



RICHARD HERNANI PEREIRA

**TRANSFERÊNCIA DO RISCO DE LONGEVIDADE:
MODELAGEM E PRECIFICAÇÃO SOB O REGIME
SOLVÊNCIA II**

**LAVRAS – MG
2018**

RICHARD HERNANI PEREIRA

**TRANSFERÊNCIA DO RISCO DE LONGEVIDADE: MODELAGEM E
PRECIFICAÇÃO SOB O REGIME SOLVÊNCIA II**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Administração, área de concentração em Gestão de negócios, economia e mercado, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Luiz Gonzaga de Castro Junior
Orientador

Prof. Me. Reinaldo Antônio Gomes Marques
Colaborador externo

LAVRAS – MG
2018

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Pereira, Richard Hernani.

Transferência do Risco de Longevidade : Modelagem e
Precificação sob o Regime Solvência II / Richard Hernani Pereira. -
2018.

2018 61 p.

Orientador(a): Luiz Gonzaga de Castro Junior.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Lavras, 2018.

Bibliografia.

1. Risco de longevidade. 2. Modelos de mortalidade. 3. S-
forward. I. Castro Junior, Luiz Gonzaga de. . II. Título.

RICHARD HERNANI PEREIRA

**TRANSFERÊNCIA DO RISCO DE LONGEVIDADE: MODELAGEM E
PRECIFICAÇÃO SOB O REGIME SOLVÊNCIA II**

**LONGEVITY RISK TRANSFER: MODELLING AND PRICING UNDER SOLVENCY
II**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Administração, área de concentração em Gestão de negócios, economia e mercado, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 28 de março de 2018.

Prof. Dr. André Luis Ribeiro Lima

Prof. Dr. Gabriel Rodrigo Gomes Pessanha

UFLA

UNIFAL

Prof. Dr. Luiz Gonzaga de Castro Júnior
Orientador

Prof. Me. Reinaldo Antônio Gomes Marques
Colaborador externo

**LAVRAS - MG
2018**

Dedicatória

Dedico à minha mãe, Rose Mary, e ao meu avô, Luiz Hernani.

Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer a Deus, por me permitir realizar essa tarefa.

À CAPES, pelo excelente apoio financeiro e pela responsabilidade em seu compromisso.

À minha mãe, pela motivação, ao meu avô, Luiz Hernani, pelo exemplo de inteligência e garra, ao meu irmão e ao meu pai, pelo enorme apoio.

À Iskelin Myuki, meu ponto de força inesgotável, minha eterna gratidão por tudo que fez e faz para me apoiar e me estimular.

Ao Professor Reinaldo Marques, que ultrapassou a condição de orientador e se tornou um grande mentor, me estimulando sempre a seguir novos desafios e me ajudando a enfrentá-los; ao Professor Luiz Gonzaga, pelo exemplo de dinamismo e pela permissão em desenvolver esse tema.

À família que me acolheu em Lavras: Maria José, Marcelo, Lucas, Silvinho e Marcelinho.

Aos amigos Lucas Notini, que se tornou um irmão desde o primeiro dia; Luiz Felipe, que se tornou um grande amigo, sempre me mostrando um novo caminho, uma nova teoria, uma nova forma de ver o mundo e me motivando a dar o meu melhor; André Neves, pelos milhares de quilômetros percorridos juntos com muita prosa boa, muitas risadas, muita parceria, e claro, Los Hermanos; Gustavo Valadares, pelo exemplo de didática, garra, esforço e determinação; José Willer, meu padrinho acadêmico, pelas incansáveis e motivadoras discussões científicas e metodológicas no campo das finanças, economia, atuária e administração; Caio Chain, pela parceria e ensinamentos. Ao companheiro doutorando, pela referência desde o ensino fundamental, Guilherme Chagas.

Ao Márcio Aloysio Junior, que junto à Liszt, tornaram o algoritmo dessa dissertação possível de ser concebido.

Aos professores: Leonardo Costa, Leandro Ferreira, Danilo Machado, Gabriel Pessanha, Cléria Lourenço, Luísa Terra e Marçal Cândido.

Aos pesquisadores e autores que forneceram a estrutura para essa dissertação.

Aos amigos do Laboratório de Risco Atuarial e Inovação (LAR-UNIFAL) e do Centro de Inteligência em Mercados (CIM-UFLA).

À UFLA-MG, pela incrível estrutura oferecida que transpassa o que é físico.

Epígrafe

“Sempre fui um sonhador, é isso que me mantém vivo.” (Pedro Paulo Soares Pereira, 2002)

RESUMO

Com a evolução da expectativa de vida, os fundos de pensão e seguradoras que possuem planos de benefício definidos passaram a enfrentar uma das maiores e menos compreendidas adversidades: o risco de longevidade, que é a possibilidade de melhorias inesperadas no tempo de vida dos participantes do plano. Este é representado pelo aumento do período médio de pagamento dos benefícios, impactando em alterações nos passivos atuariais. Uma possível via de mitigação é a sua transferência por meio de uma operação denominada securitização. Por meio de um *hedge*, é possibilitada à entidade realizar a transferência do risco de longevidade para o mercado de capitais, utilizando derivativos. Esta transação é baseada em um contrato financeiro que estabelece a troca de pagamentos entre as contrapartes envolvidas, considerando a taxa de mortalidade ou sobrevivência de uma referida população. Esta operação é denominada *longevity-linked security*. Neste trabalho, os esforços voltam-se ao s-forward como objeto de estudo. Este derivativo consiste em um contrato estabelecido entre duas contrapartes, que estipulam a troca de pagamentos baseados na taxa de sobrevivência. A entidade que deseja transferir o risco de longevidade realiza pagamentos fixos durante toda a vigência do contrato, enquanto a contraparte realiza pagamentos flutuantes baseados na diferença entre a sobrevivência esperada e a realizada. Um dos desafios para o desenvolvimento do mercado para transferência do risco de longevidade é a determinação do preço desses instrumentos. O preço que a entidade terá que pagar para realizar a transferência é chamado de prêmio de risco. Como objetivo geral deste trabalho, propõe-se a determinação do valor máximo do prêmio, a partir de um s-forward, que uma entidade está disposta a pagar para transferir o risco de longevidade, levando em consideração as regulações estabelecidas pelo Solvência II. Para tanto, foi necessário realizar a modelagem da mortalidade utilizando os modelos de Lee-Carter, Cairns-Blake-Dowd (CBD), APC, Renshaw e Haberman (RH), M7 e Plat. Dentre estes, o modelo Lee-Carter apresentou o melhor ajuste e foi utilizado para projetar a mortalidade por meio de um ARIMA (0,1,0). Os resultados encontrados demonstram que os valores aumentam de acordo com a evolução do tempo de maturidade dos contratos e das coortes.

Palavras-chave: Risco de longevidade; Modelos de mortalidade; S-forward.

ABSTRACT

With the evolution of life expectancy, pension funds and insurance companies that have benefit plans defined have faced one of the greatest and least understood adversities: the risk of longevity, which is the possibility of unexpected improvements in the lifetime of the participants of the plan. This is represented by the increase in the average period of payment of benefits, impacting on changes in actuarial liabilities. One possible mitigation route is its transfer through an operation called securitization. Through a hedge, it is possible for the entity to transfer the risk of longevity to the capital market using derivatives. This transaction is based on a financial agreement that establishes the exchange of payments among the involved counterparts considering the mortality or survival rate of a said population. This operation is called longevity-linked security. In this work, the efforts are focused on s-forward as an object of study. This derivative consists of a contract established between two counterparties, which stipulate the exchange of payments based on the survival rate. The entity that wishes to transfer the risk of longevity makes fixed payments throughout the life of the contract, while the counterparty makes floating payments based on the difference between the expected and the realized survival. One of the challenges for the development of the market for longevity risk transfer is the pricing of these instruments. The price that the entity will have to pay to carry out the transfer is called the risk premium. As a general objective of this work, the determination of the maximum value of the premium that an entity is willing to pay to transfer the risk of longevity is proposed. It is based on an s-forward and taking into account the regulations established by Solvency II. To do so, it was necessary to perform mortality modeling using the Lee-Carter, Cairns-Blake-Dowd (CBD), APC, Renshaw and Haberman (RH), M7 and Plat models. Among these, the Lee-Carter model presented the best fit and was used to design mortality using an ARIMA (0,1,0). The results show that the values increase according to the evolution of the maturity time of contracts and cohorts.

Keywords: Longevity Risk; Mortality models; S-forward

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Critério de seleção de modelos BIC.	49
Tabela 2 - Valores de π^{max} para diferentes coortes e maturidades.	51
Tabela 3 - Valores de δ^{max} para diferentes coortes e maturidades.	52

Lista de Figuras

Figura 1 - Modelo conceitual teórico.....	33
Figura 2 - Etapas para os procedimentos metodológicos.....	35
Figura 3 - Expectativa de vida – BR-EMS X Brasil-IBGE.....	36
Figura 4 - Expectativa de vida – BR-EMS X Suíça	37
Figura 5 - Expectativa de vida – BR-EMS X Japão	38
Figura 6 - Expectativa de vida – BR-EMS X Suécia.....	38
Figura 7 - Expectativa de vida – BR-EMS X Islândia.....	39
Figura 8 - Expectativa de vida – BR-EMS X Itália	39
Figura 9 - Parâmetros do modelo Lee-Carter ajustado para a população masculina da Suíça nas idades 65-85 anos no período de 1961-2014.....	40
Figura 10 - Parâmetros do modelo Renshaw e Haberman ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.	41
Figura 11 - Parâmetros do modelo APC ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.....	42
Figura 12 - Parâmetros do modelo CBD ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.....	43
Figura 13 - Parâmetros do modelo M7 ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.....	44
Figura 14 - Parâmetros do modelo Plat ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.....	45
Figura 15 - Heat-maps dos resíduos para os modelos ajustados para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.	47
Figura 16 - Scatter plots dos resíduos para os modelos ajustados para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.	48
Figura 17 - Projeção da mortalidade para o período de 2015 a 2033.	49

Sumário

1 Introdução.....	12
2. Referencial teórico	15
2.1 Risco de longevidade	15
2.2 Insurance-linked Securities – ILS	17
2.3 Instrumentos para transferência do risco de longevidade.....	18
2.4 S-Forward.....	18
2.5 Solvência II.....	20
2.6 Modelos de mortalidade	21
2.6.1 Modelos de mortalidade estocásticos generalizados idade-período-coorte (GAPC).....	22
2.6.1.1 Modelo Lee-Carter	24
2.6.1.2 Modelo Renshaw e Haberman	25
2.6.1.3 Modelo APC	26
2.6.1.4 Modelo CBD	26
2.6.1.5 Modelo M7.....	27
2.6.1.6 Modelo Plat.....	27
2.6.2 Projeção da mortalidade	28
2.7 Precificação de um S-forward via margem de risco	29
3 Metodologia.....	33
3.1 Tipo de pesquisa	33
3.2 Procedimentos metodológicos	34
4 Resultados e discussões.....	36
4.1 Modelos de mortalidade	36
4.1.1 Modelo Lee-Carter	39
4.1.2 Modelo Renshaw e Haberman	41
4.1.3 Modelo APC	42
4.1.4 Modelo CBD.....	43
4.1.5 Modelo M7	43
4.1.6 Modelo PLAT	44
4.1.7 Análise dos resíduos.....	45
4.1.8 Projeção da mortalidade	48
4.2 Máximo valor do prêmio de risco	50
5. Considerações Finais.....	54
6. Referências	55

1 Introdução

Com a evolução da expectativa de vida, os fundos de pensão e seguradoras que possuem planos de benefício definido, passaram a enfrentar um dos maiores e menos compreendidos riscos, denominado risco de longevidade. Um plano de benefício definido é aquele em que o valor que o segurado irá receber é determinado no momento da contratação do benefício. O risco de longevidade é o risco de melhorias inesperadas no tempo de vida dos participantes do plano. É representado pelo aumento do período médio de pagamento dos benefícios, impactando em alterações nos passivos atuariais.

As seguradoras e fundos de pensão, enfrentam esse risco por garantirem ao segurado o pagamento do benefício até a morte do segurado. Ou seja, se um grupo de participantes de um plano de benefício vive em média mais tempo que o esperado, a entidade terá que continuar efetuando os pagamentos por um período de tempo maior. Dessa forma, o valor do passivo aumenta. Todavia, se o valor do ativo permanece inalterado, o resultado incorrerá em déficit. Diante dessa realidade, é necessário o desenvolvimento de soluções para mitigar esse risco.

Uma possível via para a mitigação desse risco é a transferência do risco de longevidade por meio de uma operação denominada securitização. Ou seja, por meio de um *hedge* é possibilitada à entidade realizar a transferência do risco de longevidade para o mercado de capitais, utilizando derivativos. Essa transação é baseada em um contrato financeiro que estabelece a troca de pagamentos entre as contrapartes envolvidas considerando a taxa de mortalidade ou sobrevivência de uma referida população. Essa operação é denominada *longevity-linked securities*.

Diversos derivativos têm sido propostos na literatura, bem como transacionados pelo mercado, como por exemplo: longevity bonds, q-forwards e s-forwards. Neste trabalho os esforços voltam-se ao s-forward como objeto de estudo. Este derivativo consiste em um contrato estabelecido entre duas contrapartes, que estipula a troca de pagamentos baseados na taxa de sobrevivência. A entidade que deseja transferir o risco de longevidade realiza pagamentos fixos durante toda a vigência do contrato, enquanto a contraparte realiza pagamentos flutuantes baseados na diferença entre a sobrevivência esperada e a realizada.

Na última década esse tema tem sido discutido amplamente pela literatura internacional, como também se encontra em considerável ritmo de desenvolvimento pelo mercado envolvido. No Brasil, a situação ainda está em fase inicial, apesar de o mercado

sinalizar interesse no desenvolvimento dessas transações, com discussões realizadas por empresas e organizações e a divulgação da Resolução nº 345 de 2 de maio de 2017, pela Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), ainda não foi realizado algo que concretize essa intenção.

Entretanto, em um âmbito internacional, o mercado e as publicações estão evoluindo consideravelmente. O mercado europeu iniciou as transações, contudo, ao passar dos anos pode-se verificar a entrada de outros países neste mercado. Os volumes transacionados podem ser considerados grandes, apesar de ainda representarem uma pequena parcela do que de fato pode ser transacionado (MEIRELES et al., 2016). Ou seja, este mercado possui potencial de realizar transações com cifras expressivas.

No que tange as publicações internacionais, esse tema é amplamente tratado sob diversas óticas e abordagens. Delimitando as óticas e abordagens tratadas e focando sob a literatura que se aproxima do presente trabalho, pode-se citar trabalhos que trataram o tema sob a lente daqueles que utilizaram os denominados *longevity-linked securities*, ao qual pode-se citar Blake et al. (2006), Ngai e Sherris (2011), Dahl et al. (2008), Coughlan et al. (2013), Donohue, Maclean e Peard (2009), Coughlan (2009) Meyricke e Sherris (2014), Levantesi e Menzietti (2017), entre outros.

Este último citado, propôs um método para estimar o máximo valor do prêmio de risco e o *spread*, ao qual leva em consideração a margem de risco implícito nos cálculos das provisões técnicas, a partir das regulamentações definidas pelo Solvência II. O valor máximo do prêmio de risco é calculado para um único *s-forward*, a partir do ponto de vista da seguradora ou do fundo de pensão, enquanto o *spread* é calculado a partir da contraparte que realizará os pagamentos flutuantes. Essa abordagem será utilizada como ponto de partida para as discussões e análises que serão realizadas neste trabalho.

Um dos desafios para o desenvolvimento do mercado para transferência do risco de longevidade é a determinação do preço desses instrumentos. Atualmente, esse mercado encontra-se ainda incompleto e isso torna impossível a estimação de um preço de mercado único. O preço que a entidade terá que pagar para realizar a transferência do risco é chamando de prêmio de risco.

Nesse sentido, é importante e necessário realizar investigações para a determinação de um prêmio de risco que seja viável para a entidade, pois há um determinado limite de valor

para o prêmio de risco que justifica a não transferência do risco de longevidade. Sinteticamente, o maior benefício da transferência do risco de longevidade por meio de *longevity-linked securities* é a redução do requisito de capital de solvência. Se o prêmio de risco for maior que o requisito de capital de solvência, torna-se inviável a transferência do risco de longevidade, pois é viável para a entidade permanecer com o risco no seu próprio passivo.

Diante do cenário exposto, pode-se apresentar a questão que norteia a presente pesquisa: **qual é o máximo valor do prêmio de risco que uma seguradora ou um fundo de pensão estão dispostos a pagar?** Portanto, como objetivo geral deste trabalho, propõe-se a determinação do valor máximo do prêmio de risco, a partir de um s-forward, que uma entidade está disposta a pagar para transferir o risco de longevidade, levando em consideração as regulações estabelecidas pelo Solvência II.

O objetivo central pode ser subdividido em objetivos específicos, como etapas que fornecem a fundamentação para atingir o objetivo geral, sendo assim, podem ser expressos da seguinte maneira:

- ajustar a mortalidade da população em estudo;
- projetar a mortalidade futura;
- estimar valores para o prêmio máximo.

Para cumprir o objetivo exposto, propõe-se a seguinte estruturação, além da presente introdução: referencial teórico, contendo a teoria-base para a compreensão e discussão de conceitos, como: risco de longevidade, transferência do risco de longevidade, *insurance-linked securities*, instrumentos para a transferência do risco de longevidade, s-forward, solvência II, modelos de mortalidade e precificação de um s-forward via margem de risco. Metodologia, contendo: modelo conceitual teórico, tipo de pesquisa e procedimentos metodológicos. Resultados e discussões, em que são apresentados e discutidos os resultados encontrados. Considerações finais; e por fim, as referências utilizadas.

2. Referencial teórico

Nesta seção será apresentada e discutida a teoria necessária para o entendimento da pesquisa.

2.1 Risco de longevidade

O conceito de risco que se aplica a este trabalho é bem definido por Vaughan e Vaughan (2013) “como uma condição do mundo real em que há uma exposição à adversidade. Mais especificamente, o risco é uma condição em que existe a possibilidade de um desvio adverso de um resultado desejado ou esperado”. Isto é, a incerteza futura sobre a possibilidade de perdas financeiras.

No final do século XX e no início do século XXI a expectativa de vida das populações ao redor do mundo experimentou crescimento considerável. Essa alteração foi propiciada por um conjunto de fatores, tais como: avanços tecnológicos, melhorias nos padrões de vida, evolução da medicina, diminuição de pandemias e guerras; possibilitando aumentar a expectativa de vida em todas as idades (CARLOS, 2011).

Ao levar em consideração dados demográficos pode-se comprovar o cenário supracitado. Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) apresentados por Simões (2016), demonstram que a expectativa de vida ao nascer no Brasil saltou de 41,5 anos nas décadas de 1930/40 para 73,9 anos, em 2010. Em 2014, a expectativa de vida ao nascer foi estimada em 75,2 anos, e em 2015, 75,5 anos (IBGE, 2017).

Entretanto, ter mais tempo de vida, o que é algo desejado pela população de forma geral, configura-se como um risco para os fundos de pensão e as seguradoras, isto é, um risco de longevidade. De acordo com Cairns et al. (2012) o risco de longevidade é o risco dos membros de um plano de benefício viverem além do esperado.

Do ponto de vista dos fundos de pensão e seguradoras, o risco de longevidade é um dos maiores e mais desconhecidos riscos enfrentados (CRAWFORD; HAAN, RUNCHEY, 2008; VAN ROOIJEN, 2013), pois é substancialmente potencial em impactar negativamente a disposição e a capacidade financeira dessas entidades (BLAKE; BOARDMAN; CAIRNS, 2014). Esse risco somente começou a tornar-se importante no início dos anos 2000 (VAN ROOIJEN, 2013).

Blake, Boardman e Cairns (2014) e Bissetti e Favero (2014) afirmam que o risco de longevidade pode ser decomposto em dois, risco de longevidade sistemático ou risco de

tendência e risco de longevidade específico ou risco de variação aleatória. Dessa forma, podem ser examinados como dois componentes separados, como também, serem direcionados, um ao setor privado e outro ao setor governamental.

O risco de tendência é determinado por mudanças não previstas no comportamento e no estilo de vida da população ou por avanços médicos; este risco é endereçado ao setor governamental (BLAKE; BOARDMAN; CAIRNS, 2014; BISSETI, FAVERO, 2014). Por outro lado, o risco de variação aleatória é o risco das taxas de mortalidades individuais diferirem do resultado esperado por acaso, ou seja, algumas pessoas irão morrer antes da expectativa de vida, outras irão morrer após; este risco pode ser operacionalizado por instituições privadas, utilizando agrupamentos e a lei dos grandes números, para reduzir a variabilidade (BLAKE; BOARDMAN; CAIRNS, 2014; BISSETI, FAVERO, 2014).

As implicações determinadas pelo risco de longevidade podem ser representadas pelo aumento do período médio de pagamento das pensões ou anuidades (LEVANTESI; MENZIETTI, 2017), assim, impactando em alterações ou aumentos no passivo (EIOPA, 2014). Van Rooijen (2013) afirma que os passivos das entidades crescem diante do aumento da longevidade. Ou seja, as entidades que estão sujeitas a esse risco, necessitam de vias alternativas para mitigá-lo.

A transferência de risco é uma técnica de financiamento de possíveis perdas, em que uma entidade transfere a exposição ao risco para outra entidade, por meio de um pagamento, como por exemplo, um prêmio de risco, em troca da cobertura das possíveis perdas (BANKS, 2004). Diante do risco de longevidade, normalmente, se propõe na literatura, como uma via alternativa para sua mitigação, a transferência do risco de longevidade, tal como explicado acima.

Desde quando o risco de longevidade se tornou importante e passou a ser investigado, o mercado tem utilizado a securitização, como uma alternativa para mitigar o risco de longevidade, contudo, vale ressaltar que há outras formas. Por meio da securitização é possível realizar a transferência do risco de longevidade para seguradoras, resseguradoras e mercado de capitais. A securitização, de acordo com Banks (2004) é o processo de transferência de ativos, passivos ou fluxo de caixa do balanço de uma empresa para terceiros, por meio de títulos negociáveis denominados derivativos. Esse processo é popular no mercado financeiro (NEVES, 2008).

Após o processo de securitização ser amplamente aceito pelo mercado financeiro, devido ao seu sucesso no passado, algumas instituições do setor aplicaram tecnologias e estudos para permitir que fosse estabelecida uma convergência para o mercado de seguros, criando títulos e notas sobre eventos baseados no mercado segurador, o qual recebeu o nome de *Insurance-Linked Securities* (BANKS, 2004). Este trabalho dedica-se a investigar sob essa ótica o processo de transferência do risco de longevidade.

2.2 Insurance-linked Securities – ILS

O risco de longevidade pode ser transferido de diversas formas. Entretanto, uma das formas mais utilizadas como solução para realizar a transferência para o mercado de capitais, é por meio dos chamados *Insurance-Linked Securities* (LEVANTESSI; MENZIETTI, 2017). Os ILSs são contratos financeiros que possuem pagamentos relacionados a um índice de sobrevivência ou mortalidade de uma referida população (LEVANTESSI; MENZIETTI, 2017).

O conceito vinculado aos ILSs é semelhante a outras securitizações, ou seja, emitir valores mobiliários referentes ao mercado de seguros para transferir exposições aos riscos e criar capacidade de risco adicional (BANKS, 2004). Todavia, os primeiros esforços relacionados aos ILSs foram baseados em securitizações para riscos de catástrofes, furacões e terremotos. Ao longo dos anos, outras formas de ILSs têm aparecido, nas quais se incluem exposições em oscilações de temperatura, mercado de automóveis e de seguros do ramo vida (BANKS, 2004).

Ainda que haja variações e diferentes modalidades de ILSs, a estrutura principal para que essa transação ocorra permanece a mesma. A estrutura de um ILSs pode ser compreendida da seguinte forma: uma companhia de seguros ou um fundo de pensão emite títulos por uma SPE¹ (*Special Purpose Entity*) e baseia o reembolso de perdas decorrentes de eventos de seguros; se as perdas ultrapassarem um limite preestabelecido a entidade fica resguardada de pagar os rendimentos dos investidores (BANKS, 2004).

A partir da estrutura supracitada é desenvolvida uma nova oferta de risco. O emissor transfere uma exposição definida ao mercado de capitais reduzindo seu perfil de risco, aliviando seu capital e reservas e permitindo que novos negócios sejam realizados. Dessa forma, esse mecanismo liga o mercado segurador e de capitais, possibilitando que o setor de seguros aproveite a oferta de capital presente no mercado financeiro (BANKS, 2004).

¹ Uma entidade jurídica criada exclusivamente para atender à uma função específica, como a facilitação de um acordo financeiro ou a criação de um instrumento financeiro.

No que se refere aos ILSs para risco de longevidade, nos últimos anos, tem recebido considerável atenção, como também quantias relevantes de investimentos vindos de banco, seguradoras e resseguradoras (LEVANTESI; MENZIETTI, 2017). Pesquisadores e instituições têm proposto variadas maneiras para os *longevity-linked securities*, como por exemplo: longevity bonds, q-forwards e s-forwards, os quais serão apresentados na seção seguinte.

2.3 Instrumentos para transferência do risco de longevidade

O primeiro instrumento proposto para a transferência do risco de longevidade foi o *longevity bond*, considerado por van Delft (2012) como um dos instrumentos mais básicos para o *hedge* do risco de longevidade. De acordo com Meireles (2008), a transferência por *longevity bonds* é condicionada à experiência de longevidade da população, sendo que o pagamento está relacionado à quantidade de sobreviventes da população. Quanto maior o número de sobreviventes, maior é o pagamento. Essa estrutura foi proposta por Blake e Burrows (2001), os quais propuseram um contrato que efetua pagamentos com base na taxa de sobrevivência de uma referida população.

O q-forward, em que o q representa a taxa de mortalidade, é um contrato estabelecido entre duas partes, que estipula a troca futura, no vencimento do contrato, de um valor proporcional a uma referida taxa de mortalidade fixa, mutuamente acordada no início do contrato (COUGHLAN, 2009). Um q-forward é um *swap* de cupom zero (sem pagamento periódico de juros) que troca uma taxa de mortalidade fixada por uma taxa de mortalidade realizada na maturidade do contrato (COUGHLAN, 2009). A taxa utilizada para a liquidação do contrato é a taxa realizada em um período futuro determinado pelo índice escolhido como apropriado (COUGHLAN, 2009).

Outro instrumento utilizado é o denominado s-forward ou *survivor forward*, nesse caso o s representa a taxa de sobrevivência. Sua estrutura é basicamente a mesma de um *q-forward*, exceto pelo fato de que é relacionado à uma taxa de sobrevivência. Este trabalho direciona o foco de análise para este instrumento, o qual será discutido com maior profundidade na seção seguinte.

2.4 S-Forward

Considere que um fundo de pensão ou uma seguradora que provê anuidades faça pagamentos aos beneficiários ou segurados enquanto estiverem vivos e deseja transferir o

risco de longevidade presente no seu portfólio ao mercado de capitais por meio de um s-forward. Para tal, é necessário envolver a troca de pagamentos entre duas contrapartes, baseadas em pagamentos fixos e flutuantes.

O fundo de pensão ou seguradora, como também pode ser identificado como *hedger*, realiza pagamentos fixos de acordo com a taxa de sobrevivência acordada para a contraparte; enquanto a outra contraparte realiza pagamentos flutuantes levando em consideração a taxa de sobrevivência realizada. Ou seja, um s-forward é um contrato entre duas contrapartes que trocam durante o tempo de maturidade, um montante igual a taxa de sobrevivência realizada de uma coorte de uma população determinada (pagamento flutuante), por uma taxa de sobrevivência fixa, acordada no início do contrato (pagamento fixo) (COUGHLAN, 2009).

Para as seguintes demonstrações, foi levado em consideração o trabalho de Levantesi e Menzietti (2017). Considere uma coorte de segurados com características idênticas, $l_{x,0}$, todos com a mesma idade x no tempo inicial 0. Por facilidade de representação, considera-se que as indenizações sejam realizadas com valor monetário de uma unidade (u.m). Na maturidade T do contrato, o número de sobreviventes para $x + t$ é igual a

$$l_{x+T,T} = l_{x,0} \cdot {}_T p_{x,0} \quad (\text{realizado}) \quad (1)$$

$$\widehat{l}_{x+T,T} = E_p(l_{x+T,T}) = l_{x,0} \cdot {}_T p_{x,0} \quad (\text{esperado}) \quad (2)$$

em que: ${}_T p_{x,0}$ é a probabilidade de sobrevivência de um indivíduo com idade x no tempo 0 sobreviver até a idade $x + T$; $l_{x,0}$ é a população de segurados, considerados todos com a mesma idade x no tempo inicial 0; $l_{x+T,T}$ é a população de segurados na maturidade T do contrato, com $x + T$ anos; $\widehat{l}_{x+T,T}$ é a população estimada na maturidade T do contrato com, $x + t$ anos; E_p é o operador de expectativa associado a uma medida de probabilidade mundo real P .

Para compreender como ocorrem os pagamentos realizados entre as contrapartes, considere que $(1 + \pi)\widehat{l}_{x+T,T}$ seja o pagamento fixo realizado pelo *hedger*, por um s-forward no tempo T , em que π é o prêmio de risco, proporcionalmente fixado pelos investidores, para assumirem o risco de longevidade, e $l_{x+T,T}$ o pagamento flutuante. Portanto, na data de pagamento T , o fluxo de caixa será a diferença entre o valor fixado e o flutuante. Se a

diferença entre o realizado e o esperado for positiva, o *hedger* pode ser considerado com um fluxo de caixa negativo.

2.5 Solvência II

O Solvência II é um conjunto de normas para regulação de seguradoras, resseguradoras e fundos de pensão, que formam uma estrutura de supervisão. Basicamente, esse conjunto de normas indica que tais entidades devem avaliar seus passivos a valor de mercado, tarefa importante para melhorar a posição de risco. A motivação para a criação dessa estrutura foi de tornar os requisitos de supervisão mais realistas em relação aos riscos enfrentados por essas entidades (VAN ROOIJEN, 2013).

Nesse sentido, o Solvência II impõe a essas companhias que cumpram normas rigorosas, considerando capital, gestão de riscos e relatórios. Para isso, os requisitos de supervisão são classificados em três pilares: o primeiro pilar remete-se aos requisitos quantitativos; o segundo pilar aos requisitos qualitativos; e o terceiro pilar aos requisitos de divulgação de informações (VAN ROOIJEN, 2013). Neste trabalho dedica-se aos requisitos quantitativos.

Os requisitos quantitativos determinam o montante de capital que uma entidade deve manter em seu balanço para permanecer solvente no futuro. Para tanto, oferecem um modelo padrão para que as entidades possam estimar o montante de capital necessário que devem manter para permanecerem solventes. Contudo, esse modelo é generalizado para todas as empresas, resultando em requisitos rígidos. Por outro lado, as empresas podem elaborar modelos próprios e específicos, ou seja, podem construir modelos mais eficientes. Um exemplo, é que o risco de longevidade no modelo padrão não pode ser transferido por meio de um *hedge*, porém, em um modelo específico pode ser transferido (VAN ROOIJEN, 2013).

Um dos pontos mais importantes é o método de avaliação de ativos e passivos e o cálculo dos requisitos de capital de solvência. Antes, as entidades usavam um fator de desconto constante de aproximadamente 3% a 4%, para descontar seus passivos. Entretanto, os regulamentos do Solvência II estabelecem que as entidades devem avaliar seus passivos em uma base de mercado consistente (VAN ROOIJEN, 2013). Especificamente, a avaliação do passivo é realizada por meio dos requisitos de capital de solvência (RCS), melhor estimativa (ME), margem de risco (MR) e custo de capital (CdC).

O requisito de capital de solvência é calculado para cada risco pela reavaliação das melhores estimativas em um cenário de estresse específico. É então, agregado para chegar ao requisito de capital de solvência geral (MEYRICK; SHERRIS, 2014). Especificamente, para o risco de longevidade, o requisito de capital de solvência é o montante necessário para cobrir todas as perdas que podem ocorrer em um horizonte de um ano, levando em consideração uma probabilidade de no mínimo 99,5% (MEYRICK; SHERRIS, 2014). A medida utilizada para realizar essa estimativa é o Valor em Risco (VaR), dessa forma, o requisito de capital de solvência é:

$$RCS = VaR_{\alpha}(h) \quad (3)$$

em que α é o nível de significância de 0,5% e h o horizonte de um ano. Isto é, para determinar a menor quantidade de capital é necessário que contenha o seguinte:

$$\Pr[AC(t+1) > 0 | AC(t) = x] \geq 0,995 \quad (4)$$

em que, $AC(t)$ é o capital disponível no tempo t (VAN ROOIJEN, 2013).

A melhor estimativa junto à margem de risco forma o valor de mercado dos passivos. A melhor estimativa deve ser igual à probabilidade da média ponderada do valor presente dos fluxos de caixa futuros para as obrigações atuais, levando em consideração todas as informações atualizadas do mercado financeiro e atuarial. A melhor estimativa representa apenas os riscos de mercado passíveis de *hedge* (VAN ROOIJEN, 2013).

A margem de risco pode ser calculada por meio da abordagem do custo de capital. O custo de capital é a taxa que representa o *spread* médio em relação à taxa livre de risco, exigido pelo mercado como rendimento (LEVANTESI; MENZIETTI, 2017). Dessa forma, a margem de risco pode ser determinada da seguinte forma

$$MR = 6\% \sum_{i=t}^{T-1} SCR_i d(t, i+1) \quad (5)$$

em que, o custo de capital é sugerido pelo Solvência II em 6%, SCR_i é o RCS para o ano i , e $d(t, i+1)$ é o fator de desconto calculado com a taxa de juros livre de risco de uma estrutura a termo (LEVANTESI; MENZIETTI, 2017).

2.6 Modelos de mortalidade

Quando é estabelecido um contrato para a transferência do risco de longevidade, do tipo *s-forward*, é acordado entre as duas partes, as taxas de sobrevivência futura, aos quais os

pagamentos fixos serão realizados. Portanto, para estimar as taxas de sobrevivência futura, as partes necessitam de modelos de mortalidade para realizar as projeções.

Os modelos de mortalidade propostos neste trabalho são classificados como modelos estocásticos generalizados de idade-período-coorte, disponibilizados pela biblioteca *StMoMo*, que são: Lee-Carter, Cairns-Blake-Dowd (CBD), APC, Renshaw e Haberman (RH), M7 e Plat. Esses modelos são amplamente utilizados na literatura e indicados por ajustarem os melhores modelos.

Para tanto, abaixo serão apresentados alguns conceitos importantes para a compreensão dos modelos de mortalidade propostos neste trabalho. A taxa de mortalidade, $q_{x,t}$, é definida como a probabilidade de um indivíduo com x anos morrer no ano t . O complementar é a taxa de sobrevivência, $p_{x,t}$, ou seja, o indivíduo com idade x sobreviver até o ano t ; dessa forma: $p_{x,t} = 1 - q_{x,t}$.

Define-se $D_{x,t}$ como as mortes ocorridas durante o ano t com indivíduos na idade x ; $E_{x,t}$ denota os indivíduos expostos ao risco com x anos durante o ano t , de maneira que taxa de mortalidade central, $m_{x,t}$, na idade x e no tempo t seja estimada como $m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}$.

Usualmente, realiza-se a pressuposição que a força de mortalidade permanece constante durante o ano civil e a idade completa do indivíduo, ao qual, pode-se estabelecer a seguinte relação para calcular a probabilidade de morte a partir da taxa de mortalidade central: $q_{x,t} = 1 - \exp(-m_{x,t})$.

2.6.1 Modelos de mortalidade estocásticos generalizados idade-período-coorte (GAPC)

Os modelos de mortalidade estocásticos generalizados de idade-período-coorte são modelos que podem ser representados por similaridades, de maneira compacta, em modelos lineares generalizados ou modelos não lineares generalizados. A similaridade que esses modelos possuem é a forma de analisar a mortalidade, pois a avaliam observando três fatores: idade, período e coorte. Ou seja, o objetivo de ajustar modelos GAPC é avaliar os efeitos dos três fatores nas taxas demográficas (YANG; FU; LAND, 2004).

Yang, Fu e Land (2004) definem que os efeitos da idade constituem os diferentes riscos associados a diferentes faixas etárias; os efeitos do período constituem a variação nas taxas vitais ao longo do tempo em que está relacionado a todos os grupos etários de maneira simultânea; e os efeitos da coorte estão relacionados a alterações nas taxas entre grupos de indivíduos com anos de nascimento iguais, ou seja, para grupos de idades sucessivos em períodos sucessivos.

Currie (2014) demonstra essa generalização, em que muitos modelos de mortalidade podem ser expressos nessa mesma terminologia padronizada. No mesmo sentido Hunt e Blake (2015) destacam que houve um aumento considerável no uso de modelos de mortalidade que estudam as taxas de mortalidade seguindo as dimensões de idade, período e coorte. Ainda Hunt e Blake (2015) analisaram os principais trabalhos realizados nessa área e apresentaram uma análise ampla dos modelos, examinando suas semelhanças e diferenças.

Seguindo como base teórica os trabalhos de Currie (2014) e Hunt e Blake (2015), Villegas, Millosovich e Kaishev (2017) definem a família dos modelos GAPC a partir de quatro componentes.

1. **Componente aleatória:** o número de mortes $D_{x,t}$ segue uma distribuição Poisson ou uma distribuição binomial.
2. **Componente sistemática:** os efeitos da idade, ano e coorte são capturados a partir de um preditor $\eta_{x,t}$, dado por

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x} \quad (6)$$

em que:

α_x é a função de idade estática que captura a forma geral da mortalidade por idade;

$N \geq 0$ é um número inteiro que indica o número de termos de período-idade que descrevem as tendências de mortalidade, com cada índice de tempo $\kappa_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$, que contribui para especificar a tendência de mortalidade $\beta_x^{(i)}$ e modelando seu efeito entre as idades;

γ_{t-x} contabiliza o efeito coorte com $\beta_x^{(0)}$ modelando seu efeito entre as idades.

Nos modelos da família GAPC assume-se que o índice de períodos $\kappa_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ e o índice de coorte γ_{t-x} são processos estocásticos. Essa é a principal característica que

possibilita a projeção estocástica de modelos GAPC e, assim, o desenvolvimento de previsões probabilísticas das taxas futuras de mortalidade.

3. **Função de ligação g :** associa a componente aleatória e a componente sistemática. Apesar de haver uma quantidade de funções possíveis, é conveniente usar a ligação canônica da distribuição Poisson com função de ligação log e a distribuição Binomial com função de ligação logit.

4. **Parâmetros de restrição:** a maioria dos modelos de mortalidade estocásticos são identificáveis somente até uma transformação e requerem parâmetros de restrição para garantir que as estimativas de parâmetros sejam únicas. Os parâmetros de restrição são aplicados por meio de uma função de restrição ν que mapeia um vetor de parâmetros arbitrários

$$\theta = (\alpha_x, \beta_x^{(1)}, \dots, \beta_x^{(N)}, \kappa_t^{(1)}, \dots, \kappa_t^{(N)}, \beta_x^{(0)}, \gamma_{t-x}) \quad (7)$$

dentro de um vetor de parâmetros transformados

$$\nu(\theta) = (\tilde{\theta}) = (\tilde{\alpha}_x, \tilde{\beta}_x^{(1)}, \dots, \tilde{\beta}_x^{(N)}, \tilde{\kappa}_t^{(1)}, \dots, \tilde{\kappa}_t^{(N)}, \tilde{\beta}_x^{(0)}, \tilde{\gamma}_{t-x}) \quad (8)$$

Satisfazendo o modelo de restrições sem efeito sobre o preditor $\eta_{x,t}$, ou seja, θ e $\tilde{\theta}$ resulta no mesmo $\eta_{x,t}$.

Na próxima seção serão apresentados e discutidos os modelos propostos neste trabalho.

2.6.1.1 Modelo Lee-Carter

Este modelo foi desenvolvido por Lee e Carter (1992). O método consiste em uma combinação de um modelo demográfico parcimonioso com métodos estatísticos de séries temporais, baseando-se em padrões e tendências históricas, fornecendo intervalos de confiança probabilísticos para previsões (LEE; CARTER, 1992).

Foi aplicado, inicialmente, na população dos EUA e tornou-se reconhecido na literatura atuarial e demográfica, convertendo-se no método de referência para instituições e pesquisadores de todo o mundo, na construção de projeções de mortalidade para populações (BRAVO, 2007).

O preditor deste modelo é dado por

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} \quad (9)$$

em que o preditor $\eta_{x,t}$ é representado por uma função estática para a idade α_x que representa o padrão geral das taxas de mortalidade no tempo, para cada idade específica; β_x descreve o padrão etário que a taxa de mortalidade oscila, ou seja, caracteriza a sensibilidade do log da taxa central de mortalidade, $\ln(m_{x,t})$, em relação a $\kappa_t^{(1)}$; $\kappa_t^{(1)}$ representa as tendências temporais do nível de mortalidade; para a idade-período um termo único ($N = 1$) não paramétrico; não leva em consideração o efeito coorte (LEE; CARTER, 1992; VILLEGAS; MILLOSSOVICH; KAISHEV, 2017; VAN DELFT, 2012; BARRIEU et. al, 2012; BRAVO, 2007).

Vale ressaltar que neste caso considera-se que o número de mortes $D_{x,t}$, segue uma distribuição Poisson com função de ligação log, de acordo com o proposto por Brouhns et al. (2002).

Para realizar a projeção da mortalidade, o índice temporal $\kappa_t^{(1)}$ é modelado e projetado por meio de um ARIMA que é comumente bem ajustado por um modelo do passeio aleatório com deslocamento (*random walk with drift*) fornecendo um ajuste considerável. Dessa forma

$$\kappa_t^{(1)} = \delta + \kappa_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_k^2) \quad \text{i.id}, \quad (10)$$

em que, δ é o parâmetro de deslocamento (*drift*) e ε_t é um ruído branco Gaussiano com variância σ_k^2 .

2.6.1.2 Modelo Renshaw e Haberman

O modelo proposto por Renshaw e Haberman (2006) é uma generalização do modelo de Lee-Carter, incorporando uma componente de efeito coorte. A estrutura de modelagem Lee-Carter ao receber a extensão a partir da introdução de uma classe de modelos generalizados, paramétricos e não lineares, que permite o ajuste e a extrapolação de efeitos de coorte específicos da idade, como também os efeitos mais comuns do período específico para a idade (RENSHAW; HABERMAN, 2006).

O preditor do modelo de Renshaw e Haberman é dado por

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x} \quad (11)$$

em que α_x , β_x e $\kappa_t^{(1)}$, possuem a mesma definição apresentada anteriormente no modelo de Lee-Carter; e γ_{t-x} representa o efeito coorte que está em função do ano de nascimento em $t-x$ anos; (RENSHAW; HABERMAN, 2006, PLAT, 2009, VILLEGAS, 2015, VILLEGAS; MILLOSOVICH; KAISHEV, 2017).

O número de mortes $D_{x,t}$ segue uma distribuição Poisson com função de ligação log (VILLEGAS; MILLOSOVICH; KAISHEV, 2017).

2.6.1.3 Modelo APC

O modelo APC, também conhecido por modelo *Age-Period-Cohort* (Idade-Período-Coorte), é uma subestrutura comumente usada do modelo Renshaw e Haberman. A diferença proposta por esse modelo em relação ao modelo Renshaw e Haberman é a pressuposição de que $\beta_x^{(1)} = 1$ e $\beta_x^{(0)} = 1$ (VILLEGAS; MILLOSOVICH; KAISHEV, 2017). O preditor é dado por

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x} \quad (12)$$

suas componentes possuem a mesma definição que foi apresentada nos modelos anteriormente expostos. É geralmente empregado no campo dos estudos da medicina e demográfica, contudo, não é amplamente utilizado na literatura atuarial (CARRIE, 2006, VILLEGAS; MILLOSOVICH; KAISHEV, 2017).

2.6.1.4 Modelo CBD

Cairns, Blake e Dowd (2006) desenvolveram um modelo que possui como proposta a pré-especificação dos parâmetros de idade $\beta_x^{(1)} = 1$ e $\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$ e a não inclusão das componentes que representam os efeito coorte γ_{t-x} e da função estática de idade α_x ; dessa forma, o modelo apresenta somente a componente k_t , com dois termos para a idade-período ($N = 2$). O preditor desse modelo é dado por

$$\eta_{x,t} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} \quad (13)$$

em que \bar{x} é a média das idades nos dados; $\kappa_t^{(1)}$ representa mudanças no nível de mortalidade para todas as idades; $\kappa_t^{(2)}$ admite que mudanças na mortalidade sejam variáveis entre as

idades, com intenção de refletir que a observação histórica das taxas de melhora na mortalidade (*improvements*) podem diferir para diferentes classes etárias; (PLAT, 2009, VILLEGAS; MILLOSOVICH; KAISHEV, 2017).

Assume-se que o número de mortes segue uma distribuição Binominal e utiliza uma função de ligação logit (VILLEGAS; MILLOSOVICH; KAISHEV, 2017).

2.6.1.5 Modelo M7

Este modelo é uma extensão ao CBD, desenvolvido por Cairns et al. (2009). Adiciona ao modelo original uma componente para o efeito coorte e um efeito quadrático para o efeito idade. Dessa forma obtém-se o seguinte preditor

$$\eta_{x,t} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2)\kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x} \quad (14)$$

em que $\hat{\sigma}_x^2$ é o valor médio para $(x - \bar{x})^2$; $\kappa_t^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$ e γ_{t-x} possuem as mesmas definições apresentadas nos modelos anteriores; a componente $\kappa_t^{(3)}$ é adicionada para capturar a dinâmica específica para idades mais jovens, pelo fato de que os dados históricos indicam que a dinâmica das taxas de mortalidade em idades mais jovens pode ser diferente em algumas situações (PLAT, 2009; 2010, VILLEGAS; MILLOSOVICH; KAISHEV, 2017).

2.6.1.6 Modelo Plat

Plat (2009) desenvolveu, a partir de características de modelos, como Lee-Carter, Renhsaw e Haberman, Currie e CBD, julgadas pelo autor como apropriados para se ajustar, um modelo que elimina algumas desvantagens dos modelos utilizados como referência.

De acordo com Villegas, Millosovich e Kaishev (2017), a estrutura proposta compreende as seguintes componentes: uma função estática para a idade α_x , três termos para idade-período ($N = 3$) com pré-especificações para os parâmetros de idade $\beta_x^{(1)} = 1$, $\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$, $\beta_x^{(3)} = (x - \bar{x})^+$ e um efeito coorte com pré-especificação para o parâmetro de idade $\beta_x^{(0)} = 1$.

O preditor é dado por

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)}(x - \bar{x})^+ + \gamma_{t-x} \quad (15)$$

em que $(x - \bar{x})^+ = \max(0, \bar{x} - x)$, e segue uma distribuição Poisson para o número de mortes com função de ligação log (VILLEGAS; MILLOSSOVICH; KAISHEV, 2017).

2.6.2 Projeção da mortalidade

Para realizar a projeção da mortalidade, baseia-se no proposto por Villegas, Millosovich e Kaishev (2017), utilizando o modelo de séries temporais denominado processo autorregressivo integrado de médias móveis (ARIMA).

Modelos de séries temporais podem ser bem definidos segundo a definição de Box, Jenkins e Rensel (2008), como sendo uma sequência de observações tomadas sequencialmente no tempo, assumindo que há dependência entre os dados, e uma das suas aplicações é a previsão de valores futuros utilizando dados passados.

Morettin e Tolói (2006) considera as observações $\{Z_t, t = 1, \dots, N\}$ de uma série temporal, e que um modelo de decomposição consiste em denotar a série em função de três componentes:

$$Z_t = T_t + S_t + a_t \quad (16)$$

em que, T_t representa a tendência; S_t representa a sazonalidade; a_t representa a componente aleatória.

O intuito principal de considerar um modelo desse tipo é o de estimar as componentes de tendência e sazonalidade e construir a série livre dessas componentes, de maneira que a série assuma estacionariedade (MORETTIN; TOLÓI; 2006).

Um processo autorregressivo (AR) de ordem p pode ser escrito da seguinte forma:

$$Z_t = a_t + \sum_{i=1}^p \theta_i Z_{t-1} \quad (17)$$

em que, a_t é independente e identicamente distribuída por uma Normal com média 0 e variância constante. Esse modelo compreende que os valores da série só dependem do seu valor no período anterior e de um termo aleatório (GUJARATI; PORTER, 2008).

O processo denominado como Médias Móveis (MA) de ordem q pode ser expresso da seguinte maneira

$$Z_t = a_t + \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-1} \quad (18)$$

em que, a_t possui as mesmas características do modelo AR (p).

Nesse sentido, quando a série possui características do modelo AR (p) e MA (q), o processo é denominado de autorregressivo de médias móveis – ARMA (p,q), e pode ser expresso como:

$$Z_t = a_t + \sum_{i=1}^p \phi_i Z_{t-1} + \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-1} \quad (19)$$

A fórmula 19 demonstra que há um termo autorregressivo e outro termo de média móvel. Todavia, esse processo ainda pode ser descrito por um modelo denominado ARIMA (p,d,q), que é utilizado quando a série não apresenta estacionariedade por efeito da componente de tendência. A modelagem por meio de processos autorregressivos integrados de médias móveis, ARIMA, considera o valor da série passada e dos erros passados na previsão dos valores futuros (GUJARATI; PORTER, 2008; MORETTIN; TOLÓI, 2006).

Especificamente, o ARIMA que será utilizado é o denominado modelo do passeio aleatório com deslocamento (*random walk with drift*), de acordo com o proposto por Lee e Carter (1992), Torres (2009), Gaille (2012), Wan e Bertschi (2015), Villegas, Millosovich e Kaishev (2017). A razão para a escolha da especificação supracitada do modelo, segundo Lee-Carter (1992), baseia-se pelo critério de parcimônia, pois apesar de outras especificações serem possíveis, o modelo do passeio aleatório com deslocamento demonstra ser o mais parcimonioso.

É importante ressaltar que, apesar de ser real a possibilidade de outros modelos da família ARIMA poderem também ser estimados, neste trabalho optou-se por seguir as práticas utilizadas e sugeridas na literatura pertinente ao tema, conforme demonstrado acima.

Após o ajuste do modelo ARIMA, é necessário realizar o diagnóstico dos resíduos do modelo, para que seja validado como coerente para realizar as projeções futuras. Para tanto, será aplicado o teste de Box-Pierce.

2.7 Precificação de um S-forward via margem de risco

O modelo de precificação para um s-forward, que considera a abordagem pela margem de risco sob as regulações do Solvência II foi proposto por Levantesi e Menzietti (2017). O projeto Solvência II estabelece que o valor de mercado dos passivos é igual a soma da sua melhor estimativa e da margem de risco, representando um ajustamento de risco da melhor estimativa.

O risco de margem é determinado pelo custo de capital (CdC), mais especificamente, pelo custo de fornecimento de uma quantidade de capital igual ao requisito de capital de solvência necessário para preencher as obrigações da entidade sobre o tempo. Nesse sentido, para calcular o risco de margem é necessário calcular o requisito de capital de solvência, além do custo de capital que é determinado em 6% pelo Solvência II.

Entretanto, para calcular precisamente o risco de margem é necessária a determinação do requisito de capital de solvência condicionado à evolução da mortalidade até o tempo t . O cálculo do requisito de capital de solvência é tido como complexo, para tanto, são propostas simplificações, conforme pode ser observado em EIOPA (2014), ao qual são propostas algumas aproximações que foram utilizadas neste trabalho. Será considerada a aproximação do requisito de capital de solvência assumindo a evolução da mortalidade até o tempo t , de acordo com a melhor estimativa.

Nesse sentido, o Solvência II possui diversos métodos para calcular o requisito de capital de solvência. Propõe-se que seja utilizada a fórmula padrão. A fórmula padrão para o RCS considera um choque de longevidade determinístico, bem como não considera outros riscos além do risco de longevidade. A fórmula pode ser expressa da seguinte maneira

$$RCS_t^{choque} = \Delta BOF_t | cl = V_t^{choque} - \hat{V}_t, \quad (20)$$

em que, cl representa o choque de longevidade; BOF representa o valor dos fundos básicos próprios; V_t^{choque} denota o valor de uma provisão técnica após o choque de longevidade; \hat{V}_t é a melhor estimativa das provisões técnicas; $\Delta BOF_t | cl = BOF_t - BOF_t^{choque}$ representa a variação do valor dos fundos básicos próprios no tempo t , devido a um choque de longevidade. O choque de longevidade nessa fórmula é representando por uma redução constante de 20% da melhor estimativa da taxa de mortalidade por cada idade (EIOPA, 2014).

A partir do modelo supracitado, assumindo a evolução da mortalidade até o tempo t de acordo a melhor estimativa, o RCS para um portfólio dotal puro é dado por

$$RCS_t = V_t' - \hat{V}_t = l_{x,0} ({}_t \hat{p}_{x,0} \cdot {}_{T-t} P_{x,t}^{choque} - {}_T \hat{p}_{x,0}) d(t, T), \quad (21)$$

em que, ${}_T \hat{p}_{x,0}$ é a melhor estimativa da probabilidade de sobrevivência; ${}_{T-t} P_{x,t}^{choque}$ é a probabilidade de sobrevivência no tempo de acordo com a abordagem de cálculo do RCS.

Considerando que uma entidade transfira o risco de longevidade por um S-forward com maturidade no tempo T, o RCS no tempo t após o *hedge* é igual a

$$RCS_t^S = (l_{x,0} - l_{x,0}^S)_t \hat{p}_{x,0} \left({}_{T-t}P^{choque}_{x,t} - {}_{T-t}\hat{p}_{x,t} \right) d(t, T), \quad (22)$$

em que, $l_{x,0}$ e $l_{x,0}^S$ são os sobreviventes em um portfólio dotal puro e os sobreviventes subjacentes ao s-forward.

Portanto, substituindo as equações 21 e 22 na equação 3, é possível encontrar os possíveis valores do risco de margem no tempo t igual a 0, antes e depois o *hedge*. Conforme pode-se verificar abaixo:

Antes do hedge

$$MR_0 = 6\% \sum_{i=0}^{T-1} SCR_i \cdot d(0, i+1) = 6\% l_{x,0} \cdot d(0, T) \cdot \sum_{i=0}^{T-1} i \hat{p}_{x,0} \left({}_{T-i}P^{choque}_{x,i} - {}_{T-i}\hat{p}_{x,i} \right) d(i, i+1) \quad (23)$$

Após o hedge

$$MR_0^S = 6\% \sum_{i=0}^{T-1} SCR_i^S \cdot d(0, i+1) = 6\% (l_{x,0} - l_{x,0}^S) \cdot d(0, T) \cdot \sum_{i=0}^{T-1} i \hat{p}_{x,0} \left({}_{T-i}P^{choque}_{x,i} - {}_{T-i}\hat{p}_{x,i} \right) d(i, i+1) \quad (24)$$

A partir da diferença entre duas equações anteriores, $\Delta RM_0 = RM_0 - RM_0^S$, encontra-se uma medida do tamanho do montante poupado pelo *hedger* ao transferir o risco de longevidade por um s-forward, assim

$$\Delta MR = 6\% \cdot l_{x,0} \cdot d(0, T) \sum_{i=0}^{T-1} i \hat{p}_{x,0} \left({}_{T-i}\hat{p}_{x,i} - {}_{T-i}\hat{p}_{x,i} \right) d(i, i+1) \quad (25)$$

Neste trabalho assume-se que o valor poupado corresponde ao prêmio de risco máximo que uma entidade está disposta a pagar pelo *hedge* do risco de longevidade. Ou seja

$$\Delta MR_0 \geq \pi \cdot \hat{l}_{x+T,T}^S \cdot d(0, T), \quad (26)$$

em que, $\hat{l}_{x+T,T}^S = l_{x,0}^S \cdot \hat{p}_{x,0}$.

Em seqüência, pode ser obtido o preço máximo, π^{\max} , para o pagamento fixo de um s-forward a partir das equações 25 e 26, ou o *spread* requerido pelo pagamento flutuante, δ^{\max} .

Preço máximo de um pagamento fixo

$$\begin{aligned} \pi^{\max} &= e^{\delta^{\max} T} - 1 \\ &= 6\% \left(\frac{\sum_{i=0}^{T-1} \hat{p}_{x,0} \cdot T^{-i} p_{x,i}^{choque} \cdot d(i,i+1)}{T \hat{p}_{x,0}} - \sum_{i=0}^{T-1} d(i,i+1) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Spread requerido pelo pagamento flutuante

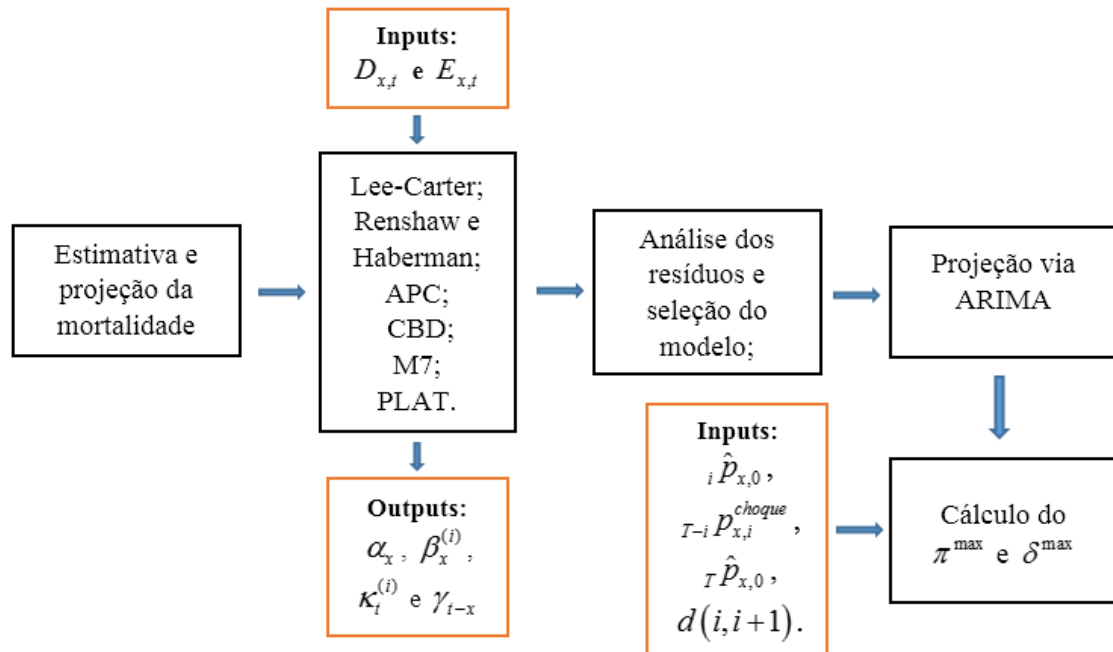
$$\delta^{\max} = \ln \left[\frac{6\% \sum_{i=0}^{T-1} \hat{p}_{x,0} \cdot T^{-i} p_{x,i}^{choque} \cdot d(i,i+1) + T \hat{p}_{x,0} \left(1 - 6\% \sum_{i=0}^{T-1} d(i,i+1) \right)}{T \hat{p}_{x,0}} \right] \frac{1}{T} \quad (28)$$

Esses resultados são válidos para instrumentos básicos com uma única maturidade.

3 Metodologia

A partir do proposto pode-se apresentar o modelo conceitual teórico que representa o escopo da presente pesquisa, conforme pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 - Modelo conceitual teórico



Fonte: elaborado pelo autor.

3.1 Tipo de pesquisa

Diante da variedade de taxionomias de tipos de pesquisa, esta pode ser classificada quantos aos fins e quanto à abordagem.

Dessa forma, pode-se classificar quanto aos fins, como uma pesquisa de caráter exploratório, pois, foi realizada em área que ainda encontra-se com pouco conhecimento acumulado e sistematizado (ANDRADE, 2000; VERGARA, 2008).

Por fim, quanto à sua abordagem pode-se compreender esta pesquisa como quantitativa, pois, baseia-se na quantificação de dados, linguagem estatística e matemática, validação dos resultados, por meio de testes estatísticos, entre outros (MARTINS; THEÓPHILO, 2009).

3.2 Procedimentos metodológicos

Os dados utilizados para os modelos de mortalidade foram coletados no banco de dados disponíveis no site do *Human Mortality Database*. Esse portal foi criado para prover detalhadamente dados de mortalidade e populações, para pesquisadores, jornalistas, analistas e outros interessados sobre a história da longevidade humana (HMD, 2018). Os dados que foram utilizados são referentes à população masculina da Suíça, com horizonte temporal de 1961 a 2014. A justificativa para a escolha da população desse país será apresentada e discutida na seção de análise e discussão dos resultados. Especificamente, os dados necessários serão o número de óbitos e de expostos ao risco.

Os dados referentes ao fator de desconto calculado com a taxa de juros livre de risco de uma estrutura a termo (ETTJ) foram extraídos do portal online da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA), para o período de 2017 a 2027. A taxa utilizada foi a ETTJ – IPCA.

Para realizar as etapas necessárias neste trabalho, é importante delimitar as seguintes pressuposições:

- foram consideradas todas coortes para indivíduos com idade entre 65 e 85 anos;
- foram considerados 10 maturidades T, de 1 a 10 anos.

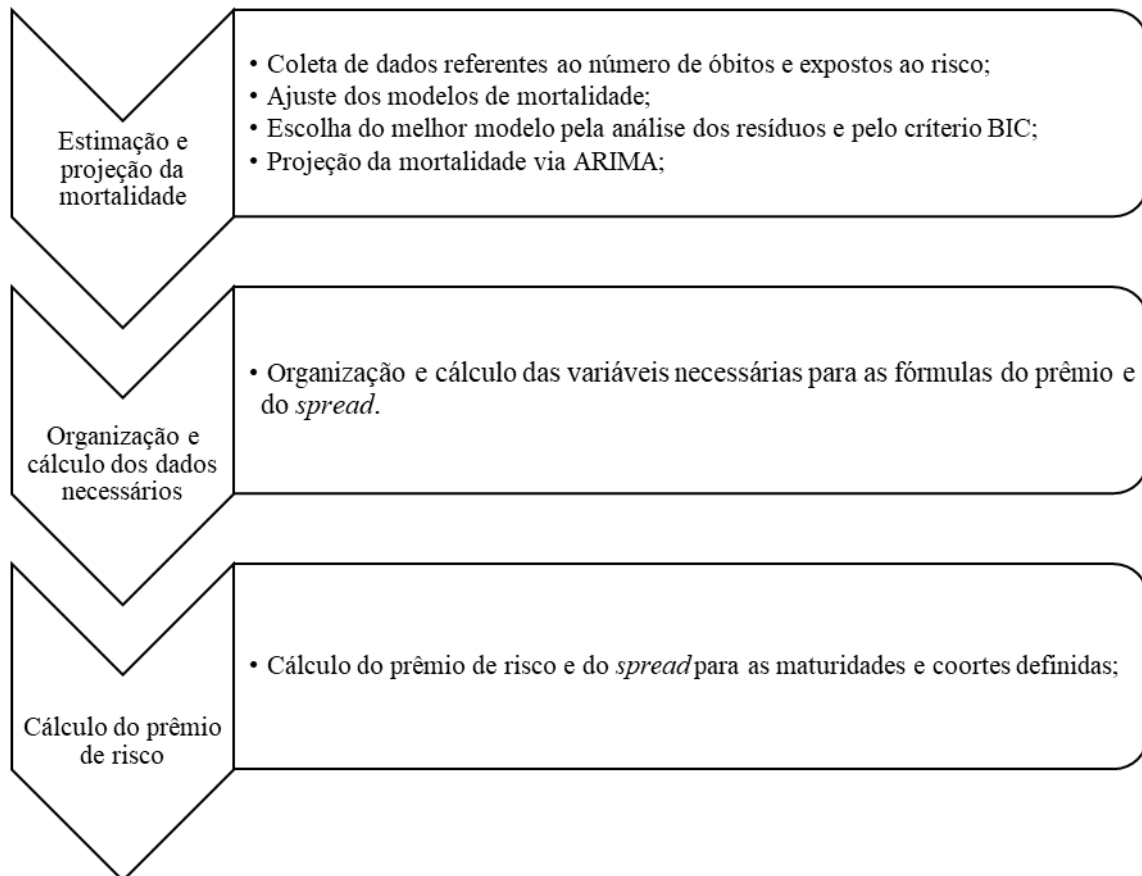
Tais pressuposições foram inspiradas nos trabalhos de Meyricke e Sherris (2014) e Levantessi e Menziatti (2017). Foi utilizada a linguagem de programação R para modelar os dados, bem como os pacotes disponibilizados pelo RStudio *StMoMo*, *Demography* e *Forecast*.

As etapas que foram percorridas para atingir o objetivo da pesquisa, podem ser visualizadas na Figura 2. Na primeira etapa, foi realizada a coleta de dados referentes ao número de óbitos e expostos ao risco, em seguida a estimação dos parâmetros para os modelos de mortalidade Lee-Carter, Renshaw e Haberman, APC, CBD, M7 e PLAT.

Entre os modelos propostos, o modelo foi escolhido de acordo com a análise dos resíduos e o Critério de Informação Bayesiano (BIC) conforme indicado por Lovasz (2010), Cairns et al. (2011), Cairns et al. (2011), Gaille (2012), Wan e Bertschi (2015), Levantessi e Menziatti (2017) ao qual seleciona o melhor modelo pela qualidade do ajuste estatístico, por fim, a projeção da mortalidade para o período de 2018 a 2027, por meio do modelo ARIMA do passeio aleatório com deslocamento.

A segunda etapa consistirá em organizar os dados necessários para cálculo do prêmio e do *spread*. Nessa etapa é necessária a organização e cálculo das seguinte variáveis: ${}_i\hat{p}_{x,0}$, ${}_{T-i}P_{x,i}^{choque}$, ${}_T\hat{p}_{x,0}$ e $d(i,i+1)$. A terceira etapa foi determinar o prêmio de risco máximo π^{\max} e o *spread* δ^{\max} requerido pela contraparte para o pagamento flutuante.

Figura 2 - Etapas para os procedimentos metodológicos



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Por fim, os resultados foram analisados e discutidos, a partir dos encontrados e do exposto e discutido na literatura existente.

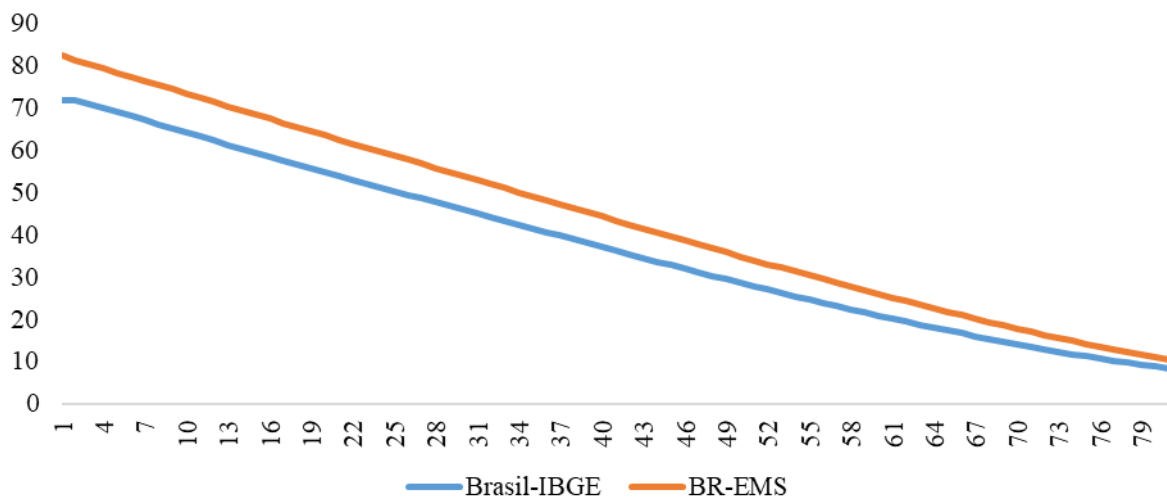
4 Resultados e discussões

Nesta seção serão apresentados os resultados numéricos e suas respectivas discussões. Na seção 4.1 serão apresentados os ajustes dos modelos de mortalidade, contendo a análise dos resíduos, o critério de seleção de modelos e a projeção da mortalidade para o modelo selecionado com o melhor ajuste. Na seção 4.2, a determinação do máximo valor do prêmio de risco para um *s-forward* via margem de risco e o *spread* requerido pela contraparte, bem como a aplicação de possíveis cenários para o resultado encontrado.

4.1 Modelos de mortalidade

Inicia-se apresentando a justificativa para a escolha da população em análise no presente trabalho. As características dos participantes dos planos de benefícios do Brasil não são representadas pelos dados disponibilizados pela tábua de mortalidade disponibilizada pelo IBGE. Para preencher essa lacuna, a tábua denominada Experiência do Mercado Segurador Brasileiro (BR-EMS), foi criada para representar as próprias especificidades e características dos segurados brasileiros (CNSEG, 2010). Pode-se visualizar na Figura 3 o comportamento da expectativa de vida da tábua BR-EMS – sb 2015 – M (específica para a sobrevivência masculina) em contraste à Tábua Completa de Mortalidade – Homens – 2015 do IBGE.

Figura 3 - Expectativa de vida – BR-EMS X Brasil-IBGE.



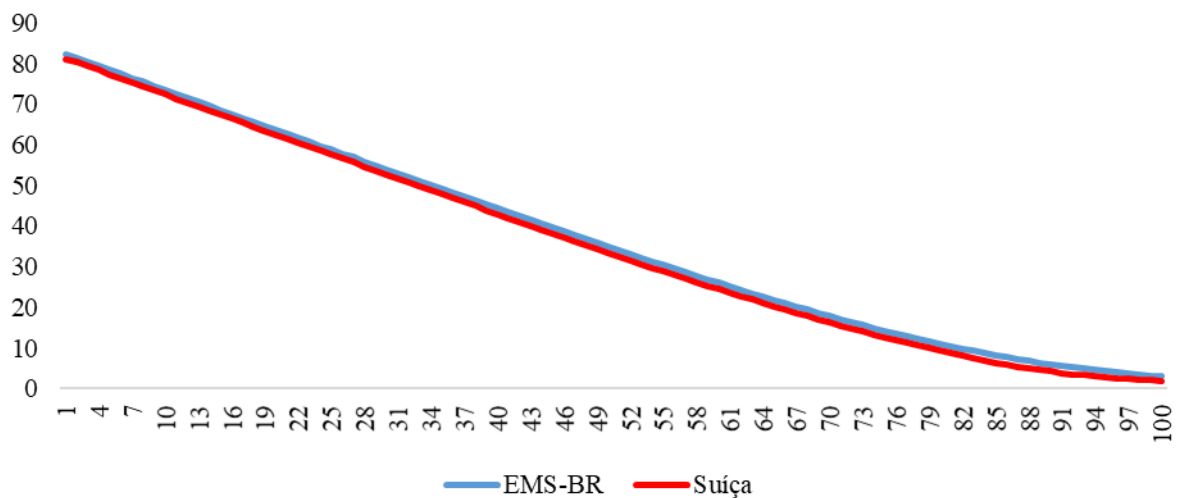
Fonte: Elaborado pelo autor.

É notável a discrepância entre os valores representados na Figura 3 das duas tábuas em comparação, o que indica a necessidade de seleção dos dados de uma população que se aproxima às características dos participantes dos planos de benefícios brasileiros.

A partir do *ranking* desenvolvido pelo *deepask* (2012), que utiliza dados disponibilizados pelo site do Banco Mundial, foram plotadas as expectativas de vida dos cinco países que possuem as maiores estatísticas e comparados à BR-EMS. Os países são: Japão, Itália, Islândia, Suécia e Suíça. Os dados utilizados para plotar a expectativa de vida foram extraídos da base de dados do site *Human Life Table Database* (HLD) e podem ser visualizados nas Figuras 4, 5, 6, 7 e 8.

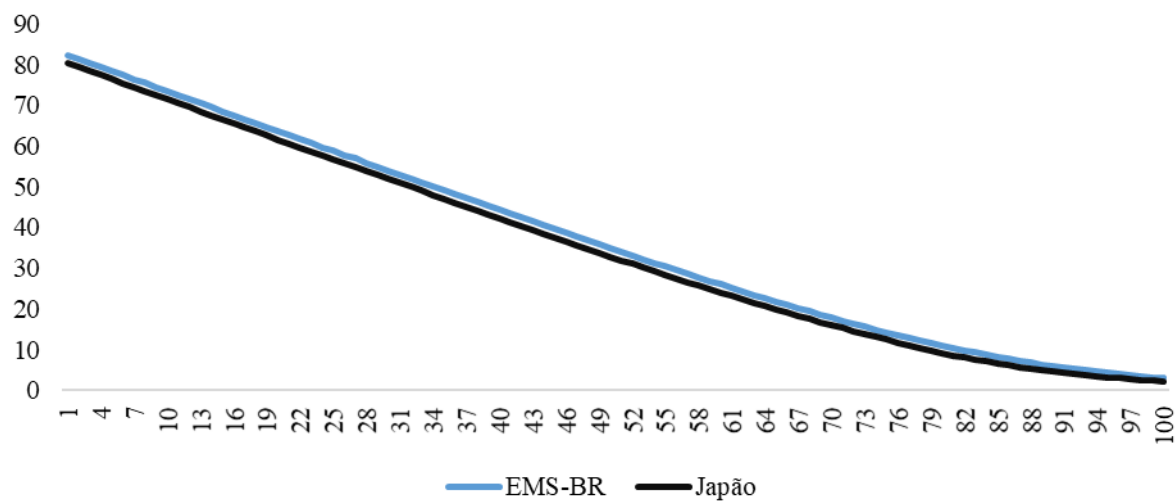
De maneira geral, o comportamento da expectativa de vida dos países selecionados apresentou valores que se aproximam da realidade da BR-EMS. Contudo, conforme já mencionado, a população escolhida foi a da Suíça. Esse país possui o comportamento da expectativa de vida que mais se aproxima da tábua atuarial BR-EMS. Apesar de ser a população que mais se aproximou, a expectativa de vida da tábua brasileira ainda apresentou estatísticas superiores às da Suíça.

Figura 4 - Expectativa de vida – BR-EMS X Suíça



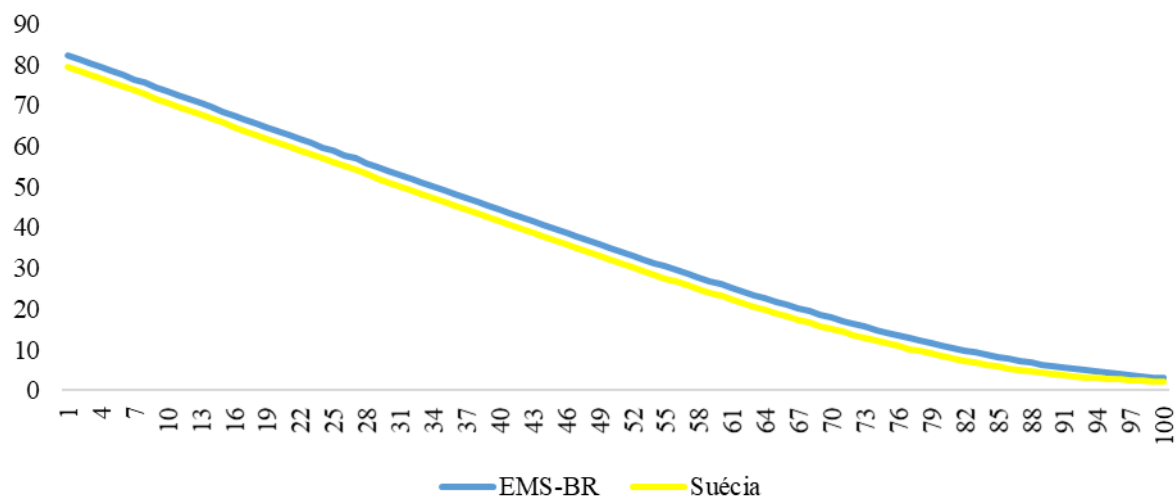
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5 - Expectativa de vida – BR-EMS X Japão



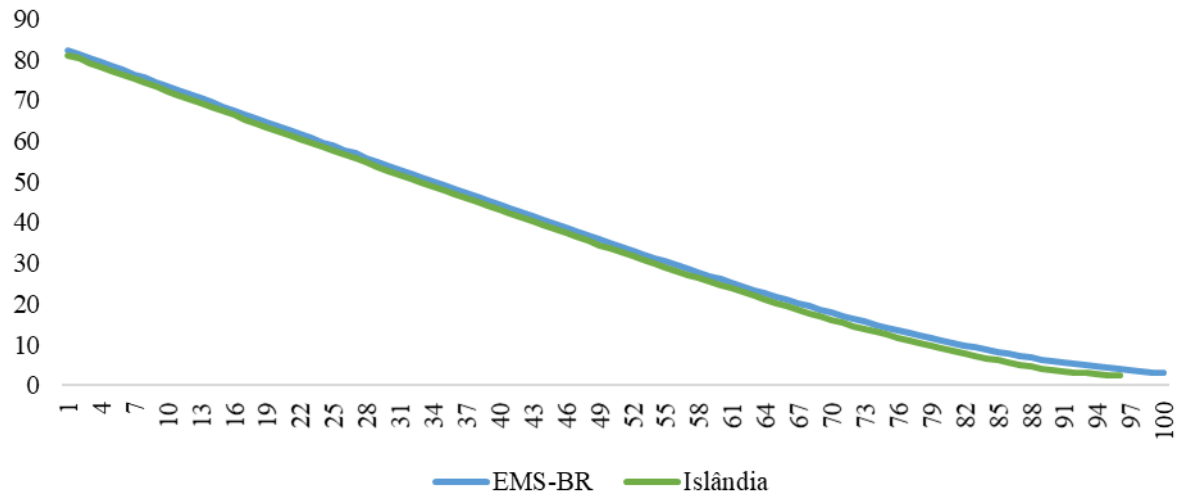
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6 - Expectativa de vida – BR-EMS X Suécia



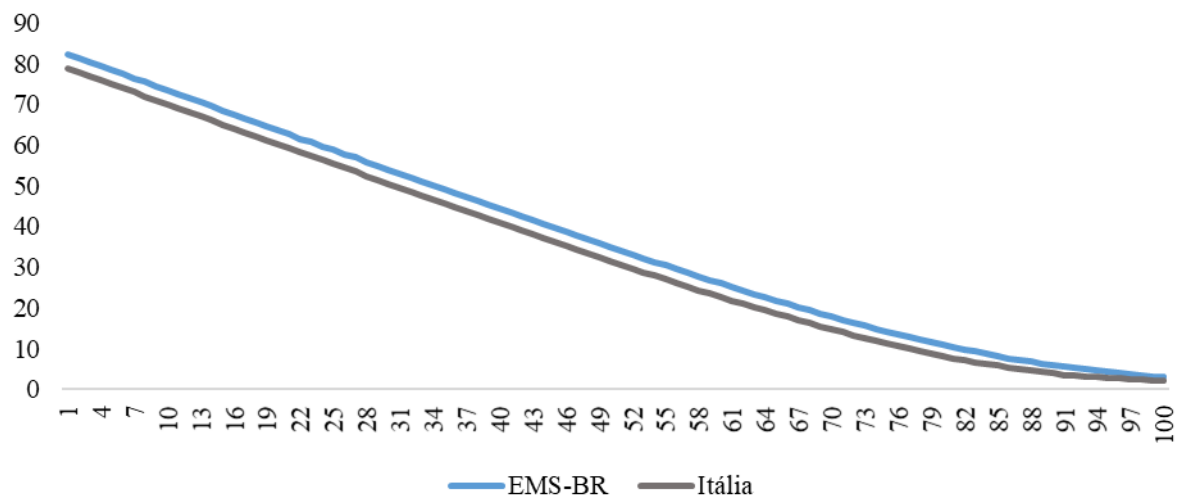
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7 - Expectativa de vida – BR-EMS X Islândia



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 - Expectativa de vida – BR-EMS X Itália



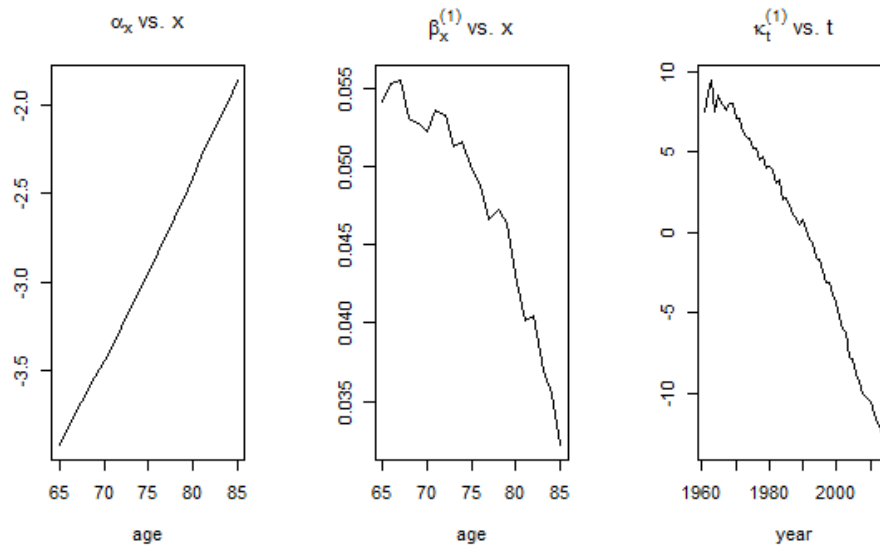
Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, após a justificativa para a seleção dos dados e a partir do exposto na metodologia, os modelos de mortalidade foram ajustados e analisados, conforme segue discussão na seção seguinte.

4.1.1 Modelo Lee-Carter

O primeiro modelo a ser analisado é o de Lee-Carter, o qual foi ajustado para a idade de 65 anos, conforme pode ser observado na Figura 9. O ajuste apresenta resultado para as componentes α_x , β_x e k_t .

Figura 9 - Parâmetros do modelo Lee-Carter ajustado para a população masculina da Suíça nas idades 65-85 anos no período de 1961-2014.



Fonte: Elaborado pelo autor

A componente α_x representa a forma geral da idade de mortalidade. Dessa forma, é possível notar que a população em estudo possui tendência ascendente de mortalidade. As idades mais jovens têm mortalidade menor do que as idades superiores.

A componente β_x descreve a tendência da mortalidade durante a idade x em relação às suas oscilações com o nível geral nas mudanças da mortalidade k_t . Isso indica que quando β_x é grande para alguma idade x , a taxa de mortalidade na idade x varia mais do que o nível geral de mortalidade quando este é pequeno, pois a taxa de mortalidade (quando pequeno) naquela idade varia pouco.

Nesse sentido, o gráfico que representa essa componente, permite afirmar que ao passo que a idade aumenta, os valores de β_x diminuem. Demonstra que os valores de β_x são maiores durante as idade mais jovens e diminui com o passar dos anos e o envelhecer da população. Isso permite a conclusão de que quanto mais jovem for a população, maior será a sua sensibilidade em relação às variações de k_t .

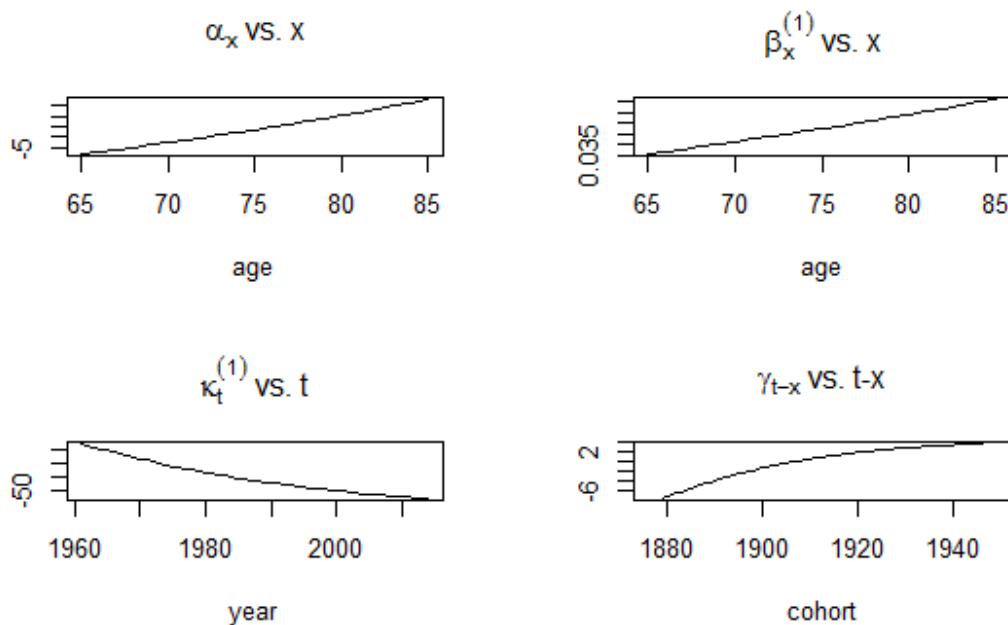
A componente k_t captura a tendência temporal da taxa de mortalidade. O gráfico que representa essa componente demonstra oscilações entre os anos 61 – 70 e para os anos seguintes apresenta declínio da taxa de mortalidade de acordo que os anos passam, com níveis

cada vez menores. O comportamento apresentado por k_t tem duas características importantes para projeções futuras: declínio linear e variância relativamente constante, como indicado por Lee-Carter (1992).

4.1.2 Modelo Renshaw e Haberman

O modelo de Renshaw e Haberman, que apresenta como resultado do ajuste o comportamento das componentes α_x , β_x , k_t e γ_{t-x} , pode ser visualizado na Figura 10.

Figura 10 - Parâmetros do modelo Renshaw e Haberman ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.



Fonte: Elaborado pelo autor

O comportamento da componente α_x foi semelhante ao observado no ajuste do modelo Lee-Carter, permitindo afirmar que em idades mais jovens o nível geral da mortalidade é menor do que em idades superiores. O comportamento da componente β_x apresentou resultado que difere do encontrado no ajuste do modelo Lee-Carter. Conforme a idade aumenta, os níveis de β_x aumentam, evidenciando que quanto mais envelhecida for a população maior será sua sensibilidade em relação a mudanças em k_t .

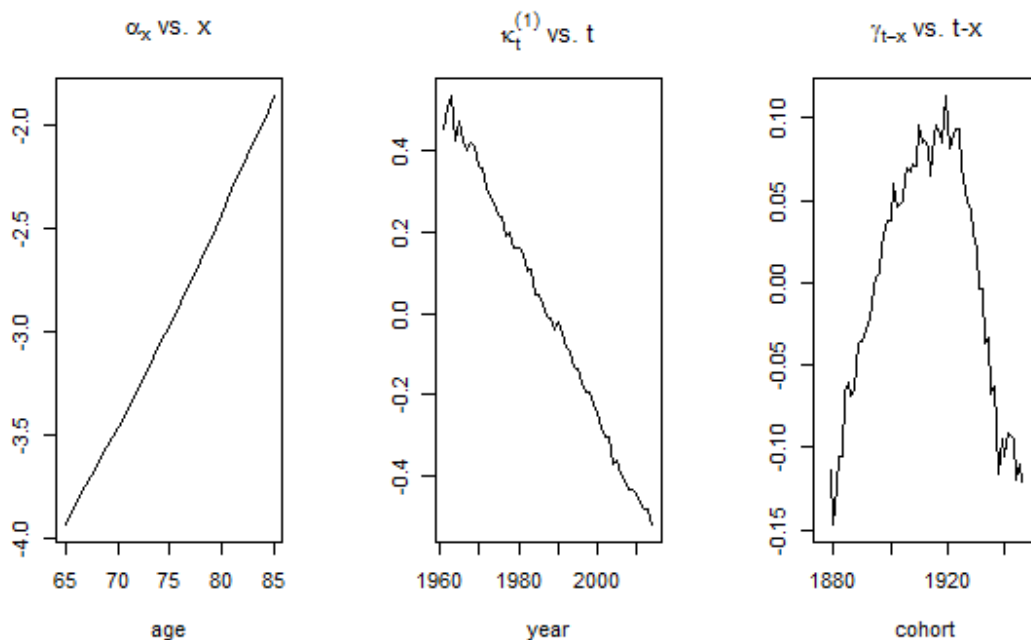
A tendência temporal dos níveis de mortalidade k_t denota ser decrescente com níveis de mortalidade cada vez menores em detrimento do passar dos anos. A componente γ_{t-x}

compreende o período de 1876 a 1961, pois o efeito coorte é estudado em $t-x$ anos. Essa variável retrata as interações entre a idade e o tempo, de acordo com o ano de nascimento. O comportamento do efeito coorte demonstra que os valores dos parâmetros aumentam de maneira gradual ao longo do tempo, não apresentando oscilações.

4.1.3 Modelo APC

O ajuste desse modelo apresenta o comportamento das componentes α_x, k_t e γ_{t-x} , o qual pode ser visualizado na Figura 11.

Figura 11 - Parâmetros do modelo APC ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.



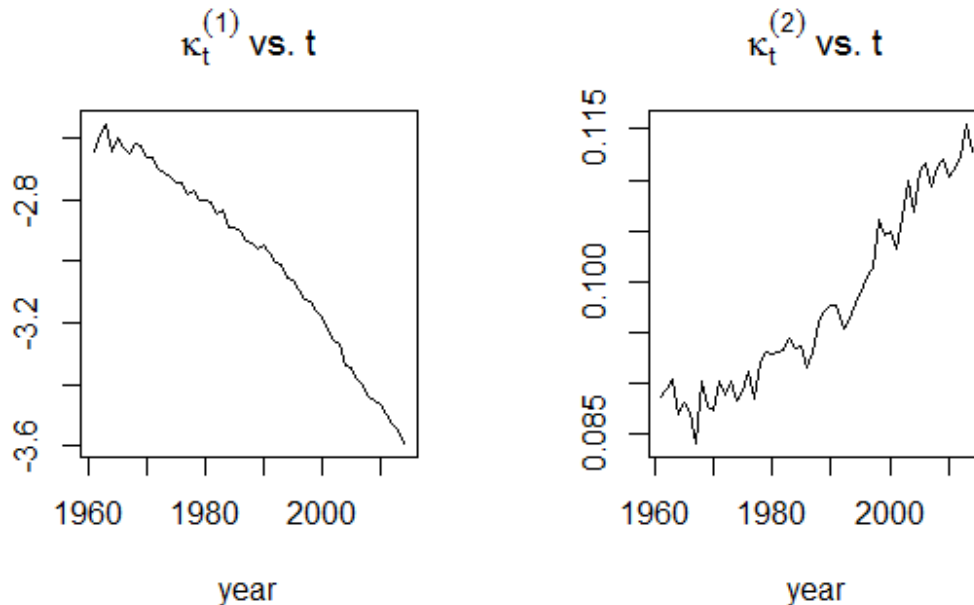
Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados encontrados para as componentes α_x e $k_t^{(1)}$ são semelhantes ao encontrado pelos modelos Lee-Carter e Renshaw e Haberman. Para a componente que representa o efeito coorte, γ_{t-x} , observa-se estimativas diferentes para cada ano, as quais não seguem um padrão de comportamento uniforme; inicia-se com um breve declínio, ascende durante as próximas décadas, até atingir seu ápice na década de 1920, e finaliza as próximas décadas com queda.

4.1.4 Modelo CBD

Os valores dos parâmetros ajustados para as componentes presentes nesse modelo, que são $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$, podem ser visualizadas na Figura 12.

Figura 12 - Parâmetros do modelo CBD ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.



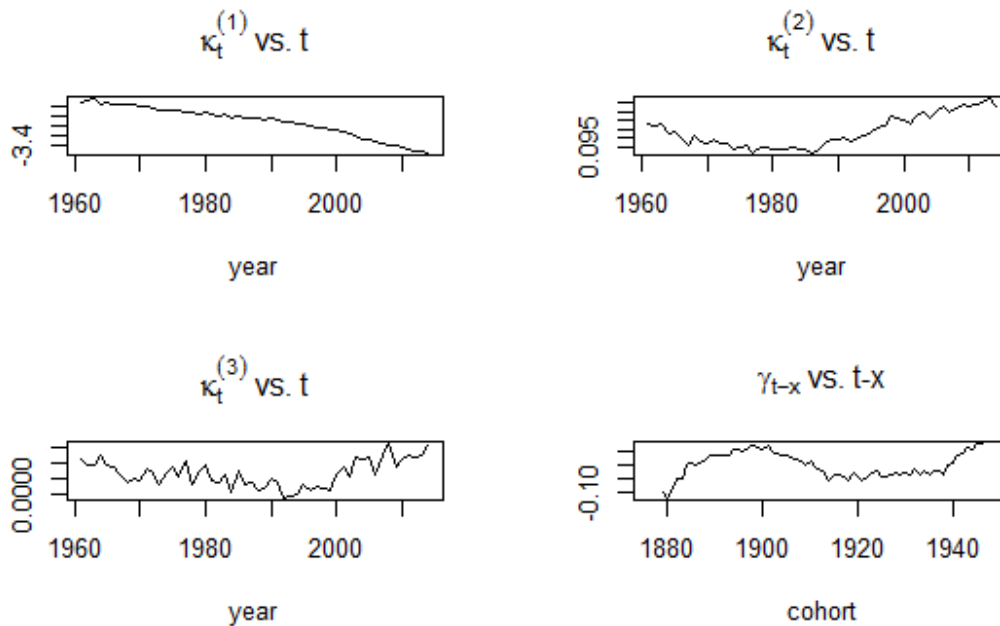
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os valores dos parâmetros para a componente $k_t^{(1)}$ possuem comportamento semelhante ao encontrado pelos modelos Lee-Carter e APC. Enquanto a componente $k_t^{(2)}$ demonstra oscilações, com tendência ascendente. Isso possibilita afirmar que as mudanças na mortalidade são variáveis entre as idades e as taxas de melhora na mortalidade também diferem entre as idades.

4.1.5 Modelo M7

As componentes resultantes do ajuste do modelo M7 são $\kappa_t^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$, $\kappa_t^{(3)}$ e γ_{t-x} e podem ser observadas na Figura 13, que contempla os respectivos gráficos dos valores dos parâmetros.

Figura 13 - Parâmetros do modelo M7 ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.



Fonte: Elaborado pelo autor.

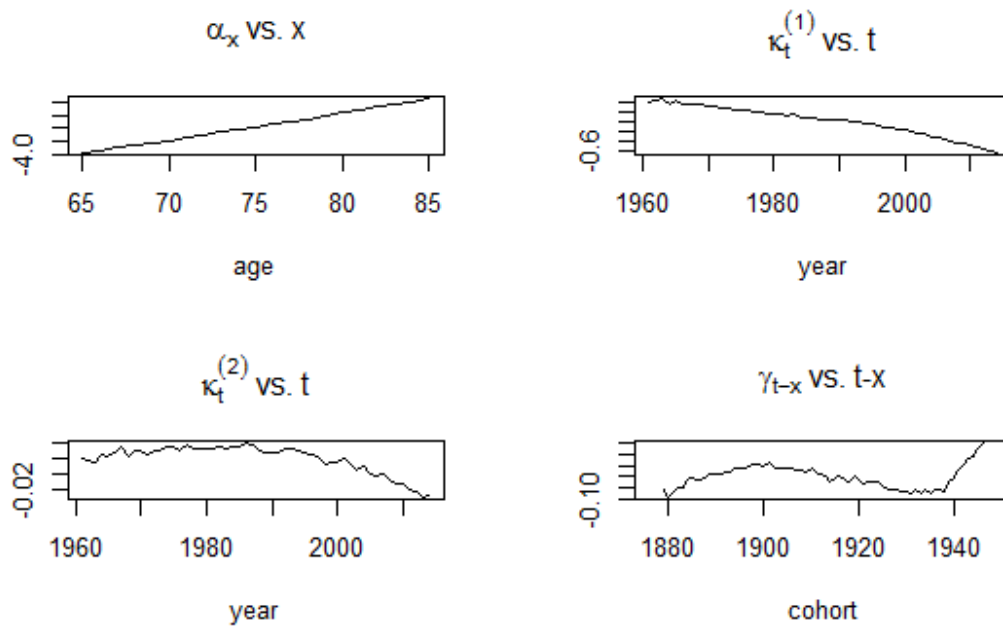
A componente $\kappa_t^{(1)}$ exibe uma tendência de queda aproximadamente linear, admitindo inferir que os níveis de mortalidade estão diminuindo ao longo do tempo. A $\kappa_t^{(2)}$ oscila com tendência de queda do início do período até atingir seu mínimo na década de 1990, e altera seu trajeto para uma tendência positiva até o fim do período em análise; demonstra que as mudanças na mortalidade são variáveis entre as idades, e as taxas de melhora na mortalidade diferem para diferentes classes etárias.

$\kappa_t^{(3)}$ denota oscilações durante todo período, com leve tendência de queda até a década de 1990, e para as décadas seguintes tendência positiva com variações significativas; apresenta conformidade com sua definição, pois, a dinâmica das taxas de mortalidade em idades mais jovens diferem em algumas situações. A componente do efeito coorte γ_{t-x} apresenta trajetória inconstante durante todo o seu curso.

4.1.6 Modelo PLAT

As componentes α_x , $\kappa_t^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$ e γ_{t-x} resultantes do ajuste do modelo Plat, podem ser observadas na Figura 14.

Figura 14 - Parâmetros do modelo Plat ajustado para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O resultado para esse modelo é análogo a alguns modelos, anteriormente discutidos. No que tange a componente α_x , pode-se afirmar que é semelhante ao ajuste encontrado nos modelos Lee-Carter, Renshaw e Haberman e APC; e em relação à $\kappa_t^{(1)}$ assemelha-se a Lee-Carter, APC, CBD e M7.

$\kappa_t^{(2)}$ sofre alterações em torno de uma suave tendência positiva até a década de 1990, após essa data, até o fim do período, oscila com tendência de queda. Para o efeito coorte γ_{t-x} a trajetória comporta-se com tendência de crescimento até a década de 1900, tendência de queda até a década de 1940, e para o fim do período uma ascensão significativa.

4.1.7 Análise dos resíduos

A qualidade dos ajustes de modelos de mortalidade deve ser analisada, com intenção de validar a hipótese de que o modelo não apresenta problemas que indicam a sua incapacidade de descrever as características da população em estudo.

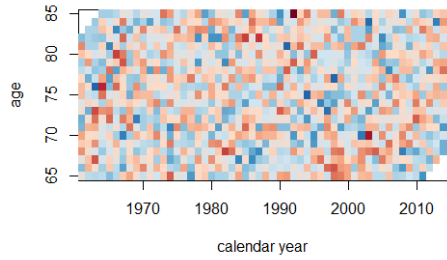
Para avaliar a qualidade dos modelos ajustados neste trabalho, baseia-se nos trabalhos de Renshaw e Haberman (2006), Wang (2007), Torres (2009), Cairns et al. (2009), Villegas (2015) e Villegas, Millosovich e Kaishev (2017). Nesse sentido, o diagnóstico dos resíduos é

investigado pelos gráficos *heat-map* e *scatter-plot*, que são plotados a partir dos desvios padronizados dos resíduos. Os autores citados orientam que a formação de padrões nos resíduos indica que há incapacidade no modelo ajustado para descrever todas características dos dados observados.

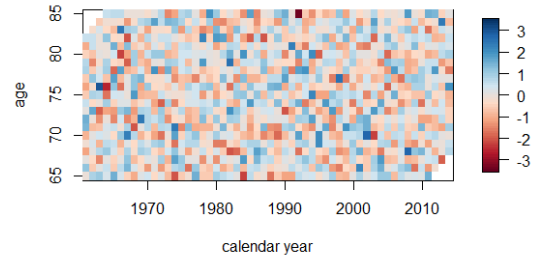
Dessa forma, os gráficos para a análise dos resíduos são representados nas Figuras 15 e 16. Na Figura 15, estão os *heat-maps*, pode-se observar que os resíduos dos modelos Lee-Carter, Renshaw e Haberman, APC, M7 e PLAT não exibem quaisquer padrões sistemáticos ou homogeneizações; tais modelos demonstram que são capazes de descrever as características da população estudada. Enquanto o modelo CBD demonstra padrões sistemáticos em torno da década de 2010, para todas as idades, o que implica incapacidade para descrever todas características da população estudada.

Esse resultado torna-se mais evidente quando se analisa a Figura 16, em que os *scatter plots* são exibidos. Os modelos Lee-Carter, Renshaw e Haberman, APC, M7 e PLAT também não apresentam a formação de padrões para a idade, período e coorte; para o modelo CBD, é notável a formação de padrão nos resíduos, contudo, somente para a idade.

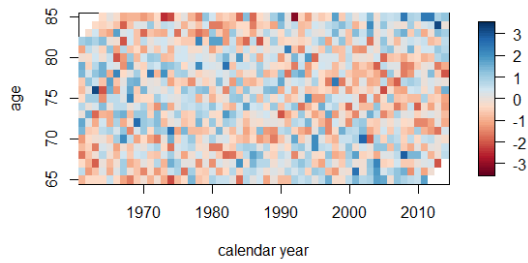
Figura 15 - Heat-maps dos resíduos para os modelos ajustados para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.



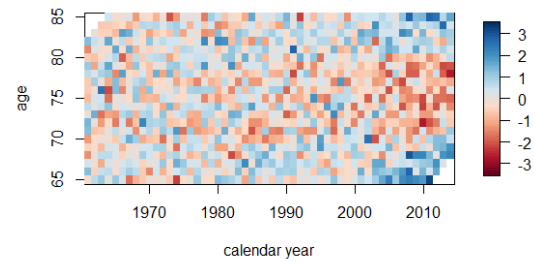
(a) Lee-Carter



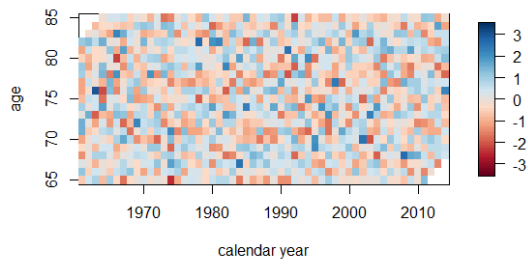
(b) Renshaw e Haberman



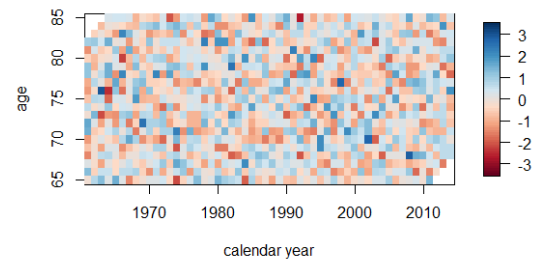
(c) APC



(d) CBD



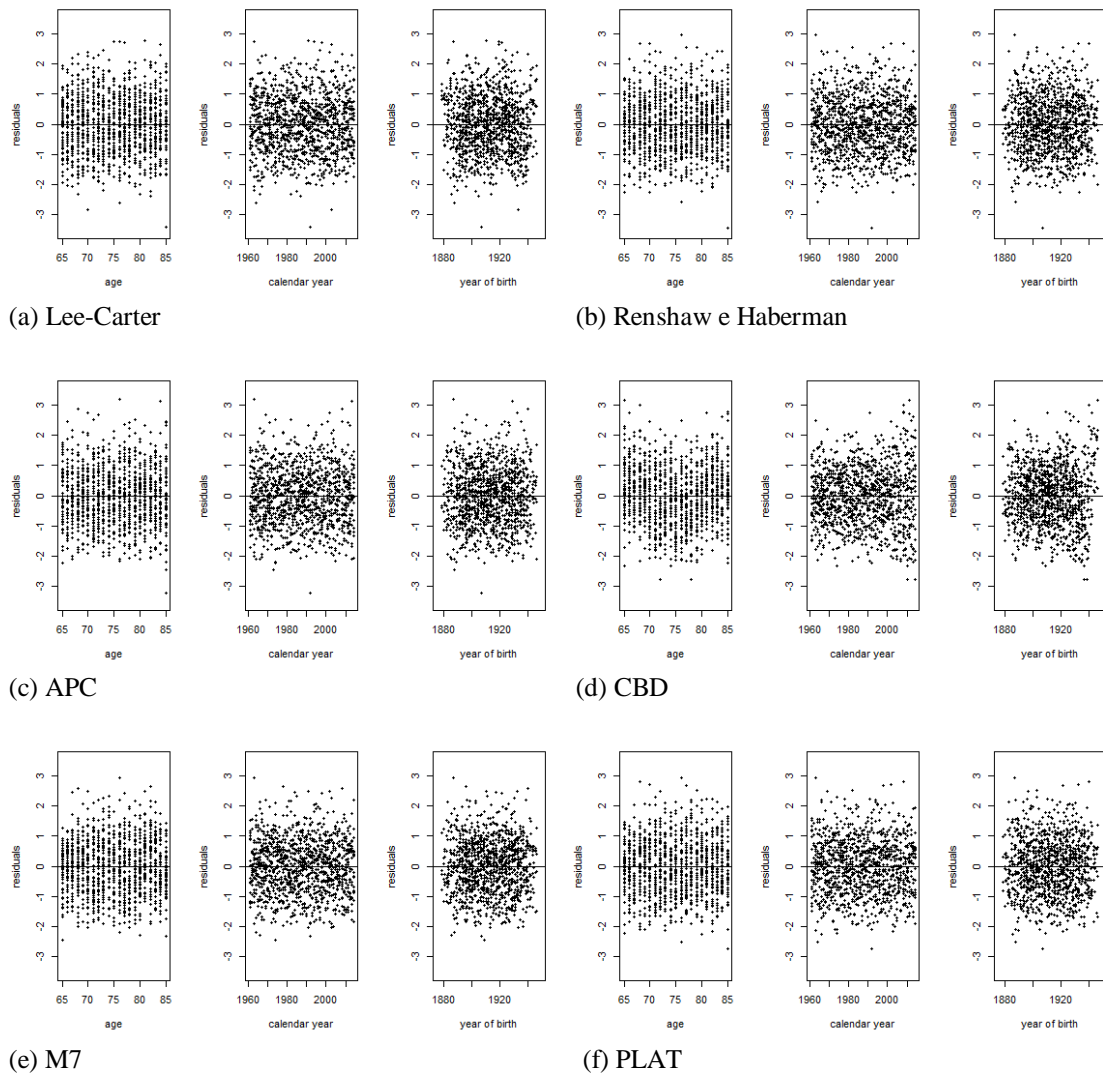
(e) M7



(f) PLAT

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 - Scatter plots dos resíduos para os modelos ajustados para a população masculina da Suíça para a coorte com indivíduos com 65-85 anos no período de 1961-2014.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para tanto, na próxima seção é realizada a projeção da mortalidade.

4.1.8 Projeção da mortalidade

Os modelos Lee-Carter, Renshaw e Haberman, APC, M7 e PLAT que não apresentaram problemas na análise dos resíduos podem ser aplicados para a projeção da mortalidade. Todavia, para a escolha do melhor modelo indicado para projetar a mortalidade da população considera-se o Critério de Informação Bayesiano (BIC), conforme pode ser verificado na Tabela 1.

Tabela 1 - Critério de seleção de modelos BIC.

Modelo	BIC	Ranking
LC	11335,52	1
CBD	11613,25	2
RH	11646,15	3
APC	11668,58	4
PLAT	11823,76	5
M7	12057,76	6

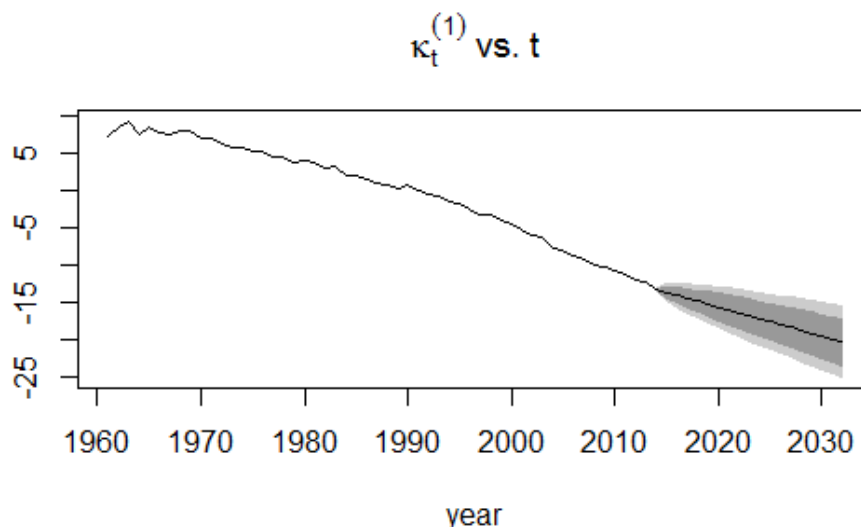
Fonte: Elaborado pelo autor.

O modelo que apresentou melhor ajuste, baseado na análise dos resíduos e no critério de seleção de modelos BIC, foi o Lee-Carter.

Para projetar a mortalidade da população masculina, a partir do modelo Lee-Carter, é utilizada a componente $k_t^{(1)}$ como variável de análise (as componentes α_x e β_x são dadas como constantes, variando somente $k_t^{(1)}$) e o modelo ARIMA do passeio aleatório com deslocamento (0,1,0), compreendendo o horizonte temporal de 2015 a 2033. Contudo, é importante lembrar que o período de interesse para o presente trabalho é de 2018 a 2027, conforme mencionado na metodologia.

A Figura 17 demonstra a projeção da mortalidade para o período de 2015 a 2033, e o período empregado para a projeção que inicia em 1961, e finaliza em 2014.

Figura 17 - Projeção da mortalidade para o período de 2015 a 2033.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode ser visualizado, a mortalidade da população em estudo é projetada com tendência decrescente ao longo do tempo, o que está condizente com o padrão observado na

mortalidade no período de tempo compreendido entre 1961 a 2014, que também apresenta tendência de mortalidade decrescente. Isso implica na conclusão de que os padrões de mortalidade, de acordo com a projeção futura da população, continuam em queda. O intervalo de confiança plotado é baseado na variância estimada do erro do modelo ajustado.

O ajuste do modelo foi validado a partir da análise dos resíduos, o qual foi diagnosticado como ruído branco por meio do teste de Box-Pierce, sendo significativo a 5% com valor-p de 0,0204. Dessa forma, pode-se concluir que o modelo ARIMA (0,1,0) do passeio aleatório com deslocamento, é robusto para realizar as projeções futuras da mortalidade.

Cabe destacar que os resultados discutidos nesta seção, desde o ajuste dos modelos até a projeção da mortalidade, estão em consonância com os trabalhos de Lee e Carter (1992), Wang (2007), Torres (2009), Lovasz (2010), Pedrosa (2011), Cairns et al. (2011), Gaille (2012), Wang, Liou e Wu (2012), Li, Lee e Gerland (2013), Guan (2014), Wan e Bertschi (2015), Villegas, Millossovich, Kaishev (2017) e Levantessi e Menzietti (2017).

Dessa forma, encerram-se as discussões dos resultados encontrados para os modelos de mortalidade e sua respectiva projeção. Na próxima seção serão apresentadas as discussões referente aos resultados da precificação do máximo valor do prêmio e do *spread* para a transferência do risco de longevidade, s-forward, sob as regulações do Solvência II.

4.2 Máximo valor do prêmio de risco

Nesta seção serão apresentados os resultados numéricos e suas respectivas discussões para o prêmio máximo π^{max} e o *spread* δ^{max} requerido pela contraparte. Nas Tabelas 2 e 3, estão representados os valores para π^{max} e δ^{max} , respectivamente. Os valores observados são resultados da aplicação da metodologia proposta, no período de 2018 até 2027, para coortes de indivíduos com idade de 65 a 85 anos e contratos com maturidade de 1 a 10 anos.

De maneira geral, os valores do prêmio máximo e do *spread* aumentam de acordo com a evolução do tempo de maturidade do contrato e das coortes, demonstrando que os valores aumentam devido à incerteza crescente das probabilidades de sobrevivência para períodos de tempo mais longos. Nesse sentido, a entidade que deseja transferir o risco de longevidade deverá estar disposta a pagar um prêmio maior quando a maturidade e as coortes aumentam; todavia, a contraparte exige um *spread* maior. Ressalta-se que os padrões dos valores

encontrados neste trabalho estão de acordo com o observado em Levantessi e Menziatti (2017).

Tabela 2 - Valores de π^{max} para diferentes coortes e maturidades.

π^{max}						
T	65	66	67	68	69	70
1	0.000006981719	0.000007562463	0.000008309689	0.000009458528	0.0000104902	0.00001154436
2	0.00002400646	0.00002627233	0.000029567	0.00003303103	0.00003642214	0.00003942414
3	0.00005504667	0.00006148002	0.00006860355	0.00007596175	0.00008262553	0.00009050823
4	0.0001060262	0.0001179962	0.0001307407	0.0001428995	0.0001566272	0.0001754424
5	0.0001817901	0.0002012754	0.000220531	0.0002421595	0.000270428	0.0003017085
6	0.0002879768	0.0003158536	0.0003471879	0.0003872327	0.000431434	0.0004807644
7	0.0004291587	0.0004719142	0.0005257896	0.0005855007	0.0006517692	0.0007303628
8	0.0006165369	0.0006861959	0.0007637252	0.00084975	0.0009510419	0.001069019
9	0.0008685712	0.0009661177	0.001074428	0.001201563	0.001348859	0.001508602
10	0.001192729	0.00132574	0.001481565	0.001661637	0.001857458	0.002083039
T	71	72	73	74	75	
1	0.00001239745	0.00001371121	0.00001580227	0.00001751097	0.00001957643	
2	0.00004322629	0.0000491876	0.00005513008	0.00006141987	0.00006941291	
3	0.0001019294	0.0001142849	0.0001277267	0.0001437743	0.0001630915	
4	0.0001961415	0.0002192421	0.000246741	0.0002789776	0.0003121047	
5	0.0003366782	0.0003785417	0.0004275033	0.0004783172	0.0005374262	
6	0.0005395725	0.0006085375	0.0006812758	0.000765099	0.0008710497	
7	0.0008222505	0.0009205995	0.001033865	0.001174702	0.001348891	
8	0.00119629	0.001343152	0.001524125	0.001745985	0.001986535	
9	0.001692825	0.001918591	0.002193975	0.002494016	0.002851142	
10	0.002357853	0.002692003	0.003058076	0.00349169	0.003977106	
T	76	77	78	79	80	
1	0.00002223168	0.00002536478	0.00002789861	0.00003158208	0.00003710004	
2	0.00007900286	0.00008785351	0.00009860206	0.0001144461	0.0001345192	
3	0.000182186	0.0002045555	0.000235077	0.0002745986	0.000312762	
4	0.000350668	0.0004012021	0.0004654445	0.0005311581	0.0006114295	
5	0.000613201	0.0007082818	0.0008076384	0.0009288478	0.001060888	
6	0.001002894	0.001142781	0.001311816	0.001498464	0.001722293	
7	0.001535966	0.001760462	0.002009442	0.002307518		
8	0.00227386	0.002593624	0.00297457			
9	0.003249856	0.003723007				
10	0.004551491					
T	81	82	83	84	85	
1	0.00004369882	0.00004855572	0.00005687405	0.00006439142	0.00007536183	
2	0.0001520385	0.00017516	0.0002001556	0.0002317713		
3	0.0003599116	0.0004102808	0.0004743647			
4	0.0006975799	0.0008034428				
5	0.001220147					

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3 - Valores de δ^{\max} para diferentes coortes e maturidades.

δ^{\max}						
T	65	66	67	68	69	70
1	0.00006981694	0.000007562434	0.000008309655	0.000009458483	0.00001049015	0.0000115443
2	0.00001200309	0.00001313599	0.00001478328	0.00001651524	0.00001821074	0.00001971168
3	0.00001834838	0.00002049271	0.00002286707	0.00002531962	0.00002754071	0.00003016804
4	0.00002650513	0.00002949731	0.00003268303	0.00003572231	0.00003915373	0.00004385675
5	0.00003635471	0.00004025103	0.00004410135	0.00004842604	0.00005407829	0.00006033261
6	0.00004798923	0.00005263395	0.0000578546	0.0000645263	0.00007189016	0.00008010814
7	0.00006129523	0.00006740041	0.00007509306	0.00008361848	0.00009307956	0.0001042995
8	0.00007704336	0.00008574507	0.00009542921	0.0001061736	0.0001188237	0.000133556
9	0.00009646602	0.0001072946	0.0001193168	0.0001334269	0.0001497723	0.0001674961
10	0.0001192019	0.0001324862	0.0001480469	0.0001660258	0.0001855735	0.0002080873
T	71	72	73	74	75	
1	0.00001239737	0.0000245932	0.00002756428	0.00001751082	0.00001957624	
2	0.00002161268	0.00001371111	0.00001580214	0.00003070899	0.00003470525	
3	0.00003397473	0.00003809277	0.00004257286	0.00004792132	0.0000543594	
4	0.00004903057	0.00005480452	0.00006167763	0.00006973466	0.00007801401	
5	0.00006732431	0.00007569402	0.00008548239	0.00009564056	0.0001074564	
6	0.0000899045	0.0001013921	0.0001135073	0.0001274677	0.0001451118	
7	0.0001174161	0.0001314537	0.0001476187	0.000167716	0.0001925689	
8	0.0001494468	0.0001677813	0.0001903706	0.0002180578	0.0002480706	
9	0.0001879327	0.0002129725	0.0002435079	0.0002767679	0.0003163428	
10	0.0002355078	0.0002688386	0.000305341	0.0003485608	0.0003969218	
T	76	77	78	79	80	
1	0.00002223144	0.00002536446	0.00002789822	0.00003158158	0.00006725507	
2	0.00003949987	0.00004392483	0.0000492986	0.00005721975	0.00003709935	
3	0.00006072315	0.00006817818	0.000116334	0.0000915203	0.0001042377	
4	0.00008765163	0.0001002804	0.0000783498	0.0001327543	0.0001528107	
5	0.0001226026	0.0001416062	0.0001614625	0.0001856833	0.000212065	
6	0.0001670653	0.0001903548	0.0002184928	0.0002495571	0.0002868018	
7	0.0002192554	0.0002512734	0.0002867751	0.0003292656		
8	0.0002839098	0.0003237833	0.0003712693			
9	0.0003605096	0.0004128993				
10	0.0004541164					
T	81	82	83	84	85	
1	0.00004369786	0.00008757235	0.00005687243	0.00006438935	0.000075359	
2	0.00007601346	0.00004855454	0.0001000678	0.0001158722		
3	0.0001199489	0.0001367322	0.0001580841			
4	0.0001743342	0.00020078				
5	0.0002438807					

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para maior compreensão dos resultados encontrados propõe-se de exemplo o seguinte cenário hipotético. Existe um fundo de pensão que possui em um plano de benefício indivíduos que representam risco de longevidade, ou seja, poderão viver além do que o esperado pelo plano e impactar negativamente nos passivos atuariais. O fundo deseja transferir o risco de longevidade para todos os indivíduos inclusos no plano de benefício.

Sendo assim, para um contrato com maturidade T anos, o fundo irá pagar um montante equivalente à multiplicação da quantidade de beneficiários Q_x , o valor pago por beneficiário B e o prêmio máximo π^{max} , conforme pode ser observado na fórmula abaixo

$$Q_x * B * \pi^{max} \quad (27)$$

Assume-se que para o presente fundo o número de beneficiários é de 1 mil e paga-se o valor de 1 unidade monetária por beneficiário e mantêm-se constantes; o que altera para cada contrato é a maturidade e as coortes. Portanto, para um contrato com maturidade T igual a 5 anos e uma coorte com indivíduos de 65 anos, o valor a ser pago pelo fundo é de $1000 * 1 * 0,0001817901$, o que representa 0,1817901 unidades monetárias.

A partir desse resultado pode-se afirmar que o máximo valor que o fundo de pensão está disposto a pagar pelo prêmio de um s-forward é de 0,1817901 unidades monetárias por ano. O mesmo se aplica para diferentes cenários, com diferentes maturidades e valores para π^{max} .

No mesmo sentido, o *spread* δ^{max} requerido pela contraparte recebe a mesma interpretação, o que altera é o valor referente ao *spread*. Para o mesmo cenário utilizado acima, a aplicação seria da seguinte forma: $1000 * 1 * 0,00003635471 = 0,03635471$; o valor requerido pela contraparte que irá receber a transferência do risco de longevidade é 0,03635471 unidades monetárias por ano.

5. Considerações Finais

Essa dissertação teve como objetivo calcular o valor máximo do prêmio de risco, a partir de um *s-forward*, que uma entidade está disposta a pagar para transferir o risco de longevidade, levando em consideração as regulações estabelecidas pelo Solvência II. Adicionalmente, também foi calculado o *spread* requerido pela contraparte que realiza os pagamentos flutuantes. O estudo foi baseado na proposta metodológica de Levantessi e Menzietti (2017).

Para atingir o objetivo do trabalho, foi necessário realizar a modelagem da mortalidade da população selecionada por meio dos modelos de mortalidades estocásticas generalizados de idade-período-coorte (GAPC), que são: Lee-Carter, Cairns-Blake-Dowd (CBD), APC, Renshaw e Haberman (RH), M7 e Plat. O ajuste dos modelos permitiu a compreensão do comportamento da mortalidade, avaliar a qualidade do ajuste e selecionar o modelo Lee-Carter para realizar a projeção da mortalidade e as demais etapas do trabalho.

Os valores obtidos para o prêmio máximo seguem padrões coerentes, pois crescem simultaneamente com o tempo e as idades. Isto é, demanda do fundo de pensão ou da seguradora maiores valores para realizar a transferência do risco de longevidade, com contratos que exigem tempo de maturidade mais longos e idades mais avançadas. A proposta desta pesquisa e os resultados encontrados, ainda que preliminares, fornecem um ponto de partida para o desenvolvimento de pesquisas científicas que possam contribuir para a evolução do mercado de transferência do risco de longevidade no Brasil.

Para trabalhos futuros, recomenda-se a aplicação de outras metodologias de precificação e a comparação entre estas; aplicação de diferentes taxas de custo de capital; desenvolvimento de uma interface gráfica utilizando o pacote Shiny do Rstudio.

6. Referências

- ANBIMA. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIROS E DE CAPITAIS. Estrutura a termo das Taxas de Juros Estimada. Disponível em: < http://www.anbima.com.br/est_termo/CZ.asp>. Acesso em: 01 mar 2018.
- ANDRADE, M. M. Introdução à metodologia do trabalho científico. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2009. 160 p.
- VILLEGAS, A. M., MILLOSSOVICH, P., KAISHEV, V. K. StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling. R package version 0.4.0. 2017. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=StMoMo>
- BANKS, E. **Alternative risk transfer: integrated risk management through insurance, reinsurance, and the capital markets**. John Wiley & Sons, 2004.
- BARRIEU, P. et al. Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and main challenges. **Scandinavian actuarial journal**, v. 2012, n. 3, p. 203-231, 2012.
- BIFFIS, E.; DENUIT, M.; DEVOLDER, P. Stochastic mortality under measure changes. **Scandinavian Actuarial Journal**, v. 2010, n. 4, p. 284-311, 2010.
- BISSETTI, E.; FAVERO, C. A. Measuring the impact of longevity risk on pension systems: The case of Italy. **North American Actuarial Journal**, v. 18, n. 1, p. 87-103, 2014.
- BLAKE, D. et al. Longevity bonds: financial engineering, valuation, and hedging. **Journal of Risk and Insurance**, v. 73, n. 4, p. 647-672, 2006.
- BLAKE, D.; BOARDMAN, T.; CAIRNS, A. Sharing longevity risk: Why governments should issue longevity bonds. **North American Actuarial Journal**, v. 18, n. 1, p. 258-277, 2014.
- BLAKE, D.; BURROWS, W. Survivor bonds: Helping to hedge mortality risk. **Journal of Risk and Insurance**, p. 339-348, 2001.
- BOX, G. E. P; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. Time series analysis: forecasting and control. John Wiley & Sons, 2008.
- BRAVO, J. M. Tábuas de mortalidade contemporâneas e prospectivas: Modelos estocásticos, aplicações actuariais e cobertura do risco de longevidade. **Universidade de Évora, Évora**, 2007.

BROUHNS N.; DENUIT M.; VERMUNT J. A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables." *Insurance: Mathematics and Economics*. 2002. 31(3),373-393.

CAIRNS A. J. G, BLAKE D., DOWD K., COUGHLAN G. D., EPSTEIN D., KHALAF-ALLAH M. Mortality Density Forecasts: An Analysis of Six Stochastic Mortality Models." *Insurance: Mathematics and Economics*. 2011. 48(3), 355-367.

CAIRNS, A. J. G et al. A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, v. 13, n. 1, p. 1-35, 2009.

CAIRNS, A. J. G et al. Bayesian stochastic mortality modelling for two populations. **ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA**, v. 41, n. 1, p. 29-59, 2011.

CAIRNS, A. J. G; BLAKE, D.; DOWD, K. A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. **Journal of Risk and Insurance**, v. 73, n. 4, p. 687-718, 2006.

CARLOS, R. F. C. P. **Cobertura do risco de longevidade para a população portuguesa no mercado obrigacionista**. 2011. Tese de Doutorado. Instituto Superior de Economia e Gestão.

CNSEG. Confederação Nacional das Empresas de Seguros Gerais. Notícias. 2010.

COUGHLAN, G. D. Longevity Risk Transfer: Indices and Capital Market Solutions. In *The Handbook of Insurance Linked Securities*, edited by P. M. Barrieu and L. Albertini, pp. 261–281. 2009. London: John Wiley.

COUGHLAN, G. et al. Longevity risk and hedging solutions. In: **Handbook of Insurance**. Springer New York, 2013. p. 997-1035.

COUGHLAN, G. Longevity risk transfer: Indices and capital market solutions. **The Handbook of Insurance-Linked Securities**, p. 261-281, 2009.

CRAWFORD, T; DE HAAN, R; RUNCHEY, C. Longevity risk quantification and management: a review of relevant literature. **Society of Actuaries**, v. 73, 2008.

CURRIE I. D. Smoothing and Forecasting Mortality Rates with P-Splines. 2006. Disponível em: <http://www.macs.hw.ac.uk/~iain/research/talks/Mortality.pdf>.

- CURRIE, I. D. On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, v. 2016, n. 4, p. 356-383, 2016.
- DAHL, M.; MELCHIOR, M.; MØLLER, T. On systematic mortality risk and risk-minimization with survivor swaps. *Scandinavian Actuarial Journal*, v. 2008, n. 2-3, p. 114-146, 2008.
- DEEPASK. Ranking expectativa de vida. 2012. Disponível em: <http://www.deepask.com.br/goes?page=Veja-ranking-de-paises-pela-expectativa-de-vida>
Acesso em: 01 mar 2018.
- DONOHUE, J.; MACLEAN, K.; PEARD, N. Longevity Securitisation: Specific Challenges and Transactions. *The Handbook of Insurance-Linked Securities*, p. 245-259, 2009.
- EIOPA. 2014. Technical Specifications for the Solvency II Preparatory Phase (part I), 2014.
- GAILLE, S. Forecasting mortality: when academia meets practice. *European Actuarial Journal*, v. 2, n. 1, p. 49-76, 2012.
- GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010. 200 p.
- GUAN, T. Multiple-Decrement Compositional Forecasting with the Lee-Carter Model. 2014. Department of Statistics and Actuarial Science. Faculty of Science.
- GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. *Econometria Básica-5*. McGraw Hill Brasil, 2011.
- HLD. The Human Life-Table Database. 2017. <http://www.lifetable.de/>
- HMD. Human Mortality Database. 2017. University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Disponível em: www.mortality.org.
- HUNT A.; BLAKE D. 2015. On the Structure and Classification of Mortality Models Mortality Models. Pension Institute Working Paper.
- HYNDMAN R. J. 2017. *_forecast: Forecasting functions for time series and linear models_*. R package version 8.2. Disponível em: <http://pkg.robjhyndman.com/forecast>.
- HYNDMAN R. J.; KHANDAKAR, Y (2008). “Automatic time series forecasting: the forecast package for R.” *_Journal of Statistical Software_*, *26*(3), pp. 1-22. <URL: <http://www.jstatsoft.org/article/view/v027i03>>.

IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Tábuas Completas de Mortalidade – Homens. 2015. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/populacao/9126-tabuas-completas-de-mortalidade.html?=&t=downloads>

Acesso em: 01 mar 2018.

IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Expectativa de vida. 2017.

LEE, R. D.; CARTER, L. R. Modeling and forecasting US mortality. **Journal of the American statistical association**, v. 87, n. 419, p. 659-671, 1992.

LEVANTESI, S; MENZIETTI, M. Maximum Market Price of Longevity Risk under Solvency Regimes: The Case of Solvency II. **Risks**, v. 5, n. 2, p. 29, 2017.

LI, N; LEE, R; GERLAND, P. Extending the Lee-Carter method to model the rotation of age patterns of mortality decline for long-term projections. **Demography**, v. 50, n. 6, p. 2037-2051, 2013.

LOVASZ, E. An Alternative Way of Forecasting the Cohort Effect. 2010. Disponível em: <https://ssrn.com/abstract=1589342>.

MARTINS, G. D. A.; THEÓPHILO, Carlos Renato. Metodologia da Investigação Científica. **São Paulo: Atlas**, 2009.

MEIRELLES et al. Transferência de risco de longevidade. R. Bras. Risco e Seg., Rio de Janeiro, v. 12, n. 21, p. 1-26, abr. 2016/set. 2016

MEYRICKE, R.; SHERRIS, M. Longevity risk, cost of capital and hedging for life insurers under Solvency II. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 55, p. 147-155, 2014.

MILLOSOVICH, P; VILLEGAS, A. M.; KAISHEV, V. K. StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling. *Journal of Statistical Software*, 2017.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. Análise de séries temporais. Blucher, 2006.

NEVES, C. S. Swap de Mortalidade. Revista Brasileira de Risco e Seguro, v.4, nº 8 p. 113-128. 2008.

NGAI, A.; SHERRIS, M. Longevity risk management for life and variable annuities: The effectiveness of static hedging using longevity bonds and derivatives. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 49, n. 1, p. 100-114, 2011.

- PEDROSA, A. P. M. A. et al. **Modelação e projeção estocástica da população portuguesa para 2050**. 2011. Tese de Doutorado. Universidade de Lisboa.
- PLAT, Richard. On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 45, n. 3, p. 393-404, 2009.
- PLAT, R. One-year value-at-risk for longevity and mortality. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 49, n. 3, p. 462-470, 2011.
- RENSHAW, A. E.; HABERMAN, S. A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 38, n. 3, p. 556-570, 2006.
- RICHARDS, S. J.; CURRIE, I. D.; RITCHIE, G. P. A value-at-risk framework for longevity trend risk. **British Actuarial Journal**, v. 19, n. 01, p. 116-139, 2014.
- HYNDMAN R. J. with contributions from Heather Booth, Leonie Tickle and John Maindonald. (2017). *demography: Forecasting Mortality, Fertility, Migration and Population Data*. R package version 1.20. <https://CRAN.R-project.org/package=demography>
- RSTUDIO TEAM. RStudio: Integrated Development for R. RStudio, Inc., Boston, MA URL <http://www.rstudio.com/>, 2015.
- TORRES, A. R. C. P. Algumas projecções de mortalidade em Portugal. 2009. Tese de Doutorado. Universidade de Lisboa.
- VAN DELFT, K. *Valuation of Longevity Swaps in a Solvency II Framework*. 2012.
- VAN ROOIJEN, B. **Hedging Longevity Risk**. Erasmus University, 2013.
- VAUGHAN, E. J.; VAUGHAN, T. *Fundamentals of risk and insurance*. John Wiley & Sons, 2007.
- VERGARA, S. C. *Projetos e relatórios de pesquisa em administração*. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2008. 94 p.
- VILLEGAS, A. R. *Mortality: modelling, socio-economic differences and basis risk*. 2015. Tese de Doutorado. City University London.

WAN, C.; BERTSCHI, L.. Swiss coherent mortality model as a basis for developing longevity de-risking solutions for Swiss pension funds: A practical approach. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 63, p. 66-75, 2015.

WANG, C.; LIOU, Y; WU, C. Using stochastic mortality models to measure longevity risk in developed countries. **International Research Journal of Finance and Economics**, 2012.

WANG, J. Z. **Fitting and Forecastin Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model**. Matematisk statistik, Stockholms universitet, 2007.

YANG, Y; FU, W. J.; LAND, K. C. 2. A methodological comparison of age-period-cohort models: The intrinsic estimator and conventional generalized linear models. **Sociological methodology**, v. 34, n. 1, p. 75-110, 2004.