



**DANIELLE GONÇALVES DE OLIVEIRA PRADO**

**AS DISTRIBUIÇÕES GAMA BIVARIADA E  
GAMA PARETO NA MODELAGEM DE  
PERÍODOS DE SECA**

**LAVRAS – MG**

**2012**

**DANIELLE GONÇALVES DE OLIVEIRA PRADO**

**AS DISTRIBUIÇÕES GAMA BIVARIADA E GAMA PARETO NA  
MODELAGEM DE PERÍODOS DE SECA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador  
Dr. Lucas Monteiro Chaves

**LAVRAS – MG**

**2012**

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da  
Biblioteca da UFLA**

Prado, Danielle Gonçalves de Oliveira.

As distribuições Gama Bivariada e Gama Pareto na modelagem de períodos de seca / Danielle Gonçalves de Oliveira Prado. – Lavras : UFLA, 2012.

61 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2012.

Orientador: Lucas Monteiro Chaves.

Bibliografia.

1. Condições climáticas. 2. Temperatura. 3. Seguro agrícola. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.5

**DANIELLE GONÇALVES DE OLIVEIRA PRADO**

**AS DISTRIBUIÇÕES GAMA BIVARIADA E GAMA PARETO NA  
MODELAGEM DE PERÍODOS DE SECA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 10 de fevereiro de 2012.

Dr. Fredy Walther Castellares Cáceres      UFMG

Dr. João Domingos Scalon                      UFLA

Dr. Lucas Monteiro Chaves

Orientador

**LAVRAS – MG**

**2012**

*Aos meus pais, Júlio e Denise;  
minha irmã Isabelle;  
minha avó Diná,  
DEDICO.*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus que sempre guiou meus caminhos, iluminou meus estudos e esteve comigo durante toda essa caminhada.

Aos meus pais, Júlio e Denise, à minha vó Diná e à minha irmã Belles, pelo apoio, carinho e incentivo que sempre me deram. Sem vocês essa trajetória não faria sentido algum.

À Universidade Federal de Lavras, pelas oportunidades concedidas na minha vida acadêmica.

Ao meu orientador Lucas Monteiro Chaves por ser bem mais que um educador e ter se tornado um pai emprestado. Obrigada pela atenção, carinho, paciência e compreensão durante essa caminhada.

Aos professores do Departamento de Ciências Exatas, pelo conhecimento transmitido e pela disposição em ajudar. Em especial ao professor Renato Lima pela paciência na orientação durante a docência voluntária. Agradeço a confiança concedida e os ensinamentos.

Ao professor Fredy Castellares e professor Devanil pela colaboração na escolha do tema e ajuda constante durante a escrita da dissertação.

Ao CNPq pela bolsa de fomento fornecida durante o mestrado e à CAPES pelo apoio ao Procad.

Às meninas da secretaria e da limpeza. Sempre muito prestativas e bem humoradas tornando as tardes no DEX mais alegres.

À Larissa e à Juscélia, amigas que estiveram comigo desde o início do curso em todos os momentos. Agradeço a companhia nos congressos, viagens à trabalho e à lazer, noites de muito estudo e de baladas. A presença de vocês foi fundamental em todos esses eventos.

Ao quarteto fantástico que muitos chamam de quadrilha: Dani, Flor, Jussa e Tábata. O final do curso não seria tão interessante e legal se não tivéssemos formado esse time. As aventuras jamais serão esquecidas.

À galerinha da EST 2010: Larissa, Juscélia, Tábata, Iábita, Juliano, Jura, Elayne, Mari, Adriele, Marcelo, Lourenço, Adriana, Leandro e André, com os quais aprendi muito. Levarei cada um pro resto da vida. Um agradecimento especial ao clube da Luluzinha que sempre salvava as noites vazias. Uma família que ganhei em Lavras.

Aos irmãozinhos de orientação: Ana Paula, Jailson, Fernandinha, Leandro, Luzia e Alexandre.

Às pessoas mágicas que conheci em Lavras durante o curso e estiveram presentes em muitos dos momentos especiais que vivi aqui: Jairo, Carol, Renato, Fernando, Matheus, Fábio, Bruno... Por mais que a distância venha afastar-nos por um tempo, tenham certeza que cada um tem um cantinho reservado no meu coração. Sentirei saudades! Agradecimento especial ao carinho recebido pelo Rodrigo, que acompanhou de pertinho essa reta final e com quem pude contar por muitas vezes.

Aos tios e tias, primos e primas, padrinhos e madrinhas que sempre depositaram confiança e torceram para que tudo terminasse bem.

Aos amigos de Itaúna e Viçosa que tanto sinto falta obrigada por se fazerem presentes na medida do possível. Paulinha, minha “chaveirinho”, e Carol, minha “ismã gêmia”; as melhores amigas, psicólogas e futuras médicas do mundo. Os momentos de descontração e comilança não são os mesmos sem vocês duas.

Enfim, obrigada a todos que participaram direta e indiretamente dessa conquista. Estou muito feliz por realizar mais esse sonho.

## RESUMO

A seca é um fenômeno climático que ocorre periodicamente e pode causar impactos em diferentes seguimentos da atividade humana. Surge então a necessidade da construção de modelos matemáticos e estatísticos que expliquem melhor a ocorrência desse fenômeno. Essa abordagem tem sido tema de muitos artigos publicados pelo pesquisador Nadarajah. Nesta dissertação são estimados os parâmetros dos modelos bivariados: Gama Bivariada e Gama Pareto aplicados aos dados de seca e não seca da cidade de Joaquim Távora – PR – Brasil.

**Palavras-chave:** Condições climáticas, temperatura, seguro agrícola.

## ABSTRACT

Drought is a climatic phenomenon that occurs periodically and can impact on different segments of human activity. Then, it comes the need to develop mathematical and statistical models that better explain this phenomenon. This approach has been the subject of many articles published by Nadarajah researcher. This dissertation estimates the parameters of bivariate models: Gamma and Gamma bivariate Pareto applied to drought and not drought from the city of Joaquim Távora – PR – Brazil.

**Keywords:** Weather conditions, temperature, crop insurance.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Gama Bivariada.....	22
Figura 2. Marginal $Y$ do modelo Gama Bivariada.....	25
Figura 3. Gama Pareto Bivariada.....	30
Figura 4. Localização de Joaquim Távora no mapa.....	42
Figura 5. Gráfico da Equação da reta em $\mathbb{R}^2$ .....	44
Figura 6. Gráfico da função acumulada empírica de $X$ .....	45
Figura 7. Gráfico PP-Plot para a relação $Y = X$ .....	45
Figura 8. Gama Bivariada.....	48
Figura 9. Gama Pareto.....	48
Figura 10. Ajuste da marginal $X$ ao histograma de frequência dos períodos de não seca.....	49
Figura 11. Ajuste da marginal $Y$ ao histograma de frequência dos períodos de seca.....	49
Figura 12. Ajuste da marginal $X$ ao histograma de frequência dos períodos de não seca.....	50
Figura 13. Ajuste da marginal $Y$ ao histograma de frequência dos períodos de seca.....	50
Figura 14. Gráficos de PP-Plot.....	51

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Classificação da seca de acordo com PDSI.....	38
Tabela 2. Classificação da seca de acordo com SPI .....	40
Tabela 3. Parâmetros estimados.....	47
Tabela 4. Dados em SPI fornecidos pela estação meteorológica de código 2349030 da cidade de Joaquim Távora. ....	56
Tabela 5. Períodos de seca e não seca na cidade de Joaquim Távora.....	60

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	12
1.1	Caracterização do fenômeno seca .....	12
1.2	Objetivos .....	15
2	REFERENCIAL TEÓRICO .....	16
2.1	Uso de modelos bivariados na modelagem da seca.....	16
2.2	Funções Especiais .....	17
2.3	Modelo Gama.....	18
2.4	Modelo Gama Bivariado.....	21
2.4.1	Marginal $X$ .....	22
2.4.2	Marginal $Y$ .....	23
2.4.3	Período total entre seca e não seca e a proporção do período de não seca.....	25
2.4.4	Marginal $W$ .....	27
2.4.5	Marginal $R$ .....	28
2.4.6	Momentos.....	29
2.5	Modelo Gama Pareto Bivariado.....	29
2.5.1	Marginal $X$ .....	30
2.5.2	Marginal $Y$ .....	31
2.5.3	Momentos.....	32
2.6	Método da Máxima Verossimilhança .....	33
2.6.1	Função de Verossimilhança.....	33
2.7	Estimação dos parâmetros.....	34
2.8	Critério de Akaike (AIC) .....	36
2.9	Índices de quantificação da seca .....	37
3	METODOLOGIA .....	42
3.1	Dados .....	42
3.2	Estimação .....	43
3.3	Critério de ajuste .....	43
3.4	Escolha do modelo .....	46
3.5	Softwares .....	46
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	47
5	CONCLUSÃO .....	53
	REFERÊNCIAS.....	54
	APÊNDICE .....	56

## **1 INTRODUÇÃO**

Essa dissertação está baseada essencialmente nos trabalhos publicados por Saralees Nadarajah, relacionados à utilização de distribuições envolvendo a distribuição gama, na modelagem de períodos de seca e não seca. Tal abordagem tem interesse corrente na área de hidrologia com extenso número de publicações na literatura. Saralees Nadarajah é professor titular da Faculdade de Matemática da Universidade de Manchester e esteve recentemente ao Brasil participando da 56ª Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria em 2011.

O trabalho faz parte do PROCAD – projeto intitulado: “Seguro agrícola: modelagem estatística e precificação”, financiado pela CAPES, sob coordenação geral da USP e IFES associadas: UFLA e UFMG. O objetivo do PROCAD é o desenvolvimento de metodologias para a quantificação e monitoramento do risco no agronegócio brasileiro sob uma perspectiva estatístico-atuarial e econômica, visando a geração de novas estratégias de seguro para o setor, que contribuam para a gestão eficiente do risco no agronegócio.

A linha de pesquisa dessa dissertação envolve também a professora doutora da Universidade Federal de São João Del Rei, Ana Paula Coelho Madeira, e o professor do IFBA também doutorando do programa da UFLA Jailson de Araujo Rodrigues do curso de Estatística e Experimentação Agropecuária da Universidade Federal de Lavras.

### **1.1 Caracterização do fenômeno seca**

A seca é um fenômeno climático que ocorre periodicamente e é caracterizada pela insuficiência de precipitação pluviométrica numa determinada

região por um período prolongado de tempo. Esse déficit recorrente e prolongado de água tem provocado impactos negativos na economia mundial, refletindo diretamente na qualidade de vida da população.

Estudos apontam que em 2010, a seca na Amazônia pode ter causado um impacto imenso no aquecimento global. Essa maior frequência de secas nessa região pode transformar a maior floresta tropical do mundo em uma máquina de gases contribuindo para o efeito estufa, já que a vegetação, quando seca e apodrece, normalmente elimina gases absorvidos durante o crescimento.

Em Minas Gerais, vários projetos já estão sendo implementados pelo governo para que as regiões mais afetadas pela seca como o norte do estado e o vale do Jequitinhonha tenham condições de conviver com os longos períodos de estiagem.

Segundo Mckee et al. (1993) não existe uma definição específica para descrever o termo seca. Agricultores, pesquisadores, cientistas ou cidadãos comuns têm perspectivas distintas sobre o tema. O dicionário Aurélio define seca como falta de chuva ou período em que a ausência dessa acarreta graves problemas sociais. Palmer (1965) considera a seca como um intervalo de tempo durante o qual, o índice de precipitação não atinge aquele climatologicamente esperado ou apropriado. Comum a todas as definições dadas à seca está o fato dessa ser oriunda de um déficit de precipitação que acarreta em uma baixa disponibilidade hídrica em relação a alguma atividade.

Devido sua grande complexidade os índices encontrados relativos a esse fenômeno natural não representam perfeitamente a intensidade e os impactos que a seca provoca nos diferentes segmentos da atividade humana. Essa condição climática provoca constantemente diversos desastres em várias regiões do mundo, evidenciando a vulnerabilidade do homem a esse risco climático. Surge então necessidade de um melhor entendimento sobre o fenômeno para que haja uma melhor previsão da sua ocorrência e um uso correto de medidas

mitigatórias. A construção de modelos matemáticos, estatísticos e computacionais são algumas ferramentas que podem facilitar esse entendimento.

A modelagem estatística para períodos de seca e não seca em uma determinada região não é uma tarefa simples. Primeiramente, é necessário que se tenha um índice de déficit hídrico para o solo. Com esse índice é possível estabelecer de forma precisa se o período é de seca ou se o período é de chuva. A dependência entre esses períodos não é simples.

Na agricultura, cada lavoura tem seu aspecto particular a ser considerado como a topografia, o tipo de solo etc., além da disponibilidade de implementos e da economicidade de uma ou de outra prática cultural. Por exemplo, o plantio das mudas de café deve ocorrer em época de chuvas. Caso contrário, podem ocorrer muitas perdas. Se houver a necessidade de se plantar em períodos de estiagem, a irrigação é essencial.

Um dos índices mais utilizados e encontrados na literatura para essa quantificação é o Índice de Severidade de Seca de Palmer (PDSI) desenvolvido por Palmer (1965).

Considerando  $X$  como sendo a variável aleatória que representa o período de seca e  $Y$  a variável aleatória que representa o período de não seca, podendo o período ser apresentado em dias, meses ou até em anos de acordo com os dados coletados. Várias distribuições bivariadas têm sido propostas para modelar o comportamento conjunto de  $(X, Y)$ . Em particular, esse problema foi abordado por Saralees Nadarajah em uma série de artigos, dentre estes Nadarajah (2009, 2007) e Nadarajah e Gupta (2007). Nesses artigos são utilizadas distribuições gama bivariadas generalizadas, modelando dados de período de chuva e seca dos últimos 108 anos no estado de Nebraska, EUA.

## 1.2 Objetivos

O principal objetivo no desenvolvimento dessa pesquisa é analisar a adequação do uso das distribuições Gama Bivariada e Gama Pareto na modelagem de períodos de seca e não seca.

Os objetivos específicos são:

- Obter as estimativas dos parâmetros para a Distribuição Gama Bivariada e a Distribuição Gama Pareto para dados de períodos consecutivos de seca e não seca do município de Joaquim Távora – PR relativos a janeiro de 1976 até dezembro de 2005.
- Verificar a adequabilidade dos ajustes obtidos tanto para a Distribuição Gama Bivariada quanto para a Distribuição Gama Pareto.
- Comparar a qualidade dos ajustes obtidos.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Uso de modelos bivariados na modelagem da seca

Vários modelos probabilísticos têm sido propostos por pesquisadores com o intuito de caracterizar processos hidrológicos. Izawa (1953) constrói uma distribuição gama bivariada e a aplica em dados reais de precipitação pluviométrica do Distrito de Kanto no Japão. Yue (2001) utiliza uma distribuição gama bivariada com cinco parâmetros na análise de correlação entre a duração e volume de precipitação pluviométrica e a correlação entre o volume e o pico de precipitação pluviométrica.

Nadarajah e Gupta (2007) analisam o comportamento das secas ocorridas no Estado Norte Americano de Nebraska em um período de cento e dez anos considerando o modelo gama bivariado de Cherian. Esse mesmo conjunto de dados é estudado por Nadarajah (2007) considerando um modelo Gama bivariado mais simples com apenas dois parâmetros. Nadarajah (2009) utiliza um modelo Pareto bivariado para estudar a correlação entre o período de seca e o período contíguo sem ocorrência de seca e a intensidade da seca e sua duração.

Para o evento denominado de “seca”, as variáveis observadas serão:  $X$ , período de não seca e  $Y$ , período de seca. Considere  $R = X + Y$  o tempo entre a ocorrência de períodos de seca e períodos de não seca, ou seja, o período total e  $W = \frac{X}{X+Y}$ , a proporção entre o período de não seca e o período total de um ciclo climático.

Em razão da complexidade das distribuições da família gama bivariada, é necessário o uso de algumas funções matemáticas denominadas na literatura de funções especiais.

## 2.2 Funções Especiais

Chamamos de função especial uma função matemática, que devido sua importância recebe um nome particular. Algumas das mais importantes utilizadas na estatística são:

### Função Bessel

A função Bessel do tipo I é dada por:

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m}$$

em que  $\nu$  é um número natural, denominado ordem.

A função Bessel do tipo I modificada, de ordem  $\nu$  e argumento  $x$ , é definida por:

$$I_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\nu+1)_k k!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k$$

em que  $(s)_k = s(s+1) \dots (s+k-1)$  denota o fatorial ascendente.

A função Bessel tipo II é dada por:

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

A função Bessel do tipo III modificada é a função  $K_\nu(x)$  definida por:

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi} x^\nu}{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_1^{\infty} (t^2 - 1)^{\nu-1/2} \exp(-xt) dt.$$

### Função Gama incompleta

A função Gama incompleta é dada por:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$$

onde  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x^m}{m!}\right)$  é a expansão em série de

Taylor centrada em 0 da função  $e^x$ .

### Função Digama

A função Digama é definida como a derivada do logaritmo da função Gama.

$$\psi(x) = \frac{d \ln(\Gamma(x))}{dx}$$

### Função Beta

A função Beta denotada por  $B(\cdot, \cdot)$  é definida como:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad \alpha, \beta > 0.$$

Observe que tomando  $z = 1 - t$  como a variável de integração, obtém-se

$$B(\alpha, \beta) = \int_1^0 z^{\beta-1} (1-z)^{\alpha-1} (-dz) = \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{\alpha-1} (-dz) = B(\beta, \alpha),$$

isto é, a função Beta é simétrica.

## 2.3 Modelo Gama

### Definição

Dizemos que uma variável aleatória  $X$  tem distribuição Gama,  $X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ , se sua função densidade é dada por  $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \Gamma(\alpha, \beta)(x)$ , sendo  $\alpha$  e  $\beta$  dois parâmetros positivos e  $\Gamma(\alpha)$  a função Gama definida por  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ ,  $\alpha > 0$ .

Vale destacar alguns resultados básicos:

- $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ ;
- $\Gamma(n) = (n-1)!$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ ;
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$ .

A função de distribuição do modelo Gama não tem uma forma simples. Em casos particulares, dependendo dos valores dos parâmetros, o modelo Gama pode receber outros nomes. Por exemplo, quando  $\alpha = 1$  e  $\beta > 0$ , temos o modelo Exponencial e quando  $\alpha = \frac{n}{2}$ ,  $n > 0$  e  $\beta = \frac{1}{2}$  temos o modelo Qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade.

### Funções geradora de momentos

Definição: A função geradora de momentos de uma variável aleatória  $X$  é definida por  $M_X(t) = E(e^{tX})$ , para  $t$  entre 0 e algum  $t_0 > 0$ , em que  $E(e^{tX})$  é o valor esperado, ou esperança matemática de  $e^{tX}$ , dado por:

$$E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} f(x) dx.$$

Os momentos de  $X$  podem ser obtidos a partir da função geradora de momentos. (MOOD, A.M; GRAYBILL, F.A; BOES, D.C; 1974)

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(t)|_{t=0} = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)|_{t=0}.$$

Se  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  sua função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{tx-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)} dx = \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{(\beta-t)^{\alpha-1}}{(\beta-t)^{\alpha-1}} x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)} dx = \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta-t)^{\alpha-1}} \int_0^{\infty} [(\beta-t)x]^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)} dx = \\ &= \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\beta-t)^{\alpha-1}(\beta-t)} = \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

**Média**

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha \Big|_{t=0} = \frac{\beta^\alpha \alpha (\beta-t)^{\alpha-1}}{(\beta-t)^{2\alpha}} \Big|_{t=0}.$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

**Variância**

Por definição, têm-se  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ , onde  $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$ .

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) |_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha |_{t=0} = \frac{\beta^\alpha \alpha(\alpha + 1)(\beta - t)^\alpha}{(\beta - t)^{2\alpha+2}} |_{t=0}$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2}$$

Assim,  $V(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$  e portanto:

$$V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

## 2.4 Modelo Gama Bivariado

### Definição

Diversos modelos Gama Bivariados têm sido propostos na literatura como em Balakrishnan e Lai (2009). Um dos mais simples e flexíveis utilizados para estudar a correlação entre períodos de seca e não seca tem função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \alpha^2 \beta \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta y}{x}\right) \text{ onde } x, y, \alpha, \beta > 0.$$

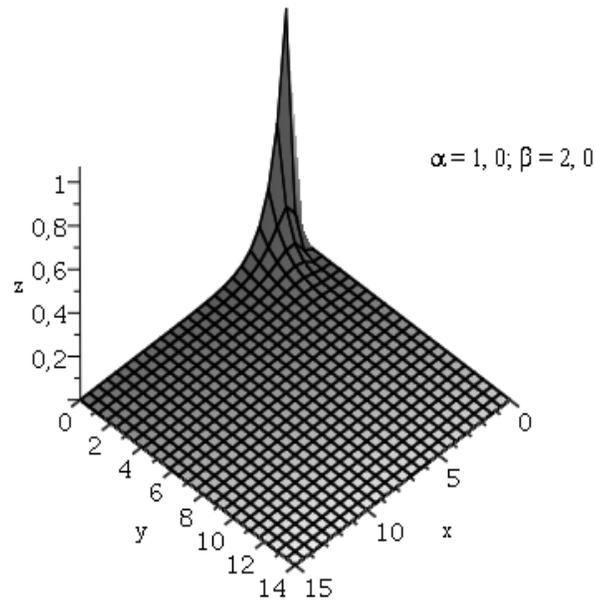


Figura 1. Gama Bivariada

#### 2.4.1 Marginal $X$

A marginal  $X$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^{\infty} \alpha^2 \beta \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta y}{x}\right) dy = \\
 &= \alpha^2 \beta \exp(-\alpha x) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta y}{x}\right) dy = \alpha^2 x \exp(-\alpha x). \\
 \Rightarrow f_X(x) &= \alpha^2 x \exp(-\alpha x) \Rightarrow X \sim \text{Gamma}(2, \alpha).
 \end{aligned}$$

### 2.4.2 Marginal $Y$

A marginal  $Y$  é dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^{\infty} \alpha^2 \beta \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta y}{x}\right) dx = \\ &= \alpha^2 \beta \int_0^{\infty} \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta y}{x}\right) dx. \end{aligned}$$

Tome  $kt = \alpha x + \beta \frac{y}{x} \Rightarrow \alpha x^2 - kt x + \beta y = 0$  e assim:

$$x = \frac{kt \pm \sqrt{(kt)^2 - 4\alpha\beta y}}{2\alpha}.$$

Escrevendo  $kt = \sqrt{4\alpha\beta y} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} \left(t \pm \sqrt{t^2 - 1}\right)$ .

Se  $t = 1$ , então  $x = \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}}$ , o que facilita os cálculos.

Agora temos:

$$f_Y(y) = \alpha^2 \beta \int_0^{\sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}}} \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta y}{x}\right) dx + \alpha^2 \beta \int_{\sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}}}^{\infty} \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta y}{x}\right) dx.$$

[1] Para  $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}}$ , temos  $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow \infty$ .

Se  $x = \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} \left(t - \sqrt{t^2 - 1}\right)$ , então  $dx = \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}\right) dt$ .

[2] Para  $\sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} \leq x$ , temos  $x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$ .

$$\text{Se } x = \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} (t + \sqrt{t^2 - 1}), \text{ então } dx = \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}\right) dt.$$

De [1] e [2] temos:

$$f_Y(y) = \alpha^2 \beta \int_{-\infty}^1 \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}\right) \exp(-2\sqrt{\alpha\beta y}t) dt + \\ \alpha^2 \beta \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}\right) \exp(-2\sqrt{\alpha\beta y}t) dt.$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = 2\alpha^2 \beta \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} \int_1^{\infty} \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \exp(-2\sqrt{\alpha\beta y}t) dt.$$

A nova integral será resolvida por partes. Tome:

$$u = \exp(-2\sqrt{\alpha\beta y}t) \Rightarrow du = -2\sqrt{\alpha\beta y} \exp(-2\sqrt{\alpha\beta y}t) dt.$$

$$dv = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}\right) dt \Rightarrow v = \sqrt{t^2 - 1}.$$

Assim,

$$f_Y(y) = 2\alpha^2 \beta \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}} \cdot \left(2\alpha \sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}}\right) \int_1^{\infty} \sqrt{t^2 - 1} \exp(-2\sqrt{\alpha\beta y}t) dt.$$

$$f_Y(y) = 4(\alpha\beta)^{3/2} y \int_1^{\infty} \sqrt{t^2 - 1} \exp(-2\sqrt{\alpha\beta y}t) dt.$$

Através de manipulações algébricas segue que:

$$f_Y(y) = 2(\alpha\beta)^{3/2} \sqrt{y} K_1(2\sqrt{\alpha\beta y}).$$

em que  $K_m(\cdot)$  é a função de Bessel do tipo III modificada definida por:

$$K_m(x) = \frac{\sqrt{\pi} x^m}{2^m \Gamma(m + \frac{1}{2})} \int_1^{\infty} (t^2 - 1)^{m-1/2} \exp(-xt) dt.$$

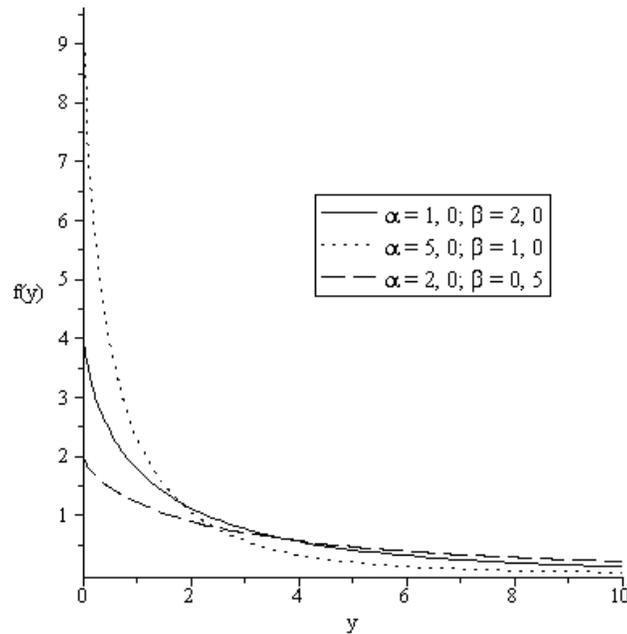


Figura 2. Marginal do modelo Gama Bivariada.

#### 2.4.3 Período total entre seca e não seca e a proporção do período de não seca

Seja  $R = X + Y$  como o tempo entre os períodos consecutivos de seca, ou seja, o período total e  $W = \frac{X}{X+Y}$ , a proporção do período de não seca em relação ao período total e  $Z = \frac{Y}{X}$ .

As variáveis  $X$  e  $Z$  possuem uma característica notável para o caso em que  $X$  e  $Y$  possuem distribuição conjunta Gama Bivariada, elas são independentes.

Para a demonstrar tal fato considere:

$$(x, y) \rightarrow \left(x, \frac{y}{x}\right). \text{ Como } z = \frac{y}{x} \text{ então } y = zx.$$

O jacobiano da transformação é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z & x \end{vmatrix} = x.$$

Dessa forma, a distribuição conjunta de  $X$  e  $Z$  é:

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x, z) &= |JH^{-1}(x, z)| f_{X,Y}(H^{-1}(x, z)) \\ &= x\alpha^2 \beta \exp\left(-\alpha x - \beta \frac{zx}{x}\right) = x\alpha^2 \beta \exp(-\alpha x - \beta z) = f_X(x) f_Z(z). \end{aligned}$$

E portanto,  $X$  e  $Z$  são independentes com  $X \sim \text{Gama}(2, \alpha)$  e  $Z \sim \text{Gama}(1, \beta)$ .

Para se obter a distribuição conjunta de  $R$  e  $W$  considere

$$R = X + Y = X + ZX = X(1 + Z),$$

$$W = \frac{X}{X + Y} = \frac{X}{X + ZX} = \frac{1}{1 + Z}$$

Transformando:  $(x, z) \rightarrow \left(x(1 + z), \frac{1}{1 + z}\right)$ , temos

$$r = x(1 + z) = x, w^{-1} = \frac{x}{w} \Rightarrow x = wr \text{ e } w = \frac{1}{1 + z} \Rightarrow 1 + z = \frac{1}{w} \Rightarrow z = \frac{1 - w}{w},$$

O jacobiano dessa transformação é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial r}{\partial r} & \frac{\partial r}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & r \\ 0 & -\frac{1}{w^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{w},$$

Dessa forma, a distribuição conjunta de  $R$  e  $W$  é:

$$\begin{aligned} f_{R,W}(r,w) &= |JH^{-1}(r,w)| f_{X,Z}(H^{-1}(r,w)) = \\ &= -\frac{1}{w} r w \alpha^2 \beta \exp\left(-\alpha r w - \beta \frac{1-w}{w}\right) = -r \alpha^2 \beta \exp\left(-\alpha r w - \frac{\beta}{w} + \beta\right) = \\ &= [\alpha^2 \beta \exp(\beta)] \left[ r \exp\left(-\alpha r w - \frac{\beta}{w}\right) \right], \quad r > 0, \quad 0 < w < 1. \end{aligned}$$

#### 2.4.4 Marginal $W$

A marginal  $W$  é dada por:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \int_0^{\infty} f_{R,W}(r,w) dr = \int_0^{\infty} [\alpha^2 \beta \exp(\beta)] \left[ r \exp\left(-\alpha r w - \frac{\beta}{w}\right) \right] dr \\ &= \alpha^2 \beta \exp\left(\beta - \frac{\beta}{w}\right) \int_0^{\infty} [r \exp(-\alpha r w)] dr. \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$u = r \Rightarrow du = dr \text{ e } dv = \exp(-\alpha r w) \Rightarrow v = -\frac{1}{\alpha w} \exp(-\alpha r w).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [r \exp(-\alpha r w)] dr &= -\frac{r}{\alpha w} \exp(-\alpha r w) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\alpha w} \int_0^{\infty} [\exp(-\alpha r w)] dr \\ &= -\frac{r}{\alpha w} \exp(-\alpha r w) \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{(\alpha w)^2} \exp(-\alpha r w) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(\alpha w)^2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$f_W(w) = \alpha^2 \beta \exp\left(\beta - \frac{\beta}{w}\right) \frac{1}{(\alpha w)^2} = \beta \exp(\beta) w^{-2} \exp\left(\frac{\beta}{w}\right).$$

#### 2.4.5 Marginal $R$

A marginal  $R$  é dada por:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^{\infty} f_{R,W}(r, w) dw = \int_0^{\infty} [\alpha^2 \beta \exp(\beta)] \left[ r \exp\left(-\alpha r w - \frac{\beta}{w}\right) \right] dw \\ &= [\alpha^2 \beta \exp(\beta) r] \int_0^{\infty} \left[ \exp\left(-\alpha r w - \frac{\beta}{w}\right) \right] dw \\ &= [\alpha^2 \beta \exp(\beta) r] \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha r w)^m}{m!} \right\} \left[ \exp\left(-\frac{\beta}{w}\right) \right] dw \\ &= [\alpha^2 \beta \exp(\beta) r] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha r)^m}{m!} \int_0^{\infty} w^m \left[ \exp\left(-\frac{\beta}{w}\right) \right] dw. \end{aligned}$$

Para  $y = \frac{\beta}{w}$ ,  $y \rightarrow \infty$  quando  $w \rightarrow 0$ . Da mesma forma, se  $w = \frac{\beta}{y}$ ,  $y \rightarrow \beta$

quando  $w \rightarrow \infty$ . Assim,

$$\begin{aligned} f_R(r) &= [\alpha^2 \beta \exp(\beta) r] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha r)^m}{m!} \left[ - \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{\beta}{y}\right)^m [\exp(-y)] \left(-\frac{\beta}{y^2}\right) dy \right] \\ &= [\alpha^2 \beta \exp(\beta) r] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha r)^m}{m!} \beta^{m+1} \int_{\beta}^{\infty} y^{-(m+2)} [\exp(-y)] dy \end{aligned}$$

$$= [\alpha^2 \beta \exp(\beta) r] \sum_0^{\infty} \frac{(-\alpha r)^m}{m!} \beta^{m+1} \Gamma(-m-1, \beta)$$

em que  $\Gamma(\alpha, x)$  corresponde à função gama incompleta.

#### 2.4.6 Momentos

Tem-se  $Y = ZX$ , então  $E[X^m Y^n] = E[X^m (ZX)^n] = E[X^{m+n} Z^n]$ . Como

$X$  e  $Z$  são independentes, segue que:

$$E[X^m Y^n] = E[X^{m+n}] E[Z^n].$$

$$\begin{aligned} E[X^{m+n}] &= \int_0^{\infty} x^{m+n} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x^{m+n} \alpha^2 \exp(-\alpha x) dx = \\ &= \frac{\Gamma(m+n+2)}{\alpha^{m+n+2}} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{m+n+2}}{\Gamma(m+n+2)} x^{m+n+1} \exp(-\alpha x) dx = \frac{\Gamma(m+n+2)}{\alpha^{m+n+2}}, \\ E[Z^n] &= \int_0^{\infty} z^n f_Z(z) dz = \int_0^{\infty} z^n \beta \exp\left(-\beta \frac{z}{X}\right) dz = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\beta^n} \int_0^{\infty} \frac{\beta^{n+1}}{\Gamma(n+1)} z^n \exp(-\beta z) dz = \frac{\Gamma(n+1)}{\beta^n}, \end{aligned}$$

Portanto:

$$E[X^m Y^n] = \frac{\Gamma(m+n+2)}{\alpha^{m+n+2}} \frac{\Gamma(n+1)}{\beta^n} = \frac{n!(m+n+1)!}{\alpha^{m+n} \beta^n},$$

#### 2.5 Modelo Gama Pareto Bivariado

##### Definição

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias, o modelo bivariado gama pareto proposto para análise de precipitação pluviométrica tem função densidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \frac{x^b a^b c}{\Gamma(b)} \exp(-ax - cxy),$$

em que  $x, y, a, b, c \geq 0$

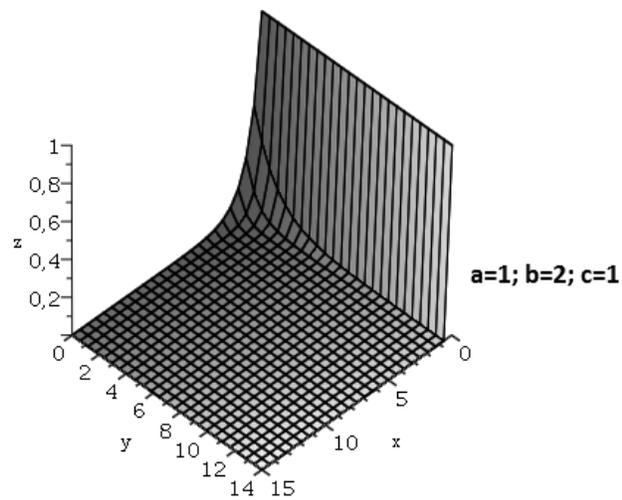


Figura 3. Gama Pareto Bivariada

### 2.5.1 Marginal $X$

A marginal  $X$  é dada por:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{\infty} f(x,y) dy = \int_0^{\infty} \frac{x^b a^b c}{\Gamma(b)} \exp(-ax - cxy) dy = \\
&= \frac{x^b a^b c}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} \exp(-ax - cxy) dy = \frac{x^b a^b c}{\Gamma(b)} \exp(-ax) \int_0^{\infty} \exp(-cxy) dy = \\
&= \frac{x^b a^b c}{\Gamma(b)} \exp(-ax) \left[ \frac{\exp(-cxy)}{-cx} \right]_0^{\infty} = \frac{x^{b-1} a^b}{\Gamma(b)} \exp(-ax). \\
\Rightarrow f_X(x) &= \frac{x^{b-1} a^b}{\Gamma(b)} \exp(-ax) \Rightarrow X \sim \text{Gama}(b, a).
\end{aligned}$$

### 2.5.2 Marginal $Y$

A marginal  $Y$  é dada por:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^b a^b c}{\Gamma(b)} \exp(-ax - cxy) dx = \\
&= \frac{a^b c}{(\alpha + cy)^b \Gamma(b)} \int_0^{\infty} [(\alpha + cy)x]^{(b+1)-1} \exp[-(\alpha + cy)x] dx = \\
&= \frac{a^b c}{(\alpha + cy)^b \Gamma(b)} \frac{\Gamma(b+1)}{(\alpha + cy)} = \frac{a^b b c}{(\alpha + cy)^{b+1}}. \\
\Rightarrow f_Y(y) &= \frac{a^b b c}{(\alpha + cy)^{b+1}}.
\end{aligned}$$

Essa f.d.p. é dita uma distribuição de Pareto tipo II.

### 2.5.3 Momentos

A marginal de  $X$  é dada por  $f_X(x) = \frac{x^{b-1}a^b}{\Gamma(b)} \exp(-ax)$ , portanto o momento de  $X$  é:

$$\begin{aligned} E[X^m] &= \int_0^{\infty} x^m f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x^m \frac{x^{b-1}a^b}{\Gamma(b)} \exp(-ax) dx = \\ &= \frac{a^b}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} x^{(m+b)-1} \exp(-ax) dx = \\ &= \frac{a^b}{a^{m+b-1}\Gamma(b)} \int_0^{\infty} (ax)^{(m+b)-1} \exp(-ax) dx = \frac{a^b}{a^{m+b-1}\Gamma(b)} \frac{\Gamma(m+b)}{a} = \\ &= \frac{\Gamma(m+b)}{a^m\Gamma(b)}. \end{aligned}$$

A marginal  $Y$  é dada por  $f_Y(y) = \frac{a^b b c}{(a+cy)^{b+1}}$ , portanto o momento de  $Y$  é:

$$E[Y^n] = \int_0^{\infty} y^n f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} y^n \frac{a^b b c}{(a+cy)^{b+1}} dy = \frac{a^b b c}{c^{b+1}} \int_0^{\infty} \frac{y^n}{\left(\frac{a}{c} + y\right)^{b+1}} dy.$$

Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. (1986 – pág 298)

define:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(z+x)^{\beta}} dx = z^{\alpha-\beta} B(\alpha, \beta-\alpha),$$

Tome:

$$x = y, \alpha = n+1, \beta = b+1, c = 1, a = z.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 E[Y^n] &= \frac{a^b b c}{c^{b+1}} \left(\frac{a}{c}\right)^{n+1-b-1} B(n+1, b+1-n-1) \\
 &= \left(\frac{a}{c}\right)^n b B(n+1, b-n),
 \end{aligned}$$

onde  $B(n+1, b-n)$  é a função Beta com parâmetros  $n+1$  e  $b-n$ ; e  $b \geq n$ .

## 2.6 Método da Máxima Verossimilhança

Estimação por máxima verossimilhança é um método para estimar os parâmetros de um determinado modelo estatístico, obtidos a partir da maximização da função de verossimilhança.

### 2.6.1 Função de Verossimilhança

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$  com função de densidade  $f(x|\theta)$ , com  $\theta \in \Theta$ , em que  $\Theta$  é o espaço paramétrico. A função de verossimilhança de  $\theta$  correspondente à amostra aleatória observada é dada por:

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

O estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  é o valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza função de verossimilhança  $L(\theta; x)$ .

O logaritmo natural da função de verossimilhança de  $\theta$  é denotado por:

$$l(\theta; x) = \ln L(\theta; x).$$

O valor de  $\theta$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\theta; x)$ , também maximiza  $l(\theta; x)$ . No caso uniparamétrico em que  $\Theta$  é um intervalo da reta e  $l(\theta; x)$  é derivável, o estimador de máxima verossimilhança em certas situações pode ser encontrado como a raiz da equação de máxima verossimilhança:

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta; x) = 0.$$

## 2.7 Estimação dos parâmetros

Seja  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  uma amostra aleatória retirada de uma população com distribuição Gama Bivariada:

$$f_{X,Y}(x, y; \alpha, \beta) = \alpha^2 \beta \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta y}{x}\right).$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i; \alpha, \beta).$$

$$\Rightarrow L = \prod_{i=1}^n \alpha^2 \beta \exp\left(-\alpha x_i - \frac{\beta y_i}{x_i}\right) = (\alpha^2 \beta)^n \exp\left(\sum_{i=1}^n \left(-\alpha x_i - \frac{\beta y_i}{x_i}\right)\right).$$

Tomando o logaritmo:

$$\begin{aligned} \ln(L) &= \ln\left[(\alpha^2 \beta)^n \exp\left(\sum_{i=1}^n \left(-\alpha x_i - \frac{\beta y_i}{x_i}\right)\right)\right] \\ &= 2n \ln(\alpha) + n \ln(\beta) - \alpha \sum_{i=1}^n x_i - \beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{x_i}\right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \alpha} = \frac{2n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n (x_i) = 0 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n (x_i)}$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{x_i} \right) = 0 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{x_i} \right)}$$

Caso a amostra possua Distribuição Gama Pareto:

$$f(x, y; a, b, c) = \frac{x^b a^b c}{\Gamma(b)} \exp(-ax - cxy).$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i; a, b, c), \\ &\Rightarrow L = \prod_{i=1}^n \frac{x_i^b a^b c}{\Gamma(b)} \exp(-ax_i - cx_i y_i) = \\ &= \left( \frac{a^b c}{\Gamma(b)} \right)^n \exp\left( \sum_{i=1}^n (-ax_i - cx_i y_i) \right) \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^b. \end{aligned}$$

Aplicando-se  $\ln$  :

$$\begin{aligned} \ln(L) &= \ln \left[ \left( \frac{a^b c}{\Gamma(b)} \right)^n \exp\left( \sum_{i=1}^n (-ax_i - cx_i y_i) \right) \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^b \right] \\ &= n \ln \left( \frac{a^b c}{\Gamma(b)} \right) + \sum_{i=1}^n (-ax_i - cx_i y_i) + \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln(L) &= \\ &= n \ln(a) + n \ln(c) - n \ln(\Gamma(b)) - a \sum_{i=1}^n x_i - c \sum_{i=1}^n x_i y_i + b \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i \right), \\ \frac{\partial \ln(L)}{\partial a} &= \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n x_i = 0, \\ \frac{\partial \ln(L)}{\partial b} &= n \ln(a) - n \frac{\partial \ln(\Gamma(b))}{\partial b} + \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) = 0, \\ \frac{\partial \ln(L)}{\partial c} &= \frac{n}{c} - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\begin{cases} \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n x_i = 0, \\ n \ln(a) - n \psi(b) + \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) = 0, \\ \frac{n}{c} - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0. \end{cases}$$

em que  $\frac{\partial \ln(\Gamma(x))}{\partial x} = \psi(x)$  é a função digama.

Esse sistema pode ser resolvido de forma aproximada utilizando métodos iterativos.

## 2.8 Critério de Akaike (AIC)

O critério de informação de Akaike é uma medida de qualidade de ajuste de um modelo estatístico estimado pelo método da máxima verossimilhança. A

informação fundamenta-se no conceito de entropia e quando um determinado modelo é utilizado para descrever a realidade, o critério de informação de Akaike oferece uma medida relativa das informações perdidas. (Emiliano, 2009)

Akaike (1974) definiu seu critério de informação como:

$$AIC = -2 \ln L(\hat{\theta}) + 2(p).$$

em quem  $\ln L(\hat{\theta})$  é o logaritmo natural da função verossimilhança e  $p$  é número de parâmetros.

Nesse trabalho o mecanismo utilizado será o critério de informação de Akaike corrigido (AICc) definido por (Bozdogan, 1987):

$$AICc = -2 \ln L(\hat{\theta}) + 2p + 2 \frac{p(p+1)}{n-p-1}$$

O  $AIC$  é uma ferramenta para seleção de modelos, onde aquele que apresentar menor valor para  $AIC$  é o melhor modelo dentre os analisados. Se considerar apenas modelos ruins, o  $AIC$  selecionará o melhor deles. O seu cálculo só torna-se útil quando há comparação entre modelos. Por si só seu valor não tem significado algum.

## 2.9 Índices de quantificação da seca

Na literatura, é possível encontrar vários índices que permitem determinar o grau de intensidade da seca. O mais utilizado e reconhecido mundialmente é o Índice de Severidade de Seca de Palmer.

PALMER (1965) considera que, para que uma área seja considerada economicamente estável, em um determinado período, o total de precipitação

além de depender da média entre os elementos meteorológicos do local, depende também das condições meteorológicas dos meses precedentes e do mês atual para a área em questão. O cálculo do índice está baseado no cálculo dos elementos do balanço hídrico, utilizando dados de temperatura média mensal, precipitação total mensal e conteúdo de água no solo. Ele considera 11 categorias de classificação do evento seca:

Tabela 1. Classificação da seca de acordo com PDSI

<b>PDSI</b>	<b>Categoria</b>
Acima de 4,00	Extremamente úmido
3,00 a 3,99	Muito úmido
2,00 a 2,99	Moderadamente úmido
1,00 a 1,99	Ligeiramente úmido
0,50 a 0,99	Úmido incipiente
0,49 a -0,49	Próximo ao normal
-0,50 a -0,99	Seca incipiente
-1,00 a -1,99	Ligeiramente seco
-2,00 a -2,99	Moderadamente seco
-3,00 a -3,99	Muito seco
Abaixo de -4,00	Extremamente seco

McKee (1993) desenvolveu o Índice Padronizado de Precipitação (SPI) que quantifica o déficit ou o excesso de precipitação em diferentes escalas de tempo. Essa característica torna o SPI uma valiosa ferramenta para todos os estudos de disponibilidade hídrica.

Santos e dos Anjos (2001) utilizaram o SPI para monitorar as condições hídricas em Pernambuco e concluíram que a utilização desse índice é eficiente

para indicar situações climáticas extremas entre diferentes microrregiões e mostrar com certa antecedência situações de seca.

O SPI é calculado considerando os dados de precipitação pluviométrica  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Um valor  $k$  relativo à unidade utilizada é fixado, podendo  $k$  ser expresso em dias, semanas e meses. A variável precipitação acumulada em  $k$  unidades de tempo é definida como a soma das  $k$  precipitações anteriores.

Logo, a série  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  de precipitação acumulada em  $k$  unidades de tempo nos dá uma amostra da variável precipitação acumulada.

$$R_1 = p_1 + p_2 + \dots, p_k,$$

$$R_2 = p_2 + p_3 + \dots, p_{k+1},$$

⋮

$$R_s = p_s + p_{s+1} + \dots, p_{k+s-1},$$

$$R_{n-k+1} = p_{n-k+1} + p_{n-k+2} + \dots, p_n.$$

Com essa amostra, utilizando o método da máxima verossimilhança, uma distribuição  $Gama(\alpha, \beta)$  é ajustada

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

Com média dada por  $\frac{\alpha}{\beta}$  e a variância por  $\frac{\alpha}{\beta^2}$ .

Quando o parâmetro  $\alpha$  é grande ele pode ser aproximado por  $n = [\alpha]$ , onde  $[\alpha]$  é a parte inteira de  $\alpha$ . Como uma variável aleatória  $Gama(n, \beta)$  é soma de  $n$  variáveis aleatórias exponenciais:

$$Gama(n, \beta) = \sum_{i=1}^n Gama(1, \beta) = \sum_{i=1}^n \exp(-\beta).$$

Assim, pelo teorema central do limite central, a função densidade de distribuição da  $Gama(n, \beta)$  pode ser aproximada por uma distribuição Normal.

$$f(x) \sim N\left(\frac{n}{\beta}, \frac{n}{\beta^2}\right).$$

Dessa forma, o SPI é calculado como o valor correspondente à Normal Padrão:

$$SPI = \frac{P_t - \frac{n}{\beta}}{\frac{\sqrt{n}}{\beta}}$$

$P_t$  - Precipitação acumulada no período.

$\frac{n}{\beta}$  - Precipitação média do período em questão.

$\frac{\sqrt{n}}{\beta}$  - Desvio padrão da série histórica de precipitação na escala em estudo.

Como o índice é obtido a partir de valores gerados por uma Normal Padrão, considera-se seca quando o SPI é negativo e não seca para valores positivos e a severidade da seca baseadas em quantidades de desvios padrão.

Tabela 2. Classificação da seca de acordo com SPI

SPI	Categoria
Acima de 2,00	Extremamente úmido
1,50 a 2,99	Severamente úmido
1,00 a 1,49	Moderadamente úmido
0,10 a 0,99	Umidade Incipiente
0 a -0,99	Seca Incipiente

-1,00 a -1,49	Moderadamente seco
-1,50 a -1,99	Severamente seco
Abaixo de -2,00	Extremamente seco

---

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Dados

Os dados obtidos são Índices Padronizados de Precipitação (SPI), fornecidos pela estação meteorológica de código 2349030 que faz parte de uma aglomeração de estações de 3 redes de agências que operam no Paraná: IAPAR, SIMEPAR e INMET. A estação tem coordenadas geográficas dadas por 23° 30' de latitude sul, 49° 55' de longitude oeste, 512 metros de altitude, localizada na cidade de Joaquim Távora no estado do Paraná. Situada a 314 km da capital Curitiba, possui população total de 9.672 habitantes. O clima é o subtropical úmido mesotérmico, onde os verões são quentes com tendência de concentração das chuvas (temperatura média superior a 22° C), os invernos com geadas pouco frequentes (temperatura média inferior a 18° C), sem estação seca definida.

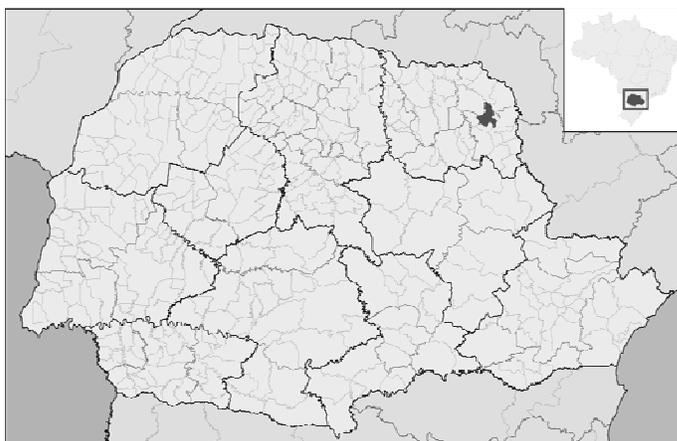


Figura 4. Localização de Joaquim Távora no mapa.

A série histórica dos dados é relatada em meses iniciando-se em janeiro de 1976 e tendo fim em dezembro de 2005, totalizando 30 anos, ou seja, 360 meses. Esses dados encontram-se no apêndice.

De acordo com a apresentação dos dados, os meses que apresentam valores de SPI abaixo de -1 são considerados como período de seca, os demais são considerados períodos de não seca.

A partir da tabela dos dados, realizando a contagem dos meses consecutivos de não seca ( $X$ ) e dos meses subseqüentes de seca ( $Y$ ) obtém-se dados pareados  $(X, Y)$  de não seca e seca (Tabela 5 – apêndice), os quais serão ajustados pelas distribuições Gama Bivariada e Gama Pareto.

### 3.2 Estimação

O método de estimação de parâmetros utilizado tanto para o Modelo Gama Bivariado quanto para o Modelo Gama Pareto foi o método da máxima verossimilhança o que implicou em sistemas que foram solucionados através de método iterativo.

### 3.3 Critério de ajuste

A qualidade de ajuste dos modelos foi verificada por meio de gráficos de probabilidade (PP-plot). Esses são construídos da seguinte forma:

Suponhamos que as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  satisfaçam a relação funcional:

$$X = aY + b.$$

Então,

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[aY + b \leq x] = P\left[Y \leq \frac{x-b}{a}\right] = F_Y\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

$$\Rightarrow F_X(x) = F_Y \circ A(x), \text{ em que } A(x) = \frac{x-b}{a}.$$

Logo,

$$F_X(x) = F_X \circ A(x) \Rightarrow F_X^{-1}(x) = A^{-1} \circ F_Y^{-1}(x) \Rightarrow F_X^{-1}(x) = aF_Y^{-1}(x) + b.$$

Defina a curva em  $\mathbb{R}^2$ :

$$[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 .$$

$$x \rightarrow (F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(x)).$$

Portanto,

$$x \rightarrow (F_X^{-1}(x), aF_X^{-1}(x) + b)$$

representa a equação parametrizada de uma reta em  $\mathbb{R}^2$ .

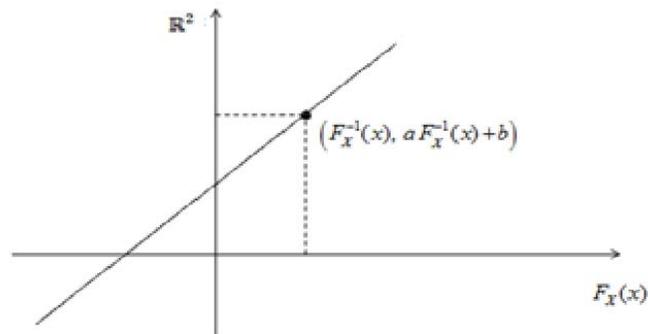


Figura 5. Gráfico da Equação da reta em

Suponha que  $F_Y$  seja conhecida e que se tenha uma amostra aleatória da variável  $X$ . Podemos então utilizar o seguinte critério gráfico para evidenciar a veracidade da relação  $Y = aX + b$ .

Como se têm uma amostra aleatória de  $X$  calcula-se a acumulada empírica de  $X$ .

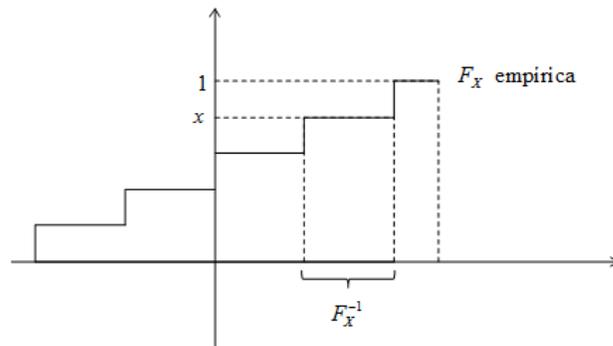


Figura 6. Gráfico da função acumulada empírica de  $X$ .

Se os intervalos de valores inversos de  $X$  dados pela acumulada empírica se aproximam da reta  $Y = aX + b$ , então temos evidências da veracidade da existência dessa relação linear. No caso em que se quer provar que  $X = Y$  tem-se que a reta deve passar pela origem.

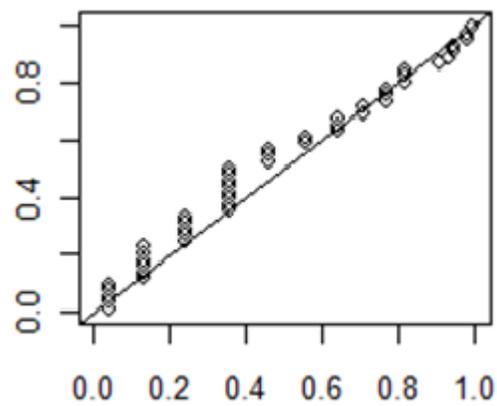


Figura 7. Gráfico PP-Plot para a relação  $X = Y$ .

### 3.4 Escolha do modelo

Uma das metodologias mais empregadas para a escolha de modelos é o critério de informação de Akaike ( $AIC$ ). Nesse trabalho foi utilizado o critério de informação de Akaike corrigido ( $AICc$ ) (Bozdogan, 1987). O modelo escolhido é aquele que apresenta menor valor de  $AICc$ .

### 3.5 Softwares

Todos os cálculos foram realizados utilizando o software R e o aplicativo Maple.

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para o ajuste dos modelos: Gama Bivariado e Gama Pareto, foi utilizado uma série histórica de índices padronizados de precipitação (SPI) medidos em meses, coletados pela estação meteorológica na cidade de Joaquim Távora no estado do Paraná (Tabela 4 – Apêndice).

As estimativas foram obtidas pelo método da máxima verossimilhança.

Tabela 3. Parâmetros estimados

Modelo	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{c}$	$L$	$p$	$AICc$
Gama Bivariado	0.3112583	2.49141000	-----	-207.81	2	419.8858
Gama Pareto	0.26384231	1.695327183	0.13314447	-200.58	3	407.7137

O formato do modelo Gama Bivariado com os parâmetros #  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , estimados acima é:

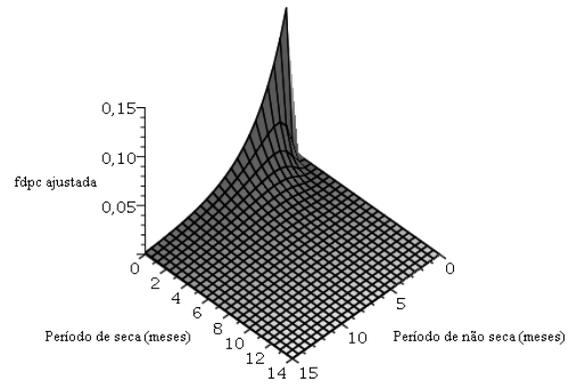


Figura 8. Gama Bivariada

O formato do modelo Gama Pareto Bivariado com os parâmetros  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , estimados acima:

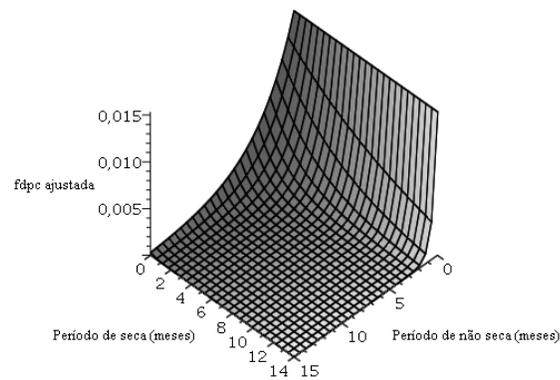


Figura 9. Gama Pareto

Para o modelo Gama Bivariado o ajuste gráfico das marginais é o seguinte:

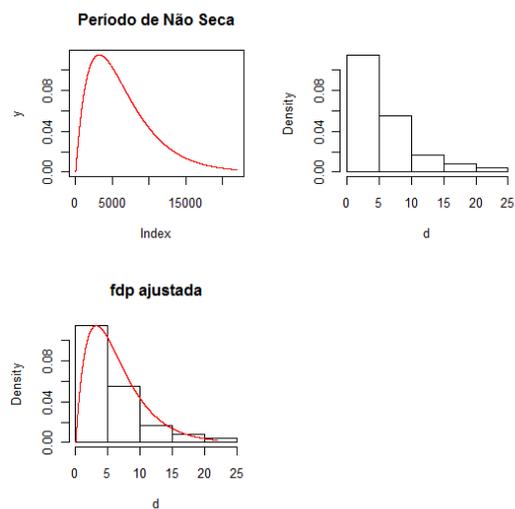


Figura 10. Ajuste da marginal ao histograma de frequência dos períodos de não seca.

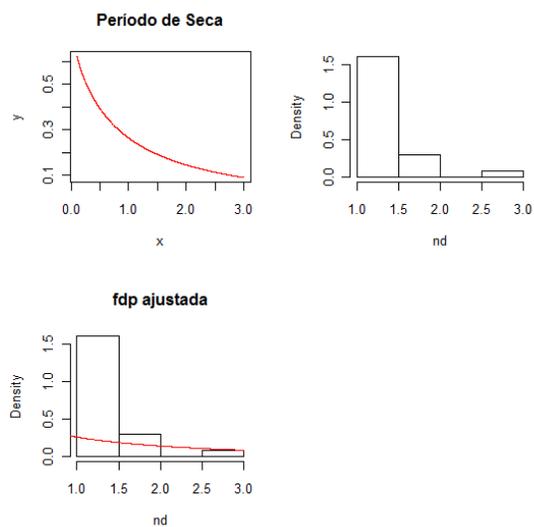


Figura 11. Ajuste da marginal ao histograma de frequência dos períodos de seca.

Para o modelo Gama Pareto o ajuste gráfico das marginais é o seguinte:

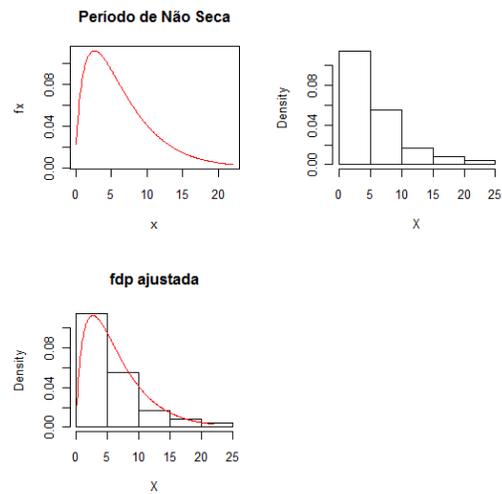


Figura 12. Ajuste da marginal ao histograma de frequência dos períodos de não seca.

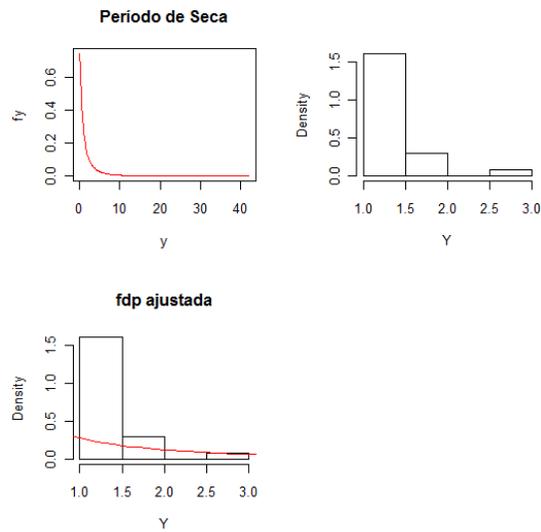


Figura 13. Ajuste da marginal ao histograma de frequência dos períodos de seca.

Uma inspeção visual das figuras anteriores mostra que o ajuste das marginais para ambos os modelos relativos ao período de não seca é satisfatório, porém para o período de seca o ajuste é insatisfatório.

Tal fenômeno pode ser ainda melhor investigado utilizando-se gráficos PP-Plot.

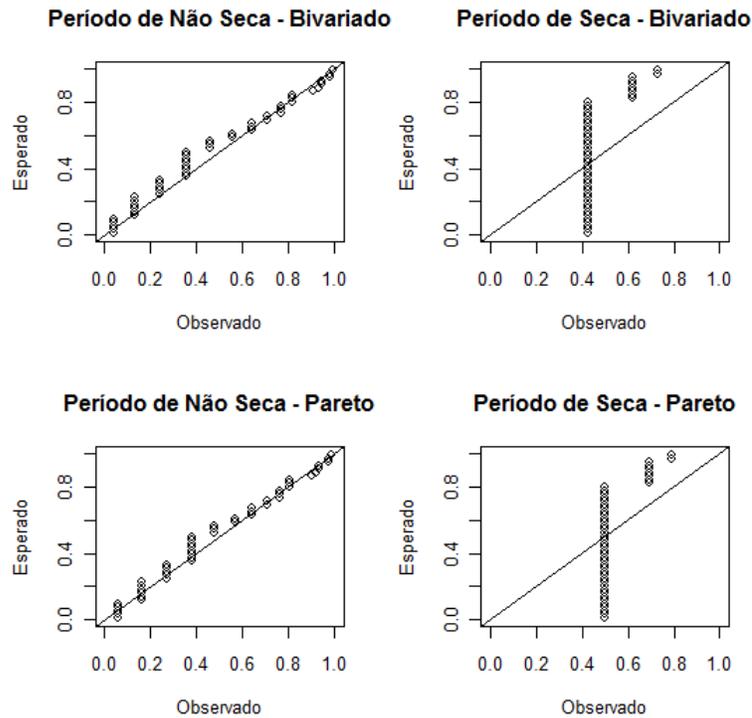


Figura 14. Gráficos de PP-Plot

O critério para que se considere que o ajuste seja satisfatório é a aproximação dos dados à reta de  $45^\circ$ . Portanto, tanto o modelo Gama Pareto quanto o modelo Gama Bivariado explicam bem os dados para o período de não seca. Já para o período de seca o ajuste é bastante insatisfatório como anteriormente observado.

Certamente, tal fato ocorre em razão de não haver longos períodos de seca na cidade analisada, Joaquim Távora. Do total de 360 meses analisados apenas 58 meses foram secos. Esses meses secos se agrupam em 3 classes, não ultrapassando 3 meses consecutivos de seca: 38 épocas em que ocorreu 1 mês consecutivo de seca, 7 épocas em que ocorreu 2 meses consecutivos de seca e 2 épocas em que ocorreu 3 meses consecutivos de seca. Os outros 302 meses de não seca são distribuídos em classes que variam de 1 mês consecutivo de não seca até 22 meses consecutivos de não seca de forma bastante heterogênea.

De acordo com o critério de [AICc](#) temos que o modelo Gama Pareto apresenta melhor os dados em relação ao modelo Gama Bivariado.

## 5 CONCLUSÃO

As distribuições Gama Bivariada e Gama Pareto ajustadas aos Índices Padronizados de Precipitação, através de suas marginais, modelaram satisfatoriamente o comportamento dos períodos de não seca para a cidade de Joaquim Távora – PR. Para os períodos de seca o ajuste não foi satisfatório.

A distribuição Gama Pareto se ajustou melhor que a distribuição Gama Bivariada aos dados analisados.

Devido ao fato da cidade de Joaquim Távora – PR não apresentar longos períodos contíguos de seca, sendo que a duração máxima consecutiva de seca foi 3 meses, a série de dados de Índices Padronizados de Precipitação teria um melhor ajuste se fosse coletada em períodos curtos de semanas ou dias.

## REFERÊNCIAS

BLAIN, G. C. **Avaliação e adaptação do Índice de Severidade de Seca de Palmer (PDSI) e do Índice Padronizado de Precipitação (SPI) às condições climáticas do Estado de São Paulo.** 2005. 120p. Dissertação (Mestrado em Agricultura Tropical e Sub-tropical) – Instituto Agronômico, Campinas – SP, 2005.

BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução a Inferência Estatística.** 2ª edição. SBM. 2010.

BOZDOGAN, H. “**Model selection and Akaike’s Information Criterion (AIC): the General Theory and its Analytical Extensions**”. *Psychometrika*, 52 (3): 345-370. (1987).

BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. **Multimodel inference: understanding aic and bic in model selection.** *Sociological Methods and Research*. Beverly Hills, v.33, n.2, p.261-304, May 2004.

EMILIANO, P. C. **Fundamentos e aplicações dos critérios de informação: Akaike e Bayesiano.** 2009. 92p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais.

FANG, K. T.; KOTZ, S.; NG, K.W. **Symmetric Multivariate and Related Distributions,** Chapman and Hall, London, 1990.

IZAWA, T. (1953). **The bivariate gamma distribution.** *Climate and Statistics* (in 15 Japanese).

JOHNSON, N.L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous Univariate Distributions,** vol. 1, second ed., John Wiley and Sons, New York, 1994.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias.** 2. ed. São Paulo: USP, 2006. 428p.

MCKEE, T. B.; DOESKEN, N. J.; KLEIST, J. **The relationship of drought frequency and duration of time scales.** Eighth Conference on Applied Climatology, American Meteorological Society, Jan17-23, 1993, Anaheim CA.

MOOD, A.M; GRAYBILL, F.A; BOES, D.C. **Introduction to the Theory of Statistics**. 3<sup>a</sup> ed. 1974. 564p.

NADARAJAH, S. **A bivariate distribution with gamma and beta marginals with application to drought date**. Journal of Applied Statistics, vol. 36, p. 277-301, march 2009.

NADARAJAH, S. **A bivariate gamma model for drought**, Water Resour. Res. 43 (2007)

NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. **A generalized gamma distribution with application to drought date**. Mathematics and Computers in Simulation, 74 (2007), p. 1-7.

PALMER, W.C. **Meteorological drought**. *US Weather Bureau Res. N° 45*. Washington, 58p. 1965.

PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A. and MARICHEV, O. I.. **Integrals and Series**, vol. I, Elementary Functions, Gordon and Breach, New York, (1986).

SHIAU, J. T.; FENG, S.; NADARAJAH, S. **Assessment of hydrological droughts for the Yellow River**. China using copulas, Hydrol. Process., in press.

YUE, S.; OUARDA, T.B.M.J. and BOBÉE, B. (2001). **A review of bivariate gamma distributions for hydrological application**. Journal of Hydrology, Elsevier Science Ltd., 246, 1-18.

## APÊNDICE

Tabela 4. Dados em SPI fornecidos pela estação meteorológica de código 2349030 da cidade de Joaquim Távora.

ANO	MÊS	SPI	ANO	SPI	ANO	SPI
1976	1	-1.04	1986	-0.64	1996	-0.25
1976	2	0.06	1986	1.68	1996	0.63
1976	3	1.23	1986	0.94	1996	1.49
1976	4	0.03	1986	0.71	1996	0.01
1976	5	0.38	1986	1.24	1996	-1.54
1976	6	0.48	1986	-1.28	1996	-0.28
1976	7	0.54	1986	-0.71	1996	-0.59
1976	8	1.79	1986	1.68	1996	0.12
1976	9	0.59	1986	0.07	1996	0.66
1976	10	1.09	1986	-1.38	1996	0.02
1976	11	-0.03	1986	-0.30	1996	0.11
1976	12	-0.18	1986	1.42	1996	-0.04
1977	1	-0.50	1987	-0.75	1997	1.51
1977	2	-0.40	1987	0.30	1997	0.70
1977	3	-0.35	1987	-2.55	1997	-2.05
1977	4	0.29	1987	-0.83	1997	0.23
1977	5	-1.94	1987	1.44	1997	-0.31
1977	6	0.51	1987	1.36	1997	1.91
1977	7	0.13	1987	-0.44	1997	-0.75
1977	8	-0.69	1987	-0.66	1997	0.59
1977	9	-0.77	1987	0.43	1997	-0.33
1977	10	-0.38	1987	-0.65	1997	-0.40
1977	11	0.89	1987	0.82	1997	0.76
1977	12	-0.56	1987	-1.56	1997	-0.59
1978	1	-1.49	1988	0.16	1998	-0.57
1978	2	-2.01	1988	-0.45	1998	0.98
1978	3	0.70	1988	-0.16	1998	0.19
1978	4	-2.02	1988	0.54	1998	1.51

ANO	MÊS	SPI	ANO	SPI	ANO	SPI
1978	5	0.15	1988	1.22	1998	0.05
1978	6	-0.76	1988	-0.32	1998	-0.51
1978	7	2.08	1988	-2.70	1998	0.25
1978	8	-0.41	1988	-1.11	1998	1.01
1978	9	0.52	1988	-0.70	1998	1.52
1978	10	-1.03	1988	1.10	1998	0.86
1978	11	0.48	1988	-1.40	1998	-2.55
1978	12	0.06	1988	0.07	1998	0.49
1979	1	-1.96	1989	1.21	1999	1.13
1979	2	-0.35	1989	0.24	1999	0.03
1979	3	-1.58	1989	0.73	1999	-1.52
1979	4	-0.91	1989	-1.14	1999	0.23
1979	5	0.60	1989	-0.80	1999	-0.39
1979	6	-1.28	1989	0.40	1999	0.41
1979	7	0.01	1989	1.62	1999	0.08
1979	8	0.91	1989	0.64	1999	-1.11
1979	9	0.81	1989	1.06	1999	0.37
1979	10	0.47	1989	0.13	1999	-1.64
1979	11	0.96	1989	0.08	1999	-1.46
1979	12	-0.80	1989	0.79	1999	-2.36
1980	1	1.08	1990	1.58	2000	-0.88
1980	2	1.18	1990	-1.60	2000	1.08
1980	3	0.34	1990	-0.06	2000	-0.33
1980	4	-0.07	1990	0.86	2000	-2.49
1980	5	-0.70	1990	0.00	2000	-1.46
1980	6	0.07	1990	-0.32	2000	-0.15
1980	7	0.67	1990	1.26	2000	0.18
1980	8	0.92	1990	1.11	2000	0.96
1980	9	0.18	1990	-0.41	2000	0.82
1980	10	-0.85	1990	0.07	2000	-1.23
1980	11	-0.81	1990	-0.79	2000	1.61
1980	12	1.68	1990	-0.82	2000	0.25
1981	1	0.65	1991	0.05	2001	-1.04
1981	2	-1.25	1991	-0.32	2001	1.51

ANO	MÊS	SPI	ANO	SPI	ANO	SPI
1981	3	-0.55	1991	0.33	2001	0.14
1981	4	1.18	1991	0.47	2001	-0.80
1981	5	-2.48	1991	-0.45	2001	0.36
1981	6	0.19	1991	0.86	2001	0.57
1981	7	-0.67	1991	-0.85	2001	0.50
1981	8	-0.59	1991	0.06	2001	0.31
1981	9	-1.98	1991	-0.35	2001	0.10
1981	10	1.10	1991	-0.26	2001	-0.40
1981	11	0.71	1991	-0.30	2001	-0.23
1981	12	1.00	1991	1.63	2001	0.51
1982	1	-0.89	1992	-1.82	2002	0.54
1982	2	1.15	1992	0.57	2002	0.13
1982	3	-0.70	1992	1.84	2002	0.03
1982	4	-1.10	1992	0.80	2002	-2.02
1982	5	0.16	1992	0.91	2002	0.92
1982	6	1.80	1992	-0.51	2002	-1.28
1982	7	1.79	1992	-0.67	2002	0.40
1982	8	-0.44	1992	-0.29	2002	1.42
1982	9	-1.87	1992	0.74	2002	-0.13
1982	10	1.25	1992	0.50	2002	0.02
1982	11	1.75	1992	-0.17	2002	0.69
1982	12	1.81	1992	-1.20	2002	-0.37
1983	1	-0.08	1993	1.11	2003	-0.19
1983	2	-1.03	1993	0.63	2003	0.24
1983	3	0.90	1993	0.85	2003	-0.06
1983	4	0.45	1993	0.01	2003	0.99
1983	5	2.14	1993	-0.12	2003	0.03
1983	6	1.38	1993	0.68	2003	-0.53
1983	7	-1.12	1993	-0.28	2003	0.94
1983	8	-1.11	1993	-0.05	2003	0.08
1983	9	1.71	1993	1.11	2003	-0.37
1983	10	0.32	1993	-0.51	2003	-1.17
1983	11	0.18	1993	-1.59	2003	1.47
1983	12	-0.42	1993	0.73	2003	-0.57

ANO	MÊS	SPI	ANO	SPI	ANO	SPI
1984	1	0.22	1994	0.30	2004	0.44
1984	2	-1.16	1994	-0.48	2004	-0.54
1984	3	-0.59	1994	-0.18	2004	-0.09
1984	4	-0.05	1994	0.72	2004	0.93
1984	5	0.15	1994	-0.19	2004	1.27
1984	6	-1.27	1994	0.64	2004	-0.04
1984	7	-1.32	1994	-1.12	2004	0.86
1984	8	0.87	1994	-1.11	2004	-1.08
1984	9	0.24	1994	-2.23	2004	-1.77
1984	10	-1.54	1994	0.22	2004	1.48
1984	11	-0.49	1994	0.69	2004	0.98
1984	12	1.62	1994	-0.57	2004	-0.56
1985	1	-0.66	1995	1.39	2005	1.39
1985	2	0.75	1995	0.30	2005	-2.44
1985	3	1.03	1995	0.84	2005	-0.70
1985	4	1.26	1995	1.04	2005	-0.33
1985	5	0.33	1995	-0.70	2005	-0.06
1985	6	-1.01	1995	0.61	2005	-0.30
1985	7	-0.67	1995	0.59	2005	0.06
1985	8	-0.88	1995	-0.22	2005	-0.44
1985	9	-1.09	1995	0.82	2005	0.44
1985	10	-0.82	1995	0.97	2005	2.60
1985	11	-0.25	1995	-1.16	2005	-0.55
1985	12	-0.75	1995	0.03	2005	-0.79

Os meses que apresentem valores de SPI abaixo de -1 são considerados como período de seca, os demais são considerados períodos de não seca. Dessa forma, é possível contabilizar os períodos consecutivos como na tabela seguinte.

Tabela 5. Períodos de seca e não seca na cidade de Joaquim Távora.

NÃO SECA (N)	SECA (S)
15	1
7	1
1	2
5	1
2	1
1	1
2	1
9	1
1	2
3	1
6	1
4	1
4	1
4	1
5	2
3	1
2	2
7	1
2	1
8	1
3	1
4	1
8	1
6	1
2	2
4	1
9	1
22	1
10	1
10	1
7	1
13	3
5	1
9	1
19	1
3	1
4	1
1	1

NÃO SECA 🇧🇷	SECA 🇧🇷
3	3
4	2
2	1
14	1
1	1
15	1
9	1
4	2
10	1