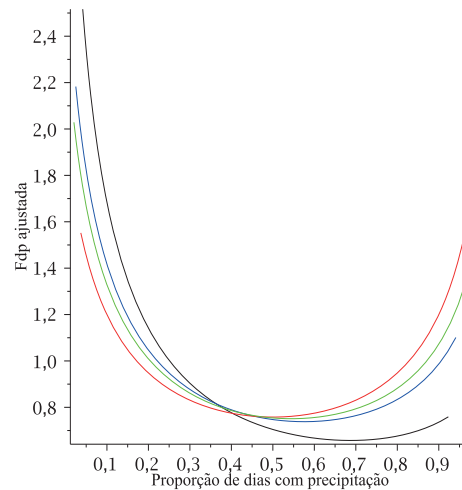


Figura 5 Fdp de Q para as cidades de Capela (preta); Lagarto (azul); Laranjeiras (vermelha) e São Cristóvão (verde).

A qualidade de ajuste do modelo (6) foi verificada via gráficos de probabili-

dade. Para a variável X foi plotado o gráfico de $F_X(x_{(i)})$ versus $(i - 0,375)/(n + 0,25)$, ver Chambers et al. (1983), em que $F_X(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de X e $x_{(i)}$ representa os valores amostrais de X em ordem crescente. Da mesma forma para Y foi plotado o gráfico de $F_Y(y_{(i)})$ versus $(i - 0,375)/(n + 0,25)$ em que $F_Y(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de Y e $y_{(i)}$ representa os valores amostrais de Y em ordem crescente. Os gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de X para as quatro cidades são visualizados na Figura 6. Na Figura 7 são exibidos os gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de Y para as cidades estudadas.

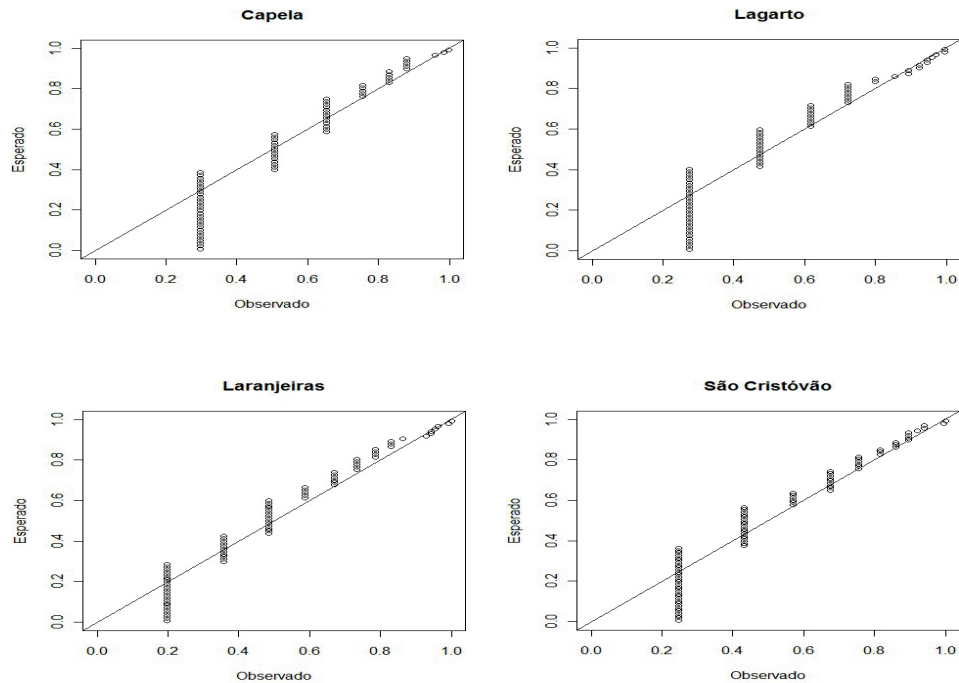


Figura 6 Gráficos de probabilidade para o período de dias com ocorrência de precipitações (X) para as quatro cidades estudadas.

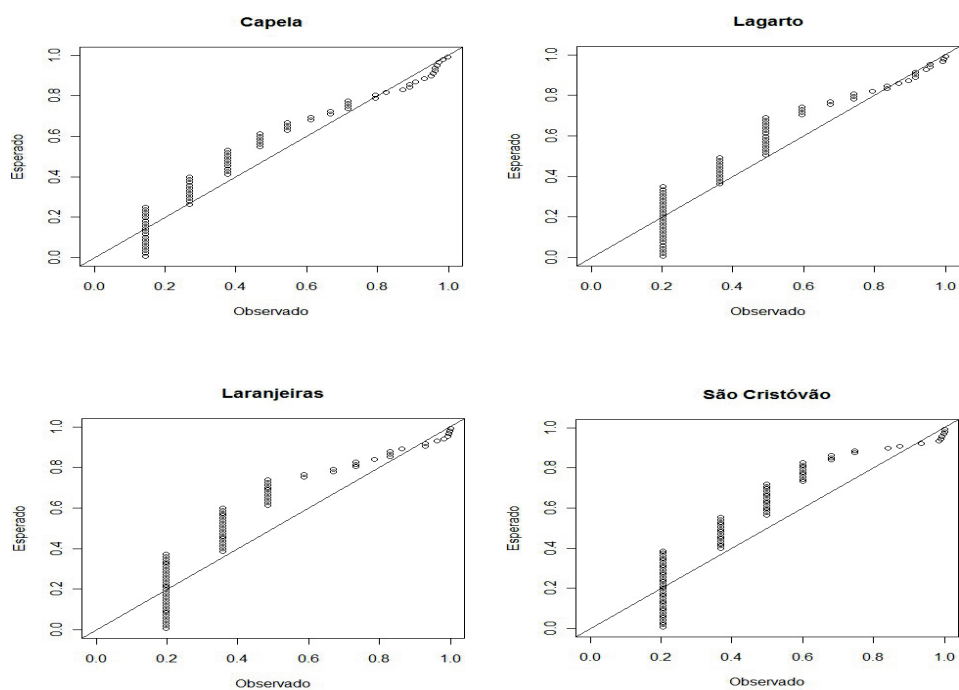


Figura 7 Gráficos de probabilidade para o período de dias sem ocorrência de precipitação (Y) para as quatro cidades estudadas.

7 CONCLUSÕES

A distribuição exponencial bivariada construída a partir da cópula de Gumbel-Barnett demonstrou-se matematicamente tratável, com propriedades que ratificam sua robustez. A aplicação do modelo na análise de dados de precipitações das cidades de Capela, Lagarto, Laranjeiras e São Cristóvão apresentou resultados satisfatórios.

RODRIGUES, J. A.; SILVA, A. P. C.; CHAVES, L. M, CASTELLARES, F. A new bivariate exponential distribution built from the Gumbel-Barnett copula with an application to the modeling of rainfall. *Revista Brasileira de Biometria*, São Paulo, v. 29, n. 4, p. 583-598, 2011.

ABSTRACT: The exponential models are the most widely used in the analysis of hydrological processes. In this context it is used the Gumbel-Barnett copula to construct a bivariate exponential distribution and apply it in data analysis of rainfall occurring in cities in the state of Sergipe. The main properties of this distribution are deducted, the expressions obtained make use of several special functions.

KEYWORDS: Gumbel-Barnett copula, bivariate exponential distribution, hydrologic modeling.

REFERÊNCIAS

BALAKRISHANAN, N.; LAI, C. D. *Continuous bivariate distributions*. 2. ed., New York: Springer-Verlag, 2009. 724p.

BARNETT, V. *Some bivariate uniform distributions*. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, v. 9, p. 453-461, 1980.

BEST, D. J.; ROBERTS, D. E. *Algorithm AS 89: The Upper Tail Probabilities of Spearman's rho*. *Appl. Stat.*, v. 24, p. 377-379, 1975.

CHAMBERS, J.; CLEVELAND, W.; KLEINER, B.; TUKEY, P. *Graphical Methods for Data Analysis*, Boston: Duxbury Press, 1983, 395p.

CHOWDHARY, H.; ESCOBAR, L. A.; SING, V. P. *Identification of suitable copulas for bivariate frequency analysis of flood peak and flood volume data*. *Hydrology Research*, v. 42, p. 193-216, 2011.

GHOSH, S. *Modeling bivariate rainfall distribution and generating bivariate correlated rainfall data in neighboring meteorological subdivisions using copula*. *Hydrological Processes*, v.24, p. 3558-3567, 2010.

HUTCHINSON, T. P.; LAI, C. D. *Continuous bivariate distributions: Emphasizing applications*. Adelaide: Rumsby Scientific Publishing, 1990. 412p.

JOE, H. *Multivariate models and dependence concepts*. New York: Chapman-Hall, 1997. 399p.

KAO, S. C.; GOVINDARAJU, R. S. *A copula-based joint deficit index for droughts*. J. Hydrology, v. 380, p. 121-134, 2010.

KVAM, P. H.; VIDAKOVIC, B. *Nonparametric statistics with applications to science and engineering*. 1. ed., New York: Wiley, 2007. 420p.

NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. *Friday and Patil's bivariate exponential distribution with application to drought data*. Water Resources Management, v. 20, p. 749-759, 2006.

NELSEN, R. B. *An introduction to copulas*. 2. ed., New York: Springer-Verlag, 2006. 270p.

OLDHAM, K.; MYLAND, J.; SPANIER, J. *An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator*. 2. ed., Canadá: Springer Verlag, 2009. 700p.

PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. *Integrals and series, vol.1*, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. 808p.

SALVADORI, G.; DE MICHELE, C. *Statistical characterization of temporal structure of storms*. Advances in Water Resources, v. 29, p. 827-842, 2006.

SHIAU, J. T. *Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas*. Water Resources Management, v. 20, p. 795-815, 2006.

SHIAU, J. T.; FENG, S.; NADARAJAH, S. *Assessment of hydrological droughts for the Yellow River, China, using copulas*. Hydro. Process, v. 21, p. 2157-2163,

2007.

SKLAR, K. *Fonctions de repartition à n dimensions et leurs margens*. Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris, v. 8, p. 229-231, 1959.

ZHANG, L.; SINGH; V. P. *Bivariate rainfall frequency distributions using Archimedean copulas*. J. Hydrology, v. 332, p. 93-109, 2007.

ARTIGO 3 **Distribuição gama bivariada de Smith, Adelfang e Tubbs:**
soma, produto e quociente das variáveis componentes

Artigo redigido conforme norma da Revista Ciências Exatas e Naturais.

Distribuição gama bivariada de Smith, Adelfang e Tubbs: soma, produto e proporção das variáveis componentes*

Smith, Adelfang and Tubbs's bivariate gamma distribution: sum, product and proportion of variables components

Jailson de Araujo Rodrigues

DEX - UFLA, Lavras, MG

jailsondearaujo@yahoo.com.br

Ana Paula Coelho Madeira Silva

DEX - UFLA, Lavras, MG

apcmadeira@hotmail.com

Lucas Monteiro Chaves

DEX - UFLA, Lavras, MG

lucas@dex.ufla.br

Resumo: O modelo gama é um dos mais utilizados na análise de processos hidrológicos. Nesse contexto, são deduzidas as distribuições exatas das importantes combinações de variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = Y/(X + Y)$ juntamente com seus respectivos momentos quando X e Y seguem o modelo gama bivariado de Smith, Adelfang e Tubbs. As expressões envolvidas fazem uso de várias funções especiais. Os resultados obtidos são aplicados em dados de precipitações pluviométricas ocorridas na cidade de Passo Fundo.

Palavras-chave: Soma de variáveis aleatórias; Produto de variáveis aleatórias; Proporção de variáveis aleatórias; Momentos; Modelagem hidrológica.

*Revista Ciências Exatas e Naturais, Guarapuava, v. 13, n. 2, p. 185-200, 2011.

Abstract: The bivariate gamma distributions have been used successfully in modeling hydrological processes. In this context, we are derived the exact distributions of the important hydrological variables $U = X + Y$, $P = XY$ and $Q = Y/(X + Y)$ together with their moments when X and Y follow the Smith, Aldelfang, and Tubbs's bivariate gamma model. The expressions involved make use of various special functions. The results are applied to data of rainfall occurred in the city of Passo Fundo.

Key words: Sum of random variables; Product of random variables; Proportion of random variables; Moments; Hydrological modeling.

1 INTRODUÇÃO

Apesar de apresentarem dificuldades de implementação na solução de problemas práticos, os modelos gama bivariados são muito utilizados no estudo de processos hidrológicos. Por exemplo, Izama [1] propôs uma distribuição gama bivariada com quatro parâmetros para estudar dados de precipitações ocorridas no Distrito de Kanto no Japão, Loaiciga e Leipnik [2] discutiram o uso de uma distribuição gama bivariada na análise de qualidade da água através da correlação entre a quantidade de coliformes fecais e a quantidade de estreptococcus fecais, Yue [3] utiliza uma distribuição gama bivariada para analisar a correlação entre a duração da precipitação pluviométrica (chuva) e seu volume, Nadarajah e Gupta [4] estudaram o comportamento das secas ocorridas no Estado Norte Americano de Nebraska em um período de cento e dez anos considerando um modelo gama triparmétrico. Esse mesmo conjunto de dados foi analisado por Nadarajah [5], considerando um modelo gama bivariado mais simples com dois parâmetros.

O estudo da pluviometria das regiões tem sido uma importante fonte de pesquisa em hidrologia [6,7]. Em particular, as precipitações pluviométricas por se tratarem de um fenômeno climático regional de amplo impacto social que tem

reflexo direto na qualidade de vida da população, apresenta-se no centro dessas pesquisas. Existe uma preocupação crescente em criar mecanismos eficazes para descrever, a contento, esses eventos, minimizando seus efeitos. A modelagem probabilística pode ser destacada como um desses mecanismos.

O estudo das distribuições de combinações de variáveis do tipo $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = Y/(X + Y)$ é importante para a descrição de fenômenos hidrológicos [6,8-12]. Dessa forma, são deduzidas as distribuições exatas dessas combinações de variáveis quando X e Y seguem o modelo gama bivariado de Smith, Adelfang e Tubbs [13]. Os resultados obtidos são aplicados na análise de dados reais de precipitações pluviométricas.

O texto é organizado da seguinte forma: na seção 2 é apresentado o modelo gama bivariado adotado juntamente com algumas das funções especiais empregadas, nas seções 3 e 4 são deduzidas as funções densidade de probabilidade das variáveis U , P e Q juntamente com seus respectivos momentos. Finalmente, na seção 5 os resultados obtidos são aplicados na modelagem de precipitações ocorridas na cidade de Passo Fundo no Rio Grande do Sul.

2 MODELO GAMA BIVARIADO

A distribuição gama bivariada de Smith, Adelfang e Tubbs tem função densidade de probabilidade (fdp) conjunta dada por:

$$f(x, y) = \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \exp[-(x+y)/(1-\eta)]}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k I_{\beta+k-1} \left(\frac{2\sqrt{\eta xy}}{1-\eta} \right), \quad (1)$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\beta > \alpha$,

$$a_k = \frac{(\eta y)^k \Gamma(\beta - \alpha + k) (1 - \eta)^{\beta-1}}{k! (\eta xy)^{(\beta+k-1)/2}} \quad (2)$$

e

$$\eta = \rho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad \text{com } 0 < \eta < 1. \quad (3)$$

O parâmetro ρ denota o coeficiente de correlação linear entre X e Y , $\Gamma(\cdot)$ e $I_\nu(\cdot)$ denotam a função gama e a função modificada de Bessel tipo I, definidas, respectivamente, como segue:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt \quad (4)$$

$$I_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)_k k!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k. \quad (5)$$

As marginais X e Y são gama distribuídas com fdp:

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-x) \quad (6)$$

e

$$f_Y(y) = \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \exp(-y), \quad (7)$$

Para o cálculo das propriedades do modelo (1) são necessárias as funções especiais:

- Função beta

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}; \quad (8)$$

- Função de Macdonald

$$K_\nu(x) = \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2 \sin(\nu\pi)}; \quad (9)$$

- Função hipergeométrica de Gauss

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k x^k}{(c)_k k!}; \quad (10)$$

- Polinômio modificado de Laguerre

$$L_n^\nu(x) = \frac{x^{-\nu} \exp(x)}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\nu} \exp(-x)]; \quad (11)$$

- Polinômio de Jacobi

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{a+n} (1+x)^{b+n}], \quad (12)$$

sendo que $(d)_k = d(d+1)\dots(d+k-1)$ denota o fatorial ascendente.

3 FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Nos Teoremas de 1 a 3 são deduzidas as fdp de $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = Y/(X + Y)$ quando X e Y seguem o modelo (1).

Teorema 1 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,*

$$f_U(u) = \frac{u^{\alpha+\beta-1} \exp\left(-\frac{u}{1-\eta}\right)}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} u^{k+2j}, \quad (13)$$

sendo que $0 < u < \infty$ e

$$a_{kj} = \frac{\eta^{k+j} \Gamma(\beta-\alpha+k) \Gamma(\alpha+j)}{(1-\eta)^{k+2j} \Gamma(\alpha+\beta+k+2j) j! k!}. \quad (14)$$

Prova: De (1) tem-se que a fdp conjunta de $U = X + Y$ e $Q = Y/(X + Y)$, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(u, q) &= \frac{u^\alpha q^{(\beta-1)/2} (1-q)^{\alpha-1} \exp[u/(\eta-1)]}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* q^{k/2} \\ &\times (1-q)^{(1-\beta-k)/2} I_{\beta+k-1} \left(\frac{2u\sqrt{\eta q(1-q)}}{1-\eta} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

em que

$$a_k^* = \frac{\eta^k \Gamma(\beta - \alpha + k) (1 - \eta)^{\beta-1}}{k! \eta^{(\beta+k-1)/2}}. \quad (16)$$

A fdp de U pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f_U(u) = \frac{u^\alpha \exp[u/(\eta - 1)]}{(1 - \eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta - \alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* I(u), \quad (17)$$

em que

$$I(u) = \int_0^1 q^{(\beta+k-1)/2} (1 - q)^{(2\alpha-\beta-k-1)/2} I_{\beta+k-1} \left(\frac{2u\sqrt{\eta q(1-q)}}{1-\eta} \right) dq. \quad (18)$$

Usando (5) em (18) e em seguida aplicando (8), obtém-se:

$$I(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + j)}{\Gamma(\alpha + \beta + k + 2j) j!} \left(\frac{u\sqrt{\eta}}{1-\eta} \right)^{\beta+k+2j-1}. \quad (19)$$

A conclusão da demonstração decorre da substituição de (19) em (17).

Lema 1 (Equação (2.3.16.1), [14]). Se $p, q > 0$, então,

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} \exp\left(-px - \frac{q}{x}\right) dx = 2 \left(\frac{q}{p}\right)^{a/2} K_a(2\sqrt{pq}).$$

Teorema 2 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$f_P(p) = \frac{2p^{(\alpha-1)/2}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* I_{\beta+k-1} \left(\frac{2\sqrt{\eta p}}{1-\eta} \right) K_{\alpha-\beta-k} \left(\frac{2\sqrt{\eta p}}{1-\eta} \right), \quad (20)$$

sendo que $0 < p < \infty$ e

$$a_k^* = \frac{\eta^k \Gamma(\beta - \alpha + k) (1 - \eta)^{\beta-1}}{k! \eta^{(\beta+k-1)/2}}.$$

Prova: De (1) tem-se que a fdp conjunta de X e $P = XY$ tem a seguinte forma:

$$f(x, p) = \frac{x^{\alpha-\beta-1} p^{(\beta-1)/2}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \exp\left[-\frac{p+x^2}{x(1-\eta)}\right] \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* x^{-k} p^{k/2} \\ \times I_{\beta+k-1}\left(\frac{2\sqrt{\eta p}}{1-\eta}\right).$$

Assim, pode-se escrever a fdp da variável P da seguinte maneira:

$$f_P(p) = \frac{p^{(\beta-1)/2}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* p^{k/2} I_{\beta+k-1}\left(\frac{2\sqrt{\eta p}}{1-\eta}\right) I(p), \quad (21)$$

em que

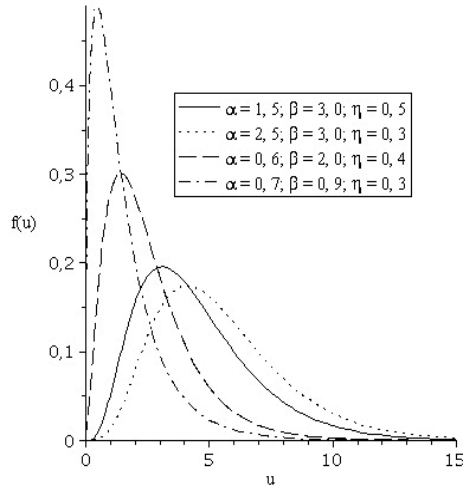
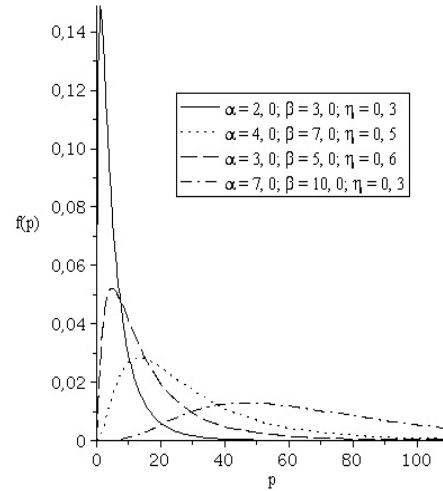
$$I(p) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-\beta-k-1} \exp\left[-\frac{p+x^2}{x(1-\eta)}\right] dx. \quad (22)$$

Aplicando o Lema 1 em (22) obtém-se:

$$I(p) = 2p^{(\alpha-\beta-k)/2} K_{\alpha-\beta-k}\left(\frac{2\sqrt{p}}{1-\eta}\right). \quad (23)$$

A conclusão da demonstração decorre da substituição de (23) em (21).

Nas Figuras 1 e 2 são ilustradas as formas das fdp de (13) e (20) para diferentes valores paramétricos.

Figura 1 Fdp de $U = X + Y$.Figura 2 Fdp de $P = XY$.

Lema 2 (Equação (2.15.3.2), [15]). Se $a + \nu > 0$ e $p > c$, então,

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} \exp(-px) I_{\nu}(cx) dx = p^{-(a+\nu)} \left(\frac{c}{2}\right)^{\nu} \frac{\Gamma(\nu+a)}{\Gamma(\nu+1)} \\ \times {}_2F_1\left(\frac{a+\nu}{2}, \frac{a+\nu+1}{2}; \nu+1, \frac{c^2}{p^2}\right).$$

Teorema 3 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$f_Q(q) = \frac{(1-\eta)^{\beta} q^{\beta-1} (1-q)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{**} q^k \\ \times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+k}{2}, \frac{\alpha+\beta+k+1}{2}; \beta+k; 4\eta q(1-q)\right), \quad (24)$$

sendo que $0 < q < 1$ e $a_k^{**} = \frac{\eta^k \Gamma(\beta-\alpha+k) \Gamma(\beta+\alpha+k)}{k! \Gamma(\beta+k)}$. Analogamente, se

$Q = X/(X + Y)$, então,

$$f_Q(q) = \frac{(1-\eta)^\beta q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{**} (1-q)^k \times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+k}{2}, \frac{\alpha+\beta+k+1}{2}; \beta+k; 4\eta q(1-q)\right). \quad (25)$$

Prova: Usando (15) e (16) pode-se escrever a fdp de Q da seguinte maneira:

$$f_Q(u) = \frac{q^{(\beta-1)/2} (1-q)^{\alpha-1}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* q^{k/2} (1-q)^{(1-\beta-k)/2} I(q), \quad (26)$$

em que

$$I(q) = \int_0^\infty u^\alpha \exp\left(-\frac{u}{1-\eta}\right) I_{\beta+k-1}\left(\frac{2u\sqrt{\eta q(1-q)}}{1-\eta}\right) du. \quad (27)$$

Aplicando o Lema 2 em (27) obtém-se,

$$I(q) = \frac{(1-\eta)^\alpha [\eta q(1-q)]^{(\beta+k-1)/2} \Gamma(\beta+\alpha+k)}{\Gamma(\beta+k)} \times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+k}{2}, \frac{\alpha+\beta+k+1}{2}; \beta+k; 4\eta q(1-q)\right) \quad (28)$$

A conclusão da demonstração é decorrente da substituição direta de (28) em (26).

Na Figura 3 são ilustradas as formas da fdp (24) para diferentes valores paramétricos.

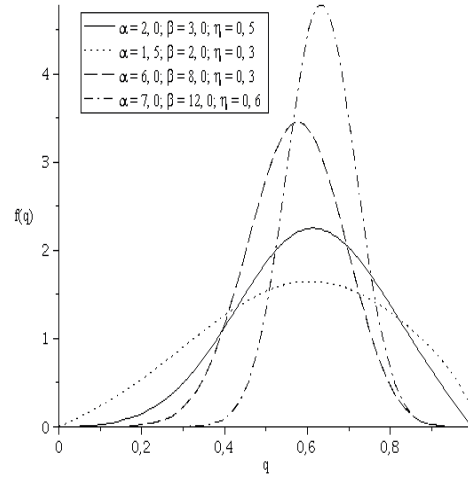


Figura 3 Fdp de $Q = X/(X + Y)$.

4 MOMENTOS

Nesta seção são deduzidos os momentos de $U = X + Y$ e $P = XY$ quando X e Y seguem o modelo (1).

Lema 3 (Equação (2.15.5.4), [15]). Se $p > 0$ e $\nu > -n - 1$, então,

$$\int_0^{\infty} x^{\nu+2n-1} \exp(-px^2) I_{\nu}(cx) dx = \frac{n!c^{\nu}}{2^{\nu+1}p^{n+\nu+1}} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right) L_n^{\nu}\left(-\frac{c^2}{4p}\right).$$

Lema 4 (Equação (2.19.3.2), [15]). Se $p > 0$ e $a > 0$, então,

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} \exp(-px) L_n^{\nu}(cx) dx = \frac{\Gamma(a)}{p^a} P_n^{(\nu, a-\nu-n-1)}\left(1 - \frac{2c}{p}\right).$$

Teorema 4 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$E(X^n Y^m) = \frac{m! (1-\eta)^{\beta-\alpha+m} \Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^k \Gamma(\beta-\alpha+k)}{k!} \times P_m^{(\beta+k-1, \alpha-\beta-k+n-m)} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right). \quad (29)$$

para todos inteiros $n \geq 1$ e $m \geq 1$.

Prova: Utilizando (1) e (16), pode-se afirmar que:

$$E(X^n Y^m) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \int_0^{\infty} \frac{x^{(2\alpha-\beta-k+2n-1)/2} \exp[x/(\eta+1)]}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} I(x) dx, \quad (30)$$

em que

$$I(x) = \int_0^{\infty} y^{(\beta+k+2m-1)/2} \exp\left(-\frac{y}{1-\eta}\right) L_{\beta+k-1} \left(\frac{2\sqrt{\eta xy}}{1-\eta} \right) dy. \quad (31)$$

Efetuada a transformação de variável $t^2 = y$ em (31) e em seguida aplicando o Lema 3 obtém-se,

$$I(x) = m! (1-\eta)^{m+1} (\eta x)^{(\beta+k-1)/2} \exp\left(\frac{\eta x}{1-\eta}\right) L_m^{\beta+k-1} \left(-\frac{\eta x}{1-\eta} \right). \quad (32)$$

Substituindo (32) em (30), temos:

$$E(X^n Y^m) = \frac{m! (1-\eta)^{m+1}}{(1-\eta)^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \eta^{(\beta+k-1)/2} \times \int_0^{\infty} x^{\alpha+n-1} \exp(-x) L_m^{\beta+k-1} \left(-\frac{\eta x}{1-\eta} \right) dx. \quad (33)$$

Chega-se ao fim da demonstração aplicando o Lema 4 em cada integral de (33).

Teorema 5 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$E(U^n) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j! \eta^k (1-\eta)^{\beta-\alpha+j} \Gamma(\alpha+n-j) \Gamma(\beta-\alpha+k)}{k! \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \times P_n^{(\beta+k-1, \alpha-\beta-k+n-2j)} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right) \quad (34)$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Prova: A demonstração resulta da combinação do Teorema 4 juntamente com a seguinte propriedade de esperança matemática:

$$E(U^n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E(X^{n-j} Y^j).$$

Teorema 6 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então,

$$E(P^n) = \frac{n! (1-\eta)^{\beta-\alpha+n} \Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^k \Gamma(\beta-\alpha+k)}{k!} \times P_n^{(\beta+k-1, \alpha-\beta-k)} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right), \quad (35)$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Prova: Imediata a partir do Teorema 4.

5 APLICAÇÃO

A partir dos resultados obtidos nas seções anteriores, foi feita uma aplicação do modelo (1) na análise de precipitações pluviométricas ocorridas na cidade de Passo Fundo situada no norte do Estado do Rio Grande do Sul.

Os dados explorados foram coletados na Estação Agrometeorológica da EMBRAPA Trigo com coordenadas geográficas 28°15'46" S de latitude, 52°24'24" W de longitude e 684m de altitude. O conjunto de dados pode ser acessado livremente no seguinte endereço eletrônico: <http://www.cnpt.embrapa.br/pesquisa/agromet/ap>. A base de dados corresponde as medições diárias do índice pluviométrico no período de 01 de julho de 2009 até 30 de junho de 2011.

Utilizando as medições do índice pluviométrico, obtem-se os dados sobre período de dias sem precipitação (X) e período contíguo com ocorrência de precipitação (Y). O objetivo é determinar as distribuições das variáveis:

1. Período climático (U) = período de dias sem precipitação (X) + período com ocorrência de precipitação (Y), ou seja, $U = X + Y$;
2. Proporção de dias com ocorrência de precipitação (Q) = período com ocorrência de precipitação (Y) dividido pela soma do período de dias sem precipitação (X) + período com ocorrência de precipitação (Y), ou seja, $Q = Y/(X + Y)$.

Como o modelo gama bivariado (1) tem marginais gama distribuídas com parâmetro de escala unitário, os dados observados para X e Y sofreram uma transformação para corrigir a escala. A transformação utilizada foi $(X, Y) \rightarrow (C_1X, C_2Y)$, C_1 e C_2 são fatores de correção de escala:

$$C_1 = \frac{n\hat{\alpha}}{\sum_{k=0} x} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{n\hat{\beta}}{\sum_{k=0} y}$$

Os parâmetros $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ foram ajustados a partir de suas distribuições marginais via Método da Máxima Verossimilhança. As estimativas obtidas foram $\hat{\alpha} = 1,633$ e $\hat{\beta} = 2,963$. A estimativa do parâmetro de dependência, $\hat{\eta} = 0,005$, foi deduzida a partir da equação (3) e da expressão:

$$\hat{\rho} = \frac{E[(X - M_x)(Y - M_y)]}{S_x S_y} \quad (36)$$

sendo que (M_x, S_x) e (M_y, S_y) são respectivamente, as médias amostrais e os

desvios padrões das variáveis aleatórias X e Y .

O gráfico da fdp conjunta ajustada para os dados transformados é exibido na Figura 4. Nas Figuras 5 e 6 são exibidas as fdp ajustadas para U e Q sobrepostas pelos respectivos histogramas dos dados transformados.

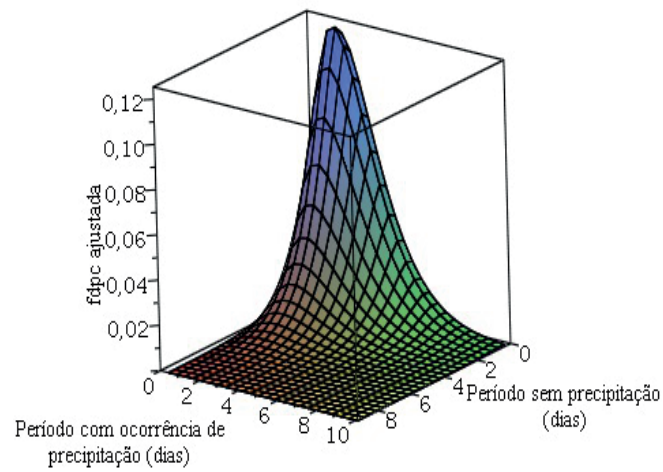


Figura 4 Fdp conjunta para os dados ajustados.

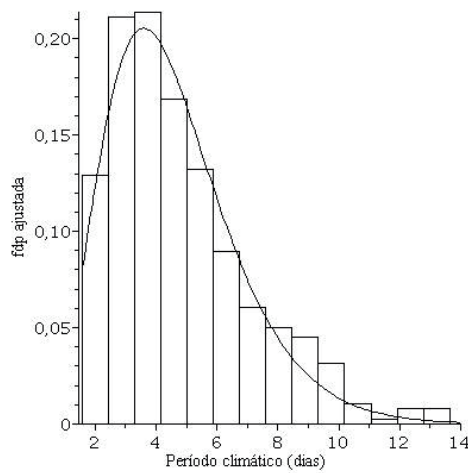


Figura 5 Fdp ajustada de U .

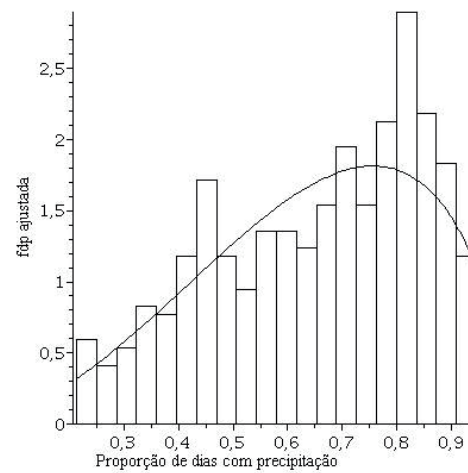


Figura 6 Fdp ajustada de Q .

Para verificar a qualidade do ajuste de (1), primeiramente, foi plotado o gráfico de $F_X(x_{(i)})$ versus $(i - 0,375)/(n + 0,25)$ [16], sendo que $F_X(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de X e $x_{(i)}$ representa os valores amostrais de X em ordem crescente, em seguida plotou-se o gráfico de $F_Y(y_{(i)})$ versus $(i - 0,375)/(n + 0,25)$ em que $F_Y(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de Y e $y_{(i)}$ representa os valores amostrais de Y em ordem crescente. Esses gráficos são apresentados nas Figuras 7 e 8, respectivamente.

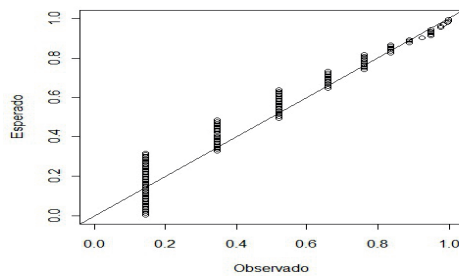


Figura 7 Gráfico de probabilidade para o período sem precipitação.

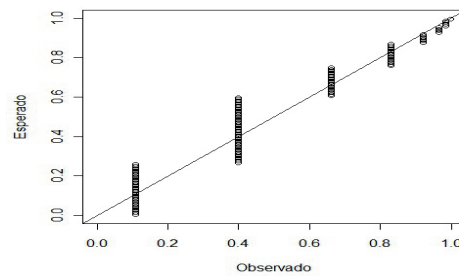


Figura 8 Gráfico de probabilidade para o período com ocorrência de precipitação.

6 CONCLUSÕES

Considerando que X e Y seguem o modelo gama bivariado de Smith, Al-delfang e Tubbs, foi possível deduzir as distribuições exatas e os momentos das variáveis aleatórias $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ utilizando funções especiais. A aplicação do modelo na análise de dados de precipitações ocorridas na cidade de Passo Fundo-RS apresentou resultados satisfatórios.

REFERÊNCIAS

- [1] IZAMA, T. Two or multi-dimensional gamma-type distribution and its application to rainfall data. *Meteorological Research Institute*, v. 15, p. 167-200, 1965.
- [2] LOAICIGA, H. A.; LEIPNIK, R. B. Correlated gamma variables in the analysis of microbial densities in water. *Water Resources*, v. 28, p. 329-335, 2005.
- [3] YUE, S. A bivariate gamma distribution for use in multivariate flood frequency analysis. *Hydrol. Processes*, v. 15, p. 1033-1045, 2001.
- [4] NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. Cherian's bivariate gamma distribution as a model for drought data. *Agrociencia*, v. 40, p. 483-490, 2006.
- [5] NADARAJAH, S. A bivariate gamma for drought. *Water Resource Research*, v. 43, W08501, 2007.
- [6] VRAC, M.; NAVEAU, P.; DROBINSKI, P. Modeling pairwise dependencies in precipitation intensities. *Nonlin. Processes Geophys.*, v. 14, p. 789-797, 2007.
- [7] YUE, S.; OUARDA, T. B. M. J.; BOBEE, B. A review of bivariate gamma distributions for hydrological application. *Journal Hydrol.*, v. 246, p. 1-18, 2001.
- [8] NADARAJAH, S. A bivariate Pareto model for drought. *Stoch Environ Res Risk*, v. 23, p. 811-822, 2008.
- [9] NADARAJAH, S. A bivariate distribution with gamma and beta marginals with application to drought data. *J. of Appl. Statistics*, v. 36, p. 277-301, 2009.

- [10] NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. Friday and Patil's bivariate exponential distribution with application to drought data. *Water Resources Management*, v. 20, p. 749-759, 2006.
- [11] NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. Intensity-duration models on bivariate gamma distributions. *Hiroshima Math Journal*, v. 36 , p. 3887-395, 2006.
- [12] NADARAJAH, S; KOTZ, S. Sums, products and ratios for Downton's bivariate exponential distribution. *Stochastic Env. Res. Risk Assess*, v. 20, p. 164-170, 2006.
- [13] SMITH, O. E.; ADELFGANG; S. I.; TUBBS, J. D. A bivariate gamma probability distribution with application to gust model. *J.Spacecraft Rockets*, v. 18, n. 6, p. 545-549.
- [14] PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. Integrals and series, vol.1. *Amsterdam: Gordon and Breach*, 1998. 808p.
- [15] PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. Integrals and series, vol.2. *Amsterdam: Gordon and Breach*, 1998. 808p.
- [16] CHAMBERS, J.; CLEVELAND, W.; KLEINER, B.; TUKEY, P. Graphical Methods for Data Analysis. *Boston: Duxbury Press*, 1983. 395p.

**ARTIGO 4 Combinações de variáveis aleatórias beta tipo II aplicadas
em modelagem hidrológica**

Artigo redigido conforme norma da Revista Ciências Exatas e Naturais.

**Combinações de variáveis aleatórias beta tipo II aplicadas
em modelagem hidrológica***

**Combinations of beta type II random variables applied in
hydrologic modeling**

Jailson de Araujo Rodrigues

DEX - UFLA, Lavras, MG

jailsondearaujo@yahoo.com.br

Ana Paula Coelho Madeira Silva

DEX - UFLA, Lavras, MG

apcmadeira@hotmail.com

Lucas Monteiro Chaves

DEX - UFLA, Lavras, MG

lucas@dex.ufla.br

Fredy Castellares

ICEX - UFMG, Belo Horizonte, MG

fredy@est.ufmg.br

Resumo: As distribuições do produto e do quociente de variáveis aleatórias são utilizadas em diversas áreas das ciências aplicadas e têm sido intensivamente estudadas por vários pesquisadores. Nesse trabalho, são deduzidas as distribuições exatas de XY , X/Y e $X/(X + Y)$ quando X e Y são variáveis beta tipo II e independentes. Os resultados obtidos são aplicados na análise de dados reais de precipitações pluviométricas ocorridas em cidades do Estado de Sergipe.

Palavras-chave: Distribuição beta tipo II; Combinações de variáveis aleatórias; Modelagem hidrológica.

Artigo redigido conforme norma da Revista Ciências Exatas e Naturais.

*Revista Ciências Exatas e Naturais, Guarapuava, v. 14, n. 1, p. 25-42, 2012.

Abstract: The distributions of products and ratios of random variables are used in various fields of applied science and has been intensively studied by several researchers. In this work are deducted the exact distributions of XY , X/Y and $X/(X + Y)$ when X and Y are independent beta type II random variables. The results are applied to real data analysis of rainfall occurred in cities in the state of Sergipe.

Key words: Beta type II distribution; Combinations of random variables; Hydrological modeling.

1 INTRODUÇÃO

As distribuições de combinações de variáveis surgem naturalmente em problemas aplicados de diversas áreas do conhecimento. Particularmente, combinações do tipo XY , X/Y e $X/(X + Y)$, quando X e Y são independentes e pertencem a mesma família de distribuições, tem sido intensivamente estudadas por vários pesquisadores. Tratando-se do produto de variáveis da mesma família, tem-se: Sakamoto [1] para a distribuição uniforme; Podolski, Springer, Thompson Stuart [2-4] com relação à família gama; Harter e Wallgren [5,6] para a distribuição t de Student; Bhargava, Khatri, Steece, Tang e Gupta [7-9] abordando a família beta; Malik e Trudel [10] para o modelo exponencial; Nadarajah e Gupta [11] para a família Bessel; Nadarajah e Ali [12] com relação à distribuição Pareto; e Ali, Pal e Woo [13] para o modelo Pareto exponenciado. Tratando-se do quociente de variáveis oriundas da mesma família, ver Korhonen, Narula e Marsaglia [14,15] para a família normal; Provost [16] para variáveis gama; Basu e Lochner [17] com relação à distribuição Weibull; Press [18] para o modelo t de Student; Pam-Gia [19] abordando a família beta; Nadarajah e Gupta [11] para as variáveis Bessel e com respeito à distribuição Pareto o problema foi estudado por Nadarajah e Ali [12].

Alguns pesquisadores também estão trabalhando em combinações de variáveis quando X e Y provém de famílias diferentes de distribuições. Por exemplo, o produto e o quociente de variáveis aleatórias t de Student e logística foram es-

tudados por Nadarajah e Ali [20], o mesmo foi feito por Nadarajah e Kotz [21] para variáveis gama e beta. Nadarajah [22] determinou o produto e o quociente de variáveis Laplace e Bessel. Nadarajah e Kotz estabeleceram as distribuições do produto e do quociente de variáveis Pearson tipo VII e Laplace [23], variáveis gama e Weibull [24], variáveis t de Student e Bessel [25] e a distribuição do quociente de uma variável gama com uma variável Levy [26]. Shakil et al [27] estabeleceram produto e o quociente de uma variável Maxwell com uma variável Rayleigh. Shakil e Kibria [28] estudaram o quociente de uma variável gama com uma variável Rayleigh. Recentemente, a dedução das distribuições da combinação linear, produto e quociente de variáveis aleatórias normal e Laplace foram apresentadas por Nadarajah e Kotz [29].

Neste trabalho, é apresentado um estudo das distribuições de XY , X/Y e $X/(X+Y)$ quando X e Y são variáveis aleatórias beta tipo II e independentes. Na Seção 2, é apresentado o modelo beta tipo II, sua relação com o modelo beta tipo I e algumas funções especiais envolvidas nos cálculos das distribuições. Na Seção 3, são deduzidas as funções densidade de probabilidade das variáveis XY , X/Y e $X/(X+Y)$. Finalmente, na Seção 4 os resultados obtidos são aplicados na análise de precipitações pluviométricas ocorridas em cidades do Estado de Sergipe.

2 Distribuições beta

Distribuição beta tipo I: Uma variável aleatória X tem distribuição beta tipo I com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ quando sua função densidade de probabilidade (fdp) é da forma:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \quad (1)$$

em que $0 < x < 1$ e $B(\alpha, \beta)$ representa a função beta,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad (2)$$

Simbolicamente, quando X tem distribuição dada por (1), escreve-se $X \sim BI(\alpha, \beta)$.

Distribuição beta tipo II: Uma variável aleatória X tem distribuição beta tipo II com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ quando sua função densidade de probabilidade (fdp) é da forma:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} (1+x)^{-(\alpha+\beta)}}{B(\alpha, \beta)} \quad (3)$$

em que $0 < x$. Neste caso, escreve-se simbolicamente $X \sim BII(\alpha, \beta)$.

As duas distribuições beta, estão relacionadas intrinsecamente por meio de uma transformação. Se $X \sim BI(\alpha, \beta)$, então $Z = (1 - X)/X \sim BII(\beta, \alpha)$. Reciprocamente, Se $Z \sim BII(\beta, \alpha)$, então $X = 1/(1 + Z) \sim BI(\alpha, \beta)$. Várias características referentes aos dois modelos, inclusive a propriedade mencionada, podem ser encontradas em [30].

Além da função beta, os cálculos envolvidos no trabalho requerem o uso de outras funções especiais como a função gama,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt \quad (4)$$

e a função hipergeométrica de Gauss,

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k x^k}{(c)_k k!} \quad (5)$$

em que $(d)_k = d(d+1) \dots (d+k-1)$ denota o fatorial ascendente, $k \in \mathbb{Z}_+$. As propriedades dessas funções especiais podem ser vistas em [31].

3 FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Nos Teoremas de 1 a 3 são deduzidas as fdp de $P = XY$, $R = X/Y$ e $Q = X/(X + Y)$ quando X e Y são beta tipo II distribuídas e independentes.

Lema 1 (Equação (2.2.6.24), [32]). Se $0 < y$, $0 < z$ e $0 < \alpha < \rho + \gamma$, então,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (x+y)^{-\rho} (x+z)^{-\gamma} dx = z^{-\gamma} y^{\alpha-\rho} B(\alpha, \rho+\gamma-\alpha) \\ \times {}_2F_1\left(\alpha, \gamma; \rho+\gamma; 1-\frac{y}{z}\right)$$

Teorema 1 Se $X \sim BII(\alpha, \beta)$ e $Y \sim BII(\theta, \lambda)$ são independentes, então, a fdp de $P = XY$ pode ser escrita como:

$$f_P(p) = \frac{B(\alpha+\lambda, \beta+\theta)p^{-(\lambda+1)}}{B(\alpha, \beta)B(\theta, \lambda)} {}_2F_1\left(\alpha+\lambda, \theta+\lambda; \alpha+\beta+\theta+\lambda; 1-\frac{1}{p}\right) \quad (6)$$

sendo que $0 < p$.

Prova: Utilizando a mudança de variáveis $(X, P) = (X, XY)$ o Jacobiano dessa transformação é dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = x \quad (7)$$

Assim, a fdp conjunta de (X, P) é dada por

$$f_{X,P}(x, p) = f_{X,Y}\left(x, \frac{p}{x}\right) \times |J|^{-1} \\ = \frac{p^{\theta-1} x^{\alpha+\lambda-1} (1+x)^{-(\alpha+\beta)} (x+p)^{-(\theta+\lambda)}}{B(\alpha, \beta)B(\theta, \lambda)} \quad (8)$$

Pode-se então, escrever a fdp da variável P da seguinte maneira:

$$f_P(p) = \int_0^{\infty} f_{X,P}(x, p) dx \\ = \frac{p^{\theta-1}}{B(\alpha, \beta)B(\theta, \lambda)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+\lambda-1} (1+x)^{-(\alpha+\beta)} (x+p)^{-(\theta+\lambda)} dx \quad (9)$$

A conclusão da demonstração decorre da aplicação direta do Lema 1 na expressão (9).

Na Figura 1 são ilustradas as formas da fdp $P = XY$ para diferentes valores paramétricos.

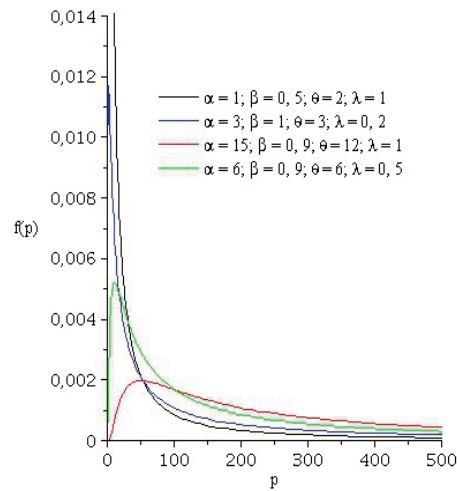


Figura 1 Gráficos da fdp de $P = XY$ para diferentes valores paramétricos.

Teorema 2 Se $X \sim BII(\alpha, \beta)$ e $Y \sim BII(\theta, \lambda)$ são independentes, então, a fdp de $R = X/Y$ pode ser escrita como:

$$f_R(r) = \frac{B(\alpha + \theta, \beta + \lambda)r^{-(\theta+1)}}{B(\alpha, \beta)B(\theta, \lambda)} {}_2F_1\left(\alpha + \theta, \theta + \lambda; \alpha + \beta + \theta + \lambda; 1 - \frac{1}{r}\right) \quad (10)$$

sendo que $0 < r$.

Prova: Utilizando a mudança de variáveis $(X, R) = (X, X/Y)$ o Jacobiano dessa da transformação é dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{y^2} \quad (11)$$

Assim, a fdp conjunta de $(X, R) = (X, X/Y)$ é dada por

$$\begin{aligned} f_{X,R}(x, r) &= f_{X,Y}\left(x, \frac{x}{r}\right) \times |J|^{-1} \\ &= \frac{r^{\lambda-1} x^{\alpha+\theta-1} (1+x)^{-(\alpha+\beta)} (x+r)^{-(\theta+\lambda)}}{B(\alpha, \beta) B(\theta, \lambda)} \end{aligned} \quad (12)$$

Pode-se então, escrever a fdp da variável R da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^\infty f_{X,R}(x, r) dx \\ &= \frac{r^{\lambda-1}}{B(\alpha, \beta) B(\theta, \lambda)} \int_0^\infty x^{\alpha+\theta-1} (1+x)^{-(\alpha+\beta)} (x+r)^{-(\theta+\lambda)} dx \end{aligned} \quad (13)$$

A conclusão da demonstração decorre da aplicação do Lema 1 na expressão (13).

Teorema 3 Se $X \sim BII(\alpha, \beta)$ e $Y \sim BII(\theta, \lambda)$ são independentes, então, a fdp de $Q = X/(X+Y)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f_Q(q) &= \frac{B(\alpha+\theta, \beta+\lambda)}{B(\alpha, \beta) B(\theta, \lambda)} q^{-(\theta+1)} (1-q)^{\theta-1} \\ &\quad \times {}_2F_1\left(\alpha+\theta, \lambda+\theta; \alpha+\beta+\theta+\lambda; 2-\frac{1}{q}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

sendo que $0 < q < 1$.

Prova: Utilizando a mudança de variáveis $(U, Q) = (X + Y, X/(X + Y))$ o Jacobiano dessa transformação é dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{y}{(x+y)^2} & -\frac{x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x+y} \quad (15)$$

Assim, a fdp conjunta de $(U, Q) = (X + Y, X/(X + Y))$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f_{U,Q}(u, q) &= f_{X,Y}(uq, u(1-q)) \times |J|^{-1} \\ &= \frac{(uq)^{\alpha-1} (1+uq)^{-(\alpha+\beta)} [u(1-q)]^{\theta-1} [1+u(1-q)]^{-(\theta+\lambda)} u}{B(\alpha, \beta) B(\theta, \lambda)} \\ &= \frac{u^{\alpha+\theta-1} q^{\alpha-1} (1-q)^{\theta-1} (1+uq)^{-(\alpha+\beta)} [1+(1-q)u]^{-(\theta+\lambda)}}{B(\alpha, \beta) B(\theta, \lambda)} \end{aligned} \quad (16)$$

Pode-se então, expressar a fdp da variável $Q = X/(X + Y)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_Q(q) &= \int_0^\infty f_{U,Q}(u, q) du \\ &= \frac{q^{\alpha-1} (1-q)^{\theta-1}}{B(\alpha, \beta) B(\theta, \lambda)} \int_0^\infty u^{\alpha+\theta-1} (1+uq)^{-(\alpha+\beta)} [1+(1-q)u]^{-(\theta+\lambda)} du \end{aligned} \quad (17)$$

reescrevendo (17) de forma conveniente, tem-se

$$f_Q(q) = \frac{q^{-(\beta+1)} (1-q)^{-(\lambda+1)}}{B(\alpha, \beta) B(\theta, \lambda)} \int_0^\infty u^{\alpha+\theta-1} \left(\frac{1}{q} + u\right)^{-(\alpha+\beta)} \left(\frac{1}{1-q} + u\right)^{-(\theta+\lambda)} du \quad (18)$$

Aplicando o Lema 1 em (18) chega-se a conclusão da demonstração.

Nas Figuras de 2 e 3 são ilustradas as formas das fdp $R = X/Y$ e $Q = X/(X + Y)$ para diferentes valores paramétricos.

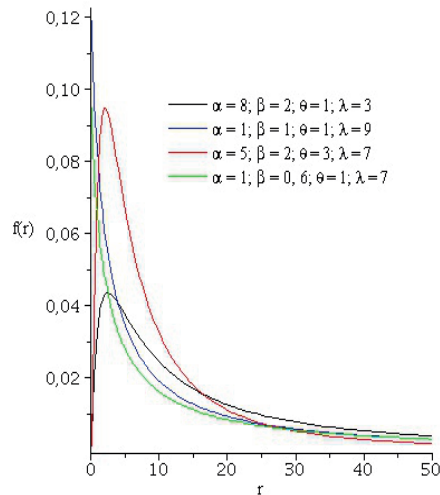


Figura 2 Gráficos da fdp de $R = X/Y$ para diferentes valores paramétricos.

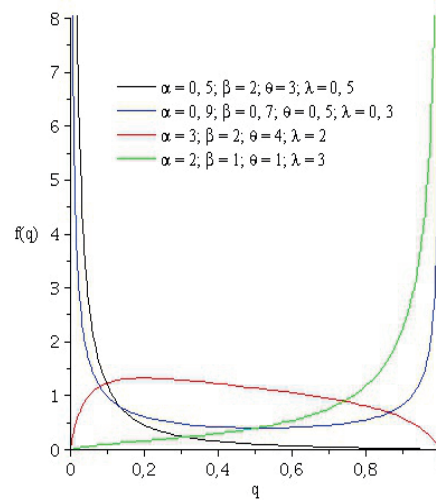


Figura 3 Gráficos da fdp de $Q = X/(X + Y)$ para diferentes valores paramétricos.

4 APLICAÇÃO

Nesta seção, é feita uma aplicação do modelo na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas nas cidades de Aquidabã, Aracaju, Boquim, Nossa Senhora da Glória, Itabaiana, Porto da Folha, Poço Redondo e Umbaúba todas situadas no Estado de Sergipe.

Os dados explorados foram coletados em estações agrometeorológicas e hidrometeorológicas do Centro de Meteorologia da Secretaria de Estado do Meio Ambiente e dos Recursos Hídricos do Estado de Sergipe (SEMARH), as coordenadas geográficas e os tipos das estações são exibidos na Tabela 1. O conjunto de dados pode ser acessado no seguinte endereço eletrônico: <http://www.semarh.se.gov.br/meteorologia/modules/tinyd0/index.php?id=50>. A base de dados corresponde

as medições diárias do índice pluviométrico no período de 01 de janeiro de 2009 até 31 de dezembro de 2010.

Tabela 1 Localização e tipo das estações.

Cidades	Latitude	Longitude	Altitude	Tipo
Aquidabã	-10,29 ⁰	-37,02 ⁰	218 m	Hidrometeorológica
Aracaju	-10,95 ⁰	-37,05 ⁰	4 m	Hidrometeorológica
Boquim	-11,14 ⁰	-37,62 ⁰	160 m	Hidrometeorológica
Itabaiana	-10,70 ⁰	-37,42 ⁰	200 m	Agrometeorológica
N. S. da Glória	-10,20 ⁰	-37,43 ⁰	300 m	Agrometeorológica
Porto da Folha	-10,00 ⁰	-37,42 ⁰	149 m	Hidrometeorológica
Poço Redondo	-9,84 ⁰	-37,67 ⁰	260 m	Agrometeorológica
Umbaúba	-11,38 ⁰	-37,67 ⁰	153 m	Hidrometeorológica

Utilizando as medições do índice pluviométrico, obtém-se os dados sobre período de dias com ocorrência de precipitações (X) e período contíguo de dias sem ocorrência de precipitação (Y). O objetivo é o de modelar a proporção de dias com ocorrência de precipitações, isso pode ser feito através da distribuição de $Q = X/(X + Y)$. Nesse contexto, assume-se que X e Y são beta tipo II distribuídas e independentes. A validade da suposição de independência foi verificada por meio do teste ρ de Spearman [33]. Os p-valores obtidos no teste foram acima de 0,05, ver Tabela 2, o que confirma a hipótese de independência entre as amostras observadas de X e Y para as oito cidades estudadas.

Tabela 2 p-valores do teste ρ de Spearman.

Cidades	p-valor
Aquidabã	0,061
Aracaju	0,239
Boquim	0,541
Itabaiana	0,411
N. S. da Glória	0,795
Porto da Folha	0,142
Poço Redondo	0,692
Umbaúba	0,150

O ajuste das distribuições foi feito via Método da Máxima Verossimilhança. Se $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ representa uma amostra aleatória conjunta de $X \sim BII(\alpha, \beta)$ e $Y \sim BII(\theta, \lambda)$, então, as estimativas de máxima verossimilhança de α e β são as soluções do sistema de equações não-lineares:

$$n\psi(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - n\psi(\hat{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i)$$

$$n\psi(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - n\psi(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i)$$

Analogamente, as estimativas de máxima verossimilhança de θ e λ são as soluções do sistema de equações:

$$n\psi(\hat{\theta} + \hat{\lambda}) - n\psi(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n \log(1 + y_i) - \sum_{i=1}^n \log(y_i)$$

$$n\psi(\hat{\theta} + \hat{\lambda}) - n\psi(\hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \log(1 + y_i)$$

em que $\psi(\cdot)$ denota função digama $\psi(t) = d \log \Gamma(t) / dt$. Essas equações não possuem solução fechada, sendo necessário uma implementação numérica para resolvê-las, o que foi feito utilizando um algoritmo quasi-Newton função nlm do pacote stats no ambiente computacional R [34]. As matrizes de informação associadas são respectivamente,

$$\begin{bmatrix} n[\psi'(\alpha + \beta) - \psi'(\alpha)] & n\psi'(\alpha + \beta) \\ n\psi'(\alpha + \beta) & n[\psi'(\alpha + \beta) - \psi'(\beta)] \end{bmatrix} \quad (19)$$

e

$$\begin{bmatrix} n[\psi'(\theta + \lambda) - \psi'(\theta)] & n\psi'(\theta + \lambda) \\ n\psi'(\theta + \lambda) & n[\psi'(\theta + \lambda) - \psi'(\lambda)] \end{bmatrix} \quad (20)$$

Invertendo a matriz de informação (19) obtém-se a variância e covariância dos estimadores de máxima verossimilhança de α e β ,

$$Var(\hat{\alpha}) = \frac{\psi'(\alpha + \beta) - \psi'(\beta)}{n \{ \psi'(\alpha)\psi'(\beta) - \psi'(\alpha + \beta) [\psi'(\alpha) + \psi'(\beta)] \}} \quad (21)$$

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\psi'(\alpha + \beta) - \psi'(\alpha)}{n \{ \psi'(\alpha)\psi'(\beta) - \psi'(\alpha + \beta) [\psi'(\alpha) + \psi'(\beta)] \}} \quad (22)$$

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -\frac{\psi'(\alpha + \beta)}{n \{ \psi'(\alpha)\psi'(\beta) - \psi'(\alpha + \beta) [\psi'(\alpha) + \psi'(\beta)] \}} \quad (23)$$

A variância e covariância dos estimadores de máxima verossimilhança de θ e λ podem ser calculados utilizando fórmulas análogas as expressões (21), (22) e (23) respectivamente. Na Tabela 3 são exibidas as estimativas obtidas para os parâmetros α , β , θ e λ juntamente com os respectivos erros padrões.

Tabela 3 Estimativas dos parâmetros e erros padrões.

Cidades	$\hat{\alpha}$ (ep)	$\hat{\beta}$ (ep)	$\hat{\theta}$ (ep)	$\hat{\lambda}$ (ep)
Aquidabã	8, 13(1, 02)	5, 09(0, 56)	3, 97(0, 48)	1, 97(0, 18)
Aracaju	5, 23(0, 67)	2, 50(0, 25)	4, 93(0, 63)	2, 30(0, 22)
Boquim	5, 58(0, 70)	2, 87(0, 29)	4, 79(0, 60)	2, 40(0, 23)
Itabaiana	4, 61(0, 58)	2, 23(0, 21)	4, 35(0, 56)	1, 73(0, 15)
N. S. da Glória	6, 464(0, 81)	3, 81(0, 40)	4, 23(0, 56)	1, 57(0, 14)
Porto da Folha	8, 84(1, 10)	6, 08(0, 68)	4, 81(0, 64)	1, 85(0, 17)
Poço Redondo	11, 71(1, 46)	8, 75(1, 02)	4, 48(0, 63)	1, 36(0, 11)
Umbaúba	5, 16(0, 66)	2, 39(0, 23)	5, 18(0, 67)	2, 31(0, 22)

Utilizando as Figuras 4 e 5, pode-se comparar os histogramas dos dados observados com as respectivas fdp ajustadas de Q para as cidades de Aracaju, Boquim, Porto da Folha e Umbaúba.

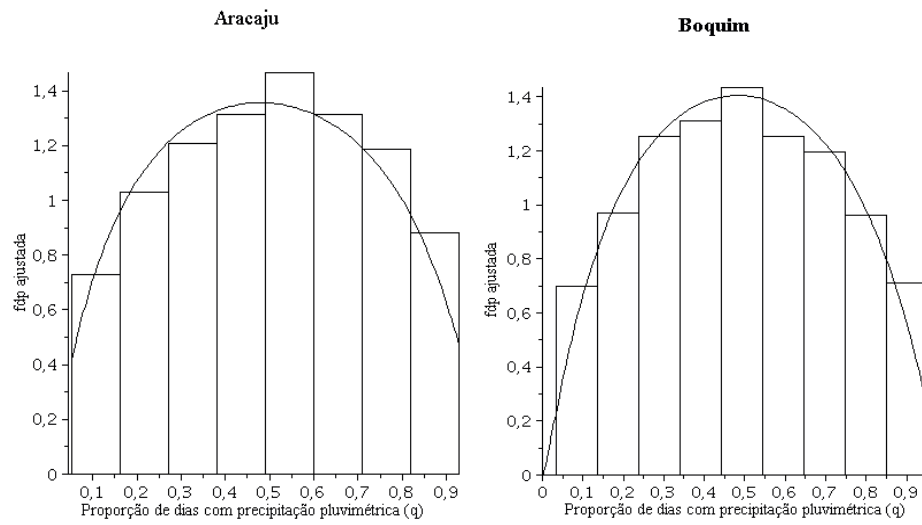


Figura 4 Fdp ajustada de Q para as cidades de Aracaju e Boquim.

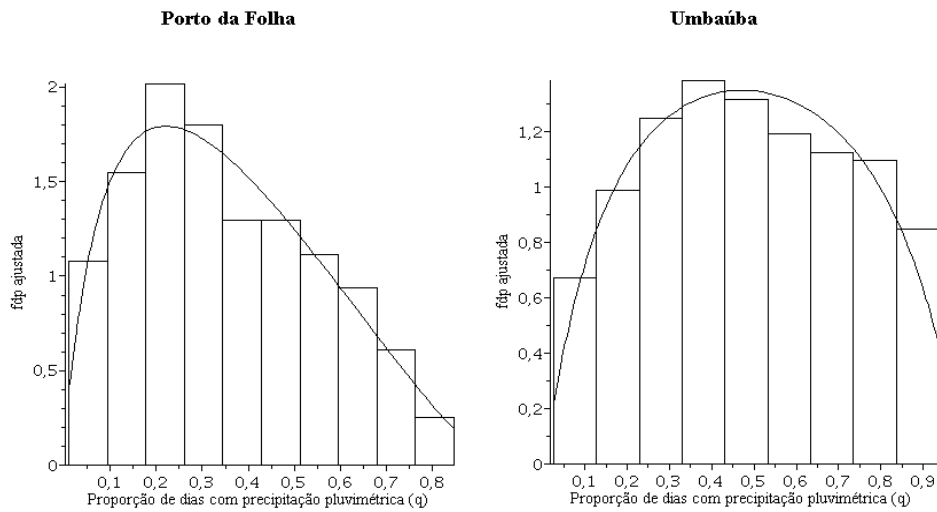


Figura 5 Fdp ajustada de Q para as cidades de Porto da Folha e Umbaúba.

As estimativas de máxima verossimilhança obtidas também permitem inferir a média de $Q = X/(X + Y)$ através da expressão,

$$E(Q) = \frac{B(\alpha + \theta, \beta + \lambda)}{B(\alpha, \beta) B(\beta, \lambda)} \int_0^1 q^{-\theta} (1 - q)^{\theta-1} \times {}_2F_1 \left(\alpha + \theta, \theta + \lambda; \alpha + \beta + \theta + \lambda; 2 - \frac{1}{q} \right) dq. \quad (24)$$

Uma forma alternativa de estimar $E(Q)$ é dada pelo Método dos Momentos através da seguinte expressão,

$$\tilde{E}(Q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i + y_i} \quad (25)$$

As estimativas oriundas da equação (25) independem de X e Y serem independentes ou beta distribuídas. Os valores das equações (24) e (25) para as oito cidades são exibidos na Tabela 4, a proximidade dos valores encontrados é um grande indicativo da validade do modelo.

Tabela 4 Estimativas da média de $Q = X/(X + Y)$.

Cidades	$E(Q)$	$\tilde{E}(Q)$
Aracaju	0,493	0,496
Aquidabã	0,435	0,444
Boquim	0,491	0,492
N. S. da Glória	0,384	0,390
Itabaiana	0,449	0,456
Porto da Folha	0,363	0,366
Poço Redondo	0,288	0,287
Umbaúba	0,491	0,493

A qualidade de ajuste do modelo também foi verificada via gráficos de probabilidade. Para X foi plotado o gráfico de $F_X(x_{(i)})$ versus $(i - 0,375)/(n + 0,25)$

como é recomendado por Chambers et al [35], em que $F_X(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de X e $x_{(i)}$ representa os valores amostrais de X em ordem crescente. Da mesma forma para Y foi plotado o gráfico de $F_Y(y_{(i)})$ versus $(i - 0, 375)/(n + 0, 25)$ em que $F_Y(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de Y e $y_{(i)}$ representa os valores amostrais de Y em ordem crescente. Os gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de X para quatro cidades são visualizados na Figura 6 e a proximidade dos pontos entorno da reta indicam o bom ajuste do modelo. Na Figura 7 são exibidos gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de Y para quatro das oito cidades estudadas, a disposição dos pontos próximos à reta indicam o bom ajuste do modelo.

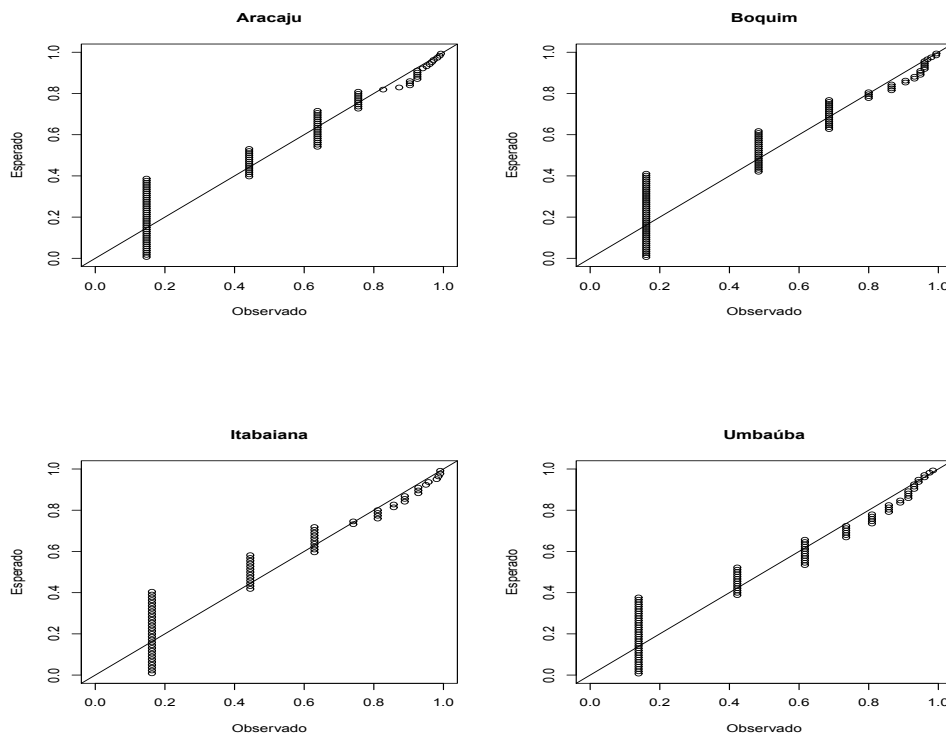


Figura 6 Gráficos de probabilidade para o período de dias com ocorrência de precipitações (X) para quatro cidades selecionadas.

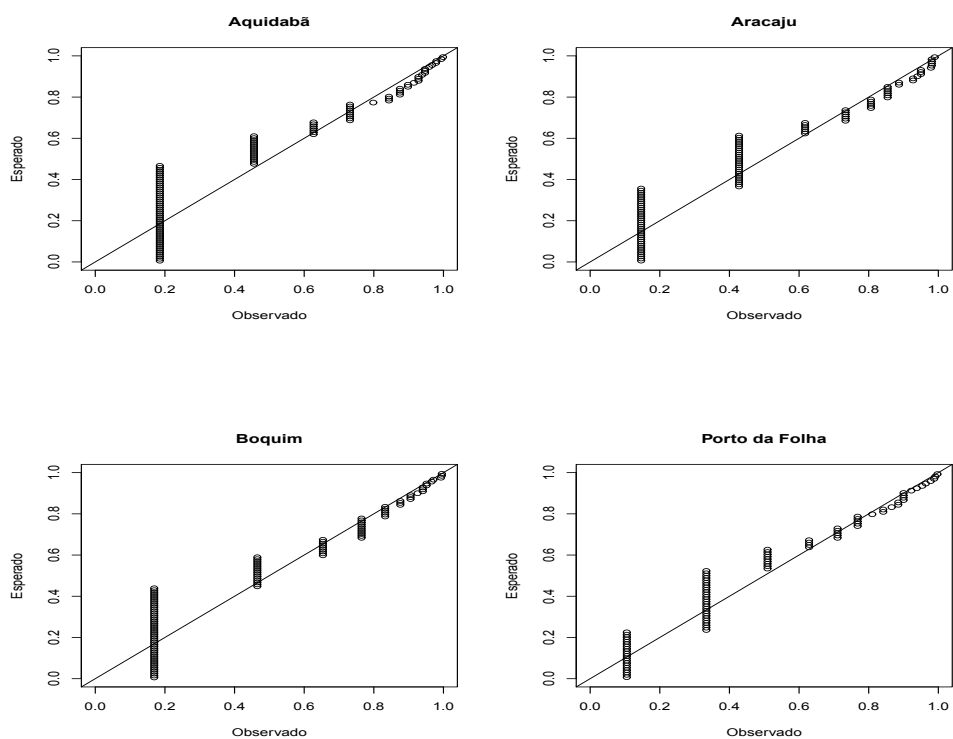


Figura 7 Gráficos de probabilidade para o período de dias sem ocorrência de precipitação (Y) para quatro cidades selecionadas.

5 CONCLUSÕES

Partindo do fato que X e Y são beta tipo II distribuídas e independentes, as distribuições das combinações de variáveis $P = XY$, $R = X/Y$ e $Q = X/(X + Y)$ apresentaram forma fechada em termos da função hipergeométrica de Gauss. Em particular, a distribuição de Q demonstrou-se bastante flexível, tornando-se uma alternativa interessante em relação a distribuição beta tipo I na modelagem de proporções.

A aplicação do modelo na análise de precipitações pluviométricas ocorridas nas cidades de Aquidabã, Aracaju, Boquim, Nossa Senhora da Glória, Itabaiana, Porto da Folha, Poço Redondo e Umbaúba no Estado de Sergipe apresentou bons

resultados, o que foi comprovado pelos P-P plots em função dos pontos em cada gráfico estarem dispostos próximos a reta.

REFERÊNCIAS

- [1] SAKAMOTO, H. On the distribution of the product and the quotient of the independent and uniformly distributed random variables. *Tohoku Math J.*, v. 49, p. 243-260, 1943.
- [2] PODOLSKI, H. The distribution of a product of n independent random variables with generalized gamma distribution. *Demonstr. Math.*, v. 4, p. 119-123, 1972.
- [3] SPRINGER, M. D.; THOMPSON, W. E. The distribution of product beta, gamma and Gaussian random variables. *SIAM J. Appl. Math.*, v. 18, p. 721-737, 1970.
- [4] STUART, A. Gamma-distributed products of independent random variables. *Biometrika*, v. 49, p. 564-565, 1962.
- [5] HARTER, H. L. On the distribution of Wald's classification statistic. *Ann. Math Stat.*, v. 22, p. 58-67, 1951.
- [6] WALLGREN, C. M. The distribution of the product of two correlated t variables. *J. Am. Stat. Assoc.*, v. 75, p. 996-1000, 1980.
- [7] BHARGAVA, R. P.; KHATRI, C. G. The distribution of product of independent beta random variables with application to multivariate analysis. *Ann. Inst. Stat. Math.*, v. 33, p. 287-296, 1981.

- [8] STEECE, B. M. On the exact distribution for the product of two independent beta-distributed random variables. *Metron*, v. 34, p. 187-190, 1976.
- [9] TANG, J.; GUPTA, A. K. On the distribution of the product of independent beta random variables. *Stat. Probab. Lett.*, v. 2, p. 165-168, 1984.
- [10] MALIK, H. I.; TRUDEL, R. Probability density function of the product and quotient of two correlated exponential random variables. *Can. Math Bull.*, v. 29, p. 413-418, 1986.
- [11] NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. On the product and ratio of Bessel random variables. *Int. J. of Mathematics and Mathematical Sciences*, v. 18, p. 2977-2989, 2005.
- [12] NADARAJAH, S.; ALI, M. M. Pareto variables for hydrological modeling. *Water Resources Management*, v. 22, p. 1381-1393, 2008.
- [13] ALI, M. M.; PAL, M.; WOO, J. On the ratio of two independent exponentiated Pareto variables. *Austrian J. Stat.*, v. 39, p. 329-340, 2010.
- [14] KORHONEN, P. J.; NARULA, S. C. The probability distribution of the ratio of the absolute values of two normal variables. *J. Stat. Comput. Simul.*, v. 33, p. 173-182, 1989.
- [15] MARSAGLIA, G. Ratios of normal variables and ratios of sums of uniform variables. *J. Am. Stat. Assoc.*, v. 60, p. 193-294, 1965.
- [16] PROVOST, S. B. On the distribution of the ratio of powers of sums of gamma random variables. *Pak. J. Stat.*, v. 5, p. 157-174, 1989.
- [17] BASU, A. P.; LOCHNER, R. H. On distribution of the ratio of two random variables having generalized life distributions. *Technometrics* , v. 13, p. 281-287, 1971.

- [18] PRESS, S. J. The t ratio distribution. *J. Am. Stat. Assoc.*, v. 64, p. 242-252, 1969.
- [19] PAM-GIA, T. Distributions of the ratios of independent beta variables and applications. *Commun Stat. Theory Methods*, v. 29, p. 2693-2715, 2000.
- [20] NADARAJAH, S.; ALI, M. M. On the product and ratio of t and logistic random variables. *Calcutta Stat. Ass. Bull.*, v. 55, p. 1-14, 2004.
- [21] NADARAJAH, S; KOTZ, S. On the product and ratio of gamma and beta random variables. *Allgemeines Stat. Archiv*, v. 89, p. 435-449, 2005.
- [22] NADARAJAH, S. On the product and ratio of Laplace and Bessel random variables. *J. Appl. Math*, v. 4, p. 393-402, 2005.
- [23] NADARAJAH, S; KOTZ, S. On the product and ratio of Pearson Type VII and Laplace random variables. *Austrian J. Stat.*, v. 34, p. 11-23, 2005.
- [24] NADARAJAH, S; KOTZ, S. On the product and ratio of gamma and Weibull random variables. *Econometric Theory*, v. 22, p. 338-344, 2006.
- [25] NADARAJAH, S; KOTZ, S. On the product and ratio of t and Bessel random variables. *Bull. Inst. Math Acad. Sinica*, v. 2, p. 55-66, 2007.
- [26] NADARAJAH, S; KOTZ, S. On the p ratio of gamma and Levy random variables. *Applied Economics Letters*, v. 13, p. 153-157, 2006.
- [27] SHAKIL, M.; KIBRIA, B. M. G.; CHANG, K. C. Distributions of the product and ratio of Maxwell and Rayleigh random variables. *Stat. Papers*, v. 49, p. 729-747, 2008.

- [28] SHAKIL, M.; KIBRIA, B. M. G. Exact distribution of the ratio of gamma and Rayleigh random variables. *Pak. J. Stat. oper. Res.*, v. 2, p. 87-98, 2006.
- [29] NADARAJAH, S; KOTZ, S. On the linear combination, product and ratio of normal and Laplace random variables. *J. Franklin Institute*, v. 348, p. 810-822, 2011.
- [30] JAMBUNATHAN, M. V. Some properties of beta and gamma distributions. *The Annals of Math. Stat.*, v. 25, p. 401-405, 1954.
- [31] OLDHAM, K.; MYLAND, J.; SPANIER, J. An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator. *Canada: Springer Verlag*, 2^o. ed., 2009. 700p.
- [32] PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. Integrals and series, vol. I. *Amsterdam: Gordon and Breach*, 1998. 808p.
- [33] BEST, D. J.; ROBERTS, D. E. Algorithm AS 89: The upper tail probabilities of Spearman's rho. *Appl. Stat.*, v. 24, p. 377-379, 1975.
- [34] SCHNABEL, R. B.; KOOTNZ, J. E.; WEISS, B. E. A modular system of algorithms for unconstrained minimization. *ACM Transactions of Mathematical Software*, v. 11, p. 419-440, 1985.
- [35] CHAMBERS, J.; CLEVELAND, W.; KLEINER, B.; TUKEY, P. Graphical Methods for Data Analysis. *Boston: Duxbury Press*, 1983. 395p.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem de precipitações pluviométricas por meio das distribuições probabilísticas contínuas pode ser utilizada como uma alternativa viável em relação aos demais métodos existentes, como séries temporais, regressão, cadeias de Markov e redes neurais, em função da praticidade dos modelos e dos bons resultados obtidos.

As distribuições utilizadas apresentaram um bom ajuste em relação aos dados dos diários de precipitação pluviométrica para cada cidade analisada, explicando de forma satisfatória o comportamento do período de dias com precipitação e do período de dias sem precipitação. Neste contexto, os resultados obtidos podem ser utilizados como referência no planejamento agrícola dessas cidades no que diz respeito à instalação de culturas, no manejo de recursos hídricos e seguro agrícola. Além disso, importantes elementos meteorológicos foram descritos a partir dessas variáveis, como por exemplo, o período climático, considerado como a soma do período com precipitação com o período sem precipitação. Esses elementos ajudaram a descrever parte da pluviometria das regiões estudadas.

Como perspectiva de trabalhos futuros, almeja-se efetuar um estudo comparativo entre os modelos trabalhados aplicados em dados de precipitações ocorridas nas cidades estudadas, objetivando determinar quais modelos descrevem, de modo mais apropriado, a pluviometria da região. Além disso, pretende-se construir uma nova classe de modelos probabilísticos gerada pela composição de certas distribuições, estudar suas principais propriedades e explorar o potencial dessa nova classe de distribuições na análise de processos hidrológicos.