



DIMAS JACKSON DE OLIVEIRA

ASPECTOS DE COSMOLOGIA E GRAVITAÇÃO NÃO LOCAL

LAVRAS – MG

2021

DIMAS JACKSON DE OLIVEIRA

ASPECTOS DE COSMOLOGIA E GRAVITAÇÃO NÃO LOCAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Rodrigo Bufalo

Orientador

LAVRAS – MG

2021

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo próprio autor.**

Oliveira, Dimas Jackson de
Aspectos de cosmologia e gravitação não local / Dimas
Jackson de Oliveira. – Lavras : UFLA, 2021.
107 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal
de Lavras, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bufalo.
Bibliografia.

1. Cosmologia. 2. Não local. 3. Gravidade modificada. I.
Bufalo, Rodrigo. II. Título.

DIMAS JACKSON DE OLIVEIRA

**ASPECTOS DE COSMOLOGIA E GRAVITAÇÃO NÃO LOCAL
ASPECTS OF COSMOLOGY AND NON-LOCAL GRAVITATION**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 25 de fevereiro de 2021.

Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo	UFLA
Prof ^a . Dr ^a . Tatiana Cardoso e Bufalo	UFLA
Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto	UniAlberta
Prof. Dr. German Lugones	UFABC

Prof. Dr. Rodrigo Bufalo
Orientador

**LAVRAS – MG
2021**

À Deus e aos meus pais, Suely e Dorival.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Agradeço à CAPES por fomentar e viabilizar esta pesquisa, bem como ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, que corroboram para o avanço da ciência em nosso país, mesmo em tempos difíceis como os que vivemos.

Ao prof. Rodrigo Bufalo por sugerir o tema da pesquisa, pelas orientações e revisões do trabalho e por todo incentivo.

Aos meus pais Dorival e Suely e aos meus irmãos Jason e Silas pelo amor incondicional, apoio e incentivo para que eu continuasse meus estudos. À minha esposa Nayara, por estar ao meu lado em todos os momentos, me incentivar a superar as dificuldades e por seu amor, carinho e cuidado excepcional. Aos colegas da pós graduação em Física que colaboram para um ambiente de trabalho diversificado, que permitiu momentos de descontração e troca de experiências.

Agradeço ao único Deus e nosso Senhor Jesus, pela sua graça que me proporciona vitalidade e capacidade intelectual para estudar o seu maravilhoso universo.

“Descobrir para os outros as perfeições de Deus reveladas em suas criaturas é um ato de religião mais aceitável do que o queimar de sacrifícios ou perfumes sobre o altar. A contemplação racional da natureza é a ‘adoração filosófica de Deus’.”
Robert Boyle

RESUMO

A teoria da Relatividade Geral tem sido confirmada experimentalmente por diversos resultados desde a sua proposta em 1915. No entanto, sabe-se que esta teoria tem seu limite de validade, não sendo aplicada a escalas de comprimento muito pequenas e tempos iniciais do universo e não fornece uma explicação para a expansão acelerada do universo. Ainda não há uma interpretação satisfatória para a origem da constante cosmológica nas equações de campo, que descrevem esta expansão acelerada no modelo cosmológico Λ CDM. Apesar deste modelo ser o mais aceito atualmente, é necessário postular a existência de energia escura para que os resultados experimentais estejam de acordo com o previsto pela Relatividade Geral. Devido a estas e outras questões em aberto, diversas teorias têm sido propostas para modificar minimamente a teoria gravitacional de Einstein, como por exemplo, teorias $f(R)$, teorias que não obedecem a condição de metricidade e teorias não locais. Neste trabalho discutiremos os conceitos físicos e matemáticos fundamentais da gravitação e cosmologia, baseados na Relatividade Geral. Apresentaremos o conceito de não localidade em teorias físicas por meio de exemplos da mecânica quântica, eletrodinâmica e uma discussão sobre gravitação não local. Apresentaremos também uma discussão sobre operadores não locais e se o princípio de causalidade é violado pela presença de termos não locais em uma ação efetiva quântica. Discutiremos o modelo de gravidade não local de Deser-Woodard, que modifica minimamente a ação de Einstein-Hilbert por meio de termos não locais inspirados por correções quânticas da ação efetiva. Este modelo foi proposto em 2019 com o objetivo de explicar a expansão acelerada do universo, sem a necessidade de introduzir a constante cosmológica na ação. Analisaremos as soluções perturbativas deste modelo, as quais permitem uma comparação dos resultados teóricos com dados experimentais, para a constante gravitacional de Newton efetiva e para a taxa de crescimento de estruturas $f\sigma_8$. Aplicaremos o modelo de Deser-Woodard para a descrição do universo com ricochete (*bouncing*) obtendo soluções exatas e numéricas para os campos auxiliares, que contém a informação não local. O resultado desta análise indica a viabilidade de uma conexão entre o universo com ricochete e o modelo Λ CDM, feita com base na cosmologia não local.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Cosmologia. Não local. Gravidade modificada.

ABSTRACT

The General Theory of Relativity has been confirmed experimentally by several results since its proposal in 1915. However, it is known that this theory has its validity limit, not being applied to very small length scales and initial times of the universe and does not provide an explanation for the accelerated expansion of the universe. There is still no satisfactory interpretation for the origin of the cosmological constant in the field equations, which describes this expansion in the Λ CDM cosmological model. Although this model is the most accepted today, it is necessary to postulate the existence of dark energy so that the experimental results are in accordance with the predicted by General Relativity. Due to these and other open questions, several theories have been proposed to minimally modify Einstein's gravitational theory, such as $f(R)$ theories, non metricity theories and nonlocal theories. In this work we will present the fundamental physical and mathematical concepts of gravitation and cosmology, based on General Relativity. We will present the concept of non-locality in physical theories, through examples of quantum mechanics, electrodynamics and a discussion of non-local gravitation. We will also present a discussion about non-local operators and whether the principle of causality is violated by the presence of non-local terms in an effective quantum action. We will discuss the modified gravity model of Deser-Woodard, which minimally modifies the Einstein-Hilbert action, through non-local terms inspired by quantum corrections of effective action. This model was proposed in 2019 in order to explain the accelerated expansion of the universe, without cosmological constant. We will analyze the perturbative solutions of this model, which allow a comparison between theoretical and experimental data for the effective Newton's gravitational constant and the growth rate of structures $f\sigma_8$. We will apply the Deser-Woodard model to bouncing universe, finding exact and numerical solutions for the auxiliary fields, which contain non-local information. The results of this analysis show a feasibility of a connection between the bouncing universe and the Λ CDM model, based on non-local cosmology.

Keywords: General Relativity. Cosmology. Nonlocal. Modified Gravity

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Ilustração da precessão do periélio de Mercúrio. A precessão foi exagerada para facilitar a visualização. Fonte: Autor (2020).	12
Figura 2.1 – O vetor transportado do ponto A ao ponto B sofre diferentes variações em suas componentes se seguir pelo caminho c_1 ou pelo caminho c_2 . Fonte: Autor (2020).	23
Figura 2.2 – Representação geométrica do universo com curvatura negativa, plano e com curvatura positiva, respectivamente. Fonte: Autor (2020).	40
Figura 4.1 – Gráfico do campo auxiliar X em função do tempo cosmológico, para o caso da métrica FLRW. Fonte: Autor (2021).	79
Figura 4.2 – Gráfico do campo auxiliar Y em função do tempo cosmológico, para o caso da métrica FLRW. Fonte: Autor (2021).	81
Figura 4.3 – Valores experimentais para o parâmetro $f\sigma_8$ em comparação com as curvas teóricas dos modelos Λ CDM, DW I e DW II. Fonte: (DING; DENG, 2019).	93
Figura 4.4 – Gráfico da função $F(t)$ e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete. Valores fixados para as constantes: $h_1 = 1$, $A_2 = 2$ e $A_1 = 1$. Fonte: Autor (2021).	95
Figura 4.5 – Gráfico do campo auxiliar $X(t)$ e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete. Valores fixados para as constantes: $h_1 = 1$, $B_2 = -0,1$ e $B_1 = 0$. Fonte: Autor (2021).	96
Figura 4.6 – Gráfico do campo auxiliar $Y(t)$ e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete, tendo como condições iniciais $Y(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = 0$. Fonte: Autor (2021).	97
Figura 4.7 – Gráfico do campo auxiliar V e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete. Condições iniciais: $V(5) = V'(5) = 0.999$. Fonte: Autor (2021).	98
Figura 4.8 – Gráfico do campo auxiliar U e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete. Condições iniciais: $U(5) = 0.999$. Fonte: Autor (2021).	98
Figura 4.9 – Gráfico da função de distorção não local $f(Y)$, para o modelo de universo com ricochete. Fonte: Autor (2021).	99

Figura 4.10 – Diferentes soluções para $V(t)$, sob a condição inicial $V(k) = V'(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Fonte: Autor (2021).	100
Figura 4.11 – Diferentes soluções para $U(t)$, sob a condição inicial $U(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Fonte: Autor (2021).	100
Figura 4.12 – Diferentes soluções para $f(t)$. O índice k indica que a condição inicial utilizada na solução de $U(t)$ foi $U(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Fonte: Autor (2021).	101
Figura 4.13 – Diferentes soluções para $f(Y)$. O índice k indica que a condição inicial utilizada na solução de $U(t)$ foi $U(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Fonte: Autor (2021).	101

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	CONCEITOS GEOMÉTRICOS E FÍSICOS DA RELATIVIDADE GERAL	18
2.1	Equação da geodésica	18
2.2	Derivada covariante	20
2.3	Transporte paralelo	22
2.4	Tensor de curvatura de Riemann	24
2.5	Equações de campo de Einstein	27
2.6	Cosmologia da Relatividade Geral	34
2.6.1	O universo de Einstein	35
2.6.2	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	38
2.6.3	Equação de Friedmann	43
3	INTRODUÇÃO À TEORIAS NÃO LOCAIS	50
3.1	Princípio da localidade e emaranhamento	50
3.2	Lagrangianas não locais	52
3.2.1	Eletrodinâmica clássica	52
3.2.2	Eletrodinâmica quântica	59
3.2.3	Gravitação	60
3.2.4	Operadores não locais e a ação efetiva quântica	64
4	O MODELO DE DESER-WOODARD	70
4.1	Modelo I	70
4.2	Modelo II	75
4.2.1	Efeito de blindagem	78
4.2.2	Função de distorção não local	82
4.3	Teoria de perturbações	84
4.3.1	Equações perturbativas dos campos auxiliares	88
4.3.2	Lei de conservação	90
4.3.3	Constante gravitacional efetiva	93
4.4	Universo com ricochete	94
4.4.1	Diferentes condições iniciais	99
5	CONCLUSÃO	102
	REFERÊNCIAS	104

1 INTRODUÇÃO

Apesar de ser a explicação mais aceita e atual para a gravitação, corroborada por diversas comprovações experimentais, a teoria da Relatividade Geral proposta por Albert Einstein em 1915 é limitada quanto a uma descrição completa do universo (em escalas de comprimento da ordem do comprimento de Planck $l_P \approx 1,6 \times 10^{-33}$ cm). Um dos grandes desafios para os físicos atualmente é a busca por uma teoria unificadora entre a gravitação e quantização na escala de Planck. O uso de termos não locais, que têm origem quântica, em um modelo gravitacional pode contribuir com o entendimento das limitações existentes na Relatividade Geral que impedem esta unificação.

A Relatividade Geral (RG), como vista por Einstein, é uma teoria geométrica e descreve os fenômenos gravitacionais por meio da dinâmica de um espaço quadridimensional (chamado de espaço-tempo). A RG está fundamentada no *princípio da equivalência* (local) que estabelece a equivalência entre a massa inercial e a massa gravitacional, permitindo que seja possível encontrar um referencial no qual, localmente, um observador não perceba a presença do campo gravitacional. Ao se analisar a transformação de coordenadas de um referencial sem gravitação para um referencial qualquer, aparecem novos termos nas equações de movimento que contém a informação da diferença da curvatura entre estes dois sistemas. Estes termos adicionais são interpretados como o efeito do campo gravitacional, ou seja, uma explicação puramente geométrica para a gravidade. É preciso ressaltar que esta formulação do princípio da equivalência é válida somente se o campo gravitacional for considerado constante e homogêneo, já que variações no campo impedem a existência de um referencial como descrito anteriormente. No entanto, qualquer campo gravitacional pode ser considerado constante e homogêneo em uma região suficientemente pequena do espaço-tempo, isto é, localmente. Em sua forma forte, o princípio da equivalência diz que não é possível distinguir por nenhum experimento em uma região infinitesimalmente pequena, entre dois sistemas de referência invariantes sob transformações de Lorentz em diferentes regiões do espaço-tempo, o que é análogo a dizer que, as leis da Física permanecem na forma descrita pela Relatividade Restrita na ausência de gravitação (MISNER et al., 1973).

A primeira pessoa a testar experimentalmente o princípio da equivalência foi Isaac Newton em 1687, realizando experimentos com pêndulos de composições distintas ele não foi capaz de encontrar nenhuma diferença entre a massa inercial e gravitacional. Em 1889 o físico húngaro Loránd Eötvös (também conhecido como Roland von Eötvös) realizou um experimento

utilizando uma balança de torção criada por ele e mostrou que a razão entre a massa inercial e a massa gravitacional não difere do valor 1 por 10^{-9} (WEINBERG, 1972). Um experimento moderno denominado “Eöt-Wash” realizado em 2012 na Universidade de Washington usou uma balança de torção mais sofisticada que permitiu incluir efeitos devido a variação do relevo da Terra, posição do Sol e até mesmo do restante da galáxia. Os resultados deste experimento apresentam que a diferença entre as massas inercial e gravitacional é da ordem de 2×10^{-13} (WILL, 2014), confirmando ainda mais a validade deste princípio.

De acordo com a RG a curvatura do espaço-tempo que provoca o efeito gravitacional está diretamente relacionada com a presença de energia e matéria por meio de um conjunto de 10 equações diferenciais parciais, as chamadas equações de campo de Einstein (PEEBLES, 1993):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Do lado esquerdo aparecem o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar R que descrevem a curvatura do espaço-tempo, enquanto que do lado direito está o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ que contém a informação da presença de energia. As quantidades $R_{\mu\nu}$ e R são proporcionais a derivadas de segunda ordem do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que é a incógnita deste conjunto de equações. No Capítulo 1 discutiremos as características físicas e propriedades matemáticas destas equações a partir do princípio variacional.

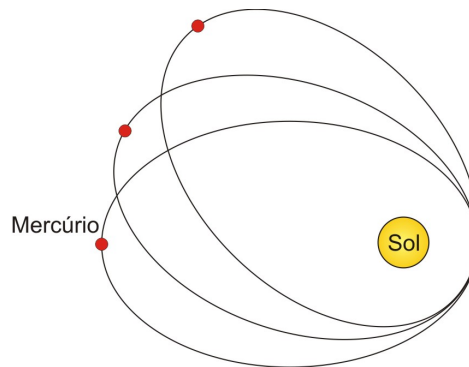
Desde sua proposta em 1915 a RG passou por testes experimentais, como por exemplo: a deflexão da luz devido a curvatura do espaço-tempo ao passar próximo a um corpo massivo, a precessão do periélio de Mercúrio e o atraso em um eco de um sinal de radar (atraso de Shapiro). Os resultados obtidos mostram que as previsões feitas pela RG são consistentes com a realidade e conseqüentemente esta teoria foi amplamente aceita. Portanto, vejamos a seguir com mais detalhes cada um destes testes mencionados.

O cálculo do ângulo de deflexão de um feixe de luz ao passar próximo ao Sol já havia sido feito (embora não publicado) por Henry Cavendish por volta de 1784 e por Johann Georg von Soldner em um artigo de 1804 (Will, 1988), no qual ambos utilizaram a mecânica newtoniana da gravitação e a luz como um corpúsculo de massa muito pequena. O valor calculado atualmente a partir da Relatividade Geral para a deflexão da luz vinda de uma estrela muito distante passando próxima ao Sol, é de 1,75 segundos de arco (um segundo de arco é 1/3600 de um grau), este é o dobro do valor obtido por Cavendish e Soldner. Além da primeira evidência experimental da deflexão da luz obtida pela expedição de Sir Arthur Eddington coletando dados

em um eclipse observado na cidade de Sobral no Brasil em 1919, diversos outros experimentos foram realizados, por exemplo, uma observação feita no Sudão em 1952 apresenta o valor de $1,70 \pm 0,10$ segundos de arco (WEINBERG, 1972). Dados experimentais recentes como o obtido pela técnica *very-long-baseline radio interferometry* (VLBI) coincidem com a previsão feita pela RG com uma incerteza de 0.01% (WILL, 2014).

A precessão do periélio de Mercúrio foi um dos testes da Relatividade Geral propostos por Einstein e consiste no fato de que na RG as órbitas que não caracterizam espalhamento e não são circulares, também não são elipses fechadas. Elas, de fato, podem ser aproximadas por elipses precessionando em torno do foco (veja a Figura 1.1).

Figura 1.1 – Ilustração da precessão do periélio de Mercúrio. A precessão foi exagerada para facilitar a visualização. Fonte: Autor (2020).



O valor calculado para a variação angular no sentido da precessão do periélio de Mercúrio, a partir dos princípios da RG, é de 43,03 segundos de arco por século (repare que é um efeito razoavelmente pequeno). Existem dados experimentais para esta precessão desde 1765, porém Clemence em 1943 (WEINBERG, 1972) analisou novamente estes dados e obteve o valor de $43,11 \pm 0,45$ segundos de arco por século. No caso newtoniano esta precessão não deveria ocorrer pois as órbitas são consideradas elipses fechadas.

Em 1971 Irwin Shapiro propôs como teste para a teoria da Relatividade Geral medir o atraso em um sinal enviado da Terra e refletido em um dos planetas telúricos (que estão no sistema solar interior). Apesar do sinal não ser refletido por um único ponto, mas por uma região da superfície do planeta, foi possível fazer uma “calibragem” do experimento, medindo o tempo gasto para o sinal retornar quando o planeta se encontra a uma distância em que os efeitos relativísticos são desprezíveis. Medidas atuais realizadas com a sonda Cassini (WILL, 2014) apresentam valores que estão de acordo com o previsto pela RG com uma incerteza da

ordem de $10^{-3}\%$. O valor teórico previsto pela RG para o atraso do sinal que atinge novamente a Terra, após ser refletido por Mercúrio é de $240 \mu\text{sec}$ (WEINBERG, 1972).

Além dos testes aqui comentados diversos outros testes para a Relatividade Geral já foram propostos e apresentam resultados satisfatórios (WILL, 2014), recentemente a detecção das ondas gravitacionais e a primeira observação direta de um buraco negro conforme previstos pela RG, confirmam ainda mais esta teoria. A primeira detecção das ondas gravitacionais ocorreu em 2016 por meio dos dois detectores do grupo LIGO (*Laser Interferometer Gravitational wave Observatory*), os dados são consistentes com perturbações no espaço-tempo provocadas pela coalescência de um sistema binário de buracos negros denominado GW150914, a comparação foi feita por meio de modelos baseados na RG. Em 2019 a colaboração EHT (*Event Horizon Telescope*) (COLLABORAT, 2019) reconstruiu imagens de um provável buraco negro supermassivo no centro da galáxia gigante elíptica M87, a partir dos dados coletados por oito estações espalhadas pelo planeta Terra. A imagem observada é consistente com o que é esperado para a sombra de um buraco negro de Kerr, como predito pela Relatividade Geral.

Contudo, apesar de todo o sucesso em comparação com experimentos e da consistência da teoria em termos matemáticos, a RG apresenta limitações como toda teoria física. Um exemplo disto é que o princípio de equivalência não é diretamente aplicado ao instante inicial do universo (em um modelo do tipo “big bang”), há uma quebra nas condições necessárias para sua aplicação devido a uma singularidade do espaço tempo, isto é, este estado inicial possui densidade, pressão e temperaturas aproximadamente infinitas (HAWKING; ELLIS, 1973; MISNER et al., 1973). De fato, não há um consenso sobre como definir singularidades da métrica na Relatividade Geral, diferentemente do eletromagnetismo por exemplo, no qual uma singularidade do campo eletromagnético pode ser evitada definindo-se o campo em todo o espaço exceto no ponto singular, na RG não há um espaço-tempo de fundo para fazer esta definição, é o próprio espaço-tempo que se torna singular (GEROCH, 1968).

Outro problema ainda não resolvido existente na teoria da Relatividade Geral é que ela não obedece uma lei de conservação da energia (MOSHE; LEIBOWITZ; NISSANI, 1990). Na teoria da Relatividade Restrita a lei de conservação da energia é descrita pela equação de continuidade para o tensor energia-momento, isto é, o quadri-divergente do tensor energia-momento é nulo. A tentativa de generalizar esta lei para a Relatividade Geral consiste em substituir as derivadas usuais por derivadas covariantes, o que funciona bem em geral para outras leis físicas, permitindo que estas obedeçam ao princípio da covariância geral. O problema neste caso é

que o divergente covariante do tensor energia-momento ser nulo não implica em uma equação da continuidade, devido aos termos de curvatura que aparecem na derivada covariante e portanto esta expressão representa uma lei de conservação somente em sistemas de coordenadas nos quais a derivada covariante coincide com a derivada usual. Diversas possíveis soluções têm sido apresentadas ao longo dos anos para este problema, mas ainda sem uma solução satisfatória. Para uma discussão mais detalhada deste assunto veja (MOSHE; LEIBOWITZ; NISSANI, 1990).

Como mencionado anteriormente, uma das dificuldades encontradas ainda hoje pelos teóricos que estudam a RG é o desenvolvimento de uma forma de quantização desta teoria na escala de Planck. É conhecido da teoria quântica que as quantidades observáveis que descrevem grandezas físicas não podem ser determinados de maneira definitiva, pode-se apenas prever quais são as probabilidades de diferentes valores que uma medida de certa grandeza retorna. No entanto, a Relatividade Geral é uma teoria puramente clássica, seus observáveis como por exemplo, a métrica do espaço-tempo possui valores bem definidos e não probabilísticos. Acredita-se que a RG seja apenas uma aproximação de uma teoria mais fundamental de gravitação quântica, assim como a teoria eletromagnética de Maxwell é uma aproximação da eletrodinâmica quântica. É estimado que a descrição clássica da RG comece a falhar para escalas de comprimento da ordem do comprimento de Planck $l_P \equiv \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1,6 \times 10^{-33} \text{cm}$ (em unidades CGS), ou de forma equivalente pelo tempo de Planck $t_P = l_P/c \approx 5,4 \times 10^{-44} \text{s}$ (WALD, 1984). Um modelo cosmológico fundamentado pela Relatividade Geral e bem aceito atualmente denominado ΛCDM prevê uma singularidade para o instante inicial do universo, portanto é provável que uma teoria de gravitação quântica seja essencial para a compreensão deste estado do universo com idade inferior ao tempo de Planck.

O modelo ΛCDM (Λ refere-se à constante cosmológica e CDM é a sigla *Cold Dark Matter*, que significa matéria escura fria) é a moderna compilação das diversas contribuições experimentais e teóricas durante o último século, começando com a proposta do matemático e cosmólogo russo Alexander Friedmann e independentemente do padre e astrônomo belga Georges Lemaître, que sugeriram na década de 1920 que o universo teve um início e está em expansão. Lemaître denominou sua teoria de “hipótese do átomo primordial” porém ela ficou mais conhecida popularmente por “teoria do Big Bang” quando Sir Fred Hoyle cunhou este termo em um programa de rádio, em 1950 (MITTON, 2011). Fred Hoyle não acreditava nesta teoria e a tratou como pseudociência, pois a ideia do universo ter um início sugere a necessidade

de um criador, no entanto, as observações de Edwin Hubble do afastamento entre galáxias em 1929 (HUBBLE, 1929) forneceram uma evidência experimental para a expansão do universo. Em 1998, Riess et. al. (RIESS et al., 1998) apresentaram dados observacionais do desvio para o vermelho de supernovas que evidenciaram que o universo não apenas está em expansão, mas se expande aceleradamente, esta foi uma das descobertas mais importantes e surpreendentes para a cosmologia moderna. A presença da constante cosmológica Λ nas equações de campo de Einstein justifica esta expansão acelerada, sua origem é interpretada como a densidade de energia do vácuo, também denominada energia escura. Dados mais recentes como os obtidos pelo satélite Planck em 2018 (AGHANIM et al., 2018) mostram uma boa consistência com as previsões teóricas feitas pelo Λ CDM. Apesar de se ajustar bem aos dados experimentais este modelo prevê que aproximadamente 95% da densidade de energia do universo atualmente não seja bariônica, isto é, não é formada por átomos ou qualquer partícula fundamental conhecida, sendo $\sim 25\%$ matéria escura e $\sim 70\%$ energia escura. Sendo assim, de acordo com este modelo todas as bilhões de galáxias observadas formadas por incontáveis partículas elementares correspondem apenas a $\sim 5\%$ do universo. Além disso, o valor experimental da constante cosmológica difere em 120 ordens de grandeza do valor teórico, previsto pela teoria quântica de campos para a energia do vácuo. Este é um problema físico em aberto conhecido como “problema da constante cosmológica”.

A presença de fontes de energia desconhecidas no modelo Λ CDM indica a possibilidade da Relatividade Geral não ser suficiente para explicar esses fenômenos, assim, diversas teorias gravitacionais modificadas foram propostas como tentativas de generalizar a RG. Em 1970, H. Buchdahl propôs que a ação de Einstein-Hilbert fosse generalizada de forma que não dependesse apenas do escalar de curvatura R mas de uma função $f(R)$ (BUCHDAHL, 1970; FELICE; TSUJIKAWA, 2010; SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Sob certas condições, as teorias $f(R)$ tiveram sucesso na explicação dos problemas da expansão acelerada do universo atual e do fenômeno da inflação (FELICE; TSUJIKAWA, 2010), no entanto foram encontrados problemas em sua compatibilidade com o modelo padrão de física de partículas e com alguns testes experimentais realizados no sistema solar (ISHAK, 2019). Abordagens semelhantes aparecem em trabalhos recentes, na tentativa de melhorar esta teoria, como por exemplo (CARLONI; ROSA; LEMOS, 2019).

Outro ponto de vista para elaborar uma teoria gravitacional modificada são as *teorias de gravidade não local*, que surgiram a partir dos trabalhos de D. Dalvit (DALVIT; MAZZITELLI,

1994) e C. Wetterich (WETTERICH, 1998). Em seu trabalho, Wetterich propôs a adição de um termo proporcional a $R\Box^{-1}R$ à ação de Einstein-Hilbert e analisou as implicações cosmológicas de um modelo simples baseado nesta ação não local. Wetterich concluiu que apesar do seu modelo não ser compatível com a nucleossíntese primordial, generalizações compatíveis com as observações experimentais seriam concebíveis. Em 2007, S. Deser e R. Woodard desenvolveram uma teoria mais geral com termos não locais da forma $Rf(\Box^{-1}R)$ (DESER; WOODARD, 2007) e constataram que neste modelo surge naturalmente o intervalo de tempo para a transição do universo dominado por radiação para o universo dominado por matéria, mas diversas questões ainda ficaram em aberto. Deser e Woodard aprimoraram seu modelo (DESER; WOODARD, 2019) e desde então diversos outros trabalhos foram apresentados seguindo a proposta de adicionar termos não locais a ação para o campo gravitacional (BELGACEM et al., 2018; MAGGIORE; MANCARELLA, 2014; BARVINSKY, 2012).

Em termos gerais, teorias não locais são aquelas que não obedecem ao *princípio da localidade*, que estabelece que um objeto é influenciado somente por sua vizinhança imediata. Isto significa que em teorias locais não existe ação à distância, toda interação entre os objetos da teoria necessariamente deve ser mediada por um campo e a informação se propaga a velocidade inferior a da luz, como estabelecido pela Relatividade Restrita (WEINBERG, 1972). O estudo dos fenômenos não locais surgiu com o paradoxo Einstein-Podolsky-Rosen (EPR), de acordo com o qual os autores argumentam que a interpretação de Copenhagen (probabilística) da Mecânica Quântica não pode oferecer uma descrição completa da realidade (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935). De fato a teoria quântica é não local, estados quânticos não podem ser localizados no espaço. É possível que dois estados separados espacialmente estejam “emaranhados” de forma que a medida de um estado permita determinar imediatamente o resultado do outro. Isto acontece devido ao colapso da função de onda, que é um dos postulados fundamentais da teoria quântica, permitindo que a informação entre os estados emaranhados se propague sem a mediação de nenhum campo. Em uma teoria quântica de campos, veremos que a não localidade surge naturalmente na ação efetiva quântica.

Apresentaremos neste trabalho uma introdução às teorias físicas não locais como forma de preparação para um trabalho futuro sobre as características cosmológicas do modelo gravitacional de Deser-Woodard aperfeiçoado (DESER; WOODARD, 2019). Objetiva-se primeiramente uma revisão das ferramentas matemáticas da gravitação e cosmologia baseadas na Relatividade Geral e em seguida uma discussão introdutória das teorias físicas não locais, tendo

como motivação o fenômeno do emaranhamento quântico, lagrangianas não locais para a eletrodinâmica e a apresentação do primeiro modelo de Deser-Woodard para a gravitação não-local (DESER; WOODARD, 2007).

A fim de facilitar a compreensão dos problemas da RG mencionados anteriormente, o Capítulo 2 contém os conceitos matemáticos fundamentais da Relatividade Geral e uma discussão de alguns aspectos geométricos desta teoria. Há também a dedução das equações de campo de Einstein a partir da formulação Lagrangiana, com base no princípio da mínima ação. Em seguida há um estudo do modelo Λ CDM apresentando o cálculo da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para um universo esfericamente simétrico e que evolui no tempo, bem como uma discussão das questões envolvendo a densidade de energia do universo, a presença da energia escura e a importância da constante cosmológica Λ .

O Capítulo 3 dedica-se a uma introdução a teorias físicas não locais. Como primeiro exemplo, discutiremos o conceito de emaranhamento quântico por meio de uma versão simplificada do paradoxo EPR. Apresentaremos também uma forma de obter as equações de Maxwell por meio de uma lagrangiana não local e uma discussão sobre a interpretação da lagrangiana de Proca para fótons massivos como uma ação efetiva quântica que seja invariante de *gauge*, porém não local. Além disso, analisaremos como a eletrodinâmica quântica gera uma dinâmica não local para fótons no contexto da ação efetiva quântica.

No Capítulo 4 há uma apresentação do primeiro modelo de Deser-Woodard (DESER; WOODARD, 2007) que reproduz a expansão acelerada do universo, sem a necessidade da constante cosmológica. Há também uma revisão da sua versão aprimorada (DESER; WOODARD, 2019), a qual reproduz os resultados experimentais do modelo cosmológico Λ CDM, por meio de termos não locais inseridos na ação. Duas aplicações deste modelo foram realizadas: (i) o estudo das soluções perturbativas e sua comparação com observáveis; (ii) o cálculo e a análise das soluções para uma descrição do universo com ricochete (*bouncing*). Esta última permite apontar se o segundo modelo de Deser-Woodard (DESER; WOODARD, 2007) é viável para descrever continuamente o universo sem um estado inicial do tipo *Big bang* e a expansão acelerada. Para tal, foram analisadas soluções exatas e numéricas dos campos escalares, responsáveis por introduzir os efeitos não locais no modelo. Esta análise para o universo com ricochete, baseada no segundo modelo de Deser-Woodard, não foi encontrada na literatura até o momento.

2 CONCEITOS GEOMÉTRICOS E FÍSICOS DA RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo apresentaremos os conceitos matemáticos fundamentais da teoria da Relatividade Geral, necessários para o entendimento da cosmologia moderna. Partiremos de uma discussão dos aspectos físicos sobre a equação da geodésica e de princípios geométricos envolvidos nas definições de derivada covariante e do transporte paralelo. Discorreremos também sobre a importância física e o caráter geométrico do tensor de curvatura Riemann, do tensor de Ricci e do escalar de curvatura no contexto da RG. Abordaremos ainda alguns dos principais tópicos sobre o desenvolvimento da cosmologia moderna baseada na Relatividade Geral, apresentando primeiramente o universo estático de Einstein e na sequência a solução de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker para as equações de campo de Einstein. Por fim, há uma dedução das equações de Friedmann para a expansão do universo, comparando o resultado teórico obtido pelo modelo Λ CDM para a densidade de energia do universo com dados experimentais atuais.

2.1 Equação da geodésica

De acordo com a Relatividade Geral, a gravitação é descrita unicamente pela geometria do espaço-tempo. Para ilustrar isso, consideremos uma partícula em movimento sob influência unicamente de um campo gravitacional arbitrário. O princípio da equivalência estabelece que nesse caso é possível encontrar um sistema de coordenadas que seja localmente inercial, isto é, tal que a partícula seja acelerada com a mesma intensidade, direção e sentido do campo gravitacional. Podemos assumir que o campo g seja constante em uma região infinitesimalmente pequena do espaço-tempo, e portanto, concluir que neste sistema a partícula está em repouso. Denotaremos por $x'^{\alpha} = (ct', \vec{x}')$ as coordenadas espaço-temporais deste referencial inercial, assim, as equações de movimento da partícula são:

$$\frac{d^2 x'^{\alpha}}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

na qual τ é o tempo próprio medido por um observador comóvel, definido por $d\tau^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}$, em nossa notação $[\eta_{\mu\nu}] = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ é a métrica do espaço-tempo de Minkowski (plano).

Podemos então escrever as equações de movimento vistas por um observador em outro sistema de coordenadas denotado por x^{α} , de acordo com a regra de transformação $x \rightarrow x' = x'(x)$. Logo, podemos obter as equações de movimento para este novo observador por meio da

regra de derivação em cadeia

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx'^{\alpha}}{dx^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx'^{\alpha}}{dx^{\mu}} \frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{d^2x'^{\alpha}}{dx^{\mu}dx^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0,$$

multiplicando por $\frac{dx^{\beta}}{dx'^{\alpha}}$ temos,

$$\delta^{\beta}_{\mu} \frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{dx^{\beta}}{dx'^{\alpha}} \frac{d^2x'^{\alpha}}{dx^{\mu}dx^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0.$$

Definindo a conexão “afim” como

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \equiv \frac{dx^{\beta}}{dx'^{\alpha}} \frac{d^2x'^{\alpha}}{dx^{\mu}dx^{\nu}}, \quad (2.2)$$

temos que, as equações de movimento da partícula no referencial x^{α} são:

$$\boxed{\frac{d^2x^{\beta}}{d\tau^2} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0.} \quad (2.3)$$

Esta equação também é conhecida como a equação da geodésica, pois representa a trajetória de menor “comprimento” no espaço-tempo. Note que o termo adicional que aparece nestas equações é devido apenas à diferença na geometria (curvatura) dos dois referenciais. Estes termos são fisicamente interpretados como a presença da gravitação nas equações de movimento, mas note que, matematicamente este resultado é válido para qualquer sistema de coordenadas curvilíneos.

O objeto definido como $\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}$ na equação (2.2) é chamado de conexão por quantificar a variação das componentes de um tensor em diferentes pontos do espaço-tempo, ele será importante para a descrição geométrica da curvatura como veremos mais adiante. No caso particular de uma geometria riemanniana o tensor de torção $\mathcal{T}^{\beta}_{\mu\nu}$ é nulo, isto significa que a conexão é simétrica, ou seja,

$$\mathcal{T}^{\beta}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\mu} = 0. \quad (2.4)$$

A conexão $\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}$ que satisfaz (2.4) é chamada de símbolo de Christoffel e somente esta será considerada neste trabalho. Pode-se obter uma expressão para o símbolo de Christoffel em termos de derivadas do tensor métrico (WEINBERG, 1972),

$$\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} (\partial_{\beta}g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}g_{\nu\beta} - \partial_{\nu}g_{\beta\alpha}). \quad (2.5)$$

Esta equação será útil para o cálculo dos objetos geométricos que representam a curvatura nas equações de campo de Einstein.

Além disso, o tempo próprio no referencial x^α também será alterado:

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx'^\mu}{dx^\alpha} \frac{dx'^\nu}{dx^\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.6)$$

definindo o tensor métrico por

$$g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{dx'^\mu}{dx^\alpha} \frac{dx'^\nu}{dx^\beta}, \quad (2.7)$$

resulta em

$$d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.8)$$

Aqui também fica evidente a presença de termos puramente geométricos no tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, representando a curvatura em relação à métrica do espaço-tempo plano $\eta_{\mu\nu}$. Pode-se definir ainda o intervalo infinitesimal entre dois eventos no espaço-tempo curvo $ds^2 \equiv c^2 d\tau^2$, assim:

$$\boxed{ds^2 = c^2 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.} \quad (2.9)$$

O elemento infinitesimal ds^2 é um escalar e conseqüentemente independe do sistema de coordenadas.

2.2 Derivada covariante

Em geral, a derivada parcial de um tensor não fornece como resultado um tensor, ou seja, a derivada parcial varia de acordo com a escolha do sistema de coordenadas. Para verificar isto consideremos a transformação de um tensor de ordem 1 contravariante, em uma mudança geral de coordenadas $x \rightarrow x'(x)$

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (2.10)$$

Derivando esta expressão com relação a x'^ρ , temos

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\rho} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\rho} V^\nu. \quad (2.11)$$

Podemos notar que a derivada deste tensor se transforma como um tensor misto, exceto pelo segundo termo adicional que contém derivadas de segunda ordem. É necessário encontrar uma quantidade que se transforme de tal maneira que, quando somada à equação (2.11) cancele

o segundo termo. Veremos adiante que a conexão afim também não se transforma como um tensor, mas possui um termo semelhante ao segundo membro da equação (2.11) em sua regra de transformação.

A definição da conexão (2.2) em um sistema de coordenadas inercial $\xi^\mu(x)$, sob uma transformação geral de coordenadas $x \rightarrow x'(x)$, é

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} &= \frac{dx'^{\beta}}{d\xi^{\alpha}} \frac{d^2\xi^{\alpha}}{dx'^{\mu}dx'^{\nu}} \\ &= \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\lambda\gamma} - \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}},\end{aligned}\quad (2.12)$$

multiplicando as equações (2.12) e (2.10), resulta em

$$\Gamma'^{\beta}_{\nu\mu} V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} V^{\mu} - \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\rho}} V^{\lambda}.\quad (2.13)$$

Assim, adequando os índices e somando a expressão (2.11) com (2.13) os termos com derivadas de segunda ordem se cancelam, restando somente

$$\frac{\partial V'^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} + \Gamma'^{\beta}_{\nu\mu} V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial V^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} V^{\mu} \right).\quad (2.14)$$

A equação (2.14) mostra que o objeto do lado esquerdo se transforma como um tensor misto, portanto, define-se a derivada covariante D_{ν} de um tensor de ordem 1 (ou vetor) contravariante, como:

$$D_{\nu} V^{\beta} \equiv \partial_{\nu} V^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\nu\mu} V^{\mu}.\quad (2.15)$$

O mesmo cálculo pode ser feito considerando a transformação da derivada de um vetor covariante, a diferença será uma mudança de sinal resultando em

$$D_{\nu} V_{\beta} \equiv \partial_{\nu} V_{\beta} - \Gamma^{\mu}_{\nu\beta} V_{\mu}.\quad (2.16)$$

Estes resultados podem ser generalizados de forma que a definição de derivada covariante para um tensor com índices covariantes e contravariantes contém um termo positivo proporcional a conexão para cada índice contravariante e um negativo para cada índice covariante, por exemplo,

$$\boxed{D_{\alpha} T^{\beta}_{\gamma} = \partial_{\alpha} T^{\beta}_{\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\delta} T^{\delta}_{\gamma} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} T^{\beta}_{\delta}}.\quad (2.17)$$

As equações válidas na Relatividade Restrita que contém derivadas parciais, podem ser escritas em uma forma invariante sob transformações gerais de coordenadas a partir da substituição das derivadas usuais por derivadas covariantes e da métrica do espaço plano $\eta_{\mu\nu}$ pela métrica mais geral $g_{\mu\nu}$.

Os termos proporcionais às conexões que aparecem na derivada covariante representam geometricamente a variação das bases do espaço vetorial, no qual o tensor a ser derivado está definido em cada ponto. Na ausência de efeitos gravitacionais, isto é, quando o espaço-tempo é plano, as conexões são nulas, pois os vetores que formam a base são constantes (em coordenadas cartesianas) e portanto a derivada covariante se torna uma derivada parcial usual. A derivada covariante também pode ser entendida como uma taxa de variação instantânea de um campo tensorial, em comparação com a sua variação se este fosse transportado paralelamente ao longo uma curva. Na próxima seção introduziremos o conceito de transporte paralelo de um vetor (ou tensor) sobre uma curva.

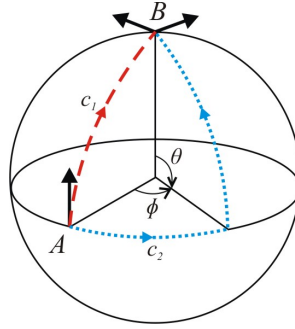
2.3 Transporte paralelo

Em um espaço-tempo plano um vetor pode ser movido ao longo de uma curva arbitrária sem que suas componentes sejam alteradas, porém isto não é verdade em um espaço-tempo curvo. Neste caso, um campo vetorial, ou tensorial, deve ser entendido como elemento de um espaço tangente, definidos em um único ponto. Transportar o vetor ao longo de uma curva fará com que este espaço tangente (local) seja alterado, logo, suas componentes também serão alteradas. A definição de “transporte paralelo” é o transporte de um vetor ao longo de uma curva sem que suas componentes sejam alteradas. A quantidade que mensura a variação das componentes quando um vetor é transportado é a conexão afim, denominada dessa forma justamente por conectar a representação de um vetor definido em diferentes pontos.

Pode parecer estranho inicialmente que as propriedades de um vetor sejam alteradas somente pelo seu deslocamento no espaço-tempo, contudo, isto pode ser visualizado geometricamente para um vetor se deslocando sobre uma 2-esfera como representado na Figura 2.1. Ao se transportar o vetor do ponto A ao ponto B ao longo do caminho c_1 (mantendo-o sempre tangente à curva) suas componentes são alteradas de forma diferente do que se este mesmo vetor for deslocado pelo caminho c_2 entre estes mesmos pontos. Para percorrer o caminho c_2 o vetor é primeiramente deslocado em um ângulo $\phi = \phi_0$ e depois sobe em direção ao ponto $\theta = 0$,

com ϕ_0 contante. O resultado é que no ponto final, após ser transportado ao longo de c_2 , este vetor está rotacionado em um ângulo $\phi = \phi_0$ em relação ao vetor que percorreu o caminho c_1 .

Figura 2.1 – O vetor transportado do ponto A ao ponto B sofre diferentes variações em suas componentes se seguir pelo caminho c_1 ou pelo caminho c_2 . Fonte: Autor (2020).



Dada uma curva $x^\mu(\lambda)$ parametrizada por λ em um espaço plano, um tensor T^μ_ν será transportado mantendo suas componentes constantes sobre essa curva se a derivada de suas componentes com relação ao parâmetro λ for igual a zero

$$\frac{dT^\mu_\nu}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (2.18)$$

A generalização para um espaço-tempo curvo consiste em substituímos a derivada usual pela derivada covariante. Podemos então definir o transporte paralelo de um tensor T^μ_ν ao longo da curva $x^\mu(\lambda)$, a partir da condição de que a derivada covariante deste tensor sobre a curva $x^\mu(\lambda)$ seja zero, isto é,

$$\boxed{\frac{DT^\mu_\nu}{D\lambda} \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda} D_\alpha T^\mu_\nu = 0}. \quad (2.19)$$

Esta definição pode ser estendida para tensores de qualquer ordem contravariante ou covariante.

Para um vetor contravariante A^μ , a equação do transporte paralelo (2.19) se torna

$$\frac{dA^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} A^\beta. \quad (2.20)$$

A equação (2.20) pode ser entendida como uma equação diferencial para o vetor A^μ , logo, conhecendo as componentes deste vetor em um ponto a solução desta equação permite determiná-lo em qualquer ponto ao longo da curva $x^\mu(\lambda)$. Por exemplo, considerando o vetor tangente à curva $x^\mu(\lambda)$ em todos os pontos $A^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, a equação (2.20) resulta em

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}. \quad (2.21)$$

Note que esta é a equação da geodésica (2.3) exceto pela presença do parâmetro λ , que pode ser escolhido naturalmente como o tempo próprio $\lambda = \tau$. A geodésica pode ser definida em termos geométricos como a curva ao longo da qual seu vetor tangente é transportado paralelamente. O exemplo mais simples de geodésica é a que se refere ao espaço tridimensional plano (euclidiano) em coordenadas cartesianas todas as componentes da conexão são nulas, logo, a equação (2.21) se torna

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = 0, \quad (2.22)$$

que possui como solução

$$x^i(\lambda) = k_1^i + k_2^i \lambda. \quad (2.23)$$

Estas soluções são as equações paramétricas de uma reta, assim, a geodésica no espaço euclidiano representa a menor distância entre dois pontos.

Em uma geometria que obedece a condição de compatibilidade da métrica, ou seja, em que $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, fica claro pela definição (2.19) que o tensor métrico sempre pode ser transportado paralelamente. Como consequência disto, para dois vetores A^μ e B^μ que obedecem a equação do transporte paralelo, temos

$$\frac{D}{D\lambda} (A_\mu B^\mu) = \frac{D}{D\lambda} (g_{\mu\alpha} A^\alpha B^\mu) = 0. \quad (2.24)$$

Isto significa que o escalar resultante do produto interno entre A^μ e B^μ também permanece invariante sob transporte paralelo, o que implica que a ortogonalidade entre vetores é preservada nesse caso (CARROL, 2003).

2.4 Tensor de curvatura de Riemann

Na Seção 2.3 vimos que um vetor ao ser transportado ao longo de um caminho em um espaço-tempo curvo sofre alterações em suas componentes. Esse fato permite que a curvatura do espaço-tempo seja mensurada de acordo com variação das componentes de um vetor ao percorrer um contorno fechado infinitesimal. Da definição de transporte paralelo (2.19) segue que a derivada covariante de um tensor ao longo da curva em que ele é transportado paralelamente é zero, assim, a derivada covariante na direção de uma outra curva qualquer determina o quanto as componentes de um tensor variam em relação ao seu transporte paralelo.

Seja A_μ um vetor covariante, de forma que a derivada covariante $D_\nu A_\mu$ mede a variação de suas componentes ao longo de um caminho x^ν , a derivada segunda $D_\alpha (D_\nu A_\mu)$ determina a variação ao longo de dois caminhos diferentes. Subtraindo desta quantidade a segunda derivada covariante em ordem inversa $D_\nu (D_\alpha A_\mu)$, o resultado é a diferença entre a variação das componentes A_μ ao percorrer as curvas em ordens diferentes. Algebricamente este é o comutador entre as derivadas covariantes atuando no vetor A_μ ,

$$[D_\alpha, D_\nu]A_\mu = D_\alpha (D_\nu A_\mu) - D_\nu (D_\alpha A_\mu). \quad (2.25)$$

Calculando explicitamente esta expressão para um espaço-tempo sem torção, isto é, em que $\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \Gamma^\beta_{\nu\mu}$ temos que:

$$[D_\alpha, D_\nu]A_\mu = \partial_\alpha \Gamma^\beta_{\mu\nu} A_\beta + \Gamma^\delta_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\delta\alpha} A_\beta - \partial_\nu \Gamma^\beta_{\mu\alpha} A_\beta - \Gamma^\delta_{\mu\alpha} \Gamma^\beta_{\delta\nu} A_\beta \quad (2.26)$$

O tensor de Riemann, que mensura a curvatura do espaço-tempo a partir desta diferença de caminhos infinitesimais, é definido por

$$[D_\alpha, D_\nu]A_\mu \equiv A_\beta R^\beta_{\mu\alpha\nu}. \quad (2.27)$$

Como A_μ é um campo vetorial qualquer, a definição de $R^\beta_{\mu\alpha\nu}$ é independente deste campo, logo, a expressão para o tensor de curvatura de Riemann é

$$\boxed{R^\beta_{\mu\alpha\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\beta_{\mu\nu} + \Gamma^\gamma_{\nu\mu} \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} - \partial_\nu \Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} \Gamma^\beta_{\gamma\nu}.} \quad (2.28)$$

Pela forma como construímos, este tensor é anti-simétrico no último par de índices, tal que,

$$R^\beta_{\mu\alpha\nu} = -R^\beta_{\mu\nu\alpha}. \quad (2.29)$$

Usando a equação (2.5) as componentes do tensor de Riemann podem ser calculadas a partir de derivadas parciais de segunda ordem do tensor métrico.

A fim de encontrarmos outras propriedades para o tensor de Riemann, podemos escrevê-lo com todos os índices covariantes $R_{\beta\mu\alpha\nu} = g_{\beta\sigma} R^\sigma_{\mu\alpha\nu}$. Usando a equação (2.5), a expressão

de $R_{\beta\mu\alpha\nu}$ em termos do tensor métrico é

$$R_{\beta\mu\alpha\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\beta\alpha} - \partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu}) + g_{\sigma\tau} (\Gamma^\sigma_{\beta\nu} \Gamma^\tau_{\mu\alpha} - \Gamma^\tau_{\beta\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}), \quad (2.30)$$

da qual seguem as seguintes propriedades:

$$R_{\beta\mu\alpha\nu} = -R_{\mu\beta\alpha\nu} = R_{\alpha\nu\beta\mu}. \quad (2.31)$$

Assim, o tensor de curvatura de Riemann também é anti-simétrico nos dois primeiros índices e não muda de sinal se trocarmos os pares de índices, mantendo a ordem original.

O tensor de Ricci é definido como uma contração do tensor de Riemann,

$$R_{\mu\nu} = R^\beta_{\mu\beta\nu}. \quad (2.32)$$

Por sua vez, contraindo o primeiro e último termo da equação (2.31) temos que o tensor de Ricci é simétrico,

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (2.33)$$

Por fim, a contração do tensor de Ricci define o escalar de curvatura

$$R \equiv g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu}. \quad (2.34)$$

O escalar de Ricci R mede a curvatura do espaço, podemos ilustrar esse fato a partir do exemplo de uma 2-esfera com raio constante a descrita pela métrica

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.35)$$

Nesse caso,

$$R = \frac{2}{a^2}. \quad (2.36)$$

Note que o escalar de curvatura é inversamente proporcional a área da 2-esfera.

O escalar de Ricci aparece na ação de Einstein-Hilbert que dá origem às equações de campo de Einstein, como veremos na próxima seção. Toda a informação da curvatura do espaço-tempo que, de acordo com a Relatividade Geral dá origem a atração gravitacional, está

presente nestas quantidades conforme discutido na construção de R e $R_{\mu\nu}$ a partir de outros objetos geométricos.

2.5 Equações de campo de Einstein

As equações de Einstein para o campo gravitacional (1.1) podem ser derivadas a partir do princípio variacional considerando a densidade lagrangiana de Einstein-Hilbert,

$$\mathcal{L} = \frac{c^4}{16\pi G}(R + 2\Lambda) + \mathcal{L}_M. \quad (2.37)$$

que contém o escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, a constante cosmológica Λ e a lagrangiana de matéria \mathcal{L}_M que corresponde à presença de energia. A escolha do escalar de curvatura foi proposta por David Hilbert em 1915 (CARROL, 2003) sendo justificada pelo fato de R ser a única quantidade escalar independente construída a partir da métrica que não contém termos com derivadas superiores as de segunda ordem em $g^{\mu\nu}$. O fator $\frac{c^4}{16\pi G}$ é escolhido com a finalidade de escrever as equações de campo resultantes em uma forma mais conveniente, a partir da condição de que as equações de Einstein se reduzam a equação de Newton para a gravitação no limite de campo fraco. A constante cosmológica Λ não parte de nenhum princípio fundamental, ela é introduzida como uma constante extra na densidade lagrangiana com o intuito de adequar as equações de campo com os resultados experimentais¹. De acordo com o modelo cosmológico Λ CDM a constante Λ é responsável pelo conteúdo de energia escura. Note que todos os termos nesta lagrangiana são *locais*, isto é, os campos obedecem o princípio da localidade de forma que um objeto no espaço-tempo é influenciado somente pela sua vizinhança imediata.

Para derivar as equações de campo utilizaremos o formalismo da métrica no qual a lagrangiana depende somente da métrica e de sua derivada de primeira ordem $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \partial_\alpha g^{\mu\nu})$ e de forma que as variações são feitas com relação a métrica². Pelo princípio da mínima ação, temos que:

$$\delta S = \delta \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{c^4}{16\pi G}(R + 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] = 0. \quad (2.38)$$

¹ Inicialmente a constante cosmológica foi introduzida por Einstein em seu modelo de universo estático, representando uma força repulsiva que evitaria o universo de colapsar devido aos efeitos gravitacionais.

² Diferentemente do formalismo de Palatini em que as variações são feitas com relação à métrica e às conexões como variáveis independentes (SOTIRIOU; FARAONI, 2010).

Para compreendermos a necessidade do fator $\sqrt{-g}$ na equação (2.38) é necessário introduzirmos o conceito de densidade tensorial. É denominada densidade tensorial qualquer quantidade que se transforma semelhantemente a um tensor ao passar por uma mudança geral de coordenadas, exceto por fatores extras do jacobiano da transformação (WEINBERG, 1972). Por exemplo, em uma mudança de coordenadas $x \rightarrow x' = x'(x)$ uma densidade tensorial de ordem 2, mista e de peso w transforma-se como

$$A'^{\mu}_{\nu} = \left| \frac{dx'}{dx} \right|^w \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} A^{\alpha}_{\beta}. \quad (2.39)$$

O elemento de volume d^4x transforma-se de acordo com a seguinte regra

$$d^4x' = \left| \frac{dx'}{dx} \right| d^4x, \quad (2.40)$$

isto é, d^4x é uma densidade tensorial de peso $w = 1$. Para que o elemento de volume se transforme como um escalar ele deve ser multiplicado por uma densidade tensorial de peso $w = -1$. Considerando a regra de transformação para o tensor métrico,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \quad (2.41)$$

calculando o determinante, resulta em

$$g' = \left| \frac{dx}{dx'} \right|^2 g = \left| \frac{dx'}{dx} \right|^{-2} g, \quad (2.42)$$

na qual $g = \det[g_{\mu\nu}] < 0$. Temos então que o determinante da métrica é uma densidade escalar (ou tensorial de ordem zero) com peso $w = -2$. Devido à diferença de sinal entre as componentes espaciais e temporais o determinante da métrica é em geral negativo, podemos então definir a quantidade $\sqrt{-g}$ a partir da equação (2.42), que se transforma como

$$\sqrt{-g'} = \left| \frac{dx'}{dx} \right|^{-1} \sqrt{-g}. \quad (2.43)$$

Esta é uma densidade tensorial de peso $w = -1$ como procurávamos, logo, o elemento de volume invariante é o produto $\sqrt{-g}d^4x$.

Para determinar as equações de campo, consideremos a variação da equação (2.38)

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{c^4}{16\pi G} [\delta(\sqrt{-g}R) + 2\Lambda\delta\sqrt{-g}] + \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \right\}, \quad (2.44)$$

e calculando cada termo separadamente, temos,

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}R) &= R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta R \\ &= R\frac{1}{2}(-g)^{-1/2}(-1)\delta g + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Para calcular a variação do determinante da métrica consideremos a seguinte identidade válida para o determinante de uma matriz quadrada M qualquer,

$$\det(M) = e^{\text{Tr}[\ln(M_{ij})]}, \quad (2.46)$$

assim,

$$g = e^{\text{Tr}[\ln(g_{\mu\nu})]} \quad (2.47)$$

A variação desta identidade resulta em

$$\begin{aligned} \delta g &= e^{\text{Tr}[\ln(g_{\mu\nu})]} (g_{\mu\nu})^{-1} \delta g_{\mu\nu} \\ &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Podemos ainda relacionar a variação do tensor métrico com os índices covariantes $\delta g_{\mu\nu}$ com a sua variação com os índices contravariantes $\delta g^{\mu\nu}$. Sabemos que o tensor métrico satisfaz a identidade,

$$g^{\nu\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}, \quad (2.49)$$

logo, variando esta equação, temos

$$\boxed{\delta g_{\lambda\mu} = -g_{\lambda\nu} g_{\sigma\mu} \delta g^{\nu\sigma}.} \quad (2.50)$$

Substituindo este resultado na equação (2.48) obtemos que

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.51)$$

Podemos então substituir esse resultado na equação (2.45) para a variação do primeiro termo da ação, de forma que,

$$\delta(\sqrt{-g}R) = -\frac{R}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}). \quad (2.52)$$

Para calcular a variação do tensor de Ricci, consideremos sua definição dada pela equação (2.32), assim,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta_\rho{}^\lambda \left[\partial_\lambda \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + \delta \Gamma^\gamma{}_{\nu\mu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\lambda} + \Gamma^\gamma{}_{\nu\mu} \delta \Gamma^\rho{}_{\gamma\lambda} - \partial_\nu \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} - \delta \Gamma^\gamma{}_{\lambda\mu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma{}_{\lambda\mu} \delta \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \right].$$

Podemos identificar esses termos como a diferença entre duas derivadas covariantes de $\delta \Gamma^\rho{}_{\mu\gamma}$, tal que

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta_\rho{}^\lambda \left[\partial_\lambda \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + \Gamma^\rho{}_{\gamma\lambda} \delta \Gamma^\gamma{}_{\nu\mu} - \Gamma^\gamma{}_{\lambda\mu} \delta \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma{}_{\lambda\nu} \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\gamma} \right] \\ &\quad - \delta_\rho{}^\lambda \left[\partial_\nu \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \delta \Gamma^\gamma{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\gamma{}_{\nu\mu} \delta \Gamma^\rho{}_{\gamma\lambda} - \Gamma^\gamma{}_{\lambda\nu} \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\gamma} \right] \\ &= \delta_\rho{}^\lambda \left[D_\lambda \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - D_\nu \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \right]. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\rho \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - D_\nu \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\rho}. \quad (2.53)$$

Note que $\delta \Gamma^\rho{}_{\mu\gamma}$ é uma grandeza tensorial pois trata-se de uma diferença entre duas conexões, logo sua derivada covariante está bem definida.

Para determinar uma expressão para $\delta R_{\mu\nu}$ em função da variação da métrica $\delta g_{\mu\nu}$, partiremos da condição de metricidade, isto é:

$$D_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} = 0. \quad (2.54)$$

Calculando a variação,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \delta g_{\mu\nu} - \delta \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \delta \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} \delta g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} \delta g_{\mu\beta} &= 0 \\ \Rightarrow D_\alpha (\delta g_{\mu\nu}) &= \delta \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + \delta \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}. \end{aligned}$$

Podemos relacionar a variação da conexão com a variação da métrica a partir da relação

$$\begin{aligned} D_\alpha (\delta g_{\mu\nu}) + D_\mu (\delta g_{\nu\alpha}) - D_\nu (\delta g_{\alpha\mu}) &= \delta\Gamma^\beta_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + \delta\Gamma^\beta_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} + \delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} g_{\beta\alpha} + \\ &+ \delta\Gamma^\beta_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - \delta\Gamma^\beta_{\nu\alpha} g_{\beta\mu} - \delta\Gamma^\beta_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} \\ &= 2\delta\Gamma^\beta_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}. \end{aligned}$$

Aqui foi usado o fato da métrica ser simétrica e de considerarmos um espaço-tempo sem torção.

Multiplicando por $g^{\nu\sigma}$ e usando que $g^{\nu\sigma} g_{\beta\nu} = \delta^\sigma_\beta$, resulta:

$$\delta\Gamma^\sigma_{\alpha\mu} = \frac{g^{\nu\sigma}}{2} [D_\alpha (\delta g_{\mu\nu}) + D_\mu (\delta g_{\nu\alpha}) - D_\nu (\delta g_{\alpha\mu})]. \quad (2.55)$$

Substituindo este resultado na equação (2.53), temos:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= D_\rho \left\{ \frac{g^{\beta\rho}}{2} [D_\mu (\delta g_{\nu\beta}) + D_\nu (\delta g_{\beta\mu}) - D_\beta (\delta g_{\mu\nu})] \right\} \\ &\quad - D_\nu \left\{ \frac{g^{\beta\rho}}{2} [D_\mu (\delta g_{\rho\beta}) + D_\rho (\delta g_{\beta\mu}) - D_\beta (\delta g_{\mu\rho})] \right\} \\ &= \frac{g^{\beta\rho}}{2} [D_\rho D_\mu (\delta g_{\nu\beta}) + D_\rho D_\nu (\delta g_{\beta\mu}) - D_\rho D_\beta (\delta g_{\mu\nu}) - D_\nu D_\mu (\delta g_{\rho\beta})] \\ &\quad + \frac{D_\nu D^\rho (\delta g_{\mu\rho}) - D_\nu D^\beta (\delta g_{\beta\mu})}{2}, \end{aligned}$$

na qual foi usada a condição de metricidade (2.54). O último termo é nulo, pois os índices β e ρ são mudos. Temos por fim o resultado para a variação do tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{g^{\beta\rho}}{2} [D_\rho D_\mu (\delta g_{\nu\beta}) + D_\rho D_\nu (\delta g_{\beta\mu}) - D_\rho D_\beta (\delta g_{\mu\nu}) - D_\nu D_\mu (\delta g_{\rho\beta})]. \quad (2.56)$$

Podemos agora substituir os termos calculados em (2.52) e (2.56) na variação da ação que aparece em (2.44), o que resulta em

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \left[-\frac{R}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) - \Lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] \\ &\quad + \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M), \end{aligned} \quad (2.57)$$

reagrupando os termos,

$$\delta S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} d^4x \left[-\frac{R}{2} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) + \int \sqrt{-g} d^4x g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (2.58)$$

A última integral pode ser avaliada substituindo a equação (2.56)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} d^4x g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int \sqrt{-g} d^4x g^{\mu\nu} \frac{g^{\beta\rho}}{2} [D_\rho D_\mu (\delta g_{\nu\beta}) + D_\rho D_\nu (\delta g_{\beta\mu}) \\ &\quad - D_\rho D_\beta (\delta g_{\mu\nu}) - D_\nu D_\mu (\delta g_{\rho\beta})] \\ &= \int \sqrt{-g} d^4x [D^\beta D^\nu (\delta g_{\nu\beta}) - g^{\mu\nu} D^\beta D_\beta (\delta g_{\mu\nu})], \end{aligned}$$

definindo os tensores $A_\beta \equiv D^\nu (\delta g_{\nu\beta})$, $B_\beta \equiv D_\beta (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu})$ e $C_\beta \equiv A_\beta - B_\beta$, temos:

$$\int \sqrt{-g} d^4x g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int \sqrt{-g} d^4x D^\beta (A_\beta - B_\beta) = \int \sqrt{-g} d^4x D^\beta C_\beta. \quad (2.59)$$

Note porém que,

$$D_\beta C^\beta = \partial_\beta C^\beta + \Gamma^\beta_{\beta\alpha} C^\alpha, \quad (2.60)$$

usando a equação (2.5) e contraindo os índices μ e β

$$\Gamma^\beta_{\beta\alpha} = \frac{g^{\beta\nu}}{2} \partial_\alpha g_{\nu\beta},$$

logo,

$$D_\beta C^\beta = \partial_\beta C^\beta + \frac{g^{\beta\nu}}{2} \partial_\alpha g_{\nu\beta} C^\alpha. \quad (2.61)$$

Aqui utilizaremos a identidade (2.50) porém substituindo a variação pela derivada parcial, temos então que,

$$\begin{aligned} D_\beta C^\beta &= \partial_\beta C^\beta - \frac{1}{2} g_{\sigma\beta} \partial_\alpha g^{\beta\sigma} C^\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta (\sqrt{-g} C^\beta) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dessa forma, a integral em (2.59) pode ser escrita como

$$\int \sqrt{-g} d^4x g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \partial_\beta (\sqrt{-g} C^\beta). \quad (2.63)$$

Utilizando o teorema de Gauss quadri-dimensional, esta integral se torna uma integral na hiper-superfície que é a fronteira do hiper-volume. Pode-se exigir que a variação de $g^{\mu\nu}$ seja zero no infinito (isto é, na superfície de integração). Portanto, estes termos não contribuem para as equações de campo

$$\int \sqrt{-g} d^4x g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.64)$$

Fazendo uso destes resultados vemos que restam somente dois termos em (2.58)

$$\delta S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} d^4x \left[-\frac{R}{2} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M). \quad (2.65)$$

O segundo termo, referente à contribuição de matéria, nos conduzirá à definição do tensor energia-momento,

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.66)$$

temos que:

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} d^4x T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.67)$$

Por fim, a variação total da ação gravitacional de Einstein-Hilbert será

$$\delta S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} d^4x \left[-\frac{R}{2} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.68)$$

para que esta variação se anule o integrando deve ser zero, assim,

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.} \quad (2.69)$$

Estas são as equações de campo de Einstein que possuem como incógnita o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Apesar dos índices μ e ν assumirem quatro valores representando 16 equações, o fato do tensor métrico ser simétrico, isto é, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ faz com que apenas 10 equações sejam independentes. Além disso, a identidade de Bianchi $D^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}) = 0$ representa quatro vínculos adicionais, de forma que apenas seis equações são independentes. Para casos em que $g_{\mu\nu}$ possui alto grau de simetria o número de equações independentes é ainda menor, como veremos a seguir no exemplo da solução de Robertson-Walker.

2.6 Cosmologia da Relatividade Geral

Alguns dos principais modelos cosmológicos desenvolvidos com base na teoria da Relatividade Geral são fundamentados em um pressuposto filosófico denominado “princípio cosmológico”. Este princípio estabelece que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, isto significa que não há observadores privilegiados no universo, pelo contrário, qualquer ponto em uma galáxia distante ou onde quer que seja deve contemplar o cosmos da mesma forma que nós, por exemplo. Neste sentido homogeneidade se refere à característica de que o universo possui a mesma curvatura em todos os pontos, a métrica é constante ao longo da variedade de Riemann que descreve o universo e pode ser entendido como uma generalização para o campo gravitacional, da ideia de uma invariância sob translações. Dizer que o universo é isotrópico significa que, para um observador em um ponto fixo, o universo é exatamente igual independente de qual ele direção olhar, esta característica é uma generalização da invariância sobre rotações de uma 3-esfera para o espaço-tempo quadridimensional. A isotropia e homogeneidade se aplicam também a coordenada temporal, portanto, supõe-se que qualquer hipersuperfície com t constante seja fisicamente equivalente.

O princípio cosmológico parece não fazer sentido de início, pois parece absurdo a ideia de que o interior de uma estrela ou da Terra possua a mesma densidade do espaço vazio intergalático. Além disso, uma pessoa olhando para o céu noturno sem nenhum instrumento óptico pode ver regiões com mais estrelas do que outras. Contudo, este princípio é válido apenas para uma observação do universo em escalas muito grandes dividindo-o em blocos com dimensões da ordem de 10^9 anos-luz³, de forma que cada bloco seja suficientemente grande para conter vários aglomerados de galáxias (WEINBERG, 1972). Dessa forma é razoável aceitarmos o princípio cosmológico, não apenas por simplificar a matemática dos modelos, mas porque seria um contrassenso acreditarmos que o universo possua regiões privilegiadas em detrimento de outras, tal como sugeriu Einstein ao estabelecer este princípio (PEEBLES, 1993). Existem evidências experimentais que corroboram a validade do princípio cosmológico, não apenas observações das galáxias visíveis, mas também da radiação de fundo em raios-x, raios Gama e principalmente pela radiação cósmica de micro-ondas a 3K, que apresenta desvios apenas da ordem de 10^{-5} do que se esperaria para uma isotropia e homogeneidade perfeita (LONGO, 2014; CARROL, 2003).

³ 1 ano-luz é a distância percorrida ao viajar na velocidade da luz durante 1 ano, corresponde a aproximadamente $9,461 \times 10^{15}$ m.

2.6.1 O universo de Einstein

Em 1917 Albert Einstein elaborou um modelo cosmológico aplicando sua teoria da Relatividade Geral recentemente desenvolvida para descrever todo o universo (EINSTEIN, 1922). Para desenvolver esse modelo Einstein assumiu que o universo fosse em média estático, não havendo expansão temporal do espaço-tempo mas apenas o movimento das galáxias em seu interior que não afetaria a evolução do universo quando observado de forma completa. Esta hipótese deve ter parecido tão natural para Einstein que ela não é mencionada em seu trabalho (PEEBLES, 1993).

Para obter a solução das equações de campo do modelo de universo de Einstein partiremos da definição do escalar $d\xi^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dy^\beta$, que é o produto interno entre os quadrivetores dx^α e dy^β que, por sua vez, representam deslocamentos infinitesimais no espaço-tempo conectando dois eventos. Localmente o espaço-tempo é tido como plano (espaço-tempo de Minkowski), isto é, $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, assim os quadrivetores dx^α e dy^β podem ser escolhidos ortogonais e conseqüentemente seu produto interno nulo

$$d\xi^2 = 0. \quad (2.70)$$

Considerando os eventos $dx^\alpha = (0, dx^i)$ e $dy^\beta = (dt, 0)$, que representam o intervalo entre dois eventos do tipo tempo e dois eventos do tipo espaço, respectivamente, temos:

$$d\xi^2 = g_{i0}dx^i dt = 0, \quad (2.71)$$

isto implica necessariamente que:

$$g_{i0} = 0 = g_{0i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.72)$$

Como $d\xi^2$ é um invariante, esta construção deve ser válida em qualquer sistema de coordenadas, além disso, pelo princípio cosmológico ela pode ser estendida para todo o espaço-tempo, não só localmente.

Por sua vez, o intervalo entre dois eventos no espaço-tempo, que corresponde ao intervalo de tempo próprio⁴ também é invariante

$$ds^2 = d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.73)$$

Para um observador com coordenadas espaciais fixas $dx^i = 0$ e para o qual o intervalo de tempo medido é o intervalo de tempo próprio $d\tau = dt$, temos:

$$dt^2 = g_{00} dt^2, \quad (2.74)$$

isto significa que

$$g_{00} = 1. \quad (2.75)$$

Dessa forma, não há perda de generalidade em escrevermos a métrica para o espaço-tempo isotrópico, homogêneo e maximamente simétrico nas coordenadas espaciais como

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.76)$$

em que $g_{ij} = g_{ij}(\vec{x})$ são as componentes espaciais da métrica, isto é, elas dependem somente das coordenadas espaciais.

A parte espacial da geometria do universo de Einstein pode ser interpretada como o análogo de uma superfície esférica bidimensional imersa no espaço tridimensional, trata-se de uma hiper-superfície em três dimensões imersa em um espaço quadridimensional denominada de 3-esfera. A equação de uma 3-esfera no espaço de coordenadas ortogonais quadridimensional (x, y, z, w) é o conjunto dos pontos a uma distância fixa b da origem, tal que

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = b^2, \quad (2.77)$$

que pode ser escrita como um vínculo para a variável w , tal que

$$w^2 = b^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = b^2 - r^2. \quad (2.78)$$

⁴ A partir desta seção utilizaremos um sistema de unidades em que a velocidade da luz $c = 1$.

A diferencial dw será:

$$dw = \frac{rdr}{\sqrt{b^2 - r^2}}. \quad (2.79)$$

O que nos permite escrever a distância infinitesimal dl^2 entre dois pontos espaciais apenas em termos das coordenadas usuais, eliminando w

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2, \quad (2.80)$$

ou ainda, em coordenadas polares, $x = r \cos \phi \sin \theta, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$:

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{r^2 dr^2}{b^2 - r^2} \quad (2.81)$$

ou,

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{b^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.82)$$

Então, o elemento de linha para o espaço-tempo do universo estático de Einstein é

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{b^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}. \quad (2.83)$$

A singularidade presente na equação (2.83) é uma singularidade aparente, isto significa que ela não está presente em um sistema de coordenadas diferente. Por exemplo, considerando a mudança de variáveis $r = b \sin \chi$ a métrica se torna

$$ds^2 = dt^2 - b^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2.84)$$

que não possui nenhuma singularidade.

O estudo da dinâmica do universo de Einstein mostra que esta solução está em um ponto de equilíbrio instável (PEEBLES, 1993). Neste modelo foi necessário ajustar a constante cosmológica precisamente para evitar uma descrição do universo que colapsaria ou se expandiria indefinidamente, para qualquer perturbação pequena que o afastasse desta configuração. Além disso, as observações astronômicas feitas por E. Hubble em 1929 do desvio para o vermelho de galáxias (HUBBLE, 1929), comprovaram a expansão do universo com o tempo e fizeram com que este modelo fosse descartado. Modelos que levam em conta a expansão temporal da parte

espacial da métrica foram então propostos, como por exemplo a solução de Robertson-Walker como veremos na próxima seção.

2.6.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Partindo do princípio cosmológico de que o universo é homogêneo e isotrópico, consideremos uma generalização das ideias de Einstein, isto é, a métrica com máxima simetria nas coordenadas espaciais e que evolua no tempo, possuindo a seguinte forma geral:

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 d\sigma^2. \quad (2.85)$$

na qual, $R(t)$ representa a taxa de expansão do universo no tempo, denominado fator de escala. Iremos focar primeiramente em solucionar a parte espacial da métrica $d\sigma^2 \equiv \gamma_{ij} dx^i dx^j$, considerando um espaço esfericamente simétrico, temos

$$d\sigma^2 = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.86)$$

A isotropia do espaço-tempo garante que o fator $e^{2\beta(r)}$ dependa somente da coordenada radial e sua forma exponencial foi escolhida convenientemente para um propósito futuro. As componentes do tensor de Ricci para está métrica podem então ser determinadas

$$R_{11} = \frac{2}{r} \partial_1 \beta, \quad (2.87)$$

$$R_{22} = e^{-2\beta} (r \partial_1 \beta - 1) + 1, \quad (2.88)$$

$$R_{33} = [e^{-2\beta} (r \partial_1 \beta - 1) + 1] \sin^2 \theta. \quad (2.89)$$

A fim de encontrar uma expressão para β podemos calcular uma expressão para as componentes do tensor de Ricci por meio de considerações sobre a simetria. Partindo do pressuposto inicial de isotropia e homogeneidade as componentes do tensor de Riemann 3-dimensional R_{ijkl} devem ser constantes. Consideremos um sistema de coordenadas localmente inercial, tal que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ij} = \text{diag} [-1, -1, -1]. \quad (2.90)$$

Neste referencial as componentes do tensor de Riemann não se alteram sob uma transformação de Lorentz, isto significa que o tensor de Riemann é proporcional a alguma quantidade tensorial

construída a partir do tensor métrico. Pode-se provar que a única possibilidade é

$$R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (2.91)$$

onde γ_{ij} é k uma constante de proporcionalidade. Como esta é uma equação tensorial, esta expressão é válida em qualquer sistema de coordenadas.

Como consequência disto, podemos obter o tensor de Ricci por

$$R_{jl} = \gamma^{ik} R_{ijkl}, \quad (2.92)$$

assim,

$$R_{jl} = 2k\gamma_{jl}. \quad (2.93)$$

Daqui segue que

$$R_{11} = 2ke^{2\beta(r)}. \quad (2.94)$$

Comparando as equações (2.94) e (2.87), podemos calcular uma expressão para β

$$\begin{aligned} R_{11} &= 2ke^{2\beta(r)} = \frac{2}{r}\partial_r\beta \\ e^{2\beta(r)} &= \frac{1}{kr}\partial_r\beta \\ k\frac{r^2}{2} &= -\frac{e^{-2\beta}}{2} + C. \end{aligned}$$

A constante de integração C é arbitrária, variando com diferentes escolhas de coordenadas. Escolher $C = \frac{1}{2}$, corresponde ao sistema de coordenadas usado na descrição do universo de Einstein na Seção 2.6.1, o qual descreve uma 3-esfera imersa em um espaço quadridimensional. Nesse caso, temos:

$$e^{-2\beta} = 1 - kr^2 \quad \Rightarrow \quad e^{2\beta(r)} = \frac{1}{1 - kr^2}.$$

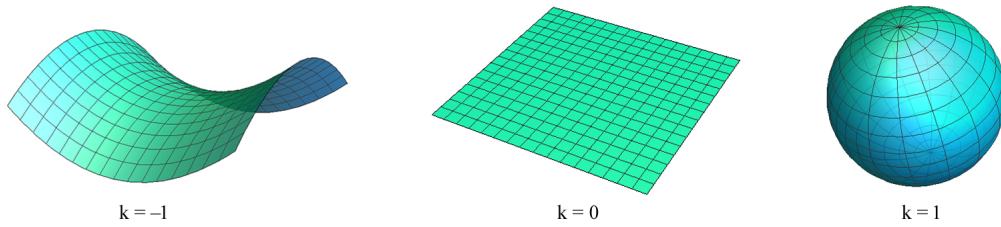
Portanto, a métrica do espaço-tempo de Robertson-Walker pode ser escrita como

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]}. \quad (2.95)$$

em que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

É conveniente normalizar a constante k e redefinir a variável r tornando-as adimensionais, de forma que a dimensão de comprimento apareça apenas no fator de escala $R(t)$. A constante k pode ser escolhida adequadamente para assumir apenas um dos valores $[-1, 0, +1]$ sendo que $k = -1$ representa curvatura negativa e um universo denominado aberto; $k = 0$ significa que o espaço é plano e finalmente $k = +1$ indica que a curvatura do espaço é positiva e é chamado de universo fechado. A Figura 2.2 contém a representação geométrica destes três casos.

Figura 2.2 – Representação geométrica do universo com curvatura negativa, plano e com curvatura positiva, respectivamente. Fonte: Autor (2020).



Outra opção é deixar o fator de escala adimensional na equação (2.95), definindo-o como

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}, \quad (2.96)$$

e também redefinir a coordenada radial com unidade de comprimento $r' = R_0 r$ e o parâmetro de curvatura $\kappa = \frac{k}{R_0^2}$, nos quais R_0 é uma quantidade fixa com unidades de comprimento. Para simplificar a escrita podemos inverter a notação $r' \longleftrightarrow r$, tal que

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.97)$$

A partir de agora abordaremos o problema de determinar a função $a(t)$. Como $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, as componentes do tensor métrico são facilmente identificadas:

$$g_{00} = 1, \quad g_{22} = -a^2 r^2, \quad (2.98)$$

$$g_{11} = -\frac{a^2}{1 - \kappa r^2}, \quad g_{33} = -a^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.99)$$

As demais componentes são nulas $g_{\mu\nu} = 0$, ($\mu \neq \nu$). Pode-se calcular as componentes da conexão por meio da relação (2.5),

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00}) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_\sigma g_{00}) = 0,\end{aligned}\quad (2.100)$$

ademais,

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_i g_{j\sigma} + \partial_j g_{\sigma i} - \partial_\sigma g_{ij}) = -\frac{g^{00}}{2}\partial_0 g_{ij}, \quad (2.101)$$

logo,

$$\Gamma^0_{11} = \frac{a\dot{a}}{1 - \kappa r^2}, \quad \Gamma^0_{22} = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma^0_{33} = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (2.102)$$

e

$$\Gamma^0_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j. \quad (2.103)$$

Além disso,

$$\Gamma^1_{i0} = \Gamma^1_{0i} = \frac{1}{2}g^{11}\partial_0 g_{i1} = \begin{cases} 0, & i \neq 1 \\ \frac{\dot{a}}{a}, & i = 1 \end{cases}, \quad (2.104)$$

de forma semelhante,

$$\Gamma^2_{0i} = \begin{cases} 0, & i \neq 2 \\ \frac{\dot{a}}{a}, & i = 2 \end{cases}, \quad \Gamma^3_{0i} = \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ \frac{\dot{a}}{a}, & i = 3 \end{cases} \quad (2.105)$$

e temos também que

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00} = 0, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} = \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2}. \quad (2.106)$$

Avaliando o índice contravariante em 2, temos:

$$\Gamma^2_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_\mu g_{\nu 2} + \partial_\nu g_{2\mu} - \partial_2 g_{\mu\nu}) \quad (2.107)$$

Como g_{00} , g_{11} e g_{22} não dependem de θ , temos que $\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{00} = 0$. Além do mais,

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33} = -\sin \theta \cos \theta. \quad (2.108)$$

Para $i \neq j$ resulta,

$$\Gamma^2_{ij} = \frac{1}{2}g^{22} (\partial_i g_{j2} + \partial_j g_{2i} - \partial_2 g_{ij}) \quad (2.109)$$

em que a única componente não nula será

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{1}{r}. \quad (2.110)$$

Por fim, avaliando o índice contravariante em 3

$$\Gamma^3_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{33} (\partial_\mu g_{\nu 3} + \partial_\nu g_{3\mu} - \partial_3 g_{\mu\nu}). \quad (2.111)$$

Nenhuma componente de $g_{\mu\nu}$ depende de ϕ , logo, $\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{00} = 0$. Além das componentes que já foram calculadas, as únicas diferentes de zero serão

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33} \partial_1 g_{33} = \frac{1}{r} \quad (2.112)$$

e

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33} \partial_2 g_{33} = \cot \theta. \quad (2.113)$$

Conhecendo todas as componentes da conexão afim pode-se obter as componentes do tensor de Riemann a partir da definição (2.28) e em seguida as componentes do tensor de Ricci. Neste caso, as únicas componentes não nulas do tensor de Ricci são:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (2.114)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2} \quad (2.115)$$

$$R_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \quad (2.116)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa). \quad (2.117)$$

Por fim, o escalar de curvatura R é obtido usando a equação (2.34),

$$\begin{aligned} R &= R^\mu{}_\mu = g^{\mu\sigma} R_{\sigma\mu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\ &= -3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{(1 - \kappa r^2)}{a^2} \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2} - \frac{r^2}{a^2 r^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \\ &= -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Note que as equações de campo de Einstein ainda não foram usadas, consideramos apenas princípios de simetrias e as definições para calcular as componentes do tensor métrico e os demais objetos que descrevem a curvatura do espaço-tempo. Na Seção 2.6.3 substituiremos estas quantidades nas equações de Einstein para obter uma expressão para o fator de escala $a(t)$ e estudar a dinâmica do universo.

2.6.3 Equação de Friedmann

Tendo em mãos o escalar de curvatura e o tensor de Ricci nos resta encontrar uma expressão adequada para o tensor energia-momento do universo, de forma que as equações de campo de Einstein nos permitam estudar o comportamento do fator de escala $a(t)$. Seguindo a proposta de Alexander Friedmann em 1922 assumiremos que o universo observado em larga escala⁵ é caracterizado como um fluido perfeito, com uma densidade de energia ρ e uma pressão p . Neste modelo a estrutura interna do universo, formada por aglomerados de galáxias, buracos negros e outros objetos astronômicos, não é levada em conta. O cosmos como um todo é tratado de maneira semelhante ao estudo de um gás, em que consideraremos apenas suas propriedades macroscópicas. Adotaremos um sistema de coordenadas comóvel, isto é, que se expande da mesma forma que o espaço, tal que neste sistema as galáxias não tenham sua posição alterada devido à expansão do universo, elas podem se mover eventualmente devido a seu deslocamento dentro de um aglomerado ou outros fatores semelhantes. A quadri-velocidade de um observador neste referencial é escrita como

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (2.119)$$

tal que $u^\mu u_\mu = 1$. De fato, o tensor energia-momento deste fluido é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.120)$$

que, por sua vez, possui a seguinte forma matricial,

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -pg_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -pg_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -pg_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.121)$$

⁵ Escala de comprimento da ordem de ~ 100 Mpc, a unidade Mpc lê-se megaparsec, e 1Mpc equivale a $3,086 \times 10^{22}$ m.)

pois no referencial de repouso do fluido o momento linear (componentes T_{0i} e T_{i0}) é nulo, a pressão é isotrópica e por isso deve aparecer somente na diagonal e não há tensão de cisalhamento (componentes T_{ij} com $i \neq j$). Tornando um índice contravariante de acordo com $T^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}$, resulta em uma expressão mais simples

$$[T^\mu_\nu] = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (2.122)$$

em que o traço deste tensor energia-momento é

$$T^\mu_\mu = \rho - 3p. \quad (2.123)$$

O tensor energia-momento obedece a uma lei de conservação que generaliza a equação de continuidade da Relatividade Restrita. Devemos notar que esta lei não representa a equação de continuidade na Relatividade Geral, como mencionado na introdução deste trabalho. Assim, temos

$$D_\mu T^\mu_\nu = 0. \quad (2.124)$$

A componente zero corresponde a

$$\begin{aligned} D_\mu T^\mu_0 &= \partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_0 - \Gamma^\alpha_{0\mu} T^\mu_\alpha \\ &= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \end{aligned}$$

Neste caso temos uma expressão que permite relacionar a densidade de energia com o fator de escala do universo, portanto,

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (2.125)$$

Para resolvermos a equação (2.125) para a densidade de energia do universo como uma função do fator de escala a , precisamos de uma equação de estado que relacione a densidade de energia ρ com a pressão p . Para um fluido ideal isolado termicamente e sem alteração no número de partículas, é conhecido da termodinâmica clássica que o produto do volume pela

pressão é constante. Assim, a razão entre p e ρ também deve permanecer constante no tempo

$$\frac{p}{\rho} = w. \quad (2.126)$$

A constante w é denominada “parâmetro da equação de estado” e na cosmologia ela pode assumir diferentes valores como veremos a seguir. Eliminando p na equação (2.125) temos:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1+w). \quad (2.127)$$

Esta equação diferencial pode ser resolvida para $\rho(t)$ em função de $a(t)$, notando que cada termo pode ser escrito como a derivada total de um logaritmo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\ln(\rho) + 3(1+w)\ln(a)] &= 0 \\ \ln(\rho) + 3(1+w)\ln(a) &= C_1, \end{aligned} \quad (2.128)$$

que implica em

$$\boxed{\rho(t) = Ca(t)^{-3(1+w)}}. \quad (2.129)$$

A fim de encontrar valores fisicamente interessantes para w , podemos estabelecer modelos para a pressão em função da densidade de energia. Consideremos primeiramente o caso da matéria, em que partículas não interagentes que se movimentam a uma velocidade pequena comparada a da luz, causam pressão nula (estas são chamadas de poeira). Galáxias e estrelas podem ser representadas dessa forma quando consideramos a estrutura do universo em larga escala, pois a pressão exercida pelas partículas é muito menor que a densidade de energia destes objetos

$$p_M = 0 \Rightarrow w = 0. \quad (2.130)$$

Portanto, a densidade de energia correspondente à poeira será inversamente proporcional ao cubo do fator de escala

$$\rho_M = Ca^{-3}. \quad (2.131)$$

Por sua vez, para a radiação e partículas com velocidade próxima a da luz, o tensor energia-momento que é dado pela equação (2.66) pode ser calculado a partir da densidade la-

grangiana para o campo eletromagnético de Maxwell

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.132)$$

em que $F^{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético. Partindo da equação (2.66) temos:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.133)$$

Para calcular este tensor é conveniente notar que

$$\delta S_R = \int d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} - \int_\Sigma d\sigma_\lambda \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \right],$$

na qual foi usado o Teorema de Gauss quadri-dimensional $\int d^4x \partial_\mu \phi^\mu = \int_\Sigma d\sigma_\mu \phi^\mu$. O último termo corresponde a um termo de superfície e será nulo pois $\delta g^{\mu\nu} = 0$ na fronteira Σ . Assim,

$$\delta S_R = \int d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.134)$$

Pelo princípio da mínima ação $\delta S_R = 0$, temos que

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right], \quad (2.135)$$

consequentemente, a partir de (2.133) encontramos

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \right\}. \quad (2.136)$$

Observe que a densidade lagrangiana depende somente de $g^{\mu\nu}$ e não de $\partial_\lambda g^{\mu\nu}$, logo

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (2.137)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[-\frac{gg^{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}} \mathcal{L}_R + \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu} \right) \right], \quad (2.138)$$

então,

$$\boxed{T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu}.} \quad (2.139)$$

Como $g^\mu{}_\mu = 4$, o traço do tensor energia-momento é dado por

$$T^\mu{}_\mu = -F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.140)$$

Igualando este resultado com a equação (2.123), temos que a pressão em função da densidade de energia para o caso da radiação será

$$p_R = \frac{\rho_R}{3} \Rightarrow w = \frac{1}{3}. \quad (2.141)$$

Logo, a densidade de energia nesse caso é proporcional ao inverso do fator de escala elevado a quarta potência:

$$\rho_R = Ca^{-4}. \quad (2.142)$$

Um último exemplo consiste na energia do vácuo, o espaço vazio também possui uma densidade energia característica que pode ser entendida como uma pressão negativa

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda. \quad (2.143)$$

O subscrito Λ é usado para identificar esta densidade de energia, pois é comum interpretar a presença da constante cosmológica Λ nas equações de campo de Einstein (1.1) como uma parte do tensor energia-momento devido a energia do vácuo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left[T_{\mu\nu}^{M+R} + T_{\mu\nu}^V \right]. \quad (2.144)$$

Se substituirmos $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ na equação (2.121) temos que o tensor energia-momento para o vácuo é proporcional ao tensor métrico, ou seja, $T_{\mu\nu}^V = \rho_\Lambda g_{\mu\nu}$. Comparando a equação (2.144) com (1.1), identifica-se a densidade de energia do vácuo como

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.145)$$

Nesse caso, a densidade de energia do vácuo permanece constante no tempo,

$$\rho_\Lambda = Ca^0. \quad (2.146)$$

A densidade de energia correspondente a matéria e radiação diminui com o tempo para um universo em expansão (no qual o fator de escala $a(t)$ aumenta ao longo do tempo), assim, a tendência é que, com o passar do tempo todo o espaço seja dominado pelo vácuo e o universo seja cada vez mais “rarefeito”.

Cálculos baseados na teoria quântica de campos para a constante cosmológica implicam no valor $\Lambda = 6 \times 10^{54} \text{eV}^2$ (WEINBERG, 1989). No entanto, observações experimentais recentes como os dados coletados pelo satélite Planck e divulgados em 2018 (AGHANIM et al., 2018), apresentam o valor $\Lambda = 4.33 \times 10^{-66} \text{eV}^2$. A discrepância entre o valor teórico e o experimental é da ordem de 10^{120} , sendo considerado uma das piores previsões teóricas da história da Física e junto com a ausência de uma explicação para a origem de Λ , ainda é um problema em aberto conhecido como “o problema da constante cosmológica”.

Por fim, substituindo $T_{\mu\nu}^V = \rho_{\Lambda} g_{\mu\nu}$ em (2.144) e contraindo os índices μ e ν obtêm-se a seguinte expressão:

$$R = -8\pi G(T + 4\rho_{\Lambda}). \quad (2.147)$$

Aqui $T = T^{\mu}_{\mu}$ é o traço do tensor energia-momento. Substituindo nas equações de Einstein, resulta

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} T - \rho_{\Lambda} g_{\mu\nu} \right). \quad (2.148)$$

A componente desta equação com $\mu = \nu = 0$ é:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left(\rho - \frac{(\rho - 3p)}{2} - \rho_{\Lambda} \right) \quad (2.149)$$

$$-\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p - 2\rho_{\Lambda}). \quad (2.150)$$

Considerando agora a componente da equação (2.148) com $\mu = \nu = 1$, temos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2} = 4\pi G(-p + \rho + \rho_{\Lambda}). \quad (2.151)$$

As demais componentes são equivalentes à equação (2.151). Substituindo a equação (2.150) em (2.151) resulta em

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{\rho_{\Lambda}}{4} \right) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (2.152)$$

O conjunto de equações (2.151) e (2.152) são chamadas de “Equações de Friedmann”. É comum definir o parâmetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$ e os parâmetros de densidade $\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho$ relacionado

com radiação e poeira, e $\Omega_\Lambda = \frac{2\pi G}{3H^2}\rho_\Lambda$ correspondente à energia do vácuo. Em termos destas quantidades a segunda equação de Friedmann (2.152) assume a forma

$$\boxed{\Omega_\Lambda + \Omega - 1 = \frac{\kappa}{a^2 H^2}} \quad (2.153)$$

O sinal de κ determina a curvatura do espaço: se $\Omega_\Lambda + \Omega > 1$, então $\kappa > 0$ e o espaço-tempo é fechado, enquanto que, para $\Omega_\Lambda + \Omega < 1$, $\kappa < 0$ e o espaço-tempo é aberto. Para o caso $\Omega_\Lambda + \Omega = 1$, temos $\kappa = 0$ e o espaço-tempo é plano. Dados experimentais coletados pelo satélite Planck em 2018 (AGHANIM et al., 2018) apresentam o valor de $\Omega_\Lambda = 0,6847 \pm 0,0073$ e $\Omega = 0,3166 \pm 0,0084$ implicando que $\Omega_\Lambda + \Omega \approx 1$, isto significa que de acordo com o modelo Λ CDM o espaço-tempo do universo atual é plano, com curvatura espacial nula.

A solução exata das equações de Einstein apresentada nesta seção é conhecida também como modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, devido a contribuição destes cientistas para a obtenção da métrica e o estudo da dinâmica do universo nas décadas de 1920-1930. Como vimos, esta descrição do universo tem se mostrado satisfatória quando comparada com os dados coletados recentemente, porém não há nenhuma explicação categórica para a origem da energia do vácuo. A expansão acelerada do universo foi comprovada empiricamente (RIESS et al., 1998), mas sem uma descrição definitiva para o mecanismo físico por trás deste fenômeno. Conforme mencionado na introdução deste trabalho, teorias que modificam a Relatividade Geral, como as teorias $f(R)$ e as teorias não locais, procuram compreender a presença da constante cosmológica nas equações de campo. Trabalhos recentes sobre gravidade não local (DESER; WOODARD, 2019; BELGACEM et al., 2018; MAGGIORE; MANCARELLA, 2014) tem apontado que solução desta questão pode estar na não localidade de termos presentes na ação efetiva quântica. No próximo capítulo apresentamos uma introdução as teorias não locais com exemplos elucidativos da eletrodinâmica, do emaranhamento quântico e da gravitação.

3 INTRODUÇÃO À TEORIAS NÃO LOCAIS

Neste capítulo introduziremos os conceitos de localidade e não-localidade em teorias físicas. Denomina-se uma teoria local aquela em que a causa e o efeito são conectados por contato espacial, ou seja, não há ação à distância. Esta característica implica que em uma teoria local nenhuma informação pode ser transmitida de forma instantânea, pois, de acordo com a Relatividade Restrita, a velocidade máxima que pode ser atingida no vácuo é a da luz. A existência deste limite para a velocidade de uma partícula implica na validade do conceito de causalidade. Alguns exemplos de teorias locais são: a Relatividade Restrita, a Relatividade Geral e mecânica estatística. Em contrapartida, teorias não locais permitem a ação à distância, não há nenhum meio ou campo de força que faça a mediação da interação entre dois objetos e portanto é possível que informação física seja transmitida instantaneamente. A mecânica quântica por construção é uma teoria não local, como veremos a seguir; esta ação à distância ocorre, por exemplo, em um fenômeno denominado emaranhamento quântico.

3.1 Princípio da localidade e emaranhamento

Classicamente, uma teoria física é considerada local quando construída a partir do “princípio da localidade”, que estabelece que um objeto no espaço sofre influência somente de outros objetos que estão muito próximos a ele, em sua vizinhança imediata. Em teorias deste tipo não há ação à distância, sempre deve existir algo permeando o espaço para mediar a ação de um objeto em outro, como por exemplo um campo que permita a propagação de informação na forma de uma onda ou partícula. Esta ideia está presente na formulação clássica do eletromagnetismo, no qual o campo eletromagnético permite que a informação da interação seja propagada; o mesmo acontece na Relatividade Geral com o campo gravitacional. Em geral, todas as teorias clássicas obedecem o princípio da localidade, o que pode ser observado por meio da obtenção das equações de movimento que descrevem a teoria, a partir de uma lagrangiana que contenha apenas termos locais. No entanto o oposto nem sempre é verdade, algumas teorias locais também podem ser obtidas a partir de uma lagrangiana com termos não locais, como veremos posteriormente, por exemplo, no eletromagnetismo. Nesse caso é possível que a causalidade não seja violada, apesar da lagrangiana conter termos não locais.

Teorias não locais são aquelas que não obedecem ao princípio da localidade, nas quais existe algum tipo de interação entre objetos que possuem coordenadas espaciais diferentes. Não é necessário que estes objetos sejam realmente objetos físicos separados por uma distância

como, por exemplo, partículas em diferentes pontos. Veremos adiante que no formalismo da teoria de campos, a não localidade pode ser introduzida como diferentes rótulos para os campos, que são variáveis de integração distintas, ou em funções de um operador de derivadas. Em uma teoria quântica de campos, a não localidade pode ser introduzida por meio de campos avaliados em diferentes pontos do espaço-tempo ou nas relações de comutação entre os observáveis, em intervalos do tipo espaço (GREENBERG, 2002).

O interesse em teorias não locais surgiu a partir do trabalho de 1935 de A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, que estabeleceu o paradoxo Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) no qual é argumentado que a interpretação de Copenhague (probabilística) da Mecânica Quântica não pode oferecer uma descrição completa da realidade (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935). O paradoxo EPR pode ser ilustrado a partir problema do decaimento de um pión neutro em um elétron e um pósitron: $\pi^0 \rightarrow e^- + e^+$. Neste caso, se o pión estiver inicialmente em repouso as trajetórias do elétron e do pósitron devem necessariamente ser opostas e em linha reta devido à conservação do momento linear, enquanto que a conservação do momento angular exige que a soma do *spin* do elétron e do pósitron deve ser zero, pois o méson π^0 possui *spin* nulo. Denotaremos por $|\pm\rangle_{e^-}$ os estados possíveis para o *spin* do elétron e $|\pm\rangle_{e^+}$ para o *spin* do pósitron, com $|+\rangle$ representando *spin up* e $|-\rangle$ o *spin down*. De acordo com o princípio da exclusão de Pauli, o estado final do sistema deve ser

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_{e^-} |-\rangle_{e^+} - |-\rangle_{e^-} |+\rangle_{e^+}). \quad (3.1)$$

A princípio existe igual probabilidade tanto do elétron como do pósitron estarem em qualquer um dos estados de *spin*, porém ao se realizar uma medida do *spin* do elétron a função de onda deve colapsar imediatamente para um dos estados. Isto significa que, se após a medida o elétron for encontrado em um estado de *spin up* obrigatoriamente o pósitron deve estar com *spin down*, mas se o elétron estiver com *spin down* então pósitron estará com *spin up*. A medida do *spin* do elétron afetará de forma instantânea a função de onda do pósitron independentemente de qual for a separação espacial entre eles, violando assim o princípio da localidade. Este fenômeno é conhecido como emaranhamento quântico e foi verificado experimentalmente, por exemplo para um fóton medido separadamente em dois laboratórios (FUWA et al., 2015), confirmando que a ação à distância rejeitada por Einstein em sua teoria da relatividade, existe na natureza e que a teoria quântica é de fato não local. Apesar da informação quântica de estados espacialmente separados ser conhecida instantaneamente, isso não significa que é possível

enviar uma mensagem à uma velocidade superior a da luz. Sistemas quânticos são estatísticos, é necessário que os resultados de medidas sejam comparados para que se conclua em qual estado cada sistema se encontra. A medida realizada em um sistema altera a parte da função de onda presente no outro sistema espacialmente separado, mas não é capaz de alterar os resultados das medidas realizadas neste segundo sistema. A informação necessária para realizar a comparação entre as medidas dos dois sistemas pode ser enviada no máximo à velocidade da luz. Assim o postulado da Relatividade Restrita que estabelece a velocidade da luz como limite para o envio de uma mensagem, permanece válido.

3.2 Lagrangianas não locais

No contexto da teoria de campos é possível formular a não localidade em nível lagrangiano. Uma lagrangiana é considerada não local se ela contém termos que não são proporcionais aos campos e suas derivadas, avaliadas em um único ponto do espaço (DIJKSTRA, 2019). A presença de uma função de um operador derivada, que é interpretado como uma série de Taylor com infinitas derivadas, é um exemplo de termo não local. Modelos de campos generalizadas com infinitas derivadas apresentam termos não locais da forma

$$e^{-\frac{\square}{M^2}}, \quad (3.2)$$

na qual \square é o operador d'Alembertiano e M é a escala de massa na qual os efeitos não locais se tornam relevantes. A não localidade também pode ser expressa pelo inverso do d'Alembertiano \square^{-1} ou por uma representação integral, como veremos mais adiante.

Vejamos um exemplo introdutório de uma lagrangiana não local que permite obter as equações de Maxwell para o eletromagnetismo. Apesar da eletrodinâmica clássica ser uma teoria local, as equações que a governam podem ser obtidas a partir de lagrangianas não locais, sem violar a propriedade da causalidade (BERNABEU; NAVARRO-SALAS, 2019).

3.2.1 Eletrodinâmica clássica

Na mecânica clássica a mudança na descrição de um sistema por meio do formalismo hamiltoniano para o lagrangiano se dá por uma transformação de Legendre, que relaciona as

funções hamiltoniana $H(q, p, t)$ e lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ da seguinte forma:

$$L(q, \dot{q}, t) = \dot{q}_i p^i - H(q, p, t), \quad (3.3)$$

e os parênteses de Poisson das variáveis do espaço de fase q e p são: $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$. Nesta seção adotaremos a notação de Einstein para o somatório, no entanto os índices latinos (e.g. i, j, k) variam de 1 a 3 representando apenas as componentes espaciais. A equação (3.3) pode ser modificada para uma transformação mais geral, de forma que a lagrangiana seja dada por

$$L(q, \dot{q}, t) = \omega_{ij} \dot{q}^i p^j - H(q, p, t), \quad (3.4)$$

em que

$$\{q_i, p_j\} = \omega_{ij}. \quad (3.5)$$

A forma usual é recuperada escolhendo $\omega_{ij} = \delta_{ij}$.

Em uma teoria de campos, a densidade lagrangiana para os campos $\phi(x)$ e $\pi(y)$ também pode ser generalizada seguindo o mesmo procedimento

$$\mathcal{L} = \int d^3\vec{y} \omega_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) \partial_t \phi^i(x) \pi^j(y) - \mathcal{H}(\phi, \pi). \quad (3.6)$$

A escolha das funções $\omega(\vec{x}, \vec{y})$ como $\omega_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) = \delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ conduz à densidade lagrangiana local $\mathcal{L} = \partial_t \phi_i(x) \pi^i(x) - \mathcal{H}(\phi, \pi)$, porém há outras possibilidades como, por exemplo, a escolha de uma função delta transversal $\delta_{ij}^T(\vec{x}, \vec{y})$ que fornece a projeção de um campo vetorial ao longo de sua componente transversal. De acordo com o Teorema de Helmholtz qualquer campo vetorial pode ser decomposto em uma componente longitudinal e outra transversal,

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}^L + \vec{\Phi}^T, \quad (3.7)$$

as quais devem satisfazer $\vec{\nabla} \times \vec{\Phi}^L = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi}^T = 0$. Assim, conforme (LITTLEJOHN, 2008) a função $\delta_{ij}^T(x, y)$ é definida como

$$\int d^3\vec{y} \delta_{ij}^T(\vec{x}, \vec{y}) \Phi^j(y) = \int d^3\vec{y} \left[\delta_{ij} \delta^3(\vec{y} - \vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right] \Phi^j(y) = \Phi_i^T(x). \quad (3.8)$$

Logo, encontramos que,

$$\omega_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) = \delta_{ij} \delta^3(\vec{y} - \vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|}. \quad (3.9)$$

Em que \vec{x} e \vec{y} são vetores posição que apontam para pontos distintos do espaço, note que o segundo membro tende a zero quando a distância entre estes dois pontos é muito grande, isto é, quando $|\vec{y} - \vec{x}| \rightarrow +\infty$. A não localidade, neste caso, aparece no segundo termo, em que há a distância entre dois pontos no espaço, note porém que a componente espacial não é alterada por esta escolha de ω_{ij} .

Para obter as equações de Maxwell consideremos a densidade lagrangiana dependente das componentes do campo elétrico \vec{E} e do potencial vetor \vec{A} o qual também define o campo magnético através de $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. A função hamiltoniana corresponde à energia do campo eletromagnético, nesse caso é

$$\mathcal{H}(E, A) = \frac{1}{2} \left(E^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right). \quad (3.10)$$

A densidade lagrangiana não local, para a teoria eletromagnética de Maxwell, será

$$\mathcal{L} = \int d^3\vec{y} \left\{ \delta_{ij} \delta^3(\vec{y} - \vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right\} \partial_t E^i(x) A^j(y) - \frac{1}{2} \left(E^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right). \quad (3.11)$$

As equações de campo podem ser obtidas a partir da variação da ação

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \left\{ \int d^3\vec{y} \delta_{ij}^T(\vec{x}, \vec{y}) \delta [\partial_t E^i(x) A^j(y)] - \frac{1}{2} \left(\delta E^2 + \delta (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right) \right\} = 0,$$

que nos fornece

$$\partial_t A_i^T(x) = -E_i \quad (3.12)$$

$$\partial_t E_i^T(x) = \left(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right)_i. \quad (3.13)$$

Por fim, de acordo com o Teorema de Helmholtz a componente transversal de \vec{E} deve ter divergente nulo, isto é, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Ademais, identificando o campo magnético como $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^T$, o

que implica em $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, encontramos as quatro equações de Maxwell no vácuo:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \partial_t \vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Estas equações de campo contêm apenas termos locais, contudo elas foram obtidas a partir de uma lagrangiana não local (3.11) que relaciona diferentes pontos do espaço. A não localidade não aparece na teoria eletromagnética clássica devido ao fato de se considerar apenas uma trajetória que obedecem ao princípio da mínima ação $\delta S = 0$, ao contrário de uma descrição quântica em que não há uma trajetória bem definida e as integrais são efetuadas levando em conta todos os caminhos possíveis (BERNABEU; NAVARRO-SALAS, 2019). Um exemplo disto é o efeito quântico Aharonov-Bohm em que partículas carregadas sofrem um deslocamento de fase ao passar por uma região externa a um solenoide, sendo que o campo magnético está confinado apenas dentro dele. Nesse caso, a componente transversal do potencial vetor \vec{A}^T que causa o efeito Aharonov-Bohm é equivalente ao termo de interação não local

$$A_i^T = \int d^3x' G_{ij}(x, x') B^j(x') = \left[\frac{\Phi_B}{2\pi\rho} \hat{\phi} \right]_i,\tag{3.15}$$

em que $G_{ij}(x, x') = -\frac{\epsilon_{ijk}}{4\pi} \partial^k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ é a função de Green que satisfaz $\epsilon^{jki} \partial_k G_{ij} = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ e Φ_B é o fluxo do campo magnético. A lição deste exemplo é que, dentro do escopo do que foi abordado, a não localidade se manifesta além das equações de campo apenas em um fenômeno quântico, classicamente a não localidade está presente somente em nível lagrangiano.

Consideremos outro exemplo da eletrodinâmica clássica que permita compreender a presença de termos não locais em uma teoria. A densidade lagrangiana de Proca que descreve fótons massivos, na ausência cargas e correntes, é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\mu A^\mu.\tag{3.16}$$

Esta lagrangiana é local, porém o termo de massa faz com que ela não seja invariante sob uma transformação local de *gauge* $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$, em que $\lambda(x)$ é o parâmetro da transformação.

Contudo, é possível mostrar que esta formulação é equivalente a uma lagrangiana não local e invariante sob transformações de *gauge*.

Variando a equação (3.16), as equações de campo obtidas são (JACCARD; MAGGI-ORE; MITSOU, 2013)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m_\gamma^2 A^\nu = 0, \quad (3.17)$$

em que $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é o tensor *field-strength*. A condição do *gauge* de Lorenz impõe que $\partial_\mu A^\mu = 0$, usando isto como um vínculo para o potencial A^μ , a equação (3.17) se torna

$$\left(\square - m_\gamma^2\right)A^\nu = 0, \quad (3.18)$$

na qual $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. Para tornar a densidade lagrangiana (3.16) invariante sob sob uma transformação de *gauge* podemos introduzir um campo auxiliar φ , conhecido como campo de Stueckelberg, tal que o potencial A^μ seja substituído da seguinte forma:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{m_\gamma} \partial_\mu \varphi. \quad (3.19)$$

A densidade lagrangiana encontrada a partir desta substituição é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m_\gamma A_\mu \partial^\mu \varphi, \quad (3.20)$$

que é invariante sob a transformação de *gauge*

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad \varphi \rightarrow \varphi - m_\gamma \lambda \quad (3.21)$$

Podemos então calcular as equações de campo aplicando o princípio da mínima ação à equação (3.20), o que nos leva a

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m_\gamma^2 A^\nu - m_\gamma \partial^\nu \varphi = 0, \quad (3.22)$$

$$\square \varphi + m_\gamma \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.23)$$

A equação (3.23) pode ser resolvida para o campo φ em termos do operador diferencial inverso aplicado à derivada do potencial vetor,

$$\varphi = -m_\gamma \square^{-1} (\partial_\mu A^\mu), \quad (3.24)$$

o qual será responsável por introduzir a não localidade na teoria, conforme mencionamos no início da Seção 3.2. O operador \square^{-1} é definido tal que $\square(\square^{-1}\Psi(x)) = \Psi(x)$, o que também pode ser escrito em uma forma integral, por meio de uma função de Green $G(x,y)$

$$\square^{-1}\Psi(x) = \int d^4y G(x,y)\Psi(y), \quad (3.25)$$

na qual a função $G(x,y)$ satisfaz a equação

$$\square G(x,y) = \delta^4(x-y). \quad (3.26)$$

Na Seção 3.2.4 discutiremos com mais detalhes a definição de um operador não local da forma (3.25).

Por fim, a equação (3.24) permite eliminar φ na equação (3.20), de forma que a densidade lagrangiana se torna

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}m_\gamma^2 F_{\mu\nu}\square^{-1}F^{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

que é efetivamente não local. Logo, a densidade lagrangiana de Proca (3.16) é equivalente a equação (3.27) que é invariante sob transformação de *gauge*, porém, nesse caso, a invariância de *gauge* surge às custas da presença da não localidade. Se introduzirmos o campo

$$U^{\mu\nu} = -\square^{-1}F^{\mu\nu} \quad (3.28)$$

esta lagrangiana se torna local e invariante por transformações de *gauge*. Contudo, $U^{\mu\nu}$ não pode ser considerado como a solução mais de geral de

$$\square U^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

pois isto introduziria graus de liberdade extras e que não estão presentes na teoria original. A razão disto é que em uma transformação $U^{\mu\nu} \rightarrow U^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$, tal que $\square S^{\mu\nu} = 0$, a equação (3.29) permanece invariante. A introdução do campo auxiliar faz com que a teoria seja localizada, mas as condições de contorno para $U^{\mu\nu}$ não são arbitrárias e este objeto não representa uma nova dinâmica. De fato, o campo $U^{\mu\nu}$ não estaria associado a nenhuma quantidade física.

As equações de movimento correspondentes à ação não local (3.27) são:

$$\left(1 - \frac{m_\gamma^2}{\square}\right) \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.30)$$

que são as equações de Maxwell modificadas com termos não locais. Se adicionarmos um termo correspondente à existência de cargas e correntes à equação (3.27), a única diferença para as equações de movimento será a presença do quadri-vetor de corrente $j^\mu = (\rho, \vec{J})$. Nesta situação, as equações de campo se tornam

$$\left(1 - \frac{m_\gamma^2}{\square}\right) \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (3.31)$$

Podemos analisar as equações (3.31) em diferentes escalas de energia. Considerando $\square \rightarrow k^2 \sim E^2$, para o caso em que a energia é muito maior que a massa do fóton, isto é, $m_\gamma^2/k^2 \ll 1$, o termo não local é desprezível e recupera-se as equações de Maxwell usuais

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (3.32)$$

Este regime é denominado de ultravioleta e a não localidade não causa nenhuma alteração para a teoria. No entanto, se considerarmos o caso em que a energia do fóton é pequena comparada a sua massa, tal que $m_\gamma^2/k^2 \gg 1$, temos que as equações (3.31) podem ser escritas como

$$m_\gamma^2 \square^{-1} (\partial_\mu F^{\mu\nu}) = -j^\nu. \quad (3.33)$$

Este limite de baixas energias é chamado de infravermelho. De acordo com a definição (3.25) as equações de movimento obtidas para o tensor $F^{\mu\nu}$, no limite infravermelho, são:

$$\int d^4y G(x,y) \partial_\mu F^{\mu\nu}(y) = -\frac{j^\nu}{m_\gamma^2}, \quad (3.34)$$

porém, aplicando o operador d'Alembertiano à equação (3.33) o resultado é

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{\square j^\nu}{m_\gamma^2}. \quad (3.35)$$

Neste regime, $k^2/m_\gamma^2 \ll 1$ o que significa que este termo gera uma contribuição muito pequena para o campo eletromagnético. A lição deste exemplo é que podemos alternar a localidade de

uma teoria pela invariância sob uma transformação local, aplicada à representação da teoria em um nível lagrangiano. Na Seção 3.2.3 veremos que generalizar o procedimento de introdução dos termos não locais na lagrangiana, conforme descrito nesta seção, é um caminho para a construção de uma teoria de gravitação modificada.

3.2.2 Eletrodinâmica quântica

A ação efetiva quântica é uma ferramenta usada na teoria quântica de campos para analisar correções quânticas da dinâmica clássica de um campo. As equações derivadas a partir de uma ação efetiva podem ser usadas como ponto de partida para o estudo, por exemplo, da influência dos campos de matéria no campo gravitacional. Vejamos por meio de um exemplo, a presença e o significado de termos não locais em uma ação efetiva quântica. Consideraremos a ação efetiva da eletrodinâmica com correções de um *loop*, envolvendo apenas os termos correspondentes ao campo do fóton. Neste caso, se mantivermos apenas termos de ordem quadrática em A^μ , a ação efetiva se torna (DALVIT; MAZZITELLI, 1994; BELGACEM et al., 2018)

$$\Gamma_{QED} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} \frac{1}{e^2(\square)} F^{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

na qual o termo $\frac{1}{e^2(\square)}$ representa o deslocamento da carga elétrica (*running coupling constant*) e é dado pela seguinte expressão (NERSISYAN, 2017):

$$\frac{1}{e^2(\square)} = \frac{1}{e^2(\mu)} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 dt (1-t^2) \ln \left[\frac{m_e^2 - \frac{1}{4}(1-t^2)\square}{\mu^2} \right]. \quad (3.37)$$

De forma semelhante ao que foi feito na Seção 3.2.1 consideraremos o limite de ultravioleta, isto é, situações em que a massa do elétron é desprezível em relação a escala de energia $|k^2/m_e^2| \gg 1$. Neste caso, a variação para a carga elétrica é dada por

$$\frac{1}{e^2(\square)} \approx \frac{1}{e^2(\mu)} - \frac{1}{12\pi^2} \ln \left[\frac{-\square}{\mu^2} \right], \quad (3.38)$$

Esta forma integral evidencia que a não localidade presente na lagrangiana, causa a variação da carga elementar e , conseqüentemente, da constante de acoplamento com a escala de energia. No limite de infravermelho, ou seja, em que $|k^2/m_e^2| \ll 1$, existem apenas termos

locais na expressão para o deslocamento da carga do elétron,

$$\frac{1}{e^2(k^2)} \approx \frac{1}{e^2(\mu)} + \frac{1}{15\pi^2} \frac{k^2}{m_e^2}. \quad (3.39)$$

Nesse caso, os termos adicionais são muito pequenos devido ao fator k^2/m_e^2 . Além disso, as equações obtidas nesta seção podem não ser reais e não respeitarem o princípio da causalidade, dependendo da formulação da integral de caminho utilizada (BELGACEM et al., 2018). É necessário maior cuidado para a interpretação da não localidade presente na ação efetiva para que ela obedeça a causalidade, conforme discutiremos na Seção 3.2.4. A lição a ser tirada deste exemplo é que, de forma geral, em uma teoria quântica de campos a não localidade aparece quando levamos em consideração a variação da constante de acoplamento, devido à correções de *loops* diferentes.

3.2.3 Gravitação

Existem diversas formas de introduzir a não localidade em uma teoria clássica para a gravitação, vejamos alguns exemplos que foram propostos com essa finalidade. Uma abordagem para modificar a Relatividade Geral baseada na teoria de Proca para fótons massivos é alterar diretamente as equações de campo (ARKANI-HAMED et al., 2002), baseando-se em (3.31), podemos escrever

$$\left(1 - \frac{m_g^2}{\square}\right) G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.40)$$

na qual $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, mas, nesse caso, $\square = g_{\mu\nu}D_\mu D_\nu$ é o d'Alembertiano covariante. Estas equações são postuladas sendo inspiradas pelo exemplo da densidade lagrangiana de Proca, mas não é possível dizer se há uma lagrangiana que permita obtê-las a partir do princípio variacional.

Novamente podemos analisar a equação (3.40) de acordo com a escala de energia das ondas gravitacionais. No limite de altas energias, tal que $m_g^2/k^2 \ll 1$ o termo não local é desprezível e as equações de campo se tornam as equações de Einstein da Relatividade Geral. Em contrapartida, para o regime de energia infravermelho, tal que $m_g^2/k^2 \gg 1$, a equação (3.40) se torna

$$\square^{-1} G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{m_g^2} T_{\mu\nu}. \quad (3.41)$$

A partir da definição (3.25) podemos ver que equação (3.41) manifesta a não localidade para o tensor de Einstein, de forma que

$$\square^{-1}G_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu}^{(0)}(x) + \int d^4y \sqrt{-g(y)} \Delta(x,y) G_{\mu\nu}(y), \quad (3.42)$$

na qual a função de Green $\Delta(x,y)$ é a solução de

$$\square\Delta(x,y) = \delta^4(x-y) \quad (3.43)$$

e $G_{\mu\nu}^{(0)}(x)$ é a solução da equação homogênea $\square G_{\mu\nu}^{(0)}(x) = 0$. A solução homogênea aparece como um grau de liberdade extra na teoria, tal como foi discutido no caso da eletrodinâmica clássica, para a equação (3.29). Para estabelecer o modelo não local é preciso definir a solução homogênea e obter a expressão da função de Green correspondente ao operador não local. A solução homogênea pode ser fixada a partir das condições de contorno, como por exemplo estabelecendo o intervalo de tempo em um modelo de evolução temporal do universo espacialmente plano. Veremos no Capítulo 4 que este tipo de condição de contorno foi aplicada ao primeiro modelo de Deser-Woodard (DESER; WOODARD, 2007). A função de Green deve ser escolhida de forma que o modelo obedeça a causalidade, o que é mantido mediante a escolha da função de Green retardada (DIRIAN et al., 2014).

Por outro lado, se aplicarmos o operador d'Alembertiano à equação (3.41), temos que

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{m_g^2} \square T_{\mu\nu}. \quad (3.44)$$

Como visto na equação (2.144) a constante cosmológica pode ser interpretada como a presença de um termo correspondente à energia do vácuo no tensor energia-momento da forma $T_{\mu\nu}^V = \rho_\Lambda g_{\mu\nu}$, na qual ρ_Λ é constante. Em uma geometria que obedece a condição de metricidade o d'Alembertiano desta parcela do tensor energia-momento será nulo, ou seja, $\square T_{\mu\nu}^V = \rho_\Lambda D^\alpha D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$; logo, nesse modelo, o termo não local não contribui com a presença da constante cosmológica nas equações de campo. Além disso, o fato de que as equações (3.40) não foram derivadas a partir de uma densidade lagrangiana, faz com que a introdução da não localidade não tenha uma origem física fundamentada de maneira satisfatória, o que não permite que saibamos de imediato quais os aspectos de simetria são preservados nas equações de campo. Outro problema existente nesse modelo é que o tensor energia-momento não é covariantemente

conservado, podemos verificar isso calculando a derivada covariante da equação (3.44), que resulta

$$D^\mu G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{m_g^2} D^\mu (\square T_{\mu\nu}). \quad (3.45)$$

Se assumirmos como válida a identidade de Bianchi temos que $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$, logo, a equação (3.45) se torna

$$D^\mu (\square T_{\mu\nu}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \square (D^\mu T_{\mu\nu}) = [D^\mu, \square] T_{\mu\nu}. \quad (3.46)$$

Contudo, em um espaço-tempo curvo as derivadas covariantes não comutam, o comutador entre derivadas covariantes fornece o tensor de curvatura de Riemann, como vimos na Seção 2.4. Como consequência temos que $[D^\mu, \square] \neq 0$ e portanto, $D^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$. Por outro lado, se assumirmos que a equação $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ é válida, então a equação (3.45) implica que o tensor de Einstein não pode obedecer a identidade de Bianchi. A conclusão é que neste modelo não podemos ter as duas condições sendo satisfeitas ao mesmo tempo, tal como na Relatividade Geral. Se a identidade de Bianchi não é satisfeita a teoria modificada apresenta mais graus de liberdade do que a RG, uma vez que a identidade de Bianchi é responsável por eliminar 4 graus de liberdade do tensor métrico.

Este problema pode ser resolvido se considerarmos apenas a parte transversal do lado direito das equações de campo (3.40) (JACCARD; MAGGIORE; MITSOU, 2013). Um tensor simétrico arbitrário $S^{\mu\nu}$ pode ser decomposto em uma parte transversal e outra longitudinal tal que

$$S_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}^T + \frac{1}{2} (D_\mu S_\nu - D_\nu S_\mu), \quad (3.47)$$

na qual $S_{\mu\nu}^T$ satisfaz $D^\mu S_{\mu\nu}^T = 0$ e o vetor S_μ é obtido aplicando a derivada covariante D^μ em ambos os lados da equação (3.47). Usando este princípio podemos escrever as equações de movimento como

$$\left[\left(1 - \frac{m_g^2}{\square} \right) G_{\mu\nu} \right]^T = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.48)$$

ou de forma equivalente,

$$G_{\mu\nu} - m_g^2 (\square^{-1} G_{\mu\nu})^T = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.49)$$

Ao aplicarmos o divergente covariante D^μ ao lado esquerdo o resultado deve ser zero por construção, como consequência $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ será satisfeita. Apesar disso, este modelo também apresenta alguns problemas, existem instabilidades geradas pelo caráter tensorial do termo não local $(\square^{-1} G_{\mu\nu})^T$ que não permitem um modelo cosmológico válido (NERSISYAN, 2017; DIRIAN

et al., 2014). Com o intuito de eliminar estas instabilidades e construir um modelo cosmológico viável, é proposto que o tensor $G_{\mu\nu}$ seja substituído pelo escalar de curvatura R , dando origem ao modelo

$$G_{\mu\nu} - m_g^2 (g_{\mu\nu} \square^{-1} R)^T = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.50)$$

Estas equações de campo apresentam características que permitem a construção de um modelo cosmológico que pode ser comparado ao modelo Λ CDM. O valor da densidade de energia escura medido experimentalmente pode ser obtido a partir destas equações sem a necessidade de introduzir um termo extra proporcional à constante cosmológica (DIRIAN et al., 2014; NERSISYAN, 2017). Se o parâmetro de massa m_g presente na equação (3.50) for escolhido tal que $m_g = 0,67H_0$, na qual $H_0 = (67,4 \pm 0,5) \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ (AGHANIM et al., 2018) é a constante de Hubble¹, encontra-se que a densidade de energia escura é $\Omega_\Lambda \approx 0,68$, que está de acordo com o valor experimental $\Omega_\Lambda = 0,6847 \pm 0,0073$ obtido pelo satélite Planck. Outra grandeza que permite a comparação deste modelo de gravidade não local com o modelo Λ CDM, é o parâmetro w definido na equação de estado (2.126). De acordo com a equação (2.146) o valor deste parâmetro para a energia escura deve ser $w = -1$, enquanto que no modelo não local (3.50) pode-se obter que $-1.1 \lesssim w \lesssim -1.04$ (NESSERIS; TSUJIKAWA, 2014). Apesar de apresentar resultados satisfatórios em comparação com o modelo Λ CDM e consequentemente, com alguns dados experimentais, o modelo descrito pela equação (3.50) possui alguns problemas estruturais. Da mesma forma que o modelo proposto em (3.44) não se conhece alguma densidade lagrangiana que permita que as equações (3.50) sejam deduzidas a partir do princípio variacional. A consequência disto é que a introdução do termo não local não pode ser justificada por uma alteração em um nível fundamental da teoria. Além disso, a presença do parâmetro de massa m_g tem um papel similar ao da constante cosmológica nas equações de campo de Einstein, de forma que o número de parâmetros livres neste modelo é o mesmo que o existente no modelo Λ CDM (NESSERIS; TSUJIKAWA, 2014). A vantagem do modelo não local é que a introdução do termo $m_g^2 (g_{\mu\nu} \square^{-1} R)^T$ nas equações de campo é inspirada por um fenômeno quântico, em contraste com a presença da constante cosmológica que é introduzida baseada nos resultados experimentais.

¹ A constante de Hubble H_0 é o valor do parâmetro de Hubble $H = \dot{a}/a$ nos dias atuais.

3.2.4 Operadores não locais e a ação efetiva quântica

Nesta seção apresentaremos algumas definições formais do que foi desenvolvido por meio de exemplos nas seções precedentes. Como vimos, a atuação de um operador diferencial inverso em uma função é uma das formas de inserir a não localidade em uma teoria. Podemos definir um operador diferencial inverso \mathcal{D}^{-1} , tal que

$$\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{D}\varphi(x)) = \varphi(x), \quad (3.51)$$

Alguns exemplos de operadores diferenciais inversos conhecidos são \square^{-1} , $[\mu^2 + \square]^{-1}$, $[\partial_t^2 + c_1\partial_t + c_2]^{-1}$. A partir da definição (3.51) podemos obter sua representação integral

$$\mathcal{D}^{-1}\varphi(x) = \varphi_{(0)}(x) + \int d^4x' G(x, x')\varphi(x'). \quad (3.52)$$

Aplicando o operador \mathcal{D} à expressão acima, com as derivadas sendo calculadas com relação a variável x , temos que

$$\varphi(x) = \mathcal{D}\varphi_{(0)}(x) + \int d^4x' \mathcal{D}G(x, x')\varphi(x'). \quad (3.53)$$

Para que a definição (3.51) seja satisfeita, devemos ter

$$\mathcal{D}\varphi_{(0)}(x) = 0 \quad (3.54)$$

$$\mathcal{D}G(x, x') = \delta^4(x - x'), \quad (3.55)$$

em que, a função $\varphi_{(0)}(x)$ é chamada de solução homogênea e a função $G(x, x')$ de função de Green. Note que a função de Green é simétrica mediante uma inversão das variáveis $x \leftrightarrow x'$

$$G(x, x') = G(x', x) \quad (3.56)$$

A função de Green pode ser escrita como a soma de uma função de Green retardada com uma função de Green avançada, isto é,

$$G(x, x') = G_R(x, x') + G_A(x', x), \quad (3.57)$$

de forma que, a permutação nas coordenadas $x \leftrightarrow x'$ faz com que a função de Green retardada se torne a função de Green avançada $G_R(x, x') \leftrightarrow G_A(x', x)$. Cada operador diferencial possui sua própria função de Green em particular, que é solução da equação (3.55).

Para exemplificar de forma simples a relação entre a presença da função de Green e a causalidade nas equações de movimento, consideremos as correções da ação do campo escalar clássico (NERSISYAN, 2017)

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \int d^4x \varphi(x) \square^{-1} \varphi(x) = -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \varphi(x) G(x, x') \varphi(x'). \quad (3.58)$$

Variando funcionalmente esta ação com relação ao campo φ temos:

$$\frac{\delta S(\varphi)}{\delta \varphi(y)} = -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \left[\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} G(x, x') \varphi(x') + \varphi(x) G(x, x') \frac{\delta \varphi(x')}{\delta \varphi(y)} \right], \quad (3.59)$$

mas $\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} = \delta^4(x - y)$, logo,

$$\frac{\delta S(\varphi)}{\delta \varphi(y)} = -\frac{1}{2} \int d^4x [G(x, y) + G(y, x)] \varphi(x) \quad (3.60)$$

Mesmo que a ação (3.58) seja definida apenas em termos da função de Green retardada, a fim de que apenas os valores do campo φ no cone de luz passado sejam considerados, a variação da ação fará com que as equações de movimento possuam tanto a função de Green retardada quanto a avançada. A razão disto é que o segundo termo contém uma permutação nas variáveis, e como vimos, $G_R(x, y) = G_A(y, x)$. Como consequência, as equações de movimento para um dado evento dependem tanto do campo avaliado em um ponto no cone de luz passado x^μ quanto no cone de luz futuro y^μ , violando a relação de causa e efeito. Podemos então concluir que, classicamente, a presença de um termo não local na lagrangiana de uma teoria de campos implica na violação da causalidade, resta saber se o mesmo ocorre em uma teoria quântica de campos. De fato existem mecanismos que permitem obter equações de campo causais a partir de uma ação não local, como discutiremos a seguir.

Vejamos como a presença de um operador não local, em uma ação efetiva quântica, pode determinar se uma teoria obedece ou não ao princípio físico da causalidade. Primeiramente, para compreender o significado da ação efetiva quântica, consideremos como exemplo o caso do espaço-tempo curvo, em que a métrica é vista como um campo clássico. Pode-se mostrar que, nesse caso, a ação efetiva quântica $\Gamma[g_{\mu\nu}; \phi]$ é obtida por meio de uma transformação de

Legendre (BELGACEM et al., 2018),

$$e^{i\Gamma[g_{\mu\nu};\phi]} = e^{iS_{EH}} \int D\varphi e^{iS_M[g_{\mu\nu};\phi+\varphi] - i \int \frac{\delta\Gamma[g_{\mu\nu};\phi]}{\delta\phi} \varphi}. \quad (3.61)$$

Nesta expressão S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert, S_M a ação correspondente à presença de matéria, $D\varphi$ denota uma integral sobre todas as possíveis trajetórias do campo $\varphi(x)$ e ϕ é o valor esperado do campo $\varphi(x)$ no vácuo,

$$\phi \equiv \langle 0|\varphi(x)|0\rangle. \quad (3.62)$$

Para o caso particular em que o valor esperado do campo de matéria é nulo, isto é, $\phi = 0$ e na ausência de fontes $J \equiv \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} = 0$, a equação (3.61) se reduz a

$$e^{i\Gamma[g_{\mu\nu}]} = e^{iS_{EH}} e^{i\Gamma_M} \Rightarrow \Gamma[g_{\mu\nu}] = S_{EH} + \Gamma_M \quad (3.63)$$

na qual $e^{i\Gamma_M[g_{\mu\nu}]} \equiv \int D\varphi e^{iS_M[g_{\mu\nu};\varphi]}$ é o termo de matéria da ação efetiva. Desta forma, é fácil observar que em primeira ordem a ação efetiva corresponde a ação clássica, sendo corrigida por termos quânticos subsequentes, que podem conter informação não local. Fazendo uma analogia com a equação (2.66) podemos definir o valor esperado para o estado de vácuo do tensor energia-momento, como

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\Gamma_M)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.64)$$

A variação da ação efetiva quântica (3.63) fornece as equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle. \quad (3.65)$$

O valor esperado que aparece na equação (3.65) depende das condições de contorno utilizadas na integral de caminho, que podem determinar se as equações de campo obedecem ou não ao princípio de causalidade. Em uma teoria quântica de campos é necessário distinguir entre os estados que se comportam assintoticamente como partículas livres no passado distante, chamados de “estados-*in*” e os estados que se comportam desta forma no futuro distante, chamados de “estados-*out*”. Quantidades como o valor esperado $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ são elementos de uma matriz de espalhamento que aparecem em cálculos intermediários em teoria quântica de campos, mas

usualmente não representam quantidades físicas. O motivo disto é que as condições de contorno da integral de caminho determinam se eles são calculados em estados-*in* ou estados-*out*. A integral de caminho de Feynman fornece que o valor esperado do tensor energia-momento deve ser $\langle 0_{\text{out}} | T_{\mu\nu} | 0_{\text{in}} \rangle$ que pode ser um número complexo, mesmo se o operador $T_{\mu\nu}$ for hermitiano. Além disso, um valor esperado do tipo *in-out* obedece à equações de movimento em que aparecem o propagador de Feynman, o qual não satisfaz o princípio da causalidade.

Para evitar este problema é necessário utilizar a integral de caminho de Schwinger-Keldish ou formalismo CTP (*closed-time-path*) (MITSOU, 2016; JORDAN, 1986), que fornece estados assintoticamente livres do tipo *in-in*. Para o tensor energia-momento, por exemplo, temos $\langle 0_{\text{in}} | T_{\mu\nu} | 0_{\text{in}} \rangle$ que é real para $T_{\mu\nu}$ hermitiano e representa o valor esperado deste operador para um dado instante de tempo, que é uma quantidade física. O valor esperado do tipo *in-in* faz com que as equações de movimento obedeçam as relações de causalidade, já que neste caso apenas o propagador retardado aparecerá nas equações de campo. A ideia básica do procedimento de Schwinger-Keldish é integrar ao longo de trajetórias que partem do passado para o futuro e retornam novamente ao passado, o que produz equações efetivas de campo que são satisfeitas pelo valor esperado dos operadores.

Para compreender melhor a diferença entre o formalismo de Schwinger-Keldish e a integral de caminho de Feynman, consideremos a amplitude de espalhamento dada por (MITSOU, 2016)

$$\langle \Psi_{\text{out}} | \hat{\phi} | \Psi_{\text{in}} \rangle \sim \int D\varphi(t) \Psi_{\text{out}}^* (\varphi(t_f)) \varphi(t) \Psi_{\text{in}} (\varphi(t_i)) e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt L}, \quad (3.66)$$

em que $D\varphi(t) = \prod_{t \in [t_i, t_f]} d\varphi(t)$ representa a integração sobre todas as trajetórias possíveis para o campo φ em todo o intervalo de tempo $[t_i, t_f]$, o estado $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ representa o sistema no tempo t_i e o estado $\langle \Psi_{\text{out}} |$ no tempo t_f e $L(t)$ é a lagrangiana fundamental da teoria. Para o estado de vácuo no espaço tempo de Minkowski não há distinção entre os estados inicial e final, isto é, $|0_{\text{in}}\rangle = |0_{\text{out}}\rangle = |0\rangle$. No entanto isto não ocorre em situações mais gerais, de forma que o estado de vácuo no passado será diferente do estado de vácuo futuro. Como consequência disto temos

$$\langle \Psi_{\text{out}} | \hat{\phi} | \Psi_{\text{in}} \rangle \neq \langle \Psi_{\text{in}} | \hat{\phi}^\dagger | \Psi_{\text{out}} \rangle = (\langle \Psi_{\text{out}} | \hat{\phi} | \Psi_{\text{in}} \rangle)^\dagger, \quad (3.67)$$

ou seja, a quantidade $\langle \Psi_{\text{out}} | \hat{\phi} | \Psi_{\text{in}} \rangle$ não é real, mesmo se $\hat{\phi}$ for hermitiano. De fato, a quantidade física observável é a probabilidade associada à amplitude de espalhamento, dada por

$$|\langle \Psi_{\text{out}} | \hat{\phi} | \Psi_{\text{in}} \rangle|^2 = \langle \Psi_{\text{in}} | \left(\hat{\phi}^\dagger | \Psi_{\text{out}} \rangle \langle \Psi_{\text{out}} | \hat{\phi} \right) | \Psi_{\text{in}} \rangle. \quad (3.68)$$

Esta quantidade é real e causal, pois somente os estados tipo *in* aparecem na expressão e assim apenas o propagador retardado está presente nos cálculos. Apesar disso, as equações de movimentos derivadas a partir da ação efetiva quântica para o valor esperado $\langle \Psi_{\text{out}} | \hat{\phi} | \Psi_{\text{in}} \rangle$ definido equação (3.66), não respeitam ao princípio de causalidade, já que a integral de caminho depende do tempo anterior t_i e posterior t_f ao tempo t .

Para obtermos equações de movimento que obedeçam a causalidade para o campo escalar real, é preciso considerar a ação efetiva quântica correspondente ao valor esperado $\langle \Psi_{\text{in}} | \hat{\phi}(t) | \Psi_{\text{in}} \rangle$. Para isso é necessário que o estado $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ correspondente ao tempo t_i seja conectado ao campo $\hat{\phi}(t)$ avaliado no tempo t e em seguida associarmos o estado $\langle \Psi_{\text{in}} |$ também ao tempo t_i , retornando ao tempo inicial. A amplitude de espalhamento nesse caso, se torna

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\text{in}} | \hat{\phi}(t) | \Psi_{\text{in}} \rangle &\sim \int D\varphi_+(t) \int D\varphi_-(t) \Psi_{\text{in}}^*(\varphi(t_f)) \varphi(t) \Psi_{\text{in}}(\varphi(t_i)) \\ &\times \delta(\varphi_+(t) - \varphi_-(t)) \exp \left[i \int_{t_i}^t L_+ dt' + i \int_t^{t_i} L_- dt' \right], \end{aligned} \quad (3.69)$$

na qual, $\varphi_+(t)$ é o campo definido no intervalo $[t_i, t]$, que avança no tempo, $\varphi_-(t)$ o campo definido no intervalo $[t, t_i]$, que retorna no tempo e $L_+ = L(\varphi_+(t'))$, $L_- = L(\varphi_-(t'))$ são as lagrangianas associadas à $\varphi_+(t)$ e $\varphi_-(t)$, respectivamente. A ação efetiva quântica obtida a partir da equação (3.69) $\Gamma_{\text{in-in}}(\varphi_+, \varphi_-, t)$ é

$$\Gamma_{\text{in-in}}(\varphi_+, \varphi_-, t) = \int_{t_i}^t dt' (L_+ - L_-) + \mathcal{O}(\hbar). \quad (3.70)$$

Devido à não localidade, as correções quânticas em geral apresentam termos que contém os campos φ_+ e φ_- conectados pela função de Green retardada $G_r(t', t'')$, da forma

$$\int_{t_i}^t dt' \int_{t_i}^{t'} dt'' \varphi_+(t') G_r(t', t'') \varphi_-(t'') = \int_{t_i}^t dt' \varphi_+(t') \square^{-1} \varphi_-(t'). \quad (3.71)$$

As equações de movimento para o valor esperado dos campos $\phi_+ = \langle \Psi_{\text{in}} | \hat{\phi}_+(t) | \Psi_{\text{in}} \rangle$ e $\phi_- = \langle \Psi_{\text{in}} | \hat{\phi}_-(t) | \Psi_{\text{in}} \rangle$ são obtidas a partir do princípio variacional

$$\frac{\delta \Gamma_{\text{in-in}}}{\delta \phi_+} = 0, \quad \frac{\delta \Gamma_{\text{in-in}}}{\delta \phi_-} = 0. \quad (3.72)$$

O campo $\phi_+(t)$ avança no tempo, logo satisfaz equações causais, já o campo $\phi_-(t)$ retorna no tempo e obedece equações de movimento anti-causais, que são uma cópia das equações do campo $\phi_+(t)$, porém em ordem temporal reversa. As equações relevantes para o estudo da dinâmica são de fato as equações para o campo $\phi_+(t)$. Por definição estas duas funções devem assumir o mesmo valor para o instante de tempo t , tal que $\phi_+(t) = \phi_-(t)$, e as condições de contorno são determinadas apenas pelo tempo inicial t_i para os dois campos. Dessa forma, é necessário apenas fornecer condições iniciais, ao invés de condições de contorno para obter as equações de movimento. Veremos um exemplo disto no Capítulo 4 para o primeiro modelo de Deser-Woodard (DESER; WOODARD, 2007). Podemos então concluir que as equações de movimento obtidas a partir de uma ação efetiva quântica, que é intrinsecamente não local, podem obedecer ao princípio de causalidade e estarem bem definidas desde que o formalismo de Schwinger-Keldish seja utilizado para interpretar as integrais de caminho.

4 O MODELO DE DESER-WOODARD

4.1 Modelo I

Uma teoria mais abrangente de generalização da ação de Einstein-Hilbert por meio da adição de termos não locais a lagrangiana foi proposta em 2007 por Deser e Woodard com o objetivo de obter mecanismos que expliquem a expansão acelerada do universo, observada atualmente (DESER; WOODARD, 2007). Este modelo, o qual chamaremos aqui de DW I, consiste em adicionar uma função algébrica f arbitrária do operador d'Alembertiano inverso, atuando no escalar de curvatura R , o que é inspirado pelas correções quânticas presentes na ação efetiva como vimos na Seção 3.2.4. A lagrangiana proposta é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} R f(\square^{-1}R). \quad (4.1)$$

Inicialmente estudaremos as soluções deste modelo sob a métrica do espaço-tempo isotrópico, homogêneo, espacialmente plano e que evolui no tempo de acordo com o fator de escala $a(t)$, que é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx_i dx^i. \quad (4.2)$$

Utilizando a equação (2.62), o operador d'Alembertiano pode ser escrito como

$$\square = D_\mu D^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu). \quad (4.3)$$

O inverso deste operador atuando em uma função qualquer $W(t)$ que depende do tempo, pode ser calculado da seguinte maneira. Consideremos primeiramente a atuação do d'Alembertiano covariante em uma função auxiliar $U(t)$, de (4.3) temos que

$$\begin{aligned} \square U(t) &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu U(t)) \\ &= 3 \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \frac{d}{dt} U(t) + \frac{d^2}{dt^2} U(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

o que significa que a aplicação do operador d'Alembertiano em $U(t)$ é equivalente a

$$\square U(t) \longrightarrow \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left(a^3 \frac{d}{dt} U(t) \right). \quad (4.5)$$

Podemos então obter uma expressão para a atuação do operado inverso \square^{-1} , que é não local, em uma função $W(t)$ que satisfaz

$$\square^{-1}W(t) = U(t), \quad (4.6)$$

a qual é dada por

$$\square^{-1}W(t) = \int_{t_0}^t dt' \frac{1}{a^3(t')} \int_{t_0}^{t'} dt'' a^3(t'') W(t''). \quad (4.7)$$

Esta representação integral para o operador inverso do d'Alembertiano evidencia o caráter não local do termo $f(\square^{-1}R)$, neste caso conectando dois pontos distantes no tempo. A ação em (4.1) deve ser interpretada neste sentido, em que eventos no espaço-tempo são conectados. Note que, se acrescentarmos à equação (4.6) uma função W_0 , que é solução da equação homogênea $\square W_0 = 0$, o resultado permaneceria o mesmo, no entanto as condições de contorno permitem determinar esta solução homogênea, fixando os limites de integração em (4.7). Note que não são necessárias condições de contorno para o tempo inicial e final, fixar apenas o valor do tempo inicial t_0 já é suficiente para obter $\square^{-1}W(t)$ de forma única. Para que a causalidade seja preservada nessa descrição, é necessário que a integral em (4.7) seja realizada apenas para valores de t'' e t' menores do que t . Isto pode ser garantido inserindo uma função degrau de Heaviside $\theta(t - t')$ que é definida por

$$\theta(t - t') = \begin{cases} 0, & t < t' \\ 1, & t \geq t' \end{cases}. \quad (4.8)$$

Assim, a equação (4.7) se torna

$$\square^{-1}W(t) = \int_{t_0}^t dt' \theta(t - t') \frac{1}{a^3(t')} \int_{t_0}^{t'} dt'' \theta(t' - t'') a^3(t'') W(t''). \quad (4.9)$$

A fim de determinar a ordem de grandeza o termo $\square^{-1}R$ presente na lagrangiana (4.1), consideraremos o fato de que durante a maior parte da evolução do universo, o fator de escala evolui com alguma potência do tempo

$$a(t) \sim t^s. \quad (4.10)$$

Um universo completamente dominado por radiação corresponde à $s = \frac{1}{2}$ e um universo dominado por matéria $s = \frac{2}{3}$. A quantidade $\square^{-1}R$ pode então ser calculada a partir da integral em

(4.7). Para a geometria descrita pela métrica (4.2) em que $\kappa = 0$, o escalar de curvatura (2.118) é dado por

$$R = -6 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right), \quad (4.11)$$

assim,

$$\square^{-1}R = -6 \int_{t_0}^t dt' \theta(t-t') \frac{1}{a^3(t')} \int_{t_0}^{t'} dt'' \theta(t'-t'') (a(t'')\dot{a}^2(t'') + a(t'')^2\ddot{a}(t'')). \quad (4.12)$$

Para $t < t'$ a integral se anula, já para $t > t'$ e $t' > t''$, temos

$$\begin{aligned} \square^{-1}R &= -6 (s^2 + s(s-1)) \int_{t_0}^t dt' (t')^{-3s} \int_{t_0}^{t'} dt'' (t'')^{3s-2} \\ &= -\frac{6s(2s-1)}{(3s-1)} \left[\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) + \frac{1}{3s-1} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{3s-1} - \frac{1}{3s-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Note que s não pode ser igual à $1/3$, porém isto não é relevante para os tipos de fluidos que abordaremos neste trabalho, a saber, matéria e radiação. Substituindo o valor da potência $s = \frac{2}{3}$ que corresponde ao universo dominado por matéria, temos:

$$\square^{-1}R(t) = -\frac{4}{3} \left[\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) + \frac{t_0}{t} - 1 \right]. \quad (4.14)$$

Como condição inicial consideraremos $t_0 \approx 10^5$ anos, pois estima-se que a transição do universo dominado por radiação para o universo dominado por matéria tenha ocorrido 47000 anos após o Big Bang (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012). Até esta época a dinâmica do universo era determinada por partículas ultra relativísticas, como fótons e neutrinos. Conforme o universo se resfriou, sua constituição (em larga escala) passou a ser de núcleos atômicos, o que é usualmente denominado “matéria” em cosmologia. A idade do universo observado atualmente é da ordem de 13,8 bilhões de anos, portanto, utilizaremos $t \approx 10^{10}$ anos. Com estes valores numéricos temos que

$$\square^{-1}R(10^{10}) \sim -14,0. \quad (4.15)$$

Esta constante pode ser interpretada como um parâmetro presente na densidade lagrangiana, tal qual a presença da constante cosmológica, dependendo de como será a função $f(\square^{-1}R)$. Diferentes valores numéricos podem ser obtidos introduzindo outros operadores diferenciais inversos à equação (4.1).

A variação da equação (4.1) permite compreender quais alterações a presença do termo não local produz nas equações de campo. Apresentaremos os detalhes desse cálculo no estudo do modelo da próxima seção, o resultado das equações de campo modificadas para o vácuo nesse caso são:

$$\left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square - D_\mu D_\nu \right] \{f(X) + \square^{-1} [Rf'(X)]\} + \left[\delta_\mu^{(\rho} \delta_\nu^{\sigma)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma} \right] \partial_\rho X \partial_\sigma (\square^{-1} [Rf'(X)]) = 0, \quad (4.16)$$

em que $X \equiv \square^{-1}R$.

Estas equações de campo podem ser interpretadas como correções não locais do tensor de Einstein, pois os termos adicionais contém derivadas da função $f(X)$, que serão pequenos quando $f(X)$ varia lentamente. A função algébrica $f(X)$ é arbitrária, em (DESER; WOODARD, 2007) há o estudo ilustrativo de uma classe de modelos em que foi escolhida

$$f(X) = Ce^{-\frac{3}{4}kX}, \quad (4.17)$$

na qual k e C são parâmetros adimensionais que devem ser estimados a partir de dados experimentais. Esta função é denominada *função de distorção não local* e aparece em diversos modelos de gravidade modificada como uma função livre (WOODARD, 2014). A evolução do universo tal qual descrita pelo modelo Λ CDM pode ser reconstruída a partir do ajuste correto desta função. Por exemplo, a escolha de $k = 0.1$ e $C = 0.2$ resulta em um valor correto para o tempo que marca o início da existência de matéria de forma predominante no universo.

Neste primeiro modelo Deser e Woodard encontraram que os termos não locais contém a informação correta do início da transição do universo dominado por radiação para o universo dominado por matéria, não necessitando de um ajuste fino da forma como é feito nos modelos locais. De acordo com os autores, a escolha dos parâmetros C e k como ~ 1 não representa um ajuste fino. Consequentemente, este modelo permite a descrição da expansão acelerada do universo começando com o universo dominado pela energia do vácuo e não imediatamente após a inflação. Contudo, este modelo não foi derivado de fenômenos quânticos realistas (i.e. diretamente de uma ação efetiva quântica), mas apenas inspirado pela não localidade presente em correções de ordem superior da ação efetiva. Há ainda o efeito indesejado de que o termo $\square^{-1}R$ não alterna de sinal, sendo estritamente negativo. Se este termo fosse negativo em esca-

las cosmológicas e positivo em escalas pequenas de comprimento (BELGACEM et al., 2019), alguns efeitos indesejáveis para o modelo cosmológico seriam evitados (veja a discussão sobre o mecanismo de blindagem na Seção 4.2.1). Este modelo é considerado de natureza puramente fenomenológica, e deixou em aberto a possibilidade para o estudo de outra ação que apresente não localidade de forma similar. Desde então diversos trabalhos seguiram esta proposta sugerindo alterações ao modelo original de Deser-Woodard (KOIVISTO, 2008; MAGGIORE; MANCARELLA, 2014; CHEN; CHEN; PARK, 2019).

4.2 Modelo II

O modelo gravitacional de Deser-Woodard aprimorado (DESER; WOODARD, 2019) da mesma forma como o anterior, também modifica minimamente a ação de Einstein-Hilbert, porém agora são introduzidos dois campos escalares auxiliares na densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{NL} = \frac{1}{16\pi G} R [1 + f(Y)], \quad (4.18)$$

em que,

$$\begin{aligned} Y &= \square^{-1} g^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X \\ X &= \square^{-1} R. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Aqui $\square = D_\mu D^\mu$ é o operador d'Alembertiano e R é o escalar de curvatura. Neste trabalho nos referiremos à este modelo como DW II. Como veremos a seguir, o efeito da constante cosmológica aparece naturalmente da variação desta ação, não sendo necessário introduzir como um termo extra na lagrangiana. A necessidade de inserir o termo $g^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X$ na ação, surgiu dos efeitos da parte não local para a descrição da inflação primordial e para os testes do Sistema Solar (WOODARD, 2014; DESER; WOODARD, 2019). Este termo é negativo na escala do Sistema Solar e positivo na escala cosmológica, o que torna possível restringir os efeitos não locais apenas para este caso. Este efeito, denominado "blindagem" será discutido na Seção 4.2.1.

Para tornar esta ação local, podemos introduzir os campos auxiliares U e V como multiplicadores de Lagrange, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{16\pi G} [R(1 + f(Y)) + U(R - \square X) + V(g^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X - \square Y)] \\ &= \frac{1}{16\pi G} [R(1 + f(Y) + U) - U\square X - V\square Y + g^{\mu\nu} V \partial_\mu X \partial_\nu X]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Usando a equação (4.3) podemos eliminar os termos de superfície presentes em $U\square X$ e $V\square Y$

$$U\square X = U \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu X) = \partial_\mu [U \partial^\mu X] - \partial_\mu U \partial^\mu X, \quad (4.21)$$

de forma que os termos que irão contribuir para a ação serão:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} [R(1 + f(Y) + U) + g^{\mu\nu} E_{\mu\nu}], \quad (4.22)$$

em que $E_{\mu\nu} = \partial_\mu U \partial_\nu X + \partial_\mu V \partial_\nu Y + V \partial_\mu X \partial_\nu X$. Considerando X, Y, U e V como quatro campos escalares independentes, podemos afirmar que esta ação é local. Como discutimos anteriormente, estes campos escalares auxiliares não possuem condições de contorno arbitrárias, o que resultaria em graus de liberdade extras para a teoria. A partir da equação (4.20) a variação da ação com relação à U será

$$\frac{\delta S}{\delta U} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [R - \square X] = 0, \quad (4.23)$$

da qual segue que

$$R - \square X = 0. \quad (4.24)$$

Analogamente, a variação de (4.20) com respeito ao campo V fornece

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X - \square Y = 0. \quad (4.25)$$

Consideremos agora a variação da ação com relação ao campo X , com a condição de que δX seja nulo na superfície, temos

$$\frac{\delta S}{\delta X} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\square U - \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} [\partial_\mu (\sqrt{-g} V \partial_\nu X) + \partial_\nu (\sqrt{-g} V \partial_\mu X)] \right\} = 0,$$

logo, a equação para U será

$$U = -2\square^{-1} [D^\mu (VD_\mu X)]. \quad (4.26)$$

Por fim, a variação da ação com relação a Y sob a condição $\delta Y = 0$ na superfície, nos fornece uma equação para o campo V :

$$\frac{\delta S}{\delta Y} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R \frac{\partial f(Y)}{\partial Y} - \square V \right] = 0, \quad (4.27)$$

ou seja,

$$V = \square^{-1} \left[R \frac{\partial f(Y)}{\partial Y} \right]. \quad (4.28)$$

Para obter as equações de campo modificadas pelo termo não local, podemos variar a equação (4.22) com relação à métrica $g_{\mu\nu}$. Note que o primeiro termo fornece o tensor de Einstein sem a constante cosmológica. Usando a equação (2.52) para $\delta(\sqrt{-g}R)$, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} - D_\nu D_\mu + g_{\mu\nu} D^\beta D_\beta \right) \delta g^{\mu\nu} (1 + f(Y) + U) \right. \\ \left. + \left(\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta} \right) E_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Renomeando os índices no segundo termo e considerando que $\delta g^{\mu\nu} = 0$ na superfície, resulta

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[(-D_\mu D_\nu + g_{\mu\nu} \square + G_{\mu\nu}) (1 + f(Y) + U) \right. \\ \left. + E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Como a variação $\delta g^{\mu\nu}$ é simétrica, podemos considerar apenas a parte simétrica dos demais termos. Adicionando um termo correspondente à presença de matéria à ação, as equações de campo modificadas derivadas a partir da lagrangiana local (4.22) são

$$(G_{\mu\nu} - D_\mu D_\nu + g_{\mu\nu} \square) (1 + U + f(Y)) + E_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.31)$$

na qual o tensor energia momento não inclui o termo correspondente a energia escura. Os índices entre parênteses denotam a parte simétrica

$$E_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu}). \quad (4.32)$$

Para que o modelo não possua mais equações independentes do que a RG e para que a lei de conservação $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ seja válida, a identidade de Bianchi deve ser obedecida, isto é,

$$D^\mu \left[(G_{\mu\nu} - D_\mu D_\nu + g_{\mu\nu} \square) (1 + U + f(Y)) + E_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma} \right] = 0 \quad (4.33)$$

Para verificar se a identidade de Bianchi permanece válida podemos usar o fato de que as equações de campo (4.31) são covariantes, de forma que $\delta S = 0$ é verdadeira em qualquer sistema de coordenadas. Particularmente, em um sistema de coordenadas inercial (especialmente plano e independente do tempo) temos $D_\mu \rightarrow \partial_\mu$ e $R = 0$, logo, todos os termos em (4.33) são nulos.

Devido ao princípio da covariância geral, se a identidade de Bianchi é satisfeita no sistema de coordenadas inercial, ela também é obedecida em qualquer sistema de coordenadas. Portanto, esse modelo possui o mesmo número de equações independentes da RG e a lei de conservação para o tensor energia momento é válida.

4.2.1 Efeito de blindagem

O modelo II de Deser-Woodard foi proposto com o intuito de explicar a expansão acelerada do universo introduzindo termos não locais à ação, inspirado por correções quânticas não locais que surgem em uma ação efetiva. No entanto, é conhecido da cosmologia do modelo padrão que no período em que o universo era dominado por radiação ele não se expandia aceleradamente, logo, é necessário que os termos não locais sejam desprezíveis neste regime. A transição do universo dominado por radiação para o universo dominado por matéria ocorreu há aproximadamente 47000 anos após o Big Bang e é caracterizada pela lei de potência para o fator de escala $a(t) \sim t^{1/2}$. O escalar de curvatura para a geometria plana (4.11), nesta era é nulo ($R = 0$). A partir das definições de X e Y em (4.19) vemos que ambos são proporcionais ao escalar de curvatura, logo, são nulos na era de domínio da radiação. Assim, é necessário apenas que tenhamos $f(0) = 0$ para que, na era de domínio da radiação, não haja contribuição do termo não local.

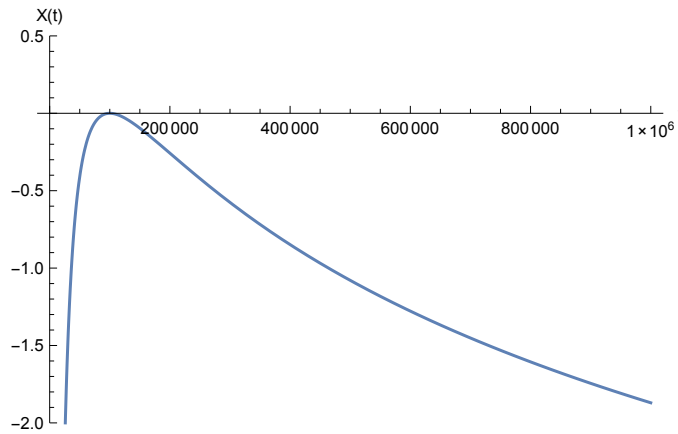
Além disso, o efeito dos termos não locais deve ser relevante apenas na escala cosmológica, sendo desprezível para sistemas que envolvem distâncias relativamente pequenas como o Sistema Solar, ou o sistema Terra-Lua. A maioria dos resultados experimentais mencionados na introdução desse trabalho que confirmam a RG são realizados na escala do Sistema Solar, portanto, o modelo DW II deve reproduzir os resultados teóricos da Relatividade Geral no regime do Sistema Solar. A escala cosmológica é caracterizada pela métrica FLRW discutida na Seção 2.6.2 que possui dependência temporal e considera o universo homogêneo. Em contrapartida, para sistemas fortemente ligados gravitacionalmente, com simetria esférica, e que envolvem distâncias muito menores como o sistema Terra-Lua, a descrição mais adequada é a métrica de Schwarzschild, a qual não depende do tempo. Assim, introduz-se o efeito de blindagem (*screening*) que consiste em impor que a função de distorção não local $f(Y)$ seja nula na escala do Sistema Solar. Esse efeito pode ser obtido caso o termo não local Y seja negativo na escala do Sistema Solar, sendo necessário apenas que $f(Y)$ seja contínua e igual à zero para $Y < 0$.

Para verificar o sinal de Y em cada escala devemos inicialmente verificar qual o sinal de X nestas escalas diferentes (veja a equação (4.19)). Na Seção 4.1 calculamos uma expressão para $X(t)$ de acordo com a métrica (4.2), que é a solução FLRW para um espaço-tempo plano, o resultado é

$$X(t) = -\frac{4}{3} \left[\ln \left(\frac{t}{t_0} \right) + \frac{t_0}{t} - 1 \right], \quad (4.34)$$

em que $t_0 = 10^5$ anos é o tempo em que o universo passou a ser dominado por radiação. Como mostra a Figura, $X(t)$ é estritamente negativo, possui um ponto de máximo global em $t = t_0 = 10^5$, tal que $X(t_0) = 0$. Podemos então concluir que na escala cosmológica $X < 0$.

Figura 4.1 – Gráfico do campo auxiliar X em função do tempo cosmológico, para o caso da métrica FLRW. Fonte: Autor (2021).



Para avaliar X na escala do Sistema Solar devemos notar que o operador d'Alembertiano possui diferentes sinais para as componentes espaciais e temporal em nossa assinatura da métrica $\text{diag}(+ - - -)$, temos

$$\square = \partial_t^2 - \nabla^2. \quad (4.35)$$

Neste regime, as derivadas espaciais são relevantes $-\nabla^2 X(\vec{r}) \simeq R$, e a contribuição dominante do escalar de curvatura vem da densidade de energia ρ e pode ser determinada a partir do traço das equações de campo de Einstein (BELGACEM et al., 2019)

$$R \simeq -8\pi G\rho. \quad (4.36)$$

Então, na escala do Sistema Solar, temos:

$$\nabla^2 X(\vec{r}) = 8\pi G\rho(\vec{r}), \quad (4.37)$$

que é a equação de Poisson para X sujeita à uma fonte ρ . A solução desta equação pode ser obtida para o sistema Sol-Terra, por exemplo, a densidade de energia pode ser modelada utilizando uma função delta de Dirac

$$\rho(\vec{r}) = M\delta^{(3)}(\vec{r}), \quad (4.38)$$

em que a massa do Sol M está localizada em um único ponto. A solução é obtida utilizando a função de Green $\Delta(\vec{r} - \vec{r}')$ tal que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Delta(\vec{r} - \vec{r}') &= 8\pi G \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \\ \Delta(\vec{r} - \vec{r}') &= -2G \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Assim, na escala do Sistema Solar a solução do campo auxiliar X é dada por:

$$\begin{aligned} X(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}' \Delta(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') \\ &= -2G \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

que é negativo para uma fonte $\rho > 0$. Podemos então concluir que o campo X permanece negativo tanto na escala cosmológica como na escala do Sistema Solar.

Analisemos agora o sinal de $\square Y = g^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X$. Na escala cosmológica, temos $X < 0$ e depende apenas do tempo, logo,

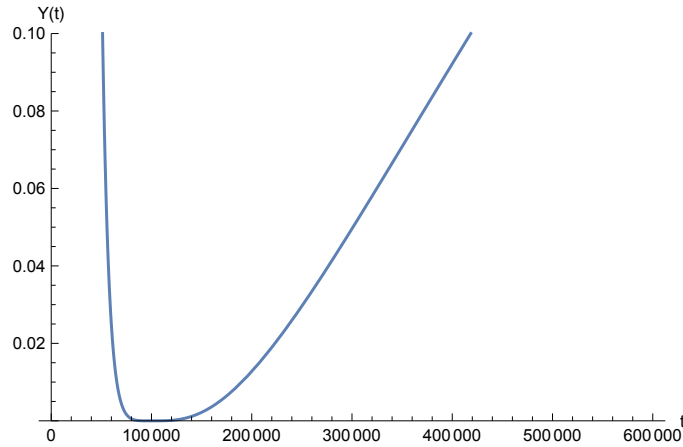
$$\square Y = g^{00} \partial_t X \partial_t X > 0, \quad (4.41)$$

seguindo a assinatura da métrica $\text{diag}(+ - - -)$. Usando a equação (4.7) e a expressão para X em (4.34) podemos calcular de forma exata Y para a métrica (4.2), o qual é dado por

$$Y(t) = \frac{8(t_0(75t^4 - 25t^3 t_0 + t_0^4) + 30t^5 \ln[t])}{675t^5} - \frac{8}{225}(17 + 10 \ln[t_0]). \quad (4.42)$$

Logo, na escala cosmológica Y é estritamente positivo, como pode ser visualizado na Figura 4.2, possui um ponto de mínimo global em $t = t_0 = 10^5$, tal que $Y(t_0) = 0$.

Figura 4.2 – Gráfico do campo auxiliar Y em função do tempo cosmológico, para o caso da métrica FLRW. Fonte: Autor (2021).



A fim de determinar o sinal de Y na escala do Sistema Solar, consideraremos a métrica diagonal e independente do tempo, tal como a métrica de Schwarzschild, embora uma métrica não diagonal também forneça o mesmo resultado (DESER; WOODARD, 2019). Assim, temos

$$\square Y(\vec{r}) = g^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X \quad (4.43)$$

$$(-\nabla^2) Y(\vec{r}) = g^{11} (\partial_1 X)^2 + g^{22} (\partial_2 X)^2 + g^{33} (\partial_3 X)^2, \quad (4.44)$$

pois X e Y são independentes do tempo neste setor. Seguindo a convenção da assinatura da métrica, coeficientes g^{ii} são negativos, logo,

$$\nabla^2 Y > 0. \quad (4.45)$$

Como vimos na equação (4.40), se $\nabla^2 Y > 0$ então $Y < 0$. Logo, $Y < 0$ para o regime do Sistema Solar, de forma que o mecanismo de blindagem pode ser utilizado para esse modelo. Os efeitos não locais introduzidos não alteram os resultados da Relatividade Geral para o Sistema Solar, desde que a função de distorção não local seja zero para seu argumento negativo de forma contínua. É necessário fazer uma ressalva quanto a validade destes resultados. No cálculo apresentado acima foi utilizado o fato que não há nenhuma dependência temporal nas soluções para o sistema fortemente ligado gravitacionalmente (Sistema Solar). Contudo, é possível que uma dependência temporal relativamente pequena ainda permaneça nesse regime, conforme pode-se mostrar introduzindo uma perturbação à métrica de FLRW (BELGACEM et al., 2019). Na Seção 4.3 discutiremos essa possibilidade mais detalhadamente.

4.2.2 Função de distorção não local

Tendo estabelecido que o modelo de DW II está de acordo com os testes do Sistema Solar, utilizando o mecanismo de blindagem, ainda é necessário que este modelo reproduza os resultados do modelo Λ CDM na escala cosmológica. Para isto, a função de distorção não local $f(Y)$ deve ser obtida através do procedimento de reconstrução (DESER; WOODARD, 2019), que impõe a evolução cosmológica descrita pelas equações de Friedmann calculadas na Seção 2.6.3. Para realizar o procedimento de reconstrução deve-se notar que, para a métrica (4.2), o operador d'Alembertiano atuando em um escalar que depende apenas do tempo $W(t)$, é dado por

$$\begin{aligned}\square W(t) &= g^{\mu\nu} D_\mu (D_\nu W(t)) \\ &= g^{\mu\nu} \left[\partial_\mu (\partial_\nu W(t)) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} (\partial_\alpha W(t)) \right].\end{aligned}\quad (4.46)$$

Para o espaço tempo plano evoluindo no tempo, que estamos considerando aqui, as únicas componentes da conexão com índice contravariante zero e não nulas, são (veja a equação (2.102)):

$$\Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = a\dot{a}.\quad (4.47)$$

Temos então que

$$\square W(t) = \partial_t^2 W(t) + 3H\partial_t W(t),\quad (4.48)$$

na qual $H = \frac{\dot{a}}{a}$ é o parâmetro de Hubble. O escalar de curvatura e as componentes do tensor de Ricci podem ser encontrados particularizando o resultado em (2.114) para o espaço-tempo plano, isto é, $\kappa \rightarrow 0$, temos:

$$R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right),\quad (4.49)$$

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a},\quad (4.50)$$

$$R_{11} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2.\quad (4.51)$$

Assim, a componente 00 das equações de campo (4.31) é:

$$(3H^2 + 3H\partial_t)(1 + U + f(Y)) + \frac{1}{2}(\dot{X}\dot{U} + \dot{Y}\dot{V} + V\dot{X}^2) = 8\pi G\rho, \quad (4.52)$$

e as componentes espaciais não nulas fornecem a mesma equação, por exemplo a componente 11 é

$$- [2\dot{H} + 3H^2 + \partial_t^2 + 2H\partial_t](1 + U + f(Y)) + \frac{1}{2}(\dot{X}\dot{U} + \dot{Y}\dot{V} + V\dot{X}^2) = 8\pi Gp. \quad (4.53)$$

Subtraindo as equações (4.52) e (4.53) temos uma equação diferencial para a função $F(t) \equiv 1 + U(t) + f(Y(t))$

$$[2\dot{H} + 6H^2 + \partial_t^2 + 5H\partial_t] F(t) = 8\pi G(\rho - p). \quad (4.54)$$

O processo de *reconstrução* consiste em escolher a densidade de energia e a pressão, de forma a exigir que este modelo reproduza os resultados da Λ CDM. Isto é realizado por meio das equações de Friedmann usuais da Relatividade Geral, na presença da constante cosmológica (2.152). Escrevendo-as em termos do parâmetro de Hubble, tem-se

$$3H^2 - \Lambda = 8\pi G\rho \quad (4.55)$$

$$2\dot{H} + 3H - \Lambda = -8\pi Gp. \quad (4.56)$$

Dessa forma, podemos obter

$$[2\dot{H} + 6H^2 + \partial_t^2 + 5H\partial_t] F(t) = 3H^2 - 2\Lambda + 2\dot{H} + 3H \quad (4.57)$$

e assim encontrarmos uma expressão para F em função de t explicitamente. O próximo passo é usar a definição de F e as equações dos campos escalares U e V , dadas pelas equações (4.26) e (4.28) respectivamente, para obter suas soluções numéricas. Note que Y e X já são conhecidos como funções do tempo cosmológico t pelas equações (4.34) e (4.42). A função de distorção não local é calculada a partir de $f(t) = F(t) - 1 - U(t)$, o que permite o cálculo de $f(Y)$. Realizaremos este cálculo para o caso do universo com ricochete, na Seção 4.4. Os autores das referências (DESER; WOODARD, 2019; DING; DENG, 2019) seguiram este procedimento e

utilizaram alguns artifícios matemáticos¹ para calcular a função de distorção não local numericamente. Os autores fizeram também um ajuste exponencial a partir do gráfico da solução numérica, o que resultou em

$$f(Y) \simeq e^{1.1(Y-16.7)}. \quad (4.58)$$

A expressão para o comportamento assintótico de $f(Y)$ para $Y \rightarrow 0$ é

$$f(Y) = \frac{\Omega_\Lambda \Omega_R^3}{\Omega_M} \left\{ -\frac{128}{105} Y^2 \ln Y + O(Y^2) \right\}, \quad (4.59)$$

o que significa que não há descontinuidade ao impor a condição de que $f(Y) = 0$ para $Y < 0$, necessária para que o mecanismo de blindagem seja satisfeito. O símbolo Ω_R denota a fração do parâmetro de densidade correspondente à radiação e Ω_M a fração correspondente à matéria, tal que $\Omega_R + \Omega_M = \Omega$, definido em (2.153).

4.3 Teoria de perturbações

A fim de compararmos as predições feitas pelo modelo DW II com observações experimentais e ainda verificarmos a possível presença da dependência temporal nas correções não locais na escala do Sistema Solar, consideraremos as soluções perturbativas do modelo DW II. Para isto, desenvolveremos a formação de estruturas, partindo da métrica perturbativa no *gauge* de Newton (ou transversal), a qual é definida por

$$ds^2 = (1 + 2\Psi(\vec{r}, t)) dt^2 - (1 + 2\Phi(\vec{r}, t)) a^2(t) dx^i dx_i. \quad (4.60)$$

Note que os potenciais Φ e Ψ possuem dependência espacial e temporal. A validade desta métrica para o estudo da influência gravitacional das grandes estruturas do universo na escala do Sistema Solar, no contexto das teoria não locais, tem sido discutida recentemente (BELGACEM et al., 2019). Tanto argumentos analíticos, como simulações computacionais, tem evidenciado que a métrica (4.60) fornece uma ótima aproximação para as perturbações escalares, englobando a solução cosmológica de FLRW e a solução estática de Schwarzschild.

Mantendo até primeira ordem de perturbações, as componentes não nulas da conexão para esta métrica são

¹ Na verdade, em (DESER; WOODARD, 2019; DING; DENG, 2019) os autores escreveram as equações em termos do parâmetro $N = \ln(a_0/a)$ e obtiveram outra equação diferencial usando as equações para X, Y, U e V .

$$\Gamma^0_{00} = \partial_t \Psi \quad (4.61)$$

$$\Gamma^0_{ij} = a^2 (H + \partial_t \Phi + 2H(\Phi - \Psi)) \delta_{ij} \quad (4.62)$$

$$\Gamma^0_{k0} = \partial_k \Psi \quad (4.63)$$

$$\Gamma^k_{00} = a^{-2} \partial^k \Psi \quad (4.64)$$

$$\Gamma^i_{0j} = (H + \partial_t \Phi) \delta^i_j \quad (4.65)$$

$$\Gamma^i_{jk} = -\delta^{il} \partial_l \Phi \delta_{jk} + \partial_j \Phi \delta_k^i + \partial_k \Phi \delta_j^i, \quad (4.66)$$

e as componentes 00 e ij do tensor de Ricci são dadas por

$$R_{00} = a^{-2} \nabla^2 \Psi + 3H(\partial_t \Psi - 2\partial_t \Phi) - 3\dot{H} - 3\partial_t^2 \Phi - 3H^2 \quad (4.67)$$

$$R_{ij} = a^2 [3H^2 + \dot{H} - H\partial_t(\Psi - 6\Phi) + \partial_t^2 \Phi + 2(3H^2 + \dot{H})(\Phi - \Psi)] \delta_{ij} \\ - \partial_i \partial_j (\Phi + \Psi) - \nabla^2 \Phi \delta_{ij}. \quad (4.68)$$

Expandindo o tensor de Einstein como $G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}$, na qual $\bar{G}_{\mu\nu}$ são os termos de ordem zero, segue diretamente que as componentes do tensor de Einstein são

$$G_{00} = 3H^2 + 6H\partial_t \Phi - 2a^{-2} \nabla^2 \Phi \quad (4.69)$$

$$G_{ij} = a^2 [-(3H^2 + 2\dot{H})(1 + 2\Phi - 2\Psi) - H\partial_t(2\Psi + 6\Phi) - 2\partial_t^2 \Phi] \delta_{ij} \\ + \nabla^2 (\Phi + \Psi) \delta_{ij} - \partial_i \partial_j (\Phi + \Psi), \quad (4.70)$$

As equações de campo do modelo DW II (4.31) podem ser escritas como $G_{\mu\nu} + \Delta G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, em que o símbolo Δ denota a correção não local e não deve ser confundido com a parte perturbativa, representada pelo símbolo δ . Assim, temos:

$$\Delta G_{\mu\nu} = (U + f(Y)) G_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - D_\mu D_\nu)(U + f(Y)) + E_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma}. \quad (4.71)$$

Para obter os termos em perturbações dos campos auxiliares, consideraremos que a parte perturbativa possa apresentar dependência espacial e temporal

$$U(\vec{r}, t) = U_c(t) + \delta U(\vec{r}, t), \quad X(\vec{r}, t) = X_c(t) + \delta X(\vec{r}, t), \quad (4.72)$$

$$V(\vec{r}, t) = V_c(t) + \delta V(\vec{r}, t), \quad Y(\vec{r}, t) = Y_c(t) + \delta Y(\vec{r}, t), \quad (4.73)$$

na qual a letra c subscrita indica que o campo deve ser avaliado na escala cosmológica, dependendo apenas do tempo. A razão de assumirmos que a parte perturbativa dos campos X, Y, U e V possui dependência espacial é que, os potenciais perturbativos introduzidos na métrica (4.60) dependem de \vec{r} . Além disso, é necessário obter a expressão perturbativa para o operador d'Alembertiano. Assim, expandindo em primeira ordem sobre a métrica (4.60), resulta:

$$\begin{aligned} \square X(\vec{r}, t) &= (1 + 2\Psi)^{-1} \partial_t^2 X - a^{-2} (1 + 2\Phi)^{-1} \nabla^2 X - \partial_t \Psi \partial_t X + (3H + 3\partial_t \Phi - 6H\Psi) \partial_t X \\ &+ a^{-2} [\partial_x(\Psi + \Phi) \partial_x X + \partial_y(\Psi + \Phi) \partial_y X + \partial_z(\Psi + \Phi) \partial_z X]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Substituindo as equações (4.74), (4.73) em (4.71) e expandindo as demais derivadas sob a métrica (4.60), temos que a expressão perturbativa para a correção não local, em primeira ordem, da componente 00 é

$$\begin{aligned} \delta \Delta G_{00} &= \left[3\partial_t \Phi \partial_t + 6H \partial_t \Phi - \partial_t^2 - 2 \frac{\nabla^2}{a^2} \Phi \right] (U_c + f) \\ &+ \left[-\frac{\nabla^2}{a^2} + 3H \partial_t + 3H^2 \right] \left(\delta U + \frac{df}{dY} \delta Y \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\dot{X}_c \delta \dot{U} + \dot{U}_c \delta \dot{X} + \dot{Y}_c \delta \dot{V} + \dot{V}_c \delta \dot{Y} + 2V_c \dot{X}_c \delta \dot{X} + \delta V X_c^2 \right). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Para completar as equações de campo perturbativas, expandiremos o tensor energia-momento como

$$\delta T_{00} = \rho_c \frac{\delta \rho}{\rho_c} \quad (4.76)$$

$$= \rho_c \delta \quad (4.77)$$

na qual o parâmetro de flutuação de massa (também chamado de contraste de densidade) é definido por $\delta \equiv \frac{\delta \rho}{\rho_c}$. Nesta análise, nos restringiremos ao limite abaixo do horizonte cosmológico ($k \gg \dot{a}$ ou $\frac{k}{aH} \gg 1$), isto é, em que as derivadas espaciais são mais relevantes do que as temporais, assim, a equação de campo 00 em primeira ordem de perturbações é:

$$\delta G_{00} + \delta \Delta G_{00} = 8\pi G \delta T_{00} \quad (4.78)$$

$$-2\frac{\nabla^2}{a^2}\Phi - 2\frac{\nabla^2}{a^2}\Phi(U_c + f) - \frac{\nabla^2}{a^2}\left(\delta U + \frac{df}{dY}\delta Y\right) = 8\pi G\rho\delta. \quad (4.79)$$

No espaço de Fourier, deve-se substituir $-\nabla^2 \rightarrow k^2$, logo,

$$2\Phi(1 + U_c + f) + \delta U + \frac{df}{dY}\delta Y = 8\pi G\frac{a^2}{k^2}\rho\delta. \quad (4.80)$$

A partir daqui consideraremos o limite abaixo do horizonte cosmológico $\frac{k}{aH} \gg 1$ em todas as expressões. Para as componentes ij da variação do tensor de Einstein (4.70), temos:

$$\delta G_{ij} = (-a^2k^2\delta_{ij} + k_ik_j)(\Phi + \Psi). \quad (4.81)$$

A fim de simplificar a expressão final das equações de campo, pode-se contrair (4.81) com o operador de projeção longitudinal $\left(\frac{k^ik^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\right)$

$$\left(\frac{k^ik^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\right)\delta G_{ij} = \frac{2}{3}k^2(\Phi + \Psi),$$

O operador de projeção extrai a componente longitudinal da parte tensorial da métrica perturbativa, no *gauge* síncrono. Sendo assim, ele relaciona a parte perturbativa escalar no *gauge* de Newton com a componente longitudinal da perturbação no *gauge* síncrono (MA; BERTSCHINGER, 1995). A expansão perturbativa das componentes ij da contribuição não local, fornece

$$\delta\Delta G_{ij} = (-k^2\delta_{ij} + k_ik_j)\left[(U_c + f)(\Phi + \Psi) + \left(\delta U + \frac{df}{dY}\delta Y\right)\right], \quad (4.82)$$

atuando com o operador de projeção longitudinal, resulta,

$$\left(\frac{k^ik^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\right)\delta\Delta G_{ij} = \frac{2}{3}k^2\left[(U_c + f)(\Phi + \Psi) + \left(\delta U + \frac{df}{dY}\delta Y\right)\right]. \quad (4.83)$$

Seguindo nossa convenção de sinais para a variação do tensor energia-momento temos:

$$T_j^i = -p\delta_j^i + \Sigma_j^i, \quad (4.84)$$

em que $\Sigma^i_j \equiv T^i_j - \frac{\delta^i_j}{3} T^k_k$ é a parte do tensor energia momento com traço nulo. Além disso, definindo σ tal que,

$$(\rho + p) \sigma \equiv \left(\frac{k^i k^j}{k^2} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \right) \Sigma_{ij}, \quad (4.85)$$

encontra-se que

$$\left(\frac{k^i k^j}{k^2} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \right) \delta T_{ij} = (\rho + p) \sigma. \quad (4.86)$$

Com estes resultados pode-se calcular a componente longitudinal das equações de campo ij , considerando apenas os termos dominantes no limite $k \gg aH$, temos:

$$\frac{2}{3} k^2 (\Phi + \Psi) + \frac{2}{3} k^2 \left[(U_c + f) (\Phi + \Psi) - \left(\delta U + \frac{df}{dY} \delta Y \right) \right] = (\rho + p) \sigma. \quad (4.87)$$

Em um universo dominado por matéria a contribuição da radiação, que fornece a anisotropia ao tensor energia momento, é menor do que a contribuição de matéria e energia escura, assim, segue que $\sigma \approx 0$, logo:

$$(\Phi + \Psi) (1 + U_c + f) - \left(\delta U + \frac{df}{dY} \delta Y \right) = 0. \quad (4.88)$$

As equações (4.80) e (4.88) são as equações de campo perturbativas para o modelo DW II no limite abaixo do horizonte cosmológico, porém, elas não são suficientes para determinar os potenciais perturbativos introduzidos na métrica (4.60). Para isto é necessário obter as variações dos campos escalares por meio de suas definições introduzidas como vínculos na ação modificada (4.20).

4.3.1 Equações perturbativas dos campos auxiliares

O próximo passo para obter as expressões para Φ e Ψ é encontrar a expressão perturbativa para as equações dos campos escalares auxiliares

$$\square X = R \quad (4.89)$$

$$\square Y = g^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X \quad (4.90)$$

$$\square U = -2D^\mu (V D_\mu X) \quad (4.91)$$

$$\square V = R \frac{\partial f(Y)}{\partial Y} \quad (4.92)$$

as quais, juntamente com as equações de campo (4.80) e (4.88), fornecem o conjunto de seis equações e seis variáveis $\delta X, \delta Y, \delta U, \delta V, \Phi, \Psi$. O resultado em primeira ordem é:

$$8\pi G \frac{a^2}{k^2} \rho \delta = 2\Phi(1 + U_c + f) + \delta U + \frac{df}{dY} \delta Y, \quad (4.93)$$

$$\delta U + \frac{df}{dY} \delta Y = (\Phi + \Psi)(1 + U_c + f), \quad (4.94)$$

$$\delta X = -2(2\Phi + \Psi), \quad (4.95)$$

$$\delta Y = 0, \quad (4.96)$$

$$\delta U = 2V_c \delta X, \quad (4.97)$$

$$\delta V = -2(2\Phi + \Psi) \frac{\partial f}{\partial Y}. \quad (4.98)$$

Eliminando δY e δU nas duas primeiras equações, temos,

$$8\pi G \frac{a^2}{k^2} \rho \delta = 2\Phi(1 + U_c + f) - 4V_c(2\Phi + \Psi) \quad (4.99)$$

$$-4V_c(2\Phi + \Psi) = (\Phi + \Psi) [1 + a^2(U_c + f)]. \quad (4.100)$$

Resolvendo algebricamente para os potenciais Φ e Ψ , resulta:

$$\Phi = \frac{4\pi G a^2 \rho \delta}{k^2(1 + f + U_c)} \frac{(1 + f + U_c + 4V_c)}{(1 + f + U_c + 2V_c)}, \quad (4.101)$$

$$\Psi = -\frac{4\pi G a^2 \rho \delta}{k^2(1 + f + U_c)} \frac{(1 + f + U_c - 8V_c)}{(1 + f + U_c + 2V_c)}, \quad (4.102)$$

em que $f \equiv f(Y_c)$. Dessa forma os potenciais ficam determinados apenas em função dos campos auxiliares, avaliados no espaço-tempo cosmológico, o que nos permite computar o parâmetro de modificação da gravidade η , definido como:

$$\eta \equiv \frac{\Phi + \Psi}{\Phi} = \frac{12V_c k^2}{a^2(1 + f + U_c + 4V_c)}. \quad (4.103)$$

É conveniente separar a contribuição devido à presença de matéria e de radiação $\rho = \rho_R + \rho_M$, pois como demonstrado na Seção 2.6.3,

$$\rho_R = \rho_{0R} a^{-4} \quad (4.104)$$

$$\rho_M = \rho_{0M} a^{-3}, \quad (4.105)$$

de forma que a densidade de matéria é o termo mais relevante no limite $k \gg aH$. Podemos reescrever as equações (4.101) e (4.102) em termos do parâmetro de densidade $\Omega^0 \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0$,

$$\Phi = \frac{3H_0^2 (\Omega_R^0 a^{-2} \rho_{0R} \delta_R + \Omega_M^0 a^{-1} \rho_{0M} \delta_M)}{2k^2 (1 + f + U_c)} \frac{(1 + f + U_c + 4V_c)}{(1 + f + U_c + 2V_c)}, \quad (4.106)$$

$$\Psi = -\frac{3H_0^2 (\Omega_R^0 a^{-2} \rho_{0R} \delta_R + \Omega_M^0 a^{-1} \rho_{0M} \delta_M)}{2k^2 (1 + f + U_c)} \frac{(1 + f + U_c - 8V_c)}{(1 + f + U_c + 2V_c)}. \quad (4.107)$$

No estudo do universo dominado por matéria pode-se desprezar a contribuição de radiação, logo,

$$\Phi = \frac{3H_0^2 (1 + f + U_c + 4V_c)}{2ak^2 (1 + f + U_c + 2V_c)} \frac{\Omega_M^0 \rho_{0M} \delta_M}{(1 + f + U_c)}, \quad (4.108)$$

$$\Psi = -\frac{3H_0^2 (1 + f + U_c - 8V_c)}{2ak^2 (1 + f + U_c + 2V_c)} \frac{\Omega_M^0 \rho_{0M} \delta_M}{(1 + f + U_c)}. \quad (4.109)$$

Nossas equações estão de acordo com o que foi obtido para o modelo DW I (NERSISYAN; CID; AMENDOLA, 2017) exceto pelas diferenças de notação, assinatura da métrica e pelas especificidades da parte não local do modelo DW II. Esta expressão também é similar ao que foi encontrado em (DING; DENG, 2019), porém há uma pequena diferença: o termo $2V_c$ no denominador aparece como $6V_c$ e o potencial Φ também é negativo. Mesmo após revisar os cálculos diversas vezes não encontramos o motivo desta discrepância, aparentemente o termo $\nabla^2 \Phi$ na equação (2.30) de (DING; DENG, 2019) deveria ser negativo. É possível que esta seja a causa da divergência dos potenciais Φ e Ψ e do contraste de densidade δ_M (veja a Figura 4.3) encontradas em (DING; DENG, 2019), pois elas são geradas pelo ponto em que o denominador $1 + f + U_c + 6V_c = 0$. Esta é uma questão que poderá ser tratada em estudos futuros, na próxima seção discutiremos a equação diferencial para o contraste de densidade de matéria δ_M .

4.3.2 Lei de conservação

A partir da lei de conservação para o tensor energia-momento $D_\mu T^\mu_\nu = 0$, pode-se obter uma equação diferencial para a perturbação da densidade de matéria δ_M . Para isto, utilizaremos o tensor energia-momento de um fluido em um referencial inercial (WEINBERG, 1972; BERTSCHINGER, 1996), cuja velocidade de escoamento é não relativística, isto é, $v_i \ll c$

$$\begin{aligned}
T^0_0 &= \rho_c + \delta\rho, \\
T^0_i &= (\rho_c + p_c)v_i = -T^i_0, \\
T^j_i &= -(p + \delta p)\delta^j_i + \Sigma^j_i.
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Note que o tensor energia-momento com dois índices contravariantes é simétrico $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, porém com um dos índices covariante há uma mudança de sinal nas componentes espaçotemporais T^i_0 , já que $T^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T_\alpha^\beta$.

A componente da lei de conservação para $\nu = 0$, expandida até a primeira ordem de perturbações, fornece

$$\dot{\delta\rho} - \partial_j(\rho_c + p_c)v^j + 3H(\delta\rho + \delta p) + 3\dot{\Phi}(\rho_c + p_c) = 0. \tag{4.111}$$

Usando que $p_c = w\rho_c$ (equação de estado para a pressão e densidade de energia na escala cosmológica) e $\frac{\delta p}{\delta\rho} = c_s^2$ é a velocidade do som no fluido, resulta

$$\dot{\delta} + \frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c}\delta + \left(3\dot{\Phi} - \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right)(1+w) + 3H(1+c_s^2)\delta = 0. \tag{4.112}$$

Pode-se usar a equação de conservação de ordem zero em perturbações $\dot{\rho}_c = -3H(\rho_c + p_c) = -3H(1+w)\rho_c$, para simplificar a relação (4.112), assim:

$$\dot{\delta} + \left(3\dot{\Phi} - \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right)(1+w) + 3H(c_s^2 - w)\delta = 0. \tag{4.113}$$

Fazendo $\nu = 1$ na lei de conservação implica

$$\dot{v}_x = 2Hv_x + 3H\frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c}v_x + \frac{\partial_x\delta p}{(p_c + \rho_c)} + \partial_x\Psi, \tag{4.114}$$

somando as três componentes, temos:

$$\dot{\vec{v}} = 2H\vec{v} + 3H\frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c}\vec{v} + \frac{\vec{\nabla}\delta p}{(p_c + \rho_c)} + \vec{\nabla}\Psi. \tag{4.115}$$

As equações análogas para $\nu = 2, 3$ também fornecem a expressão em (4.115).

Queremos analisar o período em que o universo é dominado por matéria. Desta forma, o termo $\frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c} = c_s^2$ na equação (4.115), que correspondente à correções da relatividade restrita para a velocidade do fluido, é desprezível. Além disso, o gradiente de pressão das flutuações $\vec{\nabla}\delta p$, não contribui para o universo dominado por matéria, dentro do horizonte cosmológico (FERGUSSON; MARSH, 2015). Este modelo também leva em consideração que a pressão é nula na ausência de perturbações, isto é, $w = 0$. Assim, os únicos termos relevantes nas equações (4.113) e (4.115) são:

$$\dot{\vec{v}} = 2H\vec{v} + \vec{\nabla}\Psi, \quad (4.116)$$

$$\dot{\delta}_M = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - 3\dot{\Phi}. \quad (4.117)$$

Aplicando o operador divergente na primeira equação e diferenciando a segunda com respeito ao tempo, resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{v}} = 2H\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \nabla^2\Psi \quad (4.118)$$

$$\ddot{\delta}_M = \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{v}} - 3\ddot{\Phi}. \quad (4.119)$$

Na escala abaixo do horizonte cosmológico ($k \gg aH$) é conhecido que $\Phi \sim \cos\left(\frac{k}{aH}\right)$ (FERGUSSON; MARSH, 2015), então, nesta escala $\dot{\Phi} \approx \ddot{\Phi} \approx 0$. Portanto, podemos eliminar \vec{v} nestas equações, encontrando uma equação diferencial para o contraste de densidade de matéria no espaço dos momentos:

$$\ddot{\delta}_M = 2H\dot{\delta}_M - k^2\Psi. \quad (4.120)$$

Substituindo a expressão para Ψ calculada em (4.109), resulta:

$$\ddot{\delta}_M - 2H\dot{\delta}_M - \frac{3H_0^2\Omega_M^0}{2a} \frac{(1+f+U_c-8V_c)}{(1+f+U_c)(1+f+U_c+2V_c)} \delta_M = 0, \quad (4.121)$$

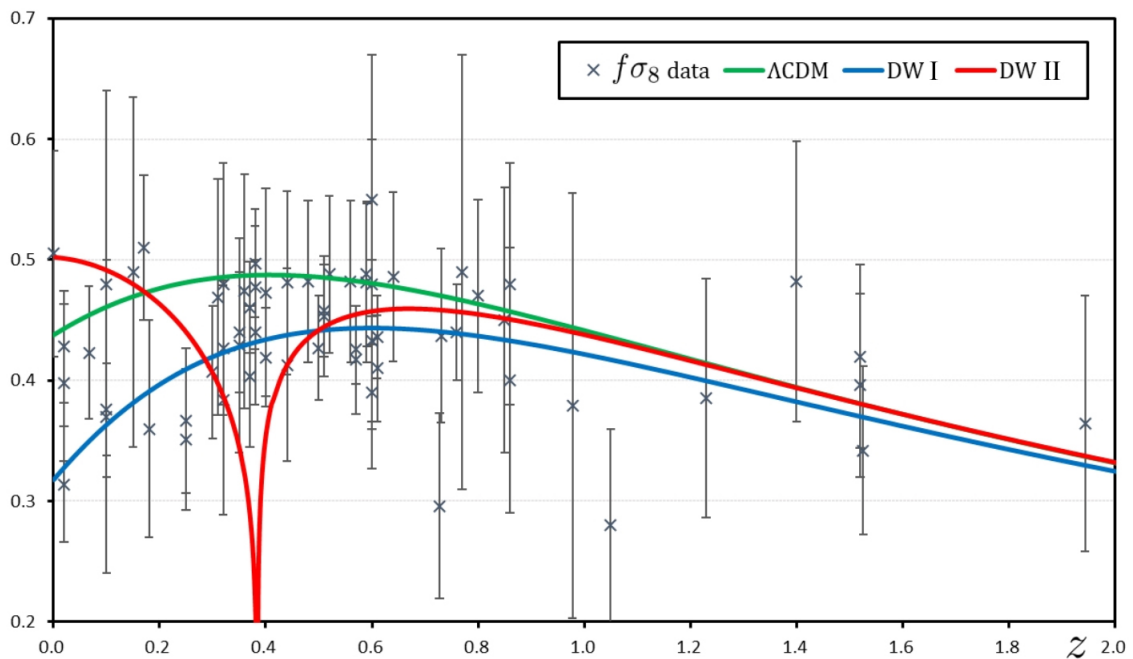
Esta equação é semelhante à obtida em (NERSISYAN; CID; AMENDOLA, 2017) para o modelo DW I, exceto pela nossa convenção de sinais e pelo fato de considerarmos derivadas com relação ao tempo cosmológico t e não em relação ao número de vezes em que o universo aumentou por um fator e , definido como $N = \ln a$. Note que esta equação não depende de k , apenas do fator de escala que por sua vez depende do tempo próprio t . A equação (4.121) foi resolvida numericamente a partir do método de Runge-Kutta (DING; DENG, 2019), faremos uso de seus

resultados para comparar o modelo DW II com dados experimentais. A Figura 4.3 mostra os valores experimentais e as curvas teóricas para o parâmetro $f\sigma_8$, definido como

$$f\sigma_8 = \sigma_8^0 \frac{1}{\delta_M} \frac{d\delta_M}{dN}, \quad (4.122)$$

em que $N = \ln a$ e $\sigma_8^0 = 0.811$ (AGHANIM et al., 2018). O observável $f\sigma_8$ é denominado taxa de crescimento de estruturas.

Figura 4.3 – Valores experimentais para o parâmetro $f\sigma_8$ em comparação com as curvas teóricas dos modelos Λ CDM, DW I e DW II. Fonte: (DING; DENG, 2019).



A curva obtida no modelo DW II está razoavelmente de acordo com os resultados obtidos pelo modelo Λ CDM e com os dados experimentais, exceto pelo ponto divergente mencionado no final da Seção 4.3.1. Para compreender a razão deste ponto singular são necessários estudos mais detalhados da solução numérica da equação (4.121).

4.3.3 Constante gravitacional efetiva

As equações de campo modificadas pelos campos não locais (4.31) podem ser escrita como:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{G}{(1 + U + f(Y))} \left(T_{\mu\nu} - \frac{G_{\mu\nu}}{8\pi G} \right), \quad (4.123)$$

em que $\mathbb{G}_{\mu\nu} = E_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}E_{\rho\sigma}$, assim, pode-se definir a constante gravitacional efetiva como

$$G_{\text{eff}} = \frac{G}{(1 + U + f(Y))}. \quad (4.124)$$

A equação (4.124) mostra que a constante gravitacional de Newton efetiva possui dependência temporal na escala cosmológica, resta saber se esta dependência aparece também na escala do Sistema Solar. Portanto, pode-se usar os resultados do experimento *Lunar Laser Ranging* (LLR) conforme em (BELGACEM et al., 2019) para testar o modelo DW II. Apesar de serem relativamente pequenos, estes efeitos são detectados no experimento LLR, provocando uma variação em G tal que

$$\frac{\dot{G}}{G} = (7,1 \pm 7,6) \times 10^{-14} \text{anos}^{-1}. \quad (4.125)$$

A fim de obter uma forma mais conveniente para a comparação com o valor teórico, podemos escrever esta variação em termos do parâmetro de Hubble:

$$\frac{\dot{G}}{G} = (0,99 \pm 1,06) \times 10^{-3} H_0. \quad (4.126)$$

Para que a comparação seja feita, são necessárias soluções numéricas para os campos V e U na escala cosmológica. Em (DING; DENG, 2019) o valor obtido para esta variação é de

$$\frac{\dot{G}_{\text{eff}}}{G_{\text{eff}}} = 0,717 H_0 \sim O(H_0), \quad (4.127)$$

logo, esta dependência temporal implica na violação do vínculo experimental e indica um problema com o modelo DW II. Porém, fica em aberto a discussão sobre a real influência das grandes estruturas do universo introduzida pela equação (4.60) em relação ao mecanismo de blindagem. Estudos mais detalhados são necessários para saber qual dos dois efeitos é mais relevante.

4.4 Universo com ricochete

Com o propósito de evitar a singularidade inicial presente nos modelos de *Big Bang*, tal como o Λ CDM, foram propostos modelo de universo que ricocheteiam, expandindo novamente após um colapso gravitacional (*Bouncing Cosmology*). Estes modelos já são bem conhecidos

da literatura, para uma revisão detalhada veja (BATTEFELD; PETER, 2015). Um modelo de um universo com ricochete (CHEN; CHEN; PARK, 2019) é descrito pelo fator de escala

$$a(t) = a_m e^{h_1 t^2/2}, \quad (4.128)$$

no qual a_m é o valor mínimo para o fator de escala e h_1 é uma constante positiva, tal que $H(t) = h_1 t$. O ricochete do universo em modelos desse tipo é considerado antes do período inflacionário, para o qual o espaço-tempo pode ser considerado dominado pelo vácuo, logo, $T_{\mu\nu} = 0$. Dessa forma, a equação diferencial (4.54) para $F = 1 + f + U$ se torna

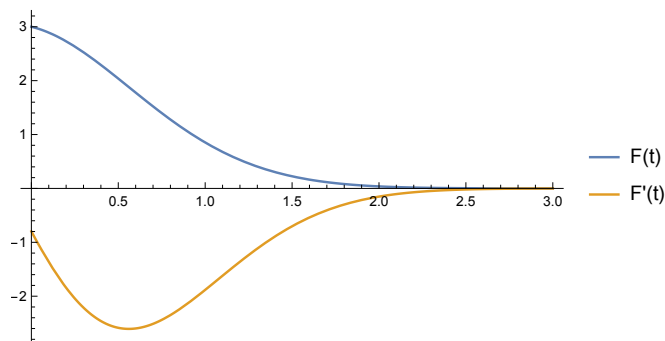
$$[2\dot{H} + 6H^2 + \partial_t^2 + 5H\partial_t] F(t) = 0. \quad (4.129)$$

Esta equação diferencial pode ser resolvida de forma exata, sua solução é

$$F(t) = e^{-h_1 t^2} \left(A_1 + A_2 \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{h_1}{2}} t \right) \right), \quad (4.130)$$

em que $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$ é a função complementar de erro de Gauss e A_1, A_2 são constantes de integração. A Figura 4.4 mostra a função $F(t)$ com as constantes fixadas como $h_1 = 1$, $A_2 = 2$ e $A_1 = 1$, na Seção 4.4.1 discutiremos a relevância de diferentes condições de contorno para este modelo. Pode-se observar pela Figura 4.4 que a função $F(t)$ assume um valor finito na origem e se aproxima de zero quando $t \rightarrow +\infty$, veremos a seguir qual a influência desse comportamento para a função de distorção $f = F - U - 1$. Para isto, é necessário obter soluções para os campos X, Y, U e V .

Figura 4.4 – Gráfico da função $F(t)$ e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete. Valores fixados para as constantes: $h_1 = 1$, $A_2 = 2$ e $A_1 = 1$. Fonte: Autor (2021).



Pode-se obter uma equação diferencial para o campo escalar X , usando as equações (4.49) e (4.48), a equação de vínculo $\square X = R$ se torna

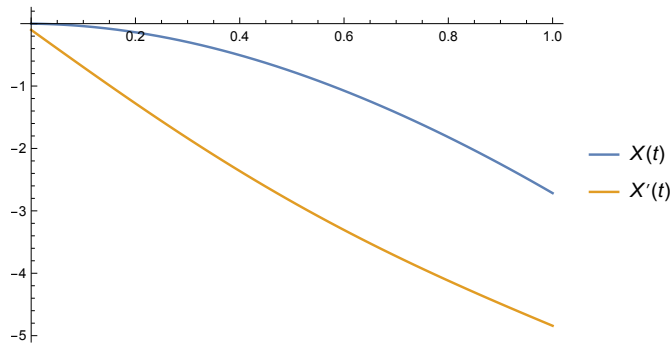
$$(\partial_t^2 + 3H\partial_t)X + 6(\dot{H} + 2H^2) = 0. \quad (4.131)$$

Sua solução exata é dada em termos de funções especiais conhecidas, isto é,

$$X(t) = B_1 + B_2 \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{3h_1}{2}} t \right) - h_1 t^2 \left(2 + {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{3}{2} h_1 t^2 \right) \right), \quad (4.132)$$

na qual ${}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{3}{2} h_1 t^2 \right)$ é a função hipergeométrica generalizada e B_1, B_2 são constantes de integração. A Figura 4.5 mostra o gráfico de $X(t)$ com as constantes fixadas $h_1 = 1$, $B_2 = -0,1$ e $B_1 = 0$, as quais são equivalentes às condições iniciais $X(0) = 0$, $\dot{X}(0) = 0$.

Figura 4.5 – Gráfico do campo auxiliar $X(t)$ e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete. Valores fixados para as constantes: $h_1 = 1$, $B_2 = -0,1$ e $B_1 = 0$. Fonte: Autor (2021).

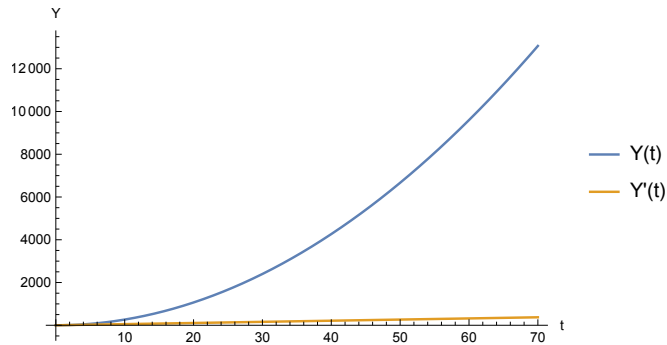


Da mesma forma, a equação (4.25) fornece a seguinte equação diferencial para Y :

$$(\partial_t^2 + 3H\partial_t)Y - \dot{X}^2 = 0, \quad (4.133)$$

resolvendo esta equação numericamente, tendo como condições iniciais $Y(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = 0$, obtêm-se o resultado mostrado na Figura 4.6.

Figura 4.6 – Gráfico do campo auxiliar $Y(t)$ e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete, tendo como condições iniciais $Y(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = 0$. Fonte: Autor (2021).



Da definição do campo U dada por (4.26), sob a métrica de FLRW, temos que

$$(\partial_t + 3H)\dot{U} = -2(\partial_t + 3H)V\dot{X}, \quad (4.134)$$

logo,

$$-2V = \frac{\dot{U}}{\dot{X}}. \quad (4.135)$$

A expressão para V em (4.28) fornece

$$(\partial_t^2 + 3H\partial_t)V = -6(\dot{H} + 2H^2)\frac{df}{dY}, \quad (4.136)$$

mas a função $F = 1 + f + U$ foi calculada em (4.130), de forma que pode-se eliminar f por

$$\frac{df}{dY} = \frac{\dot{F} - \dot{U}}{\dot{Y}}, \quad (4.137)$$

portanto:

$$(\partial_t^2 + 3H\partial_t)V + 6(\dot{H} + 2H^2)\left(\frac{\dot{F} - \dot{U}}{\dot{Y}}\right) = 0. \quad (4.138)$$

Substituindo a equação (4.135) para eliminar U encontra-se uma equação diferencial para o campo V :

$$(\partial_t^2 + 3H\partial_t)V + 6(\dot{H} + 2H^2)\left(\frac{\dot{F} + 2V\dot{X}}{\dot{Y}}\right) = 0. \quad (4.139)$$

A solução numérica para o campo V está representada na Figura 4.7 e o seu resultado permite o cálculo do campo auxiliar U pela equação (4.135), o qual está representado na Figura 4.8. As condições iniciais utilizadas para os campos U e V são $V(5) = V'(5) = 0.999$ e $U(5) = U'(5) =$

0.999. Estes valores são determinados impondo que $F(t_0) - U(t_0) \lesssim 0$, para algum valor de t_0 distante do ponto de ricochete $t = 0$ (CHEN; CHEN; PARK, 2019).

Figura 4.7 – Gráfico do campo auxiliar V e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete. Condições iniciais: $V(5) = V'(5) = 0.999$. Fonte: Autor (2021).

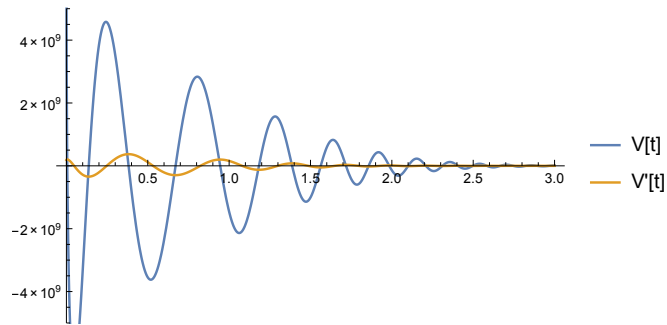
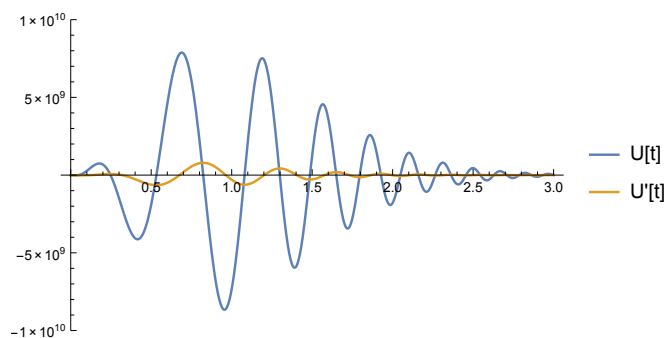
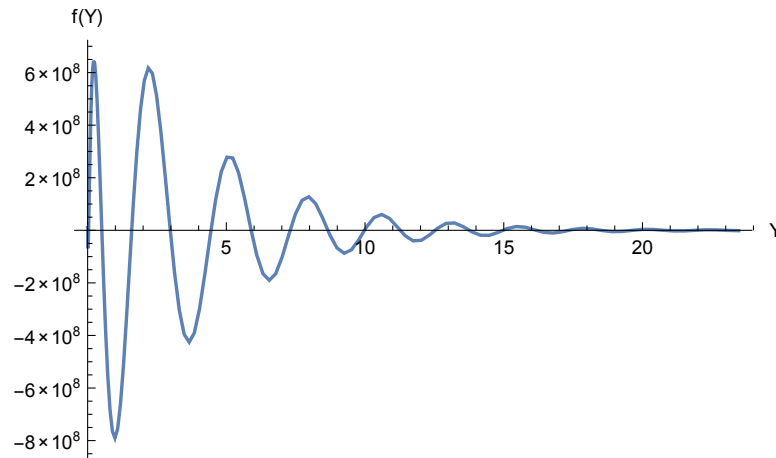


Figura 4.8 – Gráfico do campo auxiliar U e sua derivada, em função do tempo cosmológico, para o modelo de universo com ricochete. Condições iniciais: $U(5) = 0.999$. Fonte: Autor (2021).



A função de distorção não local é construída a partir da solução numérica para U e da equação (4.130) para F , por meio de $f = F - U - 1$. Em seguida, as soluções $f(t)$ e $Y(t)$ são usadas para obter $f(Y)$. A solução numérica para $f(Y)$ é apresentada na Figura 4.9. O resultado numérico de $U(t)$ apresenta uma rápida oscilação quando $t \rightarrow 0$, o qual é o comportamento dominante da função f próximo à origem.

Figura 4.9 – Gráfico da função de distorção não local $f(Y)$, para o modelo de universo com ricochete. Fonte: Autor (2021).

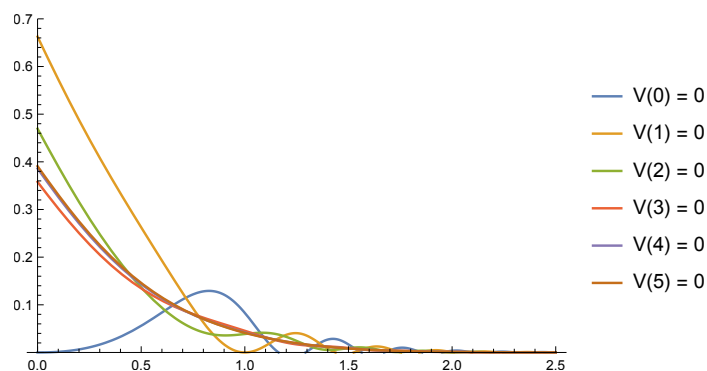


Nesse caso podemos concluir que a função de distorção não local, que modifica a ação de Einstein-Hilbert, oscila com amplitude cada vez maior próximo ao ricochete e tende à zero conforme Y aumenta. Isto significa que as condições iniciais utilizadas nesta seção para os campos auxiliares, permitem a construção de uma função de distorção não local que pode ser conectada de forma suave àquela que descreve a expansão do universo no modelo Λ CDM. Na próxima seção discutiremos a influência de variações nas condições iniciais.

4.4.1 Diferentes condições iniciais

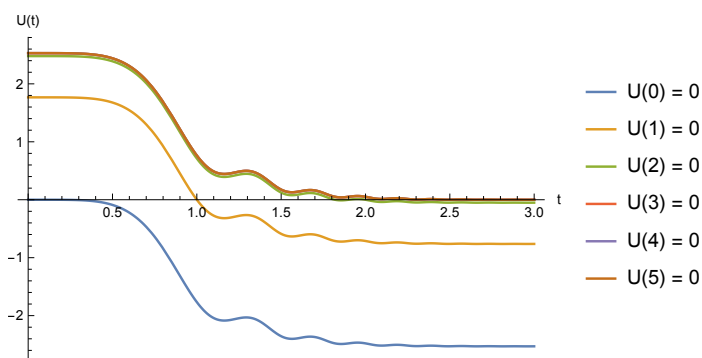
O comportamento da função de distorção não local, para tempos iniciais do universo, é caracterizado por oscilações geradas pelos campos V e U . Nesta seção, analisaremos o efeito de variações nas condições iniciais aplicadas para a solução numérica destes campos. A Figura 4.10 mostra as diferentes soluções da equação diferencial (4.139), na qual os valores do ponto zero de V foram alterados tais que $V(k) = V'(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Pode-se ver que as variações nas condições iniciais alteram o padrão de oscilações na região próxima de $t = 0$. No entanto, todas as soluções apresentam o comportamento oscilatório próximo à origem e tenderem à zero, conforme t aumenta.

Figura 4.10 – Diferentes soluções para $V(t)$, sob a condição inicial $V(k) = V'(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Fonte: Autor (2021).



A Figura 4.11 mostra que há um deslocamento das soluções para o campo $U(t)$ quando submetido às condições $U(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Note porém que, o deslocamento é maior entre as soluções com $k = 0$ e os demais valores. Após $k \geq 2$ não há variação significativa nas soluções. Além disso, todas as curvas da Figura 4.11 apresentam o padrão de oscilarem próximo à origem e em seguida se aproximarem de um valor constante, próximo de zero.

Figura 4.11 – Diferentes soluções para $U(t)$, sob a condição inicial $U(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Fonte: Autor (2021).



As alterações causadas na função de distorção não local, por modificações nas condições iniciais de U e V , seguem este mesmo padrão. A Figura 4.12 mostra que, para $k \geq 2$, as soluções de $f(t)$ não se alteram de forma significativa.

Figura 4.12 – Diferentes soluções para $f(t)$. O índice k indica que a condição inicial utilizada na solução de $U(t)$ foi $U(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Fonte: Autor (2021).

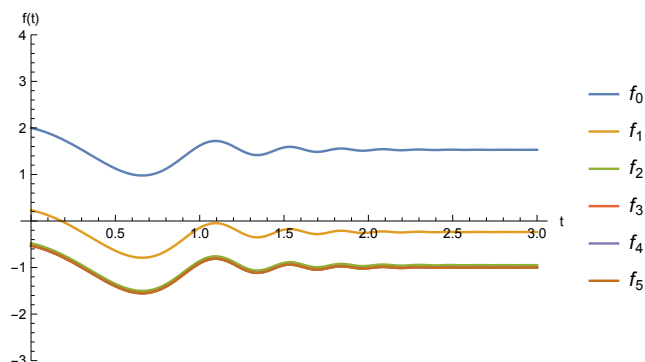
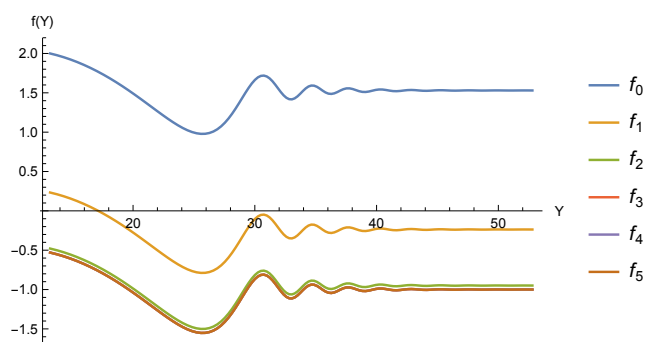


Figura 4.13 – Diferentes soluções para $f(Y)$. O índice k indica que a condição inicial utilizada na solução de $U(t)$ foi $U(k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Fonte: Autor (2021).



Tanto as soluções numéricas para f em função do tempo cosmológico, apresentadas na Figura 4.12, como em termos do campo Y , apresentadas na Figura 4.13, exibem o mesmo comportamento. Em ambos os casos a função de distorção oscila para valores iniciais de t e converge para um valor finito, para diferentes valores das condições iniciais. Para $k = 0$ a função $f(Y)$ se aproxima do valor 1,5 e conforme k aumenta, as curvas tendem à $-1,0$. Conclui-se que nesse caso, o modelo DW II permite uma descrição de universo com ricochete, que pode ser conectada com a solução de expansão acelerada, tal como verificado para o modelo DW I (CHEN; CHEN; PARK, 2019).

5 CONCLUSÃO

Apresentamos neste trabalho alguns aspectos fundamentais da gravitação e cosmologia não local. Nos Capítulo 2 revisamos a cosmologia moderna baseada na Teoria da Relatividade Geral, no Capítulo 3 introduzimos o conceito de não localidade, tanto no contexto clássico como quântico, e discutimos alguns dos primeiros modelos cosmológicos não locais. Por fim, apresentamos no Capítulo 4 uma discussão sobre os dois modelos de gravidade não local de Deser-Woodard (DESER; WOODARD, 2007; DESER; WOODARD, 2019) e apresentamos aplicação do segundo modelo (aprimorado) para a formação de estruturas e para o estudo de universos com ricochete.

A revisão dos principais modelos feita no Capítulo 3 proporcionou um panorama geral da origem dos estudos sobre gravitação não local, facilitando o entendimento das estruturas básicas deste tipo de modelo. Foi possível compreender quais os principais problemas enfrentados pelas modificações não locais à ação de Einstein-Hilbert, como a necessidade de preservar a causalidade nos modelos e garantir que a identidade de Bianchi seja satisfeita. Além disso, foi possível entender a razão da presença de estruturas mais complexas nos modelos mais recentes (e. g. $Y = \square^{-1} \partial_\mu X \partial^\mu X$) devido a problemas encontrados nos modelos mais simples, como discutimos na Seção 3.2.3. Constatamos que encontrar uma ação com elementos não locais, que forneça equações de campo relativamente simples e esteja de acordo com os testes experimentais da cosmologia padrão, ainda é um desafio. Além disso, espera-se que tal ação seja derivada por primeiros princípios, pois todas as propostas discutidas aqui têm um caráter fenomenológico.

Sobre a discussão do modelo DW I concluímos que, apesar de fornecer corretamente a expansão acelerada do universo sem a constante cosmológica, este modelo viola os vínculos impostos por dados experimentais na escala do sistema solar. Isto ocorre pois nesse caso o mecanismo de blindagem não pode ser utilizado, conforme mostrado por (BELGACEM et al., 2019). O modelo DW II também reproduz a expansão acelerada do universo, apenas pela presença dos termos não locais, inspirados por correções da ação efetiva quântica. Tal como no modelo DW I, não há a necessidade de introduzir a constante cosmológica e o modelo DW II reproduz adequadamente os resultados do modelo Λ CDM. No segundo modelo, vimos que o mecanismo de blindagem de fato funciona, porém fica em aberto a questão se a formação das grandes estruturas do universo provoca uma dependência temporal remanescente na escala do Sistema Solar. Esta dependência violaria os vínculos estabelecidos pelo experimento *Lunar*

Laser Ranging, sendo um problema para o modelo DW II. Para constatar se de fato esse é o caso, é necessário um estudo mais aprofundado da validade da teoria de perturbações, introduzido pela métrica (4.60), em comparação com os limites utilizados no mecanismo de blindagem.

A aplicação do modelo DW II à uma descrição de universo com ricochete (*bouncing*) nos permitiu obter soluções exatas e numéricas para os campos escalares não locais, o que não foi encontrado na literatura até o momento. Obtivemos, de forma numérica, a função de distorção não local o que permitiu constatar qual o efeito desta modificação da ação de Einstein-Hilbert. Verificamos que, para um universo com ricochete, o termo $f(Y)$ oscila rapidamente com amplitude cada vez maior próximo ao *bouncing* ($t = 0$). Observou-se também que o termo não local decresce com o tempo, se aproximando de zero. Desta forma, constatamos que o modelo DW II permite uma descrição do universo com ricochete, que seja suavemente conectada ao universo que expande aceleradamente, dominado pela energia do vácuo. Esta conclusão deriva da função de distorção ser nula para os primeiros instantes do universo, quando o modelo DW II é aplicado para reproduzir a cosmologia Λ CDM.

Como perspectivas futuras de trabalho ficam as seguintes sugestões: (i) a derivação direta de correções não locais a partir de uma ação efetiva quântica, que pode dar origem à modelos mais realistas de gravitação não local. (ii) o cálculo das soluções numéricas para os potenciais perturbativos Φ , Ψ , para o contraste de densidade δ_M e para o parâmetro de distorção da gravidade η , os quais podem ser comparados com resultados experimentais. (iii) estudos sobre a validade das soluções perturbativas e da influência da formação de estruturas para a escala do Sistema Solar. (iv) Aplicação no estudo de outros problemas como: modelos de universo com ricochete mais complexos, estrelas de nêutron e buracos negros.

REFERÊNCIAS

- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. **arXiv preprint arXiv:1807.06209**, 2018.
- ARKANI-HAMED, N. et al. Non-local modification of gravity and the cosmological constant problem. **arXiv preprint hep-th/0209227**, 2002.
- BARVINSKY, A. O. Serendipitous discoveries in nonlocal gravity theory. **Physical Review D**, APS, v. 85, n. 10, p. 104018, 2012.
- BATTEFELD, D.; PETER, P. A critical review of classical bouncing cosmologies. **Physics Reports**, Elsevier, v. 571, p. 1–66, 2015.
- BELGACEM, E. et al. Nonlocal gravity. conceptual aspects and cosmological predictions. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2018, n. 03, p. 002, 2018.
- BELGACEM, E. et al. Testing nonlocal gravity with lunar laser ranging. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2019, n. 02, p. 035, 2019.
- BERNABEU, J.; NAVARRO-SALAS, J. A non-local action for electrodynamics: Duality symmetry and the Aharonov-Bohm effect, revisited. **Symmetry**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 10, p. 1191, 2019.
- BERTSCHINGER, E. Cosmological dynamics. **Proceedings of the Les Houches School**, Elsevier, Citeseer, 1996.
- BUCHDAHL, H. A. Non-linear lagrangians and cosmological theory. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press Oxford, UK, v. 150, n. 1, p. 1–8, 1970.
- CARLONI, S.; ROSA, J. L.; LEMOS, J. P. Cosmology of $f(R, \square R)$ gravity. **Physical Review D**, APS, v. 99, n. 10, p. 104001, 2019.
- CARROL, S. An introduction to general relativity. **Spacetime and Geometry (Pearson-Benjamin Cummings, San Francisco, 2003)**, 2003.
- CHEN, C.-Y.; CHEN, P.; PARK, S. Primordial bouncing cosmology in the Deser-Woodard nonlocal gravity. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 796, p. 112–116, 2019.
- COLLABORAT, E. H. T. First M87 event horizon telescope results. I. the shadow of the supermassive black hole. **Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing Ltd., v. 875, n. 1, p. L1, 2019.
- DALVIT, D. A.; MAZZITELLI, F. D. Running coupling constants, newtonian potential, and nonlocalities in the effective action. **Physical Review D**, APS, v. 50, n. 2, p. 1001, 1994.
- DESER, S.; WOODARD, R. Nonlocal cosmology II. cosmic acceleration without fine tuning or dark energy. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2019, n. 06, p. 034, 2019.
- DESER, S.; WOODARD, R. P. Nonlocal cosmology. **Physical review letters**, APS, v. 99, n. 11, p. 111301, 2007.

DIJKSTRA, C. D. Local and nonlocal thermal field theory. **arXiv preprint arXiv:1904.10301**, 2019.

DING, J.-C.; DENG, J.-B. Structure formation in the new Deser-Woodard nonlocal gravity model. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2019, n. 12, p. 054–054, dec 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/12/054>>.

DIRIAN, Y. et al. Cosmological perturbations and structure formation in nonlocal infrared modifications of general relativity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 06, p. 033, 2014.

EINSTEIN, A. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitäts-theorie. In: **Das Relativitätsprinzip**. [S.l.]: Springer, 1922. p. 130–139.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical review**, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.

ELLIS, G. F.; MAARTENS, R.; MACCALLUM, M. A. **Relativistic cosmology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.

FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. f (R) theories. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 13, n. 1, p. 3, 2010.

FERGUSON, J.; MARSH, D. **Lectures notes in cosmology**. [S.l.]: University of Cambridge, 2015.

FUWA, M. et al. Experimental proof of nonlocal wavefunction collapse for a single particle using homodyne measurements. **Nature Communications**, Nature Publishing Group, v. 6, n. 1, p. 1–6, 2015.

GEROCH, R. What is a singularity in general relativity? **Annals of Physics**, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 526–540, 1968.

GREENBERG, O. W. C p t violation implies violation of lorentz invariance. **Physical Review Letters**, APS, v. 89, n. 23, p. 231602, 2002.

HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. **The large scale structure of space-time**. [S.l.]: Cambridge university press, 1973. v. 1.

HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.

ISHAK, M. Testing general relativity in cosmology. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 22, n. 1, p. 1, 2019.

JACCARD, M.; MAGGIORE, M.; MITSOU, E. Nonlocal theory of massive gravity. **Physical Review D**, APS, v. 88, n. 4, p. 044033, 2013.

JORDAN, R. D. Effective field equations for expectation values. **Physical Review D**, APS, v. 33, n. 2, p. 444, 1986.

KOIVISTO, T. Dynamics of nonlocal cosmology. **Physical Review D**, APS, v. 77, n. 12, p. 123513, 2008.

- LITTLEJOHN, R. The classical electromagnetic field hamiltonian. **Online lecture notes**, 2008.
- LONGO, M. J. Testing cosmic homogeneity and isotropy using galaxy correlations. **arXiv preprint arXiv:1405.7621**, 2014.
- MA, C.-P.; BERTSCHINGER, E. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 455, p. 7, Dec 1995. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/176550>>.
- MAGGIORE, M.; MANCARELLA, M. Nonlocal gravity and dark energy. **Physical Review D**, APS, v. 90, n. 2, p. 023005, 2014.
- MISNER, C. W. et al. **Gravitation**. [S.l.]: Macmillan, 1973.
- MITSOU, E. **Infrared Non-local Modifications of General Relativity**. [S.l.]: Springer, 2016.
- MITTON, S. **Fred Hoyle: A life in science**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- MOSHE, C.; LEIBOWITZ, E.; NISSANI, N. **Gravitation: SL (2, C) Gauge Theory and Conservation Laws**. [S.l.]: World Scientific, 1990.
- NERSISYAN, H. **Infrared Nonlocal Gravity Theories: Optimizing Science Return to Euclid Satellite Mission**. Tese (Doutorado), 2017.
- NERSISYAN, H.; CID, A. F.; AMENDOLA, L. Structure formation in the Deser-Woodard nonlocal gravity model: a reappraisal. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2017, n. 04, p. 046–046, Apr 2017. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/04/046>>.
- NESSERIS, S.; TSUJIKAWA, S. Cosmological perturbations and observational constraints on nonlocal massive gravity. **Physical Review D**, APS, v. 90, n. 2, p. 024070, 2014.
- PEEBLES, P. J. E. **Principles of physical cosmology**. [S.l.]: Princeton university press, 1993.
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.
- SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. f(R) theories of gravity. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 82, n. 1, p. 451, 2010.
- WALD, R. M. **General Relativity, Chicago, Usa: Univ.** [S.l.]: Pr, 1984.
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. [S.l.: s.n.], 1972.
- WEINBERG, S. The cosmological constant problem. **Reviews of modern physics**, APS, v. 61, n. 1, p. 1, 1989.
- WETTERICH, C. Effective nonlocal euclidean gravity. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 30, n. 1, p. 159–172, 1998.
- Will, C. M. Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light. **American Journal of Physics**, v. 56, n. 5, p. 413–415, May 1988.

WILL, C. M. The confrontation between general relativity and experiment. **Living reviews in relativity**, Springer, v. 17, n. 1, p. 4, 2014.

WOODARD, R. Nonlocal models of cosmic acceleration. **Foundations of Physics**, Springer, v. 44, n. 2, p. 213–233, 2014.