



TALLES HOENES PIMENTA

**FORMULAÇÃO PREDITIVA DO MODELO DE
NAMBU-JONA-LASINIO COM QUEBRA EXPLÍCITA
DE SIMETRIA DE ISOSPIN $SU(2)$**

LAVRAS-MG

2016

TALLES HOENES PIMENTA

**FORMULAÇÃO PREDITIVA DO MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO
COM QUEBRA EXPLÍCITA DE SIMETRIA DE ISOSPIN $SU(2)$**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Teoria Quântica de Campos, para obtenção do título de mestre em Física.

Orientador

Dr. Gilson Dallabona Coorientador

Dr. Orimar Battistel

LAVRAS-MG

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Pimenta, Talles Hoenes.

Formulação Preditiva do modelo de Nambu-Jona-Lasinio com
quebra explícita de simetria de isospin $SU(2)$ / Talles Hoenes
Pimenta. – Lavras : UFLA, 2016.

198 p.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal de
Lavras, 2016.

Orientador(a): Gilson Dallabona.

Bibliografia.

1. Modelos efetivos da QCD. 2. Formulação Preditiva do
modelo NJL. 3. Ambiguidades e divergências em TQC. I.
Universidade Federal de Lavras. II. Título.

TALLES HOENES PIMENTA

**FORMULAÇÃO PREDITIVA DO MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO
COM QUEBRA EXPLÍCITA DE SIMETRIA DE ISOSPIN $SU(2)$**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Teoria Quântica de Campos, para obtenção do título de Mestre em Física.

APROVADA em 31 de Março de 2016.

Dr. André Luiz Mota - UFSJ

Dr. Gilson Dallabona - UFLA

Dr. Jean Carlos Coelho Felipe - UFLA

Gilson Dallabona

Orientador

Orimar Battistel

Coorientador

LAVRAS-MG

2015

Aos meus pais, Adevitor e Geralda, pela educação e formação que me deram.

À minha querida noiva Tatiana, pelo apoio e imenso amor.

Aos meus dois irmãos, Douglas e Ingrid, pelo apoio.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Física (DFI), pela oportunidade concedida para realização da pós-graduação em Física.

A CAPES pela concessão da bolsa de mestrado.

Aos professores do Departamento que, prontamente, ajudaram-me ao longo da minha formação

Ao Dr. Gilson Dallabona pela orientação, paciência, e os seus ensinamentos que tiveram fundamental importância na realização deste trabalho, do meu crescimento e amadurecimento.

Obrigado!

RESUMO

Uma formulação do modelo de Nambu-Jona-Lasinio que é livre das ambiguidades típicas do cálculo perturbativo de teorias quânticas de campos é apresentada e suas consequências qualitativas e fenomenológicas são, então, investigadas. O presente trabalho é uma extensão de uma investigação, realizada num trabalho anterior, sobre o mesmo assunto, para o caso de quarks com massas diferentes e com a generalização da Lagrangeana, obtida por meio da inclusão de acoplamentos tensoriais. Utilizamos como ingrediente principal uma estratégia alternativa de tratamento e cálculo de amplitudes de Feynman divergentes. No contexto dessa estratégia, todas as arbitrariedades associadas com o caráter divergente das amplitudes físicas são preservadas nos resultados finais. O conteúdo físico das amplitudes é separado em um conjunto de integrais finitas que são integradas sem restrições. O setor puramente divergente, por sua vez, é organizado convenientemente em um conjunto de objetos divergentes básicos. Por intermédio de vínculos de consistência físicos, impostos sobre as amplitudes calculadas, obtemos um conjunto de relações, envolvendo os objetos divergentes, as quais são denominadas de relações de consistência. As relações de consistência são as condições necessárias, para a eliminação tanto das arbitrariedades associadas à rotulação dos momentos das linhas internas aos loops bem como da arbitrariedade relacionada a um parâmetro, usado para isolar as partes finitas das divergentes, o qual desempenha um papel de escala. Mostramos que um conjunto de relações entre objetos divergentes irreduzíveis, obtido pela imposição de invariância de escala das amplitudes físicas tratadas consistentemente, desempenha um papel crucial na fixação de uma última arbitrariedade que pode ser associada com a liberdade que temos na escolha do tipo de regularização adotada. Resultados analíticos e numéricos detalhados são apre-

sentados para a fenomenologia dos mésons escalares, pseudoescalares, vetoriais e axiais. Quantitativamente, especial ênfase é dada para as contribuições da quebra explícita da simetria de isospin para as diferenças conhecidas entre as massas dos mésons carregados e neutros.

Palavras-chave: Modelos efetivos da QCD. Formulação Preditiva do modelo NJL. Ambiguidades e divergências em TQC.

ABSTRACT

A formulation of the Nambu-Jona-Lasinio model which is free from typical ambiguities associated with the perturbative calculations in quantum field theories is presented and its qualitative and phenomenological consequences are investigated. The present work can be considered as an extension of an early work about the same issue for the case of quarks having different masses and with the Lagrangian density generalized through the inclusion of tensor couplings. The fundamental ingredient adopted is given by an alternative strategy used to manipulate and calculate divergent Feynman amplitudes. Within this strategy all the arbitrariness associated with the divergent character of the physical amplitudes are preserved by the final results. The physical content of the amplitudes is isolated in a set of finite integrals which are integrated without restrictions. The purely divergent sector, on the other side, is conveniently organized in a set of basic divergent objects. Through physical consistency constraints imposed over the calculated amplitudes we obtain a set of relations among the divergent objects which are denominated consistency relations. The consistency relations are the necessary conditions in order to eliminate both the arbitrariness associated with the momenta routing of internal lines in the loops as well as the arbitrariness related with a parameter used to isolate the finites parts from the divergent ones, which plays a role of scale. We show that a set of relations among irreducible divergent objects, obtained by the imposition of scale invariance of the physical amplitudes consistently treated, plays a crucial role in order to fix a remaining arbitrariness which one may identify with the freedom which we have in choosing a particular regularization. Detailed analytical and numerical results for the phenomenology of the scalar, pseudoscalar, vector and axial mesons are presented. Quantitatively, special

attention is given to the explicitly isospin symmetry breaking contributions for the well known differences between the masses of charged and neutral mesons.

Key words: Effective models of QCD. Predictive formulation of NJL model. Ambiguities and divergences in TQC.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MÉTODO DE TRATAMENTO DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN	16
2.1	Cálculo das Amplitudes do Modelo	17
2.2	Relações de Escala	30
2.3	Relações entre Funções de Green	34
2.4	Ambiguidades e Relações de Consistência	38
3	O MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO - VERSÃO $SU(2)$	44
3.1	A Simetria Quiral: Aspectos Gerais	44
3.2	A Lagrangeana do Modelo e a Aproximação Hartree	48
3.3	Matriz de Espalhamento Quark-antiquark	55
3.4	Mésons Pseudoescalares - Píons	62
3.4.1	Píon Carregado	65
3.4.2	Píon Neutro	72
3.5	Méson Escalar - Sigma	76
3.6	A Massa Constituinte dos Quarks	79
3.6.1	Simetria de isospin exata	81
3.6.2	Simetria de isospin quebrada	86
3.7	Fenomenologia dos Mésons	92
4	O MODELO NJL COM ACOPLAMENTOS VETORIAL E TENSORIAL	99
4.1	Méson Escalar	103
4.2	Mésons Pseudoescalares	104
4.2.1	Píons Carregados	104

4.2.2	Píon Neutro	114
4.3	Mésons Vetoriais	119
4.3.1	ρ Carregado	120
4.3.2	ρ Neutro	127
4.4	Mésons Axiais	131
4.4.1	Méson a_1 Carregado	132
4.4.2	Méson a_1 Neutro	138
4.5	Análise Quantitativa da Fenomenologia	140
4.5.1	Simetrias de isospin e quirais exatas	140
4.5.2	Simetrias de isospin e quirais quebradas explicitamente	150
5	RESUMO E CONCLUSÃO	165
6	APÊNDICE A - Cálculo da Amplitude $T^S(m_i)$	177
7	APÊNDICE B - Função $\xi_n^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)$	181
8	APÊNDICE C - Integrais Quadridimensionais I_A e I_B	191

1 INTRODUÇÃO

A recente descoberta no LHC de uma nova partícula que tem as características do bóson de Higgs, certamente confirma a crença de que o modelo padrão é o modelo correto para a descrição das interações fundamentais. O setor do modelo padrão que descreve as interações fortes é formado pela cromodinâmica quântica (QCD) [1, 2, 3]. A QCD é uma teoria quântica de campos, envolvendo campos fermiônicos de spin $\frac{1}{2}$ (quarks) e campos bosônicos de spin 1 (glúons). Em regime de altas energias, em que a constante de acoplamento torna-se pequena e os quarks exibem liberdade assintótica, métodos da teoria da perturbação provaram ser bem sucedidos na predição de observáveis físicos medidos em experiências de espalhamento de partículas. Por outro lado, no regime de baixas energias, em que a teoria da perturbação não é aplicável, técnicas não perturbativas são necessárias. Apesar do esforço aplicado, nas últimas décadas, para obtenção de resultados, fora do regime perturbativo, especialmente, usando-se técnicas de simulações computacionais da QCD na rede (ver, por exemplo, Refs. [4, 5, 6]), a maior parte da descrição da fenomenologia hadrônica de baixas energias, ainda, é feita pelo uso de modelos efetivos que incorporam as simetrias mais relevantes da QCD nesse regime de energia. Dentre os vários modelos efetivos presentes na literatura, o modelo de Nambu-Jona Lasinio (NJL) [7, 8] é um dos mais usados nesse contexto, pois tem se mostrado, ao longo do tempo, mais eficaz (para trabalhos de revisão consultar as Refs. [9, 10, 11, 12, 13]). Das razões para o modelo NJL despertar interesse na literatura, duas merecem atenção especial. A principal é que o modelo captura as características essenciais da simetria quiral da QCD. A segunda característica atrativa do modelo é que ele realiza a quebra dinâmica da simetria quiral de modo que os férmions (quarks) tornam-se massivos. Uma grande limitação do modelo, por construção, está associada ao fato das interações puntiformes não serem con-

finantes, ou seja, existe um limiar de energia no qual os hádrons podem decair produzindo quarks livres¹.

O modelo NJL, do ponto de vista do formalismo da teoria quântica de campos, é uma teoria não renormalizável, em virtude da presença de interações de quatro férmions num mesmo ponto. As principais dificuldades práticas com as previsões feitas com o modelo estão justamente relacionadas com o seu caráter não renormalizável e com a presença de amplitudes de Feynman com divergências ultravioletas. Numa teoria renormalizável, todos os parâmetros que foram introduzidos pelos procedimentos de regularização das amplitudes divergentes podem ser, no final, completamente removidos depois que as divergências forem isoladas e eliminadas pela reparametrização da teoria. Por outro lado, em modelos não renormalizáveis, à medida que aumentamos o nível de aproximação considerado, a reparametrização do modelo somente pode ser feita à custa de adicionar à Lagrangeana um número crescente de termos com constantes de acoplamento extras a fim de produzir amplitudes físicas independentes do procedimento de regularização. Por isso, previsões fazem sentido somente dentro do contexto de um dada aproximação particular.

O processo de regularização deveria ter um papel secundário no sentido que ele não poderia modificar o conteúdo físico da teoria. Entretanto a situação é totalmente inversa. O modelo NJL é visto tipicamente como sendo essencialmente dependente do método de regularização. Ou seja, a regularização adotada é considerada como parte da definição do modelo. Diferentes regularizações, geralmente, produzem diferentes previsões para a mesma fenomenologia. Os problemas, acima mencionados, têm levado alguns autores a questionar o poder de previsão do modelo (veja, por exemplo [14, 15]).

¹Verifica-se, até o momento, que os quarks não são encontrados livres na natureza, mas em pares ou em trios formando os hádrons (mésons e bárions).

Recentemente, em uma sequência de trabalhos, a questão da preditibilidade do modelo NJL foi reconsiderada sob a perspectiva de um novo método de tratamento e cálculo de amplitudes de Feynman, denominado de método de cálculo perturbativo preditivo (PPC) [16, 17]. Em uma completa e detalhada investigação foi estabelecido que as amplitudes do modelo podem ser obtidas com as simetrias preservadas bem como livres de dependências das escolhas dos rótulos dos momentos internos dos loops através da identificação de propriedades gerais e universais das integrais de Feynman denominadas de relações de consistência. Além disso, mostrou-se que a liberdade associada com a escolha da regularização pode ser parametrizada em termos de um parâmetro arbitrário que pode ser fixado através de uma condição crítica para o valor da massa do quark gerado dinamicamente. Um único valor para o parâmetro arbitrário está associado com um único valor real para as massas dos quarks. Todas as previsões são calculadas, em última instância, sem uso de qualquer tipo de regularização. Esses fatos permitiram concluir que é possível fazer previsões físicas com o modelo NJL que não sejam dependentes das escolhas feitas nos passos intermediários dos cálculos. O modelo NJL, dentro dessa formulação, pode então ser considerado preditivo. Os resultados numéricos obtidos dentro dessa formulação concordam muito bem com os dados fenomenológicos. Esses resultados têm sido confirmados por outros autores [18].

Motivados por esses resultados interessantes, no presente trabalho realizamos uma investigação a fim de estender a formulação preditiva do modelo NJL, com dois sabores, para o caso de diferentes espécies de férmions. Para a construção de uma formulação preditiva do modelo NJL, com massas diferentes, seguiremos os mesmos procedimentos descritos nas Refs. [16, 17]. Qualitativamente, queremos testar a consistência matemática e física do método PPC quando aplicado a um modelo de teoria quântica de campos não renormalizável envolvendo

férmions com massas diferentes.

Fenomenologicamente, na versão $SU(2)$ mais simples, o modelo é capaz de descrever as propriedades estáticas mais comuns do setor mesônico pseudo-escalar e escalar. Aplicaremos, também, a formulação preditiva para o modelo estendido por meio da inclusão das interações vetoriais/axiais e tensoriais. Dentro da versão estendida, faremos previsões físicas, também, para os mésons vetoriais (ρ) e axiais (a_1). Quantitativamente, concentraremos-nos, especialmente, no problema da possível influência da quebra explícita da simetria de isospin nas diferenças existentes observadas para os mésons carregados e neutros. Por exemplo, verificamos que a diferença das massas dos mésons ρ carregados e neutros é de, aproximadamente, 4.6 MeV . Vamos estudar, entre outros aspectos, qual é a contribuição da quebra explícita da simetria de isospin para essa diferença nas massas.

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira. Na seção 2, calcularemos em detalhes todas as amplitudes de um e dois pontos que precisaremos, para estudar a fenomenologia pertinente, de forma a explicitar todos os procedimentos adotados pelo método PPC. Ainda, na seção 2, usando-se apenas identidades algébricas, mostraremos a existência das chamadas relações de escala, que são vínculos entre objetos puramente divergentes definidos dentro do método PPC. As relações de escala terão um papel importante na obtenção de amplitudes físicas que são invariantes de escala. Estabeleceremos, além disso, as relações entre funções de Green que usaremos para testar a consistência mínima das amplitudes calculadas. Finalmente, mostraremos que a eliminação das ambiguidades relacionadas com os rótulos atribuídos, para as linhas internas aos loops e com o parâmetro de escala, exige, como condição mínima, a validade das chamadas relações de consistência. Começaremos a seção 3 discutindo algumas características básicas do

modelo NJL na versão $SU(2)$. Em particular, abordaremos o conceito de simetria quiral e o mecanismo de geração dinâmica das massas dos quarks dentro da aproximação de campo médio. Na mesma seção, estudaremos a fenomenologia mesônica, considerando o cálculo explícito dos elementos da matriz de espalhamento quark-antiquark. Da matriz de espalhamento e das amplitudes físicas calculadas na seção 2, obteremos expressões explícitas que serão usadas, por exemplo, para se calcular as massas e as constantes de acoplamento efetivas do méson pión e sigma. Para obtenção das massas constituintes dos quarks, usaremos a equação da relação de escala, mostrando que suas soluções nos fornecem um guia consistente para fixarmos a arbitrariedade envolvida com a escolha do tipo de regularização adotada. Será apresentada uma série de tabelas de dados, obtida pelo software MAPLE [19] e essas tabelas serão analisadas para fazermos nossas previsões numéricas. Na seção 4, estenderemos a Lagrangeana do modelo, ainda na versão $SU(2)$, incluindo os acoplamentos vetoriais e tensoriais. Com isso, o modelo fica mais completo podendo descrever, além dos píons e sigma, também, os mésons vetoriais e axiais. Os novos acoplamentos, também, modificam as equações que descrevem a fenomenologia dos píons e sigma. O roteiro de discussão será basicamente o mesmo da seção 3. Finalmente faremos nossas considerações finais na seção 5.

2 MÉTODO DE TRATAMENTO DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN

Praticamente, todo modelo construído, de acordo com os princípios da teoria quântica de campos, no regime perturbativo, é contaminado com amplitudes físicas que são divergentes. No caso do modelo NJL, não é diferente. Sendo as-

sim, para obtermos o conteúdo fenomenológico pertinente, primeiro precisamos tratar e calcular as amplitudes pertencentes aos processos físicos do modelo. O ingrediente fundamental da formulação preditiva do modelo NJL, que estudaremos neste trabalho, é o método de manipulação e cálculo de integrais de Feynman, finitas ou divergentes, desenvolvido originalmente por O. A. Battistel na Ref.[20], para ser uma alternativa aos métodos usuais de regularização. A ideia fundamental da estratégia é, manipular as integrais divergentes, usando-se, como hipótese simples, a validade da operação de linearidade de integração, sem, de fato, integrar as partes puramente divergentes. Na seção que segue, vamos calcular as amplitudes que serão necessárias para a formulação e investigação fenomenológica do modelo NJL. Os cálculos serão apresentados em um nível de detalhes suficiente para ficar explícita a sistemática do método. Maiores detalhes podem ser obtidos nas Refs. [21].

2.1 Cálculo das Amplitudes do Modelo

Iniciaremos com as amplitudes de um ponto definidas por

$$T^\Gamma = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} tr \left\{ \Gamma \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_i) - m_i]} \right\} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{tr \{ \Gamma [(\not{k} + \not{k}_i) + m_i] \}}{[(k + k_i)^2 - m_i^2]} \quad (1)$$

em que $[(\not{k} + \not{k}_i) - m_i]^{-1}$ é o propagador livre do férmion, m_i é a sua massa, k_i é o rótulo (arbitrário) da linha interna do loop, conforme ilustra a Fig.(1), $\Gamma = \{ \hat{1}, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5 \}$ são as matrizes de Dirac e tr é a operação de traço sobre essas matrizes. Por contagem de potência, a amplitude (1) tem grau cúbico máximo de divergência quando $\Gamma = \hat{1}$, o maior grau de divergência presente num modelo NJL típico.

Como primeiro passo do método, supomos a existência de uma função



Figura 1 Representação diagramática das funções de Green de um-ponto.

regularizadora implícita tal que

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k) \rightarrow \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k) \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(\Lambda_i^2, k^2) \right\}$$

$$= \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k)$$

em que $G(\Lambda_i^2, k^2)$ é uma distribuição regularizadora parametrizada pelos Λ_i^2 s que satisfazem um limite de conexão bem definido

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(\Lambda_i^2, k^2) = 1 \quad (2)$$

O limite de conexão permite uma eventual remoção da regularização para podermos reobter os resultados originais. Veremos, no final deste trabalho que, de fato, não precisaremos de uma forma explícita para $G(\Lambda_i^2, k^2)$.

Com a presença da distribuição regularizadora, podemos reorganizar o integrando de (1) de uma forma conveniente, pois a amplitude agora é finita. Para

tal, podemos usar a seguinte identidade algébrica para reescrever o propagador

$$\frac{1}{[(k + k_i)^2 - m_i^2]} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} [(k + k_i)^2 - m_i^2]}, \quad (3)$$

em que λ é um parâmetro com dimensão de massa e arbitrário que, como veremos mais adiante, desempenhará um papel de escala conectando a parte finita com a divergente. O valor de N é escolhido igual ao grau de divergência da amplitude. Para a amplitude escalar ($\Gamma = \hat{1}$), depois da realização da operação de traço, temos (Cálculo detalhado no APÊNDICE A)

$$T^S = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4m_i}{[(k + k_i)^2 - m_i^2]} \quad (4)$$

Como o grau de divergência é quadrática, tomamos $N = 2$ e, assim, podemos escrever

$$T^S = 4m_i \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m_i^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m_i^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} + 4m_i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m_i^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k + k_i)^2 - m_i^2]}.$$

As integrais de Feynman com um número ímpar de momenta de integração (k) são

nulas e assim

$$\begin{aligned}
T^S = 4m_i & \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right. \\
& - (k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
& + 4k_i^\alpha k_i^\beta \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
& + (k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
& \left. - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m_i^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k + k_i)^2 - m_i^2]} \right\}
\end{aligned}$$

Note que as três primeiras integrais são divergentes e as duas últimas são finitas, por contagem de potência. Na parte finita, usamos o limite de conexão (2) e, por isso, retiramos o subscrito Λ do sinal de integração. A parte finita pode ser integrada sem restrições usando-se métodos usuais de integração resultando na expressão

$$\begin{aligned}
T^S = 4m_i & \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right. \\
& - (k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
& \left. + 4k_i^\alpha k_i^\beta \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} \\
& + \frac{i}{4\pi^2} m_i \left[m_i^2 - \lambda^2 - m_i^2 \ln \left(\frac{m_i^2}{\lambda^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

As três integrais restantes são puramente divergentes, pois não possuem parâmetros físicos em seus integrandos. As quantidades puramente divergentes podem ser

organizadas de uma forma sistemática por intermédio dos seguintes objetos

$$\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} \quad (5)$$

$$I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (6)$$

$$I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \quad (7)$$

O objeto $\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$ é uma diferença entre duas integrais com o mesmo grau superficial de divergência e $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ e $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$ são o que denominamos de objetos divergentes irreduzíveis. Com essas definições podemos escrever

$$\begin{aligned} T^S = 4m_i & \left\{ k_i^{\alpha} k_i^{\beta} \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \right. \\ & + \left[I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] + (m_i^2 - \lambda^2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ & \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[m_i^2 - \lambda^2 - m_i^2 \ln \left(\frac{m_i^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

Observe que, para obtermos o resultado acima, a única propriedade que usamos foi a validade da operação de linearidade na integração. Além disso, nenhuma integral divergente foi, realmente, efetuada e, por isso, todo o conteúdo original da amplitude está preservado na expressão (8). A amplitude (8) desempenha um papel muito importante no modelo NJL uma vez que é usada na obtenção da massa constituinte dos quarks. Deixaremos a expressão (8), dessa forma, por enquanto.

A próxima amplitude, de um ponto que consideraremos, é a vetorial ($\Gamma = \gamma_{\mu}$)

$$T_{\mu}^V = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} \{ \gamma_{\mu} [(k + k_i) + m_i] \}}{[(k + k_i)^2 - m_i^2]} \quad (9)$$

que depois dos traços fica

$$T_\mu^V = 4 \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k + k_i)^2 - m_i^2} + 4 (k_i)_\mu \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + k_i)^2 - m_i^2}$$

O mesmo procedimento, usado para obtermos (8), quando aplicado para (9), fornece

$$\begin{aligned} T_\mu^V &= -4 (k_i)_\xi \left[\Delta_{2;\xi\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &+ 4 (k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2) (k_i)_\xi \left[\Delta_{3;\xi\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &- \frac{4}{3} (k_i)_\xi (k_i)_\chi (k_i)_\tau \left[\square_{4;\xi\chi\tau\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

em que definimos mais dois objetos divergentes

$$\begin{aligned} \square_{4;\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) &= \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &- \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\nu} k_\beta k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\mu} k_\beta k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ \Delta_{2;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) &= \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\nu k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \end{aligned}$$

As demais amplitudes de um ponto (T^P e T^A) são nulas pelas propriedades do traço sobre as matrizes de Dirac. Pela definição das amplitudes temos

$$\begin{aligned} T^P &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr \left\{ \frac{\gamma_5 [k + k_1 - m_1]}{(k + k_1)^2 - m_1^2} \right\} \\ T^A &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr \left\{ \frac{\gamma_5 \gamma_\mu [k + k_1 - m_1]}{(k + k_1)^2 - m_1^2} \right\} \end{aligned}$$

De T^P temos $tr \{ \gamma_5 (\not{k} + \not{k}_1 + m_1) \} = tr \{ \gamma_5 \gamma_\xi \} (k + k_1)^\xi + m_1 tr \{ \gamma_5 \}$ e de T^A temos $tr \{ \gamma_5 \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1 + m_1) \} = tr \{ \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\xi \} (k + k_1)^\xi + m_1 tr \{ \gamma_5 \gamma_\mu \}$. Mas, pelas propriedades da matriz de Dirac

$$tr \{ \gamma_5 \} = tr \{ \gamma_5 \gamma_\xi \} = tr \{ \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\xi \} = 0$$

que nos leva a $T^P = T^A = 0$.

Consideremos agora as funções de dois pontos definidas por

$$T^{\Gamma_1 \Gamma_2} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{tr \{ \Gamma_1 [(\not{k} + \not{k}_1) + m_1] \Gamma_2 [(\not{k} + \not{k}_2) + m_2] \}}{[(k + k_1)^2 - m_1^2] [(k + k_2)^2 - m_2^2]} \quad (11)$$

em que k_1 e k_2 são rótulos arbitrários para os momenta internos conforme ilustra a Fig.(2) e $\{ \Gamma_1, \Gamma_2 \} = \{ \hat{1}, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5 \}$.

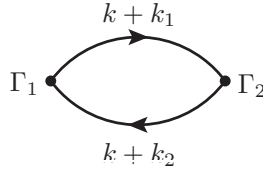


Figura 2 Representação diagramática das funções de dois pontos.

Para a amplitude escalar-escalar ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \hat{1}$) temos

$$T^{SS} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{tr \{ [(\not{k} + \not{k}_1) + m_1] [(\not{k} + \not{k}_2) + m_2] \}}{[(k + k_1)^2 - m_1^2] [(k + k_2)^2 - m_2^2]} \quad (12)$$

O cálculo do traço

$$tr \{ [(\not{k} + \not{k}_1) + m_1] [(\not{k} + \not{k}_2) + m_2] \} = 4(k + k_1) \cdot (k + k_2) + 4m_1 m_2$$

fornece

$$T^{SS} = 4 \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k + k_1) \cdot (k + k_2) + m_1 m_2}{\left[(k + k_1)^2 - m_1^2 \right] \left[(k + k_2)^2 - m_2^2 \right]}$$

A fim de eliminar o termo quadrático do numerador consideremos a identidade

$$\begin{aligned} (k + k_1) \cdot (k + k_2) + m_1 m_2 &= \frac{1}{2} \left[(k + k_1)^2 - m_1^2 \right] + \frac{1}{2} \left[(k + k_2)^2 - m_2^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(k_1 - k_2)^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} T^{SS} &= 2 \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k + k_2)^2 - m_2^2 \right]} + 2 \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k + k_1)^2 - m_1^2 \right]} \\ &\quad - 2 \left[p^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k + k_1)^2 - m_1^2 \right] \left[(k + k_2)^2 - m_2^2 \right]} \end{aligned}$$

com $p = k_1 - k_2$ sendo o momento físico pela condição de conservação dos momentos nos vértices da Fig.(2). Os dois primeiros termos são integrais de um ponto e, portanto a mesma sistemática usada para calcularmos T^S e T_{μ}^V se aplica. O último termo é uma função de dois pontos com grau superficial de divergência logarítmica. Para cada propagador podemos usar a identidade (3) com $N = 0$ e

escrever

$$\begin{aligned}
T^{SS} = & 2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m_1^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right. \\
& \left. + \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m_1^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} \\
& + 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m_1^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k + k_1)^2 - m_1^2]} \\
& + 2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_2 + \lambda^2 - m_2^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right. \\
& \left. + \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_2 + \lambda^2 - m_2^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} \\
& + 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_2 + \lambda^2 - m_2^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k + k_2)^2 - m_2^2]} \\
& - 2 [p^2 - (m_1 + m_2)^2] \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right. \\
& - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_2 + \lambda^2 - m_2^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_2)^2 - m_2^2]} \\
& - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m_1^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_1)^2 - m_1^2]} \\
& \left. + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m_1^2)(k_2^2 + 2k \cdot k_2 + \lambda^2 - m_2^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} \right\}
\end{aligned}$$

em que utilizamos (2) para remover a distribuição regularizadora das integrais finitas que podem ser agora integradas sem restrições. As integrais puramente divergentes podem ser organizadas em termos dos objetos (5), (6) e (7). O resultado

é

$$\begin{aligned}
T^{SS} = & 2 \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] + (m_2^2 - \lambda^2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \right. \\
& \left. + \frac{i}{16\pi^2} \left[m_2^2 - \lambda^2 + m_2^2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m_2^2} \right) \right] \right\} \\
& + 2 \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] + (m_1^2 - \lambda^2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \right. \\
& \left. + \frac{i}{16\pi^2} \left[m_1^2 - \lambda^2 + m_1^2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m_1^2} \right) \right] \right\} \\
& - 2 \left[p^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& + (p_\alpha p_\beta + P_\alpha P_\beta) \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \tag{13}
\end{aligned}$$

com $P = k_1 + k_2$ sendo uma combinação não física dos momenta internos e

$$\xi_n^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^n \ln \left(\frac{p^2(1-z)z + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2}{-\lambda^2} \right)$$

define uma função finita (APÊNDICE B) que ajuda a sistematizar a parte finita das amplitudes. Note que, essencialmente, os mesmos passos usados, para tratarmos as funções de um ponto, também, foram aplicados para a função de dois pontos T^{SS} . Na verdade, o método se aplica, sem modificações, para qualquer função de Green de N -pontos.

Outras funções de dois pontos, relevantes ao nosso trabalho, quando tratadas da mesma forma descrita acima, podem ser organizadas como

$$T_{\mu\nu}^{AV} = -2\varepsilon_{\mu\nu\xi\chi} p_\xi P_\tau \left[\Delta_{3;\chi\tau}^{(4)}(\lambda^2) \right] \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
T^{PP} = & -2 \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] - (\lambda^2 - m_1^2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \right. \\
& \left. + \frac{i}{16\pi^2} \left[m_1^2 - \lambda^2 + m_1^2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m_1^2} \right) \right] \right\} \\
& - 2 \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] - (\lambda^2 - m_2^2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \right. \\
& \left. + \frac{i}{16\pi^2} \left[m_2^2 - \lambda^2 + m_2^2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m_2^2} \right) \right] \right\} \\
& + 2 \left[p^2 - (m_1 - m_2)^2 \right] \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - (p_\alpha p_\beta + P_\alpha P_\beta) \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\beta^{SV} = & -2(m_1 + m_2) P^\alpha \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
& + 4p_\beta \left\{ \frac{1}{2} (m_1 - m_2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \right. \\
& \left. + \frac{i}{16\pi^2} (m_1 + m_2) \left[\xi_1^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{i}{16\pi^2} m_1 \left[\xi_0^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\mu^{AP} = & -2(m_1 - m_2) P_\xi \left[\Delta_{3;\mu\xi}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
& - 4m_1 p_\mu \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& + 2(m_1 - m_2) p_\mu \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{8\pi^2} \left[\xi_1^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV} = & 4 \left[\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - (p^2 + P^2) \left[\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - 2P_\nu P^\xi \left[\Delta_{3;\mu\xi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& + \frac{2}{3} p_\mu p^\xi \left[\Delta_{3;\nu\xi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} p^\xi p^\chi \left[\Delta_{3;\xi\chi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& + \frac{1}{3} \left(p^\xi p^\chi + 3P^\xi P^\chi \right) \left[\square_{4;\mu\nu\xi\chi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - 2 \left[(\lambda^2 - m_1^2) + (\lambda^2 - m_2^2) \right] \left[\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - \frac{4}{3} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \left\{ \left[I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{3i}{8\pi^2} \left[\xi_2^{(0)} (m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{3i}{8\pi^2} \left[\xi_1^{(0)} (m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - 2g_{\mu\nu} (m_1 - m_2) \left\{ \left[I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{i}{8\pi^2} (m_1 + m_2) \left[\xi_1^{(0)} (m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{i}{8\pi^2} m_1 \left[\xi_0^{(0)} (m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{AA} = & 4 \left[\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - (p^2 + P^2) \left[\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - 2P_\nu P_\xi \left[\Delta_{3;\xi\mu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& + \frac{2}{3} p_\mu p_\xi \left[\Delta_{3;\xi\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} p_\xi p_\chi \left[\Delta_{3;\xi\chi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& + \frac{1}{3} (p_\xi p_\chi + 3P_\xi P_\chi) \left[\square_{\xi\chi\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - 2 \left[(\lambda^2 - m_1^2) + (\lambda^2 - m_2^2) \right] \left[\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& + \frac{4}{3} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left\{ \left[I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{3i}{8\pi^2} \left[\xi_2^{(0)} (m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{3i}{8\pi^2} \left[\xi_1^{(0)} (m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - 2g_{\mu\nu} (m_1 + m_2)^2 \left\{ \left[I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - \frac{i}{18\pi^2} g_{\mu\nu} (m_1^2 - m_2^2) \left[2\xi_1^{(0)} (m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) - \xi_0^{(0)} (m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned} \tag{18}$$

As amplitudes não mencionadas acima, que são formadas por combinações diferentes dos canais nos vértices como, por exemplo, T_μ^{PV} e T_μ^{SA} , entre outras, são nulas pelas propriedades do traço sobre as matrizes de Dirac.

Observe que o parâmetro λ foi introduzido, nas amplitudes calculadas acima, como parte do processo de separação das partes finitas e divergentes das integrais de Feynman, pelo uso da identidade (3). Sendo assim, λ parametriza a arbitrariedade que temos na escolha da massa que ficará no integrando das integrais puramente divergentes. Em razão de λ ser um parâmetro arbitrário, as amplitudes físicas devem ser independentes dele. Porém, olhando para as expressões obtidas

acima, não é obvio que elas são de fato independentes de λ . Na análise que faremos a seguir, discutiremos, em detalhes, essa questão crucial e investigaremos as condições necessárias para que essa exigência seja satisfeita.

2.2 Relações de Escala

Como já mencionamos, o parâmetro λ faz a conexão entre a parte finita e a parte divergente das amplitudes calculadas na seção anterior. Dentro da parte finita, λ aparece sempre dividindo as outras massas e momentos, fazendo, assim, um papel de parâmetro de escala. Na parte puramente divergente, λ faz o papel da massa que forma o integrando dos objetos $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$, $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$, $\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$ e $\square_{4;\mu\nu\xi\chi}^{(4)}(\lambda^2)$. Nesta seção, queremos mostrar a existência de relações entre $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ e $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$ e que são condições necessárias para que as amplitudes físicas sejam independentes do parâmetro de escala. Uma maneira de mostrarmos isso é considerando a identidade (3) para $k_1 = 0$ e $N = 1$

$$\frac{1}{(k^2 - m_i^2)} = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(m_i^2 - \lambda^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(m_i^2 - \lambda^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 (k^2 - m_i^2)}.$$

Integrando em ambos os lados

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_i^2)} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - (m_i^2 - \lambda^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\ &+ (m_i^2 - \lambda^2)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2 (k^2 - m_i^2)} \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} [i I_{quad}^{(4)}(m_i^2)] &= [i I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)] + (m_i^2 - \lambda^2) [i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)] \\ &- \frac{1}{16\pi^2} \left[m_i^2 - \lambda^2 - m_i^2 \ln \left(\frac{m_i^2}{\lambda^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

que é uma relação entre I_{quad} 's, com massas diferentes e, também, com I_{\log} . Uma relação semelhante para I_{\log} pode ser obtida tomando-se $k_1 = 0$ e $N = 0$ em (3) tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_i^2)^2} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(m_i^2 - \lambda^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 (k^2 - m_i^2)} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(m_i^2 - \lambda^2)}{(k^2 - \lambda^2) (k^2 - m_i^2)^2} \end{aligned}$$

Depois de integrarmos a parte finita temos

$$\left[i I_{\log}^{(4)}(m_i^2) \right] = \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \ln \left(\frac{m_i^2}{\lambda^2} \right). \quad (20)$$

As equações (19) e (20) são denominadas de relações de escala (RE). As RE terão um papel importante na formulação preditiva do modelo como veremos mais adiante.

As RE, também, podem ser obtidas se considerarmos as definições de $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$ e $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$, equações (6) e (7). Derivando $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$ com relação a λ^2 em (6) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left(\frac{1}{k^2 - \lambda^2} \right), \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \\ &= I_{\log}^{(4)}(\lambda^2). \end{aligned}$$

Por sua vez, derivando $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ com relação a λ^2 em (7), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left(\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right) \\ &= 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3}\end{aligned}$$

Note que, por contagem de potência, temos uma integral finita. A integração é fácil e resulta em

$$\frac{\partial I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} = -\frac{i}{16\pi^2 \lambda^2}.$$

Integrando-se em ambos os lados desta equação em relação a λ^2 , temos

$$\left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] = \frac{1}{16\pi^2} \ln(\lambda^2) + C_1$$

em que C_1 é uma constante arbitrária que não depende de λ^2 . Integrando esta equação novamente em relação a λ^2 , obteremos

$$\begin{aligned}\int d\lambda^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] &= \int d\lambda^2 \left\{ \frac{1}{16\pi^2} \ln(\lambda^2) + C_1 \right\} \\ \int d\lambda^2 \frac{\partial \left[i I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right]}{\partial \lambda^2} &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} (\ln(\lambda^2) - 1) + C_1 \lambda^2 + C_2 \\ \left[i I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} (\ln(\lambda^2) - 1) + C_1 \lambda^2 + C_2\end{aligned}$$

em que C_2 é outra constante arbitrária que não depende de λ^2 . Assim, obtemos duas equações relacionando $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$ e $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$

$$\begin{aligned}\left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] &= \frac{1}{16\pi^2} \ln(\lambda^2) + C_1 \\ \left[i I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} (\ln(\lambda^2) - 1) + C_1 \lambda^2 + C_2\end{aligned}$$

Eliminando C_1 da segunda equação acima teremos

$$\left[i I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \lambda^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} = C \quad (21)$$

em que, por conveniência, tomamos $C_2 \rightarrow C$. Como C_1 e C_2 não dependem de λ^2 , as equações acima podem ser mostradas equivalentes as RE, pois usando a relação (20), podemos eliminar $\frac{1}{16\pi^2} \ln\left(\frac{m_i^2}{\lambda^2}\right)$ da relação (19) que, por sua vez, poderá ser reescrita como

$$\left[i I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \lambda^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} = \left[i I_{quad}^{(4)}(m_i^2) \right] - m_i^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(m_i^2) \right] + \frac{m_i^2}{16\pi^2} \quad (22)$$

Nesta forma, o lado esquerdo da equação depende de λ^2 , e o lado direito não depende de λ^2 , mas de m_i^2 e, portanto, são constantes, concluindo a equivalência entre (21) e as relações (20) e (19). Utilizaremos a Eq. (21) mais adiante para obtermos a massa constituinte dos quarks no contexto da formulação preditiva do modelo NJL.

Com as relações de escala, as amplitudes T^S , T^{SS} e T^{PP} são simplificadas para

$$T^S = 4m_i \left\{ k_i^\alpha k_i^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \left[I_{quad}^{(4)}(m_i^2) \right] \right\} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T^{SS} = & 2 \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(m_1^2) \right] + \left[I_{quad}^{(4)}(m_2^2) \right] \right\} \\ & - 2 \left[p^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & + (p_\alpha p_\beta + P_\alpha P_\beta) \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
T^{PP} = & -2 \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(m_1^2) \right] + \left[I_{quad}^{(4)}(m_2^2) \right] \right\} \\
& + 2 \left[p^2 - (m_1 - m_2)^2 \right] \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - (p_\alpha p_\beta + P_\alpha P_\beta) \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right]
\end{aligned} \tag{25}$$

Note que (20) implica que a expressão

$$\left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \right]$$

que é encontrada nas amplitudes calculadas é, automaticamente, independente do parâmetro λ . Resta-nos, ainda, a dependência explícita dos objetos $\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2)$ e $\square_{\xi\chi\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$ com λ , os quais são termos violadores de escala. Voltaremos a essa questão na seção (2.4).

As amplitudes que definimos e calculamos nas seções anteriores possuem vínculos matemáticos e físicos, que são estabelecidos, independentemente, do tratamento dado às integrais e que devem ser preservados, em qualquer estágio da investigação, a fim de mantermos a consistência do modelo. Na próxima seção exploraremos o primeiro desses vínculos de consistência.

2.3 Relações entre Funções de Green

As amplitudes de um e dois pontos que calculamos acima não são totalmente independentes. Podemos estabelecer relações entre elas contraindo as amplitudes, com índices de *Lorentz* livre, com o momento físico (externo) p . Consideraremos, inicialmente, a amplitude T_μ^{SV} e sua contração com p^μ dada por

$$(k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{SV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} tr \left\{ \frac{1}{k_+ k_1 - m_1} (k_2 - k_1) \frac{1}{k_+ k_2 - m_2} \right\}.$$

Usando a identidade algébrica

$$k_2 - k_1 = (k + k_2 - m_2) - (k + k_1 - m_1) + (m_2 - m_1)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} (k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{SV} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{1}{k + k_1 - m_1} \right\} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{1}{k + k_2 - m_2} \right\} \\ &\quad + (m_2 - m_1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{1}{k + k_1 - m_1} \frac{1}{k + k_2 - m_2} \right\}. \end{aligned}$$

Os termos do lado direito da equação acima podem ser identificados com as amplitudes T^S e T^{SS} , respectivamente. Obtemos a primeira relação entre funções de Green que fica da forma

$$(k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{SV} = [T^S(k_1)] - [T^S(k_2)] + (m_2 - m_1) [T^{SS}] \quad (26)$$

Novamente, a única hipótese que assumimos, para obter a relação (26), foi a validade da linearidade na operação de integração. Sendo assim, é uma relação bastante geral e deve ser preservada, após as amplitudes serem calculadas, seja qual for o método ou regularização usada no processo. A violação dessa identidade, por um método específico, implica, entre outras coisas, que a linearidade de integração foi quebrada, durante o procedimento de cálculo, revelando-nos uma inconsistência desse método.

As relações entre funções de Green, para as amplitudes restantes, podem ser estabelecidas da mesma maneira. Explicitamente temos

$$(k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{AP} = [T^S(k_1)] + [T^S(k_2)] + (m_2 + m_1) [T^{PP}] \quad (27)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = [T_\nu^V(k_1)] - [T_\nu^V(k_2)] + (m_2 - m_1) [T_\nu^{SV}] \quad (28)$$

$$(k_2 - k_1)^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = [T_\mu^V(k_1)] - [T_\mu^V(k_2)] + (m_2 - m_1) [T_\mu^{VS}] \quad (29)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu T_{\nu\mu}^{AA} = [T_\nu^V(k_1)] - [T_\nu^V(k_2)] - (m_2 + m_1) [T_\nu^{AP}] \quad (30)$$

$$(k_2 - k_1)^\nu T_{\mu\nu}^{AV} = [T_\mu^A(k_1)] - [T_\mu^A(k_2)] + (m_2 - m_1) [T_\mu^{AS}] \quad (31)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = [T_\nu^A(k_1)] - [T_\nu^A(k_2)] + (m_2 + m_1) [T_\nu^{PV}] \quad (32)$$

Devemos, agora, verificar se as expressões explícitas, obtidas para as amplitudes (10,14,15,16,17,18,23,24,25), satisfazem as relações obtidas acima. Considerando a amplitude (15) e contraindo com p^μ obtemos

$$\begin{aligned} p^\mu T_\mu^{SV} &= -2(m_1 + m_2) P^\alpha p^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &+ 2(m_1 - m_2) p^2 \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &+ \frac{i}{4\pi^2} p^2 (m_1 + m_2) \left[\xi_1^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \\ &- \frac{i}{4\pi^2} p^2 m_1 \left[\xi_0^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

Podemos usar a propriedade da função $\xi_1^{(0)}$

$$\begin{aligned} 2p^2 \left[\xi_1^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] &= \left[m_1^2 - m_1^2 \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right) \right] - \left[m_2^2 - m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ &+ (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \left[\xi_0^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \end{aligned}$$

para obter

$$\begin{aligned}
p^\mu T_\mu^{SV} &= -2(m_1 + m_2) P^\alpha p^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ 2(m_1 - m_2) p^2 \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{i}{(4\pi)^2} 2(m_1 + m_2) \left[m_1^2 - m_1^2 \ln\left(\frac{m_1^2}{\lambda^2}\right) \right] \\
&- \frac{i}{(4\pi)^2} 2(m_1 + m_2) \left[m_2^2 - m_2^2 \ln\left(\frac{m_2^2}{\lambda^2}\right) \right] \\
&- \frac{i}{(4\pi)^2} 2(m_1 - m_2) \left[p^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \left[\xi_0^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

Usando as relações de escala obtidas na seção anterior

$$\begin{aligned}
I_{quad}^{(4)}(m_1^2) - I_{quad}^{(4)}(m_2^2) &= (m_1^2 - m_2^2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{i}{(4\pi)^2} \left[m_1^2 - m_1^2 \ln\left(\frac{m_1^2}{\lambda^2}\right) \right] \\
&- \frac{i}{(4\pi)^2} \left[m_2^2 - m_2^2 \ln\left(\frac{m_2^2}{\lambda^2}\right) \right]
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
p^\mu T_\mu^{SV} &= -2(m_1 + m_2) P^\alpha p^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ 2(m_1 + m_2) \left[I_{quad}^{(4)}(m_1^2) - I_{quad}^{(4)}(m_2^2) \right] \\
&+ 2(m_1 - m_2) \left[p^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \\
&\times \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Após uma reorganização

$$\begin{aligned}
(k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{SV} = & 4m_1 \left\{ (k_1)^\alpha (k_1)^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \left[I_{quad}^{(4)}(m_1^2) \right] \right\} \\
& - 4m_2 \left\{ (k_2)^\alpha (k_2)^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \left[I_{quad}^{(4)}(m_2^2) \right] \right\} \\
& + 2(m_2 - m_1) \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(m_1^2) \right] + \left[I_{quad}^{(4)}(m_2^2) \right] \right\} \\
& - 2(m_2 - m_1) \left[p^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \\
& \times \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_1^2; p^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& + (m_2 - m_1) (p_\alpha p_\beta + P_\alpha P_\beta) \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

Comparando este resultado com as expressões calculadas de T^S e T^{SS} , Eqs. (23) e (24), vemos que a relação entre funções de Green (26) é satisfeita. As relações entre funções de Green, para as amplitudes restantes, podem ser verificadas da mesma forma. A conclusão é que todas são satisfeitas sem exceção. Do nosso ponto de vista, a satisfação das relações entre funções de Green é uma demonstração de consistência mínima do método empregado para tratar as amplitudes divergentes do modelo. Dentro do método que adotamos, não é surpresa, de fato, que as relações entre funções de Green sejam satisfeitas pelas amplitudes calculadas. O motivo é que, para chegarmos aos resultados das amplitudes (10,14,15,16,17,18,23,24,25), a única hipótese que utilizamos foi a validade da linearidade de integração, implícita na identidade usada para reescrever o propagador fermiônico, Eq. (3).

2.4 Ambiguidades e Relações de Consistência

Nas amplitudes envolvendo loops, os momenta carregados pelas partículas internas não têm um significado físico direto (experimental). Portanto os rótulos,

atribuídos às linhas internas dos loops, são arbitrários. Em particular ao nosso trabalho, adotamos como rótulos arbitrários os momenta k_1 e k_2 . Os momenta internos são restritos somente pela conservação dos momentos nos vértices. No caso das funções de dois pontos implica que o momento da partícula externa é dado por $p = k_1 - k_2$. Qualquer outra combinação de k_1 e k_2 será arbitrária e portanto ambígua. Outro parâmetro arbitrário, utilizado em nosso tratamento, é o parâmetro de escala λ que, mesmo depois do uso das RE, ainda, está presente explicitamente nos objetos $\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2)$ e $\square_{\xi\chi\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$. Temos, então, uma outra arbitrariedade, que denominados de ambiguidade de escala. Explicitamente, os termos das amplitudes que são ambíguos são:

$$\begin{aligned} (T^S)_{amb} &= 4m_i k_i^\alpha k_i^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ (T^{PP})_{amb} &= -(p_\alpha p_\beta + P_\alpha P_\beta) \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ (T^{SS})_{amb} &= (p_\alpha p_\beta + P_\alpha P_\beta) \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ (T_\beta^{SV})_{amb} &= -2(m_1 + m_2) P^\alpha \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ (T_\mu^{AP})_{amb} &= -2(m_1 - m_2) P_\xi \left[\Delta_{3;\mu\xi}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ (T_{\mu\nu}^{AV})_{amb} &= -2\varepsilon_{\mu\nu\xi\chi} p_\xi P_\tau \left[\Delta_{3;\chi\tau}^{(4)}(\lambda^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T_{\mu\nu}^{VV})_{amb} &= 4 \left[\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&- (p^2 + P^2) \left[\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&- 2P_\nu P^\xi \left[\Delta_{3;\mu\xi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{2}{3} p_\mu p^\xi \left[\Delta_{3;\nu\xi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&- \frac{2}{3} g_{\mu\nu} p^\xi p^\chi \left[\Delta_{3;\xi\chi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{1}{3} (p^\xi p^\chi + 3P^\xi P^\chi) \left[\square_{4;\mu\nu\xi\chi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&- 2 [(\lambda^2 - m_1^2) + (\lambda^2 - m_2^2)] \left[\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T_{\mu\nu}^{AA})_{amb} &= 4 \left[\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&- (p^2 + P^2) \left[\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&- 2P_\nu P_\xi \left[\Delta_{3;\xi\mu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{2}{3} p_\mu p_\xi \left[\Delta_{3;\xi\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&- \frac{2}{3} g_{\mu\nu} p_\xi p_\chi \left[\Delta_{3;\xi\chi}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{1}{3} (p_\xi p_\chi + 3P_\xi P_\chi) \left[\square_{\xi\chi\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&- 2 [(\lambda^2 - m_1^2) + (\lambda^2 - m_2^2)] \left[\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

Podemos ver a presença tanto de ambiguidades relacionadas com termos cujos coeficientes são do tipo $P = k_1 + k_2$ bem como ambiguidades relacionadas a termos que não são invariantes de escala. Nesse ponto, podemos fazer uma pergunta importante: é possível definir amplitudes físicas livres de ambiguidades? Essa pergunta é crucial, pois um modelo com ambiguidades não tem poder de predição, ou seja, diferentes escolhas para as ambiguidades levam, geralmente, a resultados distintos.

Analisando as expressões acima, podemos perceber que não é possível, por exemplo, escolher valores particulares para os momenta k_1 e k_2 que eliminem, simultaneamente, todas as ambiguidades. É desejável que nossas amplitudes sejam independentes desses rótulos. Podemos notar, entretanto, que todos os termos ambíguos estão conectados com os objetos divergentes $\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2)$ e $\square_{\xi\chi\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$. Sendo assim, sem adotarmos procedimentos adicionais, é aparente que a única possibilidade de eliminarmos os termos ambíguos é atribuir um valor nulo para os objetos divergentes $\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2)$ e $\square_{\xi\chi\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$. Ou seja, a eliminação completa das ambiguidade requer que

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) = \Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) = \square_{\xi\chi\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) = 0 \quad (34)$$

Por motivos óbvios, denominamos (34) de relações de consistência [20]. Neste trabalho, adotaremos as relações de consistência como parte do procedimento que usaremos para formular e estudar uma versão preditiva do modelo NJL com quebra explícita de simetria de isospin. Devemos chamar a atenção, contudo, para as relações de consistência que não podem ser demonstradas, explicitamente, por nenhum método de regularização conhecido. Na regularização dimensional, por exemplo, as relações de consistência são assumidas válidas como parte da construção do esquema de regularização. As relações de consistência devem ser assumidas válidas, pois são, aparentemente, condições necessárias para um eventual método de regularização ser consistente.

Usando as relações de consistência, as amplitudes físicas, agora livres de

ambiguidades, adquirem a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AV} &= 0 \\ \mathcal{T}^S &= 4m_i \left[I_{quad}^{(4)}(m_i^2) \right]\end{aligned}\quad (35)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{SS} &= 2 \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(m_1^2) \right] + \left[I_{quad}^{(4)}(m_2^2) \right] \right\} \\ &\quad - 2 \left[p^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \\ &\quad \times \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\}\end{aligned}\quad (36)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{PP} &= -2 \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(m_1^2) \right] + \left[I_{quad}^{(4)}(m_2^2) \right] \right\} \\ &\quad + 2 \left[p^2 - (m_1 - m_2)^2 \right]\end{aligned}\quad (37)$$

$$\times \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\beta}^{SV} &= +4p_{\beta} \left\{ \frac{1}{2} (m_1 - m_2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \right. \\ &\quad + \frac{i}{16\pi^2} (m_1 + m_2) \left[\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \\ &\quad \left. - \frac{i}{16\pi^2} m_1 \left[\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\}\end{aligned}\quad (39)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mu}^{AP} &= -2(m_1 + m_2) p_{\mu} \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad + \frac{i}{8\pi^2} (m_1 - m_2) p_{\mu} \\ &\quad \times \left[\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) - 2\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \right]\end{aligned}\quad (40)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV} = & -4 (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \left\{ \frac{1}{3} [I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)] + \frac{i}{8\pi^2} [\xi_2^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)] \right. \\
& \left. - \frac{i}{8\pi^2} [\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)] \right\} \\
& - 2g_{\mu\nu} (m_1 - m_2) \left\{ (m_1 - m_2) [I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)] \right. \\
& \left. - \frac{i}{8\pi^2} m_1 [\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)] \right. \\
& \left. + \frac{i}{8\pi^2} (m_1 + m_2) [\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)] \right\} \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA} = & 4 (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left\{ \frac{1}{3} [I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)] + \frac{i}{8\pi^2} [\xi_2^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)] \right. \\
& \left. - \frac{i}{8\pi^2} [\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)] \right\} \\
& - 2g_{\mu\nu} (m_1 + m_2)^2 \left\{ [I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)] - \frac{i}{16\pi^2} [\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)] \right\} \\
& + \frac{i}{8\pi^2} g_{\mu\nu} (m_1^2 - m_2^2) \\
& \times [\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) - 2\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)] \quad (42)
\end{aligned}$$

As amplitudes tensoriais, por sua vez, podem ser reduzidas em termos de amplitudes não tensoriais. No caso das amplitudes que utilizaremos nesse trabalho temos

$$\mathcal{T}_{\mu\nu\alpha}^{TV} = ig_{\nu\alpha} [\mathcal{T}_\mu^{AP}] - ig_{\mu\alpha} [\mathcal{T}_\nu^{AP}] \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mu\nu\alpha\beta}^{TT} = & g_{\alpha\nu} [\mathcal{T}_{\mu\beta}^{AA}] + g_{\mu\beta} [\mathcal{T}_{\alpha\nu}^{AA}] \\
& - g_{\alpha\mu} [\mathcal{T}_{\nu\beta}^{AA}] - g_{\nu\beta} [\mathcal{T}_{\mu\alpha}^{AA}] \\
& + (g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} - g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha}) [\mathcal{T}^{SS}] \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{\tilde{T}\tilde{T}} &= g_{\alpha\mu} [\mathcal{T}_{\nu\beta}^{VV}] - g_{\alpha\nu} [\mathcal{T}_{\mu\beta}^{VV}] \\
&\quad + g_{\beta\nu} [\mathcal{T}_{\mu\alpha}^{VV}] - g_{\beta\mu} [\mathcal{T}_{\nu\alpha}^{VV}] \\
&\quad + (g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) [\mathcal{T}^{PP}] \\
T_{\mu\nu\alpha}^{A\tilde{T}} &= -ig_{\nu\alpha} [\mathcal{T}_{\mu}^{SV}] + ig_{\mu\alpha} [\mathcal{T}_{\nu}^{SV}]
\end{aligned}$$

Os ingredientes acima estabelecidos são bem gerais e de forma nenhuma restrita ao modelo NJL. As amplitudes calculadas e as conclusões extraídas até esse ponto são fundamentais para a formulação preditiva do modelo NJL que trataremos em detalhes nas próximas seções.

3 O MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO - VERSÃO $SU(2)$

3.1 A Simetria Quiral: Aspectos Gerais

É concenso entre os autores que utilizam o modelo NJL que as características mais importantes que definem o modelo são a presença da simetria quiral e sua quebra dinâmica. Nessa seção, queremos entender alguns aspectos gerais do conceito da simetria quiral. Para isso, consideremos um exemplo simples de uma teoria com férmions livres dado pela densidade de Lagrangeana (ver [22])

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x).$$

Na chamada representação chiral temos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$$

em que ψ_L e ψ_R pertencem as duas representações espinoriais não equivalentes do grupo de Lorentz: $\psi_L \in (\frac{1}{2}, 0)$ e $\psi_R \in (0, \frac{1}{2})$. Além disso, σ_i são as matrizes de Pauli e $\mathbf{1}$ é a matriz identidade 2×2 . Nessa representação, a equação de Dirac fica

$$(i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^i\partial_i - m)\psi(x) = 0$$

ou mais explicitamente

$$i \begin{pmatrix} 0 & \partial_0 \\ \partial_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i\partial_i \\ \sigma^i\partial_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0$$

$$i \begin{pmatrix} \partial_0\psi_L \\ \partial_0\psi_R \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} -\sigma^i\partial_i\psi_L \\ \sigma^i\partial_i\psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} i\partial_0\psi_L + i\sigma^i\partial_i\psi_L - m\psi_R = 0 \\ i\partial_0\psi_R - i\sigma^i\partial_i\psi_R - m\psi_L = 0 \end{cases}$$

As equações acima na representação de Fourier ficam

$$\begin{cases} p_0\psi_L + \sigma^i p_i\psi_L - m\psi_R = 0 \\ p_0\psi_R - \sigma^i p_i\psi_R - m\psi_L = 0 \end{cases} \quad (45)$$

O operador $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ ($\hat{p} \equiv \frac{\vec{p}}{p_0}$) representa a componente do spin ao longo da direção de movimento da partícula e é chamado de operador helicidade. Quando $m = 0$

podemos separar as Eqs. (45) em componentes ψ_L e ψ_R independentes

$$\begin{cases} (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \psi_L = -\psi_L \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \psi_R = \psi_R \end{cases}$$

Definimos, então, que o bi-espinor ψ_L tem helicidade -1 (left-handed) e ψ_R tem helicidade $+1$ (right-handed). Note que, quando $m = 0$, não há mistura de férmions de representações diferentes (left- e right-handed).

Definindo os projetores

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com as propriedades bem conhecidas

$$\begin{cases} P_L + P_R = 1 \\ P_L P_R = 0 \\ P_R^2 = P_R \\ P_L^2 = P_L \\ \gamma_\mu P_L = P_R \gamma_\mu \\ \gamma_\mu P_R = P_L \gamma_\mu \end{cases},$$

podemos separar a Lagrangeana (46) numa parte left e numa parte right

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi_L(x) + \bar{\psi}_R(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi_R(x)$$

em que usamos

$$P_L \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \psi_L$$

$$P_R \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \psi_R$$

A Lagrangeana acima é invariante sob as transformações do grupo $U(1)$ left e right

$$U(1)_L : \psi_L \rightarrow \psi'_L = e^{i\alpha_L} \psi_L$$

$$U(1)_R : \psi_R \rightarrow \psi'_R = e^{i\alpha_R} \psi_R$$

em que α_L e α_R são fases arbitrárias. Esta invariância é denominada de simetria chiral $U(1)_L \otimes U(1)_R$.

De acordo com o teorema de Noether, teremos correntes conservadas associadas com as simetrias contínuas da Lagrangeana dadas por

$$j_\mu^k(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \frac{\delta \psi}{\delta \alpha^k}$$

em que α^k são os parâmetros da transformação. Assim, teremos duas correntes conservadas

$$J_L^\mu = \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x)$$

$$J_R^\mu = \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x)$$

$$\partial_\mu J_L^\mu = \partial_\mu J_R^\mu = 0$$

De uma maneira alternativa, podemos definir as correntes vetoriais e axiais

$$V^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x),$$

$$A^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x)$$

com $J_{L,R}^\mu = \frac{1}{2} [V^\mu(x) \mp A^\mu(x)]$ e $\partial_\mu V^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu(x) = 0$. Logo a simetria chiral $U(1)_L \otimes U(1)_R$ é equivalente ao grupo de simetrias $U(1)_V \otimes U(1)_A$ com as transformações

$$U(1)_V : \psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha_V} \psi$$

$$U(1)_A : \psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha_A \gamma_5} \psi$$

3.2 A Lagrangeana do Modelo e a Aproximação Hartree

Começaremos discutindo o modelo NJL na sua versão com massas diferentes mais simples - a versão $SU(2)$. Nesse cenário, podemos apresentar os principais ingredientes, que constituem o modelo, sem nos envolver em detalhes técnicos desnecessários. Nessa versão, tomamos como graus de liberdade os dois quarks mais leves da família de quarks, que compõem a QCD, os quarks de sabores denominados de *up* e *down*. A Lagrangeana é dada por [10]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + \frac{G_S}{2} \left[(\bar{\psi}(x) \psi(x))^2 - (\bar{\psi}(x) i\gamma_5 \vec{\tau} \psi(x))^2 \right] \quad (46)$$

em que $\psi(x)$ é um campo de Dirac não massivo, descrevendo partículas de spin 1/2 (quarks), pertencentes à representação dublete de $SU_f(2)$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix}$$

G_S é a constante de acoplamento e τ^i são as matrizes de Pauli. A constante de acoplamento G_S tem dimensão de $[massa]^{-2}$ e deve ser positiva para que a força entre quarks e antiquarks seja atrativa. Pelo fato da constante de acoplamento ter dimensão negativa, o modelo NJL é uma teoria de campos não-renormalizável. O segundo termo de (46) representa a interação de quatro quarks num mesmo ponto formada pelos bilineares escalares e pseudoescalares.

A Lagrangeana (46) tem as simetrias $SU_V(2) \otimes SU_A(2) \otimes U_V(1)$. Isto significa que ela é invariante sob as seguintes transformações dos campos

$$SU_V(2) : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \psi(x) \quad (47)$$

$$SU_A(2) : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \gamma_5} \psi(x) \quad (48)$$

$$U_V(1) : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi(x) \quad (49)$$

As correntes de Noether associadas são

$$SU_V(2) : j_\mu^k(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \tau^k \psi(x)$$

$$SU_A(2) : j_{5\mu}^k(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \tau^k \psi(x)$$

$$U_V(1) : j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$$

Apesar do modelo ser relativamente simples, não sabemos resolver, exatamente, as equações necessárias para descrição da fenomenologia envolvida. Por isso, precisamos lançar mão de métodos de aproximação. O primeiro deles é denominado de aproximação de campo médio. Esse procedimento é análogo ao realizado quando temos uma teoria com um campo escalar ϕ . Primeiro redefinimos o campo como $\phi \rightarrow \phi' + \phi_0$ em que ϕ_0 é o campo clássico que satisfaz as equações de Klein-Gordon e ϕ' é um campo puramente quântico. Supomos, então, que a contribuição de ϕ' é pequena comparada a ϕ_0 de forma que podemos desprezar as

contribuições dos termos na nova Lagrangeana de ordem maior que quadrática em ϕ' .

Para entendermos como funciona a aproximação de campo médio, no modelo NJL, considere a Lagrangeana (46) reescrita de forma geral como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i \not{\partial}) \psi(x) + \frac{G_S}{2} (\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x))^2$$

em que $\Gamma = \{\mathbf{1}, i\gamma_5 \vec{\tau}\}$. Primeiro redefinimos os termos de interação da seguinte forma

$$\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) + \langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle$$

em que $\langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle$ é o valor esperado no vácuo do bilinear $\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x)$ e, portanto, corresponde a contribuição clássica. Assim, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(x) (i \not{\partial}) \psi(x) + \frac{G_S}{2} \left\{ (\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x))^2 + \langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle^2 \right\} \\ & + G_S (\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x)) \langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle \end{aligned}$$

O primeiro termo de interação pode ser desprezado, pois é quadrático e, portanto, por hipótese, pequeno. O segundo termo é um número, que é irrelevante para as equações de movimento. Logo, a nova Lagrangeana efetiva é dada por

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{\psi}(x) [i \not{\partial} + G_S \Gamma \langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle] \psi(x)$$

No modelo NJL identificamos

$$M \equiv -G_S \Gamma \langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle \quad (50)$$

como sendo a massa constituinte dos quarks. Esta equação é chamada de equação

de gap, em analogia ao modelo BCS da supercondutividade [23, 24]. O valor esperado no vácuo $\langle \bar{\psi}(x) \psi(x) \rangle$ é chamado de condensado quark-antiquark definido, para cada sabor, por

$$\langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}_\alpha(x) \Gamma_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) | 0 \rangle$$

ou ainda

$$\langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle = -\lim_{y \rightarrow x} \Gamma_{\alpha\beta} \langle 0 | T [\psi_\beta(x) \bar{\psi}_\alpha(y)] | 0 \rangle$$

Da definição do propagador fermiônico

$$S_{\beta\alpha}(x-y) = i \langle 0 | T [\psi_\beta(x) \bar{\psi}_\alpha(y)] | 0 \rangle$$

temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle &= -i \lim_{y \rightarrow x} \Gamma_{\alpha\beta} S_{\beta\alpha}(x-y) \\ &= -i \lim_{y \rightarrow x} \text{Tr} [\Gamma S(x-y)] \\ &= -i \text{Tr} [\Gamma S(0)] \end{aligned}$$

Na representação dos momenta temos

$$\begin{aligned} S(x-y) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} S(k) \\ S(0) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S(k) \end{aligned}$$

tal que

$$\langle \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma S(k)]$$

Explicitando os índices de sabor

$$M_f \equiv iG_S \sum_{a=0}^3 (\tau^a)_{ff} \sum_g \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[(\tau^a)_{gg} S^g(k) \right] + Tr \left[\gamma_5 (\tau^a)_{gg} S^g(k) \right] \right\}$$

e somando sobre esses índices temos

$$M_u \equiv 2iG_S \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[S^u(k) \right] + Tr \left[\gamma_5 S^u(k) \right] \right\}$$

$$M_d \equiv 2iG_S \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[S^d(k) \right] + Tr \left[\gamma_5 S^d(k) \right] \right\}$$

Como $Tr \left[\gamma_5 S(k) \right] = 0$ ficamos somente com a parte escalar

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(x) \psi(x) \rangle &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{1}{\not{k} - M_q} \right] \\ &= -N_c [i\mathcal{T}^S] \\ &= -4N_c M_q [i I_{quad}(M_q^2)] \end{aligned} \quad (51)$$

de modo que a equação de gap fica

$$\begin{aligned} M_q &= 2G_S N_c [i\mathcal{T}^S] \\ &= 8N_c G_S M_q [i I_{quad}(M_q^2)] \end{aligned}$$

Em termos dos condensados quark-antiquark

$$M_u = -2G_S \langle \bar{u}u \rangle$$

$$M_d = -2G_S \langle \bar{d}d \rangle$$

Se tivermos uma solução $M_q \neq 0$ para equação de gap, teremos uma quebra dinâmica da simetria quiral, de acordo com a discussão que fizemos na seção acima.

Uma forma alternativa de obtermos as equações de gap é calculando a autoenergia dos quarks na aproximação Hartree [10]. O propagador não perturbativo dos quarks $S(p)$ é dado em termos da autoenergia $\Sigma(p)$ na forma

$$S^{-1}(p) = \not{p} - \Sigma(p)$$

Para calcularmos a autoenergia, nesta aproximação, podemos contraír (contração de Wick) todos os possíveis pares de criação e destruição dos operadores de campo na Lagrangeana de interação, de forma que os operadores de destruição sempre fiquem à direita e os operadores de criação à esquerda. A parte de interação da Lagrangeana tem a forma geral

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= \frac{G_S}{2} (\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x))^2 \\ &= \frac{G_S}{2} \sum_{\alpha_1 \beta_1} \sum_{\alpha_2 \beta_2} \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} \bar{\psi}_{\alpha_1} \psi_{\beta_1} \bar{\psi}_{\alpha_2} \psi_{\beta_2} \end{aligned}$$

Há quatro maneiras à la Wick para contrair os campos que são

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x))^2 &\rightarrow - \sum_{\alpha_1 \beta_1} \sum_{\alpha_2 \beta_2} \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} \langle 0 | \psi_{\beta_1} \bar{\psi}_{\alpha_1} | 0 \rangle \bar{\psi}_{\alpha_2} \psi_{\beta_2} \\ &\quad - \sum_{\alpha_1 \beta_1} \sum_{\alpha_2 \beta_2} \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} \bar{\psi}_{\alpha_1} \langle 0 | \psi_{\beta_2} \bar{\psi}_{\alpha_2} | 0 \rangle \psi_{\beta_1} \\ &\quad + \sum_{\alpha_1 \beta_1} \sum_{\alpha_2 \beta_2} \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} \bar{\psi}_{\alpha_2} \langle 0 | \psi_{\beta_2} \bar{\psi}_{\alpha_1} | 0 \rangle \psi_{\beta_1} \\ &\quad + \sum_{\alpha_1 \beta_1} \sum_{\alpha_2 \beta_2} \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} \bar{\psi}_{\alpha_1} \langle 0 | \psi_{\beta_1} \bar{\psi}_{\alpha_2} | 0 \rangle \psi_{\beta_2} \end{aligned}$$

Definindo o propagador do férmion livre

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle$$

temos

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x))^2 &\rightarrow - \sum_{\alpha_2 \beta_2} \bar{\psi}_{\alpha_2} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} \left\{ \sum_{\alpha_1 \beta_1} \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} S_{\beta_1 \alpha_1}(0) \right\} \psi_{\beta_2} \\ &- \sum_{\alpha_1 \beta_1} \bar{\psi}_{\alpha_1} \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} \left\{ \sum_{\alpha_2 \beta_2} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} S_{\beta_2 \alpha_2}(0) \right\} \psi_{\beta_1} \\ &+ \sum_{\alpha_1 \beta_1} \sum_{\alpha_2 \beta_2} \bar{\psi}_{\alpha_2} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} S_{\beta_2 \alpha_1}(0) \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} \psi_{\beta_1} \\ &+ \sum_{\alpha_1 \beta_1} \sum_{\alpha_2 \beta_2} \bar{\psi}_{\alpha_1} \Gamma_{\alpha_1 \beta_1} S_{\beta_1 \alpha_2}(0) \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} \psi_{\beta_2} \end{aligned}$$

ou

$$(\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x))^2 \rightarrow 2\bar{\psi}(x) \{ \Gamma S(0) \Gamma \} \psi(x) - 2\bar{\psi}(x) \{ \Gamma Tr [\Gamma S(0)] \} \psi(x)$$

Assim a Lagrangeana efetiva resultante fica

$$\mathcal{L}_{eff}^{int} = G_S \{ \bar{\psi}(x) \{ \Gamma S(0) \Gamma \} \psi(x) - \bar{\psi}(x) \{ \Gamma Tr [\Gamma S(0)] \} \psi(x) \}$$

Na aproximação Hartree ficamos com

$$\mathcal{L}_{Hartree}^{int} = -G_S \bar{\psi}(x) \Gamma Tr [\Gamma S(0)] \psi(x)$$

em que podemos identificar a autoenergia (para cada sabor) como sendo

$$\Sigma = -\Gamma Tr [\Gamma S(0)]$$

Nesta aproximação, a autoenergia é uma constante independente do momento externo p , de maneira que podemos identificá-la com a massa constituinte dos quarks

$$M \equiv \Sigma = -\Gamma \text{Tr} [\Gamma S(0)]$$

que é equivalente à equação de gap (50).

Para estudarmos a fenomenologia do pión, no modelo NJL, vamos introduzir na Lagrangeana (46) um termo de massa corrente para os quarks (m)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) + \frac{G_S}{2} \left[(\bar{\psi}(x) \psi(x))^2 - (\bar{\psi}(x) i\gamma_5 \vec{\tau} \psi(x))^2 \right] \quad (52)$$

em que

$$m = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$$

quebra, explicitamente, a simetria quiral e possibilita o pión adquirir massa não nula. Na ausência desse termo (m), pode-se provar que os píons não possuem massas, o que é esperado pelo teorema de Goldstone. As equações de gap mudam para

$$M_u = m_u + 8N_c G_S M_u \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] \quad (53)$$

$$M_d = m_d + 8N_c G_S M_d \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] \quad (54)$$

3.3 Matriz de Espalhamento Quark-antiquark

Num modelo de quarks, os mésons são partículas bosônicas compostas por um estado ligado de um par quark-antiquark. Para estudarmos os mésons e suas propriedades, no contexto do modelo NJL, precisamos da matriz de espalhamento quark-antiquark que pode ser obtida, resolvendo-se a chamada equação

de Bethe-Salpether, na aproximação random-phase (RPA) [25]. A equação de Bethe-Salpether é uma equação que descreve o estado de duas partículas ligadas. A representação diagramática da equação de Bethe-Salpether pode ser vista na Fig.(3).

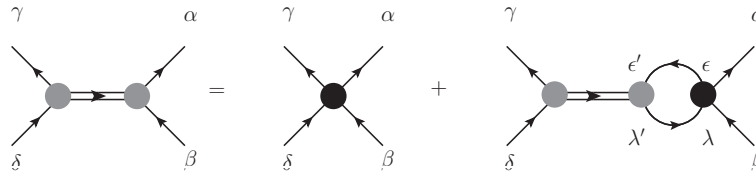


Figura 3 Representação diagramática da Equação de Bethe-Salpether.

Pela interpretação desse diagrama de Feynman, podemos escrever a seguinte equação integral

$$\mathcal{T}(q)_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \mathcal{K}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \mathcal{K}_{\alpha\beta,\lambda\epsilon} S(k+k_1)_{\epsilon\epsilon'} \right. \\ \left. \mathcal{T}(q)_{\epsilon'\lambda',\gamma\delta} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \right\} \quad (55)$$

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \sum_a \sum_{i,j} (\Gamma_i^a)_{\alpha\beta} [K_{ij}^a] (\Gamma_j^a)_{\gamma\delta}$$

$$\Gamma_i^a \equiv \Gamma^a \lambda_i$$

No caso particular da Lagrangeana (52), temos que $\Gamma^a = \{\mathbb{I}, i\gamma_5\}$ em que $a = \{S, P\}$ (escalar e pseudoescalar), $\lambda_i = \tau_i$ são as matrizes geradoras do grupo

$SU_f(2)$ (matrizes de Pauli, nesse caso)

$$K_{00}^S = G_S$$

$$K_{ij}^P = G_S \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

são as constantes de acoplamento não nulas. Explicitamente, temos

$$\mathcal{K} = K_{00}^S (\mathbb{I}\tau_0 \otimes \mathbb{I}\tau_0) + K_{ij}^P (i\gamma_5\tau_i \otimes i\gamma_5\tau_j) ,$$

em que τ_0 é a matriz identidade 2×2 .

A equação (55) pode ser resolvida por iteração conforme representado na Fig.(4).

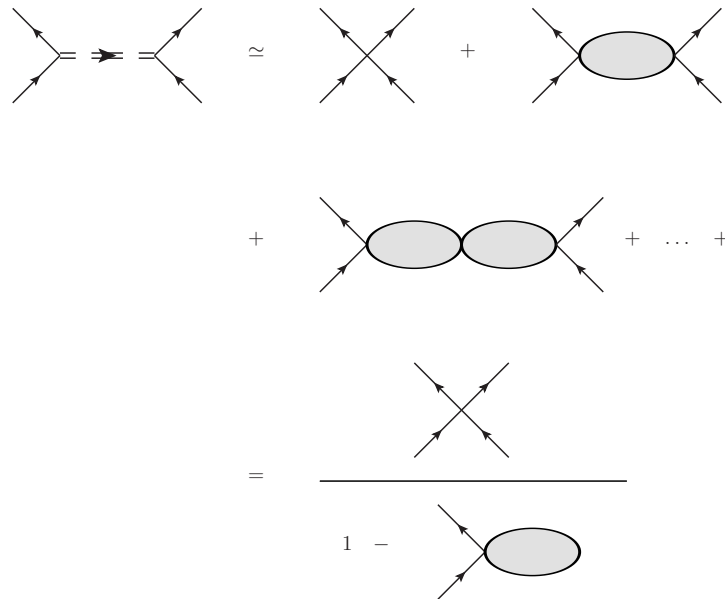


Figura 4 Aproximação random-phase para a equação de Bethe-Salpether.

A série gerada pode ser reconhecida como uma progressão geométrica cuja

interpretação é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(q)_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= \mathcal{K}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathcal{K}_{\alpha\beta,\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} \{ \mathcal{K}_{\varepsilon'\lambda',\gamma\delta} \} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \mathcal{K}_{\alpha\beta,\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} \\
&\times \left\{ \mathcal{K}_{\varepsilon'\lambda',\xi\eta} S(k'+k'_1)_{\eta\eta'} \mathcal{K}_{\eta'\xi',\gamma\delta} S(k'+k'_2)_{\xi'\xi} \right\} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Explicitando o núcleo de interação

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(q)_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= \sum_{a,c} (\Gamma_i^a)_{\alpha\beta} \{ K_{ij}^a \delta^{ac} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} K_{ik}^a (\Gamma_k^a)_{\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} (\Gamma_l^c)_{\varepsilon'\lambda'} K_{lj}^c S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \\
&+ \sum_b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} K_{ik}^a (\Gamma_k^a)_{\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} (\Gamma_l^b)_{\varepsilon'\lambda'} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \\
&\times \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} K_{lm}^b (\Gamma_m^b)_{\xi\eta} S(k'+k'_1)_{\eta\eta'} \\
&\times (\Gamma_n^c)_{\eta'\xi'} K_{nj}^c S(k'+k'_2)_{\xi'\xi} + \dots \} (\Gamma_j^c)_{\gamma\delta}
\end{aligned}$$

e definindo a matriz núcleo

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{ac} &= 2K_{ij}^a \delta^{ac} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2K_{ik}^a (\Gamma_k^a)_{\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} (\Gamma_l^c)_{\varepsilon'\lambda'} 2K_{lj}^c S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \\
&+ \sum_b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2K_{ik}^a (\Gamma_k^a)_{\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} (\Gamma_l^b)_{\varepsilon'\lambda'} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \\
&\quad \times \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} 2K_{lm}^b (\Gamma_m^b)_{\xi\eta} S(k'+k'_1)_{\eta\eta'} (\Gamma_n^c)_{\eta'\xi'} 2K_{nj}^c S(k'+k'_2)_{\xi'\xi} \\
&+ \dots,
\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\mathcal{T}(q)_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \sum_{a,c} (\Gamma_i^a)_{\alpha\beta} [M_{ij}^{ac}] (\Gamma_j^c)_{\gamma\delta}$$

ou, na forma matricial,

$$\mathcal{T}(q) = \sum_{a,b} [M_{ij}^{ab}] \left(\Gamma^a \lambda_i \otimes \Gamma^b \lambda_j \right). \quad (56)$$

Por outro lado, a matriz núcleo

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{ac} &= K_{ij}^a \delta^{ac} \\
&+ K_{ik}^a \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\Gamma_k^a)_{\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} (\Gamma_l^c)_{\varepsilon'\lambda'} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \right] K_{lj}^c \\
&+ K_{ik}^a \left[\sum_b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\Gamma_k^a)_{\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} (\Gamma_l^b)_{\varepsilon'\lambda'} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \right] \\
&\quad \times K_{lm}^b \left[\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} (\Gamma_m^b)_{\xi\eta} S(k'+k'_1)_{\eta\eta'} (\Gamma_n^c)_{\eta'\xi'} S(k'+k'_2)_{\xi'\xi} \right] K_{nj}^c \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

pode ser reorganizada numa forma conveniente

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{ac} &= K_{ij}^a \delta^{ac} \\
&+ K_{ik}^a \delta^{ad} \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\Gamma_k^d)_{\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} \right. \\
&\quad \left. \times (\Gamma_l^e)_{\varepsilon'\lambda'} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \right] K_{lj}^e \delta^{ce} \\
&+ K_{ik}^a \delta^{af} \left[\sum_b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\Gamma_k^f)_{\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} (\Gamma_l^g)_{\varepsilon'\lambda'} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \right] \\
&\quad \times K_{lm}^b \delta^{bg} \left[\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} (\Gamma_m^b)_{\xi\eta} S(k'+k'_1)_{\eta\eta'} (\Gamma_n^h)_{\eta'\xi'} S(k'+k'_2)_{\xi'\xi} \right] \\
&\quad \times K_{nj}^c \delta^{ch} + \dots
\end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{ac} &= K_{ij}^a \delta^{ac} \\
\Pi_{ij}^{ab} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\Gamma_i^a)_{\lambda\varepsilon} S(k+k_1)_{\varepsilon\varepsilon'} (\Gamma_j^b)_{\varepsilon'\lambda'} S(k+k_2)_{\lambda'\lambda} \\
&= N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ (\Gamma^a \lambda_i) S(k+k_1) (\Gamma^b \lambda_j) S(k+k_2) \right\}
\end{aligned}$$

em que o traço Tr é tomado sobre os índices de sabores e de Dirac e Π é a chamada função polarização, temos

$$M_{ij}^{ac} = C_{ij}^{ac} + C_{ik}^{ad} \left[\Pi_{kl}^{de} \right] C_{lj}^{ec} + C_{ik}^{af} \left[\Pi_{kl}^{fg} \right] C_{lm}^{gb} \left[\Pi_{mn}^{bh} \right] C_{nj}^{hc} + \dots$$

Definimos também

$$\left[\Pi_{kl}^{de} \right] C_{lj}^{ec} \equiv \mathcal{J}_{kj}^{dc}$$

podemos escrever M como

$$M_{ij}^{ac} = C_{ij}^{ac} + C_{ik}^{ad} \mathcal{J}_{kj}^{dc} + C_{ik}^{af} \mathcal{J}_{km}^{fb} \mathcal{J}_{mj}^{bc} + \dots$$

Explicitando a soma nos índices d e k obtemos

$$M_{ij}^{ac} = \sum_d \sum_k C_{ik}^{ad} \left\{ \delta_{kj}^{dc} + \mathcal{J}_{kj}^{dc} + \sum_b \sum_m \mathcal{J}_{km}^{db} \mathcal{J}_{mj}^{bc} + \dots \right\}$$

Observando que

$$\sum_b \sum_m \mathcal{J}_{km}^{db} \mathcal{J}_{mj}^{bc} = (\mathcal{J}^2)_{kj}^{dc}$$

temos

$$M_{ij}^{ac} = \sum_d \sum_k C_{ik}^{ad} \left\{ \delta_{kj}^{dc} + \mathcal{J}_{kj}^{dc} + (\mathcal{J}^2)_{kj}^{dc} + \dots \right\}$$

$$\begin{aligned} M_{ij}^{ac} &= C_{ij}^{ac} \left\{ \mathbb{I} + \mathcal{J} + (\mathcal{J}^2) + \dots \right\}_{jj}^{cc} \quad (\text{sem soma em } j \text{ e } c) \\ &+ \sum_{d \neq c} C_{ij}^{ad} \left\{ \mathcal{J} (\mathbb{I} + \mathcal{J} + (\mathcal{J}^2) + \dots) \right\}_{jj}^{dc} \quad (\text{sem soma em } j) \\ &+ \sum_d \sum_{k \neq j} C_{ik}^{ad} \left\{ \mathcal{J} (\mathbb{I} + \mathcal{J} + (\mathcal{J}^2) + \dots) \right\}_{kj}^{dc} \end{aligned}$$

Note que, desta soma infinita, temos uma série geométrica do tipo

$$\mathbb{I} + \mathcal{J} + \mathcal{J}^2 + \dots = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} - \mathcal{J}} = (\mathbb{I} - \mathcal{J})^{-1}$$

Assim, a matriz M , que compõe a matriz de espalhamento, pode ser escrita na

forma

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{ac} &= C_{ij}^{ac} \left[(\mathbb{I} - \mathcal{J})^{-1} \right]_{jj}^{cc} \quad (\text{sem soma em } c \text{ e } j) \\
&+ \sum_{d \neq c} C_{ij}^{ad} \left[\mathcal{J} (\mathbb{I} - \mathcal{J})^{-1} \right]_{jj}^{dc} \quad (\text{sem soma em } j) \\
&+ \sum_d \sum_{k \neq j} C_{ik}^{ad} \left[\mathcal{J} (\mathbb{I} - \mathcal{J})^{-1} \right]_{kj}^{dc} \quad (57)
\end{aligned}$$

Por meio da matriz de espalhamento, calculada nessa seção, estudaremos a fenomenologia dos mésons nas próximas seções.

3.4 Mésons Pseudoescalares - Píons

Píons são partículas pseudoescalares (spin 0 e paridade negativa) formadas de um estado ligado quark-antiquark com os sabores *up* e *down*. No espaço de isospin, os píons formam um tripleto ($I = 1$) com os canais apropriados sendo selecionados pelas matrizes de Pauli τ_i

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi^0 \rightarrow \frac{1}{2} (\bar{u}u - \bar{d}d) & \tau_3 \\ \pi^+ \rightarrow \bar{d}u & \tau^- \\ \pi^- \rightarrow d\bar{u} & \tau^+ \end{array} \right. ,$$

em que definimos uma combinação conveniente dos τ 's

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_1 + i\tau_2) \\ \tau^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_1 - i\tau_2) \end{array} \right.$$

Uma interação mínima local que poderia descrever o acoplamento do campo dos pions $\vec{\pi}$ aos campos dos quarks pode ser dado pela Lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_{\pi qq}^{eff} = g_{\pi qq} \bar{\psi}(x) i\gamma_5 \vec{\tau} \psi(x) \cdot \vec{\pi}$$

em que $\bar{\psi}(x) i\gamma_5 \vec{\tau} \psi(x)$ é a corrente conservada de isospin e $g_{\pi qq}$ é a constante de acoplamento pion-quark-antiquark efetiva. É conveniente decompor o produto escalar no espaço de isospin como

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} = \tau^+ \pi^+ + \tau^- \pi^- + \tau_3 \pi^0$$

em que definimos os operadores

$$\begin{cases} \pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 - i\pi_2) \\ \pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 + i\pi_2) \end{cases} \quad \tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Podemos escrever então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi qq}^{eff} &= g_{\pi^+ qq} \bar{\psi}(x) i\gamma_5 \tau^+ \psi(x) \pi^+ \\ &+ g_{\pi^- qq} \bar{\psi}(x) i\gamma_5 \tau^- \psi(x) \pi^- \\ &+ g_{\pi^0 qq} \bar{\psi}(x) i\gamma_5 \tau_3 \psi(x) \pi^0 \end{aligned}$$

Assim, pelas definições das matrizes de Pauli, vemos que

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x) \tau^+ \psi(x) &= \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \bar{u}d \\ \bar{\psi}(x) \tau^- \psi(x) &= \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = u\bar{d} \\ \bar{\psi}(x) \tau_3 \psi(x) &= \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \bar{u}u - \bar{d}d\end{aligned}$$

Então, a Lagrangeana efetiva pode ser colocada numa forma explícita dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi qq}^{eff} &= g_{\pi^+ qq} \bar{u}(x) i\gamma_5 d(x) \pi^+ \\ &+ g_{\pi^- qq} u(x) i\gamma_5 \bar{d}(x) \pi^- \\ &+ g_{\pi^0 qq} [\bar{u}(x) i\gamma_5 u(x) - \bar{d}(x) i\gamma_5 d(x)] \pi^0\end{aligned}$$

Por exemplo, podemos construir a matriz de espalhamento quark-antiquark $ud \rightarrow u'd'$, conforme ilustra a Fig.(5).

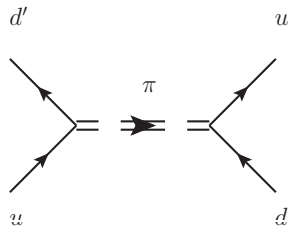


Figura 5 Diagrama de espalhamento de $ud \rightarrow u'd'$ via troca de um pión positivo.

Pelas regras de Feynman, podemos obter uma interação efetiva fenomeno-

lógica para a troca de um π^+ , cortando as pernas externas,

$$\mathcal{T}_{\pi^+}(p) \approx (ig_{\pi-qq})^2 (i\gamma_5\tau^-) \frac{1}{k^2 - m_{\pi^+}^2} (i\gamma_5\tau^+) \quad (59)$$

em que $m_{\pi^+}^2$ é a massa do pión. De maneira semelhante podemos construir interações efetivas para os pions neutro e negativamente carregado.

3.4.1 Pión Carregado

No modelo NJL, a matriz de espalhamento quark-antiquark $\mathcal{T}(p)$, no canal do pión com carga elétrica positiva, é dada pela expressão (56) para $\Gamma_i = i\gamma_5\tau^-$ e $\Gamma_j = i\gamma_5\tau^+$

$$\mathcal{T}_{\pi^+}(p) = i\gamma_5\tau^- [M_{\pi^+}^{PP}(p)] i\gamma_5\tau^+$$

em que (veja Eq. (57))

$$M_{\pi^+}^{PP}(p) = \frac{G_S}{[1 - G_S\Pi_{\pi^+}^{PP}(p)]} \quad (60)$$

A função polarização $\Pi_{\pi^+}^{PP}$ é definida por

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi^+}^{PP} &= \Pi_{\pi^+}(i\gamma_5, i\gamma_5) \\ &= iN_c \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_5 (\tau^-)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k + k_1) \right. \\ &\quad \left. \times i\gamma_5 (\tau^+)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k + k_2) \right\} \end{aligned}$$

Somando sobre os índices de sabor temos

$$\begin{aligned}\Pi_{\pi^+}^{PP} &= 2iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_5 S^u(k+k_1) i\gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\ &= -2iN_c [T^{PP}(M_u, M_d)]\end{aligned}$$

A amplitude $T^{PP}(M_u, M_d)$ foi definida e calculada na seção (2.1). O resultado é

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{PP}(M_u, M_d) &= -2 \left\{ [I_{quad}^{(4)}(M_u^2)] + [I_{quad}^{(4)}(M_d^2)] \right\} \\ &\quad + 2 [p^2 - (M_u - M_d)^2] \\ &\quad \times \left\{ [I_{log}^{(4)}(\lambda^2)] - \frac{i}{16\pi^2} [\xi_0^{(0)}(p^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] \right\}\end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}\Pi_{\pi^+}^{PP}(p^2) &= 4N_c \left\{ [i I_{quad}^{(4)}(M_u^2)] + [i I_{quad}^{(4)}(M_d^2)] \right\} \\ &\quad - 4N_c [p^2 - (M_u - M_d)^2] \\ &\quad \times \left\{ [i I_{log}^{(4)}(\lambda^2)] + \frac{1}{16\pi^2} [\xi_0^{(0)}(p^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] \right\} \quad (61)\end{aligned}$$

Comparando as expressões (60) e (59), podemos definir a massa do pión (m_{π^+}) como sendo o polo da matriz de espalhamento (60). Com isso, a solução da equação

$$1 - G_S \Pi_{\pi^+}^{PP}(p^2 = m_{\pi^+}^2) = 0 \quad (62)$$

determina a massa do pión. Explicitamente

$$\begin{aligned}
0 = & 1 - 4N_c G_S \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] \right\} \\
& + 4N_c G_S \left[m_{\pi^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \\
& \times \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \quad (63)
\end{aligned}$$

Usando (53) e (54) na equação acima temos

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2} \left(\frac{m_u}{M_u} + \frac{m_d}{M_d} \right) \\
& + 4N_c G_S \left[m_{\pi^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \\
& \times \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

ou de outra maneira

$$\begin{aligned}
m_{\pi^+}^2 = & (M_u - M_d)^2 \\
& - \frac{1}{8N_c G_S} \left(\frac{m_u}{M_u} + \frac{m_d}{M_d} \right) \\
& \times \frac{1}{\left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, o resíduo do polo pode ser identificado com a constante de acoplamento $g_{\pi^+ qq}$. Primeiro expandimos o denominador de (60)

$$f(p^2) = 1 - G_S \Pi_{\pi^+}^{PP}(p^2)$$

em torno do polo $p^2 = m_{\pi^+}^2$

$$\begin{aligned} f(p^2) &= f(m_{\pi^+}^2) + \left. \frac{\partial f(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_{\pi^+}^2} (p^2 - m_{\pi^+}^2) + \dots \\ &= -G_S \left. \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{PP}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_{\pi^+}^2} (p^2 - m_{\pi^+}^2) + \dots \end{aligned}$$

pois $f(m_{\pi^+}^2) = 0$ é o polo, tal que

$$M_{\pi^+}^{PP}(p) \approx - \frac{\left(\left. \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{PP}(p^2)}{\partial p^2} \right)_{p^2=m_{\pi^+}^2}^{-1} \right)}{(p^2 - m_{\pi^+}^2)}$$

e

$$\mathcal{T}_{\pi^+}(p) \approx - \left(\left. \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{PP}(p^2)}{\partial p^2} \right)_{p^2=m_{\pi^+}^2} \right)^{-1} (i\gamma_5) \tau^- \frac{\otimes}{(p^2 - m_{\pi^+}^2)} (i\gamma_5) \tau^+$$

Então, temos

$$(g_{\pi^+ q q})^{-2} = \left. \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{PP}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_{\pi^+}^2}$$

Note que $\frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{PP}(p^2)}{\partial p^2}$ pode ser obtido derivando (61) em relação a p^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{PP}(p^2)}{\partial p^2} &= -4N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad - 4N_c \left[p^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \xi_0^{(0)}(p^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right\} \end{aligned}$$

ou

$$(g_{\pi^+ qq})^{-2} = -4N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} - \frac{N_c}{4\pi^2} \left[m_{\pi^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \left[Y_1(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2) \right] \quad (64)$$

em que definimos

$$Y_1(p^2, M_u^2, M_d^2) \equiv \frac{\partial}{\partial p^2} \xi_0^{(0)}(p^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2)$$

O pión, também, é caracterizado por uma constante de decaimento (f_{π^+}) que pode ser calculada do decaimento fraco $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$ cujo elemento de matriz é dado por

$$\langle 0 | A_\mu^i(x) | \pi^j(p) \rangle = i f_{\pi^+}(p^2) p_\mu \delta_{ij} e^{-ipx}$$

em que $A_\mu^i(x)$ é a corrente axial e $|\pi^j(p)\rangle$ é o estado de um pión com momento p . Os índices i e j descrevem as componentes do pión no espaço dos sabores. Diagramaticamente, podemos representar pela Fig.(6).

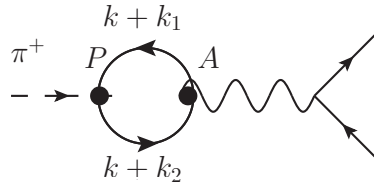


Figura 6 Decaimento fraco do pión positivamente carregado.

Das regras de Feynman temos

$$i f_{\pi^+ p_\mu} \delta_{ij} = N_c g_{\pi^+ qq} \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i \gamma_\mu \gamma_5 \left(\frac{\tau_i}{2} \right)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\ \left. \times i \gamma_5 (\tau_j)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\}$$

Para seleccionar o canal do pión positivamente carregado escolhemos $\tau_i = \tau^-$ e $\tau_j = \tau^+$ que são as matrizes (58)

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e somamos sobre os índices de sabor

$$f_{\pi^+ p_\mu} = -i N_c g_{\pi^+ qq} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i \gamma_\mu \gamma_5 \left(\frac{\tau^-}{2} \right)_{du} S^u(k+k_1) \right. \\ \left. \times i \gamma_5 (\tau^+)_{ud} S^d(k+k_2) \right\}$$

$$f_{\pi^+} (g_{\pi^+ qq})^{-1} = i N_c \frac{\widehat{p}^\mu}{\sqrt{p^2}} [\mathcal{T}_\mu^{AP}(M_u, M_d)]$$

com

$$\widehat{p}^\mu = \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}}$$

Definindo a função polarização $\Pi_{\pi^+}^{AP}$

$$\Pi_{\pi^+}^{AP} = \Pi_{\pi^+} \left(i \widehat{p} \gamma_5, i \gamma_5 \right) \\ = -2i N_c \widehat{p}^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 S^u(k+k_1) \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\ = -2i N_c \widehat{p}^\mu [\mathcal{T}_\mu^{AP}(M_u, M_d)]$$

temos (com $p^2 = m_{\pi^+}^2$)

$$f_{\pi^+} (g_{\pi^+ qq})^{-1} = -\frac{1}{2m_{\pi^+}} [\Pi_{\pi^+}^{AP} (m_{\pi^+}^2)] \quad (65)$$

A amplitude física $\mathcal{T}_\mu^{AP} (M_u, M_d)$ é dada pela Eq. (40) tal que

$$\begin{aligned} [\Pi_{\pi^+}^{AP} (p^2)] &= 8N_c M_u \sqrt{p^2} \left\{ [i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2)] + \frac{1}{16\pi^2} [\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] \right\} \\ &\quad - 4N_c (M_u - M_d) \sqrt{p^2} \\ &\quad \times \left\{ [i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2)] + \frac{1}{8\pi^2} [\xi_1^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] \right\} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} f_{\pi^+} (g_{\pi^+ qq})^{-1} &= -2N_c (M_u + M_d) \times \\ &\quad \left\{ [i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2)] + \frac{1}{16\pi^2} [\xi_0^{(0)} (m_{\pi^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] \right\} \\ &\quad - \frac{N_c}{8\pi^2} (M_u - M_d) \times \\ &\quad \left\{ [\xi_0^{(0)} (m_{\pi^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] - 2 [\xi_1^{(0)} (m_{\pi^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] \right\} \end{aligned}$$

Outra equação útil pode ser obtida se lembrarmos da relação entre funções de Green

$$p^\mu [\mathcal{T}_\mu^{AP} (p^2)] = -[\mathcal{T}^S (m_1)] - [\mathcal{T}^S (m_2)] - (m_2 + m_1) [\mathcal{T}^{PP} (p^2)]$$

em que

$$T^S (m_1) = 4m_1 [I_{quad}^{(4)} (m_1^2)]$$

Então

$$p^\mu [T_\mu^{AP}(p^2)] = -4M_u [I_{quad}^{(4)}(M_u^2)] - 4M_d [I_{quad}^{(4)}(M_d^2)] \\ - (M_u + M_d) [T^{PP}(p^2)]$$

Porém das Eqs. (53), (54), (62) e (65), verificamos que

$$p^\mu [T_\mu^{AP}(m_{\pi^+}^2)] = -\frac{i}{N_c} m_{\pi^+}^2 f_{\pi^+} (g_{\pi^+ qq})^{-1} \\ [T^{PP}(m_{\pi^+}^2)] = -\frac{1}{2iN_c G_S} \\ [i I_{quad}^{(4)}(M_f^2)] = \frac{1}{8N_c G_S} \left(1 - \frac{m_f}{M_f}\right)$$

e, assim, a equação

$$\frac{m_{\pi^+}^2 f_{\pi^+}}{g_{\pi^+ qq}} = \frac{(m_u + m_d)}{2G_S} = \frac{(m_u + m_d) (\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle)}{(m_u + m_d) - (M_u + M_d)}$$

é uma outra equação alternativa interessante que relaciona as quantidades fenomenológicas do pión carregado com as massas e os condensados dos quarks.

3.4.2 Pión Neutro

As propriedades fenomenológicas do pión neutro podem ser calculadas de maneira análoga ao procedimento que adotamos para o pión carregado. Primeiro encontramos a matriz de espalhamento quark-antiquark $\mathcal{T}(p)$, no canal do pión neutro, que é selecionado, escolhendo-se $\Gamma_i = i\gamma_5\tau_3$ e $\Gamma_j = i\gamma_5\tau_3$

$$\mathcal{T}_{\pi^0}(p^2) = i\gamma_5\tau_3 [M_{\pi^0}^{PP}(p^2)] i\gamma_5\tau_3 \\ M_{\pi^0}^{PP}(p^2) = \frac{G_S}{[1 - G_S \Pi_{\pi^0}^{PP}(p^2)]}$$

A função polarização, nesse caso, é definida por

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi^0}^{PP}(p^2) &= -iN_c \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_5 (\tau_3)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\
&\quad \left. \times i\gamma_5 (\tau_3)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\
&= -iN_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 S^u(k+k_1) \gamma_5 S^u(k+k_2) \right\} \\
&\quad - iN_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 S^d(k+k_1) \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\
&= -iN_c [T^{PP}(M_u, M_u) + T^{PP}(M_d, M_d)]
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
T^{PP}(M_f, M_f) &= -4 \left[I_{quad}^{(4)}(M_f^2) \right] \\
&\quad + 2p^2 \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} [Z_0(p^2, M_f^2, M_f^2; \lambda^2)] \right\}
\end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi^0}^{PP}(p^2) &= 4N_c \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] \right\} \\
&\quad - 2N_c p^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&\quad - 2N_c p^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \quad (66)
\end{aligned}$$

O polo da matriz de espalhamento dada pela equação

$$1 - G_S \Pi_{\pi^0}^{PP}(p^2 = m_{\pi^0}^2) = 0$$

determina a massa do pión neutro. De uma forma explícita temos

$$\begin{aligned}
0 = & 1 - 4N_c G_S \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] \right\} \\
& + 2N_c G_S m_{\pi^0}^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& + 2N_c G_S m_{\pi^0}^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \quad (67)
\end{aligned}$$

Usando (53) e (54) na equação acima temos

$$\begin{aligned}
m_{\pi^0}^2 = & -\frac{1}{4N_c G_S} \left(\frac{m_u}{M_u} + \frac{m_d}{M_d} \right) \times \\
& \frac{1}{\left\{ 2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\begin{array}{l} \xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2, M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \\ + \xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2, M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \end{array} \right] \right\}}
\end{aligned}$$

Observamos que, se $m_u = m_d = 0$, o pión neutro não tem massa, como esperado pelo teorema de Goldstone.

O resíduo do polo, por sua vez, é identificado com a constante de acoplamento $g_{\pi^0 qq}$. Então, temos

$$(g_{\pi^0 qq})^{-2} = \left. \frac{\partial \Pi_{\pi^0}^{PP}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_{\pi^0}^2}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\pi^0}^{PP}(p^2)}{\partial p^2} = & -2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & - 2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & - 2N_c p^2 \left\{ \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & - 2N_c p^2 \left\{ \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} (g_{\pi^0 qq})^{-2} = & -2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2, M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & - 2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2, M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & - \frac{N_c}{8\pi^2} m_{\pi^0}^2 \left[Y_1(m_{\pi^0}^2, M_u^2, M_u^2) + Y_1(m_{\pi^0}^2, M_d^2, M_d^2) \right] \quad (68) \end{aligned}$$

A constante de decaimento f_{π^0} é dada por

$$\begin{aligned} i f_{\pi^0} p_\mu \delta_{ij} = & N_c g_{\pi^0 qq} \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i \gamma_\mu \gamma_5 \left(\frac{\tau_3}{2} \right)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\ & \left. \times i \gamma_5 (\tau_3)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \end{aligned}$$

Somamos sobre os índices de sabor temos

$$\begin{aligned} i f_{\pi^0} p_\mu = & \frac{i}{2} N_c g_{\pi^0 qq} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i \gamma_\mu \gamma_5 S^u(k+k_1) \gamma_5 S^u(k+k_2) \right\} \\ & + \frac{i}{2} N_c g_{\pi^0 qq} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i \gamma_\mu \gamma_5 S^d(k+k_1) \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \end{aligned}$$

ou

$$f_{\pi^0} = \frac{i}{2} N_c g_{\pi^0 qq} \frac{p^\mu}{p^2} [T_\mu^{AP}(M_u, M_u) + T_\mu^{AP}(M_d, M_d)]$$

em que a amplitude física $\mathcal{T}_\mu^{AP}(M_f, M_f)$ é dada por

$$p^\mu \mathcal{T}_\mu^{AP}(M_f, M_f) = -4p^2 M_f \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_f^2, M_f^2; \lambda^2) \right] \right\}$$

Assim

$$\begin{aligned} f_{\pi^0} (g_{\pi^0 qq})^{-1} &= -2N_c M_u \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad - 2N_c M_d \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (69)$$

3.5 Méson Escalar - Sigma

Num modelo de quarks, o méson sigma (σ) é considerado, por hipótese, um estado ligado de um quark-antiquark com paridade positiva e isospin $I = 0$ (isosinglete) associado com a densidade escalar $\bar{\psi}(x) \psi(x)$. A interação efetiva mais simples, que podemos formular e acopla um campo escalar $\sigma(x)$ aos campos dos quarks $\psi(x)$, é dada pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{eff} = g_{\sigma qq} \bar{\psi}(x) \psi(x) \sigma(x)$$

em que $g_{\sigma qq}$ é a constante efetiva de acoplamento. Em analogia ao procedimento, seguido para os píons, para obtermos as propriedades fenomenológicas do méson sigma, no modelo NJL, calculamos a matriz de espalhamento, no setor escalar,

dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\sigma(p^2) &= \hat{\mathbf{1}} [M_\sigma^{SS}(p^2)] \hat{\mathbf{1}} \\ M_\sigma^{SS}(p^2) &= \frac{G_S}{[1 - G_S \Pi_\sigma^{SS}(p^2)]}\end{aligned}$$

A equação que define a massa do sigma é dado pelo polo de $\mathcal{T}_\sigma(p^2)$

$$1 - G_S \Pi_\sigma^{SS}(p^2 = m_\sigma^2) = 0 \quad (70)$$

em que definimos a função polarização escalar

$$\begin{aligned}\Pi_\sigma^{SS} &= iN_c \sum_{f_1, f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{\mathbf{1}}(\tau_0)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \hat{\mathbf{1}}(\tau_0)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\ &= iN_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ S^u(k+k_1) S^u(k+k_2) \right\} \\ &\quad + iN_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ S^d(k+k_1) S^d(k+k_2) \right\} \\ &= iN_c [T^{SS}(M_u, M_u) + T^{SS}(M_d, M_d)]\end{aligned}$$

A amplitude escalar T^{SS} foi calculada e tratada na seção (2.1) e o resultado é

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{SS}(M_f, M_f) &= 4 \left[I_{quad}^{(4)}(M_f^2) \right. \\ &\quad \left. - 2(p^2 - 4M_f^2) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_f^2, M_f^2; \lambda^2) \right] \right\} \right]\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}\Pi_\sigma^{SS} &= 4N_c \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] \right\} \\ &\quad - 2N_c (p^2 - 4M_u^2) \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad - 2N_c (p^2 - 4M_d^2) \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}\end{aligned}$$

Pela Eq. (70) temos

$$\begin{aligned}0 &= 1 - 4N_c G_S \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] \right\} \\ &\quad + 2N_c G_S (m_\sigma^2 - 4M_u^2) \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_\sigma^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad + 2N_c G_S (m_\sigma^2 - 4M_d^2) \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_\sigma^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}\end{aligned}\tag{71}$$

A equação que define a constante de acoplamento do sigma é

$$g_{\sigma qq}^2 = \left(\frac{\partial \Pi_\sigma^{SS}(p^2)}{\partial p^2} \right)^{-1} \Bigg|_{p^2=m_\sigma^2}$$

em que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_\sigma^{SS}(p^2)}{\partial p^2} &= -2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad - 2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{N_c}{8\pi^2} (p^2 - 4M_u^2) [Y_1(p^2; M_u^2, M_u^2)] \\ &\quad - \frac{N_c}{8\pi^2} (p^2 - 4M_d^2) [Y_1(p^2; M_d^2, M_d^2)]\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
g_{\sigma qq}^{-2} = & -2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_\sigma^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - 2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_\sigma^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - \frac{N_c}{8\pi^2} (m_\sigma^2 - 4M_u^2) [Y_1 (m_\sigma^2; M_u^2, M_u^2)] \\
& - \frac{N_c}{8\pi^2} (m_\sigma^2 - 4M_d^2) [Y_1 (m_\sigma^2; M_d^2, M_d^2)] \tag{72}
\end{aligned}$$

Na próxima seção, vamos mostrar que podemos obter as massas constituintes dos quarks por equações que definem as relações de escala e de uma condição crítica existente nas suas soluções.

3.6 A Massa Constituinte dos Quarks

Nas seções anteriores, calculamos as amplitudes e as equações necessárias para a descrição da fenomenologia dos mésons pions e sigma dentro da estratégia de cálculo que adotamos em nosso trabalho. Nos resultados finais, ainda, restaram dois objetos divergentes básicos $I_{\log}^{(4)} (M^2)$ e $I_{quad}^{(4)} (M^2)$. Num método de regularização usual, todas as integrais, divergentes ou não, são integradas após a modificação do integrando. O resultado é uma função dos parâmetros de regularização, que são arbitrários. Porém, o princípio básico da estratégia que adotamos é nunca integrar de fato uma integral que é divergente. Em vez disso, escolhemos parametrizar $I_{\log}^{(4)} (M^2)$ e $I_{quad}^{(4)} (M^2)$, usando as quantidades físicas f_π e $\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle$ conforme descrevemos a seguir. Primeiro relembremos que o condensado é definido pela Eq. (51)

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = -4N_c M_f \left[i I_{quad}^{(4)} (M_f^2) \right]$$

em que $f = u, d$ é o índice de sabor. Logo, podemos escrever a relação

$$\left[i I_{quad}^{(4)}(M_f^2) \right] = -\frac{\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle}{4N_c M_f}, \quad (73)$$

que vai ser tomada como a parametrização para $I_{quad}^{(4)}(M_f^2)$.

Para encontrar uma parametrização para $I_{log}^{(4)}(M_f^2)$, consideremos as equações para o decaimento do pión e a constante de acoplamento

$$\begin{aligned} f_{\pi^+} (g_{\pi^+ qq})^{-1} &= 2N_c (M_u + M_d) \\ &\times \left\{ \left[i I_{log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &- \frac{N_c}{4\pi^2} (M_u - M_d) \\ &\times \left[\xi_1^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - \frac{1}{2} \xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g_{\pi^+ qq})^{-2} &= -4N_c \left\{ \left[i I_{log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &- \frac{N_c}{4\pi^2} \left[m_{\pi^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \left[Y_1(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2) \right] \end{aligned}$$

Podemos usar as equações acima para eliminar $(g_{\pi^+ qq})$ e obter a parametrização para $i I_{log}^{(4)}(\lambda^2)$ como

$$\begin{aligned} \left[i I_{log}^{(4)}(\lambda^2) \right] &= -\frac{f_{\pi^+}^2}{2N_c (M_u + M_d)^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{N_c}{4\pi^2} \frac{(M_u + M_d)^2 h}{f_{\pi^+}^2}} \right) \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{(M_u - M_d)^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{\pi^+}^2} \right] \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\ &- \frac{1}{16\pi^2} \frac{(M_u - M_d)^2}{m_{\pi^+}^2} \left[\xi_0^{(0)}(0, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \end{aligned}$$

em que

$$h = \left[m_{\pi^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \left[Y_1 (m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2) \right] \\ + \frac{(M_u - M_d)^2}{m_{\pi^+}^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - \xi_0^{(0)} (0, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right]$$

Para obter a parametrização de $i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2)$ acima com o h organizado dessa forma, utilizamos a identidade

$$\left[\xi_1^{(0)} (m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - \frac{1}{2} \xi_0^{(0)} (m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\ = \frac{(M_u^2 - M_d^2)}{2m_{\pi^+}^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - \xi_0^{(0)} (0, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right]$$

por meio de propriedades que emergem das funções $\xi_i^{(0)}$ (APÊNDICE B - Eq. (B2)). Daqui por diante, sempre que encontrarmos os objetos $I_{\log}^{(4)} (\lambda^2)$ e $I_{quad}^{(4)} (M_f^2)$ iremos substituí-los por suas respectivas parametrizações.

3.6.1 Simetria de isospin exata

Consideremos primeiro o caso de simetria de isospin exata em que $m_u = m_d = m$ e $M_u = M_d = M$, ou seja, massas iguais (ver Refs. [16],[17]). Nessa situação, a relação de escala, envolvendo $I_{quad}^{(4)} (M^2)$ e $I_{\log}^{(4)} (M^2)$, é dada pela expressão (21) com $\lambda^2 = M^2$

$$\left[i I_{quad}^{(4)} (M^2) \right] - M^2 \left[i I_{\log}^{(4)} (M^2) \right] + \frac{M^2}{16\pi^2} - C = 0 \quad (74)$$

e a parametrização para $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ assume a forma

$$\begin{aligned} \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] = & -\frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M^2, M^2; \lambda^2) \right] \\ & - \frac{f_{\pi^+}^2}{8N_c M^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{N_c}{\pi^2} \frac{m_{\pi^+}^2}{f_{\pi^+}^2} M^2 [Y_1(m_{\pi^+}^2, M^2, M^2)]} \right) \end{aligned} \quad (75)$$

Substituindo (75) em (74) obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{f_{\pi^+}^2}{8N_c} M \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{N_c}{\pi^2} \frac{M^2 m_{\pi^+}^2}{f_{\pi^+}^2} [Y_1(m_{\pi^+}^2, M^2, M^2)]} \right\} \\ & + \frac{M^3}{16\pi^2} \left[1 + \xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2; M^2, M^2; M^2) \right] - CM - \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N_c} \end{aligned} \quad (76)$$

Esta é uma equação central em nossa construção de uma versão preditível do modelo NJL. Por meio dessa equação, é possível obter a massa constituinte dos quarks se soubermos os valores fenomenológicos de f_{π} , m_{π} e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Entretanto, note que ainda resta o parâmetro arbitrário C nesta equação, que independe de M por construção. Será que é possível determiná-lo de uma maneira unívoca? Para responder essa pergunta, plotamos num gráfico $M \times C$ as soluções da Eq. (76) para todos os valores possíveis de C . Como parâmetros de entrada, adotamos os valores experimentais bem conhecidos de $f_{\pi^+} = 92.4 \text{ MeV}$, $m_{\pi^+} = 139.6 \text{ MeV}$ e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (-250.0 \text{ MeV})^3$, sendo este último um valor estimado de cálculos da QCD. Podemos ver o resultado representado na Fig.(7).

Podemos observar que a Eq. (76) nos fornece dois valores reais distintos para a massa constituinte M exceto num único ponto. Esse ponto denominamos de ponto crítico (C_0) uma vez que para valores $C < C_0$ não temos soluções físicas $M > 0$. Para $C > C_0$ temos sempre duas soluções para todo C , uma solução

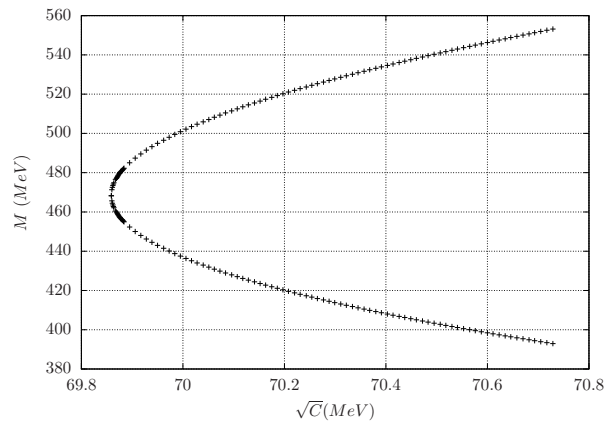


Figura 7 Massa constituinte dos quarks em função do parâmetro C .

que cresce e outra que decresce. Esse comportamento das soluções nos sugere fortemente que o valor que temos de adotar, para o parâmetro C , é o valor crítico. A razão é clara, somente em $C = C_0$ temos uma massa constituinte única e, portanto uma predição para os observáveis físicos, também, unívoca. Quantitativamente, com os valores adotados para os parâmetros de entrada, temos que, no ponto crítico, $M_0 = 468.4 \text{ MeV}$, que é um valor que está dentro da faixa de valores comumente encontrados na literatura do assunto.

É interessante e, também, instrutivo notar que podemos obter uma solução de forma analítica da Eq. (76). Para tal, podemos usar as seguintes aproximações para as funções finitas (APÊNDICE B - Eq. (B3))

$$\begin{aligned} \xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M^2, M^2; M^2) &\simeq -\frac{m_{\pi^+}^2}{6M^2} \\ Y_1(m_{\pi^+}^2, M^2, M^2) &\simeq -\frac{1}{6M^2} \end{aligned}$$

para escrevermos (76) como uma equação algébrica cúbica em M

$$M^3 + \left[\frac{2\pi^2}{N_c} f_\pi^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{N_c}{6\pi^2} \frac{m_{\pi^+}^2}{f_{\pi^+}^2}} \right) - \frac{m_{\pi^+}^2}{6\pi^2} - 16\pi^2 C \right] M - \frac{4\pi^2}{N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$$

Numa forma compacta temos

$$M^3 + \alpha M + \beta = 0 \quad (77)$$

com

$$\alpha = \frac{2\pi^2}{N_c} f_\pi^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{N_c}{6\pi^2} \frac{m_{\pi^+}^2}{f_{\pi^+}^2}} \right) - \frac{m_{\pi^+}^2}{6\pi^2} - 16\pi^2 C$$

$$\beta = -\frac{4\pi^2}{N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle$$

Como é bem conhecido, para α e β reais, a Eq. (77) possui três soluções independentes, que chamaremos de M_1 , M_2 e M_3 as quais podem ser escritas na forma

$$M_1 = S + T \quad (78)$$

$$M_2 = -\frac{1}{2}(S + T) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T) \quad (79)$$

$$M_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T) \quad (80)$$

em que definimos as quantidades

$$S = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\Delta}}$$

$$T = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

$$\Delta = \frac{\alpha^3}{27} + \frac{\beta^2}{4}$$

Temos três situações distintas, dependendo dos valores assumidos por Δ , as quais passamos a estudar em detalhes. Primeiramente, para $\Delta > 0$ vemos que $S \neq T$ tal que as soluções M_2 e M_3 são complexas e, portanto sem significado físico. Também notamos que $T < 0$ e $\|S\| < \|T\|$ de modo que $M_1 < 0$. Como as soluções M_1 , M_2 e M_3 são interpretadas como as massas constituintes dos quarks, somente soluções positivas e reais são aceitáveis. Logo, com $\Delta > 0$ não temos soluções físicas de (77).

Para $\Delta < 0$, temos que M_1 e M_3 são raízes reais e positivas e podem ser escritas na forma (ver Ref.[17])

$$M_1 = A \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \quad (81)$$

$$M_3 = A \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \quad (82)$$

em que

$$A = \sqrt{\frac{4}{3} \left(C - \frac{2\pi^2}{N_c} f_\pi^2 - \frac{2\pi^2}{N_c} f_\pi^2 \sqrt{1 + \frac{N_c}{6\pi^2} \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} + \frac{m_\pi^2}{6}} \right)}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{18\pi^2}{N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{\sqrt{3 \left(C - \frac{2\pi^2}{N_c} f_\pi^2 - \frac{2\pi^2}{N_c} f_\pi^2 \sqrt{1 + \frac{N_c}{6\pi^2} \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} + \frac{m_\pi^2}{6}} \right)^3}}$$

Do ponto de vista físico, esta é uma situação indesejável, pois, para um mesmo conjunto de parâmetros, temos duas massas, dinamicamente geradas para os quarks. Não temos nenhum argumento a priori para descartar uma solução em favor da outra.

Como nossa última possibilidade, consideremos $\Delta = 0$. Nesse caso temos $S = T < 0$ pois $\beta > 0$ e assim $M_1 < 0$ e $M_2 = M_3 = \sqrt[3]{\frac{\beta}{2}} > 0$. Temos, então,

uma única raiz real e positiva que denominamos de solução crítica M_0 dado por

$$M_0 = \sqrt[3]{\frac{\beta}{2}} = \sqrt[3]{-\frac{2\pi^2}{N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle}.$$

A existência de uma única solução fortemente nos sugere que o valor da massa, dinamicamente gerada, para os quarks, deve ser tomada como sendo M_0 . Quando plotamos as soluções M_1 e M_3 como função de C obtemos, como esperado, a Fig.(7).

3.6.2 Simetria de isospin quebrada

Para o caso da simetria de isospin, explicitamente quebrada, em razão da presença, na Lagrangeana do modelo, de duas massas correntes distintas ($m_u \neq m_d$), a situação é similar à descrita acima. Porém, para encontrarmos as massas constituintes M_u e M_d , precisamos resolver duas equações acopladas. Consideramos as duas relações de escala

$$[i I_{quad}(M_u^2)] - M_u^2 [i I_{\log}(M_u^2)] + \frac{M_u^2}{16\pi^2} - C = 0 \quad (83)$$

$$[i I_{quad}(M_d^2)] - M_d^2 [i I_{\log}(M_d^2)] + \frac{M_d^2}{16\pi^2} - C = 0 \quad (84)$$

que podem, também, ser expressas como

$$\frac{M_u^3}{16\pi^2} - M_u^3 [i I_{\log}(M_u^2)] - CM_u - \frac{\langle \bar{u}u \rangle}{4N_c} = 0 \quad (85)$$

$$\frac{M_d^3}{16\pi^2} - M_d^3 [i I_{\log}(M_d^2)] - CM_d - \frac{\langle \bar{d}d \rangle}{4N_c} = 0 \quad (86)$$

Nas equações (83) e (84) aparece o parâmetro arbitrário C que poderia, a princípio, ser escrito como C_1 e C_2 em (83) e (84), respectivamente. No entanto, as equações

não iriam reproduzir a relação de escala (21)

$$\left[i I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \lambda^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} = C$$

que, por construção, depende apenas de um parâmetro arbitrário C . A exigência de que esta relação seja reproduzida nos condiciona a escolher $C_1 = C_2$ nas expressões (83) e (84) que, por conveniência, chamamos de C . O acoplamento entre as duas equações de gap acima ocorre em virtude da parametrização para $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ depender de ambas as massas, M_u e M_d . Não temos uma solução de forma fechada, como no caso de massas iguais, porém podemos resolvê-las numericamente. Como parâmetros de entrada podemos adotar, por exemplo, $\langle \bar{u}u \rangle$, $\langle \bar{d}d \rangle$, m_{π^+} e f_{π^+} . A Fig.(8) mostra as soluções das duas equações acima como função do parâmetro C . O mesmo padrão de solução pode ser visto nesse caso. Temos uma condição crítica a qual determina uma única solução tanto para M_u como para M_d .

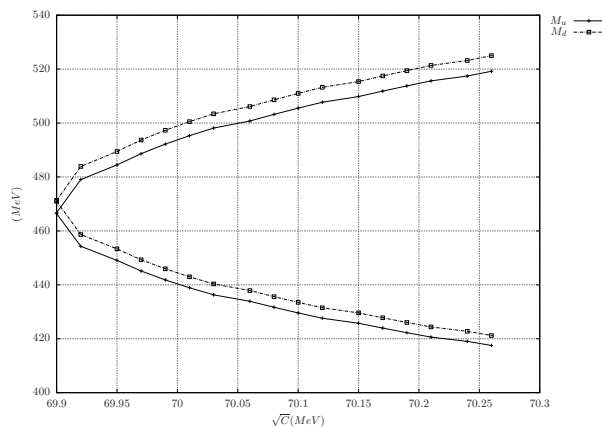


Figura 8 Massas constituintes em função do parâmetro C que são soluções das Eqs. (85) e (86) para $\langle \bar{u}u \rangle = (-250.0)^3$ e $\langle \bar{d}d \rangle = (-250.4)^3$.

Vamos escolher, neste trabalho, tomar o valor da massa constituinte encontrada, para o caso de massas iguais (simetria de isospin exata), que denominamos de M_0 , como sendo nosso parâmetro de escala λ . A partir do parâmetro de escala podemos determinar os valores de M_u e M_d para outros valores dos condensados, usando-se novamente as relações de escala, porém agora expressas como

$$\begin{aligned} \left[i I_{quad}^{(4)} (M_u^2) \right] - M_u^2 \left[i I_{\log}^{(4)} (M_u^2) \right] + \frac{M_u^2}{16\pi^2} &= \left[i I_{quad}^{(4)} (M_0^2) \right] \\ &- M_0^2 \left[i I_{\log}^{(4)} (M_0^2) \right] + \frac{M_0^2}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \left[i I_{quad}^{(4)} (M_d^2) \right] - M_d^2 \left[i I_{\log}^{(4)} (M_d^2) \right] + \frac{M_d^2}{16\pi^2} &= \left[i I_{quad}^{(4)} (M_0^2) \right] \\ &- M_0^2 \left[i I_{\log}^{(4)} (M_0^2) \right] + \frac{M_0^2}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (88)$$

que são obtidas de forma semelhante à expressão (22). Lembrando que a RE para $i I_{\log}^{(4)} (M_f^2)$ (20), com $m_i^2 = M_0^2$ e $\lambda^2 = M_f^2$ é dada por

$$\left[i I_{\log}^{(4)} (M_f^2) \right] = \left[i I_{\log}^{(4)} (M_0^2) \right] - \frac{1}{16\pi^2} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_f^2} \right)$$

e de (19) temos

$$\begin{aligned} \left[i I_{quad} (M_u^2) \right] &= -\frac{\langle \bar{u}u \rangle}{4N_c M_u} \\ \left[i I_{quad} (M_d^2) \right] &= -\frac{\langle \bar{d}d \rangle}{4N_c M_d} \\ \left[i I_{quad} (M_0^2) \right] &= -\frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N_c M_0} \end{aligned}$$

que podemos usá-las para eliminar $i I_{quad} (m_i^2)$ de (87) e (88), e escrever duas

equações na forma

$$0 = \frac{M_u (M_u^2 - M_0^2)}{16\pi^2} + M_u (M_0^2 - M_u^2) \left[i I_{\log}^{(4)} (M_0^2) \right] \\ + \frac{M_u^3}{16\pi^2} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_u^2} \right) + \frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle M_u}{4N_c M_0} - \frac{\langle \bar{u} u \rangle}{4N_c} \quad (89)$$

$$0 = \frac{M_d (M_d^2 - M_0^2)}{16\pi^2} + M_d (M_0^2 - M_d^2) \left[i I_{\log}^{(4)} (M_0^2) \right] \\ + \frac{M_d^3}{16\pi^2} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_d^2} \right) + \frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle M_d}{4N_c M_0} - \frac{\langle \bar{d} d \rangle}{4N_c} \quad (90)$$

em que

$$\left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] = - \frac{f_{\pi^+}^2}{2N_c (M_u + M_d)^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{N_c (M_u + M_d)^2 h}{4\pi^2 f_{\pi^+}^2}} \right) \\ + \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{(M_u - M_d)^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{\pi^+}^2} \right] \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\ - \frac{1}{16\pi^2} \frac{(M_u - M_d)^2}{m_{\pi^+}^2} \left[\xi_0^{(0)} (0, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right]$$

e

$$h = \left[m_{\pi^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \left[Y_1 (m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2) \right] \\ + \frac{(M_u - M_d)^2}{m_{\pi^+}^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - \xi_0^{(0)} (0, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right]$$

A partir dessas equações podemos obter M_u e M_d usando-se como parâmetros de entrada $\langle \bar{u} u \rangle$, $\langle \bar{d} d \rangle$, m_{π^+} e f_{π^+} .

No gráfico abaixo, Fig.(9), podemos ver o comportamento de M_u e M_d como função da diferença dos condensados $\langle \bar{d} d \rangle - \langle \bar{u} u \rangle$, em que variamos $\langle \bar{d} d \rangle$ e mantivemos $\langle \bar{u} u \rangle$ fixo. Cada ponto no gráfico representa o valor de M_u e M_d para $C = C_{crit}$. O gráfico ilustra a intensidade do acoplamento entre as Eqs. (85) e (86)

que ocorre por intermédio do objeto divergente $I_{\log}^{(4)}(M_u^2)$. Vemos que, conforme a diferença $\langle \bar{d}d \rangle - \langle \bar{u}u \rangle$ aumenta, M_u decresce e M_d cresce, ambos numa taxa, aproximadamente, linear.

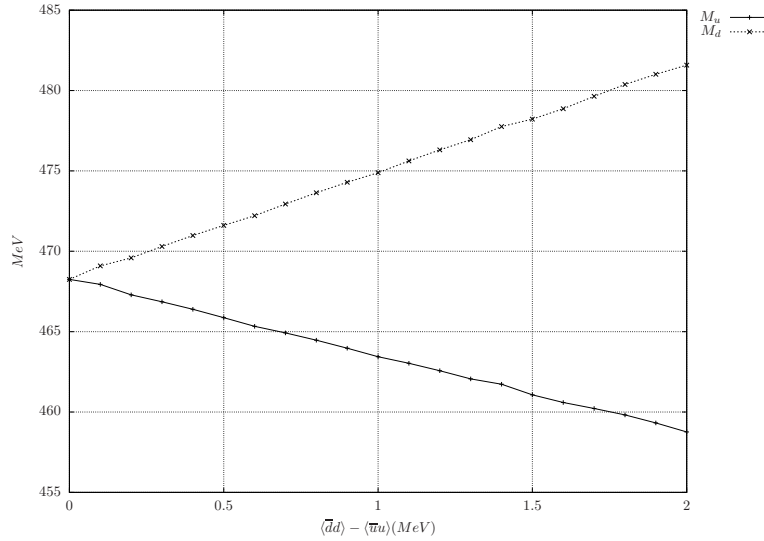


Figura 9 Intensidade do acoplamento entre as soluções das Eqs. (89) e (90).

Nosso procedimento, para encontrar as massas constituintes dos quarks, é bem diferente daquelas usadas, normalmente, na literatura. Sem exceção, a equação de gap é usada para obtenção das massas constituintes. A divergência quadrática presente é regularizada e integrada. Na regularização "cutoff", por exemplo, um parâmetro de corte Λ é introduzido nas integrais de Feynman de modo a tornar a integral finita. Segundo a Ref.[10], a equação de gap nessa regularização fica

$$M_i = m_0 + \frac{1}{2\pi^2} G N_c N_f M_i F_2(M_i, \Lambda) \quad (91)$$

em que

$$F_2(M_i, \Lambda) = -i (4\pi)^2 \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + M_i^2}$$

que, quando integrada, é, explicitamente, dada por

$$F_2(M_i, \Lambda) = \Lambda^2 - M_i^2 \log \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M_i^2} \right)$$

Para $m_u = m_d$, o condensado é definido por

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = -\frac{3}{4\pi^2} M_i F_2(M_i, \Lambda) \quad (92)$$

e a constante de decaimento do pión por

$$f_\pi^2 = \frac{N_c M_i^2}{4\pi^2} \left[\log \left(\frac{M_i^2 + \Lambda^2}{M_i^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{M_i^2 + \Lambda^2} \right] \quad (93)$$

Usando o valor experimental de f_π e do condensado $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$, os valores de M_i e Λ são obtidos por meio das relações (92) e (93). A constante de acoplamento G é, assim, obtida usando-se a equação de gap. Note que a dependência funcional com o parâmetro arbitrário Λ das equações acima depende da regularização escolhida. Diferentes regularizações fornecem expressões distintas para (91), (92) e (93) e, portanto, para os valores de M_i e Λ . Nesse sentido, o modelo NJL é considerado definido somente quando uma regularização é estabelecida. Isso mostra a existência de uma outra ambiguidade que está presente no modelo. A presença de qualquer tipo de ambiguidade, num modelo ou teoria, implica a perda do seu poder de predição. Dentro do ponto de vista do esquema, que adotamos nesse trabalho, por outro lado, podemos interpretar a constante C como sendo uma parametrização da ambiguidade que temos na escolha do tipo de regularização. A determinação da constante C , por meio da condição crítica, que surge da solução da Eq. (76), fixa ou elimina essa ambiguidade. Em decorrência da eliminação de todas as ambiguidades, relacionadas ao caráter divergente das integrais de Feyn-

man, podemos denominar a formulação, adotada neste trabalho, de preditiva.

Na próxima seção, vamos estudar, numericamente, a fenomenologia dos mésons píons e sigma dentro da formulação preditiva que construímos nas seções acima.

3.7 Fenomenologia dos Mésons

Agora, que sabemos encontrar as massas constituintes dos quarks, podemos efetuar a análise quantitativa da fenomenologia dos mésons pión e sigma. O procedimento, para obtenção dos dados numéricos, inicia-se com a determinação das massas constituintes M_u e M_d por intermédio das equações

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{M_u (M_u^2 - M_0^2)}{16\pi^2} + M_u (M_0^2 - M_u^2) \left[i I_{\log}^{(4)} (M_0^2) \right] \\
&+ \frac{M_u^3}{16\pi^2} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_u^2} \right) + \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N_c} \frac{M_u}{M_0} - \frac{\langle \bar{u}u \rangle}{4N_c} \\
0 &= \frac{M_d (M_d^2 - M_0^2)}{16\pi^2} + M_d (M_0^2 - M_d^2) \left[i I_{\log}^{(4)} (M_0^2) \right] \\
&+ \frac{M_d^3}{16\pi^2} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_d^2} \right) + \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N_c} \frac{M_d}{M_0} - \frac{\langle \bar{d}d \rangle}{4N_c}
\end{aligned}$$

em que os parâmetros de entrada do modelo (inputs) são $\langle \bar{d}d \rangle$, $\langle \bar{u}u \rangle$, m_{π^+} e f_{π^+} . O valor de M_0 é determinado, para o caso particular de massas iguais, em que $\langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Da Eq. (63), que fornece a massa do pión carregado,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{4N_c} \left[\frac{\langle \bar{u}u \rangle}{M_u} - \frac{\langle \bar{d}d \rangle}{M_d} \right] \frac{(M_u - M_d)}{[(m_d + m_u) - (M_d + M_u)]} \\
&+ \frac{1}{4N_c} \left[\frac{\langle \bar{u}u \rangle}{M_u} + \frac{\langle \bar{d}d \rangle}{M_d} \right] \frac{(m_u + m_d)}{[(m_d + m_u) - (M_d + M_u)]} \\
&+ \left[m_{\pi^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[Z_0 (m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

e das Eqs. (53) e (54)

$$M_u = m_u - 2G_S \langle \bar{u}u \rangle$$

$$M_d = m_d - 2G_S \langle \bar{d}d \rangle$$

podemos obter as massas correntes dos quarks m_u e m_d e a constante de acoplamento G_S . Da Eq. (64)

$$(g_{\pi^+qq})^{-2} = -4N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ - \frac{N_c}{4\pi^2} \left[m_{\pi^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \left[Y_1(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2) \right]$$

determinamos o valor da constante de acoplamento efetiva pion-quark-antiquark g_{π^+qq} . No setor do pión neutro obtemos a massa, a constante de decaimento e a constante de acoplamento efetiva das Eqs. (67), (68) e (69)

$$m_{\pi^0}^2 = -\frac{1}{N_c} \left(\frac{m_u}{M_u} + \frac{m_d}{M_d} \right) \frac{[\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle]}{(m_d + m_u) - (M_d + M_u)} \\ \times \frac{1}{\left\{ 2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\begin{array}{l} \xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2, M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \\ + \xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2, M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \end{array} \right] \right\}}$$

$$(g_{\pi^0qq})^{-2} = -2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2, M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ - 2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(m_{\pi^0}^2, M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ - \frac{N_c}{8\pi^2} m_{\pi^0}^2 \left[Y_1(m_{\pi^0}^2, M_u^2, M_u^2) + Y_1(m_{\pi^0}^2, M_d^2, M_d^2) \right]$$

$$f_{\pi^0} (g_{\pi^0 qq})^{-1} = -2N_c M_u \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ - 2N_c M_d \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}$$

No setor escalar, a massa e a constante de acoplamento efetiva do méson sigma são obtidas das Eqs. (71) e (72)

$$0 = \frac{4 [\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle]}{(m_d + m_u) - (M_d + M_u)} + \frac{\langle \bar{u}u \rangle}{M_u} + \frac{\langle \bar{d}d \rangle}{M_d} \\ + 2N_c (m_\sigma^2 - 4M_u^2) \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_\sigma^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ + 2N_c (m_\sigma^2 - 4M_d^2) \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_\sigma^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}$$

$$g_{\sigma qq}^{-2} = -2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_\sigma^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ - 2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_\sigma^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ - \frac{N_c}{8\pi^2} (m_\sigma^2 - 4M_u^2) [Y_1 (m_\sigma^2; M_u^2, M_u^2)] \\ - \frac{N_c}{8\pi^2} (m_\sigma^2 - 4M_d^2) [Y_1 (m_\sigma^2; M_d^2, M_d^2)]$$

Uma observação importante, no caso da fenomenologia do méson sigma, é que a função $\xi_0^{(0)} (m_\sigma^2; M^2, M^2; \lambda^2)$ desenvolve uma parte imaginária quando $m_\sigma^2 > 4M^2$, que é exatamente a situação para valores esperados da massa do méson sigma. Esse problema ocorre, pois os termos de interação da Lagrangeana do modelo não são confinantes e, então, é possível que os mésons decaiam em um par de quarks livres o que é, obviamente, um comportamento não físico. Tipicamente, o problema da falta de confinamento do modelo pode ser evidenciado para energias próximas a 1 GeV, que é o limiar de energia em que o modelo deixa de ser válido.

Com isso em mente, as predições no setor escalar devem ser tomadas apenas como valores de referênciã aproximados.

Os valores experimentais, para as massas dos píons carregados e neutro, são, respectivamente,

$$m_{\pi^{\pm}}^{\text{exp}} = 139.5706 \pm 0.00035 \text{ MeV}$$

$$m_{\pi^0}^{\text{exp}} = 134.9766 \pm 0.0006 \text{ MeV}$$

cuja diferença é de, aproximadamente, $m_{\pi^{\pm}}^{\text{exp}} - m_{\pi^0}^{\text{exp}} = 4.6 \text{ MeV}$. Acredita-se que essa diferença tenha duas origens, uma em virtude da interação eletromagnética entre os quarks que constituem os píons e outra em razão da diferença das massas correntes $m_d \neq m_u$, visto que a maior contribuição é esperada vir da interação eletromagnética, conforme argumentos elaborados na Ref.[26]. Valores estimados da QCD, para as massas correntes, são $m_u = 2.5 \text{ MeV}$ e $m_d = 5.0 \text{ MeV}$ (ver Ref.[27]), fornecendo uma diferença de $\Delta m = m_d - m_u = 2.5 \text{ MeV}$. Vale lembrar, contudo, que os quarks são confinados dentro dos hádrons e não podem, portanto, serem observados como estados físicos. Suas propriedades, por isso, podem somente ser medidas, indiretamente, conforme sua influência sobre os hádrons. Desse modo, as estimativas de suas massas são, fortemente dependentes do esquema teórico usado para defini-las, e, portanto devem ser usadas como valores de referênciã.

Estamos interessados, entre outros aspectos, em analisar a contribuição da quebra explícita da simetria de isospin para a diferença de massas dos píons no modelo NJL. Na Tabela(1), analisamos os valores dos observáveis fenomenológicos como função da diferença dos condensados $\langle \bar{u}u \rangle$ e $\langle \bar{d}d \rangle$. Para tal, tomamos $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (-260.0 \text{ MeV})^3$ obtendo, assim, $M_0 = 487.0 \text{ MeV}$. Fixamos $\langle \bar{u}u \rangle = (-250.0 \text{ MeV})^3$ e variamos $\langle \bar{d}d \rangle$ dentro da faixa de valores mos-

trados na primeira coluna da Tabela(1). Valores estimados, na literatura, para os condensados, mostram que a diferença esperada entre $\langle \bar{u}u \rangle$ e $\langle \bar{d}d \rangle$ é da ordem de 1 a 2% [28]. Além dos valores mostrados, na tabela, também, obtemos $G_S = 6.3 (GeV)^{-2}$ e $g_{\pi^+qq} = g_{\pi^0qq} = 4.24$ que permanecem constantes. Os valores dos outros parâmetros de entrada são $f_{\pi^+} = 92.4 MeV$ e $m_{\pi^+} = 139.6 MeV$.

Tabela 1 Observáveis fenomenológicos como função da diferença dos condensados formados pelos quarks up e down.

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	m_u	m_d	m_{π^0}	f_{π^0}	m_σ	$g_{\sigma qq}$
-250.4	4.59	6.19	139.55	92.43	808.9	2.17
-250.8	3.78	7.0	139.41	92.52	811.6	2.11
-251.2	2.96	7.83	139.17	92.68	814.8	2.08
-251.7	2.12	8.7	138.82	92.92	817.6	2.05
-252.1	1.27	9.6	138.36	93.23	820.3	2.03
-252.5	0.4	10.6	137.80	93.63	822.9	2.00

Podemos observar que, conforme aumentamos Δm (veja colunas 2 e 3 da Tabela(1)), a massa do pión neutro decresce, porém de forma lenta em termos de valores absolutos. Para valores de $\langle \bar{u}u \rangle$ maiores que $(-252.48 MeV)^3$ não obtemos mais soluções físicas para m_u . Sendo assim a diferença máxima, entre as massas dos píons carregados e neutro, que podemos obter pela quebra explícita da simetria de isospin $SU(2)$, de acordo com a Tabela(1), é de $\Delta m_\pi = m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 1.8 MeV$ para $\Delta m = 10.2 MeV$. Para $\Delta m = 2.5 MeV$, conforme dados obtidos pelo referencial teórico da QCD, teríamos uma diferença irrelevante de, aproximadamente, $\Delta m_\pi = 0.1 MeV$. Em resumo, para termos um Δm_π significativo, dentro do modelo NJL, precisaríamos de um Δm maior daquele previsto pela QCD.

Por sua vez, as constantes de decaimento dos píons tem os valores experimentais $f_{\pi^+}^{\text{exp}} = 92.4 \pm 0.07 \text{ MeV}$ e $f_{\pi^0}^{\text{exp}} = 91.92 \pm 3.5 \text{ MeV}$. Note que não podemos estabelecer uma diferença precisa entre ambos os valores se considerarmos o erro experimental de $f_{\pi^0}^{\text{exp}}$. Vale lembrar que o valor experimental de f_{π^+} foi usado, como parâmetro de entrada, para solução da equação, que forneceu as massas constituintes dos quarks. Dos valores mostrados na quinta coluna da Tabela(1), vemos a variação de f_{π^0} . Podemos notar que a diferença máxima obtida foi de $\Delta f_{\pi} = f_{\pi^0} - f_{\pi^+} = 1.2 \text{ MeV}$, que é um valor aceitável dentro do erro experimental. Podemos citar um estudo similar, realizado na Ref.[29], porém, com o modelo na versão $SU(3)$, os resultados são similares aos obtidos na Tabela(1).

Como a faixa de valores aceitos, para os condensados é, relativamente, grande, torna-se interessante, também, realizarmos a mesma investigação mostrada acima para outros valores de $\langle \bar{u}u \rangle$ e $\langle \bar{d}d \rangle$. Nas Tabelas(2) e (3), exibimos os observáveis fenomenológicos para $\langle \bar{u}u \rangle = (-245.0 \text{ MeV})^3$ e $\langle \bar{u}u \rangle = (-240.0 \text{ MeV})^3$, respectivamente.

Tabela 2 Fenomenologia mesônica para $\langle \bar{u}u \rangle = (-245.0 \text{ MeV})^3$. Todas as quantidades mostradas têm dimensão dadas em MeV exceto $g_{\sigma qq}$ que é adimensional.

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	m_u	m_d	m_{π^0}	f_{π^0}	m_{σ}	$g_{\sigma qq}$
-245.4	5.02	6.41	139.56	92.43	737.8	2.13
-245.8	4.32	7.10	139.45	92.52	740.3	2.08
-246.2	3.62	7.82	139.25	92.68	742.7	2.04
-246.6	2.91	8.56	138.99	92.92	744.9	2.01
-247.0	2.19	9.33	138.63	93.23	746.9	1.99
-247.4	1.45	10.13	138.19	93.58	748.7	1.97
-247.8	0.69	10.98	137.65	94.05	750.2	1.95

Para a Tabela(2), temos $G_S = 6.1 \text{ (GeV)}^{-2}$ e, $g_{\pi^+ qq} = g_{\pi^0 qq} = 3.85$ e

Tabela 3 Fenomenologia mesônica para $\langle \bar{u}u \rangle = (-240.0 \text{ MeV})^3$. Todas as quantidades mostradas têm dimensão dada em MeV exceto $g_{\sigma qq}$ que é adimensional.

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	m_u	m_d	m_{π^0}	f_{π^0}	m_σ	$g_{\sigma qq}$
-240.4	5.48	6.66	139.57	92.46	668.5	2.07
-240.8	4.88	7.25	139.48	92.50	770.8	2.04
-241.2	4.28	7.85	139.34	92.64	673.0	2.00
-241.6	3.68	8.47	139.12	92.83	674.9	1.97
-242.0	3.08	9.11	138.86	93.08	676.5	1.95
-242.4	2.47	9.78	138.52	93.40	677.8	1.93
-242.8	1.85	10.46	138.12	93.78	678.8	1.92
-243.2	1.23	11.18	137.66	94.22	679.4	1.90
-243.5	0.59	11.92	137.12	94.74	679.6	1.88

para a Tabela(3) temos $G_S = 5.8 \text{ (GeV)}^{-2}$ e $g_{\pi^+ qq} = g_{\pi^0 qq} = 3.49$ e todos permanecem fixos quando variamos $\langle \bar{d}d \rangle$. Com base nos resultados acima, podemos perceber que Δm aumenta, quando os condensados diminuem e, portanto as diferenças máximas entre as massas e as constantes de decaimento, também, aumentam. Quantitativamente, temos que $\Delta m_\pi = 2.0 \text{ MeV}$ e $\Delta f_\pi = 1.65 \text{ MeV}$, para o caso dos valores mostrados na Tabela(2) e $\Delta m_\pi = 2.5 \text{ MeV}$ e $\Delta f_\pi = 2.3 \text{ MeV}$ para os dados da Tabela(3). Em resumo, se considerarmos a quebra de isospin máxima permitida pelo modelo, dentro da formulação preditiva, temos uma contribuição significativa para as diferenças de massas e constantes de decaimento dos píons carregados e neutro. Por outro lado, se nos restringimos aos valores de Δm previstos dentro do contexto da QCD, a contribuição vinda da quebra de isospin é pequena.

No setor do sigma, podemos observar que a constante de acoplamento efetiva $g_{\sigma qq}$ é pouco influenciada tanto pelos valores assumidos por $\langle \bar{u}u \rangle$ quanto pela diferença $\langle \bar{u}u - \bar{d}d \rangle$. A massa m_σ , por outro lado, diminuiu de valor quando $\langle \bar{u}u \rangle$ ou a diferença $\langle \bar{u}u - \bar{d}d \rangle$ decrescem. Todos os valores mostrados para m_σ estão

dentro da faixa de valores possíveis que é de $500 - 900 \text{ MeV}$.

A análise numérica realizada, para obtermos os valores dos observáveis fenomenológicos do modelo, foi realizada com a ajuda do software MAPLE. Nas seções que seguem, estenderemos a formulação preditiva do modelo NJL de modo a incluir acoplamentos vetoriais e tensoriais.

4 O MODELO NJL COM ACOPLAMENTOS VETORIAL E TENSORIAL

Nessa seção, estenderemos o modelo NJL, definido pela Lagrangeana (52), por intermédio da inclusão de acoplamentos, envolvendo os bilineares vetorial, axial-vetor e tensor. A Lagrangeana com os novos acoplamentos é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi(x) \\
& + \frac{G_S}{2} \left[(\bar{\psi}(x) \psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x) i\gamma_5 \vec{\tau} \psi(x))^2 \right] \\
& - \frac{G_V}{2} \left[(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \vec{\tau} \psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \psi(x))^2 \right] \\
& + \frac{G_T}{2} \left[(\bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x))^2 - (\bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \vec{\tau} \psi(x))^2 \right] \quad (94)
\end{aligned}$$

em que $\sigma_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Duas novas constantes de acoplamento foram incluídas: G_V e G_T . Os termos de interação tensorial, apesar de não usuais, na literatura, surgem naturalmente, dentro da aproximação Hartree, por um rearranjo de Fierz [30]. Além disso, tais termos estão de acordo com a proposta feita na Ref.[31]. Todos os termos adicionais da Lagrangeana acima são permitidos pelas simetrias $SU_V(2) \otimes SU_A(2) \otimes U_V(1)$, Eqs. (47), (48) e (49). Com os novos acoplamentos, é possível a descrição fenomenológica dos mésons sigma (σ), píons (π^\pm, π^0), rhos (ρ^\pm, ρ^0) e axiais (a_1^\pm, a_1^0), além de possíveis mésons ten-

soriais. Neste trabalho, não trataremos da fenomenologia dos mésons tensoriais. Como mostraremos nas discussões que seguem, a introdução dos acoplamentos G_V e G_T não nulos implicará uma mistura entre canais pseudoescalar e axial-vetor, vetorial e tensorial.

Podemos escrever o núcleo de interação como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & K_{ij}^S (\mathbb{1}\tau_i \otimes \mathbb{1}\tau_j) + K_{ij}^P (i\gamma_5\tau_i \otimes i\gamma_5\tau_j) \\ & + K_{ij}^V (\gamma_\mu\tau_i \otimes \gamma^\mu\tau_j) + K_{ij}^A (i\gamma_5\gamma_\mu\tau_i \otimes i\gamma_5\gamma^\mu\tau_j) \\ & + K_{ij}^T (\sigma_{\mu\nu}\tau_i \otimes \sigma^{\mu\nu}\tau_j)\end{aligned}$$

em que os K_{ij}^a não nulos são

$$\begin{aligned}K_{ij}^S = K_{ij}^P = G_S & \text{ para } \tau_i = \tau_j^\dagger \ (i, j \neq 0) \\ K_{ij}^V = K_{ij}^A = -G_V & \text{ para } \tau_i = \tau_j^\dagger \ (i, j \neq 0) \\ K_{00}^T = G_T & \text{ para } \tau_i = \tau_j = \tau_0 \\ K_{ij}^T = -G_T & \text{ para } \tau_i = \tau_j^\dagger \ (i, j \neq 0)\end{aligned}$$

Os bilineares, que formam as interações vetorial e axial-vetorial, pertencem à representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz e, portanto carregam spin $s = \underline{0}$ e $\underline{1}$. Como é bem conhecido, a parte longitudinal carrega spin $\underline{0}$ e a transversal spin $\underline{1}$. Logo, essas interações contribuem, também, para os setores escalar e pseudoescalar da teoria. Da mesma forma, as interações tensoriais (tensores antissimétricos) carregam spin $\underline{1}$ e, assim, contribuem para as partes vetorial e axial-vetorial. Podemos

usar os projetores transversal e longitudinal

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu$$

$$L^{\mu\nu} = \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu$$

$$\hat{p}^\mu = \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}}$$

para decompor \mathcal{H} nos canais escalar, pseudoescalar, vetorial e axial-vetorial. Neste contexto, as denominações escalar, pseudoescalar, vetor e axial-vetor referem-se aos correspondentes modos mesônicos, ou seja, estados ligados de quark-antiquark com spin e paridade $J^P = 0^+, 0^-, 1^+$ e 1^- , respectivamente.

Consideremos, por exemplo, o bilinear vetorial e sua decomposição em partes longitudinal e transversal

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \tau_i \otimes \gamma^\mu \tau_j &= \gamma_\mu \tau_i \otimes \gamma_\nu g^{\mu\nu} \tau_j = \gamma_\mu \tau_i \otimes \gamma_\nu (T^{\mu\nu} + L^{\mu\nu}) \tau_j \\ &= T^{\mu\nu} (\gamma_\mu \tau_i \otimes \gamma_\nu \tau_j) + \gamma_\mu \hat{q}^\mu \tau_i \otimes \gamma_\nu \hat{q}^\nu \tau_j \end{aligned}$$

O mesmo procedimento, quando realizado para os termos axial-vetor e tensor, permite a decomposição em invariantes de Lorentz de \mathcal{H} na forma (ver Ref.[25])

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_P + \mathcal{H}_V + \mathcal{H}_A$$

em que

$$\mathcal{H}_S = K_{ij}^S (\mathbb{I}\tau_i \otimes \mathbb{I}\tau_j) + K_{ij}^V (\widehat{p}^\mu \gamma_\mu \tau_i \otimes \gamma_\nu \widehat{p}^\nu \tau_j) \quad (95)$$

$$\mathcal{H}_P = K_{ij}^P (i\gamma_5 \tau_i \otimes i\gamma_5 \tau_j) + K_{ij}^A (i\gamma_5 \gamma_\mu \widehat{p}^\mu \tau_i \otimes i\gamma_5 \gamma_\nu \widehat{p}^\nu \tau_j) \quad (96)$$

$$\mathcal{H}_V = K_{ij}^V T^{\mu\nu} (\gamma_\mu \tau_i \otimes \gamma_\nu \tau_j) + K_{ij}^T T^{\mu\nu} \left(\sqrt{2} \sigma_{\mu\alpha} \widehat{p}^\alpha \tau_i \otimes \sqrt{2} \sigma_{\nu\beta} \widehat{p}^\beta \tau_j \right) \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A &= K_{ij}^A T^{\mu\nu} (i\gamma_5 \gamma_\mu \tau_i \otimes i\gamma_5 \gamma_\nu \tau_j) \\ &\quad - K_{ij}^T T^{\mu\nu} \left(-\sqrt{2} \sigma_{\mu\alpha} \gamma_5 \widehat{p}^\alpha \tau_i \otimes \sqrt{2} \sigma_{\nu\beta} \gamma_5 \widehat{p}^\beta \tau_j \right) \end{aligned} \quad (98)$$

De maneira similar, podemos decompor a matriz de espalhamento \mathcal{T} em invariantes tensoriais

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_S^{(\sigma)} + \mathcal{T}_P^{(\pi)} + \mathcal{T}_V^{(\rho)} + \mathcal{T}_A^{(a_1)}$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_S^{(\sigma)} &= M^{SS} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) + M^{SV} (\mathbb{I} \otimes i\widehat{p}) \\ &\quad + M^{VS} (-i\widehat{p} \otimes \mathbb{I}) + M_{(L)}^{VV} (-i\widehat{p} \otimes i\widehat{p}) \\ \mathcal{T}_P^{(\pi)} &= M^{PP} (i\gamma_5 \otimes i\gamma_5) + M^{PA} (i\gamma_5 \otimes i\widehat{p}\gamma_5) \\ &\quad + M^{AP} (-i\widehat{p}\gamma_5 \otimes i\gamma_5) + M_{(L)}^{AA} (-i\widehat{p}\gamma_5 \otimes i\widehat{p}\gamma_5) \\ \mathcal{T}_V^{(\rho)} &= T^{\mu\nu} \left\{ M_{(T)}^{VV} (\gamma_\mu \otimes \gamma_\nu) + \sqrt{2} M^{VT} (\gamma_\mu \otimes i\sigma_{\nu\lambda} \widehat{p}^\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} M^{TV} (-i\sigma_{\mu\lambda} \widehat{p}^\lambda \otimes \gamma_\nu) + 2M_{(L)}^{TT} (-i\sigma_{\mu\lambda} \widehat{p}^\lambda \otimes i\sigma_{\nu\kappa} \widehat{p}^\kappa) \right\} \\ \mathcal{T}_A^{(a_1)} &= T^{\mu\nu} \left\{ M_{(T)}^{AA} (\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\nu \gamma_5) + \sqrt{2} M^{A\widetilde{T}} (\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \sigma_{\nu\lambda} \gamma_5 \widehat{p}^\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} M^{\widetilde{T}A} (-\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 \widehat{p}^\lambda \otimes \gamma_\nu \gamma_5) \right. \\ &\quad \left. + 2M_{(T)}^{\widetilde{T}\widetilde{T}} (-\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 \widehat{p}^\lambda \otimes \sigma_{\nu\kappa} \gamma_5 \widehat{p}^\kappa) \right\} \end{aligned}$$

Nas expressões acima, $M_{(L)}$ e $M_{(T)}$ são as partes longitudinal e transversal de M ,

respectivamente. Além disso, definimos $\hat{p} = \hat{p}^\mu \gamma_\mu$ e $\tilde{T} \sim \sigma_{\nu\kappa} \gamma_5$. Nas seções que seguem, estabeleceremos os ingredientes básicos da fenomenologia dos mésons que são interessantes neste trabalho.

4.1 Méson Escalar

No setor escalar do modelo, podemos descrever o méson sigma (σ). As funções polarização que precisamos calcular, para estudar a fenomenologia do méson σ são

$$\begin{aligned} \Pi_\sigma^{SS} &= iN_c \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ (\mathbb{I})_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) (\mathbb{I})_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\ &= iN_c [\mathcal{T}^{SS}(M_u, M_u) + \mathcal{T}^{SS}(M_d, M_d)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_\sigma^{SV} &= \Pi_\sigma^{VS} \\ &= iN_c \hat{p}^\mu \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ (\mathbb{I})_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times (-i\gamma_\mu) (\mathbb{I})_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\ &= N_c \hat{p}^\mu [\mathcal{T}^{SV}(M_u, M_u) + \mathcal{T}^{SV}(M_d, M_d)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_\sigma^{VV} &= iN_c \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \sum_{f_1 f_2} \\ &\quad \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ (i\gamma_\mu) (\mathbb{I})_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times (-i\gamma_\nu) (\mathbb{I})_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\ &= iN_c \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV}(M_d, M_d)] \end{aligned}$$

Porém note que

$$\begin{aligned}\widehat{p}^\mu [\mathcal{T}_\mu^{SV} (M_u, M_u)] &= \widehat{p}^\mu [\mathcal{T}_\mu^{SV} (M_d, M_d)] = 0 \\ \widehat{p}^\mu \widehat{p}^\nu [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV} (M_u, M_u)] &= \widehat{p}^\mu \widehat{p}^\nu [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV} (M_d, M_d)] = 0\end{aligned}$$

logo

$$\Pi_\sigma^{SV} = \Pi_\sigma^{VS} = \Pi_\sigma^{VV} = 0$$

Portanto não temos nenhuma contribuição efetiva dos acoplamentos vetorial e tensorial para a fenomenologia do méson sigma. As mesmas equações, obtidas na seção (3.5), são válidas, também, nesse caso.

4.2 Mésons Pseudoescalares

No setor pseudoescalar do modelo, podemos descrever o tripleto de mésons píons (π^+ , π^0 , π^-). Iniciaremos nossa discussão pelos píons carregados.

4.2.1 Píons Carregados

De acordo com a Eq. (96), o núcleo de interação no canal do píon carregado é dado por

$$\mathcal{H}_P^{(\pi^+)} = G_S (i\gamma_5\tau^- \otimes i\gamma_5\tau^+) - G_V (-i\widehat{p}^\mu \gamma_\mu \gamma_5\tau^- \otimes i\widehat{p}^\nu \gamma_\nu \gamma_5\tau^+)$$

e a matriz de espalhamento tem a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_P^{(\pi^+)}(p) &= [M_{\pi^+}^{PP}] (i\gamma_5\tau^- \otimes i\gamma_5\tau^+) + [M_{\pi^+}^{PA}] (i\gamma_5\tau^- \otimes i\widehat{p}\gamma_5\tau^+) \\ &+ [M_{\pi^+}^{AP}] (-i\widehat{p}\gamma_5\tau^- \otimes i\gamma_5\tau^+) \\ &+ [M_{(L)\pi^+}^{AA}] (-i\widehat{p}\gamma_5\tau^- \otimes i\widehat{p}\gamma_5\tau^+)\end{aligned}\quad (99)$$

A matriz M_{π^+} tem a estrutura

$$M_{\pi^+} = K (1 - \Pi_{\pi^+} K)^{-1} \quad (100)$$

com

$$K = \begin{pmatrix} G_S & 0 \\ 0 & -G_V \end{pmatrix},$$

$$\Pi_{\pi^+} = \begin{pmatrix} \Pi_{\pi^+}^{PP} & \Pi_{\pi^+}^{PA} \\ \Pi_{\pi^+}^{AP} & \Pi_{(L)\pi^+}^{AA} \end{pmatrix}$$

As funções polarizações são definidas por

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi^+}(\Gamma_1, \Gamma_2) &= iN_c \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr \left\{ \Gamma_1 (\tau^-)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k + k_1) \right. \\ &\quad \left. \times \Gamma_2 (\tau^+)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k + k_2) \right\} \\ &= 2iN_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr \left\{ \Gamma_1 S^u(k + k_1) \Gamma_2 S^d(k + k_2) \right\} \end{aligned}$$

em que tr é o traço sobre as matrizes de Dirac e $\{\Gamma_1, \Gamma_2\} = \{i\gamma_5, i\gamma_5 \hat{p}\}$. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi^+}^{PP} &= \Pi_{\pi^+}(i\gamma_5, i\gamma_5) \\ &= 2iN_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_5 S^u(k + k_1) i\gamma_5 S^d(k + k_2) \right\} \\ &= -2iN_c [\mathcal{T}^{PP}(M_u, M_d)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi^+}^{PA} &= \Pi_{\pi^+} \left(i\gamma_5, -i\hat{p}\gamma_5 \right) \\
&= 2iN_c \hat{p}^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 S^u(k+k_1) \gamma_\mu \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\
&= 2iN_c \hat{p}^\mu \left[\mathcal{T}_\mu^{PA}(M_u, M_d) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi^+}^{AP} &= \Pi_{\pi^+} \left(i\hat{p}\gamma_5, i\gamma_5 \right) \\
&= -2iN_c \hat{p}^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 S^u(k+k_1) \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\
&= -2iN_c \hat{p}^\mu \left[\mathcal{T}_\mu^{AP}(M_u, M_d) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} &= \Pi_{\pi^+} \left(i\hat{p}\gamma_5, -i\hat{p}\gamma_5 \right) \\
&= 2iN_c \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 S^u(k+k_1) \gamma_\nu \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\
&= 2iN_c \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \left[\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(M_u, M_d) \right]
\end{aligned}$$

Com os resultados (38), (40) e (42) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi^+}^{PP} &= 4N_c \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] \right\} \\
&\quad - 4N_c \left[p^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \\
&\quad \times \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \quad (101)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi^+}^{AP} &= 4N_c (M_u + M_d) \sqrt{p^2} \\
&\quad \times \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&+ \frac{N_c}{4\pi^2} (M_u - M_d) \sqrt{p^2} \\
&\quad \times \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - 2\xi_1^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \quad (102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} &= -4N_c (M_u + M_d)^2 \\
&\quad \times \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&- \frac{N_c}{4\pi^2} (M_u^2 - M_d^2) \\
&\quad \times \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - 2\xi_1^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \quad (103)
\end{aligned}$$

Explicitando a equação matricial $1 - \Pi_{\pi^+} K$

$$\begin{aligned}
1 - \Pi_{\pi^+} K &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Pi_{\pi^+}^{PP} & \Pi_{\pi^+}^{PA} \\ \Pi_{\pi^+}^{AP} & \Pi_{(L)\pi^+}^{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_S & 0 \\ 0 & -G_V \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - G_S \Pi_{\pi^+}^{PP} & G_V \Pi_{\pi^+}^{PA} \\ -G_S \Pi_{\pi^+}^{AP} & 1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

obtemos

$$(1 - \Pi_{\pi^+} K)^{-1} = \frac{1}{D_{\pi^+}} \begin{pmatrix} 1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA} & -G_V \Pi_{\pi^+}^{PA} \\ G_S \Pi_{\pi^+}^{AP} & 1 - G_S \Pi_{\pi^+}^{PP} \end{pmatrix}$$

em que definimos o determinante

$$\begin{aligned} D_{\pi^+} &= \det(1 - \Pi_{\pi^+} K) \\ &= 1 - G_S \Pi_{\pi^+}^{PP} + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA} - G_S G_V \left(\Pi_{\pi^+}^{PP} \Pi_{(L)\pi^+}^{AA} - \Pi_{\pi^+}^{PA} \Pi_{\pi^+}^{AP} \right) \end{aligned}$$

Com isso, podemos calcular, explicitamente, os elementos da matriz M_{π^+}

$$\begin{aligned} M_{\pi^+} &= \frac{1}{D_{\pi^+}} \begin{pmatrix} G_S & 0 \\ 0 & -G_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA} & -G_V \Pi_{\pi^+}^{PA} \\ G_S \Pi_{\pi^+}^{AP} & 1 - G_S \Pi_{\pi^+}^{PP} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D_{\pi^+}} \begin{pmatrix} G_S (1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}) & -G_S G_V \Pi_{\pi^+}^{PA} \\ -G_S G_V \Pi_{\pi^+}^{AP} & -G_V (1 - G_S \Pi_{\pi^+}^{PP}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D_{\pi^+}} \begin{pmatrix} M_{\pi^+}^{PP} & M_{\pi^+}^{PA} \\ M_{\pi^+}^{AP} & M_{\pi^+}^{AA} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (104)$$

em que

$$\begin{aligned} M_{\pi^+}^{PP} &= \frac{G_S}{D_{\pi^+}} (1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}) \\ M_{\pi^+}^{PA} &= -\frac{G_S G_V}{D_{\pi^+}} \Pi_{\pi^+}^{PA} \\ M_{\pi^+}^{AP} &= -\frac{G_S G_V}{D_{\pi^+}} \Pi_{\pi^+}^{AP} \\ M_{\pi^+}^{AA} &= -\frac{G_V}{D_{\pi^+}} (1 - G_S \Pi_{\pi^+}^{PP}) \end{aligned}$$

Porém note que $\Pi_{\pi^+}^{PA} = \Pi_{\pi^+}^{AP}$, pois $\mathcal{T}_\mu^{PA}(M_u, M_d) = -\mathcal{T}_\mu^{AP}(M_u, M_d)$ e, então, $M_{\pi^+}^{PA} = M_{\pi^+}^{AP}$. Observe que a matriz de espalhamento, em decorrência da presença do acoplamento vetorial, exhibe uma mistura dos canais pseudoescalar e axial-vetor.

A massa do pión carregado, como é usual, é definida pelo polo de M_{π^+}

que é dado por

$$D_{\pi^+}(p^2)\Big|_{p^2=m_{\pi^+}^2} = 0$$

ou explicitamente

$$0 = 1 - G_S [\Pi_{\pi^+}^{PP}(m_{\pi^+}^2)] + G_V [\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2)] \\ - G_S G_V \left\{ [\Pi_{\pi^+}^{PP}(m_{\pi^+}^2)] [\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2)] - [\Pi_{\pi^+}^{AP}(m_{\pi^+}^2)]^2 \right\}$$

As constantes de acoplamento efetiva são identificadas com o resíduo de M_{π^+} . Para calcularmos o resíduo de M_{π^+} , primeiro expandimos $D_{\pi^+}(p^2)$, em torno do polo

$$D_{\pi^+}(p^2) \approx D_{\pi^+}(m_{\pi^+}^2) + \frac{\partial D_{\pi^+}}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_{\pi^+}^2} (p^2 - m_{\pi^+}^2) \\ = \frac{\partial D_{\pi^+}}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_{\pi^+}^2} (p^2 - m_{\pi^+}^2)$$

pois $D_{\pi^+}(m_{\pi^+}^2) = 0$. Veja que, da Eq. (100), temos

$$\det M_{\pi^+} = \det K \det (1 - \Pi_{\pi^+} K)^{-1} = \frac{\det K}{D_{\pi^+}}$$

Por outro lado, da Eq. (104) obtemos, também

$$\det M_{\pi^+} = \frac{M_{\pi^+}^{PP} M_{\pi^+}^{AA} - (M_{\pi^+}^{AP})^2}{D_{\pi^+}^2}$$

e, assim

$$M_{\pi^+}^{PP} M_{\pi^+}^{AA} - (M_{\pi^+}^{AP})^2 = D_{\pi^+} \det K$$

Para $p^2 = m_{\pi^+}^2$ é verdade que $D_{\pi^+}(m_{\pi^+}^2) = 0$ e $M_{\pi^+}^{PP} M_{\pi^+}^{AA} - (M_{\pi^+}^{AP})^2 = 0$ tal

que

$$\frac{M_{\pi^+}^{AA}}{M_{\pi^+}^{PP}} \Big|_{p^2=m_{\pi^+}^2} = \left(\frac{M_{\pi^+}^{AP}}{M_{\pi^+}^{PP}} \right)^2 \Big|_{p^2=m_{\pi^+}^2}.$$

Note que podemos reescrever (99) como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(\pi^+)} = [M_{\pi^+}^{PP}] & \left\{ (i\gamma_5\tau^- \otimes i\gamma_5\tau^+) + \left[\frac{M_{\pi^+}^{AP}}{M_{\pi^+}^{PP}} \right] (i\gamma_5\tau^- \otimes i\hat{p}\gamma_5\tau^+) \right. \\ & + \left[\frac{M_{\pi^+}^{AP}}{M_{\pi^+}^{PP}} \right] (-i\hat{p}\gamma_5\tau^- \otimes i\gamma_5\tau^+) \\ & \left. + \left[\frac{M_{(L)\pi^+}^{AA}}{M_{\pi^+}^{PP}} \right] (-i\hat{p}\gamma_5\tau^- \otimes i\hat{p}\gamma_5\tau^+) \right\} \end{aligned}$$

Definindo

$$a_{\pi^+} = \frac{M_{\pi^+}^{AP}}{M_{\pi^+}^{PP}} \Big|_{p^2=m_{\pi^+}^2} = - \frac{G_V [\Pi_{\pi^+}^{AP}(m_{\pi^+}^2)]}{1 + G_V [\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2)]}$$

a matriz de espalhamento, em torno do polo, adquire a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(\pi^+)} \approx G_S [1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2)] & \left(\frac{\partial D_{\pi^+}}{\partial p^2} \right)^{-1} \Big|_{p^2=m_{\pi^+}^2} \\ & \times \frac{[i\gamma_5\tau^- - a_{\pi^+} i\hat{p}\gamma_5\tau^-] \otimes [i\gamma_5\tau^+ + a_{\pi^+} i\hat{p}\gamma_5\tau^+]}{(p^2 - m_{\pi^+}^2)} \end{aligned}$$

A interação fenomenológica efetiva mais simples que podemos construir para descrever o acoplamento de um campo pseudoescalar $\pi^+(x)$ aos campos dos quarks (antiquarks) $\psi(x)$ é dada pela Lagrangeana efetiva [9, 25, 32]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{efetiva} = & g_{\pi^+qq} \bar{\psi}(x) i\gamma_5\tau^+ \psi(x) \pi^+(x) \\ & + \frac{\tilde{g}_{\pi^+qq}}{M_u + M_d} \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \tau^+ \psi(x) \partial^\mu \pi^+(x) \end{aligned}$$

em que $g_{\pi qq}$ e $\tilde{g}_{\pi qq}$ são duas constantes de acoplamento efetivas pion-quark-antiquark. Uma matriz de espalhamento construída dessa Lagrangeana tem a forma geral

$$\mathcal{T}(\pi^+) \approx -g_{\pi^+ qq}^2 \left(i\gamma_5 \tau^- - \frac{\tilde{g}_{\pi^+ qq}}{g_{\pi^+ qq}} \frac{i \not{p} \gamma_5 \tau^-}{M_u + M_d} \right) \\ \otimes \frac{1}{(p^2 - m_{\pi^+}^2)} \left(i\gamma_5 \tau^+ + \frac{\tilde{g}_{\pi^+ qq}}{g_{\pi^+ qq}} \frac{i \not{p} \gamma_5 \tau^+}{M_u + M_d} \right)$$

Podemos então identificar que

$$g_{\pi^+ qq}^{-2} = -\frac{1}{G_S \left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right]} \frac{\partial D_{\pi^+}}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_{\pi^+}^2} \\ \frac{\tilde{g}_{\pi^+ qq}}{g_{\pi^+ qq}} = -\frac{(M_u + M_d)}{m_{\pi^+}} \frac{G_V \left[\Pi_{\pi^+}^{AP} (m_{\pi^+}^2) \right]}{1 + G_V \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right]}$$

em que

$$\frac{\partial D_{\pi^+}}{\partial p^2} = -G_S \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{PP}}{\partial p^2} + G_V \frac{\partial \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}}{\partial p^2} \\ - G_S G_V \left(\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{PP}}{\partial p^2} + \Pi_{\pi^+}^{PP} \frac{\partial \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}}{\partial p^2} - 2 \Pi_{\pi^+}^{AP} \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{AP}}{\partial p^2} \right)$$

Comparando as Eqs. (102) e (103) notamos a relação

$$\left[\Pi_{\pi^+}^{AP} (m_{\pi^+}^2) \right] = -\frac{m_{\pi^+}}{(M_u + M_d)} \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right]$$

tal que

$$\frac{\tilde{g}_{\pi^+ qq}}{g_{\pi^+ qq}} = \frac{G_V \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right]}{1 + G_V \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right]}$$

Derivando as funções polarização obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{PP}}{\partial p^2} = & -4N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & - \frac{N_c}{4\pi^2} \left[p^2 - (M_u - M_d)^2 \right] \left[Y_1 (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\pi^+}^{AP}}{\partial p^2} = & 2N_c \frac{(M_u + M_d)}{\sqrt{p^2}} \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & + \frac{N_c}{4\pi^2} (M_u + M_d) \sqrt{p^2} \left[Y_1 (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\ & + \frac{N_c}{8\pi^2} \frac{(M_u - M_d)}{\sqrt{p^2}} \\ & \quad \times \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - 2\xi_1^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\ & + \frac{N_c}{4\pi^2} (M_u - M_d) \sqrt{p^2} \\ & \quad \times \left[Y_0 (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - 2Y_2 (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}}{\partial p^2} = & -\frac{N_c}{4\pi^2} (M_u + M_d)^2 \left[Y_1 (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\ & - \frac{N_c}{4\pi^2} (M_u^2 - M_d^2) \left[Y_1 (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - 2Y_2 (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \end{aligned}$$

A constante de decaimento do pión carregado é definida por

$$\begin{aligned}
i f_{\pi^+} p_\mu \delta_{ij} = & N_c g_{\pi^+ qq} \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i \gamma_\mu \gamma_5 \left(\frac{\tau^-}{2} \right)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\
& \left. \times i \gamma_5 (\tau^+)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\
& + N_c \frac{\tilde{g}_{\pi^+ qq}}{M_u + M_d} p^\nu \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i \gamma_\mu \gamma_5 \left(\frac{\tau^-}{2} \right)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\
& \left. \times i \gamma_\nu \gamma_5 (\tau^+)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\}
\end{aligned}$$

Somando sobre os índices de sabor temos

$$\begin{aligned}
f_{\pi^+} = & i N_c g_{\pi^+ qq} \frac{p^\mu}{p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 S^u(k+k_1) \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\
& - i N_c \frac{\tilde{g}_{\pi^+ qq}}{M_u + M_d} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 S^u(k+k_1) \gamma_\nu \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
f_{\pi^+} = & - \frac{g_{\pi^+ qq}}{2\sqrt{p^2}} \left\{ -2i N_c \hat{p}^\mu [\mathcal{T}_\mu^{AP}(M_u, M_d)] \right\} \\
& - \frac{\tilde{g}_{\pi^+ qq}}{2(M_u + M_d)} \left\{ 2i N_c \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(M_u, M_d)] \right\}
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi^+}^{AP} &= -2i N_c \hat{p}^\mu [\mathcal{T}_\mu^{AP}(M_u, M_d)] \\
\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} &= 2i N_c \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(M_u, M_d)]
\end{aligned}$$

podemos escrever

$$f_{\pi^+} = - \frac{g_{\pi^+ qq}}{2m_{\pi^+}} \left\{ [\Pi_{\pi^+}^{AP}(m_{\pi^+}^2)] + \frac{\tilde{g}_{\pi^+ qq}}{g_{\pi^+ qq}} \frac{m_{\pi^+}}{(M_u + M_d)} [\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2)] \right\}$$

Comparando as Eqs. (102) e (103) notamos a relação

$$[\Pi_{\pi^+}^{AP} (m_{\pi^+}^2)] = -\frac{m_{\pi^+}}{(M_u + M_d)} [\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2)]$$

tal que

$$f_{\pi^+} = \frac{g_{\pi^+qq}}{2(M_u + M_d)} \left(1 - \frac{\tilde{g}_{\pi^+qq}}{g_{\pi^+qq}}\right) [\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2)]$$

4.2.2 Píon Neutro

A fenomenologia do píon neutro pode ser obtida de maneira inteiramente análoga ao procedimento que realizamos para o píon carregado na seção acima. Por isso, no que segue, descreveremos somente os principais passos dos cálculos. A matriz de espalhamento no canal do píon neutro pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_P^{(\pi^0)}(q) &= [M_{\pi^0}^{PP}] (i\gamma_5\tau_3 \otimes i\gamma_5\tau_3) + [M_{\pi^0}^{PA}] \left(i\gamma_5\tau_3 \otimes i\hat{p}\gamma_5\tau_3\right) \\ &+ [M_{\pi^0}^{AP}] \left(-i\hat{p}\gamma_5\tau_3 \otimes i\gamma_5\tau_3\right) + [M_{(L)\pi^0}^{AA}] \left(-i\hat{p}\gamma_5\tau_3 \otimes i\hat{p}\gamma_5\tau_3\right) \end{aligned}$$

em que

$$M_{\pi^0} = \frac{1}{D_{\pi^0}} \begin{pmatrix} M_{\pi^0}^{PP} & M_{\pi^0}^{PA} \\ M_{\pi^0}^{AP} & M_{\pi^0}^{AA} \end{pmatrix}$$

observando que $M_{\pi^0}^{PA} = M_{\pi^0}^{AP}$. Os elementos da matriz M_{π^0} são dados por

$$\begin{aligned} M_{\pi^0}^{PP} &= \frac{2G_S}{D_{\pi^0}} \left(1 + 2G_V \Pi_{(L)\pi^0}^{AA}\right) \\ M_{\pi^0}^{PA} &= M_{\pi^0}^{AP} = -\frac{4G_S G_V}{D_{\pi^0}} \Pi_{\pi^0}^{AP} \\ M_{\pi^0}^{AA} &= -\frac{2G_V}{D_{\pi^0}} \left(1 - 2G_S \Pi_{\pi^0}^{PP}\right) \end{aligned}$$

com o determinante D_{π^0} escrito na forma

$$D_{\pi^0} = 1 - G_S \Pi_{\pi^0}^{PP} + G_V \Pi_{(L)\pi^0}^{AA} - G_S G_V \left[\Pi_{\pi^0}^{PP} \Pi_{(L)\pi^0}^{AA} - (\Pi_{\pi^0}^{AP})^2 \right]$$

As funções polarização, por sua vez, são dadas por

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi^0}^{PP} &= iN_c \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_5 (\tau_3)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times i\gamma_5 (\tau_3)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\ &= -iN_c [\mathcal{T}^{PP}(M_u, M_u) + \mathcal{T}^{PP}(M_d, M_d)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi^0}^{AP} &= iN_c \hat{p}^\mu \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_\mu \gamma_5 (\tau_3)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times i\gamma_5 (\tau_3)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\ &= -iN_c \hat{p}^\mu [\mathcal{T}_\mu^{AP}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_\mu^{AP}(M_d, M_d)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(L)\pi^0}^{AA} &= iN_c \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ -i\gamma_\mu \gamma_5 (\tau_3)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times i\gamma_\nu \gamma_5 (\tau_3)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\ &= iN_c \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(M_d, M_d)] \end{aligned}$$

notando que $\Pi_{\pi^0}^{AP} = \Pi_{\pi^0}^{PA}$. Com os resultados obtidos, para as amplitudes físicas, Eqs. (38), (40) e (42), podemos escrever expressões explícitas para as funções

polarização. Ou seja

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi^0}^{PP} &= 4N_c \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)} (M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)} (M_d^2) \right] \right\} \\ &\quad - 2N_c p^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad - 2N_c p^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi^0}^{AP} &= 4N_c M_u \sqrt{p^2} \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad + 4N_c M_d \sqrt{p^2} \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(L)\pi^0}^{AA} &= -8N_c M_u^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad - 8N_c M_d^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (107)$$

A massa do pión neutro é definida pela condição $D_{\pi^0} (q^2)|_{q^2=m_{\pi^0}^2} = 0$ ou, explicitamente, pela solução da equação

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - G_S [\Pi_{\pi^0}^{PP} (m_{\pi^0}^2)] + G_V [\Pi_{(L)\pi^0}^{AA} (m_{\pi^0}^2)] \\ &\quad - G_S G_V \left\{ [\Pi_{\pi^0}^{PP} (m_{\pi^0}^2)] [\Pi_{(L)\pi^0}^{AA} (m_{\pi^0}^2)] - [\Pi_{\pi^0}^{AP} (m_{\pi^0}^2)]^2 \right\} \end{aligned}$$

As constantes de acoplamento efetiva são obtidas como sendo

$$\begin{aligned} g_{\pi^0 qq}^{-2} &= - \frac{1}{G_S \left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi^0}^{AA} (m_{\pi^0}^2) \right]} \left. \frac{\partial D_{\pi^0}}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_{\pi^0}^2} \\ \tilde{g}_{\pi^0 qq} &= - \frac{(M_u + M_d)}{m_{\pi^0}} \frac{G_V [\Pi_{\pi^0}^{AP} (m_{\pi^0}^2)]}{1 + G_V [\Pi_{(L)\pi^0}^{AA} (m_{\pi^0}^2)]} \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\pi^0}}{\partial p^2} &= -G_S \frac{\partial \Pi_{\pi^0}^{PP}}{\partial p^2} + G_V \frac{\partial \Pi_{(L)\pi^0}^{AA}}{\partial p^2} \\ &\quad - G_S G_V \left[\frac{\partial \Pi_{\pi^0}^{PP}}{\partial p^2} \Pi_{(L)\pi^0}^{AA} + \Pi_{\pi^0}^{PP} \frac{\partial \Pi_{(L)\pi^0}^{AA}}{\partial p^2} - 2 \Pi_{\pi^0}^{AP} \frac{\partial \Pi_{\pi^0}^{AP}}{\partial p^2} \right] \end{aligned}$$

As derivadas das funções polarização são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\pi^0}^{PP}}{\partial p^2} &= -2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad - 2N_c \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{N_c}{8\pi^2} p^2 \left\{ [Y_1(p^2; M_u^2, M_u^2)] + [Y_1(p^2; M_d^2, M_d^2)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\pi^0}^{AP}}{\partial p^2} &= 2N_c \frac{M_u}{\sqrt{p^2}} \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad + 2N_c \frac{M_d}{\sqrt{p^2}} \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ &\quad + \frac{N_c}{4\pi^2} \sqrt{p^2} \left\{ M_u [Y_1(p^2; M_u^2, M_u^2)] + M_d [Y_1(p^2; M_d^2, M_d^2)] \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_{(L)\pi^0}^{AA}}{\partial p^2} = -\frac{N_c}{2\pi^2} \left\{ M_u^2 [Y_1(p^2; M_u^2, M_u^2)] + M_d^2 [Y_1(p^2; M_d^2, M_d^2)] \right\}$$

A constante de decaimento f_{π^0} é definida por

$$\begin{aligned}
i f_{\pi^0} p_\mu &= N_c g_{\pi^0 qq} \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ i \gamma_\mu \gamma_5 \left(\frac{\tau_3}{2} \right)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k + k_1) \right. \\
&\quad \left. \times i \gamma_5 (\tau_3)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k + k_2) \right\} \\
&\quad - N_c \tilde{g}_{\pi^0 qq} \frac{p_\nu}{M_u + M_d} \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ i \gamma_\mu \gamma_5 \left(\frac{\tau_3}{2} \right)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k + k_1) \right. \\
&\quad \left. \times i \gamma_\nu \gamma_5 (\tau_3)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k + k_2) \right\}
\end{aligned}$$

Realizando a soma sobre os índices de sabor temos

$$\begin{aligned}
f_{\pi^0} &= -\frac{g_{\pi^0 qq}}{2\sqrt{p^2}} \left\{ -i N_c \hat{p}^\mu [\mathcal{T}_\mu^{AP}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_\mu^{AP}(M_d, M_d)] \right\} \\
&\quad - \frac{\tilde{g}_{\pi^0 qq}}{2(M_u + M_d)} \left\{ i N_c \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(M_d, M_d)] \right\}
\end{aligned}$$

Em termos das funções de polarização ficamos com

$$f_{\pi^0} = -\frac{g_{\pi^0 qq}}{2m_{\pi^0}} \left\{ [\Pi_{\pi^0}^{AP}(m_{\pi^0}^2)] + \frac{\tilde{g}_{\pi^0 qq}}{g_{\pi^0 qq}} \frac{m_{\pi^0}}{(M_u + M_d)} [\Pi_{(L)\pi^0}^{AA}(m_{\pi^0}^2)] \right\}$$

Usando os resultados (106) e (107) obtemos

$$\begin{aligned}
f_{\pi^0} (g_{\pi^0 qq})^{-1} = & -2N_c M_u \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - 2N_c M_d \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& + 4N_c \frac{\tilde{g}_{\pi^0 qq}}{g_{\pi^0 qq}} \frac{M_u^2}{(M_u + M_d)} \\
& \quad \times \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& + 8N_c \frac{\tilde{g}_{\pi^0 qq}}{g_{\pi^0 qq}} \frac{M_d^2}{2(M_u + M_d)} \\
& \quad \times \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (m_{\pi^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Com isso, completamos a formulação das equações básicas para a descrição da fenomenologia do pión neutro. A seguir, consideremos a fenomenologia dos mésons vetoriais.

4.3 Mésons Vetoriais

No setor vetorial do modelo, podemos descrever a fenomenologia dos mésons ρ . O méson ρ é formado por um estado ligado quark-antiquark com números quânticos correspondentes a uma partícula vetorial (spin 1 e paridade positiva). No espaço de isospin, os mésons ρ formam um tripleto com as correspondentes projeções de isospin dadas por ρ^+ , ρ^0 , ρ^- . Consideremos primeiro os ρ 's carregados.

4.3.1 ρ Carregado

No canal vetorial, temos a seguinte estrutura para a matriz de espalhamento

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{(\rho^+)} = T^{\mu\nu} \left\{ M_{(T)\rho^+}^{VV} (\gamma_\mu \tau^- \otimes \gamma_\nu \tau^+) + \sqrt{2} M_{\rho^+}^{VT} (\gamma_\mu \tau^- \otimes i\sigma_{\nu\lambda} \hat{p}^\lambda \tau^+) \right. \\ \left. + \sqrt{2} M_{\rho^+}^{TV} (-i\sigma_{\mu\lambda} \hat{p}^\lambda \tau^- \otimes \gamma_\nu \tau^+) \right. \\ \left. + 2M_{(L)\rho^+}^{TT} (-i\sigma_{\mu\lambda} \hat{p}^\lambda \tau^- \otimes i\sigma_{\nu\kappa} \hat{p}^\kappa \tau^+) \right\} \end{aligned} \quad (108)$$

em que

$$M_{\rho^+} = K (1 - \Pi_{\rho^+} K)^{-1}$$

e

$$K = \begin{pmatrix} -G_V & 0 \\ 0 & -G_T \end{pmatrix},$$

$$\Pi_{\rho^+} = \begin{pmatrix} \Pi_{(T)\rho^+}^{VV} & \Pi_{\rho^+}^{VT} \\ \Pi_{\rho^+}^{TV} & \Pi_{(L)\rho^+}^{TT} \end{pmatrix}$$

As funções polarizações são definidas por

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} \Pi_{(T)\rho^+}^{VV} (T^{\mu\alpha} \gamma_\alpha, T^{\nu\beta} \gamma_\beta) &= 2iN_c T^{\mu\alpha} T^{\nu\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\alpha S^u(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_\beta S^d(k+k_2) \right\} \\ &= 2iN_c T^{\mu\alpha} T^{\nu\beta} [\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{VV} (M_u, M_d)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu}^{\mu} \Pi_{\rho^{+}}^{VT} \left(T^{\mu\beta} \gamma_{\beta}, -i\sqrt{2} \sigma_{\nu\lambda} \hat{p}^{\lambda} \right) &= 2\sqrt{2} N_c T^{\mu\beta} \hat{p}^{\lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_{\beta} S^u (k + k_1) \right. \\
&\quad \left. \times \sigma_{\nu\lambda} S^d (k + k_2) \right\} \\
&= 2\sqrt{2} N_c T^{\mu\beta} \hat{p}^{\lambda} [\mathcal{T}_{\beta\nu\lambda}^{VT} (M_u, M_d)] \\
&= 2\sqrt{2} N_c T^{\mu\beta} \left\{ \hat{p}_{\beta} [T_{\nu}^{PA}] - g_{\beta\nu} \hat{p}^{\lambda} [T_{\lambda}^{PA}] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} \Pi_{(L)\rho^{+}}^{TT} \left(i\sqrt{2} \sigma_{\mu\lambda} \hat{p}^{\lambda}, -i\sqrt{2} \sigma_{\nu\kappa} \hat{p}^{\kappa} \right) \\
&= 4i N_c \hat{p}^{\lambda} \hat{p}^{\kappa} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \sigma_{\mu\lambda} S^u (k + k_1) \sigma_{\nu\kappa} S^d (k + k_2) \right\} \\
&= 4i N_c \hat{p}^{\lambda} \hat{p}^{\kappa} [\mathcal{T}_{\mu\lambda\nu\kappa}^{TT} (M_u, M_d)] \\
&= 4i N_c \left\{ \hat{p}_{\nu} \hat{p}^{\lambda} [\mathcal{T}_{\mu\lambda}^{AA}] + \hat{p}_{\mu} \hat{p}^{\lambda} [\mathcal{T}_{\nu\lambda}^{AA}] \right. \\
&\quad \left. - g_{\mu\nu} \hat{p}^{\kappa} \hat{p}^{\lambda} [\mathcal{T}_{\lambda\kappa}^{AA}] - [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}] \right. \\
&\quad \left. + (\hat{p}_{\mu} \hat{p}_{\nu} - g_{\mu\nu}) [\mathcal{T}^{SS}] \right\}
\end{aligned}$$

Com os resultados (41), (43) e (44), obtemos

$$\begin{aligned}
\Pi_{(T)\rho^{+}}^{VV} &= 4N_c \left(\frac{2p^2}{3} - (M_u - M_d)^2 \right) \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{\pi^2} p^2 \left\{ \left[\xi_2^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] - \left[\xi_1^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{N_c}{2\pi^2} (M_u - M_d) \left\{ M_u \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \quad \left. - (M_u + M_d) \left[\xi_1^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\rho^+}^{VT} &= -4\sqrt{2}N_c (M_u + M_d) \sqrt{p^2} \\
&\quad \times \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} N_c (M_u - M_d) \sqrt{p^2} \\
&\quad \times \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - 2\xi_1^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{(L)\rho^+}^{TT} &= 8N_c \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)} (M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)} (M_d^2) \right] \right\} \\
&\quad - 8N_c \left[\frac{1}{3}p^2 + (M_u + M_d)^2 \right] \left[i I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{2N_c}{\pi^2} p^2 \left\{ \left[\xi_2^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] - \left[\xi_1^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{N_c}{2\pi^2} \left[p^2 + (M_u + M_d)^2 \right] \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{\pi^2} (M_u^2 - M_d^2) \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - 2\xi_1^{(0)} (p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned} \tag{109}$$

Note que

$$\begin{aligned}
1 - \Pi_{\rho^+} K &= \begin{pmatrix} 1 + G_V \Pi_{(T)\rho^+}^{VV} & G_T \Pi_{\rho^+}^{VT} \\ G_V \Pi_{\rho^+}^{TV} & 1 + G_T \Pi_{(L)\rho^+}^{TT} \end{pmatrix} \\
(1 - \Pi_{\rho^+} K)^{-1} &= \frac{1}{D_{\rho^+}} \begin{pmatrix} 1 + G_T \Pi_{(L)\rho^+}^{TT} & -G_T \Pi_{\rho^+}^{VT} \\ -G_V \Pi_{\rho^+}^{TV} & 1 + G_V \Pi_{(T)\rho^+}^{VV} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
D_{\rho^+} &= \det (1 - \Pi_{\rho^+} K) \\
&= 1 + G_V \Pi_{(T)\rho^+}^{VV} + G_T \Pi_{(L)\rho^+}^{TT} + G_V G_T \left[\Pi_{(L)\rho^+}^{TT} \Pi_{(T)\rho^+}^{VV} - \Pi_{\rho^+}^{VT} \Pi_{\rho^+}^{TV} \right]
\end{aligned}$$

Calculando a matriz M_{ρ^+} temos

$$\begin{aligned} M_{\rho^+} &= \frac{1}{D_{\rho^+}} \begin{pmatrix} -G_V & 0 \\ 0 & -G_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + G_T \Pi_{(L)\rho^+}^{TT} & -G_T \Pi_{\rho^+}^{VT} \\ -G_V \Pi_{\rho^+}^{TV} & 1 + G_V \Pi_{(T)\rho^+}^{VV} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D_{\rho^+}} \begin{pmatrix} -G_V \left(1 + G_T \Pi_{(L)\rho^+}^{TT}\right) & G_V G_T \Pi_{\rho^+}^{VT} \\ G_V G_T \Pi_{\rho^+}^{TV} & -G_T \left(1 + G_V \Pi_{(T)\rho^+}^{VV}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} M_{\rho^+}^{VV} &= -\frac{G_V}{D_{\rho^+}} \left(1 + G_T \left[\Pi_{(L)\rho^+}^{TT}\right]\right) \\ M_{\rho^+}^{VT} &= M_{\rho^+}^{TV} = \frac{G_V G_T}{D_{\rho^+}} \left[\Pi_{\rho^+}^{VT}\right] \\ M_{\rho^+}^{TT} &= -\frac{G_T}{D_{\rho^+}} \left(1 + G_V \left[\Pi_{(T)\rho^+}^{VV}\right]\right) \end{aligned}$$

em que usamos $\Pi_{\rho^+}^{VT} = \Pi_{\rho^+}^{TV}$ pois $\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda}^{VT}(M_u, M_d) = -\mathcal{T}_{\mu\lambda\nu}^{TV}(M_u, M_d)$.

Do polo de M_{ρ^+}

$$D_{\rho^+}(p^2)|_{p^2=m_{\rho^+}^2} = 0$$

obtemos a equação que fornece a massa de ρ^+

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + G_V \left[\Pi_{(T)\rho^+}^{VV}(m_{\rho^+}^2)\right] + G_T \left[\Pi_{(L)\rho^+}^{TT}(m_{\rho^+}^2)\right] \\ &\quad + G_V G_T \left\{ \left[\Pi_{(L)\rho^+}^{TT}(m_{\rho^+}^2)\right] \left[\Pi_{(T)\rho^+}^{VV}(m_{\rho^+}^2)\right] - \left[\Pi_{\rho^+}^{VT}(m_{\rho^+}^2)\right]^2 \right\} \end{aligned}$$

A interação efetiva que acopla um campo vetorial aos quarks e antiquarks pode ser escrito na forma

$$\mathcal{L}_{int} = g_{\rho^+ qq} \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\tau^+}{2} \psi(x) \rho_+^\mu(x) + \frac{\tilde{g}_{\rho^+ qq}}{M_u + M_d} \bar{\psi}(x) i\sigma_{\mu\nu} \frac{\tau^+}{2} \psi(x) \partial^\mu \rho_+^\nu(x)$$

em que g_{ρ^+qq} e \tilde{g}_{ρ^+qq} são duas constantes de acoplamento efetivas ρ -quark-antiquark. A matriz de espalhamento, construída dessa Lagrangeana, próxima ao polo, tem, a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(\rho^+)} \approx & \frac{g_{\rho^+qq}^2}{4} T_{\mu\nu} \left(\gamma^\mu - \frac{\tilde{g}_{\rho^+qq}}{g_{\rho^+qq}} \frac{i\sigma^{\mu\lambda} p_\lambda}{M_u + M_d} \right) \tau^- \\ & \frac{\otimes}{(p^2 - m_{\rho^+}^2)} \left(\gamma^\nu + \frac{\tilde{g}_{\rho^+qq}}{g_{\rho^+qq}} \frac{i\sigma^{\nu\lambda} p_\lambda}{M_u + M_d} \right) \tau^+ \end{aligned} \quad (110)$$

As constantes de acoplamento efetiva g_{ρ^+qq} e \tilde{g}_{ρ^+qq} podem ser obtidas do resíduo de $\mathcal{T}_V^{(\rho^+)}$. Primeiro podemos organizar (108) como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{(\rho^+)} = & M_{(T)}^{VV} T^{\mu\nu} \left\{ (\gamma_\mu \tau^- \otimes \gamma_\nu \tau^+) + \sqrt{2} \frac{M^{VT}}{M_{(T)}^{VV}} (\gamma_\mu \tau^- \otimes i\sigma_{\nu\lambda} \hat{p}^\lambda \tau^+) \right. \\ & + \sqrt{2} \frac{M^{TV}}{M_{(T)}^{VV}} (-i\sigma_{\mu\lambda} \hat{p}^\lambda \tau^- \otimes \gamma_\nu \tau^+) \\ & \left. + 2 \frac{M_{(L)}^{TT}}{M_{(T)}^{VV}} (-i\sigma_{\mu\lambda} \hat{p}^\lambda \tau^- \otimes i\sigma_{\nu\kappa} \hat{p}^\kappa \tau^+) \right\} \end{aligned}$$

Para $p^2 = m_{\rho^+}^2$ temos que

$$\frac{M_{(L)}^{TT}}{M_{(T)}^{VV}} \Big|_{q^2=m_{\rho^+}^2} = \left(\frac{M^{VT}}{M_{(T)}^{VV}} \right)^2 \Big|_{p^2=m_{\rho^+}^2} .$$

Definindo

$$a_{\rho^+} = \frac{M^{VT}}{M_{(T)}^{VV}} \Big|_{p^2=m_{\rho^+}^2} = - \frac{G_T [\Pi_{\rho^+}^{VT}]}{[1 + G_T \Pi_{(L)\rho^+}^{TT}]}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{(\rho^+)} = M_{(T)}^{VV} T^{\mu\nu} & \left\{ (\gamma_\mu \tau^- \otimes \gamma_\nu \tau^+) + \sqrt{2} a_{\rho^+} (\gamma_\mu \tau^- \otimes i \sigma_{\nu\lambda} \hat{p}^\lambda \tau^+) \right. \\ & + \sqrt{2} a_{\rho^+} (-i \sigma_{\mu\lambda} \hat{p}^\lambda \tau^- \otimes \gamma_\nu \tau^+) \\ & \left. + 2 a_{\rho^+}^2 (-i \sigma_{\mu\lambda} \hat{p}^\lambda \tau^- \otimes i \sigma_{\nu\kappa} \hat{p}^\kappa \tau^+) \right\} \end{aligned}$$

Expandindo $M_{(T)}^{VV}$ em torno do polo temos

$$\begin{aligned} M_{(T)}^{VV} & \approx -G_V \left(1 + G_T \left[\Pi_{(L)\rho^+}^{TT} (m_{\rho^+}^2) \right] \right) \\ & \times \left(\frac{\partial D_{\rho^+}}{\partial p^2} \right)^{-1} \Bigg|_{p^2=m_{\rho^+}^2} \frac{1}{(p^2 - m_{\rho^+}^2)} \end{aligned}$$

e, assim

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{(\rho^+)} & \approx -G_V \left(1 + G_T \left[\Pi_{(L)\rho^+}^{TT} (m_{\rho^+}^2) \right] \right) \left(\frac{\partial D_{\rho^+}}{\partial p^2} \right)^{-1} \Bigg|_{p^2=m_{\rho^+}^2} \\ & \times T^{\mu\nu} \left(\gamma_\mu - i\sqrt{2} \sigma_{\mu\lambda} \hat{p}^\lambda a_{\rho^+} \right) \tau^- \\ & \frac{\otimes}{(p^2 - m_{\rho^+}^2)} \left(\gamma_\nu + i\sqrt{2} \sigma_{\nu\kappa} \hat{p}^\kappa a_{\rho^+} \right) \tau^+ \end{aligned}$$

Comparando com (110) obtemos

$$\begin{aligned} g_{\rho^+ qq}^{-2} & = -\frac{1}{4G_V \left[1 + G_T \Pi_{(L)\rho^+}^{TT} (m_{\rho^+}^2) \right]} \frac{\partial D_{\rho^+}}{\partial p^2} \Bigg|_{p^2=m_{\rho^+}^2}, \\ \frac{\tilde{g}_{\rho^+ qq}}{g_{\rho^+ qq}} & = -\sqrt{2} (M_u + M_d) \frac{a_{\rho^+}}{m_{\rho^+}} \\ & = \sqrt{2} \frac{(M_u + M_d)}{m_{\rho^+}} \frac{G_T \left[\Pi_{\rho^+}^{VT} \right]}{\left[1 + G_T \Pi_{(L)\rho^+}^{TT} \right]} \end{aligned}$$

A constante de decaimento do méson ρ^+ (f_{ρ^+}) é definida, usualmente, pelos seguintes elementos de matriz

$$\left\langle 0 \left| \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\tau^+}{2} \psi(x) \right| \rho^+ \right\rangle = \frac{m_{\rho^+}^2}{f_{\rho^+}} \varepsilon_\mu$$

em que ε_μ é o vetor polarização. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu \frac{m_{\rho^+}^2}{f_{\rho^+}} &= -\frac{iN_c}{2} g_{\rho^+qq} T^{\mu\alpha} T_\nu^\beta \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\alpha \left(\frac{\tau^-}{2} \right)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_\beta \left(\frac{\tau^+}{2} \right)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \\ &+ \frac{N_c}{2} \frac{\tilde{g}_{\rho^+qq}}{M_u + M_d} T^{\mu\beta} p^\lambda \sum_{f_1 f_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\beta \left(\frac{\tau^-}{2} \right)_{f_2 f_1} S^{f_1}(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times \sigma_{\nu\lambda} \left(\frac{\tau^+}{2} \right)_{f_1 f_2} S^{f_2}(k+k_2) \right\} \end{aligned}$$

Somando sobre os índices de sabor temos

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu \frac{4m_{\rho^+}^2}{f_{\rho^+}} &= -2iN_c g_{\rho^+qq} T^{\mu\alpha} T_\nu^\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\alpha S^u(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_\beta S^d(k+k_2) \right\} \\ &+ 2N_c \frac{\tilde{g}_{\rho^+qq}}{M_u + M_d} T^{\mu\beta} p^\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\beta S^u(k+k_1) \right. \\ &\quad \left. \times \sigma_{\nu\lambda} S^d(k+k_2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu \frac{4m_{\rho^+}^2}{f_{\rho^+}} &= -g_{\rho^+qq} \left\{ 2iN_c T^{\mu\alpha} T_\nu^\beta [\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{VV}(M_u, M_d)] \right\} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{g}_{\rho^+qq}}{M_u + M_d} \sqrt{p^2} \left\{ 2\sqrt{2} N_c T^{\mu\beta} \hat{p}^\lambda [\mathcal{T}_{\beta\nu\lambda}^{VT}(M_u, M_d)] \right\} \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}\Pi_{(T)\rho^+}^{VV} &= 2iN_c T^{\mu\alpha}T^{\nu\beta} [\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{VV}(M_u, M_d)] \\ T_\nu^\mu\Pi_{\rho^+}^{VT} &= 2\sqrt{2}N_c T^{\mu\beta}\hat{p}^\lambda [\mathcal{T}_{\beta\nu\lambda}^{VT}(M_u, M_d)] \end{aligned}$$

e então

$$\frac{4m_{\rho^+}^2}{f_{\rho^+}} = -g_{\rho^+qq} \left\{ \left[\Pi_{(T)}^{VV}(m_{\rho^+}^2) \right] - \frac{\tilde{g}_{\rho^+qq}}{g_{\rho^+qq}} \frac{m_{\rho^+}}{M_u + M_d} \frac{\left[\Pi^{VT}(m_{\rho^+}^2) \right]}{\sqrt{2}} \right\}$$

4.3.2 ρ Neutro

Para o méson ρ neutro temos resultados similares aos obtidos para o méson carregado. Simplesmente explicitaremos os resultados de interesse. As funções polarizações necessárias para a fenomenologia do ρ neutro são

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}\Pi_{(T)\rho^0}^{VV} &= iN_c T^{\mu\alpha}T^{\nu\beta} [\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{VV}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\alpha\beta}^{VV}(M_d, M_d)] \\ T_\nu^\mu\Pi_{\rho^0}^{VT} &= \sqrt{2}N_c T^{\mu\beta}\hat{p}^\lambda [\mathcal{T}_{\beta\nu\lambda}^{VT}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\beta\nu\lambda}^{VT}(M_d, M_d)] \\ &= \sqrt{2}N_c T^{\mu\beta} \left\{ \hat{p}_\beta [T_\nu^{PA}(M_u, M_u) + T_\nu^{PA}(M_d, M_d)] \right. \\ &\quad \left. - g_{\beta\nu}\hat{p}^\lambda [T_\lambda^{PA}(M_u, M_u) + T_\lambda^{PA}(M_d, M_d)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu}\Pi_{(L)\rho^0}^{TT} &= 2iN_c\widehat{p}^\lambda\widehat{p}^\kappa [\mathcal{T}_{\mu\lambda\nu\kappa}^{TT}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\mu\lambda\nu\kappa}^{TT}(M_d, M_d)] \\
&= 2iN_c \left\{ \widehat{p}_\nu\widehat{p}^\lambda [\mathcal{T}_{\mu\lambda}^{AA}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\mu\lambda}^{AA}(M_d, M_d)] \right. \\
&\quad + \widehat{p}_\mu\widehat{p}^\lambda [\mathcal{T}_{\nu\lambda}^{AA}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\nu\lambda}^{AA}(M_d, M_d)] \\
&\quad - g_{\mu\nu}\widehat{p}^\kappa\widehat{p}^\lambda [T_{\lambda\kappa}^{AA}(M_u, M_u) + T_{\lambda\kappa}^{AA}(M_d, M_d)] \\
&\quad - [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(M_d, M_d)] \\
&\quad \left. - (g_{\mu\nu} - \widehat{p}_\mu\widehat{p}_\nu) [\mathcal{T}^{SS}(M_u, M_u) + \mathcal{T}^{SS}(M_d, M_d)] \right\}
\end{aligned}$$

Com os resultados (40), (42) e (41) temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{(T)\rho^0}^{VV} &= \frac{8N_c}{3}p^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{2\pi^2}p^2 \left\{ \left[\xi_2^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_2^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_1^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\rho^0}^{VT} &= -4\sqrt{2}N_c\sqrt{p^2}(M_u + M_d) \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{4\pi^2}\sqrt{2}M_u\sqrt{p^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{4\pi^2}\sqrt{2}M_d\sqrt{p^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{(L)\rho^0}^{TT} = & 8N_c \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] \right\} \\
& - 8N_c \left[\frac{1}{3} p^2 + 2(M_u^2 + M_d^2) \right] \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
& - \frac{N_c}{\pi^2} p^2 \left\{ \left[\xi_2^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] - \left[\xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - \frac{N_c}{\pi^2} p^2 \left\{ \left[\xi_2^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] - \left[\xi_1^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& - \frac{N_c}{4\pi^2} (p^2 + 4M_u^2) \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \\
& - \frac{N_c}{4\pi^2} (p^2 + 4M_d^2) \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

A massa e as constantes de acoplamento efetivas são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
0 = & 1 + G_V \left[\Pi_{(T)\rho^0}^{VV}(m_{\rho^+}^2) \right] + G_T \left[\Pi_{(L)\rho^0}^{TT}(m_{\rho^+}^2) \right] \\
& + G_V G_T \left\{ \Pi_{(L)\rho^0}^{TT}(m_{\rho^+}^2) \Pi_{(T)\rho^0}^{VV}(m_{\rho^+}^2) - \left[\Pi_{\rho^0}^{VT}(m_{\rho^+}^2) \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\rho^0 qq}^{-2} = & - \frac{1}{4G_V \left[1 + G_T \Pi_{(L)\rho^+}^{TT}(m_{\rho^+}^2) \right]} \frac{\partial D_{\rho^0}}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_{\rho^0}^2}, \\
\frac{\tilde{g}_{\rho^0 qq}}{g_{\rho^0 qq}} = & \sqrt{2} \frac{(M_u + M_d)}{m_{\rho^0}} \frac{G_T \left[\Pi_{\rho^0}^{VT} \right]}{\left[1 + G_T \Pi_{(L)\rho^0}^{TT} \right]}
\end{aligned}$$

em que

$$D_{\rho^0} = 1 + G_V \Pi_{(T)\rho^0}^{VV} + G_T \Pi_{(L)\rho^0}^{TT} + G_V G_T \left[\Pi_{(L)\rho^0}^{TT} \Pi_{(T)\rho^0}^{VV} - \Pi_{\rho^0}^{VT} \Pi_{\rho^0}^{TV} \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D_{\rho^0}}{\partial p^2} &= G_V \frac{\partial \Pi_{(T)\rho^0}^{VV}}{\partial p^2} + G_T \frac{\partial \Pi_{(L)\rho^0}^{TT}}{\partial p^2} \\
&\quad - 2G_V G_T \frac{\partial \Pi_{\rho^0}^{VT}}{\partial p^2} \\
&\quad + G_V G_T \left[\frac{\partial \Pi_{(L)\rho^0}^{TT}}{\partial p^2} \Pi_{(T)\rho^0}^{VV} + \Pi_{(L)\rho^0}^{TT} \frac{\partial \Pi_{(T)\rho^0}^{VV}}{\partial p^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_{(T)\rho^0}^{VV}}{\partial p^2} &= \frac{8N_c}{3} \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{2\pi^2} \left\{ \left[\xi_2^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_2^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \quad \left. - \left[\xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_1^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{N_c}{2\pi^2} p^2 \left\{ \left[Y_3(p^2; M_u^2, M_u^2) + Y_3(p^2; M_d^2, M_d^2) \right] \right. \\
&\quad \quad \left. - \left[Y_2(p^2; M_u^2, M_u^2) + Y_2(p^2; M_d^2, M_d^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_{\rho^0}^{VT}}{\partial p^2} &= -2\sqrt{2}N_c (M_u + M_d) \frac{1}{\sqrt{p^2}} \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{8\pi^2} \sqrt{2}M_u \frac{1}{\sqrt{p^2}} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{8\pi^2} \sqrt{2}M_d \frac{1}{\sqrt{p^2}} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{4\pi^2} \sqrt{2}M_u \sqrt{p^2} \left[Y_1(p^2; M_u^2, M_u^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{4\pi^2} \sqrt{2}M_d \sqrt{p^2} \left[Y_1(p^2; M_d^2, M_d^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_{(L)\rho^0}^{TT}}{\partial p^2} &= -\frac{8N_c}{3} \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&- \frac{N_c}{\pi^2} \left\{ \left[\xi_2^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] - \left[\xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&- \frac{N_c}{\pi^2} \left\{ \left[\xi_2^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] - \left[\xi_1^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&- \frac{N_c}{\pi^2} p^2 \left\{ \left[Y_3(p^2; M_u^2, M_u^2) \right] - \left[Y_2(p^2; M_u^2, M_u^2) \right] \right\} \\
&- \frac{N_c}{\pi^2} p^2 \left\{ \left[Y_3(p^2; M_d^2, M_d^2) \right] - \left[Y_2(p^2; M_d^2, M_d^2) \right] \right\} \\
&- \frac{N_c}{4\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_0^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&- \frac{N_c}{4\pi^2} (p^2 + 4M_u^2) \left[Y_1(p^2; M_u^2, M_u^2) \right] \\
&- \frac{N_c}{4\pi^2} (p^2 + 4M_d^2) \left[Y_1(p^2; M_d^2, M_d^2) \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, a constante de decaimento pode ser obtida da expressão

$$\frac{4m_{\rho^0}^2}{f_{\rho^0}} = -g_{\rho^0 qq} \left\{ \left[\Pi_{(T)}^{VV}(m_{\rho^0}^2) \right] - \frac{\tilde{g}_{\rho^0 qq}}{g_{\rho^0 qq}} \frac{m_{\rho^0}}{M_u + M_d} \frac{\left[\Pi^{VT}(m_{\rho^0}^2) \right]}{\sqrt{2}} \right\}$$

Por último, vamos considerar os mésons axiais.

4.4 Mésons Axiais

No setor pseudovetorial do modelo, podemos descrever os mésons axiais (a_1). O méson a_1 é uma partícula pseudovetorial (spin 1 e paridade negativa) e um vetor no espaço de isospin (isovetor) com suas componentes dadas por a_1^+ , a_1^0 , a_1^- . Nesse setor, não consideramos a análise do decaimento dos mésons axiais, por se tratar de uma fenomenologia fora do limiar de energia em que o modelo NJL é definido. Consideremos primeiro o méson a_1^+ .

4.4.1 Méson a_1 Carregado

No canal pseudovetorial, a matriz de espalhamento tem a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{(a_1)} = T^{\mu\nu} \left\{ M_{(T)}^{AA} (\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\nu \gamma_5) + \sqrt{2} M^{A\tilde{T}} (\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \sigma_{\nu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda) \right. \\ \left. + \sqrt{2} M^{\tilde{T}A} (-\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda \otimes \gamma_\nu \gamma_5) \right. \\ \left. + 2 M_{(T)}^{\tilde{T}\tilde{T}} (-\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda \otimes \sigma_{\nu\kappa} \gamma_5 \hat{p}^\kappa) \right\} \end{aligned} \quad (111)$$

Os elementos de matriz $M_{a_1^+}$ podem ser calculados da mesma forma que fizemos nas seções precedentes. Primeiro temos

$$\begin{aligned} 1 - \Pi_{a_1^+} K &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Pi_{a_1^+}^{AA} & \Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}} \\ \Pi_{a_1^+}^{\tilde{T}A} & \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G_V & 0 \\ 0 & -G_T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + G_V \Pi_{(T)a_1^+}^{AA} & G_T \Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}} \\ G_V \Pi_{a_1^+}^{\tilde{T}A} & 1 + G_T \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tal que

$$\left(1 - \Pi_{a_1^+} K \right)^{-1} = \frac{1}{D_{a_1^+}} \begin{pmatrix} 1 + G_T \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} & -G_T \Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}} \\ -G_V \Pi_{a_1^+}^{\tilde{T}A} & 1 + G_V \Pi_{(T)a_1^+}^{AA} \end{pmatrix}$$

com

$$D_{a_1^+} = 1 + G_V \Pi_{(T)a_1^+}^{AA} + G_T \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} + G_V G_T \left[\Pi_{(T)a_1^+}^{AA} \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} - \Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}} \Pi_{a_1^+}^{\tilde{T}A} \right]$$

Podemos escrever então

$$\begin{aligned}
M_{a_1^+}^{AA} &= -\frac{G_V}{D_{a_1^+}} \left(1 + G_T \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \right) \\
M_{a_1^+}^{A\tilde{T}} &= M_{a_1^+}^{\tilde{T}A} = \frac{G_V G_T \Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}}}{D_{a_1^+}} \\
M_{a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} &= -\frac{G_T}{D_{a_1^+}} \left(1 + G_V \Pi_{(T)a_1^+}^{AA} \right)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
&T^{\mu\nu} \Pi_{(T)a_1^+}^{AA} \left(T^{\mu\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5, T^{\nu\beta} \gamma_\beta \gamma_5 \right) \\
&= 2i N_c T^{\mu\alpha} T^{\nu\beta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\alpha \gamma_5 S^u(k+k_1) \gamma_\beta \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\
&= 2i N_c T^{\mu\alpha} T^{\nu\beta} \left[\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{AA}(M_u, M_d) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&T_\nu^\mu \Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}} \left(T^{\mu\beta} \gamma_\beta \gamma_5, -i\sqrt{2} \sigma_{\nu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda \right) \\
&= 2\sqrt{2} N_c T^{\mu\beta} \hat{p}^\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\beta \gamma_5 S^u(k+k_1) \sigma_{\nu\lambda} \gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\
&= 2\sqrt{2} N_c T^{\mu\beta} \hat{p}^\lambda \left[\mathcal{T}_{\beta\nu\lambda}^{A\tilde{T}}(M_u, M_d) \right] \\
&= 2i\sqrt{2} N_c T^{\mu\beta} \left\{ g_{\nu\beta} \hat{p}^\lambda \left[\mathcal{T}_\lambda^{SV} \right] - \hat{p}_\beta \left[\mathcal{T}_\nu^{SV} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_{\mu\nu} \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \left(i\sqrt{2}\sigma_{\mu\lambda}\gamma_5\hat{p}^\lambda, -i\sqrt{2}\sigma_{\nu\beta}\gamma_5\hat{p}^\beta \right) \\
&= 4iN_c \hat{p}^\lambda \hat{p}^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \sigma_{\mu\lambda}\gamma_5 S^u(k+k_1) \sigma_{\nu\beta}\gamma_5 S^d(k+k_2) \right\} \\
&= 4iN_c \hat{p}^\lambda \hat{p}^\beta \left[\mathcal{T}_{\mu\lambda\nu\beta}^{\tilde{T}\tilde{T}}(M_u, M_d) \right] \\
&= 4iN_c \left\{ -\hat{p}_\nu \hat{p}^\lambda \left[\mathcal{T}_{\mu\lambda}^{VV} \right] - \hat{p}^\lambda \hat{p}_\mu \left[\mathcal{T}_{\lambda\nu}^{VV} \right] \right. \\
&\quad \left. + g_{\mu\nu} \hat{p}^\lambda \hat{p}^\beta \left[\mathcal{T}_{\lambda\beta}^{VV} \right] + \left[\mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV} \right] \right. \\
&\quad \left. + (\hat{p}_\nu \hat{p}_\mu - g_{\nu\mu}) \left[\mathcal{T}^{PP} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Usando-se os resultados (39), (41) e (42), obtemos

$$\begin{aligned}
\Pi_{(T)a_1^+}^{AA} &= 4N_c \left(\frac{2}{3}p^2 - (M_u + M_d)^2 \right) \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{\pi^2} p^2 \left[\xi_2^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - \xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{4\pi^2} (M_u + M_d)^2 \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{4\pi^2} (M_u^2 - M_d^2) \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - 2\xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}} &= 4\sqrt{2}N_c \sqrt{p^2} (M_u - M_d) \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{N_c}{2\pi^2} \sqrt{2} \sqrt{p^2} \left\{ (M_u + M_d) \left[\xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - M_u \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} &= 8N_c \left\{ \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] + \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] \right\} \\
&- 8N_c \left[\frac{1}{3}p^2 + (M_u - M_d)^2 \right] \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&- \frac{2N_c}{\pi^2} p^2 \left[\xi_2^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - \xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&- \frac{N_c}{2\pi^2} \left[p^2 + (M_u - M_d)^2 \right] \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&- \frac{N_c}{\pi^2} (M_u^2 - M_d^2) \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - 2\xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

Uma Lagrangeana fenomenológica que acopla o campo $a_1^\mu(x)$ e sua derivada primeira com as densidades fermiônicas com os números quânticos do méson a_1^+ pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= g_{a_1^+ qq} \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \tau^+ \psi(x) a_1^{+\mu}(x) \\
&+ \frac{\tilde{g}_{a_1^+ qq}}{M_u + M_d} \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \tau^+ \psi(x) \partial^\mu a_1^{+\nu}(x)
\end{aligned}$$

tal que a matriz de espalhamento quark-antiquark, próxima ao polo, tem a forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(a_1^+)} &\approx -\frac{g_{a_1^+ qq}^2}{4} T^{\mu\nu} \left(\gamma_\mu \gamma_5 - \frac{\tilde{g}_{a_1^+ qq}}{g_{a_1^+ qq}} \frac{i\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 p^\lambda}{M_u + M_d} \right) \tau^- \\
&\frac{\otimes}{(p^2 - m_{a_1^+}^2)} \left(\gamma_\nu \gamma_5 + \frac{\tilde{g}_{a_1^+ qq}}{g_{a_1^+ qq}} \frac{i\sigma_{\nu\lambda} \gamma_5 p^\lambda}{M_u + M_d} \right) \tau^+
\end{aligned}$$

Podemos reorganizar (111)

$$\mathcal{T}_A^{(a_1^+)} = M_{a_1^+(T)}^{AA} T^{\mu\nu} \left\{ (\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\nu \gamma_5) + \sqrt{2} \frac{M_{a_1^+}^{A\tilde{T}}}{M_{a_1^+(T)}^{AA}} (\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \sigma_{\nu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda) \right. \\ \left. + \sqrt{2} \frac{M_{a_1^+}^{\tilde{T}A}}{M_{a_1^+(T)}^{AA}} (-\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda \otimes \gamma_\nu \gamma_5) \right. \\ \left. + 2 \frac{M_{a_1^+(T)}^{\tilde{T}\tilde{T}}}{M_{a_1^+(T)}^{AA}} (-\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda \otimes \sigma_{\nu\kappa} \gamma_5 \hat{p}^\kappa) \right\}$$

de forma a obter as constantes de acoplamento efetiva $g_{a_1^+ qq}$ e $\tilde{g}_{a_1^+ qq}$. Para $p^2 = m_{a_1^+}^2$ temos que

$$\left. \frac{M_{a_1^+(T)}^{\tilde{T}\tilde{T}}}{M_{a_1^+(T)}^{AA}} \right|_{q^2=m_{a_1^+}^2} = \left(\left. \frac{M_{a_1^+}^{A\tilde{T}}}{M_{a_1^+(T)}^{AA}} \right|_{p^2=m_{a_1^+}^2} \right)^2 .$$

Definindo

$$a_{a_1^+} = \left. \frac{M_{a_1^+}^{A\tilde{T}}}{M_{a_1^+(T)}^{AA}} \right|_{p^2=m_{a_1^+}^2} = - \frac{G_T [\Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}}]}{[1 + G_T \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}}]}$$

podemos escrever

$$\mathcal{T}_A^{(a_1^+)} = M_{a_1^+(T)}^{AA} T^{\mu\nu} \left\{ (\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\nu \gamma_5) + \sqrt{2} a_{a_1^+} (\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \sigma_{\nu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda) \right. \\ \left. + \sqrt{2} a_{a_1^+} (-\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda \otimes \gamma_\nu \gamma_5) \right. \\ \left. + 2 a_{a_1^+}^2 (-\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda \otimes \sigma_{\nu\kappa} \gamma_5 \hat{p}^\kappa) \right\}$$

Expandindo $M_{a_1^+(T)}^{AA}$ em torno do polo

$$M_{a_1^+(T)}^{AA} \approx - \frac{G_V \left[1 + G_T \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \right]}{\left(p^2 - m_{a_1^+}^2 \right)} \left(\frac{\partial D_{a_1^+}}{\partial p^2} \right)^{-1} \Bigg|_{p^2=m_{a_1^+}^2}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{(a_1^+)} &\approx - \left[1 + G_T \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \left(m_{a_1^+}^2 \right) \right] \left(\frac{\partial D_{a_1^+}}{\partial p^2} \right)^{-1} \Bigg|_{p^2=m_{a_1^+}^2} \\ &\quad \times T^{\mu\nu} \left(\gamma_\mu \gamma_5 - \sqrt{2} i \sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 \hat{p}^\lambda a_{a_1^+} \right) \tau^- \\ &\quad \frac{\otimes}{\left(p^2 - m_{a_1^+}^2 \right)} \left(\gamma_\nu \gamma_5 + i \sqrt{2} \sigma_{\nu\kappa} \gamma_5 \hat{p}^\kappa a_{a_1^+} \right) \tau^+ \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} g_{a_1^+ qq}^{-2} &= - \frac{1}{4G_V \left[1 + G_T \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \left(m_{a_1^+}^2 \right) \right]} \frac{\partial D_{a_1^+}}{\partial p^2} \Bigg|_{p^2=m_{a_1^+}^2} \\ \frac{\tilde{g}_{a_1^+ qq}}{g_{a_1^+ qq}} &= \sqrt{2} \frac{(M_u + M_d)}{m_{a_1^+}} \frac{G_T \left[\Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}} \left(m_{a_1^+}^2 \right) \right]}{\left[1 + G_T \Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \left(m_{a_1^+}^2 \right) \right]} \end{aligned}$$

A massa do méson a_1^+ , por sua vez, é dada pela equação

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + G_V \left[\Pi_{(T)a_1^+}^{AA} \left(m_{a_1^+}^2 \right) \right] + G_T \left[\Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \left(m_{a_1^+}^2 \right) \right] \\ &\quad + G_V G_T \left\{ \left[\Pi_{(T)a_1^+}^{AA} \left(m_{a_1^+}^2 \right) \right] \left[\Pi_{(T)a_1^+}^{\tilde{T}\tilde{T}} \left(m_{a_1^+}^2 \right) \right] - \left[\Pi_{a_1^+}^{A\tilde{T}} \left(m_{a_1^+}^2 \right) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

A descrição dos decaimentos dos mésons a_1 está fora do regime de energia que é considerado pelo modelo NJL.

4.4.2 Méson a_1 Neutro

O procedimento, para obtermos as equações da fenomenologia do méson a_1^0 , é o mesmo da seção anterior, por isso, omitiremos os detalhes do cálculo. As funções polarização são

$$T^{\mu\nu}\Pi_{(T)a_1^0}^{AA} = iN_c T^{\mu\alpha} T^{\nu\beta} [\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{AA}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\alpha\beta}^{AA}(M_d, M_d)]$$

$$\begin{aligned} T_{\nu}^{\mu}\Pi_{a_1^0}^{A\tilde{T}} &= \sqrt{2}N_c T^{\mu\beta} \hat{p}^{\lambda} [\mathcal{T}_{\beta\nu\lambda}^{A\tilde{T}}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\beta\nu\lambda}^{A\tilde{T}}(M_d, M_d)] \\ &= i\sqrt{2}N_c T^{\mu\beta} \left\{ g_{\nu\beta} \hat{p}^{\lambda} [\mathcal{T}_{\lambda}^{SV}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\lambda}^{SV}(M_d, M_d)] \right. \\ &\quad \left. - \hat{p}_{\beta} [\mathcal{T}_{\nu}^{SV}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\nu}^{SV}(M_d, M_d)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}\Pi_{(T)a_1^0}^{\tilde{T}\tilde{T}} &= 2iN_c \hat{p}^{\lambda} \hat{p}^{\beta} [\mathcal{T}_{\mu\lambda\nu\beta}^{\tilde{T}\tilde{T}}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\mu\lambda\nu\beta}^{\tilde{T}\tilde{T}}(M_d, M_d)] \\ &= 2iN_c \left\{ -\hat{p}_{\nu} \hat{p}^{\lambda} [\mathcal{T}_{\mu\lambda}^{VV}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\mu\lambda}^{VV}(M_u, M_u)] \right. \\ &\quad - \hat{p}_{\mu} \hat{p}^{\lambda} [\mathcal{T}_{\lambda\nu}^{VV}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\lambda\nu}^{VV}(M_u, M_u)] \\ &\quad + g_{\mu\nu} \hat{p}^{\lambda} \hat{p}^{\beta} [\mathcal{T}_{\lambda\beta}^{VV}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\lambda\beta}^{VV}(M_u, M_u)] \\ &\quad + [\mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV}(M_u, M_u) + \mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV}(M_u, M_u)] \\ &\quad \left. - (g_{\nu\mu} - \hat{p}_{\nu} \hat{p}_{\mu}) [\mathcal{T}^{PP}] \right\} \end{aligned}$$

Porém note que

$$\mathcal{T}_{\lambda}^{SV}(M_u, M_u) = \mathcal{T}_{\lambda}^{SV}(M_d, M_d) = 0$$

Logo

$$\Pi_{a_1^0}^{A\tilde{T}}(p^2) = 0$$

Portanto o termo $a_{a_1^0}$ é nulo

$$a_{a_1^0} = - \frac{G_T \left[\Pi_{a_1^0}^{A\tilde{T}} \right]}{\left[1 + G_T \Pi_{(T)a_1^0}^{\tilde{T}\tilde{T}} \right]} = 0$$

e, assim, a matriz de espalhamento no canal do méson a_1^0 não apresenta mistura com o setor tensorial. Temos, então

$$\mathcal{T}_A^{(a_1^0)} = M_{a_1^0(T)}^{AA} T^{\mu\nu} (\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\nu \gamma_5)$$

em que

$$M_{(T)a_1^0}^{AA}(p) = \frac{G_V}{\left[1 + G_V \Pi_{(T)a_1^0}^{AA}(p) \right]}$$

e

$$\begin{aligned} \Pi_{(T)a_1^0}^{AA} = & 4N_c p^2 \left\{ \frac{2}{3} \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \right. \\ & - \frac{1}{8\pi^2} \left[\xi_2^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_2^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\ & \left. + \frac{1}{8\pi^2} \left[\xi_1^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_1^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & - 8N_c M_u^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right\} \\ & - 8N_c M_d^2 \left\{ \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \left[\xi_0^{(0)}(p^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \end{aligned}$$

Expandindo $M_{(T)a_1^0}^{AA}$ em torno do polo

$$M_{(T)a_1^0}^{AA} \approx \left(\frac{\partial \Pi_{(T)a_1^0}^{AA}}{\partial p^2} \right)^{-1} \Bigg|_{p^2=m_{a_1^0}^2}$$

temos

$$\mathcal{T}_A^{(a_1^0)} \approx \left(\frac{\partial \Pi_{(T)a_1^0}^{AA}}{\partial p^2} \right)^{-1} \bigg|_{p^2=m_{a_1^0}^2} T^{\mu\nu} \frac{(\gamma_\mu \gamma_5) \tau^- \otimes (\gamma_\nu \gamma_5) \tau^+}{(p^2 - m_{a_1^0}^2)}$$

Então

$$g_{a_1^0 qq}^{-2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \Pi_{(T)a_1^0}^{AA}}{\partial p^2} \right) \bigg|_{p^2=m_{a_1^0}^2}$$

A massa de a_1^0 é obtida do polo de $M_{(T)a_1^0}^{AA}$, ou seja,

$$1 + G_V \left[\Pi_{(T)a_1^0}^{AA} (m_{a_1^0}^2) \right] = 0$$

4.5 Análise Quantitativa da Fenomenologia

Nesta seção, realizaremos uma análise quantitativa (numérica) dos resultados obtidos nas seções acima. Para isso, primeiramente, precisamos obter as parametrizações para os objetos $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ e $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$. A parametrização para $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$ não sofre alterações em relação àquela dada pela Eq. (73), ou seja,

$$\left[i I_{quad}^{(4)}(M_f^2) \right] = -\frac{\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle}{4N_c M_f}$$

Porém a parametrização para $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ recebe contribuições extras das novas interações adicionadas à Lagrangeana, conforme mostraremos a seguir.

4.5.1 Simetrias de isospin e quirais exatas

Para exemplificar o procedimento, iniciaremos com o caso de simetria quiral exata, ou seja, $m_u = m_d = 0$. O desenvolvimento que segue está de acordo com a Ref.[17]. Nesse contexto, temos $M_u = M_d \equiv M$ tal que a equação de gap

fica escrita como

$$1 - 8N_c G_S \left[i I_{quad}^{(4)}(M^2) \right] = 0$$

e o tripleto de píons são degenerados e não massivos ($m_\pi = 0$). Logo, temos os resultados

$$\begin{aligned} f_\pi &= \frac{g_{\pi qq}}{4M} \left(1 - \frac{\tilde{g}_{\pi qq}}{g_{\pi qq}} \right) \left[\Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right] \\ g_{\pi qq}^{-2} &= - \frac{1}{G_S \left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right]} \left. \frac{\partial D_\pi}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}, \\ \frac{\tilde{g}_{\pi qq}}{g_{\pi qq}} &= \frac{G_V \left[\Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right]}{\left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right]} \end{aligned}$$

Lembrando que

$$D_\pi = 1 - G_S \Pi_\pi^{PP} + G_V \Pi_{(L)\pi}^{AA} - G_S G_V \left[\Pi_\pi^{PP} \Pi_{(L)\pi}^{AA} - (\Pi_\pi^{AP})^2 \right]$$

e, usando as relações entre as funções de polarização

$$\begin{aligned} \Pi_\pi^{PP} &= 8N_c \left[i I_{quad}^{(4)}(M^2) \right] + \frac{p^2}{4M^2} \Pi_{(L)\pi}^{AA} \\ \Pi_\pi^{AP} &= - \frac{\sqrt{p^2}}{2M} \Pi_{(L)\pi}^{AA} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} D_\pi &= 1 - 8N_c G_S \left[i I_{quad}^{(4)}(M^2) \right] - G_S \left(\frac{p^2}{4M^2} \Pi_{(L)\pi}^{AA} \right) + G_V \Pi_{(L)\pi}^{AA} \\ &\quad - 8N_c G_S G_V \left[i I_{quad}^{(4)}(M^2) \right] \Pi_{(L)\pi}^{AA} \end{aligned}$$

Eliminando $I_{quad}^{(4)}(M^2)$, usando-se a equação de gap, podemos simplificar D_π para

$$D_\pi = -\frac{G_S}{4M^2} p^2 \left[\Pi_{(L)\pi}^{AA}(p^2) \right]$$

e assim

$$\left. \frac{\partial D_\pi}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} = -\frac{G_S}{4M^2} \left[\Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right]$$

Com esse resultado obtemos

$$g_{\pi qq}^{-2} = \frac{1}{4M^2} \frac{\left[\Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right]}{\left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right]}$$

$$f_\pi^2 = \frac{1}{4} \frac{\left[\Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right]}{\left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right]}$$

Das expressões acima obtemos uma equação para $\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(0)$

$$\left[\Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right] = \frac{4f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)}$$

Lembrando que

$$\left[\Pi_{(L)\pi}^{AA}(0) \right] = -16N_c M^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(M^2) \right]$$

podemos escrever uma parametrização para $I_{\log}^{(4)}(M^2)$

$$\left[i I_{\log}^{(4)}(M^2) \right] = -\frac{1}{4N_c M^2} \frac{f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)}$$

Além disso, algumas relações simples surgem das equações acima

$$M = f_\pi g_{\pi qq}$$

$$\tilde{g}_{\pi qq} = 4G_V M f_\pi$$

Com a parametrização para $I_{\log}^{(4)}(M^2)$ e a relação de escala, podemos obter uma equação algébrica cúbica em M

$$M^3 + \alpha M + \beta = 0$$

em que

$$\alpha = \frac{4\pi^2}{N_c} \frac{f_{\pi^+}^2}{(1 - 4G_V f_{\pi^+}^2)} - 16\pi^2 C$$

$$\beta = -\frac{4\pi^2}{N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle$$

As soluções da equação acima foram discutidas na seção (3.6). A solução crítica, que denominamos de M_0 , é a mesma que encontramos, anteriormente e independente de G_V , ou seja,

$$M_0 = \sqrt[3]{-\frac{2\pi^2}{N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle}.$$

Com a solução crítica, as constantes de acoplamento podem ser expressas por

$$g_{\pi qq} = \frac{1}{f_\pi} \sqrt[3]{-\frac{2\pi^2}{N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle}$$

$$\tilde{g}_{\pi qq} = 4f_\pi G_V \sqrt[3]{-\frac{2\pi^2}{N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle}$$

$$G_S = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{2\pi^2}{3 \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2}}$$

No canal vetorial, temos o méson ρ cuja fenomenologia é dada pelas equações

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + G_V \left[\Pi_{(T)\rho}^{VV} (m_\rho^2) \right] + G_T \left[\Pi_{(L)\rho}^{TT} (m_\rho^2) \right] \\
&\quad + G_V G_T \left\{ \left[\Pi_{(L)\rho}^{TT} (m_\rho^2) \right] \left[\Pi_{(T)\rho}^{VV} (m_\rho^2) \right] - \left[\Pi_\rho^{VT} (m_\rho^2) \right]^2 \right\} \\
g_{\rho qq}^2 &= -4G_V \left[1 + G_T \Pi_{(L)\rho}^{TT} (m_\rho^2) \right] \left(\frac{\partial D_\rho}{\partial p^2} \right)^{-1} \Bigg|_{p^2=m_\rho^2}, \\
\frac{\tilde{g}_{\rho qq}}{g_{\rho qq}} &= 2\sqrt{2} \frac{M}{m_\rho} \frac{G_T \left[\Pi_\rho^{VT} (m_\rho^2) \right]}{\left[1 + G_T \Pi_{(L)\rho}^{TT} (m_\rho^2) \right]} \\
\frac{4m_\rho^2}{f_\rho} &= g_{\rho qq} \left\{ \left[\Pi_{(T)\rho}^{VV} (m_\rho^2) \right] + \frac{\tilde{g}_{\rho qq}}{g_{\rho qq}} \frac{m_\rho}{2M} \frac{\left[\Pi_\rho^{VT} (m_\rho^2) \right]}{\sqrt{2}} \right\}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\left[\Pi_{(T)\rho}^{VV} (m_\rho^2) \right] &= -\frac{2}{3} \frac{m_\rho^2}{M^2} \frac{f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)} \\
&\quad + \frac{N_c}{3\pi^2} \left\{ \frac{m_\rho^2}{6} - M^2 \ln \left(\frac{M^2}{\lambda^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (m_\rho^2 + 2M^2) \left[\xi_0^{(0)} (m_\rho^2; M^2, M^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\Pi_\rho^{VT} (m_\rho^2) \right] &= 2\sqrt{2} \frac{m_\rho}{M} \frac{f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)} \\
&\quad - \frac{\sqrt{2} N_c}{2\pi^2} M m_\rho \left[\xi_0^{(0)} (m_\rho^2; M^2, M^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\Pi_{(L)\rho}^{TT} (m_\rho^2) \right] &= -\frac{4 \langle \bar{\psi} \psi \rangle}{M} + \left(1 + \frac{1}{12} \frac{m_\rho^2}{M^2} \right) \frac{8f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)} \\ &\quad + \frac{2N_c}{3\pi^2} m_\rho^2 \left\{ \frac{m_\rho^2}{6} - M^2 \ln \left(\frac{M^2}{\lambda^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (m_\rho^2 + 8M^2) \left[\xi_0^{(0)} (m_\rho^2; M^2, M^2; \lambda^2) \right] \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left[\xi_2^{(0)} (p^2; M^2, M^2; \lambda^2) \right] &= -\frac{1}{18} + \frac{M^2}{3p^2} \ln \left(\frac{M^2}{\lambda^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{p^2 - M^2}{p^2} \right) \left[\xi_0^{(0)} (p^2; M^2, M^2; \lambda^2) \right] \end{aligned}$$

As derivadas, por sua vez, são

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_\rho}{\partial p^2} &= G_V \frac{\partial \Pi_{(T)\rho}^{VV}}{\partial p^2} + G_T \frac{\partial \Pi_{(L)\rho}^{TT}}{\partial p^2} \\ &\quad + G_V G_T \left[\Pi_{(T)\rho}^{VV} \frac{\partial \Pi_{(L)\rho}^{TT}}{\partial p^2} + \Pi_{(L)\rho}^{TT} \frac{\partial \Pi_{(T)\rho}^{VV}}{\partial p^2} - 2\Pi_\rho^{VT} \frac{\partial \Pi_\rho^{VT}}{\partial p^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Pi_{(T)\rho}^{VV}}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_\rho^2} &= -\frac{2}{3} \frac{1}{M^2} \frac{f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)} \\ &\quad + \frac{N_c}{6\pi^2} \left\{ \frac{1}{3} + \left[\xi_0^{(0)} (m_\rho^2; M^2, M^2; \lambda^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + (m_\rho^2 + 2M^2) [Y_1 (m_\rho^2; M^2, M^2)] \right. \\ &\quad \left. + (m_\rho^2 + 2M^2) [Y_1 (m_\rho^2; M^2, M^2)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \Pi_{(L)\rho}^{TT}}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_\rho^2} &= \frac{1}{3M^2} \frac{2f_\pi^2}{(1-4G_V f_\pi^2)} \\
&+ \frac{2N_c}{3\pi^2} \left\{ \frac{m_\rho^2}{6} - M^2 \ln \left(\frac{M^2}{\lambda^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} (m_\rho^2 + 8M^2) \left[\xi_0^{(0)} (m_\rho^2; M^2, M^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&+ \frac{N_c}{3\pi^2} m_\rho^2 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left[\xi_0^{(0)} (m_\rho^2; M^2, M^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (m_\rho^2 + 8M^2) \left[Y_1 (m_\rho^2; M^2, M^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \Pi_\rho^{VT}}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_\rho^2} &= \sqrt{2} \frac{1}{M m_\rho} \frac{f_\pi^2}{(1-4G_V f_\pi^2)} \\
&- \frac{\sqrt{2} N_c}{4\pi^2} \frac{M}{m_\rho} \left[\xi_0^{(0)} (m_\rho^2; M^2, M^2; \lambda^2) \right] \\
&- \frac{\sqrt{2} N_c}{2\pi^2} M m_\rho \left[Y_1 (m_\rho^2; M^2, M^2) \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, no setor axial temos

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + G_V \left[\Pi_{(T)a_1}^{AA} (m_{a_1}^2) \right] \\
g_{a_1 qq}^2 &= 4 \left(\frac{\partial \Pi_{(T)a_1}^{AA}}{\partial p^2} \right)^{-1} \Bigg|_{p^2=m_{a_1}^2},
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \Pi_{(T)a_1}^{AA} = & \left(1 - \frac{p^2}{6M^2}\right) \frac{4f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)} \\ & + \frac{N_c}{3\pi^2} \left\{ \frac{p^2}{6} - M^2 \ln\left(\frac{M^2}{\lambda^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (p^2 - 4M^2) [\xi_0^{(0)}(p^2; M^2, M^2; \lambda^2)] \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{(T)a_1}^{AA}}{\partial p^2} = & -\frac{1}{3M^2} \frac{2f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)} \\ & + \frac{N_c}{6\pi^2} \left\{ \frac{1}{3} + [\xi_0^{(0)}(p^2; M^2, M^2; \lambda^2)] \right. \\ & \left. + (p^2 - 4M^2) [Y_1(p^2; M^2, M^2)] \right\} \end{aligned}$$

Das expressões acima, obtemos as equações, para a massa e a constante de acoplamento efetiva, respectivamente, do méson a_1

$$\begin{aligned} 0 = & 1 + \left(1 - \frac{m_{a_1}^2}{6M^2}\right) \frac{4G_V f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)} \\ & + \frac{N_c}{3\pi^2} G_V \left\{ \frac{m_{a_1}^2}{6} - M^2 \ln\left(\frac{M^2}{\lambda^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (m_{a_1}^2 - 4M^2) [\xi_0^{(0)}(m_{a_1}^2; M^2, M^2; \lambda^2)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{a_1 qq}^{-2} = & -\frac{1}{6M^2} \frac{f_\pi^2}{(1 - 4G_V f_\pi^2)} \\ & + \frac{N_c}{24\pi^2} \left\{ \frac{1}{3} + [\xi_0^{(0)}(m_{a_1}^2; M^2, M^2; \lambda^2)] \right. \\ & \left. + (m_{a_1}^2 - 4M^2) [Y_1(m_{a_1}^2; M^2, M^2)] \right\} \end{aligned}$$

Podemos agora proceder a análise numérica. Vamos considerar dois casos separadamente de acordo com as escolhas das constantes de acoplamento G_T e G_V . As Tabelas(4) e (5) mostram os resultados da fenomenologia para $G_T = 0$ para vários valores possíveis de $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ com $f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$ e $m_\rho = 770.0 \text{ MeV}$.

Tabela 4 Fenomenologia mesônica com as simetrias quiral e de isospin exatas para $G_t = 0$. Na tabela o condensado, as massas e a constante de decaimento são dados em (MeV) , G_S e G_V em $(\text{GeV})^{-2}$.

$\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{1/3}$	M	G_S	G_V	m_σ	m_{a_1}	f_ρ
-230.0	429.4	17.5	14.4	861.9	1076.5	8.26
-235.0	439.3	16.7	14.9	880.7	1092.5	8.20
-240.0	449.1	16.2	15.4	899.4	1109.1	8.16
-245.0	459.0	15.4	15.9	918.1	1126.0	8.13
-250.0	466.8	14.9	16.4	936.9	1143.2	8.12
-255.0	476.7	14.1	17.0	955.6	1160.8	8.12
-260.0	486.5	13.6	17.2	974.4	1178.6	8.12

Tabela 5 Constantes de acoplamento efetivas para os mésons sigma, pión, rho e a_1 .

$\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{1/3}$	$g_{\sigma qq}$	$g_{\pi qq}$	$\tilde{g}_{\pi qq}$	$g_{\rho qq}$	$g_{a_1 qq}$
-230.0	2.02	4.66	2.30	4.14	2.29
-235.0	2.03	4.76	2.44	4.35	2.25
-240.0	2.03	4.86	2.59	4.53	2.22
-245.0	2.03	4.96	2.73	4.69	2.18
-250.0	2.03	5.06	2.87	4.84	2.15
-255.0	2.03	5.17	3.01	4.98	2.12
-260.0	2.03	5.27	3.15	5.11	2.10

Podemos perceber que as constantes de acoplamento G_S e G_V têm comportamentos opostos conforme aumentamos o valor do condensado - enquanto G_S decresce G_V cresce. As massas m_σ e m_{a_1} são funções crescentes do condensado. Além disso, vemos pouca dependência dos observáveis f_ρ , $g_{\sigma qq}$ e $g_{a_1 qq}$ com $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Por outro lado, as constantes de acoplamento, no setor do pión, $g_{\pi qq}$ e $\tilde{g}_{\pi qq}$, são

mais sensíveis às variações do condensado. Os valores obtidos, para a fenomenologia, são bem próximos daqueles encontrados na literatura (ver, por exemplo, Refs. [25, 30]).

Nas Tabelas(6), (7) e (8), mostramos os resultados para o caso $G_T \neq 0$. Para enfatizar a dependência dos observáveis com $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ mostramos três tabelas com valores distintos para $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$.

Tabela 6 Fenomenologia mesônica com $G_T \neq 0$ e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (-240.0 MeV)^3$.

G_V	G_T	$g_{\pi qq}$	$\tilde{g}_{\pi qq}$	$g_{\rho qq}$	$\tilde{g}_{\rho qq}$	f_ρ	m_{a_1}	$g_{a_1 qq}$	$g_{\sigma qq}$
7.73	-5.51	4.86	1.28	3.32	3.82	5.51	1155.8	2.79	2.18
10.30	-45.50	4.86	1.71	3.52	2.07	6.93	1131.7	2.63	2.14
12.88	2.03	4.86	2.14	3.93	0.97	7.77	1117.3	2.45	2.09
15.46	0.04	4.86	2.56	4.49	0.05	8.15	1109.4	2.23	2.03

Tabela 7 Fenomenologia mesônica com $G_T \neq 0$ e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (-250.0 MeV)^3$.

G_V	G_T	$g_{\pi qq}$	$\tilde{g}_{\pi qq}$	$g_{\rho qq}$	$\tilde{g}_{\rho qq}$	f_ρ	m_{a_1}	$g_{a_1 qq}$	$g_{\sigma qq}$
7.73	-4.67	5.06	1.33	3.60	4.94	5.08	1191.1	2.80	2.20
10.30	-9.92	5.06	1.78	3.69	2.75	6.60	1167.2	2.64	2.17
12.88	4.91	5.06	2.23	4.05	1.45	7.53	1153.0	2.46	2.12
15.46	0.48	5.06	2.67	4.56	0.43	8.03	1145.1	2.26	2.06

Tabela 8 Fenomenologia mesônica com $G_T \neq 0$ e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (-260.0 MeV)^3$.

G_V	G_T	$g_{\pi qq}$	$\tilde{g}_{\pi qq}$	$g_{\rho qq}$	$\tilde{g}_{\rho qq}$	f_ρ	m_{a_1}	$g_{a_1 qq}$	$g_{\sigma qq}$
7.73	-4.1	5.27	1.39	3.89	6.21	4.70	1226.8	2.81	2.23
10.30	-6.4	5.27	1.85	3.86	3.47	6.32	1203.0	2.65	2.19
12.88	19.3	5.27	2.31	4.16	1.97	7.33	1188.9	2.48	2.15
15.46	1.0	5.27	2.78	4.62	0.82	7.92	1181.0	2.28	2.09

Nas três tabelas acima, variamos G_V e obtemos G_T de forma a reproduzir $m_\rho = 770.0 MeV$. Dependendo do valor de G_V , obtemos valores negativos para G_T , o que corresponderia a uma contribuição de um canal repulsivo. Fica evidente que os valores encontrados para G_T são fortemente dependentes daque-

les atribuídos para G_V . Podemos observar que os valores obtidos para f_ρ e $\tilde{g}_{\rho qq}$, também, são bem sensíveis aos valores assumidos por G_V e G_T . Em particular para $G_V = 8.7 (GeV)^{-2}$, $G_T = -4.4 (GeV)^{-2}$ e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (-265.0)^3$, obtemos $f_\rho = 5.3$ e $m_{a_1} = 1233.0 MeV$ que são valores bem próximos aos "experimentais". Não encontramos nenhum trabalho na literatura, na versão $SU(2)$, com G_V e G_T não nulos simultaneamente. Na versão $SU(3)$, temos, por exemplo, as Refs.[25, 34] cujos valores são da mesma ordem de grandeza daqueles mostrados nas tabelas acima.

4.5.2 Simetrias de isospin e quiral quebradas explicitamente

O procedimento, para obtermos a fenomenologia mesônica, na formulação preditiva, para o caso $m_u \neq m_d \neq 0$ e $G_V \neq 0$, é inteiramente análogo aos casos que discutimos acima exceto pela complexidade algébrica envolvida. Primeiro precisamos encontrar a nova parametrização de $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$. Notamos que

$$\begin{aligned} [\Pi_{\pi^+}^{PP}] &= 8N_c \frac{M_u}{(M_u + M_d)} \left[i I_{quad}^{(4)}(M_u^2) \right] \\ &+ 8N_c \frac{M_d}{(M_u + M_d)} \left[i I_{quad}^{(4)}(M_d^2) \right] - \frac{\sqrt{p^2}}{(M_u + M_d)} \Pi_{\pi^+}^{AP} \end{aligned}$$

e

$$[\Pi_{\pi^+}^{AP}] = -\frac{\sqrt{p^2}}{(M_u + M_d)} \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} \right]$$

Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_S} \frac{\partial D_{\pi^+}}{\partial p^2} = & \left\{ 2G_V \frac{[\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle]}{(M_u + M_d)} - \frac{p^2}{(M_u + M_d)^2} \right\} \left(\frac{\partial \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}}{\partial p^2} \right) \\ & - \frac{1}{(M_u + M_d)^2} \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right] \\ & + \frac{G_V}{G_S} \left(\frac{\partial \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}}{\partial p^2} \right) \end{aligned} \quad (112)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}}{\partial p^2} = & -\frac{N_c}{4\pi^2} (M_u + M_d)^2 [Y_1(p^2; M_u^2, M_d^2)] \\ & - \frac{N_c}{4\pi^2} (M_u^2 - M_d^2) [Y_1(p^2; M_u^2, M_d^2) - 2Y_2(p^2; M_u^2, M_d^2)] \end{aligned}$$

Da equação da massa do pión carregado

$$\begin{aligned} 0 = & 1 + 2G_S \frac{[\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle]}{(M_u + M_d)} \\ & - G_S \frac{m_{\pi^+}^2}{(M_u + M_d)^2} \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right] \\ & + G_V \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right] \\ & + 2G_S G_V \frac{[\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle]}{(M_u + M_d)} \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right] \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_S} \left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right] = & -2 \frac{[\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle]}{(M_u + M_d)} \\ & - 2G_V \frac{[\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle]}{(M_u + M_d)} \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right] \\ & + \frac{p^2}{(M_u + M_d)^2} \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA} (m_{\pi^+}^2) \right] \end{aligned}$$

Substituindo em (112) podemos escrever

$$\frac{1}{G_S} \frac{\partial D_{\pi^+}}{\partial p^2} = - \frac{p^2}{(M_u + M_d)^2} \frac{1}{\left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2)\right]} \left(\frac{\partial \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}}{\partial p^2} \right) - \frac{1}{(M_u + M_d)^2} \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2) \right]$$

e assim

$$g_{\pi^+ qq}^{-2} = \frac{m_{\pi^+}^2}{(M_u + M_d)^2} \frac{1}{\left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2)\right]^2} \left(\frac{\partial \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}}{\partial p^2} \right) + \frac{1}{(M_u + M_d)^2} \frac{\left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2) \right]}{\left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2)\right]}$$

Substituindo na equação do decaimento do pión carregado

$$f_{\pi^+}^2 g_{\pi^+ qq}^{-2} = \frac{1}{4(M_u + M_d)^2} \frac{\left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2) \right]^2}{\left[1 + G_V \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2)\right]^2}$$

ficamos com a expressão

$$0 = \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2) \right]^2 - \left(\frac{4f_{\pi^+}^2}{1 - 4G_V f_{\pi^+}^2} \right) \left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2) \right] - \left(\frac{4f_{\pi^+}^2}{1 - 4G_V f_{\pi^+}^2} \right) p^2 \left(\frac{\partial \Pi_{(L)\pi^+}^{AA}}{\partial p^2} \right)$$

cuja solução é

$$\left[\Pi_{(L)\pi^+}^{AA}(m_{\pi^+}^2) \right] = \left(\frac{2f_{\pi^+}^2}{1 - 4G_V f_{\pi^+}^2} \right) \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{N_c}{4\pi^2} \frac{m_{\pi^+}^2}{f_{\pi^+}^2} (1 - 4G_V f_{\pi^+}^2) h} \right\}$$

com

$$h = (M_u + M_d)^2 [Y_1(p^2; M_u^2, M_d^2)] \\ + (M_u^2 - M_d^2) [Y_1(p^2; M_u^2, M_d^2) - 2Y_2(p^2; M_u^2, M_d^2)]$$

Dessa forma, a parametrização para $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ fica da forma

$$\begin{aligned} [i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)] &= -\frac{1}{2N_c (M_u + M_d)^2} \left(\frac{f_{\pi^+}^2}{1 - 4G_V f_{\pi^+}^2} \right) \\ &\quad \times \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{N_c}{4\pi^2} \frac{m_{\pi^+}^2}{f_{\pi^+}^2} (1 - 4G_V f_{\pi^+}^2) h} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{16\pi^2} \frac{(M_u - M_d)^2}{m_{\pi^+}^2} [\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2, M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] \\ &\quad - \frac{1}{16\pi^2} \frac{(M_u - M_d)^2}{m_{\pi^+}^2} [\xi_0^{(0)}(0, M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] \\ &\quad - \frac{1}{16\pi^2} [\xi_0^{(0)}(m_{\pi^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2)] \end{aligned}$$

Com as parametrizações para $I_{quad}^{(4)}(M^2)$ e $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$, podemos usar as relações de escala

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{M_u (M_u^2 - M_0^2)}{16\pi^2} + M_u (M_0^2 - M_u^2) [i I_{\log}^{(4)}(M_0^2)] \\ &\quad + \frac{M_u^3}{16\pi^2} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_u^2} \right) + \frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle M_u}{4N_c M_0} - \frac{\langle \bar{u} u \rangle}{4N_c} \\ 0 &= \frac{M_d (M_d^2 - M_0^2)}{16\pi^2} + M_d (M_0^2 - M_d^2) [i I_{\log}^{(4)}(M_0^2)] \\ &\quad + \frac{M_d^3}{16\pi^2} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_d^2} \right) + \frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle M_d}{4N_c M_0} - \frac{\langle \bar{d} d \rangle}{4N_c} \end{aligned}$$

para encontrarmos M_u e M_d . As duas equações acima devem ser resolvidas, numérica e simultaneamente, pois são acopladas por meio da parametrização de

$I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$. Quando investigamos as possíveis soluções críticas, vemos que elas são, praticamente, independentes de G_V . Por isso, tomaremos $G_V = 0$ para obtenção das massas constituintes afim de simplificarmos a análise numérica que faremos a seguir.

Para estudarmos a fenomenologia, quantitativamente, primeiro, consideremos o caso de $G_T = 0$. No setor vetorial e axial-vetor, temos algumas simplificações, nas equações, que fornecem a fenomenologia. Explicitamente, temos:

- Méson ρ^+ :

$$\begin{aligned}
0 = & 1 + 4N_c G_V \left(\frac{2}{3} m_{\rho^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right) \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
& - \frac{N_c}{\pi^2} G_V m_{\rho^+}^2 \left[\xi_2^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
& + \frac{N_c}{\pi^2} G_V m_{\rho^+}^2 \left[\xi_1^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
& - \frac{N_c}{2\pi^2} G_V (M_u - M_d) \left\{ M_u \left[\xi_0^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - (M_u + M_d) \left[\xi_1^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\rho^+ qq}^{-2} = & -\frac{2}{3} N_c \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
& + \frac{N_c}{4\pi^2} \left[\xi_2^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - \xi_1^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
& + \frac{N_c}{4\pi^2} m_{\rho^+}^2 \left[Y_3(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - Y_2(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
& + \frac{N_c}{8\pi^2} (M_u - M_d) \left\{ M_u \left[Y_1(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - (M_u + M_d) \left[Y_2(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4m_{\rho^+}^2}{f_{\rho^+}} g_{\rho^+ qq}^{-1} &= -4N_c \left(\frac{2}{3} m_{\rho^+}^2 - (M_u - M_d)^2 \right) \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{\pi^2} m_{\rho^+}^2 \left[\xi_2^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&- \frac{N_c}{\pi^2} m_{\rho^+}^2 \left[\xi_1^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{2\pi^2} (M_u - M_d) \left\{ M_u \left[\xi_0^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - (M_u + M_d) \left[\xi_1^{(0)}(m_{\rho^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

• Méson ρ^0 :

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + \frac{8}{3} N_c G_V m_{\rho^0}^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&- \frac{N_c}{2\pi^2} G_V m_{\rho^0}^2 \left\{ \left[\xi_2^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) + \xi_2^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\xi_1^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_1^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\rho^0 qq}^{-2} &= -\frac{2}{3} N_c \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{8\pi^2} \left\{ \left[\xi_2^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_2^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\xi_1^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + \xi_1^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&+ \frac{N_c}{8\pi^2} m_{\rho^0}^2 \left\{ \left[Y_3(m_{\rho^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + Y_3(m_{\rho^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[Y_2(m_{\rho^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) + Y_2(m_{\rho^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4m_{\rho^0}^2}{f_{\rho^0}} g_{\rho^0 qq}^{-1} &= -\frac{8}{3} N_c m_{\rho^0}^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{2\pi^2} m_{\rho^0}^2 \left\{ \left[\xi_2^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad + \left[\xi_2^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \left[\xi_1^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad \left. - \left[\xi_1^{(0)}(m_{\rho^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

• Méson a_1^+ :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{G_V} + 4N_c \left(\frac{2}{3} m_{a_1^+}^2 - (M_u + M_d)^2 \right) \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{12\pi^2} \left[2m_{a_1^+}^2 - M_u^2 - M_d^2 - 6M_u M_d - \frac{(M_u^2 - M_d^2)^2}{m_{a_1^+}^2} \right] \\
&\quad \times \left[\xi_0^{(0)}(m_{a_1^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{6\pi^2} \left[\frac{m_{a_1^+}^2}{3} - \frac{(M_u^2 - M_d^2)^2}{2m_{a_1^+}^2} \right] \\
&- \frac{N_c}{6\pi^2} \left[\frac{2m_{a_1^+}^2 + (M_u^2 - M_d^2)}{2m_{a_1^+}^2} \right] M_d^2 \ln \left(\frac{M_d^2}{\lambda^2} \right) \\
&- \frac{N_c}{6\pi^2} \left[\frac{2m_{a_1^+}^2 - (M_u^2 - M_d^2)}{2m_{a_1^+}^2} \right] M_u^2 \ln \left(\frac{M_u^2}{\lambda^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{a_1^+ qq}^{-2} &= -\frac{2}{3}N_c \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{4\pi^2} \left[\xi_2^{(0)}(m_{a_1^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) - \xi_1^{(0)}(m_{a_1^+}^2; M_u^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{4\pi^2} m_{a_1^+}^2 \left[Y_3(m_{a_1^+}^2; M_u^2, M_d^2) - Y_2(m_{a_1^+}^2; M_u^2, M_d^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{16\pi^2} (M_u + M_d)^2 \left[Y_1(m_{a_1^+}^2; M_u^2, M_d^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{16\pi^2} (M_u^2 - M_d^2) \left[Y_1(m_{a_1^+}^2; M_u^2, M_d^2) - 2Y_2(m_{a_1^+}^2; M_u^2, M_d^2) \right]
\end{aligned}$$

Méson a_1^0 :

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + 8N_c G_V \left(\frac{1}{3}m_{a_1^0}^2 - M_u^2 - M_d^2 \right) \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
&+ \frac{N_c}{12\pi^2} G_V \left\{ \frac{2}{3}m_{a_1^0}^2 + (m_{a_1^0}^2 + 2M_u^2) \left[\xi_0^{(0)}(m_{a_1^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + (m_{a_1^0}^2 + 2M_d^2) \left[\xi_0^{(0)}(m_{a_1^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&- \frac{N_c}{2\pi^2} G_V M_u^2 \left[\xi_0^{(0)}(m_{a_1^0}^2; M_u^2, M_u^2; \lambda^2) \right] \\
&- \frac{N_c}{2\pi^2} G_V M_d^2 \left[\xi_0^{(0)}(m_{a_1^0}^2; M_d^2, M_d^2; \lambda^2) \right]
\end{aligned}$$

Nas tabelas a seguir, mostramos os resultados numéricos da fenomenologia para $G_T = 0$ para três valores distintos do condensado $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} = \{-250.0, -260.0, -270.0\} \text{ MeV}$, respectivamente. Na primeira coluna, variamos o valor do condensado $\langle \bar{d}d \rangle$, mantendo $\langle \bar{u}u \rangle$ fixo, para enfatizar as diferenças dos resultados com a intensidade da quebra da simetria de isospin. Para cada valor do condensado, construímos primeiro uma tabela com as massas constituintes e correntes dos quarks e as massas dos mésons, uma segunda tabela com os valores das constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark e uma terceira com as constantes de decaimento e acoplamento. Os valores dos inputs usados são $f_{\pi^+} = 92.4 \text{ MeV}$, $m_{\pi^+} = 139.6 \text{ MeV}$ e $m_{\rho^+} = 770.0 \text{ MeV}$.

Tabela 9 Massas dos quarks e mésons para $\langle \bar{u}u \rangle = (-250.0 MeV)^3$. Todas as grandezas são dadas em MeV .

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	M_d	m_u	m_d	m_{π^0}	m_{ρ^0}	$m_{a_1^+}$	$m_{a_1^0}$	m_σ
-250.0	466	5.29	5.29	139.6	770.0	1139	1139	933
-250.4	470	4.05	6.51	139.5	769.96	1130	1143	937
-250.8	475	2.79	7.74	139.3	769.85	1117	1148	942
-251.2	480	1.50	9.0	138.8	769.67	1099	1153	948
-251.7	485	0.20	10.3	138.2	769.43	1077	1158	953

Tabela 10 Constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark para $\langle \bar{u}u \rangle = (-250.0 MeV)^3$ com exceção de $g_{\sigma qq}$. O condensado é dado em MeV .

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	$g_{\pi^+ qq}$	$\tilde{g}_{\pi^+ qq}$	$g_{\pi^0 qq}$	$\tilde{g}_{\pi^0 qq}$	$g_{\rho^+ qq}$	$g_{\rho^0 qq}$	$g_{a_1^+ qq}$	$g_{a_1^0 qq}$
-250.0	5.02	2.85	5.02	2.85	4.81	4.81	3.84	3.84
-250.4	5.04	2.88	5.04	2.88	4.85	4.84	3.97	3.85
-250.8	5.06	2.91	5.07	2.91	4.88	4.88	4.12	3.85
-251.2	5.09	2.94	5.09	2.95	4.90	4.91	4.29	3.86
-251.7	5.12	2.98	5.11	2.98	4.96	4.95	4.47	3.86

Tabela 11 Constantes de decaimento, $g_{\sigma qq}$ e acoplamento para $\langle \bar{u}u \rangle = (-250.0 MeV)^3$. O condensado e a constante de decaimento são dados em MeV e as constantes de acoplamento em GeV^{-2} .

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	$g_{\sigma qq}$	G_V	G_S	f_{π^0}
-250.0	2.03	16.5	14.8	92.40
-250.4	1.96	16.6	14.8	92.39
-250.8	1.93	16.7	14.8	92.38
-251.2	1.91	16.9	14.9	92.37
-251.7	1.88	17.0	14.9	92.35

Nas tabelas acima, podemos ver que a maioria das grandezas fenomenológicas mostradas muda muito pouco com o aumento da diferença dos valores dos condensados $\Delta \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \bar{d}d \rangle - \langle \bar{u}u \rangle$. A maior diferença acontece nas massas correntes dos quarks, m_u e m_d , representando a intensidade da quebra da simetria de isospin. Variamos $\langle \bar{d}d \rangle$ até obter a máxima diferença $\Delta m = m_d - m_u$

Tabela 12 Massas dos quarks e mésons para $\langle\bar{u}u\rangle = (-260.0\text{MeV})^3$. Todas as grandezas são dadas em MeV .

$\langle\bar{d}d\rangle^{1/3}$	M_d	m_u	m_d	m_{π^0}	m_{ρ^0}	$m_{a_1^+}$	$m_{a_1^0}$	m_σ
-260.0	485	4.71	4.71	139.6	770.0	1174	1174	970
-260.4	489	3.60	5.8	139.5	769.97	1164	1179	975
-260.8	494	2.47	6.9	139.3	769.88	1149	1183	980
-261.3	498	1.34	8.0	138.9	769.74	1129	1188	985
-261.7	503	0.18	9.14	138.3	769.54	1106	1193	990

Tabela 13 Constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark para $\langle\bar{u}u\rangle = (-260.0\text{MeV})^3$ com exceção de $g_{\sigma qq}$. O condensado é dado em MeV .

$\langle\bar{d}d\rangle^{1/3}$	$g_{\pi^+ qq}$	$\tilde{g}_{\pi^+ qq}$	$g_{\pi^0 qq}$	$\tilde{g}_{\pi^0 qq}$	$g_{\rho^+ qq}$	$g_{\rho^0 qq}$	$g_{a_1^+ qq}$	$g_{a_1^0 qq}$
-260.0	5.22	3.12	5.22	3.12	5.08	5.08	3.89	3.89
-260.4	5.24	3.15	5.25	3.15	5.11	5.11	4.03	3.90
-260.8	5.27	3.19	5.27	3.18	5.14	5.14	4.19	3.90
-261.3	5.3	3.22	5.3	3.22	5.18	5.17	4.35	3.90
-261.7	5.33	3.25	5.32	3.25	5.20	5.20	4.5	3.90

Tabela 14 Constantes de decaimento, $g_{\sigma qq}$ e acoplamento para $\langle\bar{u}u\rangle = (-260.0\text{MeV})^3$. O condensado e a constante de decaimento são dados em MeV e as constantes de acoplamento em GeV^{-2} .

$\langle\bar{d}d\rangle^{1/3}$	$g_{\sigma qq}$	G_V	G_S	f_{π^0}
-260.0	2.03	17.4	13.6	92.40
-260.4	1.96	17.5	13.7	92.39
-260.8	1.93	17.6	13.7	92.38
-261.3	1.91	17.7	13.8	92.37
-261.7	1.89	17.8	13.8	92.35

possível para os valores dos inputs considerados. No setor do pión, vemos que a diferença máxima obtida das massas dos pions carregados e dos neutros é de $\Delta m_\pi = 1.4 \text{ MeV}$ para $\langle\bar{u}u\rangle^{1/3} = -250.0 \text{ MeV}$. Para outros valores do condensado, essa diferença é similar. De uma maneira geral, os valores das constantes de decaimento, tanto para os pions como para os mésons rhos, não sofrem mudan-

Tabela 15 Massas dos quarks e mésons para $\langle\bar{u}u\rangle = (-270.0MeV)^3$. Todas as grandezas são dadas em MeV .

$\langle\bar{d}d\rangle^{1/3}$	M_d	m_u	m_d	m_{π^0}	m_{ρ^0}	$m_{a_1^+}$	$m_{a_1^0}$	m_σ
-270.0	501	4.21	4.21	139.6	770.0	1205	1205	1002
-270.5	505	3.22	5.18	139.5	769.98	1193	1209	1007
-270.9	510	2.22	6.15	139.3	769.9	1177	1214	1012
-271.4	515	1.0	7.3	138.8	769.75	1151	1220	1018
-271.8	518	0.20	8.14	138.4	769.62	1132	1224	1022

Tabela 16 Constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark para $\langle\bar{u}u\rangle = (-270.0MeV)^3$ com exceção de $g_{\sigma qq}$. O condensado é dado em MeV .

$\langle\bar{d}d\rangle^{1/3}$	$g_{\pi^+ qq}$	$\tilde{g}_{\pi^+ qq}$	$g_{\pi^0 qq}$	$\tilde{g}_{\pi^0 qq}$	$g_{\rho^+ qq}$	$g_{\rho^0 qq}$	$g_{a_1^+ qq}$	$g_{a_1^0 qq}$
-270.0	5.40	3.35	5.40	3.35	5.29	5.29	3.94	3.94
-270.5	5.42	3.39	5.42	3.39	5.31	5.31	4.07	3.94
-270.9	5.44	3.42	5.44	3.42	5.34	5.33	4.24	3.94
-271.4	5.48	3.46	5.48	3.45	5.37	5.37	4.45	3.94
-271.8	5.50	3.48	5.50	3.48	5.39	5.39	4.60	3.95

Tabela 17 Constantes de decaimento, $g_{\sigma qq}$ e acoplamento para $\langle\bar{u}u\rangle = (-270.0MeV)^3$. O condensado e a constante de decaimento são dados em MeV e as constantes de acoplamento em GeV^{-2} .

$\langle\bar{d}d\rangle^{1/3}$	$g_{\sigma qq}$	G_V	G_S	f_{π^0}
-270.0	2.03	18.1	12.6	92.40
-270.5	1.97	18.2	12.6	92.39
-270.9	1.94	18.3	12.7	92.38
-271.4	1.91	18.4	12.7	92.37
-271.8	1.90	18.5	12.8	92.36

ças significativas. Em particular, o valor encontrado de f_{ρ^+} foi de $8.1 MeV$ para todos os valores dos condensados estudados. Por sua vez, as constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark, também, têm mudanças insignificantes com a variação de $\Delta\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, com exceção de $g_{a_1^+ qq}$. A maior variação, nessas grandezas, ocorre, quando mudamos $\langle\bar{u}u\rangle$, que são os valores das três diferentes

tabelas mostradas. No setor dos mésons axiais, podemos observar mudanças mais significativas nas massas dos mésons carregados e neutros, tanto para variações de $\Delta \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ como para variações de $\langle \bar{u}u \rangle$. A maior diferença observada foi de $\Delta m_{a_1} = 92.0 \text{ MeV}$ para $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} = -270.0 \text{ MeV}$. Os valores absolutos dos mésons axiais se aproximam dos valores experimentais à medida que aumentamos o valor do condensado $\langle \bar{u}u \rangle$. A constante de acoplamento $g_{a_1^+ qq}$, também, tem uma variação considerável quando a quebra da simetria de isospin se intensifica. O mesmo não acontece para $g_{a_1^0 qq}$. Por isso, a diferença dos valores dessas duas grandezas no setor carregado e neutro é considerável para valores máximos de Δm . Não encontramos resultados na literatura pesquisada sobre as diferenças dos observáveis relativos aos mésons axiais para os setores carregados e neutro. Finalmente, no setor escalar, vemos que a constante de acoplamento $g_{\sigma qq}$ não se altera, substancialmente, em nenhum caso estudado e a massa m_σ tende a crescer conforme $\Delta \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ e $\langle \bar{u}u \rangle$ aumentam. De uma maneira geral, podemos perceber que os valores dos observáveis fenomenológicos, obtidos dentro da formulação preditiva do modelo NJL, são compatíveis com aqueles encontrados na literatura do assunto.

Consideremos, agora, o caso no qual tomamos $G_T \neq 0$. Para $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} = -250.0 \text{ MeV}$, $f_{\pi^+} = 92.4 \text{ MeV}$, $m_{\pi^+} = 139.6 \text{ MeV}$, $m_{\rho^+} = 770.0 \text{ MeV}$ e $f_{\rho^+} = 5.8$ construímos as tabelas mostradas a seguir.

Tabela 18 Massas dos quarks e mésons dadas em MeV com $G_T > 0$.

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	M_d	m_u	m_d	m_{π^0}	m_{ρ^0}	$m_{a_1^+}$	$m_{a_1^0}$	m_σ
-250.0	466	5.3	5.3	139.6	770.0	1154	1154	933
-250.4	470	4.1	6.5	139.5	769.96	1158	1158	938
-250.8	476	2.8	7.8	139.2	769.87	1162	1162	943
-251.2	480	1.5	9.0	138.8	769.70	1166	1167	948
-251.7	485	0.2	10.3	138.2	769.50	1170	1172	953

Tabela 19 Constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark para no canal escalar e pseudoescalar. O condensado é dado em MeV .

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	g_{π^+qq}	\tilde{g}_{π^+qq}	g_{π^0qq}	\tilde{g}_{π^0qq}	$g_{\sigma qq}$
-250.0	4.99	2.02	4.99	2.01	2.14
-250.4	5.01	2.04	5.01	2.04	2.07
-250.8	5.04	2.07	5.04	2.07	2.03
-251.2	5.07	2.10	5.07	2.10	2.0
-251.7	5.09	2.12	5.09	2.12	1.98

Tabela 20 Constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark no setor vetorial e axial-vetor. O condensado é dado em MeV .

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	g_{ρ^+qq}	\tilde{g}_{ρ^+qq}	g_{ρ^0qq}	\tilde{g}_{ρ^0qq}	$g_{a_1^+qq}$	$g_{a_1^0qq}$
-250.0	4.78	2.39	4.78	2.39	3.62	3.62
-250.4	4.82	2.42	4.82	2.42	3.63	3.63
-250.8	4.86	2.45	4.86	2.45	4.64	4.64
-251.2	4.90	2.49	4.90	2.49	4.65	4.65
-251.7	4.94	2.52	4.93	2.52	4.66	4.65

Tabela 21 Constantes de decaimento e acoplamento para $G_T > 0$. O condensado e a constante de decaimento são dados em MeV e as constantes de acoplamento em GeV^{-2} .

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	G_V	G_T	G_S	f_{π^0}
-250.0	11.7	30.3	14.7	92.40
-250.4	11.8	31.8	14.8	92.39
-250.8	11.9	33.5	14.8	92.38
-251.2	12.0	35.4	14.9	92.37
-251.7	12.1	37.7	14.9	92.35

Na Tabela(18) vemos modificações somente no setor axial. Em contraste com a Tabela(9), em que $G_T = 0$, notamos que as massas dos mésons a_1 crescem conforme intensificamos a quebra da simetria de isospin. Além disso, não existe diferença nas massas dos axiais carregados e neutros, diferentemente, do que acontece para $G_T = 0$ em que as massas $m_{a_1^+}$ e $m_{a_1^0}$ têm comportamentos opostos como função de Δm . Poucas modificações acontecem, também, nas

constantes de acoplamento efetivas do setor dos mésons píons e sigma, como podemos ver na Tabela(19). Somente as constantes de acoplamento $\tilde{g}_{\pi qq}$ adquirem valores absolutos menores daqueles mostrados na Tabela(10). No setor dos mésons vetoriais ρ , temos duas novas constantes de acoplamento, $\tilde{g}_{\rho^+ qq}$ e $\tilde{g}_{\rho^0 qq}$, em razão do fato de $G_T \neq 0$. Os valores obtidos são idênticos para ambas. O valor de f_{ρ^0} não é apresentado nas tabelas, pois é idêntico ao atribuído para f_{ρ^+} e não muda com a variação considerada para $\langle \bar{d}d \rangle$. Os valores de G_T , vistos na Tabela(21), são similares ao valor obtido na Ref.[31], onde G_V é tomado como nulo. Observamos que o valor de G_T depende, fortemente, dos valores atribuídos para m_{ρ^+} e, especialmente, para f_{ρ^+} . O valor de G_V , por sua vez, é dominado por m_{ρ^+} .

Se permitirmos que G_T seja negativo, o que corresponderia a uma contribuição de um canal repulsivo, então podemos tomar f_{ρ^+} igual ao seu valor fenomenológico que é de 5.3 MeV , de acordo com a Ref.[25]. Os resultados são mostrados nas tabelas abaixo.

Tabela 22 Massas dos quarks e mésons dadas em MeV com $G_T < 0$.

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	M_d	m_u	m_d	m_{π^0}	m_{ρ^0}	$m_{a_1^+}$	$m_{a_1^0}$	m_σ
-250.0	466	5.3	5.3	139.6	770.0	1159	1159	933
-250.4	470	4.1	6.5	139.5	769.96	1163	1163	938
-250.8	476	2.8	7.8	139.3	769.87	1167	1167	943
-251.2	480	1.5	9.0	138.8	769.70	1171	1172	949
-251.7	485	0.2	10.3	138.2	769.50	1175	1176	954

Na Fig.(10), mostramos o comportamento de G_T como função de G_V para dois valores dos condensados. Podemos observar uma descontinuidade na transição dos valores negativos para os valores positivos de G_T . Não temos nenhuma interpretação física desse comportamento de G_T até o momento.

Como podemos ver das tabelas mostradas acima, o padrão dos números obtidos para a fenomenologia permanece similar àqueles obtidos para $G_T > 0$.

Tabela 23 Constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark para no canal escalar e pseudoescalar com $G_T < 0$. O condensado é dado em MeV .

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	g_{π^+qq}	\tilde{g}_{π^+qq}	g_{π^0qq}	\tilde{g}_{π^0qq}	$g_{\sigma qq}$
-250.0	4.99	1.87	4.99	1.87	2.16
-250.4	5.01	1.89	5.01	1.89	2.08
-250.8	5.04	1.92	5.03	1.92	2.04
-251.2	5.07	1.95	5.06	1.94	2.01
-251.7	5.09	1.97	5.09	1.97	1.99

Tabela 24 Constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark no setor vetorial e axial-vetor com $G_T < 0$. O condensado é dado em MeV .

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	g_{ρ^+qq}	\tilde{g}_{ρ^+qq}	g_{ρ^0qq}	\tilde{g}_{ρ^0qq}	$g_{a_1^+qq}$	$g_{a_1^0qq}$
-250.0	4.86	3.05	4.86	3.05	3.57	3.57
-250.4	4.90	3.10	4.90	3.10	3.58	3.58
-250.8	4.94	3.14	4.93	3.14	3.59	3.59
-251.2	4.98	3.18	4.97	3.18	3.60	3.60
-251.7	5.01	3.23	5.00	3.22	3.61	3.61

Tabela 25 Constantes de decaimento e acoplamento com $G_T < 0$. O condensado e a constante de decaimento são dados em MeV e as constantes de acoplamento em GeV^{-2} .

$\langle \bar{d}d \rangle^{1/3}$	G_V	G_T	G_S	f_{π^0}
-250.0	10.9	-19.0	14.7	92.40
-250.4	10.9	-18.6	14.8	92.39
-250.8	11.0	-18.1	14.8	92.38
-251.2	11.1	-17.7	14.9	92.37
-251.7	11.2	-17.3	14.9	92.35

De modo geral podemos perceber que os valores dos observáveis fenomenológicos calculados da formulação preditiva do modelo NJL são compatíveis com os resultados encontrados na literatura do assunto, apesar de não termos conhecimento de nenhum trabalho na literatura que leve em consideração G_V e G_T simultaneamente não nulos. Sendo assim, podemos considerar também esse aspecto do

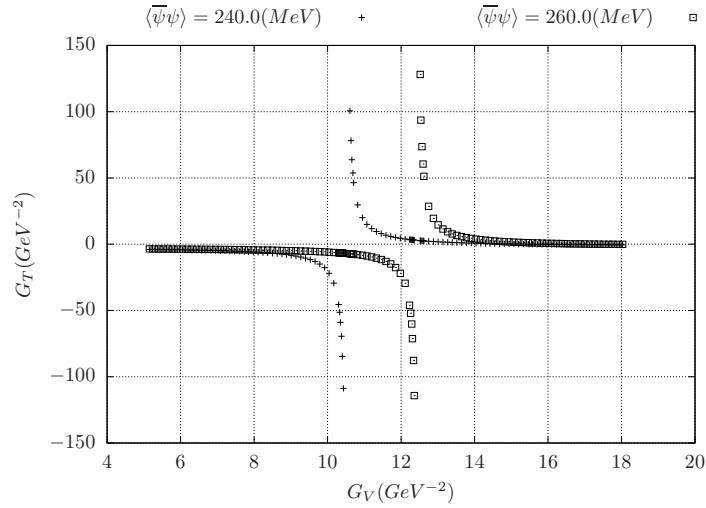


Figura 10 Descontinuidades dos valores de G_T como função de G_V .

trabalho como original nesse assunto.

5 RESUMO E CONCLUSÃO

O modelo NJL é adequado para investigar a física hadrônica de baixa energia em virtude do fato de incorporar duas características muito importantes da QCD: a simetria quiral e sua quebra dinâmica. Através do mecanismo da quebra da simetria quiral podemos gerar, não perturbativamente, dentro de uma dada aproximação, as massas constituintes dos quarks. Os mésons, em particular, são descritos por estados ligados de um par quark-antiquark e suas características fenomenológicas são obtidas da matriz de espalhamento quark-antiquark, também dentro de uma certa aproximação. As massas, por exemplo, são obtidas do polo da matriz de espalhamento e as constantes de acoplamento efetivas méson-quark-antiquark estão relacionadas com o resíduo do polo.

Tipicamente, o modelo NJL é construído através de interações puntiformes

(locais) de quatro férmions. Como resultado temos uma teoria de campos não renormalizável, a priori, e também a ausência do mecanismo de confinamento dos quarks, que é outro ingrediente não perturbativo conhecidamente importante presente na QCD. Esta última deficiência do modelo é responsável, em princípio, em limitar a aplicabilidade fenomenológica do modelo a energias da ordem de até 1 GeV . Propostas com modificações do modelo proposto originalmente através da introdução de termos de confinamento têm surgido na literatura nos últimos anos [33].

Como a maior parte das teorias quânticas de campos, o modelo NJL também é contaminado por divergências que são típicas dos métodos de cálculos perturbativos. Esse fato, associado ao seu caráter não renormalizável, torna o processo de obtenção da fenomenologia extremamente delicado. Para se possibilitar o cálculo das amplitudes divergentes, pertinentes aos processos físicos que descrevem a fenomenologia associada ao modelo, precisamos utilizar um método de regularização. Devido a não renormalizabilidade do modelo, os parâmetros que são inevitavelmente introduzidos por tais métodos não podem ser removidos ao final dos cálculos e passam, portanto, a fazer parte do modelo. Sendo assim, dentro desse ponto de vista, o modelo somente é definido depois da escolha do método de regularização que, por sua vez, é arbitrário. Não é surpresa então esperar que diferentes escolhas de métodos de regularização nos conduzam a resultados distintos dentro de uma mesma fenomenologia. A escolha de um método específico de regularização é uma dentre outras arbitrariedades associadas com o processo de regularização de amplitudes divergentes. Uma arbitrariedade comum nesse tipo de cálculo está relacionada com a escolha feita para os rótulos das linhas internas dos loops. Em princípio, qualquer escolha de rótulos deveria levar a mesma amplitude física. Fundamentalmente, isso é consequência da simetria mais básica usada

para se construir QFT's: a homogeneidade do espaço-tempo. Em particular, como consequência direta dessa simetria, seria esperado que as amplitudes perturbativas fossem invariantes sob redefinições, do tipo translação ou deslocamento (em inglês *shift*), nos momenta dos integrando das integrais de Feynman. Por causa do caráter divergente das amplitudes, em muitas circunstâncias isso não é o que acontece. Esse tipo de ambiguidade pode ter consequências desastrosas para o modelo pois está frequentemente associada com violações de simetrias, que são os ingredientes fundamentais do modelo. Desse ponto de vista, podemos dizer que as manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes desempenha um papel crucial para estabelecermos o poder de predição do modelo.

Mantendo em mente os aspectos discutidos acima, no presente trabalho lançamos mão de um método alternativo para manipulação e cálculo de integrais divergentes para construirmos uma versão do modelo NJL que seja livre das ambiguidades associadas com o cálculo de amplitudes de Feynman divergentes. Esse esquema de cálculo foi batizado de cálculo perturbativo preditivo (PPC). O presente trabalho é uma extensão, para o caso de massas diferentes e interações tensoriais, de um trabalho publicado anteriormente sobre o mesmo assunto [17]. Utilizamos o método PPC para calcularmos de forma sistemática todas as amplitudes necessárias para se obter os observáveis pertencentes a fenomenologia descrita pela Lagrangeana do modelo NJL. Como resultado da estratégia principal do método PPC, nenhuma integral divergente foi realizada de fato durante o processo de cálculo. O conteúdo físico das amplitudes foi isolado e escrito em termos de integrais finitas as quais foram integradas e organizadas em um conjunto de funções finitas bem definidas. O conteúdo divergente remanescente foi reduzido e organizado em um conjunto mínimo de objetos puramente divergentes que chamamos de $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$, $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$, $\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2)$ e $\square_{4;\mu\nu\xi\chi}^{(4)}(\lambda^2)$. Os dois primeiros

elementos do conjunto, $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ e $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$, são objetos divergentes irreduzíveis e os três últimos podem ser vistos como termos de superfície, conforme discutido na Ref.[20]. Nesse contexto, o parâmetro λ , que foi introduzido no processo de separação das partes divergentes e finitas, desempenha um papel de escala e faz a conexão entre a parte finita e divergente da amplitude. Usando-se apenas identidades algébricas mostramos que os objetos $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ e $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$ não são de fato independentes. Eles estão relacionados através de vínculos que denominamos de relações de escala dadas por

$$\begin{aligned} \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] &= \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda_0^2) \right] + \frac{1}{16\pi^2} \ln \left(\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right) \\ \left[i I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] &= \left[i I_{quad}^{(4)}(\lambda_0^2) \right] + \lambda^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] - \lambda_0^2 \left[i I_{\log}^{(4)}(\lambda_0^2) \right] \\ &\quad + \frac{\lambda_0^2}{16\pi^2} - \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \end{aligned}$$

As amplitudes calculadas devem satisfazer certos vínculos de consistência mínimos que são estabelecidos ao nível dos integrandos e os quais são denominados de relações entre funções de Green. Para se estabelecer as relações entre funções de Green a única hipótese utilizada é a validade da linearidade nas operações de integração. Qualquer processo de cálculo das amplitudes físicas que viole as relações entre funções de Green, portanto, não é aceitável. Através de cálculos sistemáticos mostramos que as amplitudes obtidas através do método PPC realmente satisfazem todas as relações entre funções de Green que podem ser estabelecidas para elas, sem exceção. Isso não deveria ser uma surpresa completa pois no método PPC também assumimos como hipótese básica a validade da linearidade na operação de integração.

Dos resultados explícitos das amplitudes calculadas podemos perceber a presença de termos que são ambíguos. As ambiguidades identificadas estão rela-

cionadas com a liberdade que temos na escolha dos rótulos dos momenta internos aos loops e na arbitrariedade na escolha do parâmetro que adotamos no processo de separação da parte finita e divergente das amplitudes (parâmetro de escala). A presença de qualquer tipo de ambiguidade, como sabemos, compromete o poder de predição do modelo. Sem a introdução de hipóteses adicionais, a única possibilidade de eliminar essas ambiguidades foi assumir válidas as chamadas relações de consistência

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) = \Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) = \square_{\xi\chi\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) = 0$$

As amplitudes obtidas com a introdução das relações de consistência são livres de ambiguidades e denominadas de amplitudes físicas ou, ainda, amplitudes consistentemente regularizadas. As amplitudes físicas são os ingredientes básicos que usamos na formulação preditiva do modelo NJL.

Discutimos e ilustramos vários aspectos que definem o modelo NJL a partir de sua versão mais simples, aquela contendo apenas uma constante de acoplamento (G_S) envolvendo as interações escalares e pseudoescalares. Dentre os aspectos, o conceito de simetria quiral e a geração dinâmica de massa para os quarks, que acontece dentro da aproximação Hartree, foram abordados com muitos detalhes. A fenomenologia mesônica e a maneira que ela surge no modelo foram detalhados através do cálculo dos elementos da matriz de espalhamento quark-antiquark, na aproximação RPA. Obtemos várias expressões que definem as massas, as constantes de acoplamento efetivas e as constantes de decaimento dos mésons píons e sigma, usando-se as amplitudes físicas obtida pelo método PPC. Todos os cálculos foram feitos primeiro para o caso de massas iguais e posteriormente para o caso de massas diferentes.

Podemos dizer que, sem exceção, na literatura do assunto, as massas constituintes dos quarks são obtidas através da solução da chamada equação de gap

escolhendo-se, para isso, um valor do(s) parâmetro(s) de regularização que melhor simule a fenomenologia em questão. Nesse ponto a formulação preditiva do modelo NJL, discutida nesse trabalho, difere mais uma vez das abordagens convencionais. A proposta é obter as massas constituintes por meio das equações que definem as relações de escala. As relações de escala são, em última instância, condições necessárias impostas sobre $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ e $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$ para que as amplitudes físicas sejam independentes de λ . Dessa forma, as massas que encontrarmos a partir dessas equações devem automaticamente respeitar a invariância de escala do modelo. Como primeira etapa desse processo, parametrizações para os objetos divergentes irreduzíveis são obtidas usando-se para isso as equações que definem o condensado quark-antiquark e a constante de decaimento do pión carregado. A equação obtida após a introdução das parametrizações para $I_{\log}^{(4)}(\lambda^2)$ e $I_{quad}^{(4)}(\lambda^2)$ depende ainda de uma constante arbitrária (C), que podemos associar com a liberdade que temos na escolha do tipo de regularização usada. Quando investigamos as soluções dessa equação para todos os valores possíveis de C percebemos um padrão de possibilidades muito peculiar e surpreendente. Somente para um único valor específico de C temos também uma única solução para as massas, o qual chamamos de ponto crítico. Para todos os outros valores de C ou não temos nenhuma solução física ou temos duas soluções. Tal padrão de soluções nos sugere fortemente que o valor a ser adotado para M deve ser o crítico. Ao adotar este ponto de vista, podemos afirmar que fixamos a última ambiguidade aparente relacionada com o problema das divergências. Por conta da eliminação de todas as ambiguidades podemos dizer, nesse sentido, que temos então uma formulação do modelo NJL que é preditiva.

Estendemos a formulação preditiva do modelo para incluir também os acoplamentos vetoriais/axiais e tensoriais. Com essas interações adicionais, além dos

mésons π 's e σ , podemos descrever também a fenomenologia dos mésons ρ 's e a_1 's. Novamente calculamos, de uma forma sistemática e detalhada, expressões que são usadas para obter as massas, constantes de acoplamento efetivas e constantes de decaimentos dos mésons, considerando sempre o problema dos quarks com massas diferentes ou quebra explícita de simetria de isospin. A análise quantitativa da fenomenologia foi realizada tanto para o caso de simetria de isospin exata bem como para simetria explicitamente quebrada. Através de uma série de tabelas de dados fenomenológicos, obtidas com a ajuda do software MAPLE, podemos verificar a consistência das previsões do modelo NJL na formulação preditiva. Particular ênfase foi dada para as consequências da quebra de simetria isospin nos valores obtidos para os observáveis físicos calculados. No setor pseudoescalar, por exemplo, vimos que as massas dos píons carregados e neutros têm uma diferença significativa somente quando a quebra da simetria de isospin é grande. No setor vetorial, em contrapartida, nenhuma influência da quebra de simetria isospin nos valores calculados foi observada. De uma forma geral podemos concluir que os valores obtidos para fenomenologia são consistentes quando comparados com aqueles encontrados na literatura do assunto.

O ponto mais importante, no contexto do presente trabalho, foi a construção da formulação preditiva do modelo NJL para o problema envolvendo quarks com massas diferentes. Dentro do contexto de uma teoria quântica de campos, mais geral, o desafio foi aplicar o método PPC a um modelo, a priori não renormalizável, e mostrar que ele pode adquirir a mesma consistência física encontrada nas teorias mais fundamentais (renormalizáveis). O sucesso do método PPC também nesse cenário, sugere, mais uma vez, a sua consistência física e matemática e, portanto, uma alternativa viável aos métodos usuais de regularização.

Referências

- [1] WEINBERG, S. **Nonabelian Gauge Theories of the Strong Interactions.** Phys. Rev. Lett. 31, p. 494-497, 1973.
- [2] FRITZSCH, H. ; GELL-MANN, M. ; LEUTWYLER, H. **Advantages of the Color Octet Gluon Picture.** Phys. Lett. B47, p. 365-368, 1973.
- [3] MUTA, T. **Foundations of quantum chromodynamics.** World Sci. Lect. Notes, n. 5, p. 1-104, Cingapura, 1987.
- [4] DEGRAND, T. ; DETAR, C. **Lattice Methods for Quantum Chromodynamics.** World Scientific, 2006.
- [5] GATTRINGER, C. ; LANG, C.B. **Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation.** Springer, 2009.
- [6] OXFORD UNIVERSITY PRESS. **Modern Perspectives in Lattice QCD: quantum field theory and high performance computing.** (Lecture notes of the Les Houches Summer School, Vol. 93) eds. L. Lellouch et al., Oxford Univ. Press., August, 2011.
- [7] NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. **Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I.** *Phys. Rev.*, n. 122, p. 345-358, 1961.
- [8] NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. **Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II.** *Phys. Rev.*, n. 124, p. 246-254, 1961.
- [9] HATSUDA, T.; KUNIHIRO, T. **QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian.** *Phys. Rept.*, n. 247, p. 221-367, 1994.

- [10] KLEVANSKY, S. P. **The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics.** *Rev. Mod. Phys.*, n. 64, p. 649-708, 1992.
- [11] BIJNENS, J. **Chiral Lagrangians and Nambu-Jona-Lasinio - like models.** *Phys. Rept.*, n. 265, p. 369-446, 1996.
- [12] RIPKA, G. **Quarks Bound by Chiral Fields.** Oxford University Press, 1997.
- [13] BUBALLA, M. **NJL-model analysis of dense quark matter.** *Phys. Rept.*, n. 407, p. 205-376, 2005.
- [14] GHERGHETTA, T. **Regularization in the gauged Nambu-Jona-Lasinio model.** *Phys. Rev.*, D50, p. 5985-5992, 1994.
- [15] WILLEY, R. S. **Ambiguity of calculations in the Nambu-Jona-Lasinio model and its singular relation to the linear sigma model.** *Phys. Rev.*, D48, p. 2877-2880, 1993.
- [16] BATTISTEL, O. A. ; DALLABONA, G. ; KREIN, G. **A Predictive formulation of the Nambu-Jona-Lasinio model.** *Phys. Rev.*, D77, 065025, 2008.
- [17] BATTISTEL, O. A. ; DALLABONA, G. **From scale properties of physical amplitudes to a predictive formulation of the Nambu-Jona-Lasinio model.** *Phys. Rev.*, D80, 085028, 2009.
- [18] ROCHEV, V. E. **Properties of predictive formulation of the Nambu-Jona-Lasinio model and ghost problem.** *J. Phys.* A42, 195403, 2009.
- [19] MAPLE 16. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario.
- [20] BATTISTEL, O. A. **Uma estratégia para manipulações e cálculos envolvendo divergências em TQC.** PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Brazil, 1999.

- [21] BATTISTEL, O. A. ; DALLABONA, G. **A systematization for one-loop 4D Feynman integrals.** Eur. Phys. J., C45, p. 721-743, 2006.
- [22] WEISE, W. **Hadrons in the NJL Model.** Aulas apresentadas no centro de física teórica, Seoul National University, Seoul, Korea,1992.
- [23] BARDEEN, J. ; COOPER ,L. N. ; SCHRIEFFER, J. R. **Microscopic Theory of Superconductivity.** Phys. Rev., n. 106, p. 162-164, 1957.
- [24] BARDEEN, J. ; COOPER ,L. N. ; SCHRIEFFER, J. R. **Theory of Superconductivity.** Phys. Rev., n. 108, p. 1175, 1957.
- [25] KLIMT, S. ; LUTZ, M. ; VOGL, U. ; WEISE, W. **Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model.** Nucl. Phys., A516, p. 429-468, 1990.
- [26] KLEVANSKY, S. P. ; LEMMER, R. H. **Spectral density functions and their sum rules in an effective chiral field theory.** e-Print: hep-ph/9707206, 1997, 100 p.
- [27] OLIVE, K. A. et al. **Particle Data Group.** Chin. Phys. C38, 090001, 2014.
- [28] SHIFMAN, M. A. ; VAINSHTEIN, A. I. ; ZAKHAROV, V. I. **QCD and Resonance Physics: The $\rho - \omega$ mixing.** Nucl. Phys., B147, p. 519-534, 1979.
- [29] BERNARD, V. ; MEISSNER, U. G. **Quark Mass Differences and Isospin Violation in the Pion-Nucleon Coupling Constants.** Phys.vRev. C39, p. 2054-2056, 1989.
- [30] BERNARD, V. ; MEISSNER, U. G. **Properties of vector and axial-vector mesons from a generalized Nambu-Jona-Lasinio Model.** Nucl. Phys. A489, p. 647, 1988.

- [31] JAMINON, M. ; ARRIOLA, E. R. **Vector Mesons from Tensor Couplings in the NJL Model.** Phys. Lett., B443, p. 33-39, 1998.
- [32] TAKIZAWA, M. ; OKA, M. **Effects of the $U_A(1)$ anomaly on $\eta \rightarrow 2\gamma$ decay.** Phys. Lett. B, n. 359, p. 210-216, 1995.
- [33] FUKUSHIMA, K. **Chiral effective model with the Polyakov loop.** Phys. Lett., B591, p. 277-284, 2004.
- [34] REHBERG, P. ; KLEVANSKY, S. P. ; HUFNER, J. **Hadronization in the SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model.** Phys. Rev. C53, p. 410-429, 1996.
- [35] KROLL, P. **Isospin symmetry breaking through $\pi^0 - \eta - \eta'$ mixing.** Mod. Phys. Lett., A20, p. 2667-2684, 2005.
- [36] BRONIOWSKI, W. ; RIPKA, G. ; NIKOLOV, E. ; GOEKE, K. **Analytic structure of meson propagators in the proper time regularized Nambu-Jona-Lasinio model.** Z. Phys., A354, p. 421-429, 1996.
- [37] DORING, F. ; BLOTZ, A. ; SCHUREN, C. ; MEISSNER, T. ; RUIZ-ARRIOLA, E. ; GOEKE, K. **The connection between soliton and vacuum regularization in the Nambu-Jona-Lasinio model.** Nucl. Phys., A536, p. 548-572, 1992.
- [38] DAVIDSON, R. M. ; RUIZ-ARRIOLA, E. **Structure functions of pseudoscalar mesons in the SU(3) NJL model.** Phys. Lett., B348, p. 163-169, 1995.
- [39] DAVIDSON, R. M. ; RUIZ-ARRIOLA, E. **Mesonic correlation functions in the NJL model with vector mesons.** Phys. Lett. B359, p. 273-280, 1995.
- [40] HOOFT, G. ; VELTMAN, M. J. G. **Regularization and Renormalization of Gauge Fields.** Nucl. Phys., B44, p. 189-213, 1972.

- [41] BOLLINI, C. G. ; GIAMBIAGI, J. J. **Lowest order divergent graphs in nudimensional space.** Phys. Lett., B40, p. 566-568, 1972.
- [42] ASHMORE, J. F. **A Method of Gauge Invariant Regularization.** Lett. Nuovo Cim., n. 4, p. 289-290, 1972.
- [43] RADZHABOV, A. E. ; VOLKOV, M. K. **Process $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ in the Nambu-Jona-Lasinio model.** Phys. Lett., D74, 113001, 2006.

6 APÊNDICE A - Cálculo da Amplitude $T^S(m_i)$

Por definição

$$T^S(m_i) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m_i} \right\}$$

Podemos manipular o integrando na forma

$$T^S(m_i) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m_i} \frac{(\not{k} + \not{k}_i + m_i)}{(\not{k} + \not{k}_i + m_i)} \right\}$$

$$T^S(m_i) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{(\not{k} + \not{k}_i + m_i)}{(k + k_i)^2 - m_i^2} \right\}$$

$$T^S(m_i) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \{(\not{k} + \not{k}_i + m_i)\} \frac{1}{(k + k_i)^2 - m_i^2}$$

A operação de traço é linear e, assim

$$\text{tr} \{(\not{k} + \not{k}_i + m_i)\} = \text{tr} \{(\not{k} + \not{k}_i)\} + m_i \text{tr} \{\mathbf{1}\}$$

Note que $(\not{k} + \not{k}_i) = \gamma_{\xi} (k + k_i)^{\xi}$ de forma que $T^S(m_i)$ fica

$$\begin{aligned} T^S(m_i) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \{ \gamma_{\xi} \} (k + k_i)^{\xi} \frac{1}{(k + k_i)^2 - m_i^2} \\ &+ m_i \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \{ \mathbf{1} \} \frac{1}{(k + k_i)^2 - m_i^2} \end{aligned}$$

Note ainda que

$$\text{tr} \{ \gamma_{\xi} \} = 0$$

$$\text{tr} \{ \mathbf{1} \} = 4$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} T^S(m_i) &= 4m_i \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_i)^2 - m_i^2} \\ &= 4m_i I_1(k_i) \end{aligned}$$

onde

$$I_1(k_i) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_i)^2 - m_i^2}$$

A fim de reescrever o integrando, usamos a identidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(k+k_i)^2 - m_i^2]} &= \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} \\ &+ \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} [(k+k_i)^2 - m_i^2]}, \end{aligned}$$

com $N = 2$ (grau de divergência da integral $I_1(k_1)$). Assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+k_i)^2 - m^2} &= \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - m^2)^2} \\ &+ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - m^2)^3} \\ &- \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k+k_i)^2 - m^2]} \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}
I_1(k_i) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\
&\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - m^2)^2} \\
&\quad + \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_i)^2 - m^2]}
\end{aligned}$$

Os integrandos ímpares em k dão integrais identicamente nulas, pois o limite de integração é o infinito. Não deve ser confundido que o rótulo Λ no símbolo da integral não representa o limite de integração, mas que existe uma regularização implícita. Então

$$\begin{aligned}
I_1(k_i) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\
&\quad - (k_i^2 + \lambda^2 - m^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\
&\quad + 4k_i^\alpha k_i^\beta \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad + (k_i^2 + \lambda^2 - m^2)^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_i)^2 - m^2]}
\end{aligned}$$

Note que as 3 primeiras integrais são divergentes por contagem de potência e não possuem conteúdo físico. Portanto vamos organizá-los em $I_1(k_i)_{\text{div}}$. Através da

definição dos objetos (5), (6) e (7) temos

$$I_1(k_i)_{\text{div}} = \left[I_{\text{quad}}^{(4)}(\lambda^2) \right] + (m_i^2 - \lambda^2) \left[I_{\text{log}}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ + k_i^\alpha k_i^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right]$$

A parte finita da integral $I_1(k_1)$ é dada por

$$I_1(k_1)_{\text{fin}} = (k_i^2 + \lambda^2 - m^2)^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} \\ - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_i)^2 - m^2]}$$

Para calcular as integrais tomamos o limite de conexão (2) e separamos as integrais em

$$I_A = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} \quad (\text{A1})$$

$$I_B = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_i)^2 - m^2]} \quad (\text{A2})$$

cujo resultados são (APÊNDICE C - Eqs. (C3) e (C4))

$$I_A = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \frac{1}{(-m^2)} \\ I_B = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(k_i^2 + \lambda^2 - m^2)^2}{-\lambda^2} + \lambda^2 - m^2 + m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right\}$$

Assim, o resultado de $I_1(k_i)$ é dado por

$$\begin{aligned} I_1(k_i) &= \left[I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] + (m_i^2 - \lambda^2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &\quad + k_i^\alpha k_i^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Consequentemente, a amplitude $T^S(m_i) = 4m_i I_1(k_i)$ é dada por

$$\begin{aligned} T^S(m_i) &= 4m_i k_i^\alpha k_i^\beta \left[\Delta_{3;\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &\quad + 4m_i \left\{ \left[I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) \right] + (m_i^2 - \lambda^2) \left[I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[m_i^2 - \lambda^2 - m_i^2 \ln \left(\frac{m_i^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

7 APÊNDICE B - Função $\xi_n^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)$

As funções $\xi_n^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)$ são, por definição

$$\xi_n^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^n \ln \left(\frac{p^2(1-z)z + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2}{-\lambda^2} \right)$$

e as que estão presentes na dissertação envolvem $n = 0, 1$. As massas m_1^2 e m_2^2 são massas generalizadas e, portanto, não devem ser confundidas com as massas correntes dos quarks. Consideramos, assim, apenas as funções para $n = 0, 1$ nesse apêndice. Poderíamos calcular estas funções analiticamente. No entanto, podemos mostrar que $\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)$ e $\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)$ estão ligadas entre si por uma relação e, no final, podemos calcular apenas uma delas. Outro ponto é que os resultados analítico dessas funções não são usados diretamente nas seções (3.7,4.5), salvo em que $p^2 > (m_1 + m_2)^2$ como no caso da massa dos

mésons σ e mésons axiais.

Por definição temos

$$\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z \ln \left(\frac{S(z)}{-\lambda^2} \right) \quad (\text{B1})$$

onde

$$S(z) = p^2 z (1 - z) + (m_1^2 - m_2^2) z - m_1^2$$

Derivando $S(z)$ em relação a z temos

$$\frac{dS(z)}{dz} = p^2 (1 - 2z) + (m_1^2 - m_2^2)$$

Podemos reescrever a função (B1) como

$$\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) = -\frac{1}{2p^2} \int_0^1 dz (-2p^2) z \ln \left(\frac{S(z)}{-\lambda^2} \right)$$

ou

$$\begin{aligned} \xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -\frac{1}{2p^2} \int_0^1 dz [p^2 (1 - 2z) + (m_1^2 - m_2^2)] \ln \left(\frac{S(z)}{-\lambda^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2p^2} \int_0^1 dz p^2 \ln \left(\frac{S(z)}{-\lambda^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2p^2} (m_1^2 - m_2^2) \int_0^1 dz \ln \left(\frac{S(z)}{-\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

e usando a função

$$\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \ln \left(\frac{S(z)}{-\lambda^2} \right)$$

temos

$$\begin{aligned}\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -\frac{1}{2p^2} \int_0^1 dz [p^2(1-2z) - (m_1^2 - m_2^2)] \ln\left(\frac{S(z)}{-\lambda^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \\ &\quad + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2p^2}\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -\frac{1}{2p^2} \int_0^1 dz \frac{dS(z)}{dz} \ln\left(\frac{S(z)}{-\lambda^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \\ &\quad + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2p^2}\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)\end{aligned}$$

Podemos calcular a primeira integral usando o método de integração por partes.

Assim, temos

$$\begin{aligned}\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -\frac{1}{2p^2} \int_0^1 dz \frac{d}{dz} \left[S(z) \ln\left(\frac{S(z)}{-\lambda^2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2p^2} \int_0^1 dz S(z) \frac{d}{dz} \left[\ln\left(\frac{S(z)}{-\lambda^2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \\ &\quad + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2p^2}\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -\frac{1}{2p^2} S(z) \ln\left(\frac{S(z)}{-\lambda^2}\right) \Big|_{z=0}^1 + \frac{1}{2p^2} S(z) \Big|_{z=0}^1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \\ &\quad + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2p^2}\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)\end{aligned}$$

Escolhemos os limites

$$S(1) = -m_2^2$$

$$S(0) = -m_1^2$$

e obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -\frac{1}{2p^2} \left[m_1^2 \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right) - m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{\lambda^2} \right) - (m_1^2 - m_2^2) \right] \\ &\quad + \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2p^2} \xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \\ \xi_1^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &- \frac{1}{2} \xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \\ &= -\frac{1}{2p^2} \left[m_1^2 \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right) - m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{\lambda^2} \right) - (m_1^2 - m_2^2) \right] \\ &\quad + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2p^2} \xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Podemos calcular analiticamente a função $\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)$ que é dada por

$$\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \ln \left(\frac{p^2 z(1-z) + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2}{-\lambda^2} \right)$$

em que o numerador é uma equação de segunda ordem em z . Suas raízes são dadas

por

$$\alpha = \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}}{2p^2}$$

$$\beta = \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2) - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}}{2p^2}$$

de forma que podemos reescrever $\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)$ como

$$\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \ln \left(\frac{p^2}{\lambda^2} (z - \alpha)(z - \beta) \right)$$

conforme os passos anteriores temos

$$\begin{aligned} \xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= \ln a - 2 + \frac{\alpha + \beta}{2} \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{\beta}{\beta - 1} \right) \\ &+ \frac{\alpha - \beta}{2} \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{\beta - 1}{\beta} \right) + \ln [(1 - \alpha)(1 - \beta)] \end{aligned}$$

Substituindo os valores de a , α e β e reorganizando a função temos

$$\begin{aligned} \xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -2 + \ln + \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2p^2} \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right) \\ &+ \frac{\sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}}{2p^2} \times \\ &\ln \left[\frac{(m_1^2 + m_2^2 - p^2) - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}}{(m_1^2 + m_2^2 - p^2) + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -2 + \ln \frac{m_2^2}{\lambda^2} - \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2p^2} \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}}{2p^2} \times \\ &\quad \ln \left[\frac{(p^2 - m_1^2 - m_2^2) - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}}{(p^2 - m_1^2 - m_2^2) + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}} \right] \end{aligned}$$

Podemos ainda definir as seguintes funções

$$\begin{aligned} f(p^2) &= \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2} \\ g(p^2) &= \ln \left[\frac{(p^2 - m_1^2 - m_2^2) - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}}{(p^2 - m_1^2 - m_2^2) + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}} \right] \end{aligned}$$

que podemos reescrevê-las adequadamente nas formas

$$\begin{aligned} f(p^2) &= \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2} \\ &= \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2} \sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2} \\ g(p^2) &= \ln \left[\frac{(p^2 - m_1^2 - m_2^2) - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}}{(p^2 - m_1^2 - m_2^2) + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 p^2}} \right] \\ &= 2 \ln \left[\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2} + \sqrt{(m_1 - m_2)^2 - p^2}}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2} - \sqrt{(m_1 - m_2)^2 - p^2}} \right] \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos analisar a função $\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2)$ em três diferentes regiões

- $p^2 < (m_1 - m_2)^2$

Neste caso, reescrevemos as funções $f(p^2)$ e $g(p^2)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(p^2) &= \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2} \sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2} \\ &= -\sqrt{(m_1 - m_2)^2 - p^2} \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2} \\ g(p^2) &= 2 \ln \left[\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2} + \sqrt{(m_1 - m_2)^2 - p^2}}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2} - \sqrt{(m_1 - m_2)^2 - p^2}} \right] \end{aligned}$$

E assim temos, nessa região

$$\begin{aligned} \xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -2 + \ln \frac{m_2^2}{\lambda^2} - \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2p^2} \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{(m_1 - m_2)^2 - p^2} \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2}}{p^2} \times \\ &\quad \ln \left[\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2} + \sqrt{(m_1 - m_2)^2 - p^2}}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2} - \sqrt{(m_1 - m_2)^2 - p^2}} \right] \end{aligned}$$

- $(m_1 - m_2)^2 < p^2 < (m_1 + m_2)^2$

Nesta região vamos reescrever as funções $f(p^2)$ e $g(p^2)$ da seguinte forma

$$f(p^2) = i \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2} \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2}$$

$$g(p^2) = 2 \ln \left[\frac{a + ib}{a - ib} \right]$$

onde

$$a = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2}$$

$$b = \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2}$$

e usando as identidades

$$a + ib = re^{i\theta}$$

$$a - ib = re^{-i\theta}$$

temos

$$g(p^2) = 2 \ln \left[\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} \right]$$

$$= 4i \arctan \left(\frac{\sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2}}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2}} \right)$$

E assim temos, nessa região

$$\xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) = -2 + \ln \frac{m_2^2}{\lambda^2} - \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2p^2} \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right)$$

$$+ \frac{2\sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2} \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2}}{p^2} \times$$

$$\arctan \left(\frac{\sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2}}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - p^2}} \right)$$

- $p^2 > (m_1 + m_2)^2$

Nesta região vamos reescrever as funções $f(p^2)$ e $g(p^2)$ da seguinte forma

$$f(p^2) = \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2} \sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2}$$

$$g(p^2) = 2 \ln \left[\frac{\sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2} + \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2}}{\sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2} - \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2}} \right]$$

Aqui o numerador é maior que zero e o denominador é menor então faremos

$$\begin{aligned} g(p^2) &= 2 \ln \left[\frac{\sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2} + \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2}}{\sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2} - \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2}} \right] \\ &= 2i\pi + 2 \ln \left(\frac{\sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2} + \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2}}{\sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2} - \sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2}} \right) \end{aligned}$$

E assim temos, nessa região

$$\begin{aligned} \xi_0^{(0)}(p^2, m_1^2, m_2^2; \lambda^2) &= -2 + \ln \frac{m_2^2}{\lambda^2} - \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2p^2} \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \\ &\quad - \frac{i\pi \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2} \sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2}}{p^2} \\ &\quad - \frac{\sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2} \sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2}}{p^2} \times \\ &\quad \ln \left(\frac{\sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2} + \sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2}}{\sqrt{p^2 - (m_1 - m_2)^2} - \sqrt{p^2 - (m_1 + m_2)^2}} \right) \end{aligned}$$

Considere agora a função $\xi_n^{(0)}$ com massas iguais. Por definição ela é dada

por

$$\xi_n^{(0)}(p^2, m^2, m^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^n \ln \left(\frac{p^2(1-z)z - m^2}{-\lambda^2} \right)$$

que pode ser reescrita como

$$\xi_n^{(0)}(p^2, m^2, m^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^n \ln \left[\frac{m^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{p^2(1-z)z}{m^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \xi_n^{(0)}(p^2, m^2, m^2; \lambda^2) &= \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \int_0^1 dz z^n \\ &+ \int_0^1 dz z^n \ln\left(1 - \frac{p^2(1-z)z}{m^2}\right) \end{aligned}$$

Realizando a mudança de variável

$$x = \frac{p^2(1-z)z}{m^2}$$

temos

$$x \ll 1$$

para $p^2 \ll m^2$. Assim podemos expandir $\ln(1-x)$ no segundo termo da integral acima como

$$\ln(1-x) \simeq -x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

que nos leva a

$$\begin{aligned} \xi_n^{(0)}(p^2, m^2, m^2; \lambda^2) &\simeq \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \left[\frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_{z=0}^1 \right] \\ &+ \int_0^1 dz z^n \left\{ -\frac{p^2(1-z)z}{m^2} + \frac{p^4(1-z)^2 z^2}{2m^4} + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_n^{(0)}(p^2, m^2, m^2; \lambda^2) &\simeq \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \frac{1}{(n+1)} \\ &- \frac{p^2}{m^2(n+2)(n+3)} + \frac{p^4}{2m^4(n+3)(n+5)} + \dots \quad (\text{B3}) \end{aligned}$$

8 APÊNDICE C - Integrais Quadridimensionais I_A e I_B

$$I_A(Q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}$$

Podemos manipular o integrando na forma

$$\begin{aligned} k^2 + 2Q \cdot k - H^2 &= (k + Q)^2 - (Q^2 + H^2) \\ &= k'^2 - M^2 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} k' &= k + Q \\ M^2 &= Q^2 + H^2 \end{aligned}$$

Então, temos

$$I_A(Q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - M^2]^\alpha}$$

Note que

$$\begin{aligned} k'^2 &= k_0^2 - \vec{k}^2 \\ d^4k &= dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 \\ &= dk_0 d^3k \end{aligned}$$

Fazendo $k' = k$, por ser uma variável muda, obtemos

$$I_A(Q) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{1}{\left[k_0^2 - \left(\vec{k}^2 + M^2 \right) \right]^\alpha} \quad (C1)$$

Integrando em k_0

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{1}{\left[k_0^2 - (\vec{k}^2 + M^2)\right]^\alpha} \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{1}{\left[k_0^2 - (\vec{k}^2 + M^2)\right]^\alpha} \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{1}{\left[k_0^2 - H'^2\right]^\alpha}
 \end{aligned}$$

onde $H'^2 = (\vec{k}^2 + M^2)$. Usando as identidades

$$\begin{aligned}
 \frac{(+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{d(H'^2)^{\alpha-1}} \left[\frac{1}{(k_0^2 - H'^2)} \right] &= \frac{1}{(k_0^2 - H'^2)^\alpha} \\
 \frac{1}{(k_0^2 - H'^2)} &= \frac{1}{2H'} \left[\frac{1}{k_0 - H'} - \frac{1}{k_0 + H'} \right]
 \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 I_0 &= 2 \frac{(+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{d(H'^2)^{\alpha-1}} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{1}{\left[k_0^2 - H'^2\right]} \right\} \\
 &= 2 \frac{(+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{d(H'^2)^{\alpha-1}} \left\{ \frac{1}{2H'} \int_0^{+\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \left[\frac{1}{k_0 - H'} - \frac{1}{k_0 + H'} \right] \right\} \\
 &= \frac{(+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{d(H'^2)^{\alpha-1}} \left\{ \frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{H'} \ln \left[\frac{k_0 - H'}{k_0 + H'} \right]_0^{+\infty} \right\}
 \end{aligned}$$

Existe uma indeterminação no argumento de \ln . Note que

$$\ln(-1) = \ln(e^{-i\pi})$$

$$\begin{aligned} e^{-i\pi} &= \cos \pi - i \sin \pi \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\ln(e^{-i\theta}) = -i\theta$$

Assim

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{(+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{d(H^2)^{\alpha-1}} \left\{ \frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{H'} (-i\pi) \right\} \\ &= -\frac{i(+1)}{2\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{d(H^2)^{\alpha-1}} \left[\frac{1}{(H^2)^{1/2}} \right] \\ &= -\frac{i(+1)}{2\Gamma(\alpha)} \left[(-1)^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{(H^2)^{\alpha-1/2}} \right] \\ &= \frac{i\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{(-1)^\alpha}{(H^2)^{\alpha-1/2}} \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em (C1)

$$I_A(Q) = \frac{i\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{2})} (-1)^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\vec{k}^2 + M^2)^{\alpha-1/2}}$$

Usando as coordenadas esféricas

$$d^3k = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi$$

temos

$$\begin{aligned}
 I_A(Q) &= \frac{i}{2} \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(\vec{k}^2 + M^2)^{\alpha-1/2}} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= \frac{2i\pi}{(2\pi)^3} \frac{(-1)^\alpha}{2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{\sqrt{k^2} dk^2}{(k^2 + M^2)^{\alpha-1/2}} \quad (C2)
 \end{aligned}$$

Usando o resultado da integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} dt}{(t+a^2)^n} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-m}}$$

para $m-1 = \frac{1}{2}$ e $n = \alpha - \frac{1}{2}$. Logo

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{k^2} dk^2}{(k^2 + M^2)^{\alpha-1/2}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})} \frac{1}{(M^2)^{\alpha-2}}$$

Substituindo este resultado em (C2)

$$I_A(Q) = \frac{i}{8\pi^2} \frac{(-1)^\alpha}{(Q^2 + H^2)} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{2})}$$

Sabendo que $\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$, temos

$$I_A(Q) = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(-1)^\alpha}{(Q^2 + H^2)^{\alpha-2}} \quad (C3)$$

Para $Q = k$ e $H^2 = -m^2$, com $\alpha = 3$, obtemos o resultado (A1) do APÊNDICE

A. Para calcular a integral I_B

$$I_B = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_i)^2 - m^2]}$$

usamos a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{a^3 b} = 3 \int_0^1 dz \frac{(1-z)^2}{[(b-a)z+a]^4}$$

com

$$a = (k^2 - m^2)$$

$$b = [(k + k_i)^2 - m^2]$$

Nesse contexto, I_B pode ser reescrito como

$$I_B = 3 \int_0^1 dz (1-z)^2$$

$$\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^3}{[(k + k_i z)^2 + k_i^2 z(1-z) + (\lambda^2 - m_i^2)z - \lambda^2]^4}$$

Utilizando uma mudança de variável na forma $k + k_i z = k'$ temos

$$I_B = 3 \int_0^1 dz (1-z)^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot (k' - k_i z) + \lambda^2 - m^2)^3}{[k'^2 + k_i^2 z(1-z) + (\lambda^2 - m_i^2)z - \lambda^2]^4}$$

$$I_B = 3 \int_0^1 dz (1-z)^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{\left(2k_i \cdot k' + \frac{dQ}{dz}\right)^3}{[k'^2 + Q(z)]^4}$$

onde $k' \rightarrow k$ e

$$Q(z) = k_i^2 z(1-z) + (\lambda^2 - m_i^2)z - \lambda^2$$

Expandindo a integral I_B temos

$$\begin{aligned}
I_B &= 3 \int_0^1 dz (1-z)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_i \cdot k)^3}{[k^2 + Q(z)]^4} \\
&+ 3 \int_0^1 dz (1-z)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{3(2k_i \cdot k)^2 \frac{dQ}{dz}}{[k^2 + Q(z)]^4} \\
&+ 3 \int_0^1 dz (1-z)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{3(2k_i \cdot k) \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2}{[k^2 + Q(z)]^4} \\
&+ 3 \int_0^1 dz (1-z)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\left(\frac{dQ}{dz}\right)^3}{[k^2 + Q(z)]^4}
\end{aligned}$$

Desprezando as integrais ímpares no momento de integração k obtemos

$$\begin{aligned}
I_B &= 3 \int_0^1 dz (1-z)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{12(k_i \cdot k)^2 \frac{dQ}{dz}}{[k^2 + Q(z)]^4} \\
&+ 3 \int_0^1 dz (1-z)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\left(\frac{dQ}{dz}\right)^3}{[k^2 + Q(z)]^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_B &= 36k_{i\alpha}k_{i\beta} \int_0^1 dz (1-z)^2 \left(\frac{dQ}{dz}\right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta}{[k^2 + Q(z)]^4} \\
&+ 3 \int_0^1 dz (1-z)^2 \left(\frac{dQ}{dz}\right)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + Q(z)]^4}
\end{aligned}$$

A primeira integral em k no lado direito da equação pode ser resolvida usando o resultado de (C3) para $\alpha = 4$ e o desenvolvimento para a integral em k no segundo termo é análogo aquele feito para a integral $I_A(Q)$ na primeira parte

desse Apêndice, porém com a inclusão de $k^\alpha k^\beta$. Os resultados são

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + Q(z)]^4} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} \frac{1}{[Q(z)]^2}$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta}{[k^2 + Q(z)]^4} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \frac{g_{\alpha\beta}}{Q(z)}$$

Assim temos

$$-i(4\pi)^2 I_B = 3k_i^2 \int_0^1 dz (1-z)^2 \left(\frac{dQ}{dz} \right) \frac{1}{Q(z)}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 dz (1-z)^2 \left(\frac{dQ}{dz} \right)^3 \frac{1}{[Q(z)]^2}$$

Resolvendo esta integral por partes diversas vezes, obtemos

$$-i(4\pi)^2 I_B = -\frac{1}{2} \left(\frac{dQ}{dz} \Big|_{z=0} \right)^2 \left(\frac{-1}{Q(z=0)} \right)$$

$$+ \left(\frac{dQ}{dz} \Big|_{z=0} \right) \ln Q(z=0)$$

$$- k_i^2 \ln Q(z=0)$$

$$- Q(z=1) \ln Q(z=1)$$

$$+ Q(z=0) \ln Q(z=0)$$

$$+ Q(z=1) - Q(z=0)$$

Usando a função $Q(z)$ dada por

$$Q(z) = k_i^2 z(1-z) + (\lambda^2 - m_i^2) z - \lambda^2$$

temos

$$Q(z=1) = -m^2$$

$$Q(z=0) = -\lambda^2$$

$$\left. \frac{dQ}{dz} \right|_{z=0} = k_i^2 + \lambda^2 - m^2$$

e assim temos

$$I_B = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(k_i^2 + \lambda^2 - m^2)^2}{(-\lambda^2)} + \lambda^2 - m^2 + m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (\text{C4})$$