



ÍCARO VITERBRE DEBIQUE SOUSA

**CONSTRUÇÃO ANALÍTICA DE SEMIVARIOGRAMAS
MÉDIOS PARA KRIGAGEM DE BLOCOS**

LAVRAS – MG

2020

ÍCARO VITERBRE DEBIQUE SOUSA

**CONSTRUÇÃO ANALÍTICA DE SEMIVARIOGRAMAS MÉDIOS PARA
KRIGAGEM DE BLOCOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Marcelo Silva de Oliveira

Orientador

LAVRAS – MG

2020

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Fichas Catalográficas da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio autor(a).**

Sousa, Ícaro Viterbre Debique

Construção analítica de semivariogramas médios para krigagem de blocos / Ícaro Viterbre Debique Sousa. – Lavras : UFLA, 2020.

92 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal de Lavras, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Silva de Oliveira.

Bibliografia.

1. Semivariogramas médios. 2. Krigagem de blocos. 3. Médias espaciais. Universidade Federal de Lavras. I. Oliveira, Marcelo Silva de. II. Título.

ÍCARO VITERBRE DEBIQUE SOUSA

**CONSTRUÇÃO ANALÍTICA DE SEMIVARIOGRAMAS MÉDIOS PARA
KRIGAGEM DE BLOCOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 03 de Março de 2020.

Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima	UFLA
Prof. Dr. Marcelo Ângelo Cirilo	UFLA
Prof. Dr. Marcelo Lemos de Medeiros	UI

Prof. Dr. Marcelo Silva de Oliveira
Orientador

**LAVRAS – MG
2020**

A Deus, a meus pais Helton e Carmita e meu irmão Heron.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, por prevalecer seus planos diante aos meus.

A meus pais Helton e Carmita, pela confiança e incentivo em toda a minha vida; vocês são as grandes inspirações da minha vida.

A meu irmão Heron, meu porto seguro em meio a qualquer caos que me ocorra. O amor por vocês faz com que eu não desanime nessa árdua caminhada e o apoio de vocês foi essencial para a realização deste sonho.

Agradeço a Universidade Federal de Lavras (UFLA) e o Departamento de Estatística (DES), pela oportunidade de realizar o mestrado.

Ao Grupo de Pesquisa em Estatística Espacial (GPS). O apoio de todos os membros foi essencial para a compreensão das dificuldades no aprendizado.

Também agradeço aos amigos que fiz em Lavras, em especial meus companheiros de moradia, Alexandre, Pedro e Rogério, que vivenciaram a minha luta e sempre proporcionaram um ambiente ideal para o convívio.

Aos professores membros da banca, Renato Ribeiro, Marcelo Cirilo, Marcelo Lemos e meu orientador Marcelo Oliveira. Obrigado por cada ensinamento, sugestões e críticas.

Agradecimento especial a meu orientador Marcelo Oliveira. Sou grato pelas horas de conversas sobre o trabalho desenvolvido e também sobre a vida; seus ensinamentos me acompanharão por toda minha jornada. "Apegue-se à instrução, não a abandone; guarde-a bem, pois dela depende a sua vida. Não siga pela vereda dos ímpios nem ande no caminho dos maus". (Provérbios 4:13-14)

Ao povo brasileiro, por confiar em minhas mãos a possibilidade de realizar este estudo.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) pela concessão da bolsa durante todo período do curso.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste sonho.

"Se o erro não existisse, deveria ser inventado"
(Savielly Grigorievich Tartakower)

RESUMO

Diversas áreas da ciência, tais como ambientais, biológicas, epidemiológicas, agropecuárias, entre outras, possuem dados com variações no espaço. Na maioria dos estudos, mensuram-se somente as variações utilizando procedimentos estatísticos que não levam em conta as interações existentes entre as dimensões do espaço. Para se abordar a espacialidade tem-se a existência da Geoestatística, que com o uso do semivariograma é capaz de detectar a dependência espacial de um fenômeno. Normalmente, a Geoestatística utiliza-se de um preditor pontual. Neste trabalho é tratado um sistema de predição para toda uma região, denominado krigagem de blocos, que tem o intuito de prever o valor médio do fenômeno no local de estudo. A principal complexidade desta técnica é a modelagem dos semivariogramas médios, pois atualmente essa necessidade é realizada somente de maneira numérica, sendo assim contendo erros de aproximação. Apresenta-se então a construção dos semivariogramas médios analiticamente e com os resultados obtidos, é possível trabalhar em qualquer dimensão de região sem apresentar erros numéricos, com a total precisão de uma solução analítica que ainda não havia sido apresentada na literatura recorrente sobre krigagem de blocos. Toda a técnica para se construir os semivariogramas médios de maneira analítica é apresentada, com o foco em modelar os semivariogramas médios para os modelos linear, esférico e pentaesférico. Para os três resultados obtidos, os semivariogramas médios esférico e pentaesférico ainda não possuem na literatura usual resultados analíticos, assim como o modelo pentaesférico. O avanço da krigagem de blocos pode solucionar problemas de predição de média para diversos fenômenos, como produção agrícola, quantitativos de blocos de mineração ou qualquer outra necessidade de se obter valores médios da variável aleatória, considerando a espacialidade do fenômeno.

Palavras-chave: Semivariogramas médios. Krigagem de blocos. Médias espaciais.

ABSTRACT

Several areas of science, such as environmental, biological, epidemiological, agricultural, among others, have data with variations in space. In most studies, one only measures variations using statistical procedures that do not take into account the interactions between the dimensions of space. In order to address spatiality, there is Geostatistics, which uses the semivariogram to detect the spatial dependence of a phenomenon. Normally, Geostatistics uses a point predictor; this work deals with a prediction system for an entire region, called block kriging, which aims to predict the average value of the phenomenon at the study site. The main complexity of this technique is the modeling of the average semivariograms, since it is currently addressed only numerically, thus containing approximation errors. In this study, we analytically present the construction of the average semivariograms, and, with the results obtained, it is possible to work in any dimension of the region without producing numerical errors, with the total precision of an analytical solution that had not yet been presented in the recurrent literature on block kriging. The entire technique for constructing the average semivariograms in an analytical manner is presented, with focus on modeling the average semivariograms for the linear, spherical and pentaspherical models. For the three results obtained, the spherical and pentaspherical average semivariograms do not yet have analytical results in the usual literature, as well as the pentaspherical model. The advancement of kriging blocks can solve problems of average prediction for several phenomena, such as agricultural production, quantitative of mining blocks or any other need to obtain average values of the random variable, considering the spatiality of the phenomenon.

Keywords: Average semivariograms. Block kriging. Space averages.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Imagem observada pelo satélite, pixels em uma região aleatória de floresta .	13
Figura 2.2 – Um pixel coletado pelo satélite	13
Figura 2.3 – O mesmo pixel coletado por um satélite de resolução maior de imagem . .	13
Figura 2.4 – Imagem observada pelo satélite em uma região aleatória de floresta com um pixel falho	14
Figura 3.1 – Campo Aleatório	17
Figura 3.2 – Fenômeno isotrópico e fenômeno anisotrópico	18
Figura 4.1 – Semivariograma teórico, estimado e nuvem de pontos	24
Figura 6.1 – Função $f(x)$ e área A_T abaixo do gráfico	30
Figura 6.2 – Região B abaixo da função $f(x,y)$	32
Figura 6.3 – Sólido com área da base B e alturas $h's$	33
Figura 6.4 – Sólido com área da base B e altura \bar{h}	33
Figura 8.1 – Região B de lados P e Q	38
Figura 8.2 – Semivariograma médio entre um ponto e uma área	41
Figura 8.3 – Curva $M(h)$ para $h \leq P$	42
Figura 8.4 – Curva $M(h)$ para o intervalo $P < h \leq Q$	43
Figura 8.5 – Curva $M(h)$ para o intervalo $Q < h \leq \sqrt{P^2 + Q^2}$	43
Figura 10.1 – Resultado obtido por Journel e Huijbregts para o semivariograma médio linear	51
Figura 10.2 – Resultado obtido por Journel e Huijbregts para o semivariograma médio esférico	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 10.1 – Valores numéricos para a semivariância média entre um ponto e uma área para o modelo esférico obtido por Isobel Clark	52
Tabela 10.2 – Valores obtidos para a semivariância média entre um ponto e uma área para o modelo esférico	52
Tabela 10.3 – Diferença dos valores das tabelas 10.1 e 10.2	53
Tabela 10.4 – Valores obtidos para a semivariância média entre um ponto e uma área para o modelo pentaesférico	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	MOTIVAÇÃO DO TRABALHO	13
3	A GEOESTATÍSTICA E A PREDIÇÃO DE VARIÁVEIS ESPACIAIS	15
3.1	Dependência espacial	16
3.1.1	Campo aleatório	16
3.1.2	Pressuposições	17
3.1.2.1	Isotropia	17
3.1.2.2	Estacionaridade de segunda ordem	19
3.1.2.3	Hipótese intrínseca	20
4	SEMIVARIOGRAMA	21
4.1	Modelos com patamar	23
4.2	Modelos sem patamar	23
4.3	Comportamento do semivariograma	24
5	PREDIÇÃO ESPACIAL PONTUAL	26
5.1	Krigagem	26
5.1.1	Krigagem ordinária	27
6	MÉDIA ESPACIAL	30
6.1	Média espacial em um sistema bidimensional	30
6.2	Média espacial em um sistema tridimensional	32
6.3	Média espacial de uma variável aleatória	34
7	O VALOR MÉDIO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA	35
7.1	Cálculo integral	35
7.1.1	Convergência estocástica	36
7.1.1.1	Convergência em média	36
8	KRIGAGEM DE BLOCOS	38
8.1	Semivariogramas para krigagem de blocos	40
8.1.1	Construção do semivariograma médio	40
9	MATERIAIS E MÉTODOS	45
9.1	Pesquisa bibliográfica	45
9.2	Recursos computacionais	45
10	RESULTADOS	46

10.1	Semivariograma médio linear	46
10.2	Semivariograma médio esférico	47
10.3	Semivariograma médio pentaesférico	49
10.4	Validação dos Resultados	50
10.4.1	Validação do semivariograma médio para o modelo linear	51
10.4.2	Validação do semivariograma médio para o modelo esférico	51
10.4.3	Validação do semivariograma médio para o modelo pentaesférico	54
11	CONCLUSÃO	56
	REFERÊNCIAS	57
	APENDICE A – Semivariograma médio linear	60
	APENDICE B – Semivariograma médio esférico	70
	APENDICE C – Semivariograma médio pentaesférico	80
	APENDICE D – Semivariogramas médios para os modelos usuais	91

1 INTRODUÇÃO

Existe uma grande necessidade de prever determinados fenômenos, tais como relacionados à mineração, clima e ciências agrárias. Estes fenômenos muitas vezes são caracterizados por possuírem dependência espacial; sendo assim, necessitam de uma técnica estatística específica para sua modelagem.

A variabilidade dos fenômenos espaciais, dentro das Ciências Agrárias, especialmente no solo, sempre foi uma das preocupações de pesquisadores. Smith (1907) estudou a disposição de parcelas no campo em experimento de rendimento nas variedades de milho, na tentativa de eliminar efeitos da variação do solo; já Montgomery (1913) estudou o efeito do nitrogênio no rendimento de trigo. Estes são exemplos do princípio dos estudos em variabilidade espacial.

Um dos primeiros a observar de maneira profunda a necessidade de se explorar os dados com uma análise espacial foi Krige (1951). Enquanto trabalhava nas minas de ouro da África do Sul, percebeu que não havia o entendimento do fenômeno se não considerasse a distância entre as amostras, ou seja, se não considerasse a variação espacial. Posteriormente, os estudos de Matheron (1971) desenvolveram os conceitos básicos da Geoestatística, ferramenta utilizada para a predição de fenômenos contínuos no espaço por meio de um interpolador próprio denominado krigagem, nome dado em homenagem a Daniel Krige.

A ideia mais difundida sobre a Geoestatística é como um preditor de uma variável em um ponto no espaço, que é denominada krigagem pontual. Este tipo de krigagem é muito utilizada, pois diversos pontos em uma determinada área é possível então obter um sistema de mapeamento daquela variável. Outra ferramenta da Geoestatística é a krigagem de blocos, menos utilizada em comparação ao método de predição pontual, mas que possui grande valor, em que o sistema de mapeamento não é o fundamental e sim valores totais da variável na região.

A krigagem de blocos tem a função de estimar valores médios da variável aleatória do fenômenos em regiões específicas. O principal fator para a pouca difusão da técnica é a complexidade que apresenta ao obter os pesos de krigagem. A krigagem pontual utiliza a semivariância entre pontos; a krigagem de blocos também utiliza a semivariância entre os pontos, mas, além disso, utiliza a semivariância média entre os pontos e a região, sendo essa a complexidade da técnica.

O semivariograma médio entre os pontos e uma área é apresentado na literatura somente de maneira numérica, não é encontrado resultados analíticos. Assim se mostra a importância de se construir a semivariância média de uma maneira analítica, eliminando os erros numéricos.

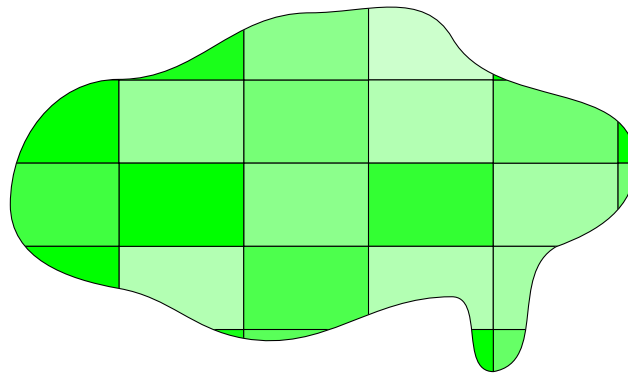
Para se vencer a dificuldade da construção dos semivariogramas médios, tem-se como objetivo deste trabalho apresentar conceitos iniciais de Geoestatística, posteriormente à krigagem pontual, pois ambos conhecimentos são a base para entender-se a necessidade da krigagem de blocos. O objetivo principal é apresentar a construção analítica dos semivariogramas médios para os modelos linear, esférico e pentaesférico. Ao obter os resultados para o linear e esférico, é possível comparar com os resultados numéricos apresentados na literatura. Demonstrando a precisão dos métodos abordados tem-se a base para se obter para o modelo pentaesférico, modelo esse que não existe resolução numérica e nem analítica na literatura.

Com a realização dos objetivos é possível construir semivariogramas médios para regiões retangulares para qualquer valor de lados, diferente dos principais autores que ao utilizar métodos numéricos limitaram-se a retângulos de lados prefixados. Também é possível definir o caminho de cálculo à ser trabalhado para qualquer modelo de semivariograma, visto que, nesta dissertação, se apresenta o raciocínio, as equações e os métodos para tal cálculo.

2 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

Antes de observar as dificuldades em se trabalhar com a krigagem de blocos é mais importante mencionar a motivação no estudo de tal técnica. Vamos tomar como exemplo fictício, mas que se assemelha à realidade e que foi o princípio para o desenvolvimento deste trabalho: dada uma região aleatória de floresta, ao se retirar imagens de satélite com suficiente ampliação para ver os pixels tem-se a figura 2.1.

Figura 2.1 – Imagem observada pelo satélite, pixels em uma região aleatória de floresta



Fonte: o autor (2020)

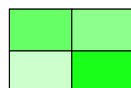
Notamos que o satélite captura imagens de dimensões fixas, as quais não serão necessárias para o entendimento. Se tomarmos um pixel qualquer, conforme a figura 2.2 e se pudéssemos observar em uma melhor resolução, teríamos pixels de dimensões menores; logo, mais detalhes de uma mesma área, como podemos verificar na figura 2.3.

Figura 2.2 – Um pixel coletado pelo satélite



Fonte: o autor (2020)

Figura 2.3 – O mesmo pixel coletado por um satélite de resolução maior de imagem

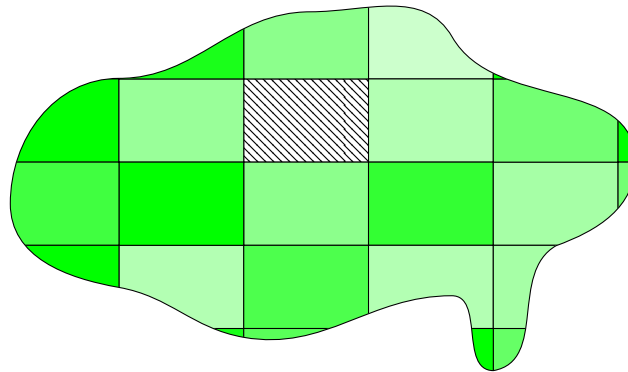


Fonte: o autor (2020)

A hipótese que motivou a construção deste trabalho foi se em uma situação o satélite não fosse capaz de observar um ou mais pixels, o que pode ocorrer com a posição das nuvens interferindo a captura da imagem. O valor desse pixel que não se obteve captura pode ser estimado pela média de todos os pixels infinitesimalmente menores que existem naquela região, ou seja, a cor resultante no pixel do satélite seria a média de todas as cores dentro do mesmo, uma vez que cada cor observada pode ser associada a uma variável numérica. Este trabalho não tem como objetivo apresentar resultados sobre tal hipótese; ela foi o primeiro pensamento para se desenvolver um estudo teórico sobre krigagem de blocos.

Assim, se em outra passagem do satélite sobre a região aleatória de floresta existisse a falha de um pixel como a figura 2.4, ele poderia ser reconstruído utilizando a média de todos os pixels menores naquela região. Esse maior detalhamento poderia, por exemplo, ser obtido com sobrevoo de drone, pois este apresenta imagens com maiores detalhes dentro da região. Assim, teríamos os valores de cor em cada pequeno pixel e ao realizarmos a média espacial desse fenômeno conseguiríamos reconstruir o valor perdido para a imagem do satélite naquele local.

Figura 2.4 – Imagem observada pelo satélite em uma região aleatória de floresta com um pixel falho



Fonte: o autor (2020)

Observando esse problema existente no sensoriamento remoto, criou-se então a necessidade de um estudo em médias espaciais e assim surgiu a ideia do uso da krigagem de blocos e toda sua complexidade ao se construir os semivariogramas médios. Serão apresentadas a frente outras hipóteses do uso da krigagem de blocos. Ressalta-se o questionamento feito neste capítulo como o gerador do pensamento inicial para este trabalho.

Nos próximos capítulos serão abordados os conceitos básicos para se utilizar krigagem de blocos e, posteriormente, o desenvolvimento da técnica em si.

3 A GEOESTATÍSTICA E A PREDIÇÃO DE VARIÁVEIS ESPACIAIS

Cientistas em diferentes áreas do conhecimento estão estudando processos de variação espacial e/ou temporal (CRESSIE, 1990). Muitos desses estudos têm como princípio de análise a utilização da Geoestatística.

A Geoestatística surgiu na África do Sul, onde o engenheiro de minas Daniel Krige (1951), trabalhando na mineração de ouro, concluiu ao analisar suas amostras de concentração do material, que as covariâncias de duas amostras estavam relacionadas à distância entre elas. Na França, Matheron (1971) desenvolveu, com base nas análises de Daniel Krige, a Teoria das Variáveis Regionalizadas, primeiro nome dado a Geoestatística. Atualmente, não se utiliza essa denominação, mas devido a sua importância no contexto histórico do desenvolvimento inicial da Geoestatística, é aqui mencionada para registro histórico.

Ainda segundo George Matheron (1971), uma variável regionalizada é uma função $f(s)$ do ponto s , mas também é uma função irregular na qual se têm dois aspectos contraditórios ou complementares: um aspecto aleatório, cuja irregularidade não permite prever variações de um ponto a outro; e um aspecto estruturado, que reflete as características estruturais do fenômeno regionalizado.

Os estudos de George Matheron proporcionaram os primeiros métodos geoestatísticos e, posteriormente, os sistemas de krigagem. As primeiras aplicações da Geoestatística foram no setor da mineração, sendo essa etapa conhecida como a primeira fase da Geoestatística.

Posteriormente, os conhecimentos desenvolvidos passaram a ser utilizados em dados relacionados ao ambiente. Segundo Vieira (2000), nessa fase também foi introduzido o tempo como uma quarta coordenada, adicionada às três dimensões espaciais.

A terceira etapa do desenvolvimento da Geoestatística foi a sua aplicação ao setor petrolífero. Com essa gama de aplicação, verificou-se o potencial das ferramentas desenvolvidas por Matheron em diferentes análises de fenômenos espaciais.

A Geoestatística teve suas primeiras aplicações em mineração como tratado por Blais e Carlier (1968), David (1970), Ugarte (1972), Journel (1974) e Olea (1975); depois em hidrologia Delhomme (1978); ciências do solo em Hajrasuliha et al. (1980), Vieira, Lombardi e Burrows (1991) e Vauclin et al. (1982); em extração de petróleo Hohn (1998) e em sensoria-mento remoto Vauclin et al. (1982) e Vieira et al. (1983).

3.1 Dependência espacial

Determinados fenômenos apresentam características específicas que podem ser denominadas como dependência espacial. Dada uma variável aleatória indexada pela posição espacial $Z(s)$, pode ser definida em três componentes.

$$Z(s) = \mu(s) + \varepsilon(s) + \delta(s) \quad (3.1)$$

em que $\mu(s)$ é média, ou a tendência espacial, $\varepsilon(s)$ o ruído e $\delta(s)$ é a componente que guarda a dependência espacial. Nos próximos itens são abordados conceitos específicos para mapear a dependência espacial. O fenômeno é o conjunto de todos os valores possíveis da variável de interesse, que define a distribuição e variabilidade espaciais dessa variável em um domínio.

3.1.1 Campo aleatório

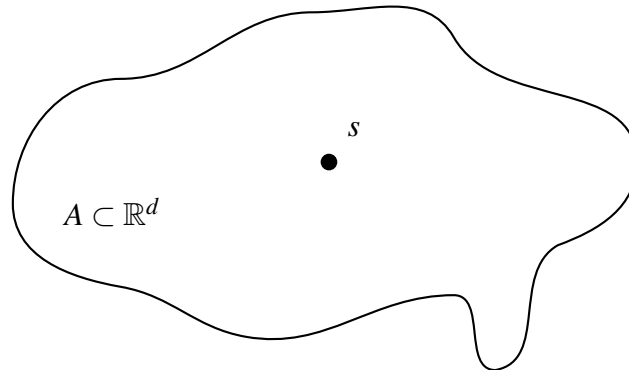
A definição desenvolvida por Matheron (1971) para as Variáveis Regionalizadas as caracterizam como uma função espacial numérica que apresenta variações de um ponto a outro no espaço, distribuída de forma contínua no espaço. Se trata de uma variável aleatória que assume valores no espaço \mathbb{R}^d , que é d -dimensional, sendo $d \geq 1$ e possui valores em cada ponto nesse espaço. Segundo Oliveira (2003), a localização ou o suporte geométrico é uma das características da variável regionalizada e está diretamente ligada à estrutura do fenômeno espacial. Já Cressie (1988) define a Geoestatística define a Geoestatística como um ramo da Estatística Espacial que estuda a relação de uma variável regionalizada com ela mesma em outra posição.

Para definir a situação em estudo, seja então $Z(s)$ uma variável aleatória medida na localização $s \in \mathbb{R}^d$ em uma região A , isso é ilustrado na figura 3.1. na qual tem-se que \mathbb{R}^d é o espaço com dimensão d , são $d = 1, 2, 3, \dots, n$. Define-se então o modelo geoestatístico fundamental conforme a equação 3.2, representado de maneira ilustrativa na figura 3.1 :

$$\{Z(s) : s \in A \subset \mathbb{R}^d\} \quad (3.2)$$

Sendo que uma realização é denotado por $\{z(s) : s \in A\}$.

Figura 3.1 – Campo Aleatório



Fonte: o autor (2020)

Oliveira (1991) define que para casos em que $d = 1$, têm-se variações unidimensionais, como as utilizadas em estudos de séries temporais; para $d = 2$, os dados estão localizados em um plano; para $d = 3$ no espaço tridimensional; e para $d = 4$, consideram-se as variações no espaço-tempo. Nesta dissertação, o subconjunto A será denominado de região e estará sempre contido em um plano \mathbb{R}^2 , um plano bidimensional. Os pontos s coletados então são vetores de duas coordenadas, passam a ser destacados nesta dissertação como \mathbf{s} .

Podem ocorrer casos em que o pesquisador colete várias informações (várias variáveis) em um ponto \mathbf{s} . Para esta dissertação vamos considerar somente uma variável $Z(\mathbf{s})$ em cada ponto \mathbf{s} . A região A adotada sempre será em um plano de duas dimensões, ou seja, $d = 2$. Para toda essa dissertação teremos observações $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in A \subset \mathbb{R}^2\}$.

3.1.2 Pressuposições

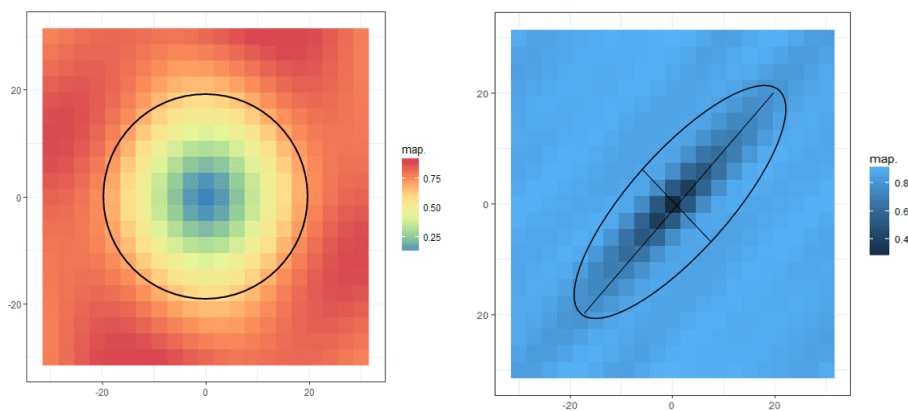
De acordo com Vieira (2000), podemos definir duas hipóteses de estacionaridade para uma função aleatória $Z(\mathbf{s})$. É também comum impor a condição de isotropia, sendo possível a modelagem de fenômenos anisotrópicos. Normalmente atingem um alto nível de análise e modelagem, nem sempre enfrentado.

3.1.2.1 Isotropia

Em Geoestatística, a covariância demonstra a relação entre amostras separadas por um vetor \mathbf{h} . Uma das pressuposições mais comuns para uma análise geoestatística é que essa medida não se modifique para um mesmo vetor \mathbf{h} , mas em direções diferentes.

Para situações onde a covariância se modifica em direções diferentes, denominamos de anisotropia; normalmente para uma análise geoestatística é denominado isotropia. Existem possibilidades de se realizar uma modelagem geoestatística em fenômenos anisotrópicos, se tornando um fator de complexidade que não será abordado nesta dissertação. Todos os fenômenos abordados neste trabalho satisfazem a condição inicial de isotropia. Na figura 3.2 podemos analisar de maneira visual as diferenças entre um fenômeno isotrópico e um fenômeno anisotrópico.

Figura 3.2 – Fenômeno isotrópico e fenômeno anisotrópico



Fonte: Yamamoto e Landim (2015)

Observe que na figura 3.2 à esquerda temos um fenômeno isotrópico, que possui comportamento semelhante em todas as direções, mas, à direita, é representada a anisotropia com um comportamento distinto em cada direção.

De acordo com Yamamoto e Landim (2015), para detectar se o fenômeno espacial apresenta anisotropia ou não, a covariância é calculada para várias direções. Ainda seguindo Yamamoto e Landim (2015), em fenômenos isotrópicos, não se tem a necessidade de considerar a direção do vetor \mathbf{h} e sim somente a sua distância h , que é a distância entre os pontos.

Ao trabalharmos em um plano bidimensional, ou seja, \mathbb{R}^2 , se temos um ponto \mathbf{s}_1 que possui coordenadas (x_1, y_1) e um ponto \mathbf{s}_2 que possui coordenadas (x_2, y_2) , existe uma distância h entre eles que é determinada por:

$$h = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (3.3)$$

Então, a covariância de duas variáveis regionalizadas para pontos separados por uma distância h do vetor \mathbf{h} e pode ser calculada como:

$$C(\mathbf{h}) = E \{ [Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - \mu(\mathbf{s} + \mathbf{h})] [Z(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{s})] \} \quad (3.4)$$

Onde a covariância para uma distância h nulo é igual à variância de $Z(\mathbf{s})$.

Podemos concluir então que um fenômeno é dito isotrópico quando sua semivariância depende somente do tamanho do vetor \mathbf{h} , ou seja, somente da distância h , dado pela equação (3.4), e não de sua direção ou sentido e o caso contrário denominamos de anisotropia.

É importante ressaltar que a estacionaridade de segunda ordem e a hipótese intrínseca, que serão abordadas posteriormente, não dependem de isotropia. O fenômeno anisotrópico pode ser analisado sob estacionaridade de segunda ordem ou hipótese intrínseca.

3.1.2.2 Estacionaridade de segunda ordem

A definição de Vieira (2000) para estacionaridade de segunda ordem é especialmente adequada para a utilização neste texto. Para que uma variável aleatória seja estacionária de segunda ordem ela deve, inicialmente, ser estacionária de primeira ordem. Define-se então que uma variável aleatória $Z(\mathbf{s})$ é estacionária de primeira ordem, se:

$$E [Z(\mathbf{s})] = \mu \quad (3.5)$$

ou seja, o valor esperado $E [Z(\mathbf{s})]$ deve existir e não depender da posição \mathbf{s} dentro da área A .

Para que então ela seja estacionária de segunda ordem, deve também, para cada par de variáveis aleatórias, a função covariância $C(\mathbf{h})$, existir e for somente em função da distância h , ou seja:

$$C(\mathbf{h}) = E [Z(\mathbf{s}) Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] - \mu^2 \quad (3.6)$$

sendo para qualquer \mathbf{s} dentro da região A .

3.1.2.3 Hipótese intrínseca

A hipótese de estacionaridade de segunda ordem implica na existência de uma variância finita dos valores medidos. Tal hipótese pode não ser satisfeita para alguns fenômenos que têm capacidade infinita de dispersão. Exemplos podem ser observados nas concentrações de ouro em minas da África do Sul observados por Krige (1951); o movimento browniano apresentados Journel e Huijbregts (1978) e algumas cadeias de Markov apresentadas por Bartlett (1966).

De acordo com Vieira (2000), para tais situações, uma hipótese menos restritiva, a hipótese intrínseca, pode ser aplicável. Essa hipótese requer apenas a existência e estacionaridade do variograma, sem nenhuma restrição quanto à existência de variância finita.

Uma variável aleatória é intrínseca quando além de satisfazer a equação (3.5), a estacionaridade do primeiro momento estatístico, também o incremento $Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})$, ou seja, é somente em função de \mathbf{h} . Isso pode ser apresentado conforme a equação (3.7).

$$\text{Var}[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] = E [Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})]^2 = 2\gamma(\mathbf{h}) \quad (3.7)$$

em qualquer \mathbf{s} está dentro da região A .

Para este trabalho adota-se que todos os fenômenos satisfazem a hipótese intrínseca e a isotropia.

4 SEMIVARIOGRAMA

Até o início dos anos 1960, a análise de dados espaciais com espaço de índice contínuos era feita sob a hipótese de independência estatística ou distribuição espacial aleatória, para permitir o uso de métodos estatísticos como análise de variância e parâmetros como o coeficiente de variação, são exemplos os estudos de Harradine et al. (1950) e Ball e Williams (1968). Conhecendo as hipóteses da Geoestatística, podemos então trabalhar com a dependência espacial.

O semivariograma é utilizado na Geoestatística para caracterizar a dependência espacial dos dados, considerando todas as combinações de pares de pontos medidos no espaço, separados por uma distância h . As diferenças quadráticas entre os valores permitem então a construção do semivariograma, que segundo Isaaks e Srivastava (1989) é a ferramenta base da Geoestatística.

Antes de apresentar o semivariograma é importante ressaltar que considerando as abordagens de Yamamoto e Landim (2015) sobre isotropia, em que podemos considerar isotrópicos aqueles fenômenos que não dependem de todo vetor \mathbf{h} e sim somente da distância h entre os pontos. Como este trabalho aborda somente fenômenos isotrópicos, todas as representações de semivariograma utilizadas serão somente em função de h , ou seja, a distância entre os pontos.

O semivariograma é um parâmetro populacional que, sob a hipótese intrínseca, é definido por Matheron (1971) como:

$$\gamma(|\mathbf{h}|) = \gamma(h) = \frac{1}{2}E [Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})]^2 \quad (4.1)$$

O ponto \mathbf{s} é um ponto no espaço e $|\mathbf{h}| = h$ é a norma do vetor \mathbf{h} , logo, $\mathbf{s} + \mathbf{h}$ é o mesmo ponto deslocado em uma distância h em qualquer direção, ou seja, o semivariograma em função somente de h .

Pode ser estimado por meio do semivariograma experimental, obtido pelo estimador clássico de Matheron (1971), definido como:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{\forall(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) | |\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j| = h}^{N(h)} [Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)]^2 \quad (4.2)$$

Sendo $\{Z(\mathbf{s}_1), Z(\mathbf{s}_2), Z(\mathbf{s}_3), \dots, Z(\mathbf{s}_n)\}$ é a amostra espacial, $N(h)$ é o número de pares de valores medidos $Z(\mathbf{s}_i)$ e $Z(\mathbf{s}_j)$, separados por uma distância h . O estimador é somente em função da distância h entre os pontos.

Segundo Cressie (1988), da sua própria definição, a função $\gamma(h)$ é possível definir as seguintes propriedades:

$$\gamma(0) = 0 \quad (4.3)$$

$$\gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = \gamma(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i) \quad \forall \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^d \quad (4.4)$$

$$\gamma(h) \geq 0 \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \leq 0 \quad \forall \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n \in \mathbb{R}^d \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

De acordo com Oliveira (1991), o sentido físico do semivariograma $\gamma(h)$ pode ser percebido quando se analisa sua definição: ele mede a variabilidade das diferenças entre as realizações da variável aleatória de interesse, de tal maneira que quanto menor a semivariância, menor a variação dessas diferenças.

O gráfico do semivariograma experimental $\gamma(h)$ é obtido utilizando a equação (4.2) que mostra um conjunto de pontos de maneira discreta ($\gamma^*(h)$), e tem-se a necessidade de ajustar uma função contínua ($\hat{\gamma}(h)$) sobre esse conjunto de pontos.

Neste trabalho serão apresentados alguns exemplos dos dois grupos existentes que satisfazem as condições iniciais necessárias, modelos com patamar e modelos sem patamar.

4.1 Modelos com patamar

Chiles e Delfiner (2009) e Yamamoto e Landim (2015) apresentam alguns modelos com patamar que estimam a função $\gamma(h)$, satisfazendo as exigências (4.3), (4.4),(4.5) e (4.6). Para este trabalho iremos citar somente alguns modelos, são denominados como modelo esférico (4.7) e modelo pentaesférico (4.8), respectivamente:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \left[1,5 \left(\frac{h}{a}\right) - 0,5 \left(\frac{h}{a}\right)^3 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \left[1,875 \left(\frac{h}{a}\right) - 1,25 \left(\frac{h}{a}\right)^3 + 0,375 \left(\frac{h}{a}\right)^5 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (4.8)$$

Em que C_0 é o efeito pepita, C_1 a contribuição e a o alcance do fenômeno.

4.2 Modelos sem patamar

Chiles e Delfiner (2009) e Yamamoto e Landim (2015) apresentam alguns modelos sem patamar que estimam a função $\gamma(h)$, satisfazendo as exigências (4.3), (4.4),(4.5) e (4.6). Para este trabalho iremos citar somente alguns modelos, são denominados como modelo potência (4.9) e modelo linear (4.10), respectivamente:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + ah^\alpha, & \text{para } h > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + ah, & \text{para } h > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

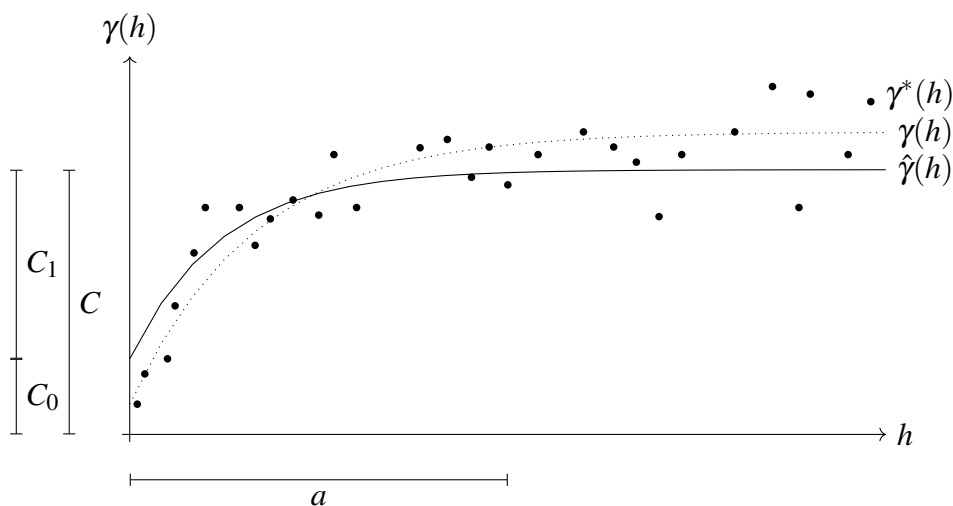
Em que C_0 é o efeito pepita, C_1 a contribuição e a o alcance do fenômeno.

4.3 Comportamento do semivariograma

Existem outros modelos utilizados que podem ser encontrados em Chiles e Delfiner (2009), Clark (1979), Yamamoto e Landim (2015) e Schabenberger e Gotway (2017), como modelo cúbico, exponencial e gaussiano, mas que não serão abordados nesta dissertação.

Na figura 4.1, temos a ilustração dos parâmetros C , C_0 , C_1 e a , denominados, respectivamente, de patamar, efeito pepita, contribuição e alcance. Têm-se também $\gamma^*(h)$ representando a nuvem de pontos, ou seja, os valores estimados pontualmente de semivariância para cada distância h existente, $\gamma(h)$ o semivariograma paramétrico, sempre desconhecido, que é o que se pretende estimar, e $\hat{\gamma}(h)$ que representa do semivariograma teórico ou ajustado, sobre a nuvem de pontos, que é o estimador final do semivariograma paramétrico.

Figura 4.1 – Semivariograma teórico, estimado e nuvem de pontos



Fonte: o autor (2020)

À medida que h aumenta, $\gamma(h)$ também aumenta até um valor máximo no qual se estabiliza; esse valor no qual $\gamma(h)$ se estabiliza chama-se patamar (C), e de acordo Vieira (2000) é aproximadamente igual à variância dos dados. A distância na qual $\gamma(h)$ atinge o patamar é chamada de alcance (a) e é a distância limite da dependência espacial, ou seja, faz parte do campo estruturado do fenômeno.

É esperado que medições localizadas próximas sejam mais parecidas entre si do que aquelas separadas com grande distância; dessa maneira, $\gamma(h)$ aumenta com a distância h . Alguns fenômenos apresentam descontinuidade na origem de seu semivariograma denominado de efeito pepita (C_0). Para Oliveira (1991), o mesmo expressa limitação na estimação do semivari-

ograma em pequenos espaçamentos. De acordo com Cressie (1988) sua ocorrência pode estar associada ao aumento acentuado na dependência espacial entre pares de pontos próximos, como quando há grãos ou palhetas de metal nativo, em mineração, particularmente de ouro (pepitas). Por definição, $\gamma(0) = 0$, que pode ser visto pela equação (4.2), quando $h = 0$. Entretanto, na prática, à medida que h tende a zero, $\gamma(h)$ se aproxima do valor do efeito pepita (C_0).

O semivariograma apresenta a dependência espacial do fenômeno. Conhecendo essa característica, é possível obter previsões da variável aleatória naquela região. O ajuste ideal do semivariograma é um fator de extrema importância, em que $\hat{\gamma}(h)$ proporciona as características mais próximas à realidade do fenômeno.

5 PREDIÇÃO ESPACIAL PONTUAL

O estudo de variáveis espaciais de uma região poderia ser feito sem incertezas se infinitas amostras fossem realizadas. Isto é nitidamente impossível de se efetuar, sendo que a alternativa então é a coleta em determinados pontos, realizando um levantamento incompleto, chamado amostragem, e preenchendo as lacunas das informações com algum modelo de predição. Existem diversas maneiras de predição: neste trabalho será abordado a krigagem, que trata-se do melhor método para essa finalidade.

5.1 Krigagem

É um método de interpolação de valores em qualquer posição no espaço em análise. O nome krigagem foi dado por George Matheron, em homenagem ao engenheiro de minas e matemático sul-africano Daniel Krige, o primeiro a realizar estudos da variabilidade espacial utilizando de considerações mais avançadas.

Existem vários métodos de krigagem, onde todos os preditores são variantes do preditor básico de regressão linear $\hat{Z}(\mathbf{s})$.

De acordo com Journel e Huijbregts (1978), para que o preditor seja ótimo, ele não pode ser tendencioso e deve possuir variância mínima, ou seja,

$$E [\hat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)] = 0 \quad (5.1)$$

$$Var [\hat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)] = E \left\{ [\hat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)]^2 \right\} = \text{mínima} \quad (5.2)$$

As equações (5.1) e (5.2) representam as condições de não tendenciosidade e de variância mínima, respectivamente. Essas devem ser satisfeitas, logo, são a base para a dedução para qualquer sistema de krigagem, como a krigagem universal, simples, indicadora e para introduzir os conceitos se inicia com a krigagem ordinária; seu entendimento é a base para posteriormente apresentar a krigagem de blocos.

5.1.1 Krigagem ordinária

O objetivo mais habitual da Geoestatística é prever valores da variável aleatória $Z(\mathbf{s})$ em pontos não amostrados, denominados \mathbf{s}_0 . É o método mais utilizado, pela simplicidade e resultados que proporciona (YAMAMOTO; LANDIM, 2015).

Suponha-se que se queira prever os valores da variável aleatória $Z(\mathbf{s})$ para qualquer valor \mathbf{s}_0 ; se trata então da combinação linear entre os valores já coletados. Isaaks e Srivastava (1989) define então o preditor:

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^N \psi_i Z(\mathbf{s}_i) \quad (5.3)$$

Em que N é o número de valores coletados $Z(\mathbf{s}_i)$, ψ_i são os pesos associados a cada valor. Os valores dos pesos ψ_i para satisfazer (5.1) e (5.2) devem possuir $\sum_{i=1}^N \psi_i = 1$. Em Vieira (2000) é apresentado a dedução para a equação (5.3).

No método de krigagem, os pesos são variáveis de acordo com a variabilidade espacial expressa no semivariograma em função da distância do ponto amostrado a um ponto predito. O preditor corresponde a uma média móvel ponderada e, ao satisfazer as equações (5.1) e (5.2) sob a hipótese intrínseca, torna a krigagem um interpolador ótimo. Existem vários métodos de interpolação, mas somente a krigagem possui a condição de não-tendenciosidade e variância mínima, sendo assim o sistema com mais credibilidade e utilizado.

Para a interpolação é necessário satisfazer a variância mínima (5.2). Para o caso da krigagem ordinária, Burgess e Webster (1980b) mostram que (5.2) implica que:

$$E \left\{ [Z(\mathbf{s}_0) - \hat{Z}(\mathbf{s}_0)]^2 \right\} = 2 \sum_{i=1}^N \psi_i \gamma(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_i) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_i \psi_j \gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) \quad (5.4)$$

Em Vieira (2000) também é apresentado a demonstração para a equação (5.4). Perceba que, para a variância tem-se o valor $Z(\mathbf{s}_0)$ desconhecido, mas segundo Isaaks e Srivastava (1989), a solução para esse problema é baseado em um modelo probabilístico, de tal forma que os valores desconhecidos são considerados realizações de um processo aleatório.

Para encontrar os pesos ótimos satisfazendo as condições já citadas, utiliza-se a técnica dos multiplicadores de Lagrange, da qual se obtém a lagrangiana, isto é, a função das coordenadas generalizadas (YAMAMOTO, 2001).

De acordo com Oliveira (1991), ao determinar um preditor procura-se um *Best Linear Unbiased Predictor* (BLUP), que se trata do melhor estimador linear. A condição de não-tendenciosidade implica em minimizar $E [Z(\mathbf{s}_i) - \sum_{i=1}^N \psi_i Z(\mathbf{s}_i)]^2$. Vieira (2000), Isaaks e Srivastava (1989) e outros autores apresentam a dedução que resulta na equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n) & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_0) \\ \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Podemos simplificar a equação (5.5) na equação (5.6).

$$A^{-1} \mathbf{b} = \boldsymbol{\psi} \quad (5.6)$$

Nesta dissertação não se tem como objetivo apresentar maiores detalhamentos sobre a krigagem ordinária, mas, para satisfazer o interesse em mais conhecimento do leitor, recomenda-se exemplos práticos para a krigagem ordinária que podem ser observados em Yamamoto e Landim (2015).

Observe que a Geoestatística utiliza em sua teoria a dependência espacial e através do semivariograma obtém-se a krigagem, um preditor ótimo e que possui uma medida para sua qualidade, a variância de krigagem. Cressie (1990) comenta esse fator como uma vantagem sobre outros métodos de interpolação propostos na literatura e, em problemas onde é razoável supor a validade da hipótese intrínseca, fornece um argumento forte para a escolha do preditor.

Para a predição de pontos não amostrados temos então a krigagem ordinária como a melhor opção. Com a predição de uma quantidade quase infinitesimal de pontos é possível mapear todo o fenômeno. A principal utilização do método é para gerar mapas da variável na

região de estudo. A seguir será apresentado outro sistema de krigagem que apresenta outro tipo de informação: a predição de uma média espacial.

6 MÉDIA ESPACIAL

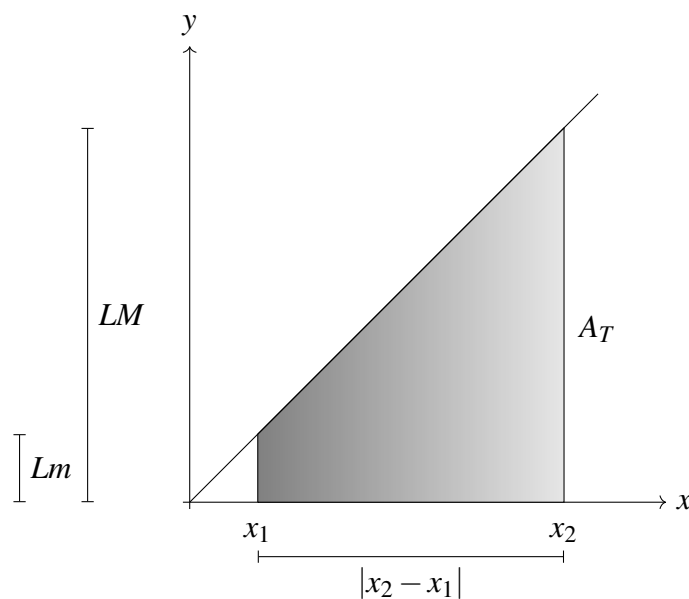
Média se trata da medida de posição mais comum, intensa e bastante utilizada. Seu conceito é familiar e até mesmo intuitivo. Valores médios podem ser importantes para o pesquisador ou mesmo a indústria. Suponha uma empresa de mineração que pretenda extrair algum material de uma determinada região. Em sua análise de dados, obter a informação do valor médio da quantidade de material a ser extraído pode ser importante em tomadas de decisão, em que os custos da extração devem ser menores do que as vendas do material, tornando a média uma informação importante nesse momento.

Os conceitos comuns referente a média não consideram a dependência espacial dos dados, mas é natural se imaginar que a dependência espacial deve ser levada em consideração no que se denomina médias espaciais. Nos itens 6.1 e 6.2 são apresentados conceitos básicos relacionados a médias espaciais para funções e no item 6.3 para variáveis aleatórias.

6.1 Média espacial em um sistema bidimensional

Suponhamos uma função $f(x) = x$ em um domínio $D = \{x \in \mathbb{R}\}$ e suponha também que temos a necessidade de encontrar a área da região A_T abaixo da função entre os pontos $[x_1, x_2]$. A figura 6.1 é a demonstração dessa área a ser calculada.

Figura 6.1 – Função $f(x)$ e área A_T abaixo do gráfico



Fonte: o autor (2020)

Stewart (2001) demonstra que podemos determinar a área A_T como a integral da função no trecho desejado, conforme (6.1).

$$A_T = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \quad (6.1)$$

Se encontrarmos a altura média entre o Lm e o LM , também é possível assim obter A_T ; a fórmula geral para a área de um trapézio já envolve o cálculo da altura média (\bar{h}) do trapézio. Então podemos obter a área conforme os cálculos abaixo:

$$A_T = \frac{(Lm + LM) Base}{2} = \bar{h} |x_2 - x_1| \quad (6.2)$$

Em que Lm é o lado menor do trapézio, LM o lado maior do trapézio e a "Base" é o intervalo em que estamos calculando a área, todos apresentados conforme a figura 6.1.

Utilizando a equação (6.2), temos a conclusão que, para um sistema bidimensional, a altura média pode ser obtida pela fórmula:

$$\bar{h} = \frac{A_T}{|x_2 - x_1|} \quad (6.3)$$

Com as equações (6.1) e (6.2), o valor médio da função $f(x)$ pode ser definido na equação (6.4).

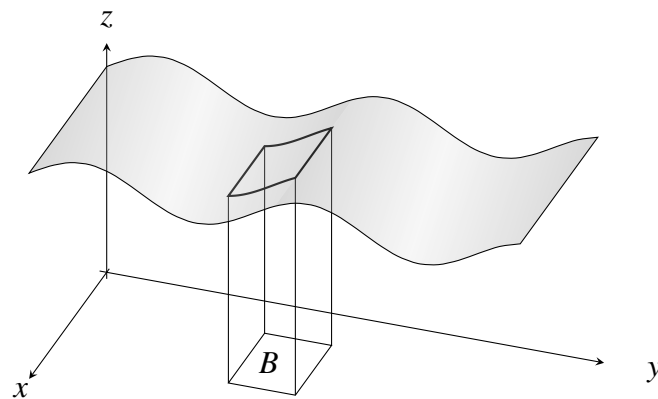
$$\bar{h} = \bar{f}(x) = \frac{1}{|x_2 - x_1|} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (6.4)$$

Temos então a visualização de uma média espacial em duas dimensões. Os conceitos utilizados serão abordados em um sistema tridimensional, de maneira análoga ao citado acima e serão abordados na seção 6.2.

6.2 Média espacial em um sistema tridimensional

Com os conceitos apresentados na seção 6.1 é possível observar que é aplicável também em outras dimensões. Para introduzir a ideia de média espacial em um sistema tridimensional temos uma função $f(x,y)$ em um domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ e, dada uma região B abaixo da superfície da função $f(x,y)$ conforme a figura 6.2.

Figura 6.2 – Região B abaixo da função $f(x,y)$

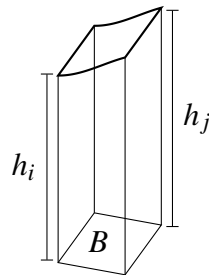


Fonte: o autor (2020)

Para se calcular o volume do sólido V_z representado na figura 6.2, Stewart (2001) apresenta que pode ser obtido pela integral (6.5) abaixo dessa região.

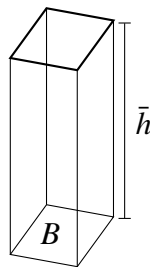
$$V_z = \int \int_B f(x,y) dx dy \quad (6.5)$$

Na figura 6.3 o sólido abaixo do gráfico da função possui variações em sua altura, ou seja, possui diversas alturas h ao longo de toda área B ; são infinitas alturas, isso impede que seja possível calcular o volume com os conhecimentos de geometria comuns.

Figura 6.3 – Sólido com área da base B e alturas h' s

Fonte: o autor (2020)

Se é possível obter a altura média (\bar{h}), conforme apresentado na figura 6.4, podemos definir a equação do volume V_Z (6.5) de uma nova maneira como apresentado na equação (6.6), que tem como princípio as ideias abordadas na seção 6.1.

Figura 6.4 – Sólido com área da base B e altura \bar{h} 

Fonte: o autor (2020)

Assim,

$$V_z = \int \int_B f(x,y) \, dx dy = \bar{h} |B| \quad (6.6)$$

em que $|B|$ é a área da região abaixo da superfície.

Podemos definir a altura média (\bar{h}), ou seja, o valor médio da função $f(x,y)$, dado por:

$$\bar{h} = \bar{f}(x,y) = \frac{V_Z}{|B|} = \frac{1}{|B|} \int \int_B f(x,y) \, dx dy \quad (6.7)$$

Assim, a equação (6.7) representa o valor médio de uma função f de duas variáveis em um retângulo B contido em seu domínio.

6.3 Média espacial de uma variável aleatória

Como visto nas seções anteriores, para uma função em um espaço bidimensional ou tridimensional, os valores médios das mesmas está relacionado a integral daquela função dividida pela região que ela ocorre. Essa ideia é construída para qualquer função e é naturalmente observável. Todas essas integrais apresentadas nos itens anteriores são sempre possíveis de se calcular com conhecimentos de cálculo; são integrais de Riemann. Uma questão pode ser levantada: o que ocorre se a função f for uma variável aleatória?

Para tratar da ideia de médias espaciais de uma variável aleatória é preciso entrar em conceitos relacionados a Cálculo Estocásticos, que serão abordados no capítulo seguinte.

7 O VALOR MÉDIO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Uma variável aleatória X , pode ser definida como uma função que associa a todo evento pertencente a um subconjunto do espaço amostral Ω um único número real, isto é, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Ao observar que é necessário e possível obter o valor médio de uma variável aleatória, utiliza-se então a importância do estudo relacionado ao Cálculo Estocástico; mais precisamente as integrais estocásticas. Se relacionarmos o valor médio da variável aleatória com os resultados apresentados nos itens 6.1 e 6.2, observamos que, naturalmente, surgirá um sistema de integração dessa variável aleatória, quando o integrando deixa de ser de uma função matemática e passa a ser uma variável aleatória. Tem-se então a integração estocástica. A integração de uma variável aleatória não é uma integral de Riemann, mas sim uma integral estocástica, que nos leva ao cálculo estocástico, que será abordada na seção 7.1, a seguir.

7.1 Cálculo integral

Se observarmos a construção da integral de uma função $f(x)$ em um intervalo x_1 a x_n , onde $x_n > x_1$ se queremos obter a área da região F_T , utilizamos então métodos do cálculo integral pela equação (7.1), que é a definição da integração de Riemann em uma função.

$$F_T = \int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = F(x) \Big|_{x_1}^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (7.1)$$

A solução da integral pelo somatório necessita da convergência do mesmo. Então, se essa função $f(x)$ passa a ser uma variável aleatória, é necessário realizar estudos relacionados a convergência de variáveis aleatórias, que serão abordados no item 7.1.1.

Quando esse integrando se torna uma variável aleatória, denominamos a integral de integral estocástica. A integral estocástica acontece dentro da krigagem de blocos, por isso a necessidade de se apresentar conceitos básicos de cálculo estocástico voltado à integração. Como citado, dentro da integral estocástica é necessário os estudos de convergência da variável aleatória. Assim, como em uma integral de Riemann, que é necessário se obter a convergência, o mesmo ocorre na integral de uma variável aleatória.

7.1.1 Convergência estocástica

Em Teoria das Probabilidades, existem diferentes convergências de variáveis aleatórias. A convergência de sequências de variáveis aleatórias a alguma variável aleatória limite é um importante conceito em Teoria das Probabilidades e tem aplicações na Estatística e nos Processos Estocásticos. As possíveis noções diferentes de convergência se relacionam a como tal comportamento pode ser caracterizado: dois comportamentos prontamente entendidos são que a sequência, eventualmente, assume um valor constante e que os valores na sequência continuam mudando, mas podem ser descritos por uma distribuição de probabilidade imutável.

Para Grimmett et al. (2001), a expressão "convergência estocástica" formaliza a ideia de que é possível esperar que uma sequência de eventos essencialmente aleatórios ou imprevisíveis siga eventualmente um padrão. Ao longo do que se segue, assume-se que X_n é uma sequência de variáveis aleatórias, X é uma variável aleatória, e todas elas estão definidas no mesmo espaço de probabilidade (Ω, F, P) .

James (1981) apresenta quatro tipos de convergência de variáveis aleatórias, convergência em distribuição, convergência em probabilidade, convergência quase certa e convergência em média. Para a krigagem de blocos, segundo Schabenberger e Gotway (2017), utiliza-se somente do pressuposto da convergência em média quadrática, sendo assim, os demais tipos de convergência não serão apresentados nesta dissertação. Para o leitor se aprofundar nos conhecimentos não utilizados e também as demonstrações pertinentes, aconselha-se a consulta a James (1981).

7.1.1.1 Convergência em média

Dado um número real $r \geq 1$, dizemos que a sequência de variáveis aleatórias X_n converge para a r -ésima média. Assim a variável aleatória X , se os r -ésimos momentos absolutos $E(|X_n|^r)$ e $E(|X|^r)$ de X_n e X existem e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^r) = 0 \quad (7.2)$$

A convergência na r -ésima média nos diz que o valor esperado da r -ésima potência da diferença entre X_n e X converge a zero. É importante ressaltar que se existe convergência, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n|^r) = E(|X|^r) \quad (7.3)$$

Os casos mais importantes são quando $r = 1$, que é onde X_n converge em média para X , e para o caso onde $r = 2$, que é onde X_n converge em média quadrática para X . Se $r > s \geq 1$, a convergência na r -ésima média implica convergência na s -ésima média. Assim, a convergência em média quadrática implica a convergência em média.

Uma aplicação das definições apresentadas é a utilização na krigagem de blocos. Na integral que caracteriza a krigagem de blocos, esta não será mais uma integral de Riemann e sim uma integral de variável aleatória, que tem sua convergência em média quadrática.

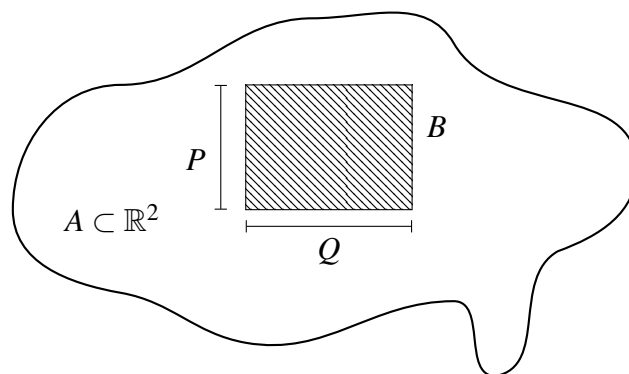
8 KRIGAGEM DE BLOCOS

A krigagem de blocos surge na mineração, quando ao dividir uma região a ser minerada em diversos blocos, é necessário estimar a quantidade de material em cada bloco. Por esta demanda surge o nome krigagem de blocos; em planos de duas dimensões também pode ser chamada de krigagem de área. Esta demanda implica em calcular a média de variáveis aleatórias no espaço. É sempre importante ressaltar que a utilização deste método resulta em uma média espacial sem viés, já que também se trata de uma krigagem, que apresenta as propriedades de variância mínima e não tendenciosidade.

Com a Geoestatística pode-se estimar a média do bloco de cubagem por meio da discretização do bloco em pontos, que podem ser avaliados individualmente e depois compostos para o bloco, ou então diretamente, calculando-se os vetores médios dos sistemas de equação. Essa alternativa da krigagem ordinária é denominada krigagem de bloco (YAMAMOTO; LANDIM, 2015).

Considere o processo $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in A \subset \mathbb{R}^2\}$ que possui uma sub-região retangular B de lados P e Q , apresentado na figura 8.1 . Possuímos as amostras $\{Z(\mathbf{s}_1), Z(\mathbf{s}_2), Z(\mathbf{s}_3), \dots, Z(\mathbf{s}_n)\}$ e não estamos interessados em prever um ponto $Z(\mathbf{s}_0)$, mas sim um valor médio da região B , ou seja, o valor médio da variável aleatória na região B , o valor $\bar{Z}(B)$.

Figura 8.1 – Região B de lados P e Q



Fonte: o autor (2020)

Schabenberger e Gotway (2017) define $\bar{Z}(B)$ como:

$$\bar{Z}(B) = \frac{1}{|B|} \int_B Z(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (8.1)$$

em que $|B|$ representa a área da região B .

Observe que a equação (8.1) se assemelha às equações que foram construídas nos itens 6.1 e 6.2. Ainda na equação (8.1) temos que nos atentar que o integrando é uma variável aleatória, por isso a necessidade de se estudar anteriormente a convergência de variáveis aleatórias. Neste caso, não possuímos mais uma integral de Riemann e sim uma integral estocástica cuja convergência se dá por média quadrática. A integração de uma variável aleatória, apesar de apresentar notação igual a integral de Riemann, é um conhecimento específico do estudo de cálculo estocástico e isso deve ser entendido previamente.

Ainda em Schabenberger e Gotway (2017), é apresentado o preditor para a krigagem de blocos, que é construído de forma análoga a krigagem pontual e é dado por:

$$\hat{Z}(B) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(\mathbf{s}_i) \quad (8.2)$$

Assim como na krigagem pontual, N é o número de valores coletados $Z(\mathbf{s}_i)$, λ_i são os pesos associados a cada valor.

Na krigagem de blocos, os valores dos pesos λ_i devem possuir $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$. Assim, como na krigagem ordinária, é necessário suprir a condição de não-tendenciosidade (5.1) e variância mínima (5.2), que, sob a hipótese intrínseca, implica em minimizar $E [\bar{Z}(B) - \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(\mathbf{s}_i)]^2$, Burgess e Webster (1980a) apresentam a equação matricial para se obter os pesos λ_i :

$$\begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n) & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(\mathbf{s}_1, B) \\ \bar{\gamma}(\mathbf{s}_2, B) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}(\mathbf{s}_n, B) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \phi \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Podemos simplificar a equação (8.3) na equação (8.4).

$$A^{-1} \mathbf{c} = \boldsymbol{\lambda} \quad (8.4)$$

Seria muito comum imaginar uma krigagem pontual e, posteriormente, utilizando os pontos krigados poderia obter a média desta variável. Esse pensamento possui fundamentos, mas perde em comparação com a krigagem de blocos, pois a krigagem de blocos utiliza-se de um estimador sem viés, enquanto a média pela krigagem pontual possui um erro, pois não seria possível utilizar os infinitos pontos daquela região, falha essa corrigida pela krigagem de blocos.

8.1 Semivariogramas para krigagem de blocos

Na equação matricial (8.4) o vetor \mathbf{c} apresenta a semivariância entre os pontos $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ e a região B que se deseja estimar a média da variável aleatória, diferentemente da krigagem ordinária, onde na equação matricial (5.6) o vetor \mathbf{b} apresenta a semivariância entre os pontos coletados e o ponto a ser predito. Para a krigagem de blocos, deve-se então estimar o semivariograma para os pontos em relação a região. Essa se apresenta como a maior dificuldade da krigagem de blocos. Faz-se então a necessidade da construção do semivariograma médio entre um ponto e todos os pontos dentro da área, chamado de semivariograma médio para o ponto \mathbf{s}_i e a região B .

A construção do semivariograma médio é a maior complexidade e diferencial da krigagem de blocos em relação a qualquer outro tipo de krigagem. Se associarmos ao semivariograma construído na krigagem ordinária, na qual existia a associação de ponto a ponto, considerava-se somente a distância euclidiana entre eles. Agora, o semivariograma é entre um ponto e uma área e não existe maneira de se utilizar somente uma distância.

A semivariância entre um ponto e uma área é apresentada de maneira numérica por Clark (1979), mas em Oliveira (1991) apresenta-se as definições do semivariograma médio e a maneira para se obter os resultados analiticamente, onde se aplica esta definição geral apenas para o modelo linear. Este trabalho tem como principal objetivo demonstrar a construção do semivariograma médio para outros modelos de semivariograma e serão apresentados no item 8.1.1.

8.1.1 Construção do semivariograma médio

Ao se realizar a krigagem de blocos, é necessária a construção de um semivariograma médio da região. Essa etapa é o que difere da krigagem ordinária e, assim, é a mais importante para a krigagem de blocos.

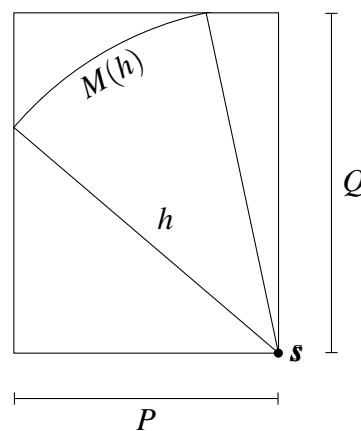
Clark (1979) e Journel e Huijbregts (1978) apresentam apenas resultados numéricos para o semivariograma médio, mas nesta dissertação apresenta-se agora o método qual para a construção analítica dos mesmos, baseado em Oliveira (1991). Seja um processo estocástico que satisfaz a hipótese intrínseca, com semivariograma isotrópico e efeito pepita C_0 . Se considerar-se uma subregião B retangular de lados P e Q , então o semivariograma médio entre o ponto \mathbf{s} e a região B é descrita por Oliveira (1991) é dado na equação (8.5).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) = \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)\gamma(h) dh \quad (8.5)$$

em que P e Q são os lados do retângulo que se deseja obter a semivariância média, $\gamma(h)$ o semivariograma estimado para os pontos amostrados e $M(h)$ é o comprimento do arco formado pelo círculo no entorno do ponto sendo que esteja contido somente dentro da região de estudo. É possível a melhor visualização de $M(h)$ com a figura 8.2.

A construção do semivariograma médio é apresentada por Oliveira (1991) em base nas definições e posteriormente na figura 8.2. Ao obter essa solução, é possível solucionar a semivariância média de um bloco de qualquer dimensão, diferente dos resultados obtidos por Clark (1979) e Journel e Huijbregts (1978), que apresentam apenas valores numéricos e somente para blocos de alguns valores definidos.

Figura 8.2 – Semivariograma médio entre um ponto e uma área



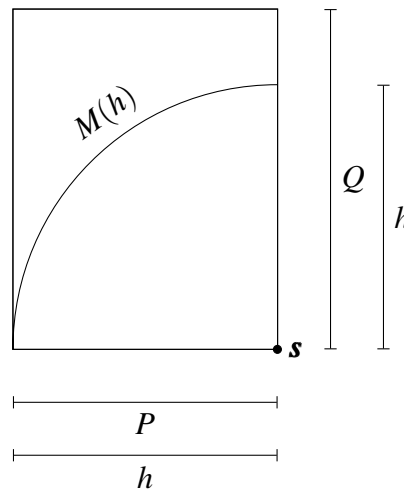
Fonte: Oliveira (1991)

Em Oliveira (1991), o resultado da semivariância média é obtido quando se solucionam todos os valores possíveis de $M(h)$ para cada modelo. O comprimento de $M(h)$ depende do

valor de h , $\forall 0 \leq h \leq \sqrt{P^2 + Q^2}$, sendo P e Q os lados do retângulo onde se deseja estimar a média da variável aleatória. Considera-se sempre P como o menor lado do retângulo e Q o maior lado do retângulo. Em casos onde $Q = P$, considere arbitrariamente qual lado receberá a denominação P e Q , essa escolha não interfere no uso das equações apresentadas a seguir.

Exemplificando todas as dimensões de $M(h)$, temos o primeiro estágio, se $h \leq P$. Nesse caso o valor de $M(h)$ não extrapola as dimensões do retângulo de lados P e Q , então $M(h) = \frac{\pi h}{2}$, o que é apresentado na figura 8.3.

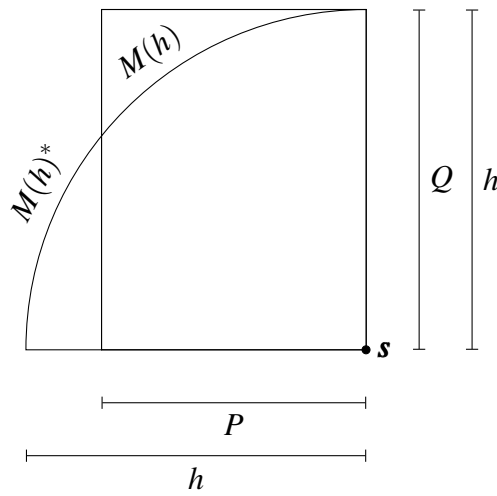
Figura 8.3 – Curva $M(h)$ para $h \leq P$



Fonte: o autor (2020)

No segundo estágio, se $P < h \leq Q$, o valor de $M(h)$ extrapola as dimensões do retângulo de lados P e Q , mas somente em sua base P , gerando assim a parte da curva denominada $M(h)^*$ e, assim, $M(h) = \frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h$, conforme apresentado na figura 8.4.

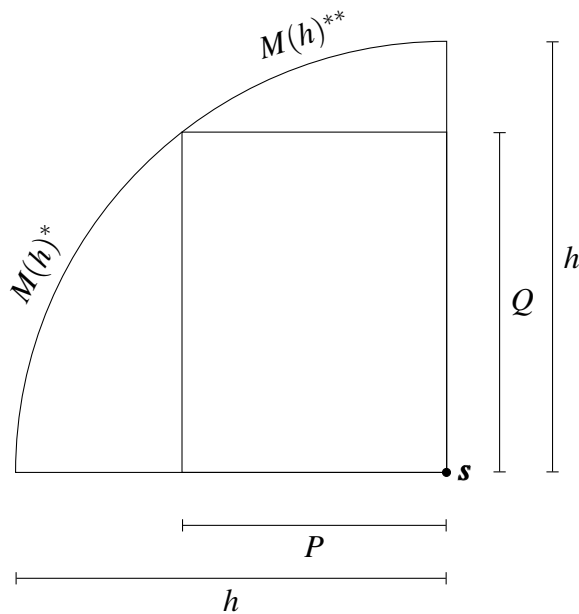
Figura 8.4 – Curva $M(h)$ para o intervalo $P < h \leq Q$



Fonte: o autor (2020)

No terceiro estágio, quando $Q < h \leq \sqrt{P^2 + Q^2}$, o valor de $M(h)$ extrapola as dimensões do retângulo de lados P e Q em ambas direções, gerando assim as partes da curva $M(h)^*$ e $M(h)^{**}$. Então $M(h) = \frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right)h$, conforme apresentado na figura 8.5.

Figura 8.5 – Curva $M(h)$ para o intervalo $Q < h \leq \sqrt{P^2 + Q^2}$



Fonte: o autor (2020)

Com os estudos de Oliveira (1991) podemos notar que a construção da curva $M(h)$ acontece somente dentro do retângulo P e Q e em alguns estágios essa curva pode extrapolar essas dimensões, gerando assim o que foi denominado de $M(h)^*$ e $M(h)^{**}$. Podemos notar nas figuras 8.3, 8.4 e 8.5 que $M(h) = \frac{\pi h}{2}$, $M(h)^* = \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h$ e $M(h)^{**} = \arccos\left(\frac{Q}{h}\right)h$.

Logo, a equação (8.5) pode ser desmembrada na soma das equações (8.6), (8.7) e (8.8).

$$\int_0^P \frac{\pi h}{2} \gamma(h) dh \quad (8.6)$$

$$\int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h \right] \gamma(h) dh \quad (8.7)$$

$$\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right)h \right] \gamma(h) dh \quad (8.8)$$

Assim, toda a construção do semivariograma médio para krigagem de blocos apresentada por Oliveira (1991) pode ser resumida na equação (8.9), ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(s, B) = & \frac{1}{PQ} \int_0^P \frac{\pi h}{2} \gamma(h) dh + \\ & + \frac{1}{PQ} \int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h \right] \gamma(h) dh + \\ & + \frac{1}{PQ} \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right)h \right] \gamma(h) dh \end{aligned} \quad (8.9)$$

Dessa maneira, é possível obter a semivariância média entre um ponto situado no vértice do bloco e o bloco retangular de lados P e Q . A mesma ideia pode ser abordada para outras geometrias. Nesta dissertação todas os blocos de krigagem serão retangulares.

Todo fenômeno possui um semivariograma que mapeia a dependência espacial. Com essa informação é possível, com a equação (8.9), obter o semivariograma médio para qualquer região de lados P e Q do fenômeno.

9 MATERIAIS E MÉTODOS

9.1 Pesquisa bibliográfica

O delineamento (ou método) de pesquisa utilizado nesta dissertação foi a pesquisa bibliográfica. A pesquisa bibliográfica utilizou referências no ramo da Geoestatística, Probabilidade, Cálculo Integral e Cálculo Estocástico para a base estatística deste trabalho, e bibliografias das áreas de sensoriamento remoto para auxiliar na aplicação prática dos conceitos de krigagem de blocos.

A pesquisa bibliográfica foi feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, dissertações, teses e páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém, pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002).

Para Gil (2002), os exemplos mais característicos desse tipo de pesquisa são sobre investigações sobre ideologias ou aquelas que se propõem à análise das diversas posições acerca de um problema.

9.2 Recursos computacionais

Para este trabalho será utilizado o software R Core Team (2019) para se obter os resultados e compará-los com os obtidos na literatura. Tem-se como principal intuito utilizar o R, pois se trata de uma plataforma livre, sendo assim de fácil acesso a outros pesquisadores.

10 RESULTADOS

Sendo o objetivo deste trabalho enunciar os conceitos básicos da krigagem de blocos e com as informações apresentadas por Oliveira (1991), a construção dos semivariogramas médios entre pontos e regiões retangulares, tem-se então como resultado as equações para os modelos linear, esférico e pentaesférico. Os resultados para tais modelos serão apresentados nos itens a seguir; as demonstrações de como foram obtidos serão apresentadas nos apêndices.

O modelo linear foi escolhido pois Journel e Huijbregts (1978) também apresentam resultado para o mesmo, já o esférico possui resultados numéricos dados por Clark (1979). Por vez, não pode ser observado na literatura os resultados do pentaesférico para o semivariograma médio, mas com base nas informações obtidas nos outros dois modelos, é possível evoluir para o modelo pentaesférico e, assim, apresentar resultados ainda não citados na literatura.

10.1 Semivariograma médio linear

Dada que a função do variograma $\hat{\gamma}(h)$ a ser estudada é a linear, definida por:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + ah, & \text{para } h > 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

Utilizando a equação (8.5) e seu desmembramento, podemos obter o semivariograma médio entre um ponto \mathbf{s} no vértice da região B e a região B para o modelo linear (10.1); temos a seguinte equação:

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin} = C_0 + \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)ah \, dh \quad (10.2)$$

Em todo este trabalho será utilizado a nomenclatura $\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin}$ para o semivariograma médio do modelo linear. Desmembrando cada item temos então as seguintes integrais conforme apresentado na equação (8.9) para solucionar e obter o semivariograma médio para o modelo linear.

$$\frac{1}{PQ} \int_0^P \frac{\pi h}{2} ah dh \quad (10.3)$$

$$\frac{1}{PQ} \int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) h \right] ah dh \quad (10.4)$$

$$\frac{1}{PQ} \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) h \right] ah dh \quad (10.5)$$

Seguindo o objetivo que é apresentar as equações de semivariogramas médios para krigagem de blocos, é possível apresentar como resultado a equação do semivariograma médio para um modelo linear.

A demonstração é apresentada no apêndice A, definido então que o semivariograma médio linear é dado pela equação (10.6):

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin} = C_0 + \frac{a}{6} \left(2\sqrt{P^2+Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right) \quad (10.6)$$

O resultado obtido pode ser atestado em Journel e Huijbregts (1978), denominando a função como $H(L, l)$ e em Oliveira (1991) denominando a função como $\bar{\gamma}(s, r)$. Os dois autores não apresentam a demonstração analítica de como obtiveram a função.

10.2 Semivariograma médio esférico

Dada que a função do variograma $\hat{\gamma}(h)$ a ser estudada é o esférico, definida por:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \left[1,5 \left(\frac{h}{a}\right) - 0,5 \left(\frac{h}{a}\right)^3 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (10.7)$$

Utilizando a equação (8.5) e seu desmembramento, podemos obter o semivariograma médio entre um ponto \mathbf{s} no vértice da região B e a região B para o modelo esférico (10.7); temos a seguinte equação:

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Esf} = C_0 + \frac{C_1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h) \left[1,5 \left(\frac{h}{a} \right) - 0,5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] dh \quad (10.8)$$

Em todo este trabalho, será utilizado a nomenclatura $\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Esf}$ para o semivariograma médio do modelo esférico. Desmembrando cada item temos então as seguintes integrais, conforme apresentado na equação (8.9) para solucionar e obter o semivariograma médio para o modelo esférico.

$$\frac{1}{PQ} \int_0^P \frac{\pi h}{2} \left[1,5 \left(\frac{h}{a} \right) - 0,5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] dh \quad (10.9)$$

$$\frac{1}{PQ} \int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos \left(\frac{P}{h} \right) h \right] \left[1,5 \left(\frac{h}{a} \right) - 0,5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] dh \quad (10.10)$$

$$\frac{1}{PQ} \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos \left(\frac{P}{h} \right) h - \arccos \left(\frac{Q}{h} \right) h \right] \left[1,5 \left(\frac{h}{a} \right) - 0,5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] dh \quad (10.11)$$

Seguindo o objetivo que é apresentar as equações de semivariogramas médios para krigagem de blocos, é possível apresentar como resultado a equação do semivariograma médio para um modelo esférico.

A demonstração é apresentada no apêndice B, definido então que o semivariograma médio esférico é dado pela equação (10.12):

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Esf} = C_0 + \frac{0,25C_1}{a} \left(2\sqrt{P^2+Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right) +$$

$$-\frac{0,5C_1}{a^3} \left[\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{40} (7P^2+7Q^2) + \frac{3P^4}{40Q} \ln \left| \frac{Q+\sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{3Q^4}{40P} \ln \left| \frac{P+\sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right] \quad (10.12)$$

10.3 Semivariograma médio pentaesférico

Dada que a função do variograma $\hat{\gamma}(h)$ a ser estudada é o pentaesférico, definida por:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \left[1,875 \left(\frac{h}{a} \right) - 1,25 \left(\frac{h}{a} \right)^3 + 0,375 \left(\frac{h}{a} \right)^5 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (10.13)$$

Utilizando a equação (8.5) e seu desmembramento, podemos obter o semivariograma médio entre um ponto s no vértice da região B e a região B para o modelo pentaesférico (10.7), temos a seguinte equação:

$$\bar{\gamma}(s, B)_{Pent} = C_0 + \frac{C_1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h) \left[1,875 \left(\frac{h}{a} \right) - 1,25 \left(\frac{h}{a} \right)^3 + 0,375 \left(\frac{h}{a} \right)^5 \right] dh \quad (10.14)$$

Em todo este trabalho, será utilizado a nomenclatura $\bar{\gamma}(s, B)_{Pent}$ para o semivariograma médio do modelo pentaesférico. Desmembrando cada item temos então as seguintes integrais, conforme apresentado na equação (8.9) para solucionar e obter o semivariograma médio para o modelo pentaesférico.

$$\frac{1}{PQ} \int_0^P \frac{\pi h}{2} \left[1,875 \left(\frac{h}{a} \right) - 1,25 \left(\frac{h}{a} \right)^3 + 0,375 \left(\frac{h}{a} \right)^5 \right] dh \quad (10.15)$$

$$\frac{1}{PQ} \int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos \left(\frac{P}{h} \right) h \right] \left[1,875 \left(\frac{h}{a} \right) - 1,25 \left(\frac{h}{a} \right)^3 + 0,375 \left(\frac{h}{a} \right)^5 \right] dh \quad (10.16)$$

$$\frac{1}{PQ} \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right)h \right] \left[1,875 \left(\frac{h}{a}\right) - 1,25 \left(\frac{h}{a}\right)^3 + 0,375 \left(\frac{h}{a}\right)^5 \right] dh \quad (10.17)$$

Seguindo o objetivo que é apresentar as equações de semivariogramas médios para krigagem de blocos, é possível apresentar como resultado a equação do semivariograma médio para um modelo pentaesférico.

A demonstração é apresentada no apêndice C, definido então que o semivariograma médio pentaesférico é dado pela equação (10.18):

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{B})_{Pent} = & C_0 + \frac{0,25C_1}{a} \left(2\sqrt{P^2+Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right) + \\ & - \frac{1,25C_1}{a^3} \left[\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{40} (7P^2 + 7Q^2) + \frac{3P^4}{40Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{3Q^4}{40P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right] + \\ & + \frac{0,375C_1}{a^5} \left[\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{336} (41Q^4 + 41P^4 + 24P^2Q^2) \right] + \\ & + \frac{0,375C_1}{a^5} \left[\frac{5P^6}{112Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{5Q^6}{112P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right] \quad (10.18) \end{aligned}$$

10.4 Validação dos Resultados

Os resultados obtidos nos itens 10.1, 10.2 e 10.3 podem ser comparados com resultados numéricos apresentado por Clark (1979) e Journel e Huijbregts (1978). A comparação dos resultados tem como principal objetivo validar a maneira que foi utilizada para a construção da semivariância média, e, assim, dar consistência para desenvolver em outros modelos em trabalhos futuros.

10.4.1 Validação do semivariograma médio para o modelo linear

O semivariograma médio linear é apresentado por Journel e Huijbregts (1978) de maneira analítica e é o único modelo que se obtém na literatura uma solução fechada para qualquer intervalo de lados do retângulo em análise. O autor não desenvolve o método para se obter o resultado mas o apresenta conforme a figura 10.1.

Figura 10.1 – Resultado obtido por Journel e Huijbregts para o semivariograma médio linear

$$H(L; l) = \frac{1}{3} \sqrt{(L^2 + l^2)} + \frac{l^2}{6L} \log \frac{L + \sqrt{(L^2 + l^2)}}{l} + \frac{L^2}{6l} \log \frac{l + \sqrt{(L^2 + l^2)}}{L}.$$

Fonte: Journel e Huijbregts (1978)

Observe que se considerarmos um retângulo de lados L e l , o resultado é idêntico ao apresentado no item 10.1 na equação (10.6). Sendo assim, podemos considerar o resultado apresentado por Oliveira (1991) correto. Essa confirmação dos resultados obtidos e os apresentados na literatura dão suporte para validar os outros modelos estudados, para os quais não se tem uma equação fechada na literatura.

Para o semivariograma médio linear ainda podemos criar uma generalização em casos onde os valores de P e Q são idênticos, que é apresentado por Journel e Huijbregts (1978), conforme a equação (10.19).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin} = 0,7652P \quad \forall P = Q \quad (10.19)$$

É importante ressaltar que, mesmo que o emprego do modelo linear na prática não seja muito frequente, a validação deste modelo mais simples dá a possibilidade para se expandir para modelos mais complexos.

10.4.2 Validação do semivariograma médio para o modelo esférico

O semivariograma médio esférico é apresentado por Clark (1979) na tabela 10.1 como os resultados da semivariância média entre um ponto e um retângulo de lados que por ela são denominados de H e L , sendo esses valores pré definidos, caracterizando então resultados limitados para determinadas regiões. Clark (1979) considera para obter a tabela 10.1 o efeito pepita sendo zero e o alcance sendo um. Isso ocorre pois o efeito pepita é cumulativo e o alcance é multiplicativo a equação de semivariância; isso pode ser observado na equação (10.12).

Sendo assim, fica generalizado para qualquer situação: onde tiver efeito pepita não nulo ocorre somente a soma ao final e, onde tiver alcance superior a um ocorre a multiplicação pelo inverso do alcance.

Tabela 10.1 – Valores numéricos para a semivariância média entre um ponto e uma área para o modelo esférico obtido por Isobel Clark

H/L	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,114	0,177	0,243	0,310	0,374	0,436	0,494	0,546	0,593	0,633
0,2	0,177	0,227	0,285	0,346	0,406	0,464	0,518	0,568	0,613	0,651
0,3	0,243	0,285	0,336	0,390	0,445	0,499	0,550	0,597	0,639	0,674
0,4	0,310	0,346	0,390	0,439	0,489	0,539	0,586	0,629	0,668	0,701
0,5	0,374	0,406	0,445	0,489	0,535	0,580	0,623	0,663	0,698	0,728
0,6	0,436	0,464	0,449	0,539	0,580	0,621	0,660	0,697	0,728	0,755
0,7	0,494	0,518	0,550	0,586	0,623	0,660	0,696	0,729	0,757	0,781
0,8	0,546	0,568	0,597	0,629	0,663	0,967	0,729	0,758	0,783	0,805
0,9	0,593	0,613	0,639	0,668	0,698	0,728	0,757	0,783	0,806	0,826
1,0	0,633	0,651	0,674	0,701	0,728	0,755	0,781	0,805	0,826	0,843

Fonte: Clark (1979)

A seguir a tabela 10.2, que apresenta os resultados obtidos no item 10.2, onde pode-se notar que os dois quadros são praticamente iguais, ou seja, a equação do semivariograma médio esférico é uma generalização para qualquer retângulo de lados P e Q .

Tabela 10.2 – Valores obtidos para a semivariância média entre um ponto e uma área para o modelo esférico

P/Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,1144	0,1766	0,2431	0,3097	0,3744	0,4360	0,4936	0,5462	0,5930	0,6333
0,2	0,1766	0,2270	0,2851	0,3455	0,4056	0,4636	0,5181	0,5682	0,6128	0,6511
0,3	0,2431	0,2851	0,3358	0,3902	0,4452	0,4989	0,5498	0,5968	0,6386	0,6744
0,4	0,3097	0,3455	0,3902	0,4390	0,4891	0,5385	0,5856	0,629	0,6677	0,7007
0,5	0,3744	0,4056	0,4452	0,4891	0,5346	0,5792	0,6230	0,6628	0,6982	0,7280
0,6	0,4360	0,4636	0,4989	0,5385	0,5798	0,6209	0,6602	0,6965	0,7284	0,7550
0,7	0,4936	0,5181	0,5498	0,5856	0,6230	0,6602	0,6958	0,7285	0,7570	0,7803
0,8	0,5462	0,5682	0,5968	0,6290	0,6628	0,6965	0,7285	0,7576	0,7827	0,8026
0,9	0,5930	0,6128	0,6386	0,6677	0,6982	0,7284	0,7570	0,7827	0,8044	0,8209
1,0	0,6333	0,6511	0,6744	0,7007	0,7280	0,7550	0,7803	0,8026	0,8209	0,8342

Fonte: o autor (2020)

Comparando a tabela 10.1 com a tabela 10.2 é perceptível algumas mínimas diferenças de resultados, especialmente quando os valores se aproximam de um; a tabela 10.3 demonstra as diferenças.

Tabela 10.3 – Diferença dos valores das tabelas 10.1 e 10.2

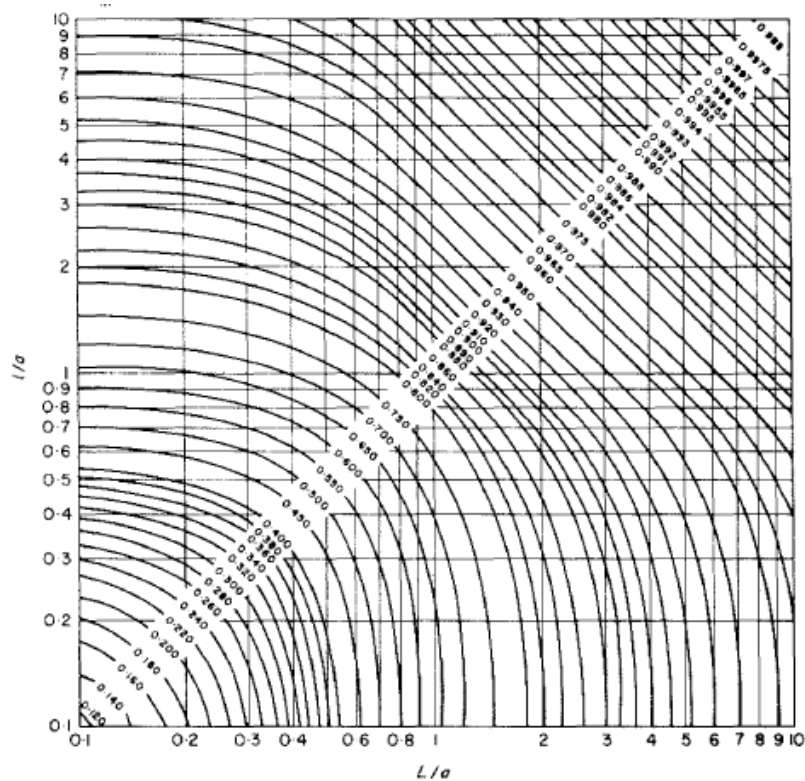
P/Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	-0,0005	0,0003	-0,0002	0,0003	-0,0004	-0,0001	0,0004	-0,0002	-0,0001	-0,0003
0,2	0,0003	0,0000	-0,0001	0,0004	0,0003	0,0004	-0,0002	-0,0002	0,0001	-0,0002
0,3	-0,0002	-0,0001	0,0001	-0,0002	-0,0003	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	-0,0005
0,4	0,0003	0,0004	-0,0002	0,0000	-0,0002	0,0005	0,0004	-0,0001	0,0002	0,0003
0,5	-0,0004	0,0003	-0,0003	-0,0002	0,0003	0,0002	0,0000	0,0001	-0,0002	-0,0001
0,6	-0,0001	0,0004	0,0000	0,0005	0,0002	0,0001	-0,0003	0,0005	-0,0005	-0,0001
0,7	0,0004	-0,0002	0,0001	0,0004	0,0000	-0,0003	0,0001	0,0005	-0,0001	0,0007
0,8	-0,0003	-0,0002	0,0002	-0,0001	0,0001	0,0005	0,0005	0,0003	0,0003	0,0023
0,9	-0,0001	0,0001	0,0003	0,0002	-0,0002	-0,0005	-0,0001	0,0003	0,0016	0,0050
1,0	-0,0003	-0,0002	-0,0005	0,0003	-0,0001	-0,0001	0,0007	0,0023	0,0050	0,0088

Fonte: o autor (2020)

Primeiro, deve-se considerar que a equação (10.12) nasce pela equação (10.7), que naturalmente possui um domínio em seu campo estruturado, domínio esse que vai de zero ao valor de alcance. Para se obter a tabela e assim ser possível a comparação com resultados em Clark (1979), devemos considerar os mesmos padrões utilizados pela autora, que foram o efeito pepita nulo e alcance igual a um. Sendo assim, como a função tem domínio já citado, de zero ao alcance, as tabelas apresentam seus resultados dentro deste intervalo. As diferenças entre a bibliografia e os obtidos se dão pelos erros que existem quando utilizamos métodos numéricos para aproximações de resultados, dado que essa foi a maneira que Clark (1979) utilizou para obter seus resultados. Os valores obtidos de maneira analítica são precisos e corretos.

Journel e Huijbregts (1978) utilizam sistema de ábacos para se obter os valores do semivariograma médio do modelo esférico. Podemos observar que os resultados obtidos e apresentados na tabela 10.2 são próximos aos que o autor obtém de acordo com a figura 10.2, sendo essa mais um meio de comprovação da veracidade dos resultados, validando assim a maneira na qual se construiu a semivariância média entre um ponto e uma região retangular.

Figura 10.2 – Resultado obtido por Journel e Huijbregts para o semivariograma médio esférico



Fonte: Journel e Huijbregts (1978)

10.4.3 Validação do semivariograma médio para o modelo pentaesférico

O modelo pentaesférico não apresenta solução analítica ou numérica na literatura, mas, ao se obter resultados comprovadamente precisos dos modelos linear e esférico, é natural que, ao ser utilizada os mesmos princípios e técnicas, os resultados para o modelo pentaesférico se apresentem corretos. A tabela 10.4 apresenta resultados para intervalos de região de zero a um, sendo considerado o efeito pepita nulo e alcance igual a um.

A construção do semivariograma médio para o modelo pentaesférico pode ser considerada o próximo passo depois de construir os modelos linear e esférico, pois, respectivamente, apresentam uma equação de primeiro grau e terceiro grau em suas origens, enquanto o modelo pentaesférico possui grau cinco.

Tabela 10.4 – Valores obtidos para a semivariância média entre um ponto e uma área para o modelo pentaesférico

P/Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,1139	0,1748	0,2376	0,2976	0,3520	0,3994	0,4387	0,4694	0,4919	0,5068
0,2	0,1748	0,2233	0,2774	0,3308	0,3802	0,4235	0,4594	0,4874	0,5075	0,5204
0,3	0,2376	0,2774	0,3236	0,3704	0,4142	0,4526	0,4844	0,5088	0,5258	0,5359
0,4	0,2976	0,3308	0,3704	0,4109	0,4491	0,4826	0,5100	0,5304	0,5439	0,5511
0,5	0,3520	0,3802	0,4142	0,4491	0,4820	0,5106	0,5335	0,5499	0,5598	0,5637
0,6	0,3994	0,4235	0,4526	0,4826	0,5106	0,5346	0,5531	0,5656	0,5718	0,5726
0,7	0,4387	0,4594	0,4844	0,5100	0,5335	0,5532	0,5676	0,5762	0,5790	0,5767
0,8	0,4694	0,4874	0,5088	0,5304	0,5499	0,5656	0,5762	0,5813	0,5809	0,5758
0,9	0,4919	0,5075	0,5258	0,5439	0,5598	0,5718	0,5790	0,5809	0,5777	0,5701
1,0	0,5068	0,5204	0,5359	0,5511	0,5637	0,5726	0,5767	0,5758	0,5701	0,5606

Fonte: o autor (2020)

A tabela é uma simplificação com intuito de auxiliar, de maneira prática e ágil, a necessidade de se obter valores de semivariância média com este modelo. Para valores de retângulo diferentes dos apresentados em tabela utiliza-se então a equação (10.18).

11 CONCLUSÃO

Por este trabalho é possível compreender a construção da semivariância média entre um ponto e uma região, assim, pode-se construir a semivariância média para qualquer modelo em qualquer região. Neste foi apresentado essa construção para regiões retangulares.

Mesmo em face da atual possibilidade da solução numérica das integrais, visto a facilidade do uso computacional, as expressões analíticas (algébricas) continuam tendo seu valor, pois é uma solução exata, geral e independente de métodos numéricos adotados. A precisão das resoluções analíticas dão a grande confiança no trabalho desenvolvido.

É possível concluir que a construção do modelo de semivariograma médio linear é precisa e se iguala ao apresentado na literatura existente. Para o modelo esférico, não é descrito na literatura resultados analíticos, somente numéricos; com o desenvolvimento deste trabalho tem-se então o modelo analítico, isento de erros numéricos para o semivariograma médio esférico.

Construir os semivariogramas médios linear e esférico já se caracteriza um avanço nos métodos da krigagem de blocos. Este trabalho apresenta ainda, a construção do modelo de semivariograma médio pentaesférico, que não é apresentado de maneira numérica e nem analítica em nenhuma literatura que trata a krigagem de blocos. Tem-se então esse como o principal avanço nos resultados desta dissertação, um modelo que passa a ter uma solução ainda não existente.

Apesar da krigagem de blocos ter sua origem na mineração, em outras áreas pode-se obter informações preciosas utilizando a técnica no auxílio de tomadas de decisões. Por exemplo, o preenchimento de falhas em imagens de satélites, o cálculo de um valor médio espacial sem viés, entre outras. Deve-se ressaltar que muito provavelmente nas Ciências Agrárias existirá um mundo considerável na aplicação desta krigagem para médias imprecisas.

Sugere-se como trabalhos futuros a construção das equações de semivariogramas médios para outros modelos, tais como exponencial, gaussiano e wave e, posteriormente, a implementação da técnica em um pacote em linguagem R.

REFERÊNCIAS

- BALL, D.; WILLIAMS, W. Variability of soil chemical properties in two uncultivated brown earths. **Journal of Soil Science**, Wiley Online Library, v. 19, n. 2, p. 379–391, 1968.
- BARTLETT, M. **An introduction to stochastic processes**. [S.l.: s.n.], 1966.
- BLAIS, R. A.; CARLIER, P. A. Applications of geostatistics in ore evaluation. **CIM spec**, v. 9, p. 41–68, 1968.
- BURGESS, T.; WEBSTER, R. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties: Li block kriging. **Journal of Soil Science**, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 333–341, 1980.
- BURGESS, T.; WEBSTER, R. Optimal interpolation and rithmic mapping of soil properties. **Journal of soil science**, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 315–331, 1980.
- CHILES, J.-P.; DELFINER, P. **Geostatistics: modeling spatial uncertainty**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 497.
- CLARK, I. **Practical Geostatistics**. [S.l.]: Applied Science Publishers London, 1979. v. 3.
- CRESSIE, N. Spatial prediction and ordinary kriging. **Mathematical geology**, Springer, v. 20, n. 4, p. 405–421, 1988.
- CRESSIE, N. The origins of kriging. **Mathematical geology**, Springer, v. 22, n. 3, p. 239–252, 1990.
- DAVID, M. The geostatistical estimation of porphyry type deposits and scale factor problems. 1970.
- DELHOMME, J. Kriging in the hydrosiences. **Advances in water resources**, v. 1, p. 251–266, 1978.
- FONSECA, J. J. S. da. Metodologia da pesquisa científica. 2002. **Curso de Especialização em Comunidades Virtuais de Aprendizagem-Informática Educativa. Universidade Estadual do Ceara**, 2002.
- GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. **São Paulo**, v. 5, n. 61, p. 16–17, 2002.
- GRIMMETT, G. et al. **Probability and random processes**. [S.l.]: Oxford university press, 2001.
- HAJRASULIHA, S. et al. Spatial variability of soil sampling for salinity studies in southwest iran. **Irrigation Science**, Springer, v. 1, n. 4, p. 197–208, 1980.
- HARRADINE, F. F. et al. The variability of soil properties in relation to stage of profile development. **Proceedings. Soil Science Society of America**, 1949, v. 14, p. 302–311, 1950.
- HOHN, M. **Geostatistics and petroleum geology**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1998.
- ISAAKS, E. H.; SRIVASTAVA, M. R. **Applied geostatistics**. [S.l.: s.n.], 1989.
- JAMES, B. **Probabilidade: Um curso em nível intermediário, Projeto Euclides**. [S.l.: s.n.], 1981.

- JOURNEL, A. G. Geostatistics for conditional simulation of ore bodies. **Economic Geology**, Society of Economic Geologists, v. 69, n. 5, p. 673–687, 1974.
- JOURNEL, A. G.; HUIJBREGTS, C. J. **Mining geostatistics**. [S.l.]: Academic press London, 1978. v. 600.
- KRIGE, D. G. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand. **Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy**, Southern African Institute of Mining and Metallurgy, v. 52, n. 6, p. 119–139, 1951.
- MATHERON, G. The theory of regionalised variables and its applications. **Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique**, Ecole des Mines de Paris, v. 5, p. 212, 1971.
- MONTGOMERY, E. Experiments in wheat breeding: experimental error in the nursery and variation in nitrogen and yield. Washington: Us dept. **Agric. Bur. Plant Indust. Bul**, Govt. print. off., v. 269, 1913.
- OLEA, R. A. **Optimum mapping techniques using regionalized variable theory**. [S.l.]: Kansas Geological Survey, 1975.
- OLIVEIRA, M. C. N. d. **Métodos de estimação de parâmetros em modelos geoestatísticos com diferentes estruturas de covariâncias: uma aplicação ao teor de cálcio no solo**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2003.
- OLIVEIRA, M. S. d. **Planos amostrais para variáveis espaciais utilizando geoestatística. 1991. 100 f.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 1991.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2019. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- SCHABENBERGER, O.; GOTWAY, C. A. **Statistical methods for spatial data analysis**. [S.l.]: CRC press, 2017.
- SMITH, L. H. Plot arrangement for variety experiments with corn. **Agronomy Journal**, American Society of Agronomy, v. 1, n. 1, p. 84–89, 1907.
- STEWART, J. Cálculo, vol. 1. **Pioneira Thomson Learning**, p. 47, 2001.
- UGARTE, A. Ejemplos de modelos de estimación a corto e largo plans. **Bol. Geostadist**, n. 1972, p. 4, 1972.
- VAUCLIN, M. et al. Spatial variability of surface temperature along two transects of a bare soil. **Water Resources Research**, Wiley Online Library, v. 18, n. 6, p. 1677–1686, 1982.
- VIEIRA, S. et al. Geostatistical theory and application to variability of some agronomical properties. **Hilgardia**, University of California, Agriculture and Natural Resources, v. 51, n. 3, p. 1–75, 1983.
- VIEIRA, S.; LOMBARDI, F.; BURROWS, I. Mapeamento da chuva diária máxima provável para o estado de São Paulo. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Sociedade Brasileira de Ciência do Solo, v. 15, n. 1, p. 93–98, 1991.
- VIEIRA, S. R. Geoestatística em estudos de variabilidade espacial do solo. **Tópicos em ciência do solo. Viçosa: Sociedade Brasileira de Ciência do Solo**, v. 1, p. 1–53, 2000.

WILLIAMS, D. **Probability with martingales**. [S.l.]: Cambridge university press, 1991.

YAMAMOTO, J. K. **Avaliação e classificação de reservas minerais**. [S.l.]: EdUSP, 2001. v. 38.

YAMAMOTO, J. K.; LANDIM, P. M. B. **Geoestatística: conceitos e aplicações**. [S.l.]: Oficina de textos, 2015.

APÊNDICE A – Semivariograma médio linear

Este apêndice apresenta a construção de um semivariograma médio para o modelo linear. Oliveira (1991) define um semivariograma médio conforme a equação (1), que pode ser subdividida na soma das equações (2), (3) e (4).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) = \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)\gamma(h) dh \quad (1)$$

$$\frac{1}{PQ} \int_0^P \frac{\pi h}{2} \gamma(h) dh + \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{PQ} \int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) h \right] \gamma(h) dh + \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{PQ} \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) h \right] \gamma(h) dh \quad (4)$$

Dada que a função do variograma $\gamma(h)$ a ser estudada é a linear, definida por:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + ah, & \text{para } h > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Tem-se como objetivo encontrar o semivariograma médio para uma região B, dado que o semivariograma conforme as pressuposições é linear. Logo, teremos a necessidade de solucionar (2), (3) e (4), onde $\gamma(h) = ah$, definindo a nomenclatura de $\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin}$ como o semivaiograma médio para o modelo linear.

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin} &= \frac{a}{PQ} \int_0^P \frac{\pi h}{2} h dh + \\ &+ \frac{a}{PQ} \int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) h \right] h dh + \end{aligned}$$

$$+ \frac{a}{PQ} \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right)h \right] h dh$$

Podemos obter primeiramente a solução da primeira parte de cada uma das três integrais:

$$\int_0^P \frac{\pi h}{2} h dh + \int_P^Q \frac{\pi h}{2} h dh + \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi h}{2} h dh$$

Stewart (2001) apresenta as integrais básicas de polinômios; assim, é possível notar que:

$$\int \frac{\pi h}{2} h dh = \frac{\pi h^3}{6} + C$$

logo,

$$\int_0^P \frac{\pi h}{2} h dh = \frac{\pi P^3}{6} - \frac{\pi 0^3}{6}$$

$$\int_P^Q \frac{\pi h}{2} h dh = \frac{\pi Q^3}{6} - \frac{\pi P^3}{6}$$

$$\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi h}{2} h dh = \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{6} - \frac{\pi Q^3}{6}$$

$$\frac{\pi P^3}{6} - \frac{\pi 0^3}{6} + \frac{\pi Q^3}{6} - \frac{\pi P^3}{6} + \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{6} - \frac{\pi Q^3}{6} = \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{6}$$

$$\int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi h}{2} h dh = \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{6}$$

A primeira parte de cada uma das três integrais já foi solucionada, note que agora temos a necessidade de solucionar:

$$\int_P^Q \left[-\arccos\left(\frac{P}{h}\right)h \right] h dh + \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos\left(\frac{P}{h}\right)h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right)h \right] h dh$$

Vamos aplicar a um caso geral:

$$\int \left[\arccos \left(\frac{A}{h} \right) h \right] h dh$$

Onde A é uma constante que pode assumir ou o valor de P ou valor de Q , assim generalizando para as duas necessidades do momento. Com a técnica de integrações por partes apresentada por Stewart (2001) é possível solucionar essa integral.

$$\int \arccos \left(\frac{A}{h} \right) h^2 dh$$

$$dv = h^2 dh$$

$$v = \frac{h^3}{3}$$

$$u = \arccos \left(\frac{A}{h} \right)$$

$$du = \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}}} dh$$

$$\int \arccos \left(\frac{A}{h} \right) h^2 dh = \frac{h^3}{3} \arccos \left(\frac{A}{h} \right) - \int \frac{h^3}{3} \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}}} dh = f(A, h) + g(A, h)$$

$$g(A, h) = - \int \frac{h^3}{3} \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}}} dh$$

$$g(A, h) = - \int \frac{h}{3} \frac{A}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh$$

$$g(A, h) = - \frac{A}{3} \int \frac{h}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh$$

Mantendo-se somente a integral e deixar a constante $-\frac{A}{3}$ para multiplicarmos ao final.

$$\int \frac{h}{\sqrt{\frac{h^2-A^2}{h^2}}} dh$$

$$\int \frac{h^2}{\sqrt{h^2-A^2}} dh$$

Stewart (2001) também apresenta as técnicas de transformação trigonométricas, que devem ser utilizadas para a continuidade da resolução.

$$h = A \sec(u)$$

$$dh = A \sec(u) \operatorname{tg}(u) du$$

$$\sqrt{h^2 - A^2} = \sqrt{A^2 \sec^2(u) - A^2} = A \sqrt{\sec^2(u) - 1} = A \operatorname{tg}(u)$$

$$u = \operatorname{arcsec} \left(\frac{h}{A} \right)$$

$$\int \frac{A^2 \sec^2(u)}{A \operatorname{tg}(u)} A \sec(u) \operatorname{tg}(u) du$$

$$\int A^2 \sec^3(u) du$$

$$A^2 \int \sec^3(u) du$$

Stewart (2001) apresenta que a integral de $\sec^n(u)$ pode ser obtida através de tabelas básicas de integrais; temos então que a mesma é definida pela equação (6):

$$\int \sec^n(u) du = \frac{\operatorname{sen}(u) \sec^{n-1}(u)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(u) du \quad (6)$$

No caso em questão temos $n = 3$,

$$A^2 \int \sec^3(u) du$$

$$A^2 \int \sec^3(u) du = \frac{\operatorname{sen}(u)\sec^{3-1}(u)}{3-1} + \frac{3-2}{3-1} \int \sec^{3-2}(u) du$$

$$A^2 \frac{\operatorname{sen}(u)\sec^2(u)}{2} + \frac{A^2}{2} \int \sec(u) du$$

$$\frac{A^2}{2} \operatorname{tg}(u)\sec(u) + \frac{A^2}{2} \int \sec(u) du$$

$$\frac{A^2}{2} \operatorname{tg}(u)\sec(u) + \frac{A^2}{2} \int \frac{\sec^2(u) + \operatorname{tg}(u)\sec(u)}{\operatorname{tg}(u) + \sec(u)} du$$

chamamos então,

$$w = \operatorname{tg}(u) + \sec(u)$$

$$dw = \sec^2(u) + \operatorname{tg}(u)\sec(u) du$$

$$\frac{A^2}{2} \operatorname{tg}(u)\sec(u) + \frac{A^2}{2} \int \frac{\sec^2(u) + \operatorname{tg}(u)\sec(u)}{\operatorname{tg}(u) + \sec(u)} du$$

$$\frac{A^2}{2} \operatorname{tg}(u)\sec(u) + \frac{A^2}{2} \int \frac{1}{w} dw$$

$$\frac{A^2}{2} \operatorname{tg}(u)\sec(u) + \frac{A^2}{2} \ln|w|$$

$$\frac{A^2}{2} \operatorname{tg}(u)\sec(u) + \frac{A^2}{2} \ln|\operatorname{tg}(u) + \sec(u)|$$

Sabendo que $u = \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)$, então:

$$\frac{A^2}{2} \operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right] \sec\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right] + \frac{A^2}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right] + \sec\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right]\right|$$

também sabendo que,

$$\sec[\operatorname{arcsec}(t)] = t$$

$$\operatorname{tg}[\operatorname{arcsec}(t)] = t\sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}$$

Então, se:

$$\frac{A^2}{2} \operatorname{tg} \left[\operatorname{arcsec} \left(\frac{h}{A} \right) \right] \sec \left[\operatorname{arcsec} \left(\frac{h}{A} \right) \right] + \frac{A^2}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left[\operatorname{arcsec} \left(\frac{h}{A} \right) \right] + \sec \left[\operatorname{arcsec} \left(\frac{h}{A} \right) \right] \right|$$

substituindo teremos:

$$\frac{A^2}{2} \frac{h}{A} \left(\frac{h}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{h^2}{A^2}}} \right) + \frac{A^2}{2} \ln \left| \frac{h}{A} + \frac{h}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{h^2}{A^2}}} \right|$$

realizando manipulações algébricas,

$$\frac{h^2}{2} \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}} + \frac{A^2}{2} \ln \left| \left(h + h \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}} \right) \frac{1}{A} \right|$$

prossequindo com as manipulações algébricas,

$$\frac{h^2}{2} \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}} + \frac{A^2}{2} \ln \left| h + h \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}} \right| + \frac{A^2}{2} - \ln |A|$$

Sendo $-\frac{A^2 \ln |A|}{2}$ uma constante após a integração, faz-se então como C após o resultado da integral.

$$\frac{h^2}{2} \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}} + \frac{A^2}{2} \ln \left| h + h \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}} \right|$$

Resgatando $-\frac{A}{3}$ que multiplicava a integral.

$$-\frac{A}{3} \int \frac{h}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh$$

$$-\frac{A}{3} \int \frac{h}{\sqrt{\frac{h^2-A^2}{h^2}}} dh = -\frac{A}{3} \left(\frac{h^2}{2} \sqrt{1-\frac{A^2}{h^2}} + \frac{A^2}{2} \ln \left| h + h \sqrt{1-\frac{A^2}{h^2}} \right| \right)$$

Tem-se então que:

$$-\int \frac{h^3}{3} \frac{A}{h^2 \sqrt{1-\frac{A^2}{h^2}}} dh = -\frac{A}{6} \left(h^2 \sqrt{1-\frac{A^2}{h^2}} + A^2 \ln \left| h + h \sqrt{1-\frac{A^2}{h^2}} \right| \right)$$

e conclui-se então:

$$\int \left[\arccos \left(\frac{A}{h} \right) h \right] h dh = \frac{h^3}{3} \arccos \left(\frac{A}{h} \right) - \frac{A}{6} \left(h^2 \sqrt{1-\frac{A^2}{h^2}} + A^2 \ln \left| h + h \sqrt{1-\frac{A^2}{h^2}} \right| \right)$$

Então teremos os casos onde $A = P$ e $A = Q$, para o caso $A = P$ teremos duas situações de intervalos, \int_P^Q e $\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}}$; para o caso $A = Q$ teremos somente a situação $\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}}$. Observe que quando $A = P$ teremos o intervalo onde $F(Q)$ e outro $-F(Q)$ onde se anulam, onde teremos então para $A = P$ somente $\int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}}$. A necessidade de solução agora é:

$$\int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos \left(\frac{P}{h} \right) h \right] h dh + \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos \left(\frac{Q}{h} \right) h \right] h dh$$

Para o caso $A = P$.

$$\frac{h^3}{3} \arccos \left(\frac{P}{h} \right) - \frac{P}{6} \left(h^2 \sqrt{1-\frac{P^2}{h^2}} + P^2 \ln \left| h + h \sqrt{1-\frac{P^2}{h^2}} \right| \right)$$

Substituindo para o intervalo de $(P, \sqrt{P^2+Q^2})$, primeiramente onde $h = P$.

$$-\left[\frac{P^3}{3} \arccos \left(\frac{P}{P} \right) - \frac{P}{6} \left(P^2 \sqrt{1-\frac{P^2}{P^2}} + P^2 \ln \left| P + P \sqrt{1-\frac{P^2}{P^2}} \right| \right) \right] = -\frac{P^3}{6} \ln(P)$$

Substituindo para o intervalo de $(P, \sqrt{P^2+Q^2})$, primeiramente onde $h = \sqrt{P^2+Q^2}$.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{P^2+Q^2}^3}{3} \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) + \frac{P}{6} \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{P^2}{\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^2}} + \\
& \quad + \frac{P}{6} P^2 \ln\left(\sqrt{P^2+Q^2} + \sqrt{P^2+Q^2} \sqrt{1 - \frac{P^2}{\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^2}}\right) = \\
& = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}^3}{3} \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) + \frac{PQ\sqrt{P^2+Q^2}}{6} + \frac{P^3}{6} \ln\left|Q + \sqrt{P^2+Q^2}\right|
\end{aligned}$$

Substituindo para o intervalo de $(Q, \sqrt{P^2+Q^2})$, primeiramente onde $h = Q$.

$$-\left[\frac{Q^3}{3} \arccos\left(\frac{Q}{Q}\right) - \frac{Q}{6} \left(Q^2 \sqrt{1 - \frac{Q^2}{Q^2}} + P^2 \ln\left|Q + Q \sqrt{1 - \frac{Q^2}{Q^2}}\right|\right)\right] = -\frac{Q^3}{6} \ln(Q)$$

Substituindo para o intervalo de $(Q, \sqrt{P^2+Q^2})$, primeiramente onde $h = \sqrt{P^2+Q^2}$.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{P^2+Q^2}^3}{3} \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) + \frac{Q}{6} \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{Q^2}{\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^2}} + \\
& \quad + \frac{Q}{6} Q^2 \ln\left(\sqrt{P^2+Q^2} + \sqrt{P^2+Q^2} \sqrt{1 - \frac{Q^2}{\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^2}}\right) = \\
& = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}^3}{3} \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) + \frac{PQ\sqrt{P^2+Q^2}}{6} + \frac{Q^3}{6} \ln\left(P + \sqrt{P^2+Q^2}\right)
\end{aligned}$$

Solucionadas as partes das integrais, resta somente manipulação algébrica entre os resultados obtidos:

$$\int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)\gamma(h) dh = \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{6} - \frac{P^3}{6} \ln(P) - \frac{Q^3}{6} \ln(Q) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{PQ\sqrt{P^2+Q^2}}{6} + \frac{P^3}{6} \ln \left| Q + \sqrt{P^2+Q^2} \right| + \frac{PQ\sqrt{P^2+Q^2}}{6} + \frac{Q^3}{6} \ln \left(P + \sqrt{P^2+Q^2} \right) + \\
& + \frac{\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{3} \arccos \left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right) + \frac{\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{3} \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right)
\end{aligned}$$

Agrupando semelhantes,

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{6} - \frac{\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{3} \left[\arccos \left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right) + \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right) \right] + \\
& \frac{Q^3}{6} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| + \frac{P^3}{6} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{PQ\sqrt{P^2+Q^2}}{3}
\end{aligned}$$

Observa-se que:

$$\arccos \left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right) + \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right) = \frac{\pi}{2}$$

A afirmativa acima pode ser demonstrada onde se temos um triângulo retângulo com ângulos α e β , e base P e Q , então:

$$\cos(\alpha) = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

$$\arccos \left[\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right] + \arccos \left[\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right] = \arccos[\cos(\alpha)] + \arccos[\cos(\beta)]$$

$$\arccos[\cos(\alpha)] + \arccos[\cos(\beta)] = \alpha + \beta$$

Sendo um triângulo retângulo, logo $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, assim demonstrado que:

$$\arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) + \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Então temos:

$$\frac{\pi\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{6} - \frac{\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^3}{3} \left[\arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) + \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) \right] = 0$$

Resta então somente a necessidade de ajustar o restante que não se anula, então teremos:

$$\frac{Q^3}{6} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| + \frac{P^3}{6} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{PQ\sqrt{P^2+Q^2}}{3}$$

Devemos observar na equação (1) a existência do membro $\frac{1}{PQ}$ e também a constante a que ainda não foi adicionada ao resultado, com o incremento temos:

$$\frac{a}{PQ} \left(\frac{Q^3}{6} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| + \frac{P^3}{6} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{PQ\sqrt{P^2+Q^2}}{3} \right)$$

Simplificando passamos a ter:

$$\frac{a}{6} \left(2\sqrt{P^2+Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right)$$

Dado o modelo linear (5), tem-se então a demonstração algébrica para o semivariograma médio linear com resultado de acordo com a equação (7). O resultado obtido é apresentado também por Journel e Huijbregts (1978) e em Oliveira (1991).

$$\tilde{\gamma}(s, B)_{Lin} = C_0 + \frac{a}{6} \left(2\sqrt{P^2+Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right) \quad (7)$$

APÊNDICE B – Semivariograma médio esférico

Este apêndice apresenta a construção de um semivariograma médio para o modelo esférico. Oliveira (1991) define um semivariograma médio conforme a equação (8), que pode ser subdividida na soma das equações (9), (10) e (11).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) = \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)\gamma(h) dh \quad (8)$$

$$\frac{1}{PQ} \int_0^P \frac{\pi h}{2} \gamma(h) dh + \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{PQ} \int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \right] \gamma(h) dh + \quad (10)$$

$$+ \frac{1}{PQ} \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) h \right] \gamma(h) dh \quad (11)$$

Dada que a função do variograma $\gamma(h)$ a ser estudada é o esférico, definida por:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \left[1,5\frac{h}{a} - 0,5\left(\frac{h}{a}\right)^3 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (12)$$

Tem-se como objetivo encontrar o semivariograma médio para uma região B, dado que o semivariograma conforme as pressuposições é esférico. Logo teremos a necessidade de solucionar (9), (10) e (11), onde $\gamma(h) = C_1 \left[1,5\frac{h}{a} - 0,5\left(\frac{h}{a}\right)^3 \right]$, definindo a nomenclatura de $\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Esf}$ como o semivariograma médio para o modelo esférico.

O modelo esférico apresenta dentro de sua estrutura duas subdivisões que devem ser integradas para resultar no semivariograma médio do modelo esférico. Podemos dividir em duas integrais, conforme abaixo:

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin} = \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)h \, dh \quad (13)$$

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_C = \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)h^3 \, dh \quad (14)$$

Observe que a solução para (13) já se encontra no apêndice A. Definimos então a solução para (13) como a equação (15):

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin} = C_0 + \frac{a}{6} \left(2\sqrt{P^2+Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right) \quad (15)$$

Passamos então a necessidade de solucionar somente a equação (14) que pode ser subdivida nas equações (16), (17) e (18).

$$\int_0^P \frac{\pi h}{2} h^3 \, dh \quad (16)$$

$$\int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos \left(\frac{P}{h} \right) h \right] h^3 \, dh \quad (17)$$

$$\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos \left(\frac{P}{h} \right) h - \arccos \left(\frac{Q}{h} \right) h \right] h^3 \, dh \quad (18)$$

Solucionando a primeira parte de cada integral temos:

$$\int_0^P \frac{\pi h}{2} h^3 \, dh + \int_P^Q \frac{\pi h}{2} h^3 \, dh + \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi h}{2} h^3 \, dh$$

Stewart (2001) apresenta as integrais básicas de polinômios; assim, é possível notar que:

$$\int \frac{\pi h}{2} h^3 \, dh = \frac{\pi h^5}{10} + C$$

logo,

$$\int_0^P \frac{\pi h}{2} h^3 dh = \frac{\pi P^5}{10} - \frac{\pi 0^5}{10}$$

$$\int_P^Q \frac{\pi t h}{2} h^3 dh = \frac{\pi t Q^5}{10} - \frac{\pi P^5}{10}$$

$$\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi h}{2} h^3 dh = \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^5}{10} - \frac{\pi Q^5}{10}$$

$$\frac{\pi P^5}{10} - \frac{\pi 0^5}{10} + \frac{\pi Q^5}{10} - \frac{\pi P^5}{10} + \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^5}{10} - \frac{\pi Q^5}{10}$$

$$\int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi h}{2} h^3 dh = \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^5}{10}$$

A primeira parte de cada uma das três integrais já foi solucionada, note que agora temos a necessidade de solucionar:

$$\int_P^Q \left[-\arccos\left(\frac{P}{h}\right) h \right] h^3 dh + \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos\left(\frac{P}{h}\right) h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) h \right] h^3 dh$$

Vamos aplicar a um caso geral:

$$\int \left[\arccos\left(\frac{A}{h}\right) h \right] h^3 dh$$

Onde A é uma constante que pode assumir ou o valor de P ou valor de Q , assim generalizando para as duas necessidades que temos no momento. Com a técnica de integrações por partes apresentada por Stewart (2001) é possível solucionar essa integral.

$$\int \arccos\left(\frac{A}{h}\right) h^4 dh$$

$$dv = h^4 dh$$

$$v = \frac{h^5}{5}$$

$$u = \arccos\left(\frac{A}{h}\right)$$

$$du = \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}}} dh$$

$$\int \arccos\left(\frac{A}{h}\right) h^4 dh = \frac{h^5}{5} \arccos\left(\frac{A}{h}\right) - \int \frac{h^5}{5} \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}}} dh = f(A, h) + g(A, h)$$

$$g(A, h) = - \int \frac{h^5}{5} \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}}} dh$$

$$g(A, h) = - \int \frac{h^3}{5} \frac{A}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh$$

$$g(A, h) = - \frac{A}{5} \int \frac{h^3}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh$$

Mantendo somente a integral e deixar a constante $-\frac{A}{5}$ para multiplicarmos ao final.

$$\int \frac{h^3}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh$$

$$\int \frac{h^4}{\sqrt{h^2 - A^2}} dh$$

Stewart (2001) também apresenta as técnicas de transformação trigonométricas, que devem ser utilizadas para a continuidade da resolução.

$$h = A \sec(u)$$

$$u = \operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)$$

$$dh = A \operatorname{tg}(u) \sec(u) \, du$$

$$\sqrt{h^2 - A^2} = \sqrt{A^2 \sec^2(u) - A^2}$$

$$\sqrt{A^2 \sec^2(u) - A^2} = \sqrt{A^2 [\sec^2(u) - 1]}$$

$$\sqrt{A^2 [\sec^2(u) - 1]} = A \sqrt{\operatorname{tg}^2(u)}$$

$$A \sqrt{\operatorname{tg}^2(u)} = A \operatorname{tg}(u)$$

$$\int \frac{A^4 \sec^4(u)}{A \operatorname{tg}(u)} A \operatorname{tg}(u) \sec(u) \, du$$

$$\int A^4 \sec^5(u) \, du$$

$$A^4 \int \sec^5(u) \, du$$

Stewart (2001) apresenta que a integral de $\sec^n(u)$ pode ser obtida através de tabelas básicas de integrais; temos então que a mesma é definida pela equação (19):

$$\int \sec^n(u) \, du = \frac{\operatorname{sen}(u) \sec^{n-1}(u)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(u) \, du \quad (19)$$

No caso em questão temos $n = 5$,

$$\frac{A^4}{4} \operatorname{tg}(u) \sec^3(u) + \frac{3A^4}{4} \int \sec^3(u)$$

$$\frac{A^4}{4} \operatorname{tg}(u) \sec^3(u) + \frac{3A^4}{4} \operatorname{tg}(u) \sec(u) + \frac{3A^4}{8} \int \sec(u) \, du$$

$$\frac{A^4}{4} \operatorname{tg}(u) \sec^3(u) + \frac{3A^4}{4} \operatorname{tg}(u) \sec(u) + \frac{3A^4}{8} \ln |\operatorname{tg}(u) + \sec(u)|$$

Sabendo que $u = \operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)$, então:

$$\begin{aligned} \frac{A^4}{4} \operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right] \sec^3\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right] + \frac{3A^4}{4} \operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right] \sec\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right] + \\ + \frac{3A^4}{8} \ln \left| \operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right] + \sec\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{h}{A}\right)\right] \right| \end{aligned}$$

também sabendo que,

$$\sec[\operatorname{arcsec}(w)] = w$$

$$\operatorname{tg}[\operatorname{arcsec}(w)] = w \sqrt{1 - \frac{1}{w^2}}$$

Então, se:

$$\frac{A^4}{4} \frac{h^3}{A^3} \left(\frac{h}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{h}{A}}} \right) + \frac{3A^4}{8} \frac{h}{A} \left(\frac{h}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{h}{A}}} \right) + \frac{3A^4}{8} \ln \left| \frac{h}{A} + \left(\frac{h}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{h}{A}}} \right) \right|$$

realizando manipulações algébricas,

$$\frac{h^3}{4} \sqrt{h^2 - A^2} + \frac{3A^2 h}{8} \sqrt{h^2 - A^2} + \frac{3A^4}{8} \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - A^2}}{A} \right|$$

Resgatando $-\frac{A}{5}$ que multiplicava a integral.

$$-\frac{A}{5} \int \frac{h^3}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh = -\frac{A}{40} \left[h \sqrt{h^2 - A^2} (3A^2 + 2h^2) + 3A^4 \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - A^2}}{A} \right| \right]$$

$$\int \left[\arccos\left(\frac{A}{h}\right) h \right] h^3 dh = \frac{h^5}{5} \arccos\left(\frac{A}{h}\right) - \frac{A}{40} \left[h\sqrt{h^2 - A^2}(3A^2 + 2h^2) + 3A^4 \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - A^2}}{A} \right| \right]$$

Então teremos os casos onde $A = P$ e $A = Q$, para o caso de $A = P$ teremos duas situações de intervalos, \int_P^Q e $\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}}$; para o caso $A = Q$ teremos somente a situação $\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}}$. Observe que quando $A = P$ teremos o intervalo onde $F(Q)$ e outro $-F(Q)$ onde se anulam, onde teremos então para $A = P$ somente $\int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}}$. A necessidade de solução agora é:

$$\int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos\left(\frac{P}{h}\right) h \right] h^3 dh + \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos\left(\frac{Q}{h}\right) h \right] h^3 dh$$

Para o caso $A = P$.

$$-\frac{h^5}{5} \arccos\left(\frac{P}{h}\right) + \frac{P}{40} \left[h\sqrt{h^2 - P^2}(3P^2 + 2h^2) + 3P^4 \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - P^2}}{P} \right| \right]$$

Substituindo para o intervalo de $(P, \sqrt{P^2 + Q^2})$, primeiramente onde $h = P$.

$$-\frac{P^5}{5} \arccos\left(\frac{P}{P}\right) + \frac{P}{40} \left[P\sqrt{P^2 - P^2}(3P^2 + 2P^2) + 3P^4 \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 - P^2}}{P} \right| \right] = 0$$

Para o caso $A = Q$.

$$-\frac{h^5}{5} \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) + \frac{Q}{40} \left[h\sqrt{h^2 - Q^2}(3Q^2 + 2h^2) + 3Q^4 \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - Q^2}}{Q} \right| \right]$$

Substituindo para o intervalo de $(Q, \sqrt{P^2 + Q^2})$, primeiramente onde $h = Q$.

$$-\frac{Q^5}{5} \arccos\left(\frac{Q}{Q}\right) + \frac{Q}{40} \left[Q\sqrt{Q^2 - Q^2}(3Q^2 + 2Q^2) + 3Q^4 \ln \left| \frac{Q + \sqrt{Q^2 - Q^2}}{Q} \right| \right] = 0$$

Mais uma vez para o caso $A = P$ e substituindo para o intervalo de $(P, \sqrt{P^2 + Q^2})$, primeiramente onde $h = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

$$-\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^5}{5} \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) +$$

$$+ \frac{P}{40} \left[\sqrt{P^2 + Q^2} \sqrt{\sqrt{P^2 + Q^2}^2 - P^2} (3P^2 + 2\sqrt{P^2 + Q^2}^2) + 3P^4 \ln \left| \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + \sqrt{\sqrt{P^2 + Q^2}^2 - P^2}}{P} \right| \right]$$

Simplificando teremos:

$$-\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^5}{5} \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) +$$

$$\frac{P\sqrt{P^2 + Q^2}}{40} (5P^2Q + 2Q^3) + \frac{3P^5}{40} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right|$$

Mais uma vez para o caso $A = Q$ e substituindo para o intervalo de $(P, \sqrt{P^2 + Q^2})$, primeiramente onde $h = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

$$-\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^5}{5} \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) +$$

$$+ \frac{Q}{40} \left[\sqrt{P^2 + Q^2} \sqrt{\sqrt{P^2 + Q^2}^2 - Q^2} (3Q^2 + 2\sqrt{P^2 + Q^2}^2) + 3Q^4 \ln \left| \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + \sqrt{\sqrt{P^2 + Q^2}^2 - Q^2}}{Q} \right| \right]$$

Simplificando teremos:

$$-\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^5}{5} \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) +$$

$$+ \frac{Q\sqrt{P^2 + Q^2}}{40} (5Q^2P + 2P^3) + \frac{3Q^5}{40} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right|$$

Uma vez que encontramos anteriormente:

$$\frac{\pi \left(\sqrt{P^2 + Q^2} \right)^5}{10}$$

Podemos então solucionar as partes que se agrupam.

$$\frac{\pi \left(\sqrt{P^2 + Q^2} \right)^5}{10} - \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^5}{5} \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) - \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^5}{5} \arccos \left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right)$$

Observa-se que:

$$\arccos \left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) + \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) = \frac{\pi}{2}$$

A afirmativa acima pode ser demonstrada onde se temos um triângulo retângulo com ângulos α e β , e base P e Q , então:

$$\cos(\alpha) = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\arccos \left[\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right] + \arccos \left[\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right] = \arccos[\cos(\alpha)] + \arccos[\cos(\beta)]$$

$$\arccos[\cos(\alpha)] + \arccos[\cos(\beta)] = \alpha + \beta$$

Sendo um triângulo retângulo, logo $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, assim demonstrado que:

$$\arccos \left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) + \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Então temos:

$$\frac{\pi \left(\sqrt{P^2 + Q^2} \right)^5}{10} - \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^5}{5} \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) - \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^5}{5} \arccos \left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) = 0$$

Observando a equação (14) temos $\frac{1}{PQ}$ que multiplica antes da integral; logo temos a solução para as equações (16), (17) e (18):

$$\frac{1}{PQ} \left[\frac{P\sqrt{P^2+Q^2}}{40} (5P^2Q+2Q^3) + \frac{3P^5}{40} \ln \left| \frac{Q+\sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| \right] +$$

$$+ \frac{1}{PQ} \left[\frac{Q\sqrt{P^2+Q^2}}{40} (5Q^2P+2P^3) + \frac{3Q^5}{40} \ln \left| \frac{P+\sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right]$$

Utilizando técnicas de álgebra para apresentar da melhor maneira, temos então a solução final para a equação (14):

$$\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{40} (7P^2+7Q^2) + \frac{3P^4}{40Q} \ln \left| \frac{Q+\sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{3Q^4}{40P} \ln \left| \frac{P+\sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right|$$

Agrupando as soluções da parte linear (13) e da parte cúbica (14). Então, dado o modelo esférico (12), tem-se então a demonstração algébrica para o semivariograma médio esférico com resultado de acordo com a equação (20).

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Esf} = C_0 + \frac{0,25C_1}{a} \left(2\sqrt{P^2+Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q+\sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P+\sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right) +$$

$$- \frac{0,5C_1}{a^3} \left[\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{40} (7P^2+7Q^2) + \frac{3P^4}{40Q} \ln \left| \frac{Q+\sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{3Q^4}{40P} \ln \left| \frac{P+\sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right] \quad (20)$$

APÊNDICE C – Semivariograma médio pentaesférico

Este apêndice apresenta a construção de um semivariograma médio para o modelo cúbico. Oliveira (1991) define um semivariograma médio conforme a equação (21), que pode ser subdividida na soma das equações (22), (23) e (24).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) = \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)\gamma(h) dh \quad (21)$$

$$+ \frac{1}{PQ} \int_0^P \frac{\pi h}{2} \gamma(h) dh + \quad (22)$$

$$+ \frac{1}{PQ} \int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) h \right] \gamma(h) dh + \quad (23)$$

$$+ \frac{1}{PQ} \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) h \right] \gamma(h) dh \quad (24)$$

Dada que a função do variograma $\gamma(h)$ a ser estudada é o esférico, definida por:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \left[1,875 \left(\frac{h}{a}\right) - 1,25 \left(\frac{h}{a}\right)^3 + 0,375 \left(\frac{h}{a}\right)^5 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (25)$$

Tem-se como objetivo encontrar o semivariograma médio para uma região B dado que o semivariograma conforme as pressuposições é esférico. Logo teremos a necessidade de solucionar (22), (23) e (24), onde $\hat{\gamma}(h) = C_1 \left[1,875 \left(\frac{h}{a}\right) - 1,25 \left(\frac{h}{a}\right)^3 + 0,375 \left(\frac{h}{a}\right)^5 \right]$, definindo a nomenclatura de $\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_P$ como o semivariograma médio para o modelo pentaesférico.

O modelo pentaesférico apresenta dentro de sua estrutura três subdivisões que devem ser integradas para resultar no semivariograma médio do modelo pentaesférico. Podemos dividir em três integrais, conforme abaixo:

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin} = \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)h \, dh \quad (26)$$

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_C = \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)h^3 \, dh \quad (27)$$

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_P = \frac{1}{PQ} \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h)h^5 \, dh \quad (28)$$

Observe que a solução para (26) e para (27) já se encontra respectivamente nos apêndices A e B. Definimos então a solução para a equação (26):

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin} = C_0 + \frac{a}{6} \left(2\sqrt{P^2+Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right) \quad (29)$$

E para a equação (27) a definimos como:

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_C = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{40} (7P^2 + 7^2Q) + \frac{3P^4}{40} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| + \frac{3Q^4}{40} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \quad (30)$$

Passamos então a necessidade de solucionar somente a equação (28), que pode ser subdividida nas equações (31),(32) e (33).

$$\int_0^P \frac{\pi h}{2} h^5 \, dh \quad (31)$$

$$\int_P^Q \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos \left(\frac{P}{h} \right) h \right] h^5 \, dh \quad (32)$$

$$\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right)h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right)h \right] h^5 dh \quad (33)$$

Solucionando a primeira parte de cada integral temos:

$$\int_0^P \frac{\pi h}{2} h^5 dh + \int_P^Q \frac{\pi h}{2} h^5 dh + \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi h}{2} h^5 dh$$

Stewart (2001) apresenta as integrais básicas de polinômios; assim, é possível notar que:

$$\int \frac{\pi h}{2} h^5 dh = \frac{\pi h^7}{14} + C$$

logo,

$$\int_0^P \frac{\pi h}{2} h^5 dh = \frac{\pi P^7}{14} - \frac{\pi 0^7}{14}$$

$$\int_P^Q \frac{\pi h}{2} h^5 dh = \frac{\pi Q^7}{14} - \frac{\pi P^7}{14}$$

$$\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi h}{2} h^5 dh = \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^7}{14} - \frac{\pi Q^7}{14}$$

$$\frac{\pi P^7}{14} - \frac{\pi 0^7}{14} + \frac{\pi Q^7}{14} - \frac{\pi P^7}{14} + \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^7}{14} - \frac{\pi Q^7}{14}$$

$$\int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi h}{2} h^5 dh = \frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^7}{14}$$

A primeira parte de cada uma das três integrais já foi solucionada, note que agora temos a necessidade de solucionar:

$$\int_P^Q \left[-\arccos\left(\frac{P}{h}\right)h \right] h^5 dh + \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos\left(\frac{P}{h}\right)h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right)h \right] h^5 dh$$

Vamos aplicar a um caso geral:

$$\int \left[\arccos \left(\frac{A}{h} \right) h \right] h^5 dh$$

Onde A é uma constante que pode assumir ou o valor de P ou valor de Q , assim generalizando para as duas necessidades do momento. Com a técnica de integrações por partes apresentada por Stewart (2001) é possível solucionar essa integral.

$$\int \arccos \left(\frac{A}{h} \right) h^6 dh$$

$$dv = h^6 dh$$

$$v = \frac{h^7}{7}$$

$$u = \arccos \left(\frac{A}{h} \right)$$

$$du = \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}}} dh$$

$$\int \arccos \left(\frac{A}{h} \right) h^6 dh = \frac{h^7}{7} \arccos \left(\frac{A}{h} \right) - \int \frac{h^7}{7} \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}}} dh = f(A, h) + g(A, h)$$

$$g(A, h) = - \int \frac{h^7}{7} \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{h^2}}} dh$$

$$g(A, h) = - \int \frac{h^5}{7} \frac{A}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh$$

$$g(A, h) = - \frac{A}{7} \int \frac{h^5}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh$$

Mantendo-se somente a integral e deixar a constante $-\frac{A}{7}$ para multiplicarmos ao final.

$$\int \frac{h^5}{\sqrt{\frac{h^2-A^2}{h^2}}} dh$$

$$\int \frac{h^6}{\sqrt{h^2-A^2}} dh$$

Stewart (2001) também apresenta as técnicas de transformação trigonométricas, que devem ser utilizadas para a continuidade da resolução.

$$h = A \sec(u)$$

$$u = \arcsen\left(\frac{h}{A}\right)$$

$$dh = A \operatorname{tg}(u) \sec(u) du$$

$$\sqrt{h^2 - A^2} = \sqrt{A^2 \sec^2(u) - A^2}$$

$$\sqrt{A^2 \sec^2(u) - A^2} = \sqrt{A^2 [\sec^2(u) - 1]}$$

$$\sqrt{A^2 [\sec^2(u) - 1]} = A \sqrt{\operatorname{tg}^2(u)}$$

$$A \sqrt{\operatorname{tg}^2(u)} = A \operatorname{tg}(u)$$

$$\int \frac{A^6 \sec^6(u)}{A \operatorname{tg}(u)} A \operatorname{tg}(u) \sec(u) du$$

$$\int A^6 \sec^7(u) du$$

$$A^6 \int \sec^7(u) du$$

Stewart (2001) apresenta que a integral de $\sec^n(u)$ pode ser obtida através de tabelas básicas de integrais; temos então que a mesma é definida pela equação (34):

$$\int \sec^n(u) du = \frac{\operatorname{sen}(u)\sec^{n-1}(u)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(u) du \quad (34)$$

No caso em questão temos $n = 7$,

$$\frac{A^6}{6} \operatorname{tg}(u)\sec^5(u) + \frac{5A^6}{6} \int \sec^5(u)$$

$$\frac{A^6}{6} \operatorname{tg}(u)\sec^5(u) + \frac{5A^6}{24} \operatorname{tg}(u)\sec^3(u) + \frac{5A^6}{8} \int \sec^3(u) du$$

$$\frac{A^6}{6} \operatorname{tg}(u)\sec^5(u) + \frac{5A^6}{24} \operatorname{tg}(u)\sec^3(u) + \frac{5A^6}{16} \operatorname{tg}(u)\sec(u) + \frac{5A^6}{16} \int \sec(u) du$$

$$\frac{A^6}{6} \operatorname{tg}(u)\sec^5(u) + \frac{5A^6}{24} \operatorname{tg}(u)\sec^3(u) + \frac{5A^6}{16} \operatorname{tg}(u)\sec(u) + \frac{5A^6}{16} \ln|\operatorname{tg}(u) + \sec(u)|$$

Sabendo que $u = \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)$, então:

$$\frac{A^6}{6} \operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)\right] \sec^5\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)\right] + \frac{5A^6}{24} \operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)\right] \sec^3\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)\right] +$$

$$\frac{5A^6}{16} \operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)\right] \sec\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)\right] + \frac{5A^6}{16} \ln\left|\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)\right] + \sec\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{A}\right)\right]\right|$$

também sabendo que,

$$\sec[\operatorname{arcsec}(w)] = w$$

$$\operatorname{tg}[\operatorname{arcsec}(w)] = w\sqrt{1 - \frac{1}{w^2}}$$

Então, se:

$$\frac{A^6 h^5}{6 A^5} \left(\frac{h}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{h}{A}}} \right) + \frac{5A^6 h^3}{24 A^3} \left(\frac{h}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{h}{A}}} \right) + \frac{5A^6 h}{16 A} \left(\frac{h}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{h}{A}}} \right) + \frac{5A^6}{16} \ln \left| \frac{h}{A} \left(\frac{h}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{h}{A}}} \right) \right|$$

realizando manipulações algébricas,

$$\frac{h^5}{6} \sqrt{h^2 - A^2} + \frac{5A^2 h^3}{24} \sqrt{h^2 - A^2} + \frac{5A^4 h}{16} \sqrt{h^2 - A^2} + \frac{5A^6}{16} \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - A^2}}{A} \right|$$

Resgatando $-\frac{A}{7}$ que multiplicava a integral.

$$-\frac{A}{7} \int \frac{h^5}{\sqrt{\frac{h^2 - A^2}{h^2}}} dh = -\frac{A}{336} \left[h\sqrt{h^2 - A^2} (15A^4 + 10A^2 h^2 + 8h^4) + 15A^6 \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - A^2}}{A} \right| \right]$$

Tem-se então que:

$$\int \left[\arccos \left(\frac{A}{h} \right) h \right] h^5 dh = \frac{h^7}{7} \arccos \left(\frac{A}{h} \right) - \frac{A}{336} \left[h\sqrt{h^2 - A^2} (15A^4 + 10A^2 h^2 + 8h^4) \right] +$$

$$-\frac{A}{336} \left[15A^6 \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - A^2}}{A} \right| \right]$$

Então teremos os casos onde $A = P$ e $A = Q$, para o caso de $A = P$ teremos duas situações de intervalos, \int_P^Q e $\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}}$; para o caso $A = Q$ teremos somente a situação $\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}}$. Observe que quando $A = P$ teremos o intervalo onde $F(Q)$ e outro $-F(Q)$ onde se anulam, onde teremos então para $A = P$ somente $\int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}}$. A necessidade de solução agora é:

$$\int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos \left(\frac{P}{h} \right) h \right] h^5 dh + \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos \left(\frac{Q}{h} \right) h \right] h^5 dh$$

Para o caso $A = P$.

$$-\frac{h^7}{7} \arccos\left(\frac{P}{h}\right) + \frac{P}{336} \left[h\sqrt{h^2 - P^2} (15P^4 + 10P^2h^2 + 8h^4) \right] + \frac{P}{336} \left[15P^6 \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - P^2}}{P} \right| \right]$$

Substituindo para o intervalo $(P, \sqrt{P^2 + Q^2})$, primeiramente onde $h = P$.

$$-\frac{P^7}{7} \arccos\left(\frac{P}{P}\right) + \frac{P}{336} \left[P\sqrt{P^2 - P^2} (15P^4 + 10P^2P^2 + 8P^4) \right] + \\ + \frac{P}{336} \left[15P^6 \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 - P^2}}{P} \right| \right] = 0$$

Para o caso $A = Q$.

$$-\frac{h^7}{7} \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) + \frac{Q}{336} \left[h\sqrt{h^2 - Q^2} (15Q^4 + 10Q^2h^2 + 8h^4) \right] + \frac{Q}{336} \left[15Q^6 \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - Q^2}}{Q} \right| \right]$$

Substituindo para o intervalo $(Q, \sqrt{P^2 + Q^2})$, primeiramente onde $h = Q$.

$$-\frac{Q^7}{7} \arccos\left(\frac{Q}{Q}\right) + \frac{Q}{336} \left[Q\sqrt{Q^2 - Q^2} (15Q^4 + 10Q^2Q^2 + 8Q^4) + 15Q^6 \right] + \\ + \frac{Q}{336} \left[15Q^6 \ln \left| \frac{Q + \sqrt{Q^2 - Q^2}}{Q} \right| \right] = 0$$

Mais uma vez para o caso $A = P$ e substituindo para o intervalo de $(P, \sqrt{P^2 + Q^2})$, primeiramente onde $h = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

$$-\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^7}{7} \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) + \\ + \frac{P}{336} \left[\sqrt{P^2 + Q^2} \sqrt{\sqrt{P^2 + Q^2}^2 - P^2} (15P^4 + 10P^2 \sqrt{P^2 + Q^2}^2 + 8\sqrt{P^2 + Q^2}^4) \right] +$$

$$+\frac{P}{336} \left[15P^6 \ln \left| \frac{\sqrt{P^2+Q^2} + \sqrt{\sqrt{P^2+Q^2}^2 - P^2}}{P} \right| \right]$$

Simplificando teremos:

$$-\frac{\sqrt{P^2+Q^2}^7}{7} \arccos \left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right) +$$

$$+\frac{P}{336} \left[\sqrt{P^2+Q^2} (33P^4Q + 12P^2Q^3 + 8Q^5) \right] + \frac{P}{336} \left[15P^6 \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2+Q^2}}{P} \right| \right]$$

Mais uma vez para o caso $A = Q$ e substituindo para o intervalo de $(P, \sqrt{P^2+Q^2})$, primeiramente onde $h = \sqrt{P^2+Q^2}$.

$$-\frac{\sqrt{P^2+Q^2}^7}{7} \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right) +$$

$$+\frac{Q}{336} \left[\sqrt{P^2+Q^2} \sqrt{\sqrt{P^2+Q^2}^2 - Q^2} (15Q^4 + 10Q^2 \sqrt{P^2+Q^2} + 8\sqrt{P^2+Q^2}^4) \right] +$$

$$+\frac{Q}{336} \left[15Q^6 \ln \left| \frac{\sqrt{P^2+Q^2} + \sqrt{\sqrt{P^2+Q^2}^2 - Q^2}}{Q} \right| \right]$$

Simplificando teremos:

$$-\frac{\sqrt{P^2+Q^2}^7}{7} \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right) +$$

$$+\frac{Q}{336} \left[\sqrt{P^2+Q^2} (33Q^4P + 12Q^2P^3 + 8P^5) \right] + \frac{Q}{336} \left[15Q^6 \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{Q} \right| \right]$$

Uma vez que encontramos anteriormente:

$$\frac{\pi \left(\sqrt{P^2+Q^2} \right)^7}{14}$$

Podemos então solucionar as partes que agrupam.

$$\frac{\pi \left(\sqrt{P^2 + Q^2}\right)^7}{14} - \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^7}{7} \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) - \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^7}{7} \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right)$$

Observa-se que:

$$\arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) + \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

A afirmativa acima pode ser demonstrada onde se temos um triângulo retângulo com ângulos α e β , e base P e Q , então:

$$\cos(\alpha) = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\arccos\left[\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right] + \arccos\left[\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right] = \arccos[\cos(\alpha)] + \arccos[\cos(\beta)]$$

$$\arccos[\cos(\alpha)] + \arccos[\cos(\beta)] = \alpha + \beta$$

Sendo um triângulo retângulo, logo $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, assim demonstrado que:

$$\arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) + \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Então temos:

$$\frac{\pi \left(\sqrt{P^2 + Q^2}\right)^7}{14} - \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^7}{7} \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) - \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}^7}{7} \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right) = 0$$

Observando a equação (28) temos $\frac{1}{PQ}$ que multiplica antes da integral; logo temos a solução para as equações (31),(32) e (33):

$$\frac{1}{PQ} \frac{P}{336} \left[\sqrt{P^2 + Q^2} (33P^4Q + 12P^2Q^3 + 8Q^5) \right] + \frac{1}{PQ} \frac{P}{336} \left[15P^6 \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| \right] +$$

$$+ \frac{1}{PQ} \frac{Q}{336} \left[\sqrt{P^2 + Q^2} (33Q^4P + 12Q^2P^3 + 8P^5) \right] + \frac{1}{PQ} \frac{Q}{336} \left[15Q^6 \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right]$$

Utilizado técnicas de álgebra para apresentar da melhor maneira, temos então a solução final para a equação (28):

$$\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{336} (41Q^4 + 41P^4 + 24P^2Q^2) + \frac{5P^6}{112Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{5Q^6}{112P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right|$$

Agrupando as soluções da parte linear (26), da parte cúbica (27) e da parte a quinta potência (28). Então, dado o modelo pentaesférico (25), tem-se então a demonstração algébrica para o semivariograma médio pentaesférico com resultado de acordo com a equação (35).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{B})_{Pent} = C_0 + \frac{0,25C_1}{a} \left(2\sqrt{P^2 + Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right) +$$

$$- \frac{1,25C_1}{a^3} \left[\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{40} (7P^2 + 7Q^2) + \frac{3P^4}{40Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{3Q^4}{40P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right] +$$

$$+ \frac{0,375C_1}{a^5} \left[\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{336} (41Q^4 + 41P^4 + 24P^2Q^2) \right] +$$

$$+ \frac{0,375C_1}{a^5} \left[\frac{5P^6}{112Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{5Q^6}{112P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right] \quad (35)$$

APÊNDICE D – Semivariogramas médios para os modelos usuais

Modelo linear:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + ah, & \text{para } h > 0 \end{cases} \quad (36)$$

Semivariograma médio linear:

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{B})_{Lin} = C_0 + \frac{a}{6} \left(2\sqrt{P^2 + Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right) \quad (37)$$

Modelo esférico:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \left[1,5\frac{h}{a} - 0,5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (38)$$

Semivariograma médio:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{B})_{Esf} = C_0 + \frac{0,25C_1}{a} \left(2\sqrt{P^2 + Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right) + \\ - \frac{0,5C_1}{a^3} \left[\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{40} (7P^2 + 7^2Q) + \frac{3P^4}{40} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{3Q^4}{40} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right] \end{aligned} \quad (39)$$

Modelo pentaesférico:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \left[1,875 \left(\frac{h}{a}\right) - 1,25 \left(\frac{h}{a}\right)^3 + 0,375 \left(\frac{h}{a}\right)^5 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (40)$$

Semivariograma médio pentaesférico:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Pent} = & C_0 + \frac{0,25C_1}{a} \left(2\sqrt{P^2 + Q^2} + \frac{P^2}{Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right) + \\ & - \frac{1,25C_1}{a^3} \left[\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{40} (7P^2 + 7Q^2) + \frac{3P^4}{40Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{3Q^4}{40P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right] + \\ & + \frac{0,375C_1}{a^5} \left[\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{336} (41Q^4 + 41P^4 + 24P^2Q^2) \right] \\ & + \frac{0,375C_1}{a^5} \left[\frac{5P^6}{112Q} \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{5Q^6}{112P} \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right] \end{aligned} \quad (41)$$