



FELIPE AUGUSTO FERNANDES

**MODELO DE VON BERTALANFFY PARA A DESCRIÇÃO DO
CRESCIMENTO DE MAMÍFEROS DE CORTE**

LAVRAS – MG

2019

FELIPE AUGUSTO FERNANDES

**MODELO DE VON BERTALANFFY PARA A DESCRIÇÃO DO CRESCIMENTO DE
MAMÍFEROS DE CORTE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Tales Jesus Fernandes

Orientador

LAVRAS – MG

2019

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Fernandes, Felipe Augusto

Modelo de von Bertalanffy para a descrição do crescimento
de Mamíferos de Corte / Felipe Augusto Fernandes. – Lavras :
UFLA, 2019.

62 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico) –Universidade Federal
de Lavras, 2019.

Orientador: Prof. DSc. Tales Jesus Fernandes.

Bibliografia.

1. Dissertação. 2. Modelo de von Bertalanffy. 3. Mamí-
feros de corte . 4. Curva de Crescimento. I. Fernandes, Tales
Jesus. II. Título.

FELIPE AUGUSTO FERNANDES

**MODELO DE VON BERTALANFFY PARA A DESCRIÇÃO DO CRESCIMENTO DE
MAMÍFEROS DE CORTE
GROWTH CURVES OF MEAT-PRODUCING MAMMALS BY VON BERTALANFFY
MODEL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 21 de fevereiro de 2019.

Prof. DSc. Joel Augusto Muniz UFLA
Prof. DSc. Adriele Aparecida Pereira UNIFAL

Prof. DSc. Tales Jesus Fernandes
Orientador

**LAVRAS – MG
2019**

*À Deus em primeiro lugar, pois sem Ele nada seria possível.
A minha mãe Maria de Fátima, com amor, pelo carinho e incentivo que sempre recebi.*
DEDICO

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por estar sempre iluminando o meu caminho;

À minha mãe e ao meu padrasto (in memorian), que sempre lutaram comigo, pelo carinho e por acreditarem nesta conquista;

À minha irmã e sobrinha, agradeço pela torcida;

Ao professor Dr. Tales Jesus Fernandes, pela orientação deste trabalho, pela paciência, disponibilidade e dedicação de sempre;

Aos excelentes professores do DES-UFLA, pelas grandes contribuições para a minha formação, em especial aos professores Dr. Joel Muniz e Dr. Daniel Ferreira;

A professora Dra. Adriele Pereira (UNIFAL) pelas relevantes contribuições como banca avaliadora deste trabalho, e a professora Dra. Graziela Gouvêa (UFOP) por me incentivar a ingressar na pós-graduação;

Meu eterno agradecimento a todos os meus amigos, que deram uma contribuição valiosa para a minha jornada acadêmica. Obrigado pelos conselhos, palavras de apoio, ajudas, puxões de orelha e risadas, em especial aos amigos do Grupo de Estudos em Regressão Não Linear.

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq);

À Universidade Federal de Lavras e seus funcionários pelo ensino gratuito e de qualidade.

*"Há uma força motriz mais poderosa que o vapor, a eletricidade e a energia atômica: a
VONTADE."
(Albert Einstein)*

RESUMO

Dentre as espécies de animais criados para corte, os mamíferos se destacam por seu grande protagonismo econômico e nutricional. Modelar o crescimento dessas espécies pode facilitar a tomada de decisões relativas ao seu manejo, programas de melhoramento genético, entre outros, e para isso os modelos de regressão não linear tem sido frequentemente utilizados. Dentre os modelos não lineares, o de von Bertalanffy tem sido muito aplicado em diversas áreas, com diferentes parametrizações. Comumente, este modelo tem sido utilizado com um valor alométrico de $m = 2/3$, no entanto, para mamíferos acredita-se que este valor possa ser $m = 3/4$. Assim, o objetivo deste trabalho foi avaliar o efeito da parametrização e a aplicação de diferentes valores alométricos para obter o ajuste mais adequado do modelo von Bertalanffy na descrição da curva de crescimento de mamíferos de corte. Os dados analisados foram obtidos de instituições de pesquisas e da literatura, os quais são referentes ao peso de mamíferos de corte ao longo da idade. Utilizou-se o software estatístico R para as análises. Perante os avaliadores de qualidade utilizados, o modelo de von Bertalanffy com valor alométrico de $m = 3/4$ forneceu os melhores ajustes para a descrição do crescimento dos mamíferos em estudo (bovinos, coelhos, ovinos e suínos). Este mesmo modelo, obteve inclusive menores valores da não linearidade intrínseca, fornecendo assim estimativas mais confiáveis dos parâmetros.

Palavras-chave: Alometria, Não Linear, Parametrização, Regressão.

ABSTRACT

Among the species of animals reared for meat production, the mammals stand out for their great economic and nutritional protagonism. Modeling the growth of these species can facilitate decision making regarding their management, breeding programs, among others, and for this, nonlinear regression models have been frequently used. Among the non-linear models, the von Bertalanffy model has been very applied in several areas, with different parameterizations. This model has been commonly used with an allometric value of $m = 2/3$, however, for mammals it is believed that this value can be $m = 3/4$. The goal of this study was to evaluate the influence of the parameterization effect and the application of different allometric values to obtain the most adequate fit of the von Bertalanffy model in the description of the growth curve of meat-producing mammals. The data analyzed were obtained from research institutions and the literature, which refer to the weight of meat-producing mammals along the age. The statistical software R was used for the analyses. Considering the quality evaluators used, the Von Bertalanffy model with allometric value of $m = 3/4$ provided the best fit for the description of the growth of the mammals under study.

Keywords: Allometry, Nonlinear, Parameterization, Regression.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Perfil da cadeia produtiva da pecuária de corte brasileira em 2015.	14
Figura 2.2 – Representação da curva sigmoidal do modelo von Bertalanffy	26
Figura 4.1 – Ajuste dos três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de Bovinos.	49
Figura 4.2 – Ajuste dos três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de Coelhos.	49
Figura 4.3 – Ajuste dos três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de Ovinos.	50
Figura 4.4 – Ajuste dos três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de Suínos.	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Estatísticas descritivas dos dados de peso dos mamíferos de corte em estudo.	44
Tabela 4.2 – Testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados.	45
Tabela 4.3 – Parâmetros estimados com AR(1), quando necessário, para os três modelos von Bertalanffy, em estudo, para a descrição do crescimento do peso de mamíferos de corte.	46
Tabela 4.4 – Avaliadores de qualidade de ajuste para os três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de mamíferos de corte. . .	47

SUMÁRIO

1	Introdução	10
2	Referencial Teórico	12
2.1	Mamíferos de corte	12
2.1.1	Bovinos	13
2.1.2	Coelhos	14
2.1.3	Ovinos	16
2.1.4	Suínos	17
2.2	Modelos de regressão	18
2.3	Modelo de regressão não linear	20
2.4	Aplicação dos modelos não lineares	21
2.5	Modelo de von Bertalanffy	23
2.6	Método de mínimos quadrados	26
2.7	Métodos iterativos	28
2.8	Avaliadores de qualidade de ajuste	29
2.8.1	Coefficiente de determinação	29
2.8.2	Crítério de informação de Akaike (AIC)	30
2.8.3	Curvaturas de Bates e Watts	30
3	Material e Métodos	33
3.1	Material	33
3.2	Metodologia	33
3.2.1	Ajuste dos modelos	33
3.2.2	Método iterativo de Gauss-Newton	40
3.2.3	Análise de resíduos	42
3.2.4	Avaliadores de qualidade de ajuste para seleção de modelos	43
4	Resultados e Discussão	44
5	Conclusão	52
6	Referências	53
	APENDICE A – Comandos R	59

1 INTRODUÇÃO

Com o aumento da população e do mercado, a produção de animais para abate tem aumentado, sendo frequentemente tema de pesquisas, que buscam otimizar e entender o processo produtivo. Dentre os animais de corte mais estudados, estão os mamíferos, devido a sua grande importância econômica e nutritiva. Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2018), a produção no segundo trimestre de 2018 de bovinos e suínos cresceu comparado com o mesmo trimestre do ano anterior, o que confirma o crescimento do setor.

De acordo com a Organização das Nações Unidas (2018), a população mundial terá cerca de 10 bilhões de habitantes até 2050. Com isso, a demanda por carne deverá aumentar, porém ocupando-se praticamente o mesmo espaço físico atual, uma vez que, existe também uma crescente preocupação como o meio ambiente. Desta forma, os produtores precisarão ser mais rentáveis e produtivos para conseguirem atender à necessidade mundial, o que torna necessário conhecer as curvas de crescimento destes animais, a fim de compreender o desenvolvimento dos mesmos para otimizar o processo produtivo.

As curvas de crescimento são resultado de medidas tomadas ao longo do tempo, e que podem caracterizar o desenvolvimento de algumas espécies animais. De acordo com Kshirsagar e Smith (1995) a premissa básica de um modelo de curva de crescimento é que existe uma relação funcional de um efeito de tratamento, o qual pode ser uma variável como ganho de peso, e o tempo, podendo-se modelar essa relação.

Assim, o estudo das curvas de crescimento destes animais por modelos não lineares é muito atraente, pois estes são flexíveis e resumem em poucos parâmetros, com interpretação biológica, as características de desenvolvimento da espécie. Na prática, esse conhecimento permite que sejam adotadas estratégias para potencializar ou atenuar determinadas características dos animais em estudo (FREITAS, 2005; CASSIANO; SÁFADI, 2015; SOUZA et al., 2017).

De acordo com von Bertalanffy (1938), curvas de crescimento do peso animal ao longo do tempo tem formato de "S", conhecidas também como curvas sigmóides ou sigmoidais. Vários autores, reafirmaram que o crescimento corporal da maioria das espécies animais pode ser descrito por uma curva sigmoide e, portanto, ajustado por modelos não lineares, que são bastante utilizados para um vasto número de aplicações em regressão (FREITAS, 2005; SILVA et al., 2011; CARNEIRO et al., 2014; TELEKEN et al., 2017; RODRIGUES et al., 2018).

O desenvolvimento animal está relacionado com a sua taxa metabólica, a qual influencia diretamente o peso, a forma, o tamanho e outras características corporais (VON BERTA-

LANFFY, 1957). Estas variações corporais de um indivíduo ao longo de sua ontogenia, pode ser mensurada pela alometria, por meio de um coeficiente alométrico m (FREITAS; CARREGARO, 2013).

A alometria proporciona uma descrição quantitativa da relação entre uma parte e o todo, sendo importante para agregar todas as informações em um único valor. Para o crescimento animal existe um conjunto de teorias na literatura que sugerem o valor $m = 2/3$ e outras que sugerem $m = 3/4$, no entanto, não há um consenso (SHI et al., 2014). Em seu artigo (1957), von Bertalanffy afirma que o valor alométrico $m = 2/3$ é adequado para o crescimento de peixes e crustáceos e sugere que para o crescimento de mamíferos seja utilizado $m = 3/4$.

Dentre os modelos não lineares mais utilizados na literatura, o modelo proposto por von Bertalanffy (1957), possui grande aplicabilidade, sendo um dos mais adequados para a descrição do crescimento de diversas raças animais, principalmente em situações nas quais o crescimento não é simétrico em relação ao ponto de inflexão. De modo geral, para o modelo de von Bertalanffy, o valor alométrico utilizado na literatura é $m = 2/3$ para a descrição de diversas espécies animais e até vegetais.

Além disso, a parametrização mais utilizada pelos autores não possui interpretação direta para todos os parâmetros, o que pode confundir os leitores, tornando o uso da regressão não linear mais complicada do que realmente é. Assim, a aplicação de uma reparametrização pode facilitar as interpretações do modelo, principalmente para pessoas que trabalham na prática. A utilização de reparametrizações é comum em modelos de regressão não linear de modo que os parâmetros são reorganizados para que tenham interpretações mais convenientes com a área de estudo em questão (ZEVIANI et al., 2012; FERNANDES et al., 2015).

O objetivo deste trabalho foi avaliar o efeito da parametrização do modelo de von Bertalanffy e o uso de diferentes valores alométricos para a descrição da curva de crescimento de mamíferos de corte (bovinos, coelhos, ovinos e suínos).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo será mostrada uma revisão de literatura sobre os mamíferos de corte, em especial as quatro espécies que serão analisadas neste trabalho. Em seguida, um histórico relacionado à modelos de regressão e ao modelo não linear de von Bertalanffy será apresentado com os principais conceitos utilizados na estimação dos parâmetros e seleção dos modelos.

2.1 Mamíferos de corte

Os mamíferos, em geral, são considerados de extrema importância para o ambiente, pois desempenham várias funções importantes para o funcionamento do ecossistema (PEREIRA, 2017). Na pecuária esta classe de animais tem extrema importância, sendo objeto de estudo em vários artigos científicos, uma vez que sua carne é a principal fonte de proteína consumida pelos humanos.

Com o aumento da população mundial apontado por várias instituições nacionais e internacionais e a crescente necessidade de preservação do meio ambiente, aumentar a produção de carne sem ampliar a área de criação é um desafio a ser enfrentado pelos produtores. Com isso, estes produtores precisarão se adequar à técnicas mais rentáveis e produtivas para conseguirem atender à necessidade mundial.

Uma das principais características de interesse dos pesquisadores é saber como se comporta o crescimento destes animais, considerando a heterogeneidade de raças e tratamentos aos quais eles são submetidos e, para isso são propostos modelos de regressão não lineares, como pode ser visto nos trabalhos de Silva et al. (2011), Neto et al. (2016), Souza et al. (2017), entre outros.

De acordo com Macedo (2009), o país tem experimentado um grande desenvolvimento tecnológico e produtivo no agronegócio, ampliando suas exportações e a renda dos produtores. Em que pese situações conjunturais de preços de commodities, insumos e produtos agrícolas com crises em algumas cadeias produtivas e categorias de produtores, é inegável o avanço da agropecuária no Brasil, o que reforça a relevância dos estudos na área.

A seguir, será dada uma informação mais detalhada, sobre os mamíferos que serão utilizados para as análises.

2.1.1 Bovinos

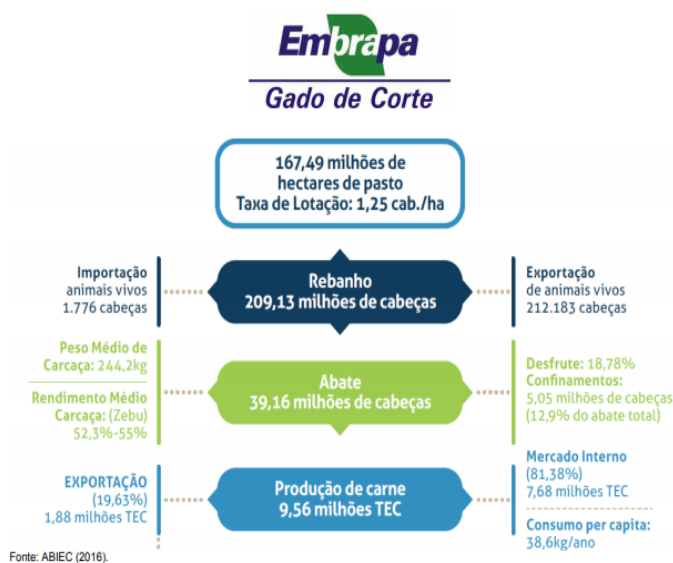
De acordo com Cezar et al. (2005), a bovinocultura de corte é desenvolvida em todos os Estados e ecossistemas do Brasil, com grande variabilidade, expressa na densidade dos bovinos nas diferentes regiões, nas taxas de crescimento dos rebanhos e nos sistemas de produção praticados. Estes desenvolvem as fases de cria, recria e engorda, de forma isolada ou em combinação e, utilizam pastagens nativas e cultivadas, associadas ou não à suplementação alimentar em pastagem e em confinamento.

As características de crescimento e reprodução são importantes na determinação da eficiência econômica de qualquer sistema de produção de bovinos de corte. Nesse contexto, as características de crescimento, pesos à desmama e ao sobreano e ganho de peso em diferentes idades destacam-se como critério de seleção, pois além de apresentarem herdabilidades que variam de média a alta magnitude, o que pode proporcionar maiores ganhos genéticos por geração, são bons indicadores do potencial de crescimento dos animais em idades mais avançadas (LAUREANO et al., 2011).

De acordo com Gomes et al. (2017), no ano de 2015 o Brasil se posicionou como o maior rebanho bovino (209 milhões de cabeças), o segundo maior consumidor (38,6 kg/habitante/ano) e o segundo maior exportador (1,9 milhões toneladas equivalente carcaça) de carne bovina do mundo, tendo abatido mais de 39 milhões de cabeças. Por ser dono de forte mercado consumidor interno (cerca de 80% do consumo), é dotado de expressivo e moderno parque industrial para processamento com capacidade de abate de quase 200 mil bovinos por dia. A exportação de carne bovina no ano citado, representava 3% das exportações brasileiras e um faturamento de 6 bilhões de reais e, em termos de produto interno bruto, representa 6% do PIB brasileiro ou 30% do PIB do Agronegócio, com um movimento superior a 400 bilhões de reais, que aumentou em quase 45% nos últimos 5 anos.

A Figura 2.1 ilustra as dimensões dos elos componentes da cadeia produtiva da pecuária de corte em 2015.

Figura 2.1 – Perfil da cadeia produtiva da pecuária de corte brasileira em 2015.



Fonte: (GOMES R. C.; FEIJÓ G. L. D.; CHIARI L., 2017)

Segundo o IBGE (2018), houve abate de 296,51 mil cabeças de bovinos a mais no 2º trimestre de 2018 em relação ao mesmo período do ano anterior, impulsionado por aumentos em 15 das 27 Unidades da Federação (UFs). Entre aquelas com participação acima de 1,0%, ocorreram aumentos em: Mato Grosso (+95,20 mil cabeças), Rio Grande do Sul (+54,25 mil cabeças), Rondônia (+48,74 mil cabeças), Paraná (+40,10 mil cabeças), São Paulo (+39,13 mil cabeças), Minas Gerais (+31,61 mil cabeças), Goiás (+21,10 mil cabeças), Santa Catarina (+11,47 mil cabeças), Maranhão (+6,50 mil cabeças) e Acre (+1,33 mil cabeças). Em contrapartida, as maiores reduções ocorreram em: Pará (-28,34 mil cabeças), Mato Grosso do Sul (-17,10 mil cabeças), Tocantins (-5,21 mil cabeças) e Bahia (-2,26 mil cabeças). No ranking das UFs, Mato Grosso continua liderando o abate de bovinos, com 15,1% da participação nacional, seguido por Mato Grosso do Sul (10,5%) e Goiás (10,4%).

2.1.2 Coelhos

De acordo com Ferreira et al. (2012), o coelho doméstico é um animal de origem europeia, bastante ativo, muito social e de hábitos noturnos. Apresenta muitas vantagens biológicas, tais como, adaptação ao consumo de alimentos fibrosos por ser herbívoro, mamífero, prolífero (parindo em média de 8 a 12 láparos em cada gestação), gestação curta (31 dias) e, possui ovulação induzida pelo ato sexual, e ainda, é considerado um ótimo produtor de carne.

Desde o fim da década de 1970, publica-se em livros que a carência de proteína animal constitui um dos graves problemas com que a humanidade debate e, alguns autores defendem a cunicultura, que é a parte da zootecnia que trata da criação de coelhos, como uma alternativa.

Cheeke (1987) cita a importância dos coelhos principalmente em alguns países da Europa, uma vez que este animal se apresenta como uma fonte de suplemento alimentar e é utilizado em pesquisas de laboratório. Este autor, traz as principais funções nutricionais dos coelhos (proteína, carboidrato, lipídio, mineral e vitamina) e faz um histórico com as primeiras pesquisas sobre a fonte nutricional destes.

Recentemente o coelho está tendo uma grande ascensão no mercado *pet*, setor que se encontra em destaque frente à crise econômica atual. Machado (2012), afirma que no Brasil os dados concretos sobre a produção de coelhos são escassos e pouco atualizados, sendo que, poucos estabelecimentos trabalham exclusivamente com coelhos.

A cunicultura trata da criação produtiva, econômica e racional do coelho doméstico. De acordo com o objetivo de cada produtor, a criação pode ser direcionada para: carne (caseira ou comercial); pele (artesanatos ou peleterias); pelos (feltros de roupas ou acessórios); genética e melhoramento genético (venda de matrizes e de reprodutores); animais de laboratórios (testes de vacinas) ou animais de companhia (cunicultura Pet). A cunicultura oferece ainda diversos sub e co-produtos como o couro (indústria da moda e vestuário); as orelhas (produção de gelatina e petiscos para cães); as patas e a cauda (confecção de amuletos e chaveiros); o sangue (meio de cultura específico); o cérebro (purificação da tromboplastina); as fezes (adubação orgânica) e ainda a urina (veículo de perfumes) (FERREIRA et al., 2012).

A raça Nova Zelândia (NZB), apesar do nome ser de origem americana, é a mais popular entre todas de coelhos, não só no Brasil, mas em grande parte do mundo. De acordo com Ferreira et al. (2012) essa raça possui as seguintes características: Aptidão: carne e pele; Peso adulto: 4,5kg (Macho: 4 - 4,5kg e Fêmea: 4,5 – 5kg); O macho apresenta perfil arredondado (encarneirado) e a fêmea perfil afilado (encavalada); Pescoço de difícil visualização; Tronco: cilíndrico, lombo bem desenvolvido; Membros: são mais fortes no macho, tendo os quartos posteriores arredondados, com musculatura bem desenvolvida dentre outras características.

Dadas essas características os autores supracitados concluem que a raça apresenta boa proporção corporal, tendo garupa arredondada, região lombar musculosa e costelas com boa cobertura muscular, propiciando carcaças de ótima qualidade e rendimento. São animais muito rústicos, altamente precoces (chegam a pesar de 1800 a 2000g em oito a dez semanas) e bas-

tante prolíferos sendo uma excelente opção para cruzamentos com outras raças. A pelagem é uniforme, brilhante e densa, a pele do NZB é facilmente comercializada pela possibilidade do tingimento em diversas cores.

De acordo com os dados da FAO (2017), referentes ao ano de 2014 a produção mundial de carne de coelho atingiu cerca de 1.559.927 toneladas. Fazendo uma análise da produção mundial por região no ano de 2014, tem-se a Ásia como maior produtor mundial de carne de coelho com 58,9% do total da produção mundial, seguindo-se a Europa com 33,5%, a África com 6,1% e a América com 1,5% (FAOSTAT 2017). No Brasil, como pode se notar pelo cenário mundial, a produção de carne cunícula não é alta, e o consumo interno é muito baixo comparado a outras carnes, como bovina e suína por exemplo.

2.1.3 Ovinos

A carne ovina, apesar de representar uma pequena parte do total global da produção de carnes, possui relevância econômica e social. Com a expansão do mercado da ovinocultura no Brasil, são necessárias pesquisas para determinação do peso de abate mais adequado para seus grupos genéticos.

Segundo Falcão et al. (2015), a ovinocultura de corte é uma atividade com grande potencial de crescimento dentre as atividades pecuárias no Brasil. E uma boa parte desta potencialidade está relacionada ao aumento do consumo da carne, estimulado pelo abate de animais precoces que proporcionam carne mais macia e com menor teor de gordura.

A maior parte da criação de ovinos de corte no Brasil são raças naturalizadas ao nordeste e são adaptadas às condições de solo e clima dessa região. Por isso é importante a avaliação do crescimento de animais adaptados às condições de produção no Brasil, principalmente para determinação da fase do desenvolvimento em que se obtém um produto de qualidade e que promova melhores retornos econômicos. E o estudo alométrico do crescimento permite estimar o padrão de desenvolvimento dos cortes de importância econômica nos animais (FURUSHO-GARCIA et al., 2006).

A ovinocultura brasileira está atravessando acelerado processo de transformação em virtude da globalização da economia e formação do Mercosul. No setor produtivo, as relações de troca têm passado por modificações profundas, de modo que o preço da carne passa a ser regido pela qualidade do produto. Assim sendo, o produtor brasileiro está procurando se adaptar a esta nova realidade, aperfeiçoando os sistemas de produção, e visando a qualidade, a quanti-

dade e a entrega constante de cordeiros, principalmente para as grandes redes de distribuição de alimentos (SOUZA et al., 2008).

Existem vários trabalhos que analisam o crescimento de ovinos, dentre eles, Silveira et al (2011) apresentam em seu artigo uma análise de agrupamento para classificar modelos de regressão não-lineares, usados para descrever a curva de crescimento, tendo em vista os resultados de diferentes avaliadores de qualidade de ajuste ao se considerar dados de peso-idade de três diferentes cruzamentos de ovinos de corte.

De acordo com a Confederação da Agricultura e Pecuária do Brasil - CNA, em 2016, o rebanho ovino registrou o número de 18,4 milhões de cabeças no país, das quais 63% estão no Nordeste, e a perspectiva que este número chegue a 18,9 milhões em 2018.

2.1.4 Suínos

A carne suína é fonte de proteína de alto valor nutricional. De acordo com Guimarães et al. (2017), o consumo de carne suína tem crescido, sendo a segunda proteína animal mais consumida do mundo. Por ser um grande produtor, a criação de suínos apresenta boas perspectivas para o Brasil no mercado internacional.

De acordo com a Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa), a produção de carne suína no Brasil em 2016 atingiu as seguintes marcas:

- 3,73 milhões de toneladas [4º lugar mundial];
- 732,9 mil toneladas exportadas [4º lugar mundial];
- 2,4% de aumento na produção nacional [em relação a 2015];
- 32% de aumento na exportação [em relação a 2015];
- consumo de 14,4 kg de carne per capita.

Os produtores de suínos têm buscado, por meio de avanços nos conhecimentos de fisiologia, nutrição e sanidade dos animais, formas de maximizar a expressão do potencial genético de animais selecionados para deposição de carne magra (MANNO et al., 2006).

Fatores relacionados a manejo e outras condições, podem afetar o desempenho dos suínos do crescimento até o abate, o que torna importante, do ponto de vista econômico, reconhecê-los e possibilitar sua modificação de acordo com os interesses dos produtores, das indústrias ou das cooperativas do setor (SILVA et al., 2016). Com isso modelos estatísticos corretamente

validados são ferramentas que permitem prever índices zootécnicos e quantificar como ocorre este crescimento.

Segundo Silva et al. (2016), no Brasil, ainda são poucos os trabalhos que utilizam a modelagem para estabelecer algumas correlações sob condições de instalações, manejo e alimentação nas granjas, os quais são de grande valia para ajudar no entendimento da produção animal. Esses trabalhos são importantes para apontar os aspectos de maior relevância, os quais influenciam a produtividade dos animais e, conseqüentemente, fornecem informações úteis que podem auxiliar em questões estruturais e de gestão das granjas.

2.2 Modelos de regressão

Segundo Fonseca (2003), a palavra “regressão” foi empregada originalmente pelo estatístico inglês Francis Galton no século XIX, que, estudando a estatura das pessoas, elaborou a proposição (posteriormente confirmada) de que filhos de pais muito altos tendem a ser mais baixos do que seus pais, o oposto ocorrendo com os filhos de pais muito baixos. Daí o nome do termo, pois ele percebeu que existe uma tendência dos dados se deslocarem ou regredirem à média da população.

Após os primeiros estudos de Galton, a *Regressão* foi desenvolvida posteriormente por vários autores, dentre eles os mais conhecidos são, Draper e Smith, Gallant, Bowerman e O’Connell, Neter e Wasserman, Seber e Goldberger que estenderam a sua aplicabilidade para inúmeras situações diferenciadas.

Os modelos de regressão, são muito conhecidos e utilizados em diversas áreas e, de acordo com Draper e Smith (1998) a análise de regressão é uma metodologia estatística para prever os valores de uma ou mais variáveis respostas ou dependentes (V.D.), baseando-se em um conjunto de valores de variáveis preditoras ou independentes (V.I.). Ou seja, o modelo de regressão desenvolve uma relação funcional entre as variáveis respostas e preditoras, assim tem-se:

$$Y = F(X_i) = F(X_1, X_2, \dots, X_p) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

em que:

Y representa a variável dependente ou resposta;

X_i representam as variáveis independentes.

No entanto, na Estatística esta relação funcional entre as variáveis não é perfeita, pois na prática podem existir erros de mensuração das variáveis independentes e que afetam o valor da variável resposta. Ainda existem inúmeros fatores que afetam as variáveis dependentes e que não são considerados como variáveis independentes, os quais são chamados erros aleatórios. Com isso, admitindo que esse erro seja aditivo, o modelo de regressão pode ser representado por:

$$Y = F(X, \beta) + \varepsilon$$

em que:

Y representa o vetor de variáveis dependentes ou variáveis resposta;

X representa o vetor ou matriz de variáveis independentes ou variáveis regressoras;

β é o vetor de parâmetros que queremos estimar;

ε é o vetor de erro; $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

A análise de regressão tem por objetivo descrever através de uma equação a relação existente entre duas ou mais variáveis a partir de “n” observações dessas variáveis (DRAPER; SMITH, 1998). Sendo assim, ela se torna bem útil para mostrar com que “grau” as V.I. explicam as V.D., e para fazer predição dentro do intervalo em estudo.

Para fazer a análise de regressão deve-se seguir as etapas:

- i) Análise exploratória dos dados;
- ii) A identificação de um grupo de modelos capaz de descrever o fenômeno em estudo;
- iii) O ajuste dos modelos escolhidos, ou seja, a estimação dos parâmetros;
- iv) A análise dos resíduos para a validação dos modelos;
- v) A verificação da “qualidade” de ajuste do modelo, para escolher o que melhor ajusta aos dados;
- vi) Uso do modelo.

Draper e Smith (1998) classificam os modelos de regressão de três formas diferentes em relação aos seus parâmetros:

- modelos lineares: são os tipos de modelos nos quais todas as derivadas parciais em relação aos seus parâmetros não dependem de nenhum parâmetro;
- modelos não lineares: são os tipos de modelos nos quais pelo menos uma das derivadas parciais depende de algum parâmetro do modelo não existindo nenhuma transformação que o torne linear;
- modelos linearizáveis: são os tipos de modelos nos quais pelo menos uma das derivadas parciais depende de algum parâmetro do modelo, no entanto, existe alguma transformação que o torne linear;

Como o interesse deste trabalho é estudar modelos para curvas de crescimento utilizando regressão não linear, a seguir esta classe de modelos é apresentada de forma mais detalhada.

2.3 Modelo de regressão não linear

A utilização de modelos lineares é ampla, e resolve boa parte dos problemas encontrados por pesquisadores, no entanto, nem sempre consegue descrever a relação de alguns fenômenos naturais. Para isso, a utilização de modelos não lineares se torna muito útil, mesmo adicionando um maior grau de complexidade nas análises.

Os modelos não lineares surgem como soluções de sistemas de equações diferenciais, possibilitando obter interpretações práticas ou biológicas sobre o fenômeno. Estas interpretações tem por base as relações entre os parâmetros, os quais podem ter significado prático na descrição do fenômeno em estudo (WEISBERG, 2005).

Mischan e Pinho (2014) definem, de modo geral, um modelo estatístico não linear com variáveis independentes $(X_i, i = 1, 2, \dots, p)$ como:

$$\mathbf{Y} = F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.1)$$

em que:

$\boldsymbol{\beta}_{p \times 1}$ é um vetor de p parâmetros;

$\mathbf{Y}_{n \times 1}$ é o vetor de variáveis resposta (ou variável dependente);

$F(\cdot)_{n_x1}$ é a função a qual considera-se existir entre as variáveis, essa função é não linear com respeito aos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$;

ϵ_{n_x1} é o vetor de erro associado ao modelo.

Por exemplo, o modelo

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \beta_2^x + \epsilon$$

é um modelo não linear com $p = 3$ parâmetros, sendo vetor β dado por $\beta' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2]$.

Dentre os vários modelos não lineares presentes na literatura, os mais utilizados para aplicação de curvas de crescimento são o Logístico, o Gompertz, o Richards, o Brody e o de von Bertalanffy (MISCHAN; PINHO, 2014)

De acordo com Fernandes et al. (2015), o uso de reparametrizações é comum em modelos de regressão não linear de modo que os parâmetros são reorganizados para que tenham interpretações mais convenientes com a área de estudo em questão. Muitos autores utilizaram diferentes parametrizações destes modelos para descrever curvas de crescimento animal, como nos trabalhos de Santoro et al. (2005), Scapim e Bassanezi (2008), Silva et al. (2011), Silveira et al. (2011), Cassiano e Sáfadi (2015) e Rodrigues et al. (2018).

No entanto, essas diferentes parametrizações, confundem autores, tornando o uso da regressão não linear mais complicada do que realmente é, dificultando assim, o entendimento e as inferências sobre os parâmetros (FERNANDES et al., 2015).

Conforme Cordeiro et al. (2009), nem sempre o modelo é expresso numa forma paramétrica adequada, que facilite a convergência rápida dos processos iterativos utilizados para obter as estimativas dos seus parâmetros, sendo necessário procurar uma parametrização mais apropriada. Com isso, conhecer a parametrização mais adequada do modelo para determinado estudo é importante para obter-se melhores resultados em seu ajuste e interpretação prática para seus parâmetros.

2.4 Aplicação dos modelos não lineares

Muitos modelos de regressão não linear estão disponíveis na literatura e são aplicados em diversas áreas, para modelar por exemplo cinética de secagem, curvas de lactação, curva de progresso de doenças e curva de crescimento de frutos, vegetais e principalmente animais.

De acordo com Souza et al. (2008) e Silva et al. (2011) o crescimento dos animais está relacionado diretamente com a quantidade e a qualidade da carne produzida. Desta forma, estudos referentes a curvas de crescimento têm aplicação estratégica em: a) programas alimentares; b) auxiliar na definição de critérios de seleção da velocidade de ganho de peso; c) auxiliar na definição de sistemas de produção mais eficientes, para cada raça e região; d) quanto ao manejo dos animais; e) programas de melhoramento genético, bem como na definição de cruzamentos.

Tedeschi et al. (2000) analisaram o crescimento de animais da raça Guzera por meio de vários modelos não lineares e, de acordo com os autores, estes modelos foram utilizados para descrever curvas de crescimento. Eles também ressaltaram que os parâmetros com interpretação biológica são representados principalmente pelo peso assintótico superior, o qual representa o peso à maturidade, e pela taxa de maturidade, sendo esta uma indicadora da velocidade de crescimento. Os outros parâmetros do modelo são considerados constantes matemáticas que auxiliam na determinação da forma da curva.

Mazzini et al. (2005) mostraram que os modelos de regressão não linear, apresentam parâmetros que podem ser interpretados biologicamente, sendo assim, eles se mostram adequados para descrever as curvas de crescimento. Para avaliar a influência de efeitos de ambiente e de grupo genético sobre os parâmetros estimados do modelo de crescimento para vacas de corte, Silva et al. (2011) utilizaram modelos de regressão não linear.

Uma aplicação destes modelos em crescimento de fruto pode ser visto em Muianga et al. (2016), no qual, os autores avaliaram o ajuste dos modelos Gompertz e Logístico, aos dados do crescimento em comprimento e largura do fruto do cajueiro, considerando erros independentes e com estrutura autorregressiva.

Um outro trabalho utilizando a técnica supracitada foi o de Gazola et al. (2017), que teve o objetivo de investigar a resposta de germinação de sementes de milho, em função do número de dias após o florescimento feminino, para os híbridos de milho OC 705 e CD 5501, em duas épocas de semeadura.

Um modelo muito utilizado é o de von Bertalanffy que de acordo com Cassiano e Sáfyadi (2015), para dados reais, é o que proporcionou a menor soma de quadrados dos resíduos, para estudo do crescimento de animais da raça Hereford. Este modelo também apresentou o melhor ajuste para descrever o crescimento de cordeiros machos da raça Ile de France (FALCÃO et al., 2015). No estudo de López et al. (2018), foram examinadas curvas de crescimento de três

genótipos de ovinos em um contexto cooperativo e concluiu-se que, o modelo mais adequado para a criação comercial de cordeiros Merino foi o de von Bertalanffy.

No entanto em alguns artigos (CASSIANO; SÁFADI 2015, NETO et al. 2016, SOUZA et al. 2017) observa-se que o modelo de von Bertalanffy superestima o peso assintótico, o que pode estar relacionado com o valor alométrico inadequado.

A seguir será apresentado de forma detalhada o modelo não linear de von Bertalanffy, o qual será utilizado na realização do trabalho.

2.5 Modelo de von Bertalanffy

Conforme von Bertalanffy (1938), “crescimento” é o aumento mensurável de um sistema orgânico, produzido pela assimilação de materiais obtidos a partir de seu ambiente, deixando claro que este fenômeno é extremamente heterogêneo e complexo. O autor afirma também, que o crescimento animal é amplamente dependente de fatores externos como nutrição, temperatura, espaço vital, e também de fatores internos como hormônios, mudança de água, idade, entre outros. Neste mesmo artigo, o autor observou que as curvas de crescimento de peso em função do tempo, são em forma de S com o ponto de inflexão a cerca de um terço do peso máximo.

O modelo de von Bertalanffy, proposto por Ludwing von Bertalanffy em 1957, é um modelo não linear que apresenta o formato sigmoidal não simétrico em relação ao ponto de inflexão. O modelo foi utilizado na área ecológica para modelar o crescimento de peixes e crustáceos em função do tempo. Bertalanffy cita em seu artigo, Putter (1920), o qual delibera que o crescimento animal pode ser considerado um resultado da equação diferencial expressado por:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P^m - \beta P^n \quad (2.2)$$

em que P representa o peso do animal em função do tempo t , α e β são constantes de anabolismo e catabolismo, respectivamente e, m e n são expoentes que indicam os últimos valores proporcionais a alguma potência do peso corporal P . Anabolismo é o depósito de nutriente e energia para posterior síntese, e catabolismo pode ser entendido como a deposição de carne e nutrientes para a composição de carcaça, porém cabe salientar que os dois acontecem de forma simultânea no organismo.

Então, baseado em fatos fisiológicos Bertalanffy (1941), mostra que pode-se colocar, sem qualquer perda considerável de generalidade, o expoente n igual a 1. O valor de $m = 2/3$ é oriundo de uma relação alométrica do peso com a área corporal do peixe. Com isso, o modelo proposto por Bertalanffy (1957) é o que segue:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^{2/3} - \beta P \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

em que $P = P(t)$ é a massa do peixe em função do tempo t , α é a constante de anabolismo, β é a constante de catabolismo, P_0 é a massa inicial.

Segundo Bertalanffy (1957), se dois corpos são razoavelmente semelhantes em forma, a taxa metabólica é proporcional à $2/3$ do peso, uma vez que a raiz cúbica do volume ou peso é uma dimensão linear e, portanto, seu quadrado tem a dimensão de uma superfície, o que se tornou muito útil para a descrição do crescimento de peixes e crustáceos. No entanto, o autor afirma que para mamíferos esta taxa metabólica corresponde a aproximadamente $3/4$ do peso.

De acordo com o exposto anteriormente, o valor de m pode variar dependendo da espécie em estudo, assim o modelo de von Bertalanffy pode ser expresso como:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^m - \beta P \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

com esta generalização, $P = P(t)$ representa a massa do animal em função do tempo t , α e β são as constantes de anabolismo e catabolismo, respectivamente, P_0 indica a massa inicial e m é um parâmetro alométrico a ser estimado, ou um valor alométrico, o autor utilizou $2/3$ para o modelo proposto originalmente em seu artigo de 1957, para descrever o crescimento de peixes e crustáceos.

Valores ou escalas alométricas interespecies são baseadas na hipótese de que existem similaridades anatômicas, fisiológicas e bioquímicas entre alguns animais, as quais podem ser descritas por modelos matemáticos e/ou estatísticos. Está bem estabelecido que muitos processos fisiológicos e tamanho de órgãos exibem intensa relação com o peso corporal das espécies, e essa relação é a base científica das escalas alométricas (MAHMOOD, 2006; FREITAS; CARRIGARO, 2013).

A lei do valor alométrico de $3/4$ para mamíferos (a best-fit b value) citada por von Bertalanffy, foi desenvolvido a partir do artigo de Kleiber (1932) (DARVEAU et al., 2002).

Alguns artigos abordaram o expoente de escala de alometria, que pode ser entendido como o valor ou índice alométrico. Existem argumentos hipotéticos, especialmente para o expoente $2/3$ (RUBNER, 1983; WHITE; SEYMOUR, 2003) e o expoente $3/4$ (WEST et al., 2002; DARVEAU et al., 2002) os quais são conhecidos como tópicos controversos.

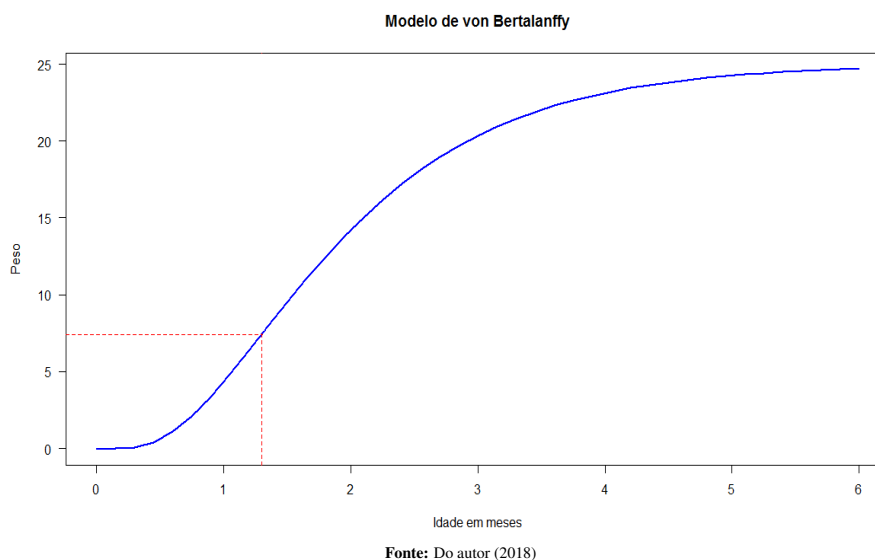
Um grande número de medições da taxa metabólica basal contra a massa corporal foi reexaminado com base em abordagens indutivas (DODDS et al., 2001; EHNES et al., 2011). A maioria das análises demonstrou que o valor alométrico ou de escala seria aproximadamente dentro de um intervalo de $2/3$ a 1 (OHNISHI et al., 2014). Assim, considerando o modelo de von Bertalanffy, tem-se várias opções para o valor de m , o que pode gerar diferentes estimativas para os parâmetros.

A relação entre a taxa metabólica basal dos mamíferos, ou valor alométrico, tem sido objeto de investigação há mais de um século. Normalmente, o relacionamento é descrito como uma equação alométrica, para qual existem argumentos a favor e contra os valores de $m = 2/3$ e $m = 3/4$ os quais são feitos e refutados. No começo dos anos 2000, o interesse pelo tema foi revivido por explicações publicadas para o dimensionamento trimestral com base nas redes de abastecimento de nutrientes e biologia quadridimensional. Com isso, uma nova análise da alometria de mamíferos que representa variação associada à temperatura corporal, estado digestivo e filogenia não encontrou nenhum apoio para um expoente de escalonamento metabólico de $3/4$. Dados abrangendo cinco ordens de variação de magnitude de mamíferos mostram que o valor correto seria de $2/3$ (WHITE; SEYMOUR, 2003).

No entanto, West et al. (2002) afirmam que a previsão de que o poder metabólico $m = 3/4$ para um mamífero é ser o mesmo, independentemente do mamífero de origem, variando de musaranhos a baleias.

Na figura (2.2), é mostrado como é a representação geral do modelo von Bertalanffy, no exemplo em questão tem-se que a curva de crescimento é dada pelo peso em função da idade (em meses). No gráfico está indicado com uma linha tracejada onde está localizado o ponto de inflexão, e observa-se que o valor assintótico no exemplo é aproximadamente 25 kg.

Figura 2.2 – Representação da curva sigmoideal do modelo von Bertalanffy



2.6 Método de mínimos quadrados

Na literatura são encontrados alguns métodos para a estimação de parâmetros, de modelos lineares e não lineares, dentre eles, tem-se o método da máxima verossimilhança, dos momentos e o de mínimos quadrados. No entanto, o mais utilizado, de acordo com Calbo et al. (1989), é o de mínimos quadrados. Segundo Gallant (1987), os estimadores de mínimos quadrados para os modelos de regressão linear não são viesados, são normalmente distribuídos e têm variância mínima entre qualquer classe de estimadores, o que funciona também para os modelos não lineares quando o tamanho da amostra tender para o infinito (assintoticamente).

Os modelos lineares ou os lineares por anamorfose são ajustados aos dados por meio do processo comum de mínimos quadrados de regressão linear. Para o ajuste dos modelos não lineares, o processo continua sendo o dos mínimos quadrados, mas os cálculos são mais complexos (MISCHAN; PINHO, 2014).

Fernandes (2012) ilustra o método de mínimos quadrados considerando a equação de regressão não linear como o definido em 2.1 e traz a seguinte notação matricial:

$$Y = F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

onde:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} F(x_1, \boldsymbol{\beta}) \\ F(x_2, \boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ F(x_n, \boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Temos que $E[\mathbf{Y}] = E[F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}] = E[F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})] + E[\boldsymbol{\varepsilon}] = E[F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})] = F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})$, pois $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$ o resíduo é dado pela diferença entre o valor real e o valor esperado:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) \quad (2.6)$$

O estimador para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ é dado pelo vetor $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ que minimiza a soma de quadrados de resíduos

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{Y} - F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})]'[\mathbf{Y} - F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})] = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}'F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})'F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) \quad (2.7)$$

Assim tem-se a forma quadrática, obtendo-se o ponto de mínimo derivando-se $S(\boldsymbol{\beta})$ em relação a $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a zero, desta forma temos:

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial(\boldsymbol{\beta})} = -2\mathbf{Y}' \times \frac{\partial F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\boldsymbol{\beta})} + \frac{\partial F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})'}{\partial(\boldsymbol{\beta})} \times F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})' \times \frac{\partial F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\boldsymbol{\beta})}$$

Tem-se que $\frac{\partial F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\boldsymbol{\beta})}$ é a matriz jacobiana e é dada por:

$$\frac{\partial F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\boldsymbol{\beta})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\beta_1)} & \frac{\partial f(x_1, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\beta_2)} & \cdots & \frac{\partial f(x_1, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\beta_p)} \\ \frac{\partial f(x_2, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\beta_1)} & \frac{\partial f(x_2, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\beta_2)} & \cdots & \frac{\partial f(x_2, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\beta_p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_n, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\beta_1)} & \frac{\partial f(x_n, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\beta_2)} & \cdots & \frac{\partial f(x_n, \boldsymbol{\beta})}{\partial(\beta_p)} \end{bmatrix}$$

Com isso resulta-se que:

$$-2\mathbf{Y}' \frac{\partial F(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial(\boldsymbol{\beta})} + 2F(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\beta}})' \frac{\partial F(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial(\boldsymbol{\beta})} = 0$$

$$-2\mathbf{Y}'\mathbf{X} + 2F(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{X} = 0$$

Chamando a matriz jacobiana \mathbf{X} , e aplicando a propriedade de matrizes $(A'B)' = B'A$, temos:

$$\mathbf{X}'F(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (\text{SEN}) \quad (2.8)$$

Este é o sistema de equações normais (SEN) para o modelo não linear. Como no SEN não linear não é possível isolar totalmente o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$, é necessário utilizar algum método iterativo, de escolha do pesquisador, para encontrar as estimativas dos parâmetros. Os métodos mais utilizados são o de Gauss-Newton ou método de linearização, o método Steepest-Descent ou método gradiente e o método de Marquardt.

Como as estimativas dos parâmetros, para modelos não lineares, são obtidas por meio de métodos iterativos, as características apresentadas pelos estimadores de mínimos quadrados valem somente assintoticamente (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002).

2.7 Métodos iterativos

Um algoritmo é um procedimento iterativo que a partir de um ponto inicial x_0 , calcula, conforme determinadas regras, um novo ponto x_1 . A partir de x_1 pelas mesmas regras, um ponto x_2 , e assim por diante. Os algoritmos existentes diferem entre si justamente nessas determinadas regras que determinam o ponto seguinte. Para modelos não lineares, os algoritmos normalmente não atingem uma solução exata, mas geram uma sequência de pontos cujo limite converge ao ponto ótimo (FRITZSCHE, 1978).

A ideia dos métodos iterativos consiste em partir de um valor inicial para os parâmetros, ir melhorando-o até que ocorra a convergência para o valor real. Atribui-se um valor inicial para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}^0$, então o método estima a distância deste valor para o valor real $\boldsymbol{\beta}$, fazendo $\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0$. Desta forma, o próximo passo será $\boldsymbol{\beta}^1 = \boldsymbol{\beta}^0 + \boldsymbol{\theta}^0$, e assim sucessivamente.

Esses métodos consistem em fazer aproximações lineares para a função $F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})$ a cada passo, até um critério de parada, preestabelecido, for atingido. Como são encontrados na literatura vários métodos, Bates e Watts (1988) os diferenciam pela forma como $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0$ é calculado. Lima (2016) apresenta um exemplo dos critério básicos:

- Gauss-Newton: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$
- Newton: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = G^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$, em que G é a inversa da matriz gradiente.

- Gradiente: $\beta - \beta^0 = \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$
- Maquardt: $\beta - \beta^0 = [\mathbf{X}'\mathbf{X} + \delta(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}]$, em que $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ é inversa generalizada.

O algoritmo de Gauss-Newton, que é o método mais utilizado, usa a expansão da série de Taylor de primeira ordem. Vale ressaltar que mesmo com o critério de parada preestabelecido não é garantida a convergência. Para que este método convirja e esta convergência não leve à mínimos locais, é necessário um vetor de estimativas iniciais, para aproximar o modelo não linear de um linear, caso contrário, a convergência não é garantida. Estudos anteriores e a experiência do pesquisador podem ajudar na obtenção de bons valores para a primeira iteração.

Diferentemente do Método de Newton, o Algoritmo de Gauss-Newton apenas pode ser usado para minimizar uma soma dos valores quadrados da função, mas tem a vantagem de que as derivadas segundas, que podem ser difíceis de calcular, não são necessárias. Na prática, termina-se o processo quando o ponto está suficientemente perto do ponto da solução, o que em geral é determinado por algum critério de parada.

2.8 Avaliadores de qualidade de ajuste

Após obter as estimativas para os parâmetros do modelo, torna-se necessário utilizar critérios para escolher os melhores ajustes ou aqueles que descrevem os dados do pesquisador de forma satisfatória. Burnham e Anderson (2004) ressaltaram a importância de teorias científicas para a seleção de modelos, sendo que para isso existem diversas metodologias/critérios.

Motulsky e Christopoulos (2004) afirmam que, rejeita-se qualquer modelo se os melhores valores de ajuste não fizerem sentido (por exemplo, se uma taxa é negativa) ou se os intervalos de confiança são muito amplos, ou seja, não é necessário qualquer teste estatístico para dizer que tal modelo não deve ser aceito.

2.8.1 Coeficiente de determinação

O coeficiente de determinação (R^2) é um indicador de quanto o modelo foi capaz de explicar os dados coletados. O R^2 varia entre 0 e 1, indicando, em percentagem, o quanto o modelo consegue explicar os valores observados, quanto mais próximo do 1, melhor é o modelo. O coeficiente de determinação é dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT}$$

em que:

- SQR é a soma de quadrados dos resíduos;
- SQT é soma de quadrados total.

2.8.2 Critério de informação de Akaike (AIC)

De acordo com Motulsky e Christopoulos (2004), para um modelo de regressão útil, ou seja aquele que atenda os pressupostos para a validade, o AIC é definido pela equação a seguir, onde N é o tamanho amostral, P é o número de parâmetros ajustados pela regressão, SQR é a soma dos quadrados dos resíduos e \ln é o operador logaritmo natural.

$$AIC = N \ln \left(\frac{SQR}{N} \right) + 2P$$

No entanto, quando dispomos de uma quantidade pequena de amostras, utilizamos o Critério de Informação de Akaike Corrigido ($AICc$), que assim como o AIC leva em consideração o grau de parametrização do modelo. Conforme Mischan e Pinho (2014), uma amostra é considerada pequena quando o número de observações for menor que 10 vezes a quantidade de parâmetros. Nesse caso, o critério pode ser descrito por:

$$AICc = AIC + \frac{2P(P+1)}{N-P-1}$$

em que:

- AIC Critério de Informação de Akaike;
- N é o tamanho da amostra;
- P é o número de parâmetros do modelo;

2.8.3 Curvaturas de Bates e Watts

Como já mostrado anteriormente, utiliza-se métodos numéricos para estimação de parâmetros, uma vez que os estimadores não são obtidos analiticamente. A inferência nos modelos não lineares ocorre por aproximação em Série de Taylor na região próxima às estimativas e, essa aproximação pode ser considerada boa ou ruim dependendo do modelo a ser estudado, delineamento experimental e conjunto de dados (SOUZA et al., 2010).

Sabe-se pela teoria assintótica que, conforme o tamanho da amostra for aumentando, a aproximação que o método numérico faz em torno do valor estimado se torna cada vez melhor. No entanto, em tamanhos amostrais pequenos, entende-se que quanto maior a não linearidade presente no modelo, esta aproximação estará mais distante do linear, tornando menos confiáveis as estimativas obtidas.

Segundo Souza et al. (2010), para quantificar o quão distante a modelagem não linear está em herdar as propriedades já existentes em regressão linear, Bates e Watts (1980) formularam uma metodologia capaz de medir matematicamente este distanciamento, utilizando o conceito geométrico de curvatura, porém outros estudos sobre o tema já haviam sido realizados (BEALE, 1960; BOX, 1971). No entanto, a metodologia proposta por Beale (1960) tendia a apresentar que um modelo está próximo de ser linear, mesmo quando um distanciamento considerável estava presente, enquanto a apresentada por Box (1971) se preocupava apenas com o viés dos estimadores não lineares.

Seber e Wild (1989) afirmam que esta medida de distanciamento da metodologia de Bates e Watts (1980), independe das mudanças de escala nos parâmetros ou nos dados e pode ser utilizada na comparação de modelos distintos.

As medidas de não linearidade podem ser divididas em duas componentes: a não linearidade intrínseca (c^l) e a não linearidade devido ao efeito de parâmetros (c^θ). A c^l é a não linearidade característica do modelo, mede a falta de planicidade da superfície esperada, gerada pelo modelo na vizinhança do local da solução de mínimos quadrados e não se altera devido à reparametrizações do modelo. A c^θ representa o valor máximo do efeito da parametrização na não linearidade do modelo. Mede a falta de uniformidade do sistema de coordenadas da superfície esperada na vizinhança do local da solução e depende da parametrização do modelo (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002; ZEVIANI et al., 2012; FERNANDES, 2015; GAZOLA et al., 2017).

Mazucheli e Achcar (2002) afirmam que, dentre as muitas vantagens em se buscar modelos com comportamento próximo do comportamento linear, podem-se citar algumas:

- as estimativas de mínimos quadrados podem ser facilmente obtidas;
- os estimadores são aproximadamente não viciados, normalmente distribuídos com variância mínima, mesmo em pequenas amostras;
- os valores de previsões são mais precisos;

- os métodos iterativos convergem mais rapidamente;
- os estimadores têm propriedades similares às propriedades ótimas de modelos lineares.

Com isso, seguindo Fernandes et al. (2015), um modelo é preferido em relação ao outro quando apresenta os menores valores para estas estatísticas, pois sua não linearidade é menor e, portanto, a aproximação linear fica melhor, fazendo com que as estimativas de mínimos quadrados sejam mais confiáveis.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Nesta seção, serão apresentados os dados do crescimento das quatro espécies de mamíferos e a forma como eles foram obtidos, bem como as metodologias de análise dos mesmos.

3.1 Material

Foram utilizados dados peso-idade de quatro espécies de mamíferos de corte, os dados foram obtidos de instituições de pesquisas e da literatura, conforme descrito a seguir: 1 – Bovinos: dados de pesos em quilogramas de animais da raça Angus foram obtidos da Fazenda Santa Éster da Casa Branca Agropastoril Ltda., localizada em Silvianópolis - Minas Gerais - Brasil nos anos de 2013 a 2017. Utilizou-se o método de coleta transversal de dados, anotando o peso vivo de 203 machos da raça Angus, do nascimento até 46,5 meses de idade; 2 – Coelhos: dados do peso, em gramas, de 10 coelhos machos e fêmeas da raça Nova Zelândia coletados no segundo semestre de 2016, obtidos por pesagens a partir do 38º dia de nascimento até o 100º dia, em Rio Verde, GO, Instituto Federal de Goiás (IFG); 3 – Ovinos: foram utilizados 31 machos da raça Ile de France, confinados desde o nascimento até o abate, aos 120 dias de idade extraídos de Falcão et al. (2015); 4 – Suínos: dados de machos da progênie Camborough 22 e AGPIC 412 TG, em boas condições de manejo e nutrição extraídos de Oliveira et al. (2007).

3.2 Metodologia

Nesta seção, é apresentada a metodologia empregada na descrição e análise do crescimento de mamíferos utilizando o modelo de von Bertalanffy.

3.2.1 Ajuste dos modelos

Por não existir um consenso, com o intuito de obter uma expressão generalizada para o modelo de von Bertalanffy, será considerado o expoente m na resolução da equação diferencial do modelo. A equação não linear (2.4) é do tipo Bernoulli e pode ser resolvida com uma substituição de variáveis, conduzindo assim à uma equação linear (BASSANEZI, 2002). Desta forma, tomando $Z = P^{1-m}$, temos:

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = (1-m)P^{-m} \frac{dP}{dt} \\ Z(0) = P_0^{1-m} \end{cases}$$

$$\frac{dZ}{dt} = (1-m)P^{-m}(\alpha P^m - \beta P).$$

Substituindo novamente $Z = P^{1-m}$:

$$\frac{dZ}{dt} = (1-m)(\alpha - \beta P^{1-m}) = (1-m)(\alpha - \beta Z),$$

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha - \beta Z - m\alpha + \beta Zm,$$

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha(1-m) - \beta(1-m)Z.$$

Então:

$$\frac{dZ}{dt} + \beta(1-m)Z = \alpha(1-m).$$

Com isso chega-se a uma EDO linear de 1ª ordem não homogênea em Z:

$$\frac{dZ}{dt} + \beta(1-m)Z = \alpha(1-m).$$

EDO da forma:

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x).$$

Multiplicando a EDO por $u(t)$:

$$u(t)Z'(t) + u(t)\beta(1-m)Z(t) = u(t)\alpha(1-m),$$

e definindo: $u'(x) = u(x)p(x)$, tem-se:

$u'(t) = u(t)\beta(1-m)$, então:

$$u(t)Z'(t) + u'(t)Z(t) = u(t)\alpha(1-m),$$

ou ainda: $d[u(x)y(x)] = u(x)g(x)$, então:

$$d[u(t)Z(t)] = u(t)\alpha(1-m),$$

e $u(x)g(x) = \int u(x)g(x)dx + C$, tem-se:

$$u(t)Z(t) = \int u(t)\alpha(1-m)dt + C.$$

Para encontrar $Z(t)$:

$$Z(t) = \frac{\int u(t)\alpha(1-m)dt}{u(t)}, \quad (3.1)$$

como $u'(t) = u(t)\beta(1-m) \Leftrightarrow \frac{du(t)}{dt} = u(t)\beta(1-m)$.

Para obter o fator integrante $u(x)$, voltamos à:

$$\frac{du(x)}{dx} = u(x)p(x).$$

Usando o método de separação de variáveis, rescrevemos esta equação na forma:

$$\frac{du(x)}{u} = p(x)dx \Rightarrow \ln(u) = \int p(x)dx + K,$$

$$u(x) = \exp(\int p(x)dx).$$

Voltando ao desenvolvimento do modelo, tem-se:

$$\frac{du}{u} = \beta(1-m)dt \Rightarrow \ln(u(t)) = \int \beta(1-m)dt,$$

$$u(t) = \exp\left(\int \beta(1-m)dt\right). \quad (3.2)$$

Então, substituindo (3.2) em (3.1), tem-se:

$$Z(t) = \frac{[\int \exp(\int \beta(1-m)dt)\alpha(1-m)dt + C]}{\exp(\int \beta(1-m)dt)}.$$

Sabe-se que:

$$\int \beta(1-m)dt = \beta(1-m)t,$$

com isso:

$$Z(t) = \frac{\int \exp(\beta(1-m)t)\alpha(1-m)dt + C}{\exp(\int \beta(1-m)dt)}.$$

$$Z(t) = \frac{\alpha}{\beta} + C \exp(-\beta(1-m)t).$$

Como: $Z(t) = P(t)^{1-m}$, tem-se:

$$P(t) = [Z(t)]^{\frac{1}{1-m}},$$

$$P(t) = \left[\frac{\alpha}{\beta} + C \exp(-\beta(1-m)t) \right]^{\frac{1}{1-m}} \Rightarrow \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \left(1 + C \frac{\beta}{\alpha} \exp(-\beta(1-m)t) \right) \right]^{\frac{1}{1-m}},$$

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-m}} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} C \exp(-\beta(1-m)t) \right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

Sabe-se que:

$$P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t),$$

$$P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-m}} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} C \exp(-\beta(1-m)t) \right)^{\frac{1}{1-m}},$$

$$P_{\infty} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-m}} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} C \exp(-\beta(1-m)t) \right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

Sabemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} C \exp(-\beta(1-m)t) \right)^{\frac{1}{1-m}} = 1,$$

então:

$$P_{\infty} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

Dadas a condição inicial $P(0) = P_0$, tem-se:

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-m}} \left(1 + C \frac{\beta}{\alpha} \exp(-\beta(1-m)t)\right)^{\frac{1}{1-m}}, \quad (3.3)$$

$$P_0 = P_\infty \left(1 + C \frac{\beta}{\alpha} \exp(-\beta(1-m)t)\right)^{\frac{1}{1-m}},$$

$$P_0 = P_\infty \left(1 + C \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-m}} \Rightarrow \left(1 + C \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-m}} = \frac{P_0}{P_\infty},$$

$$\left(1 + C \frac{\beta}{\alpha}\right) = \left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{1-m},$$

$$C = \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{1-m} - 1 \right] \frac{\alpha}{\beta}.$$

Substituindo a constante C na expressão de (3.3), obtêm-se o modelo generalizado para o crescimento do peso de um animal qualquer:

$$P(t) = P_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-m} - 1 \right) \exp(-\beta(1-m)t) \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}. \quad (3.4)$$

Os três modelos a serem considerados neste trabalho com as diferentes parametrizações e alometrias partem do modelo generalizado apresentado em (3.4). A seguir, será apresentando o seu desenvolvimento matemático até chegar na forma funcional conhecida.

Multiplicando e dividindo $\left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-m} - 1 \right]$ por $(m-1)$:

$$P(t) = P_\infty \left\{ 1 + \left[\frac{\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-m} - 1}{(m-1)} (m-1) \exp(-\beta(1-m)t) \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}.$$

Aplicando a propriedade da exponencial: $a = \exp^{\ln a}$

$$P(t) = P_\infty \left\{ 1 + \left[(m-1) \exp \left(\ln \frac{\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-m} - 1}{(m-1)} \right) \exp(-\beta(1-m)t) \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}},$$

$$P(t) = P_{\infty} \left\{ 1 + \left[(m-1) \exp \left(\ln \frac{\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{1-m} - 1}{(m-1)} + (-\beta(1-m)t) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}.$$

Colocando $-\beta(1-m)$ em evidência:

$$P(t) = P_{\infty} \left\{ 1 + \left[(m-1) \exp \left(-\beta(1-m) \left(\ln \frac{\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{1-m} - 1}{(m-1)} + t \right) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}},$$

$$P(t) = P_{\infty} \left\{ 1 + \left[(m-1) \exp \left(-\beta(1-m) \left(\frac{\ln \left(\frac{(m-1)}{\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{1-m} - 1} \right)^{-1}}{-\beta(1-m)} + t \right) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}.$$

Utilizando a propriedade de potência de logaritmo, tem-se:

$$P(t) = P_{\infty} \left\{ 1 + \left[(m-1) \exp \left(-\beta(1-m) \left(+ \frac{\ln \frac{(m-1)}{\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{1-m} - 1}}{\beta(1-m)} + t \right) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}. \quad (3.5)$$

A equação (3.1) apresenta a expressão geral considerando os parâmetros originais do modelo de von Bertalanffy. Conforme já mostrado, $P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = a$ é a assíntota do modelo. Ao derivar a expressão duas vezes em relação a t e igualar a zero teremos a abscissa do ponto de inflexão b , que é dada por:

$$b = \left[\frac{\ln \frac{(m-1)}{\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{1-m} - 1}}{\beta(1-m)} \right].$$

Por fim tem-se que a taxa de crescimento k é o termo que aparece em evidência na exponencial e é dado por:

$$k = \beta(1 - m).$$

Assim é possível reescrever a expressão 3.5 chegando a forma funcional já conhecida da literatura:

$$y_i = a \{1 + [(m - 1) \exp[-k(t_i - b)]]\}^{\frac{1}{1-m}}. \quad (3.6)$$

Em que y_i é a variável resposta, que no caso deste estudo é o peso e t_i é o i -ésimo tempo t , sabendo-se que o índice i varia da primeira a última observação do vetor tempo. Substituindo $m = 2/3$ na expressão 3.2 obtém-se o Modelo 2. Substituindo $m = 3/4$ na expressão 3.2 obtém-se o Modelo 3. Já o Modelo 1 é uma reparametrização do Modelo 2 comumente encontrada na literatura, porém nesta parametrização o parâmetro b não possui a interpretação de abscissa do ponto de inflexão pois não zera a segunda derivada do modelo em relação ao tempo, como já mencionado na definição do parâmetro b .

Assim os modelos do estudo a serem comparados são:

Modelo 1: Modelo de von Bertalanffy, geralmente encontrado na literatura, com ($m = \frac{2}{3}$)

$$y_i = a * (1 - b * \exp(-kx_i))^3 + \varepsilon_i. \quad (3.7)$$

Modelo 2: Modelo de von Bertalanffy Generalizado com ($m = \frac{2}{3}$)

$$y_i = a * \left(1 - \frac{\exp(k * (b - x_i))}{3}\right)^3 + \varepsilon_i. \quad (3.8)$$

Modelo 3: Modelo de von Bertalanffy Generalizado com ($m = \frac{3}{4}$)

$$y_i = a * \left(1 - \frac{\exp(k * (b - x_i))}{4}\right)^4 + \varepsilon_i. \quad (3.9)$$

Nos modelos mostrados, sabe-se que para $i = 1, 2, \dots, n$; y_i é a i -ésima observação da variável dependente, x_i é a i -ésima observação da variável independente; a é o valor assintótico, ou seja, o valor esperado para o crescimento máximo do objeto em estudo, quando $x_i \rightarrow \infty$; b está associado a abscissa do ponto de inflexão; k é um índice de maturidade ou precocidade, está associado ao crescimento, quanto maior for seu valor, menos tempo será necessário para o objeto em estudo atingir o valor assintótico (a); ε_i é o erro aleatório associado à i -ésima

observação o qual pressupõe-se que seja independente e identicamente distribuído seguindo uma distribuição normal de média zero e variância constante, ou seja, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

No Modelo 1 tem-se a parametrização do modelo de von Bertalanffy geralmente encontrado na literatura, para ajuste de curvas de crescimento, com o valor alométrico de $m = 2/3$. Apesar de muito utilizada, esta parametrização não fornece interpretação direta para o parâmetro b , sendo a abscissa do ponto de inflexão dada por: $\frac{1}{k} \ln(3b)$. Ou seja, neste modelo a estimativa de b não é exatamente o ponto de inflexão.

O Modelo 2 apresenta uma parametrização em que o parâmetro b , pode ser interpretado como a abscissa do ponto de inflexão, e o valor alométrico atribuído é $m = 2/3$, o qual Bertalanffy utilizou originalmente para descrever o crescimento de peixes e crustáceos.

No Modelo 3, o valor alométrico cujo os autores Kleiber (1932), Bertalanffy (1957) e West et al. (2002) afirmam que é a alometria adequada para a descrição do crescimento de mamíferos é $m = 3/4$, e a interpretação dos parâmetros se comporta igual ao Modelo 2.

3.2.2 Método iterativo de Gauss-Newton

Na estimação dos parâmetros do modelo foi utilizado o algoritmo de convergência de Gauss-Newton, que também é conhecido como método de linearização, pois utiliza uma expansão da série de Taylor para aproximar o modelo de regressão não linear com termos lineares e, então aplicar o método dos mínimos quadrados ordinários para a estimação dos parâmetros.

Inicialmente, como na maior parte dos processos iterativos, devemos atribuir valores iniciais para o vetor de parâmetros, que pode ser definido como $\boldsymbol{\beta}^0 = [\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_p^0]$, em que p é o número de parâmetros do modelo.

Após atribuídos os valores iniciais, o método consiste em desenvolver a série de Taylor até o termo de primeira ordem da função $F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})$, em torno do valor inicial $\boldsymbol{\beta}^0$, com isso tem-se:

$$F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) \cong F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}^0) + \mathbf{J}^0(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)$$

em que $\mathbf{J}^0 = \frac{\partial f(\boldsymbol{\beta}^0)}{\partial(\boldsymbol{\beta})}$ é o jacobiano da função no ponto $\boldsymbol{\beta}^0$, ou seja, é a matriz de derivadas parciais avaliada no ponto $\boldsymbol{\beta}^0$.

O jacobiano de um modelo não linear tem um parâmetro em pelo menos uma de suas entradas, ao passo que \mathbf{J}^0 é uma matriz de dimensão $n_x p$

Portanto substituindo $F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) = F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}^0) + \mathbf{J}^0(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)$ no modelo não linear, tem-se:

$$\mathbf{Y} = F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{Y} = F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}^0) + \mathbf{J}^0(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{Y} - F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}^0) = \mathbf{J}^0(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Sabe-se que $F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}^0)$ tem ordem $n_x \times 1$, pois cada entrada desta matriz é a respectiva variável independente aplicada ao modelo com os parâmetros $\boldsymbol{\beta}^0$. Denotando $\mathbf{Y}^0 = \mathbf{Y} - F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}^0)$ e $\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0$, o modelo pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{J}^0 \boldsymbol{\theta}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}$$

E assim, obtém-se uma aproximação de um modelo não linear à um linear. Assim, seguindo Draper e Smith, os coeficientes de $\boldsymbol{\theta}^0$ podem ser estimados pelo sistema de equações normais de uma regressão linear da seguinte forma:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^0 = (\mathbf{J}^{0'} \mathbf{J}^0)^{-1} \mathbf{J}^{0'} \mathbf{Y}^0$$

Após a primeira iteração, corrige-se o vetor de estimativas da seguinte maneira: $\boldsymbol{\beta}^1 = \boldsymbol{\beta}^0 + \hat{\boldsymbol{\theta}}^0$. Se a soma de quadrados dos resíduos de $\boldsymbol{\beta}^1$, for menor que soma de quadrados dos resíduos de $\boldsymbol{\beta}^0$, implica que $\boldsymbol{\beta}^1$ está mais próximo dos verdadeiros valores de $\boldsymbol{\beta}$. Este vetor de novas estimativas $\boldsymbol{\beta}^1$ é utilizado, novamente, como estimativa inicial e se repete o processo. Assim, quando $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \rightarrow 0$, a medida que n cresce, então, conclui-se que algoritmo de Gauss-Newton está na direção correta.

O algoritmo é repetido até que algum critério de parada seja atendido. Dentre os critérios possíveis, pode estar incluso, significância da diferença entre $\boldsymbol{\beta}^n$ e $\boldsymbol{\beta}^{n-1}$, em que n representa a n -ésima iteração ou significância entre as somas de quadrados residuais de $\boldsymbol{\beta}^n$ e $\boldsymbol{\beta}^{n-1}$ e ou número de iterações.

Foi utilizado a significância da soma de quadrado residual que é o critério de parada padrão da função *gnls* do software R.

3.2.3 Análise de resíduos

É muito importante verificar a adequabilidade do modelo, e para isso deve ser realizado uma análise de resíduos. Estas análises podem ser gráficas ou por meio de testes estatísticos como os de Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson para verificar os pressupostos de normalidade, homocedasticidade e independência, respectivamente.

Para analisar a normalidade do vetor de resíduos foi utilizado o teste de Shapiro-Wilk, em que as hipóteses utilizadas no teste são:

H_0 : Os resíduos apresentam distribuição normal;

H_1 : Os resíduos não apresentam distribuição normal.

A função utilizada do software R foi *shapiro.test*, em que, se o valor-p for menor que o nível de significância α rejeita-se H_0 .

Para analisar o pressuposto de independência, ou seja, se existe presença de autocorrelação residual, foi utilizado o teste de Durbin-Watson, em que as hipóteses testadas são:

H_0 : Os resíduos são independentes;

H_1 : Os resíduos apresentam autocorrelação.

A função utilizada do software R foi *durbinWatsonTest*, em que, se o valor-p for menor que o nível de significância α rejeita-se H_0 .

Em estudos de regressão é usual admitir no processo de estimação e de inferência sob os parâmetros, que os erros sejam independentes, o que não necessariamente ocorre quando se trabalha com dados ordenados no tempo que são, potencialmente, correlacionados (CASSIANO, SÁFADI, 2015). Neste caso, as estimativas dos parâmetros dos modelos podem ser viesadas, com valores abaixo ou acima do verdadeiro valor (MAZZINI et al., 2005; GUEDES et al., 2014; FERNANDES et al., 2014), devendo-se considerar no ajuste do modelo, a estrutura de autocorrelação presente nos dados (PRADO et al., 2013; RIBEIRO et al., 2018), pois pode afetar o valor da estimativa do erro padrão.

Por fim, o teste escolhido para verificar o pressuposto de homogeneidade de variâncias foi o de Breusch-Pagan, em que as hipóteses utilizadas no teste são:

H_0 : Existe homogeneidade nas variâncias residuais;

H_1 : Não existe homogeneidade nas variâncias residuais.

A função utilizada do software R foi *bptest*, em que, se o valor-p for menor que o nível de significância α rejeita-se H_0 . Como se trata de uma análise para variâncias o valor calculado deve ser comparado com o valor crítico da distribuição de qui-quadrado, com 1 grau de liberdade.

Os testes de normalidade, independência e homogeneidade de variâncias podem ser vistos na íntegra nos trabalhos de Shapiro e Wilk (1965), Durbin e Watson (1950) e Breusch e Pagan (1979), respectivamente.

Inicialmente, foram estimados os parâmetros do modelo, considerando que todos os pressupostos já citados sobre o vetor de erros foram atendidos. Em seguida obteve-se os resíduos, os quais foram utilizados como base para a análise de resíduos por meio de testes estatísticos, ao nível de 5% de significância. Caso algum dos pressupostos não seja atendido, o modelo não é adequado, sendo assim, este desvio deve ser corrigido ou incorporado no modelo.

3.2.4 Avaliadores de qualidade de ajuste para seleção de modelos

Após o ajuste dos modelos e análise de resíduos, a qualidade de ajuste foi fornecida levando-se em conta os valores alométricos e a parametrização de cada modelo, obtendo assim as conclusões. Considerou-se como os melhores ajustes, os modelos que obtiveram os menores valores do critério de informação de Akaike corrigido (AICc) e curvaturas de Bates Watts e maiores valores do coeficiente de determinação (R^2).

Para estas análises supracitadas e em toda a parte computacional foi utilizado o software estatístico R (A Language and Environment for Statistical Computing 2017), com a utilização dos pacotes *nlme*, *car*, *lmtest* e *qpcR*, que estão disponíveis para as estimação dos parâmetros, testes estatísticos e gráficos.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente foram obtidas as estatísticas descritivas dos dados referentes aos pesos dos animais em estudo, como pode ser visto na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Estatísticas descritivas dos dados de peso dos mamíferos de corte em estudo.

Estatística	Mamífero			
	Bovinos (kg)	Coelhos (g)	Ovinos (kg)	Suínos (kg)
Mínimo	34,37	708,10	4,69	1,50
Máximo	599,50	2258,30	36,90	154,83
Mediana	423,04	1369,90	22,90	59,94
Média	385,36	1396,22	21,81	67,953
1º Quartil	238,74	1121,87	13,20	19,32
3º Quartil	585,72	1609,45	30,95	114,06

Nota-se que para os bovinos o peso no período em estudo, variou de 34,37 a 599,5 quilogramas. Pode-se observar, também que a mediana do peso dos coelhos foi de 1369,9 gramas, e a média para os ovinos foi 21,81 quilogramas. Tem-se também que o peso para os 25% dos dados de suínos não ultrapassou 19,32 kg e o 75% dos dados não passou de 114,06 kg.

Foram estimados os parâmetros dos três modelos para cada espécie de mamífero. Na Tabela 4.2 é apresentada a análise de resíduos realizada pelos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), considerando-se um nível de significância de 5%. Observou-se que os testes foram não significativos para todos os mamíferos, exceto para os dados de suínos. Isso indica que, para as outras espécies não teve-se problemas de violação de pressupostos de resíduo, indicando que os resíduos apresentaram normalidade, variâncias constante e são independentes.

Pela Tabela 4.2 percebe-se ainda que, para os suínos, houve problemas com os pressupostos de normalidade, para os Modelos 1 e 2, e com a homogeneidade de variâncias e independência para todos os modelos.

Tabela 4.2 – Testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados.

Mamíferos	Teste	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Bovinos	SW	0,4893	0,4893	0,3768
	DW	0,1020	0,1020	0,1320
	BP	0,1251	0,1251	0,1519
Coelhos	SW	0,1181	0,1181	0,0891
	DW	0,5140	0,4740	0,5460
	BP	0,6954	0,6954	0,7509
Ovinos	SW	0,9523	0,9523	0,9368
	DW	0,4100	0,4440	0,4840
	BP	0,3702	0,3702	0,3124
Suínos	SW	0,0397*	0,0397*	0,0553
	DW	0,0001*	0,0001*	0,0001*
	BP	0,0042*	0,0042*	0,0036*

* significativo ao nível de 5% de probabilidade

Como nos dados de suínos o teste de DW foi significativo indicando que os resíduos apresentaram dependência, foi realizado um novo ajuste pelo método dos mínimos quadrados generalizados incorporando-se ao modelo um parâmetro autorregressivo (ϕ) de primeira ordem AR(1). Pois, de acordo com Nascimento et al. (2011) e Muniz et al. (2017) quando presente é preciso modelar essa autocorrelação, e incorporá-la ao modelo, com isso obtém-se ajustes que produzem predições mais acuradas e permite a análise de séries medidas em poucas observações temporais, garantindo assim uma precisão maior nas estimativas e uma melhor qualidade no ajuste.

Após a inclusão deste parâmetro autorregressivo (ϕ) de primeira ordem AR(1), foram estimados novamente os parâmetros e feita uma nova análise de resíduos, em que os valores de todos os testes deram não significativos, indicando resíduos independentes. Na Tabela 4.3 estão apresentadas as estimativas dos parâmetros e os respectivos erros padrão, com base no ajuste das três parametrizações do modelo de von Bertalanffy. Todos os parâmetros foram significativos, pelo teste t, a 5% de significância.

A interpretação prática dos parâmetros é de suma importância, sendo essencial para entendimento de estudos de crescimento (FREITAS, 2005). Com base nas estimativas do parâmetro a pelos modelos, presentes na Tabela 4.3, é possível observar que os pesos obtidos com o ajuste do Modelo 3 foram mais condizentes com os valores reais.

Tabela 4.3 – Parâmetros estimados com AR(1), quando necessário, para os três modelos von Bertalanffy, em estudo, para a descrição do crescimento do peso de mamíferos de corte.

Mamífero	Parâmetros	Modelo 1	EP	Modelo 2	EP	Modelo 3	EP
Bovinos	<i>a</i>	658,2	25,52	658,2	25,52	652,6	24,02
	<i>b</i>	0,5978	0,0365	6,605	0,5433	7,127	0,5504
	<i>k</i>	0,0884	0,0092	0,0884	0,0092	0,09352	0,0094
Coelhos	<i>a</i>	2588	68,07	2588	68,07	2561	64,26
	<i>b</i>	1,252	0,09345	40,2	0,4919	41,34	0,5102
	<i>k</i>	0,03291	0,0019	0,03291	0,0019	0,0346	0,002
Ovinos	<i>a</i>	47,9336	2,6283	47,9336	2,6283	46,6372	2,294
	<i>b</i>	0,5485	0,0117	32,2988	2,7776	34,157	2,6287
	<i>k</i>	0,0154	0,0013	0,0154	0,0013	0,0167	0,0013
Suínos	<i>a</i>	259,0049	13,9763	259,0049	13,9763	242,9691	10,4726
	<i>b</i>	0,9264	0,0311	121,0277	5,0752	121,0709	4,0281
	<i>k</i>	0,0084	0,0005	0,0084	0,0005	0,0096	0,0005
	ϕ	0,9425	-	0,9425	-	0,9396	-

Já os Modelos 1 e 2 superestimaram o peso final dos mamíferos de corte, conforme também foi verificado por Silva et al. (2011) no estudo de vacas, Falcão et al. (2015) no estudo de ovinos e Jacob et al. (2015) no estudo de coelhos.

Assim pode se concluir que o Modelo 3 forneceu uma suavização do parâmetro *a* e nota-se também uma menor amplitude do erro.

Lopes et al. (2016), afirmam que para o crescimento de bovinos o modelo de Brody foi o que apresentou a estimativa do parâmetro *a*, mais próxima do peso adulto observado, no entanto, Silva et al. (2011) e Santana et al. (2016), demonstraram que, além do modelo Brody, o de von Bertalanffy também apresentaram resultados adequados para descrever curvas de crescimento de bovinos. Com isso, fica explícita a importância da relação da estimativa assintótica do modelo com os valores reais, sendo que modelos que superestimam o peso adulto são geralmente descartados na prática.

Na parametrização utilizada no Modelo 1, a qual é uma das mais encontradas na literatura, o *b* é um parâmetro de locação que mantém o formato sigmoidal do modelo e está associado a abscissa do ponto de inflexão da curva, contudo, não possui interpretação prática direta (SILVEIRA et al., 2011; NETO et al., 2016). No entanto, alguns autores como Mishan e Pinho (2014) e Louzada et al. (2014), apresentam transformações matemáticas, a qual é possível encontrar o valor da abscissa do ponto de inflexão, através da estimativa do Modelo 1.

Assim, uma grande vantagem das parametrizações dos Modelo 2 e 3, é referente ao parâmetro *b*, uma vez que suas estimativas são interpretadas diretamente como a abscissa do

ponto de inflexão, ou seja, indica a idade na qual o crescimento do animal desacelera. Por exemplo, temos que para os suínos espera-se que até 121 dias aproximadamente, seu crescimento seja mais acentuado e após este período ele irá reduzindo até a estabilização (Tabela 4.3).

De acordo com Teleken et al. (2017) o modelo de von Bertalanffy foi o mais adequado, dentre outros estudados, para a descrição do crescimento de coelhos da raça Nova Zelândia. Jacob et al. (2015) também afirmam que este modelo supracitado descreveu bem o crescimento de coelhos das raças Chinchila Soviética e Gigante Branco, no entanto, suas estimativas superestimaram o parâmetro assintótico e não deram interpretação direta para o parâmetro b .

Os avaliadores de qualidade de ajuste para os modelos em estudo são apresentados na Tabela 4.4. Esta tabela apresenta os valores do coeficiente de determinação (R^2), os valores do critério de informação de Akaike corrigido ($AICc$), e os valores das medidas de não linearidade intrínseca e paramétrica.

Tabela 4.4 – Avaliadores de qualidade de ajuste para os três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de mamíferos de corte.

Mamífero	Avaliador	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Bovinos	R^2	0,9938	0,9938	0,9938
	$AICc$	93,4718	93,4718	93,3386
	c^l	0,1106	0,1106	0,1109
	c^θ	0,9623	0,8797	0,8141
Coelhos	R^2	0,9974	0,9974	0,9974
	$AICc$	121,8681	121,8681	121,8064
	c^l	0,0284	0,0284	0,0284
	c^θ	0,8958	0,6756	0,603
Ovinos	R^2	0,9978	0,9978	0,9979
	$AICc$	31,1405	31,1405	30,6398
	c^l	0,0445	0,0445	0,0446
	c^θ	2,0296	1,4957	1,2771
Suínos	R^2	0,9978	0,9979	0,9984
	$AICc$	74,5154	73,5078	67,8611
	c^l	0,0402	0,0402	0,0301
	c^θ	1,703	0,9408	0,6432

Os valores do coeficiente de determinação (R^2) foram superiores a 0,99 indicando ajustes satisfatórios para todos os conjuntos de dados analisados. Quanto ao critério de informação de Akaike corrigido ($AICc$) o Modelo 3 apresentou os menores valores, o valor mais baixo de $AICc$ sugere que o modelo é o mais adequado para descrever os dados. Portanto, pelos avaliados-

res de qualidade de ajuste R^2 e AICc fica evidente a superioridade do Modelo 3, para descrever o crescimento do mamíferos de corte.

As medidas de não linearidade intrínseca (c^l) e paramétrica (c^θ) para cada parametrização do modelo também são apresentadas na Tabela 4.4. Como comentado por Souza et al. (2010), Zeviani et al. (2012) e Fernandes et al. (2015) menores valores das medidas de não linearidade indicam melhores ajustes dos modelos, uma vez que obtém-se estimativas mais confiáveis. Este estudo mostra que os valores da curvatura intrínseca (c^l) permanecem praticamente constantes nas três parametrizações para os três modelos em todos os cenários, sendo que para suínos ela tem uma diminuição mais acentuada para o Modelo 3. Esta mudança da medida de não linearidade intrínseca, pode ser resultado da mudança do valor alométrico, pois ela não se alterou para os Modelos 1 e 2.

Já a medida de não linearidade paramétrica (c^θ), muda de acordo com a parametrização e o valor alométrico utilizado, sendo que conforme observado na Tabela 4.4, ela nos fornece piores resultados para o Modelo 1 e melhores resultados para o Modelo 3. Este fato evidencia e reforça que, para descrição das características de crescimento do grupo de animais em estudo, a parametrização e o valor de $m = 3/4$ é de suma importância para a obtenção de melhores ajustes.

É comum que se ignore, na prática, modelos com interpretação prática ou biológica para o parâmetro b , como nos trabalhos de Santoro et al. (2005), Silva et al. (2011), Silveira et al. (2011), Cassiano e Sáfiadi (2015), Jacob et al. (2015) e Rodrigues et al. (2018). No entanto, se a parametrização do Modelo 3 for utilizada, considerando a alometria correta, melhores ajustes podem ser obtidos nestes trabalhos.

Nas Figuras 4.1 a 4.4 estão ilustrados os gráficos dos ajustes das três parametrizações do modelo de von Bertalanffy aos dados de crescimento das quatro espécies de mamíferos de corte. Para todas as espécies é possível identificar o formato sigmoideal do desenvolvimento dos animais, no entanto, este formato é mais nítido para os dados de suínos o que pode ser explicado por haver um maior número de medidas de peso em seu intervalo em estudo.

Figura 4.1 – Ajuste dos três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de Bovinos.

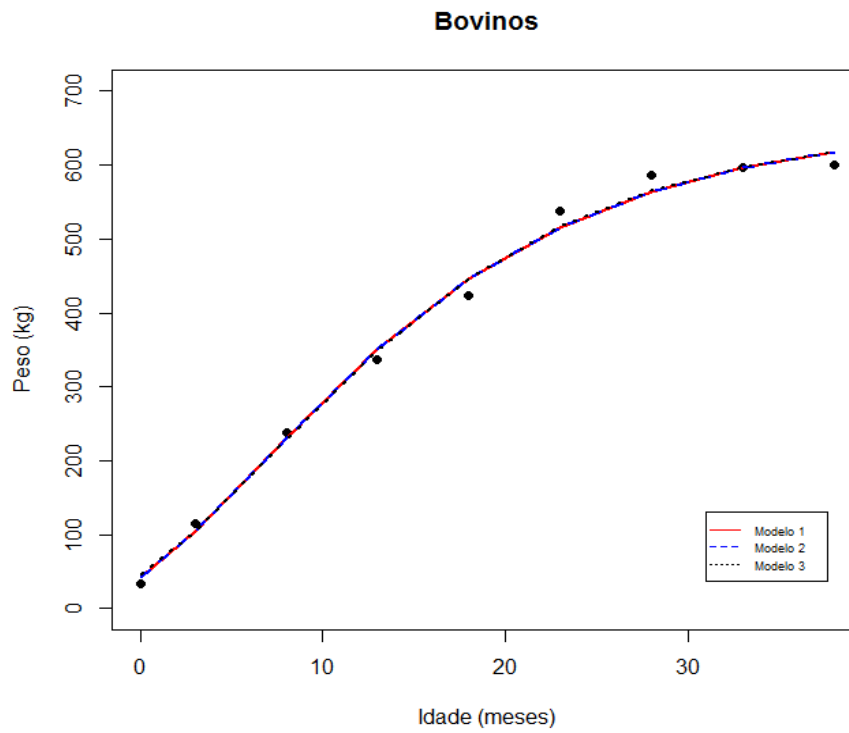


Figura 4.2 – Ajuste dos três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de Coelhos.

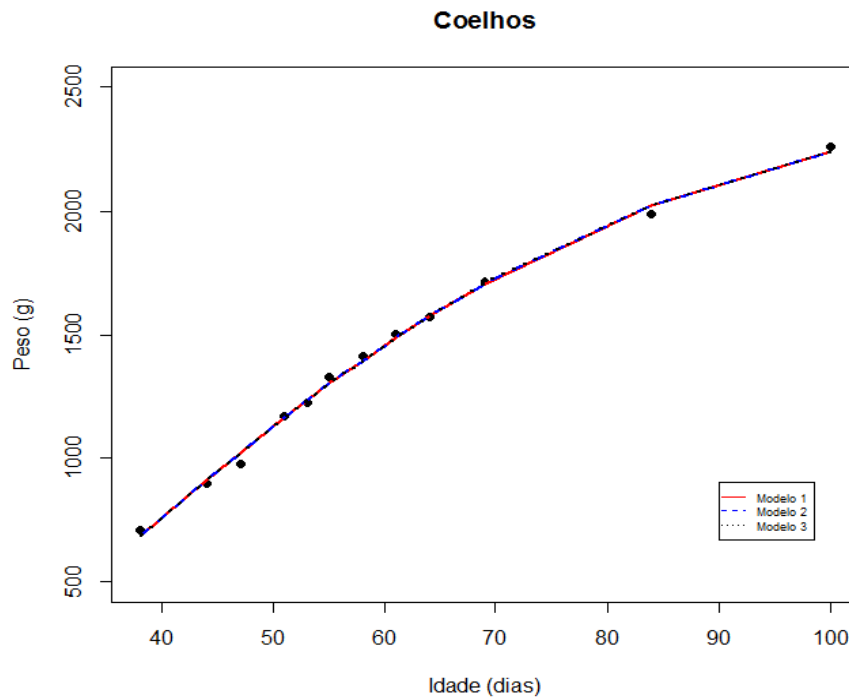


Figura 4.3 – Ajuste dos três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de Ovinos.

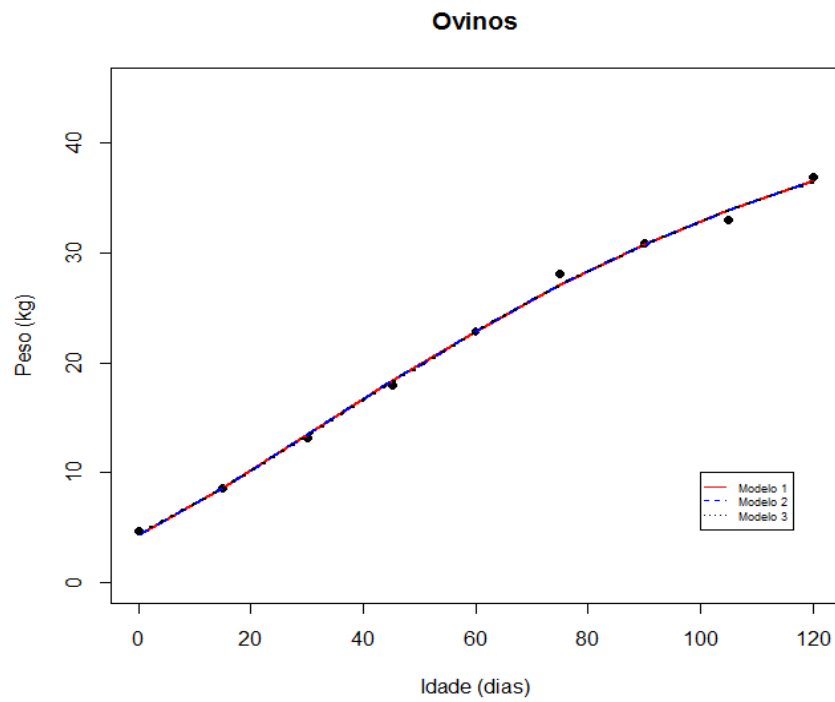
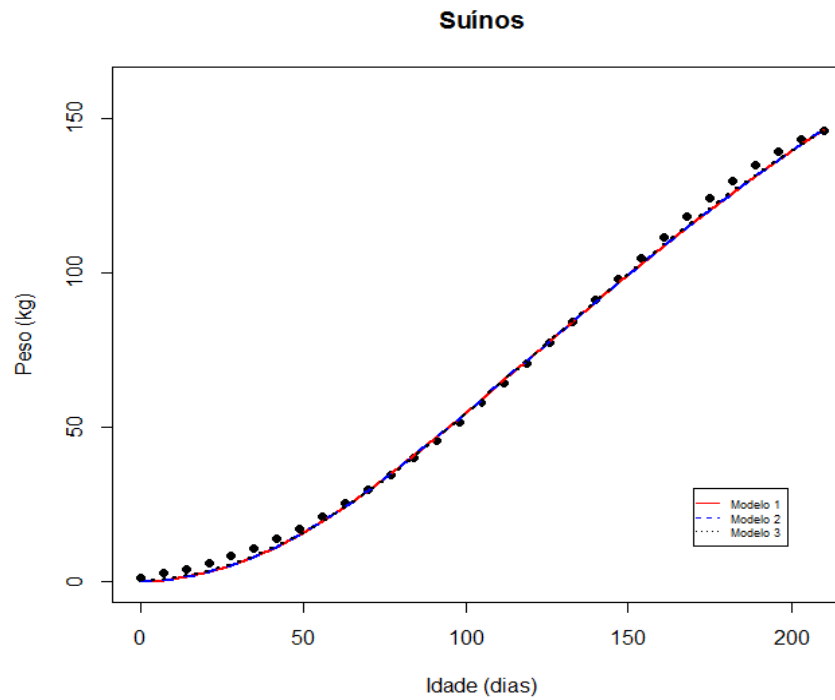


Figura 4.4 – Ajuste dos três modelos von Bertalanffy, em estudo, na descrição do crescimento do peso de Suínos.



No ajuste gráfico, as três parametrizações para todos os mamíferos em estudo, praticamente não se alteraram, nota-se que as linhas de ajustes para as três formas do modelo de von Bertalanffy estão sobrepostas, por isso, neste estudo não foi levado em conta a análise gráfica dos modelos para seleção do melhor modelo. O fato evidenciado é a superioridade do Modelo 3 perante os avaliadores de qualidade R^2 e $AICc$ e a diminuição considerável da não linearidade paramétrica tornando as estimativas dos parâmetros mais confiáveis.

5 CONCLUSÃO

Para os dados de mamíferos de corte analisados, o valor alométrico de $m = 3/4$ foi o mais adequado, e levou a menores valores do critério de informação de Akaike corrigido e a maiores valores do coeficiente de determinação.

O Modelo de von Bertalanffy com $m = 3/4$ suaviza a superestimação do parâmetro a , e sua parametrização fornece interpretação direta para o parâmetro b . Além de menores valores das medidas de curvatura, principalmente a paramétrica, fornecendo ajustes mais confiáveis. Assim, sugere-se que este modelo seja na descrição da curva de crescimento de mamíferos de corte.

6 REFERÊNCIAS

- BATES, D. M.; WATTS, D. G. Relative curvature measures of nonlinearity (with discussion). **Journal of the Royal Statistical Society. Serie B**, v. 42, n. 1, p. 1-25, 1980.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John Wiley, 1988. 365 p.
- BASSANEZI, R. C.. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Contexto, v. 2000, 2002. 389 p.
- BEALE, E. M. L. Confidence regions in nonlinear estimation (with discussion). **Journal of the Royal Statistical Society. Serie B**, v. 22, n. 1, p. 41-88, 1960.
- BERG, R.T.; BUTTERFIELD, R.M. Muscle: bone ratio and fat percentage as measures of beef carcass composition. **Animal Production**, v.8, n.1, p. 1-11, 1966.
- BOX, M. J. Bias in Nonlinear Estimation (with discussion). **Journal of the Royal Statistical Society. Serie B**, v. 32, n. 2, p. 171-201, 1971.
- BREUSCH, T.; PAGAN, A. Teste simples para heterocedasticidade e coeficiente de variação aleatória econométrica. **Sociedade Econométrica**, Rio de Janeiro, v. 47, p. 1287-11294, 1979.
- BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. Multimodel inference: understanding AIC and BIC in model selection. **Sociological methods and research**. Beverly Hills, v. 33, n. 2, p. 261-304, 2004.
- CALBO, A. G.; SILVA, W. L. C.; TORRES, A. C. Ajuste de funções não lineares de crescimento. **Revista Brasileira de Fisiologia Vegetal**, Londrina, v.1, n.1, p. 9-18, 1989.
- CARNEIRO, A. P. S. et al. Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v.49, n.1, p. 57-62, 2014.
- CASSIANO, F. R.; SÁFADI, T. Modelos de crescimento animal para tempos irregulares. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 50, n. 11, p. 1114-1119, 2015.
- CEZAR, I. M. et al. **Sistemas de produção de gado de corte no Brasil: uma descrição com ênfase no regime alimentar e no abate**. Embrapa Gado de Corte, 2005.
- CHEEKE, P. R. **Rabbit feeding and nutrition**. Orlando, Florida: Academic Press. INC, 1987.
- CORDEIRO, G. M.; PRUDENTE, A. A.; DEMÉTRIO, C. G. B. Uma revisão dos modelos normais não-lineares. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 27, n. 3, p. 360-393, 2009.
- DARVEAU, C. A. et al. Allometric cascade as a unifying principle of body mass effects on metabolism. **Nature**, v. 417, n. 6885, p. 166-170, 2002.

DODDS, P. S.; ROTHMAN, D. H.; WEITZ, J. S. Re-examination of the “3/4-law” of metabolism. **Journal of theoretical biology**, v. 209, n. 1, p. 9-27, 2001.

DRAPER, N.R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3rd ed. New York: J. Wiley, 1998. 706 p.

DURBIN, J.; WATSON, G. S. Testing for serial correlation in least squares regression: I. **Biometrika**, London, v. 37, p. 409-428, 1950.

ECKNER, A. **A note on trend and seasonality estimation for unevenly-spaced time series**. 2017. Available at: <http://www.eckner.com/papers/trend_and_seasonality.pdf>. Acesso em 22 abril de 2018.

EHNES, R. B.; RALL, B. C.; BROSE, Ulrich. Phylogenetic grouping, curvature and metabolic scaling in terrestrial invertebrates. **Ecology Letters**, v. 14, n. 10, p. 993-1000, 2011.

EMBRAPA. **Publicações**. 2017. Available at: <<https://www.embrapa.br/suinos-e-aves>>. Acesso em 22 abril de 2018.

ERDOGAN, E. et al. Statistical models for unequally spaced time series. **In: Proceedings of the 2005 SIAM International Conference on Data Mining. Society for Industrial and Applied Mathematics**, Auckland: University of Auckland, p. 626-630, 2005.

FALCÃO, P. F. et al. Curvas de crescimento de cordeiros da raça Ile de France criados em confinamento. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 16, n. 2, p. 377-386, 2015.

FAOSTAT, **Food and Agriculture Organization Corporate Statistical Database (2017)**. Disponível em: <<http://www.fao.org/faostat/en/#data/QL>>. Acesso em 02 fevereiro de 2019.

FERNANDES, T. J. **Curva de crescimento do fruto do cafeeiro em diferentes alinhamentos de plantio utilizando modelos não lineares**. 2012. 80 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2012.

FERNANDES, Tales Jesus et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, Lavras, v. 9, n. 2, p. 207-215, abr./jun. 2014.

FERNANDES, T. J. et al. Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 37, n. 4, p. 397-402, 2015.

FERREIRA, W. M. et al. **Manual prático de cunicultura**. Bambuí: Ed. do Autor, 2012.

FREITAS, A. R. Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa MG, v. 34, n. 3, p. 786-795, 2005.

FREITAS, G. C.; CARREGARO, A. B. Aplicabilidade da extrapolação alométrica em protocolos terapêuticos para animais selvagens. **Ciencia rural**, v. 43, n. 2, p. 297-304, 2013.

- LOPES, F. B. et al. Análises de dados longitudinais em bovinos Nelore Mocho por meio de modelos não lineares. **Archivos de zootecnia**, v. 65, n. 250, p. 123-129, 2016.
- LOPEZ, B. et al. Characterization of the commercial growth curves of Spanish Merino, Fleischschaf, and crossbred lambs in an associative economy context. **Small Ruminant Research**, v. 164, p. 8-14, 2018.
- LOUZADA, F. et al. Skew-normal distribution for growth curve models in presence of a heteroscedasticity structure. **Journal of Applied Statistics**, v.41, n.8, p. 1785-1798, 2014.
- MACEDO, M. C. M. Integração lavoura e pecuária: o estado da arte e inovações tecnológicas. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 38, n. 1, p. 133-146, 2009.
- MACHADO, L. C. Opinião: panorama da cunicultura brasileira. **Revista Brasileira de Cunicultura**, v. 2, n. 1, 2012.
- MAHMOOD, I. et al. Interspecies allometric scaling. Part I: prediction of clearance in large animals. **Journal of Veterinary Pharmacology and Therapeutics**, v.29, n.5, p.415-423, oct. 2006. Disponível em:
<<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1365-2885.2006.00786.x/full>>. Acesso em 11 julho de 2018.
- MANNO, M. C. et al. Efeitos da temperatura ambiente sobre o desempenho de suínos dos 30 aos 60 kg. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 35, n. 2, p. 471-477, 2006.
- MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não-linear. **Acta Scientiarum**, Maringá, v. 24, n. 6, p. 1761-1770, 2002.
- MAZZINI, A. R. et al. Curva de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autorregressivos. **Ciência Rural**, v. 35, n. 2, p. 422-427, 2005.
- MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. **Modelos não lineares: Funções assintóticas de crescimento**, 2014. 181 p.
- MOTULSKY, H.; CHRISTOPOULOS, A. **Fitting models to biological data using linear and nonlinear regression. A practical guide to curve fitting**. New York, Oxford University Press, 2004. 351 p.
- MUIANGA, C. A. et al. Descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro por modelos não lineares. **Revista Brasileira de Fruticultura**, v. 38, n. 1, p. 22-32, 2016.
- NETO, M. R. T. et al. Descrição do crescimento de ovinos Santa Inês utilizando modelos não-lineares selecionados por análise multivariada. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 17, n. 1, p. 26-36, 2016.
- OHNISHI, S. et al. On the analytical solution for the Pütter–Bertalanffy growth equation. **Journal of theoretical biology**, v. 343, p. 174-177, 2014.

OLIVEIRA, L.; BRANDÃO, A. J. V.; BASSANEZI, R. C. Modelo de Von Bertalanffy generalizado aplicado ao crescimento de suínos de corte. **Biomatemática** (UNICAMP)(1679-365X), Campinas-SP, p. 101-109, 2007.

ORGANIZAÇÕES DAS NAÇÕES UNIDAS (ONU). Disponível em: <<https://nacoesunidas.org/mundo-tera-22-bilhoes-de-pessoas-a-mais-ate-2050-indica-onu/>>. Acesso em 29 novembro de 2018.

PEREIRA, A. A. **Mamíferos de médio e grande porte na APA Pandeiros MG: inventário e estrutura da comunidade**. 71 p., 2017. Dissertação (Mestrado em Ecologia Aplicada)-Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2017.

PRADO, T. K. L. et al. Ajuste dos modelos Gompertz e Logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. **Ciência Rural**, v. 43, n. 5, 2013.

RIBEIRO, R. A. et al. Growth curve for height at withers of Mangalarga Marchador horses with heterocedasticity. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, v. 70, n. 1, p. 272-278, 2018.

RODRIGUES, A. et al. Isotonic regression analysis of Guzerá cattle growth curves. **Revista Ceres**, v. 65, n. 1, p. 24-27, 2018.

RUBNER, M. Ueber den einfluss der korpergrösse auf stoffund kraftwechsel. **Zeitschrift für Biologie**, v. 19, p. 535-562, 1883.

SANTORO, K. R. et al. Estimativas de parâmetros de curvas de crescimento de bovinos zebu, criados no estado de Pernambuco. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 34, n. 6, p. 2262-2279, 2005.

SARMENTO, J. L. R. et al. Estudo da curva de crescimento de ovinos Santa Inês. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 35, n. 2, p. 435-442, 2006.

SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New Jersey: J Wiley, 1989. 752 p.

SCAPIM, J.; BASSANEZI R. C. Modelo de Von Bertalanffy generalizado aplicado a curvas de crescimento animal. **Biomatemática** (UNICAMP)(1679-365X), Campinas-SP, p. 1-14, 2008.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, Cambridge, v. 52, n. 3/4, p. 591-611, 1965.

SHI, P-J. et al. On the 3/4-exponent von Bertalanffy equation for ontogenetic growth. **Ecological modelling**, v.276, p. 23-28, 2014.

SILVA, F. L. et al. Curvas de crescimento em vacas de corte de diferentes tipos biológicos. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 46, n. 3, p. 262-271, 2011.

SILVA, C. A. et al. Fatores que afetam o desempenho de suínos nas fases de crescimento e terminação. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 51, n. 10, p. 1780-1788, 2016.

SILVEIRA, F. G. et al. Análise de agrupamento na seleção de modelos de regressão não-lineares para curvas de crescimento de ovinos cruzados. **Ciência Rural**, v. 41, n. 4, 2011.

SORATO, A. **Ajuste de modelo não linear ao crescimento de duas cultivares de feijoeiro em diferentes tipos de semeadura**. Universidade Federal de Lavras. Lavras, 2012.

SOUZA, G. S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear**. Brasília: EMBRAPA-SPI, 1^aed., 1998. 505 p.

SOUZA, F. A. A. et al. Panorama da ovinocultura no estado de São Paulo. **Ceres**, v. 55, n. 5, 2008.

SOUZA, E. M. et al. Modelagem não linear da extração de zinco de um solo tratado com lodo de esgoto. **Acta Scientiarum. Technology**, Maringá-PR, v. 32, n. 2, 2010.

SOUZA, F. A. C. et al. Nonlinear modeling growth body weight of Mangalarga Marchador horses. **Ciência Rural**, v. 47, n. 4, 2017.

TEDESCHI, L. O. et al. Estudo da curva de crescimento de animais da raça Guzerá e seus cruzamentos alimentados a pasto, com e sem suplementação. 1. Análise e seleção das funções não-lineares. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 29, n. 2, p. 630-637, 2000.

TELEKEN, J. T. et al. Comparing non-linear mathematical models to describe growth of different animals. **Acta Scientiarum. Animal Sciences**, v.39, n.1, p. 73-81, 2017.

von BERTALANFFY, L. A quantitative theory of organic growth (inquiries on growth laws. II). **Human biology**, v. 10, n. 2, p. 181-213, 1938.

von BERTALANFFY, L. Untersuchungen über die Gesetzmäßigkeit des Wachstums. VII, Stoffwechseltypen und Wachstumstypen. **Biol. Zentralbl**, v. 61, p. 510-532, 1941.

von BERTALANFFY, L. Quantitative laws in metabolism and growth. **The quarterly review of biology**, v. 32, n. 3, p. 217-231, 1957.

ZEVIANI, W. M. et al. Modelos não lineares para a liberação de potássio de esterco animal em latossolos. **Ciência Rural**, v. 42, n. 10, 2012.

WEISBERG, S. **Applied linear regression** 3rd ed. Hoboken: J. Wiley, 2005. 352 p.

WEST, G. B. et al. Allometric scaling of metabolic rate from molecules and mitochondria to cells and mammals. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 99, n. suppl 1, p. 2473-2478, 2002.

WHITE, C. R.; SEYMOUR, R. S. Mammalian basal metabolic rate is proportional to body mass^{2/3}. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 100, n. 7, p. 4046-4049, 2003.

APÊNDICE A – Comandos R

```
#+++++#####  
# Script do software R utilizado para estimação dos parâmetros, testes#  
# estatísticos e geração de gráficos dos modelos não lineares ajustados#  
#+++++#####  
  
### AJUSTE PARA OS DADOS DE SUÍNOS  
  
## PACOTES NECESSÁRIOS  
  
library(nlme) # Precisa caso queira usar a gnls  
library(car) # Precisa para o teste de Durbin-Watson  
library(lmtest) # Precisa para o teste de Breush-Pagan  
library(MASS)  
  
## IMPORTANDO OS DADOS  
  
setwd("C:/Users/Felipe/Desktop/MestradoEst/Dissertação/Suinos")  
dados <- read.csv("dados1.csv", sep = ";", h = T)  
attach(dados)  
plot(dados$idade,dados$pesom)  
  
## AJUSTE DOS MODELOS  
  
ber1 <- nls(pesom~a*(1-b*exp(-k*idade))^3, start=c(a=180,b=6,k=0.03),  
data=dados)  
summary(ber1)  
  
ber2 <- nls(pesom~a*(1-exp(k*(b-idade))/3)^3, start=c(a=150,b=84,k=0.03),  
data=dados)  
summary(ber2)
```

```
ber3 <- nls(pesom~a*(1-exp(k*(b-idade)))/4)^4, start=c(a=180,b=64,k=0.03),
data=dados)
summary(ber3)

## ANÁLISE DE RESÍDUOS

# Normalidade
shapiro.test(residuals(ber1))

# Independência
MG1=attr(ber1$m$fitted(),"gradient")
mlg1=lm(pesom~-1+MG1,data=dados)
durbinWatsonTest(mlg1)

# Hoceslasticidade
bptest(mlg1)

## AJUSTE DOS MODELOS COM AR(1)

require(nlme)
ber4 <- gnls(pesom~a*(1-b*exp(-k*idade))^3, start=c(a=242,b=0.94,k=0.0083),
data=dados,correlation = corAR1())
summary(ber4)

require(nlme)
ber5 <- gnls(pesom~a*(1-exp(k*(b-idade))/3)^3, start=c(a=240,b=64,k=0.03),
data=dados,correlation = corAR1())
summary(ber5)

require(nlme)
ber6 <- gnls(pesom~a*(1-exp(k*(b-idade)))/4)^4, start=c(a=240,b=64,k=0.03),
data=dados,correlation = corAR1())
```

```

summary(ber6)

## AVALIADORES DE AJUSTE

## Medidas de Não Linearidade
# Curvatura de Bates e Watts
library(MASS)
expcurv=deriv3(~(a*(1-b*exp(-k*idade))^3), c("a","b","k"),
function(a,b,k,idade)NULL)
reg=nls(pesof~expcurv(a,b,k,idade), start=c(a=180,b=6,k=0.03))
rms.curv(reg)

# Coeficiente de Determinação
Rsq(ber4)
Rsq(ber5)
Rsq(ber6)

# Critério da Informação de Akaike
library(AICcmodavg)
AICc(ber4)
AICc(ber5)
AICc(ber6)

## GRÁFICO AJUSTADO

plot(dados$idade,dados$pesof, xlab="Idade (dias)", ylab="Peso (kg)",
ylim=c(0,160), main="Crescimento de Suínos", pch=19)
lines(dados$idade,fitted(ber4), col="blue", lty=1, lwd=2)
lines(dados$idade,fitted(ber5), col="red", lty=2, lwd=2)
lines(dados$idade,fitted(ber6), col="black", lty=3, lwd=2)
legend(155,55, c("Modelo 1","Modelo 2", "Modelo 3"), lty=c(1,2,3),
pch=c("", "", "", "",""), bty="n", col=c("blue","red","black"), cex=.60)

```



```
#+++++#  
# PARA O AJUSTE DOS DEMAIS MAMÍFEROS O PROCEDIMENTO  
# FOI O MESMO DESCRITO ACIMA, SEM O AR(1).  
#+++++#
```