

**JOELMA CRISTINA COSTA**

**APLICAÇÃO DA LÓGICA FUZZY NA CONSTRUÇÃO DE  
UM MODELO DE CADEIA ISING**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Curso de Ciência da Computação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

LAVRAS  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2006

**JOELMA CRISTINA COSTA**

**APLICAÇÃO DA LÓGICA FUZZY NA CONSTRUÇÃO DE  
UM MODELO DE CADEIA ISING**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Curso de Ciência da Computação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Área de concentração:

Lógica Fuzzy, Física Estatística e Computação Algébrica

Orientador:

Prof. Onofre Rojas Santos

Co-Orientador:

Prof. Sérgio Martins de Souza

LAVRAS  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2006

**Ficha Catalográfica preparada pela Divisão de Processo Técnico da Biblioteca  
Central da UFLA**

Costa, Joelma Cristina

Aplicação da Lógica Fuzzy na Construção de um Modelo de Cadeia Ising /  
Joelma Cristina Costa – Minas Gerais, 2006. 34 p.:il.

Monografia de Graduação – Universidade Federal de Lavras. Departamento de  
Ciência da Computação.

1. Lógica Fuzzy. 2. Física Estatística. 3. Computação Algébrica. I. COSTA, J. C.  
II. Universidade Federal de Lavras. III. Título.



**JOELMA CRISTINA COSTA**

**APLICAÇÃO DA LÓGICA FUZZY NA CONSTRUÇÃO DE  
MODELO DE CADEIA ISING**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Curso de Ciência da Computação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Aprovada em 22 de setembro de 2006.

---

Prof. Marluce Rodrigues Pereira

---

Prof. Carlos Eduardo Silva Volpato

---

Prof. Sérgio Martins de Souza  
(Co-orientador)

---

Prof. Onofre Rojas Santos  
(Orientador)

LAVRAS  
MINAS GERAIS - BRASIL

*Dedico, com carinho, aos meus pais, Antônio Vilson e Jacinta Maria, pelo amor e incentivo. Às minhas irmãs, Jaciane e Joyce, pela amizade e carinho. Aos meus orientadores, Onofre e Sérgio, pela paciência, exemplo de dedicação e seriedade no trabalho de pesquisa. E ao Rafael por incentivar-me sempre, com amor e carinho nas horas difíceis.*

## **Agradecimentos**

A Deus pela fé e perseverança concedidos em todos os momentos da vida.  
Aos meus pais, Antônio Vilson e Jacinta Maria, que não pouparam esforços para minha formação, seja de caráter ou profissional, a quem devo tudo e expresso meu eterno amor e gratidão.  
Às minhas irmãs, Jaciane e Joyce, e ao meu irmão, Junio, pelo carinho, amizade, força, confiança e incentivo para a realização deste curso.  
Ao Rafael por ter me acolhido com muito amor e carinho a todo instante e a quem devo muitos dos melhores momentos da minha vida.  
Aos meus orientadores, Onofre e Sérgio, pela amizade, orientação, paciência e atenção dedicada durante todo o transcorrer do desenvolvimento deste trabalho.  
Aos professores, Fortunato, Volpato e Maria do Carmo, pela convivência amigável e pela cooperação em todos os momentos.  
A todos os professores do DEX, DEG e DCC, que me ajudaram ao longo do curso.  
Enfim, a todos aqueles que tenham contribuído, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho, deixo registrado os meus sinceros agradecimentos.

# APLICAÇÃO DA LÓGICA FUZZY NA CONSTRUÇÃO DE UM MODELO DE CADEIA ISING

## RESUMO

O modelo tradicional de cadeia Ising foi proposto, inicialmente, para explicar determinados problemas físicos como propriedades magnéticas. No entanto, este modelo pode ser aplicado a diversas outras áreas como redes neurais, biologia, economia, ciências políticas e outras, se incluir parâmetros lingüísticos ('fuzzy'). A partir destas considerações, o objetivo deste trabalho foi fuzzificar o modelo de Ising para estender sua aplicação a outras áreas. Para isso, foi construído um modelo de cadeia Ising com spins não simétricos, e em seguida, os spins não simétricos foram considerados como sendo números fuzzy. O modelo foi fuzzificado usando o princípio da extensão fuzzy em cada quantidade termodinâmica que foi calculada. Para definição dos spins assimétricos foram usadas três tipos de funções de pertinência: a função triangular, a função gaussiana com largura média igual ao da função triangular e uma função gaussiana concentrada em torno dos valores exatos dos spins tradicionais. Os resultados foram apresentados nas quantidades termodinâmicas da energia livre e entropia. Ao final do trabalho foi feita uma comparação do comportamento das quantidades termodinâmicas para cada tipo de função de pertinência e a comparação com os resultados do modelo de Ising tradicional.

**Palavras-Chave:** Lógica Fuzzy, Física Estatística, Computação Algébrica.

## APPLICATION OF FUZZY LOGIC IN THE CONSTRUCTION OF A CHAIN ISING MODEL

### ABSTRACT

The traditional chain Ising model was proposed, initially, to explain physical properties as magnetic properties in metals, for example. However, this model has been applied in many other areas; for instance, neural networks, biology, economy, political science and others, if linguistic parameters ("fuzzy") are included in the model. The purpose of this work is to introduce the fuzzy logic in the Ising model to extend its applicability to other areas. To this end, a chain Ising model with non-symmetric spins was built and, as an extension the non-symmetric spins were considered as being fuzzy numbers. The fuzzy chain Ising model was constructed by the principle of fuzzy extension in each thermodynamic quantity calculated. In the definition of asymmetric spins it was used three types of pertinence: the triangular function, the Gaussian function with the same width as the triangular one and, a Gaussian function centered around the exact values of the original spins. The results were presented in the thermodynamic quantities of free energy and entropy. Comparisons among the behavior of thermodynamic quantities for each function of pertinence and the related results of the traditional Ising chain model were made.

**Key-Words:** Fuzzy logic, Statistical Physics, Algebraic Computation.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<i>ix</i>
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1. Contextualização e Motivações.....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.3. Organização do Trabalho .....	2
<b>2. LÓGICA FUZZY</b> .....	<b>3</b>
2.1. Fundamentos da Lógica Fuzzy .....	3
2.2. Conjuntos Fuzzy .....	5
2.3. Tipos de Funções de Pertinência .....	7
2.4. Números Fuzzy.....	9
2.5. Princípio da Extensão.....	10
2.5.1. Operação de Números Fuzzy Baseadas no Princípio da Extensão .....	11
<b>3. O MODELO DE CADEIA ISING</b> .....	<b>13</b>
3.1. Alguns Conceitos e Definições na Termodinâmica .....	13
3.2. O Modelo de Cadeia Ising.....	14
3.2.1. Quantidades Termodinâmicas .....	17
<b>4. METODOLOGIA</b> .....	<b>18</b>
4.1. Tipo de Pesquisa.....	18
4.2. Procedimentos Metodológicos .....	18
<b>5. RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	<b>20</b>
5.1. Modelo de Ising com Spin Assimétrico .....	20
5.2. Modelo de Ising com Spin Fuzzy .....	21
5.2.1. Metodologia para Resolução do Modelo de Fuzzy Ising.....	22
5.2.2. Desenvolvimento do Programa.....	24
5.3. Comparação do Modelo de Fuzzy Ising com o Ising Tradicional .....	26
<b>6. CONCLUSÕES</b> .....	<b>32</b>
<b>7. REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO</b> .....	<b>33</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Definição Convencional de Meia Idade.....	6
Figura 2.2 - Definição Fuzzy de Meia Idade .....	7
Figura 2.3 – Principais Padrões de Funções de Pertinência. ....	9
Figura 2.4 - Princípio da Extensão. ....	10
Figura 2.5 - Soma dos Números Fuzzy A e B. ....	12
Figura 5.1 - Funções de Pertinência Implementadas em Membership.h.....	25
Figura 5.2 - Função Energia Livre com Spin Fuzzy Triangular.....	27
Figura 5.3 - Função da Energia Livre com Spin Fuzzy Gaussiana .....	27
Figura 5.4 - Função da Energia Livre com Spin Fuzzy Gaussiana Concentrada .....	28
Figura 5.5 - Comparação dos Resultados para a Energia Livre da Resolução Clássica com os Resultados Defuzzificados dos Diferentes Tipos de Spins.....	28
Figura 5.6 - Função da Entropia com Spin Fuzzy Triangular .....	29
Figura 5.7 - Função da Entropia com Spin Fuzzy Gaussiana.....	29
Figura 5.8 - Função da Entropia com Spin Fuzzy Gaussiana Concentrada .....	30
Figura 5.9 - Comparação dos Resultados para a Entropia da Resolução Clássica com os Resultados Defuzzificados dos Diferentes Tipos de Spins .....	30

# 1. INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo apresenta-se uma breve introdução ao trabalho proposto, juntamente com as motivações para a realização do mesmo, os objetivos e as justificativas.

## 1.1. Contextualização e Motivações

O estudo das propriedades termodinâmicas de cadeias de spins é de grande relevância para o entendimento de vários fenômenos físicos e é a partir de resultados deste tipo de pesquisa que se tem a base para o desenvolvimento de novas tecnologias.

Recentemente, conseguiu-se desenvolver um novo método para estudar a termodinâmica de qualquer modelo com interação entre os primeiros vizinhos numa rede unidimensional (Santos *et al.*, 2002). Desde então este método é aplicado em diversos modelos de cadeias quânticas para o estudo da sua termodinâmica na região de altas temperaturas.

Um sistema com incerteza é descrito em termos de uma medida de probabilidade no espaço estado. Assim na mecânica estatística ou dinâmica estocástica assumimos que as leis são determinísticas e existem forças aleatórias com distribuições conhecidas. Este método é apropriado no caso de frequência relativa de acontecimentos de eventos conhecidos. A mecânica estatística é aplicada com sucesso na física e outras áreas afins.

No entanto, para sistemas em biológicas, economia, ciências sociais e política, não temos transformações suficientes a probabilidade de medida do espaço estado, o que significa que não podemos aplicar conceitos de probabilidade.

Para tratar da incerteza neste tipo de sistema temos a lógica fuzzy que vem sendo cada vez mais utilizada nas mais diversas áreas, onde existe algum tipo de imprecisão ou incerteza, e tem trazido importantes avanços. Segundo Kaufmann & Gupta (1988), a lógica Fuzzy é um meio de aproximar a precisão da matemática clássica e a “imprecisão” do mundo real. A teoria Fuzzy consegue manipular e operar quantidades exatas e inexatas.

A partir disto, foi proposto um novo modelo de cadeia Ising baseado nos princípios da lógica fuzzy. Vale ressaltar que a fuzzificação de modelos de spins, particularmente o modelo de Ising, teria aplicação, por exemplo, em redes neurais. Após a proposição deste modelo foi feito um programa em C++ para solucioná-lo com o intuito de analisa-lo em relação aos modelos existentes.

## 1.2. Objetivos

Em suma, os principais objetivos deste trabalho foram:

- Analisar o modelo de Ising com parâmetros fuzzy.
- Desenvolver um programa utilizando a linguagem de programação C++ para a solução do modelo construído.
- Analisar os resultados deste modelo em relação aos demais modelos existentes.

## 1.3. Organização do Trabalho

O conteúdo deste trabalho está estruturado em cinco capítulos:

- No Capítulo 1 foi feita uma breve introdução, apresentando os motivos que induziram a realização deste trabalho e os objetivos do mesmo;
- O Capítulo 2 são discutidos conceitos básicos da lógica fuzzy necessários ao entendimento deste trabalho;
- O Capítulo 3 trata de alguns conceitos da termodinâmica e do modelo de Ising que foi utilizado para a construção do modelo proposto;
- A metodologia utilizada para a concepção deste trabalho é mostrada no Capítulo 4;
- No Capítulo 5 são apresentados os resultados e discussões acerca do estudo realizado.
- Por fim, o Capítulo 6 aborda as conclusões deste trabalho.

## 2. LÓGICA FUZZY

### 2.1. Fundamentos da Lógica Fuzzy

O conceito de conjuntos fuzzy foi introduzido, em 1965, por Lotfi A. Zadeh da Universidade da Califórnia, Berkeley. Ele teve muita importância na história, colaborando para o desenvolvimento de sistema de controle moderno. Na década de 60, Zadeh, tinha observado que os recursos tecnológicos disponíveis na época, eram incapazes de automatizar atividades relacionadas a problemas de natureza industrial, biológica ou química, que compreendessem situações ambíguas e que eram incapazes de serem implementadas em programas computacionais, fundamentadas na Lógica Booleana. Em 1973, ele elaborou suas idéias formulando o conceito de “variáveis lingüísticas” fazendo ligações de variáveis definidas com os conjuntos fuzzy (Zadeh, 1965).

De acordo com Souza (2004), a diferença entre a Lógica Fuzzy e a binária está no fato de que a Lógica Fuzzy pode possuir mais de dois resultados distintos, também chamados de valores verdade, o que não ocorre com a teoria clássica. Esses resultados não são expressos de forma bem definida e sim, lingüisticamente como: “correto, muito correto, incorreto, muito incorreto”. Tais valores estão contidos dentro de um subconjunto fuzzy e expresso numericamente pelo intervalo fechado dos números reais  $[0,1]$ .

Outra diferença entre essas lógicas é que, quando nos referimos à análise de certos intervalos de verdade ou faixas de valores, a lógica binária utiliza testes de condições exatas como, “igual, maior que, menor ou igual que,...”, enquanto que na Lógica Fuzzy são utilizados termos nebulosos, ou seja, sem definição exata, como, “alto, baixo, médio...”. Uma outra diferença é que, na lógica binária, o modificador mais utilizado é a negação, sendo que na nebulosa existe uma imensa variedade deles como: “mais, menos, maior, menor, muito, pouco...”. Na Lógica Clássica, números e intervalos são utilizados para definir a probabilidade de um determinado acontecimento ocorrer. Na lógica nebulosa, esses termos probabilísticos são identificados como “possível, provável, improvável”, como decorrência, a transformação de termos exatos da Lógica Clássica em nebulosos faz com que sua sensibilidade na identificação dos parâmetros aumente.

Segundo Santos (2003), quando nos deparamos com um problema numa determinada área, normalmente, deve-se, de início, pesquisar e estudar os processos que ocorrem nesse domínio e, em seguida, transformá-lo em um modelo matemático que o simule. Quando estudamos sistemas complexos, tais procedimentos tornam-se uma tarefa

muito difícil, já que há a necessidade de se conhecer detalhadamente todo o processo que se deseja controlar e que o mesmo esteja bem definido.

Uma área de aplicação da Teoria Fuzzy é chamada raciocínio aproximado, conforme Zadeh (1965), onde um tipo de raciocínio não é totalmente certo nem totalmente errado. Este tipo de raciocínio se aproxima da forma do raciocínio humano. Neste caso as variáveis lingüísticas são representadas por conjuntos fuzzy, interpretando uma variável lingüística como uma variável cujos valores são palavras ou sentenças em uma linguagem natural. Conjuntos fuzzy proporcionam, aos métodos de desenvolvimento de sistemas computacionais, uma forma de programação mais próxima da linguagem e do raciocínio humano.

De acordo com Klir & Yuan (1995), a Lógica Clássica, ainda é utilizada em larga escala resolvendo muitos dos problemas encontrados em variadas áreas. Entretanto, há situações de problemas reais em que é impossível modelar matematicamente determinados processos. É o caso de sistemas que apresentam uma gama muito grande de informações e que as características desses dados são conhecidos apenas lingüisticamente; decorrendo para que a utilização da lógica binária, tenha respostas imprecisas e inexatas, invalidando sua utilização.

A utilização da lógica nebulosa, a qual trabalha com informações e termos lingüísticos, pode solucionar este tipo de problema. A modelagem e controle fuzzy são técnicas que conseguem trabalhar rigorosamente essas informações analisando não apenas a exatidão dos resultados, mas também o grau de incerteza.

Por estas razões, esta técnica pôde solucionar vários problemas até hoje desconhecidos, mostrando o seu valor e potencialidade na sua utilização em sistemas computacionais de controle. A modelagem e controle fuzzy, pode lidar eficientemente com essas classes de problemas devido ao fato de conseguir trabalhar com as entradas e saídas de um sistema e reestruturá-lo pela utilização de vários parâmetros, sendo possível, desta forma, resolver problemas tão complexos que na modelagem matemática é impraticável, além de proporcionar resultados mais precisos com melhor desempenho.

De acordo com Jafelice *et al.* (2005), os sistemas baseados na Lógica Fuzzy têm mostrado grande utilidade em uma variedade de operações de controle industrial e em tarefas de reconhecimento de padrões que se estendem desde reconhecimento de texto manuscrito, até a avaliação de crédito financeiro. Existe também um interesse crescente em se utilizar a Lógica Nebulosa em sistemas especialistas para torná-los mais flexíveis.

Ainda segundo Jafelice *et al.* (2005), hoje possuímos centenas de sistemas baseados em Lógica Fuzzy, o entusiasmo dos japoneses por Lógica Fuzzy é refletido na ampla faixa de outras aplicações que eles tem investigado ou implementado: reconhecimento de caracteres, sistemas fuzzy óticos, robôs, helicópteros comandados por voz através de um robô, sistemas de elevadores, entre outras, podemos destacar também que 30% dos artigos escritos sobre o assunto foram feitos por japoneses. Trabalhos em sistemas fuzzy é também um procedimento nos EUA e Europa, porém não com o mesmo entusiasmo visto no Japão. Entre eles podemos destacar:

- Controle
  - Controle de Aeronave (Rockwell Corp.)
  - Operação do Metrô de Sendai (Hitachi)
  - Transmissão Automática (Nissan, Subaru, BMW)
  - Space Shuttle Docking (NASA)
  - Estação de Tratamento de Água Nbg
- Otimização e Planejamento
  - Elevadores (Hitachi, Fujitech, Mitsubishi)
  - Análise do Mercado de Ações (Yamaichi)
- Análise de Sinais
  - Ajuste da Imagem de TV (Sony)
  - Autofocus para Câmera de Video (Canon)
  - Estabilizador de Imagens de Video (Panasonic)

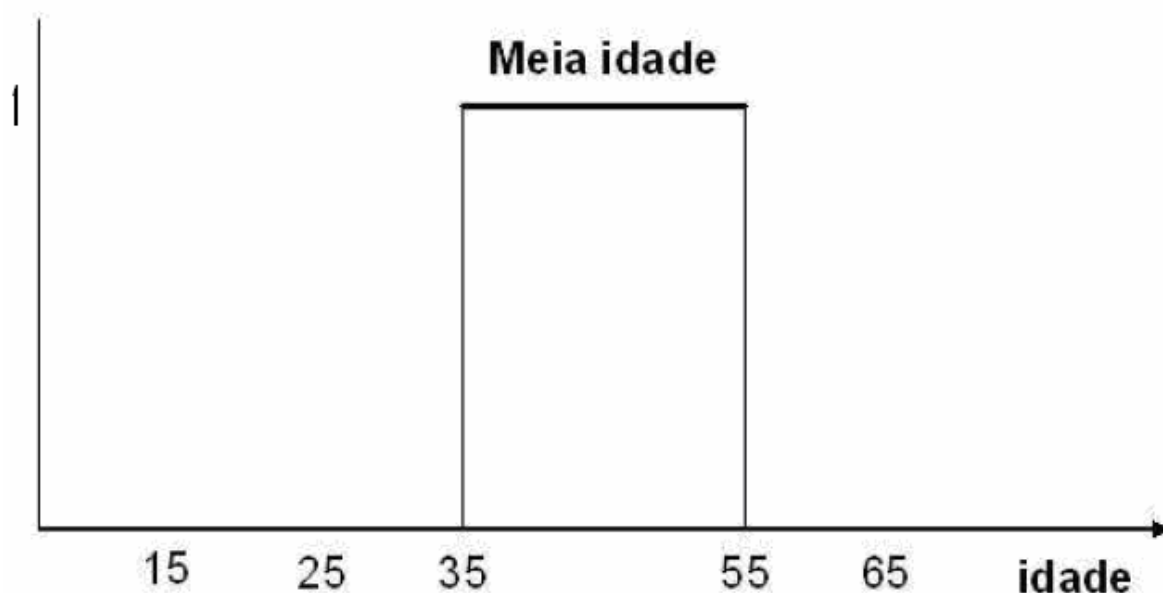
## 2.2. Conjuntos Fuzzy

Os conjuntos fuzzy são conjuntos que não possuem fronteiras bem definidas e que foram introduzidas devido ao fato de os conjuntos clássicos apresentarem limitações para lidar com problemas onde a transição de uma classe para outra deve acontecer de forma suave (Tanaka, 1997).

Cada conjunto fuzzy,  $A$ , é definido em termos de relevância a um conjunto universal,  $X$ , por uma função denominada de função de pertinência, associando a cada elemento  $x$  um número,  $\mu_A(x)$ , no intervalo fechado  $[0,1]$  que caracteriza o grau de pertinência de  $x$  em  $A$ . A função de pertinência tem a forma (Klir, 1997):

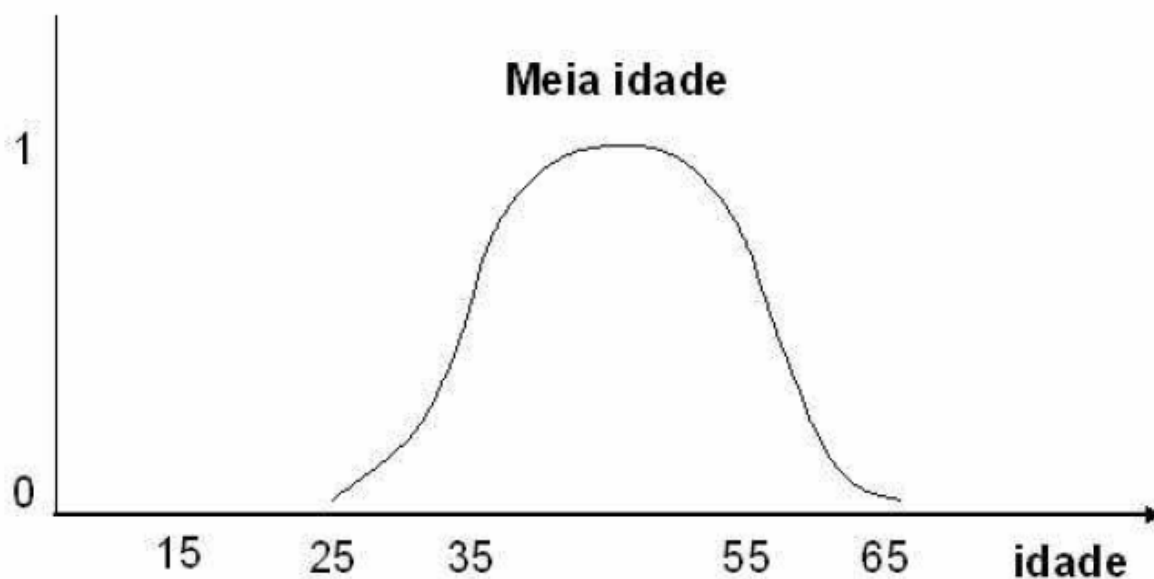
$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

Para representar melhor o conceito de conjunto fuzzy vamos definir na lógica clássica e na lógica fuzzy as pessoas que têm meia idade. É comum classificar uma pessoa de meia idade ou não, apesar de não se saber exatamente quando começa e termina esse período. Vamos assumir um exemplo de que o período de meia idade vai de 35 a 55 anos. Pela lógica tradicional, um homem de 34 anos só poderia pertencer ao grupo de meia idade depois do dia de seu aniversário de 35 anos. Da mesma forma, um homem de 56 anos não pertenceria mais a esse grupo. Mas não é desejado tamanha precisão em relação a este conceito, dado que o limite de meia idade não pode ser definido precisamente. Na verdade, se tem uma idéia vaga a respeito dos limites de meia idade. A Figura 2.1 mostra a definição de meia idade segundo a teoria de conjuntos convencional.



**Figura 2.1 - Definição Convencional de Meia Idade**  
Fonte: Mukaidono (2001)

Pode-se notar que os limites do conjunto de meia idade são muito rígidos no exemplo apresentado. Seria desejável ter limites graduais, onde fossem associados graus de certeza de que uma pessoa seria ou não de meia idade. Na Figura 2.2 pode-se notar que o grau de certeza que uma pessoa de 25 anos pertença a meia idade é muito menor que o de uma pessoa de 45 anos (Mukaidono, 2001).



**Figura 2.2 - Definição Fuzzy de Meia Idade**  
 Fonte: Mukaidono (2001)

Ao contrário da lógica tradicional, lógica fuzzy não impõe limites bruscos, proporcionando graus de pertinência de elementos a uma determinada categoria.

Pode-se definir lógica fuzzy como sendo uma ferramenta capaz de capturar informações vagas, em geral descritas em linguagem natural e convertê-las para um formato numérico, de fácil manipulação. A extração (representação) destas informações vagas se dá através do uso de conjuntos nebulosos (fuzzy set) (Adilea, 2003).

### 2.3. Tipos de Funções de Pertinência

Em princípio, qualquer função da forma  $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$  descreve uma função de pertinência associada a um conjunto fuzzy A que depende não somente do conceito para ser representado, mas também do contexto em que vai ser usado (Pedrycz & Gomide, 1998). Os gráficos das funções podem ter diferentes padrões. Apenas a aplicação pode dizer se um padrão particular é apropriado ou não.

Ainda segundo Pedrycz & Gomide (1998), as principais funções de pertinência utilizadas são a forma triangular, função- $\Gamma$ , função-S, trapezoidal, gaussiana e exponencial. Veja abaixo a fórmula básica e a representação de cada uma destas, que são os padrões mais comuns de funções de pertinência.

- Função Triangular (a):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ (x-a)/(m-a), & \text{se } x \in [a, m] \\ (b-x)/(b-m), & \text{se } x \in [m, b] \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

- Função- $\Gamma$  (b):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2}, & \text{se } x > a \end{cases}$$

- Função-S (c):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ 2 \times ((x-a)/(b-a))^2, & \text{se } x \in [a, m] \\ 1 - 2 \times ((x-b)/(b-a))^2, & \text{se } x \in [m, b] \\ 1, & \text{se } x > b \end{cases}$$

- Função Trapezoidal (d):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ (x-a)/(m-a), & \text{se } x \in [a, m] \\ 1, & \text{se } x \in [m, n] \\ (b-x)/(b-n), & \text{se } x \in [n, b] \\ 0, & \text{se } x > b \end{cases}$$

- Função Gaussiana (e):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} e^{-k(x-m)^2}, & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

- Função Exponencial (f):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1/(1+k(x-m)^2), & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

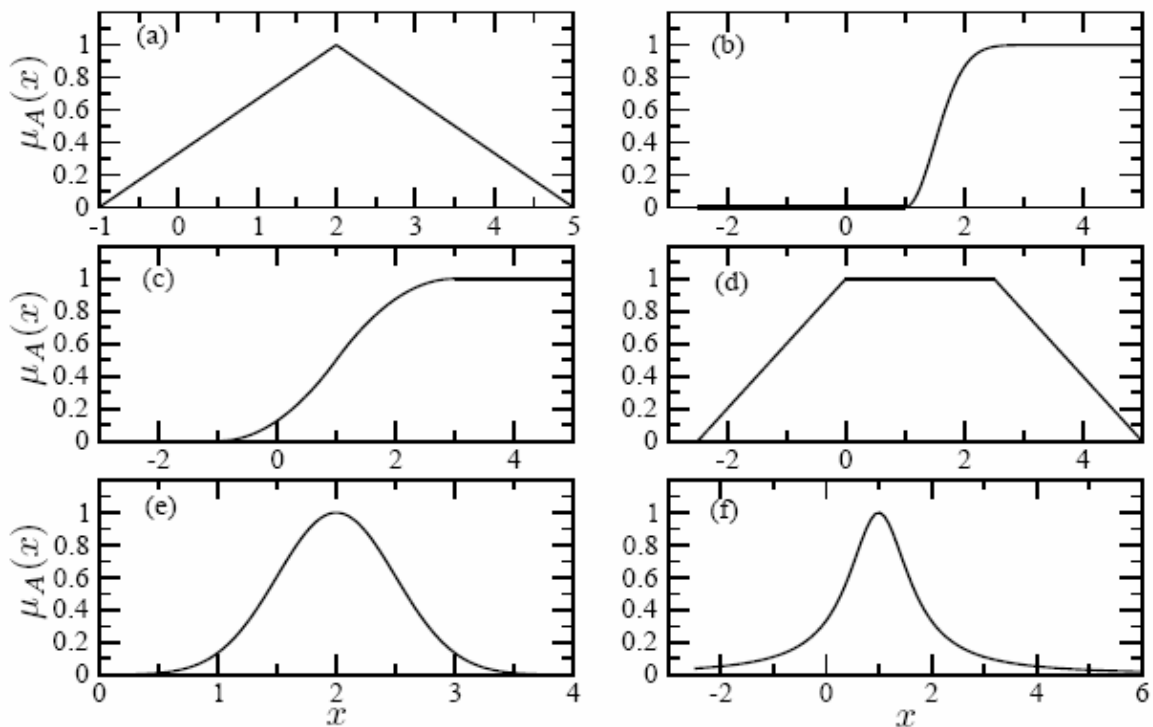


Figura 2.3 – Principais Padrões de Funções de Pertinência.  
 Fonte: Elaborado pelo autor

## 2.4. Números Fuzzy

Entre os vários tipos de conjuntos fuzzy, os conjuntos dos números fuzzy têm um significado especial. Assim como no caso clássico, estes conjuntos foram construídos com o objetivo de fazer ‘contas’. A diferença é que aqui se pretende calcular quantidades imprecisas. Por exemplo, existe unanimidade em dizer que o dobro de uma quantidade ‘em torno de 5’ resulta em outra ‘em torno de 10’. Para isso, criaram-se os conjuntos dos números fuzzy que generalizam os números reais (Klir & Yuan, 1995). Inicialmente, definimos o supremo de um conjunto fuzzy (Jafelice *et al.*, 2005).

**Definição 2.4.1** *Seja  $M$  um subconjunto não vazio do conjunto parcialmente ordenado  $E$ . Ao menor dos limites superiores de  $M$  dá-se o nome de supremo de  $M$  que é indicado por  $\sup M$ .*

**Definição 2.4.2** *Um conjunto fuzzy  $N$  é chamado número fuzzy quando o conjunto universo, onde  $N$  está definido, é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e a função de pertinência  $u_N : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  é tal que:*

- $u_N(x)$  atinge o 1, isto é,  $\sup_x u_N(x) = 1$ .
- $[N]^\alpha$  é um intervalo fechado,  $\forall \alpha \in (0,1]$ .
- O suporte de  $N$  é limitado.

Observa-se que, com a definição 2.4.2, todo número  $r \in \mathbb{R}$  é um caso particular de número fuzzy cuja função de pertinência é sua função característica:

$$u_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = r \\ 0, & \text{se } x \neq r \end{cases}$$

Segundo Tanaka(1997), os números fuzzy são conjuntos fuzzy com a especialidade de ter seus cálculos facilitados. Nós podemos definir operações com números fuzzy usando o princípio da extensão.

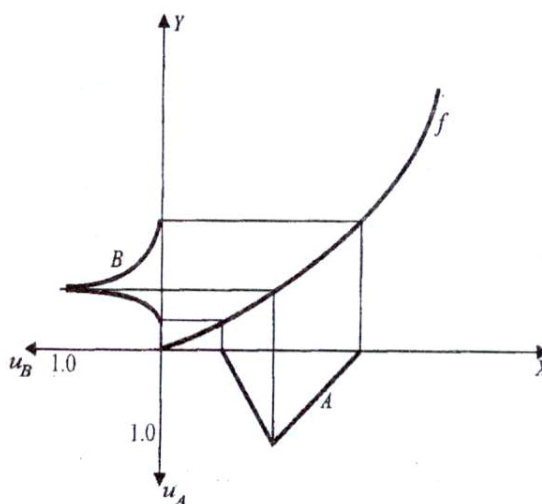
## 2.5. Princípio da Extensão

O princípio da extensão é usado, essencialmente, na obtenção da imagem de um conjunto fuzzy através de uma função clássica (Jafelice *et al.*, 2005).

Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos e  $f$  uma aplicação de  $X$  em  $Y$  :  $f : X \rightarrow Y$ . Seja  $A$  um conjunto fuzzy em  $X$ . O princípio da extensão afirma que a imagem de  $A$  pela função  $f$  é um conjunto fuzzy  $B = f(A)$  em  $Y$ , cuja função de pertinência é dada por

$$u_B(y) = \sup_x u_A(x)$$

para  $x \in X$  e  $y = f(x)$ , como é ilustrado na Figura 2.4



**Figura 2.4 - Princípio da Extensão.**  
**Fonte: Pedrycz & Gomide (1998)**

O princípio da extensão pode ser descrito da seguinte forma:

- O grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré-imagem.

- Quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo sup dos graus de pertinência dos valores da entrada.

O princípio da extensão pode ser facilmente generalizado para funções de várias variáveis. Sejam  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  e  $Y$  conjuntos universos. Considere os conjuntos fuzzy  $A_i$  em  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e uma função  $f : X \rightarrow Y$ . Os conjuntos fuzzy  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são então transformados pela  $f$  produzindo o conjunto fuzzy  $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$  em  $Y$ , cuja função de pertinência é

$$\mu_B(y) = \sup_x \min[\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)],$$

Para  $x \in X$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  e  $y = f(x)$ .

### 2.5.1. Operação de Números Fuzzy Baseadas no Princípio da Extensão

O princípio da extensão introduz as operações com números fuzzy. Pela aplicação do princípio da extensão obtêm-se cálculos fuzzy como ‘aproximadamente 2’ mais ‘aproximadamente 3’ é ‘aproximadamente 5’.

Segundo Tanaka (1997), a operação binária  $\odot$  dos números reais pode ser estendida para números fuzzy  $A$  e  $B$  no universo  $X$  como

$$\mu_{A \odot B}(z) = \sup_{x \cdot y} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)].$$

Se reescrevermos a expressão anterior usando conjuntos fuzzy, obtemos

$$A \odot B = \int_{X \times X} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] / (x \cdot y),$$

onde  $z = x \cdot y$  e  $x, y, z \in X$ .

Usando a definição anterior obtemos a aritmética dos números fuzzy como se segue.

- Adição:

$$\mu_{A \oplus B}(z) = \sup_{x+y} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)].$$

- Subtração:

$$\mu_{A - B}(z) = \sup_{x-y} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)].$$

- Mutiplicação:

$$\mu_{A \otimes B}(z) = \sup_{x \times y} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)].$$

- Divisão:

$$\mu_{A \div B}(z) = \sup_{x \div y} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)].$$

Veja o exemplo do uso do princípio da extensão na soma de dois números  $A$  e  $B$ . Neste exemplo,  $A$  vale ‘aproximadamente 3’ e  $B$  ‘aproximadamente 4’. O resultado  $A + B$  fica ‘em torno de 7’.

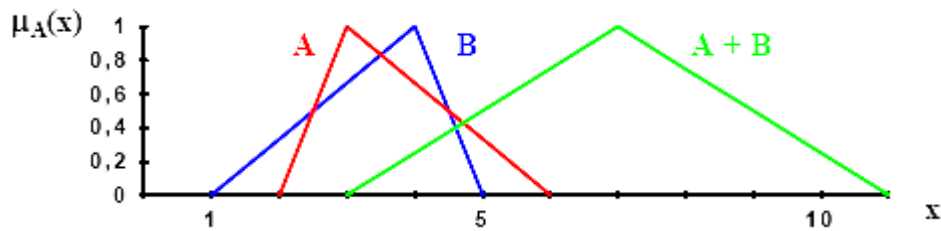


Figura 2.5 - Soma dos Números Fuzzy A e B.  
Fonte: Adilea (2003)

## 3. O MODELO DE CADEIA ISING

### 3.1. Alguns Conceitos e Definições na Termodinâmica

A termodinâmica é a ciência que lida com a temperatura e todos os fenômenos associados a ela (Chaves, 2001). O estudo de qualquer ramo especial da física inicia-se com a separação de uma região restrita do espaço chamada de sistema, sobre o qual é focalizada a atenção. Depois de se escolher o sistema, o próximo passo é descrevê-lo em termos de certas quantidades. Segundo Wylen & Sonntag (1976), há em geral dois pontos de vista que podem ser adotados, o macroscópico e o microscópico.

De acordo com Zemansky (1978), uma descrição macroscópica tem as seguintes características:

- Não envolvem consideração especial a respeito da estrutura da matéria.
- Somente umas poucas coordenadas são necessárias para uma descrição macroscópica.
- São sugeridas mais ou menos diretamente pelo nosso senso de percepção.
- Em geral podem ser medidas diretamente.

Em resumo, a descrição macroscópica de um sistema envolve a especificação de umas poucas propriedades fundamentais mensuráveis do mesmo.

Por outro lado, do ponto de vista da mecânica estatística – ou termodinâmica estatística – um sistema é considerado como consistindo de um número enorme  $N$  de moléculas, cada uma das quais é capaz de existir num conjunto de estados cujas energias são  $E_1, E_2, \dots$ , de acordo com Wylen & Sonntag (1978). O sistema de moléculas pode ser imaginado como sendo isolado ou, em alguns casos, pode ser considerado como fazendo parte de um agrupamento de sistemas similares.

Segundo Zemansky (1978), é evidente, entretanto, que uma descrição microscópica de um sistema envolve as seguintes características:

- Algumas considerações são feitas a respeito da estrutura da matéria; por exemplo, é admitida existência de moléculas.
- Muitas quantidades devem ser especificadas.
- As quantidades especificadas não são sugeridas pelo nosso senso de percepção.
- Estas quantidades não podem ser medidas.

Embora possa ser visto que os dois pontos de vista são totalmente diferentes e incompatíveis, há apesar de tudo uma relação entre eles; e quando ambos os pontos de vista são aplicados ao mesmo sistema, devem conduzir a uma mesma conclusão.

A relação entre os dois pontos de vista repousa no fato de que as poucas propriedades mensuráveis, cuja especificação constitui a descrição macroscópica, serem na verdade médias, durante um período de tempo, de um grande número de características microscópicas (Wyllen & Sonntag, 1978).

Por exemplo, a quantidade macroscópica pressão é a razão média da variação de quantidade de movimento devida a todas as colisões moleculares (nível microscópico) que ocorrem numa unidade de área. A pressão, no entanto, é uma propriedade que é percebida pelos nossos sentidos.

O modelo de rede fuzzy Ising desenvolvido neste trabalho está no nível microscópico da termodinâmica, ou seja, utiliza-se da mecânica estatística para seu desenvolvimento.

É conveniente ressaltar, que para que este modelo tenha fins práticos, faremos a descrição de seu estado termodinâmico utilizando-se de algumas das grandezas que definem as características do modelo. Segundo Chaves (2001), estas grandezas que definem o estado do modelo ou sistema. Estas grandezas são também chamadas de quantidades termodinâmicas. Entre as principais quantidades termodinâmicas utilizadas estão a energia interna, o calor específico, a magnetização, a suscetibilidade e a entropia. Vale ressaltar que é a descrição do modelo com base nestas quantidades que nos permitirá a sua validação e comparação com os modelos existentes.

## **3.2. O Modelo de Cadeia Ising**

O estudo dos modelos de rede é um ponto inevitável para se testar e desenvolver definições e métodos utilizados em nosso cotidiano. Por exemplo, um ramo recente da física matemática que surgiu devido ao estudo desse tipo de sistema é a quântica (Chaves, 2001).

O modelo de Ising proposto por Lenz em 1920 ao seu aluno Ising tinha como objetivo estudar um dos fenômenos mais importantes em matéria condensada, o ferromagnetismo.

O modelo uni-dimensional de Ising com spin  $-1/2$  para uma rede linear com  $N$  sítios pode ser descrito pela Hamiltoniana

$$H_N = -J \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} - H \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i, \quad (1)$$

onde  $J$  é o parâmetro de interação entre spins de sítios vizinhos e  $H$  é o campo magnético externo ao longo do eixo  $Z$ . Por conveniência, consideramos a condição de periodicidade  $\sigma_N \equiv \sigma_0$ . E em particular, para o cálculo da termodinâmica que precisamos

$$\sigma_i = \sigma_{i+1} = \dots = \sigma_{N-1},$$

onde  $\sigma$  representa os possíveis estados do sistema, que pode ser  $\sigma_i = +1$  ou  $-1$ , ou seja,

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Com base nestas considerações pode-se montar a função de partição que é descrita como se segue

$$Z_N = \sum_s e^{\beta J \sigma_0 \sigma_1 + \beta H (\sigma_0 + \sigma_1)/2} e^{\beta J \sigma_1 \sigma_2 + \beta H (\sigma_1 + \sigma_2)/2} \dots e^{\beta J \sigma_{N-1} \sigma_0 + \beta H (\sigma_{N-1} + \sigma_0)/2}. \quad (3)$$

onde  $\beta = (kT)^{-1}$ , sendo  $k$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta. Vale ressaltar que o cálculo da função de partição, a qual é descrita com base na hamiltoniana, é importante por ser a base para o cálculo de várias quantidades termodinâmicas.

Uma importante propriedade da equação (3) é que ela pode ser representada como um produto de matrizes, sendo rearranjada em um produto de termos cada termo dependendo somente do próximo vizinho

$$Z = \sum_{\sigma} T_{0,1} T_{1,2} \dots T_{N-1,0}, \quad (4)$$

onde

$$T_{i,i+1} = e^{\beta J \sigma_i \sigma_{i+1} + \beta H (\sigma_i + \sigma_{i+1})/2},$$

são elementos de uma matriz  $T$  cujas linhas são os valores de  $\sigma_i$  e as colunas são os valores de  $\sigma_{i+1}$ .

A equação (3) é facilmente rearranjada em um produto de termos é facilmente simplificada note que é um produto de matrizes escrito em termos de componentes da matriz  $T$ . O traço sobre os spins  $i = 1, 2, \dots, N-1$  corresponde ao produto

$$Z_N = \sum_{\sigma_0 = +1 \text{ ou } -1} (T^N)_{0,0}, \quad (5)$$

note que resta somente a soma sobre os elementos  $\sigma_0$  de  $T^N$ . Isto significa que o traço de  $T^N$  é mais usualmente expresso em termos dos autovalores  $\lambda_i$  de  $T$

$$Z_N = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^N. \quad (6)$$

A matriz de transferência é usada como na equação (4) sempre que a função de partição pode ser fatorizada na forma da equação (2) e expressa como um produto de matrizes como na equação (4). A escolha destas condições de contorno tornam-se irrelevantes para o limite termodinâmico,  $N \rightarrow \infty$ . Embora o exemplo usado seja o de Ising em uma dimensão a equação (6) é um resultado geral. Na equação (8) é apresentado o modelo de Ising considerando uma matriz de transferência geral  $T$  de tamanho  $N \times N$ . Definindo os autovalores listados decrescendo em módulo como sendo respectivamente  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}$ , a partir disso temos no limite termodinâmico a energia livre por spin descrita abaixo

$$f = -kT \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N \quad (7)$$

$$= -kT \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left( \lambda_0^N \left( 1 + \sum_i \frac{\lambda_i^N}{\lambda_0^N} \right) \right) \quad (8)$$

onde como  $N \rightarrow \infty$ ,  $(\lambda_i / \lambda_0)^N \rightarrow 0$  como a relação é menor que 1 então

$$f = -kT \ln \lambda_0 \quad (9)$$

isto significa que a energia livre não depende de todos os autovalores, mas somente do maior autovalor  $\lambda_0$ . A partir do cálculo desta equação podemos encontrar a função da energia livre por sítio para o modelo de Ising com spin - 1/2.

$$f = -kT \ln \left( e^{\beta J} \cosh \beta H + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta H + e^{-2\beta J}} \right). \quad (10)$$

### 3.2.1. Quantidades Termodinâmicas

A importância da função de partição, a qual é a base para o cálculo da energia livre, torna-se aparente no cálculo de várias quantidades termodinâmicas que descrevem as características do sistema. Abaixo estão descritas, em função da energia livre, que é proveniente da função de partição definidas anteriormente, as principais quantidades termodinâmicas.

- Energia Interna

$$U = -\frac{\partial(\beta f)}{\partial \beta}$$

- Calor Específico

$$C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

- Magnetização

$$M = -\frac{\partial f}{\partial H}$$

- Entropia

$$S_s = \frac{\partial f}{\partial T}$$

## **4. METODOLOGIA**

Neste capítulo, será esclarecido o tipo de pesquisa utilizada para a fundamentação dos conceitos ilustrados no capítulo anterior e a descrição de como o estudo de caso foi realizado.

### **4.1. Tipo de Pesquisa**

De acordo com Jung (2004) pode-se definir pesquisa básica como aquela que objetiva a obtenção de conhecimentos elementares, como por exemplo: novas propriedades de materiais e fenômenos associados a estes, novas fontes de energia, descoberta de elementos físico-químicos, reações químicas, efeitos eletromagnéticos, etc. O conhecimento resultante deste tipo de pesquisa pode em um primeiro momento apresentar-se desagregado do contexto cotidiano, mas, posteriormente, tornar-se-á vital para a aplicação em pesquisas tecnológicas.

Ainda conforme Jung (2004) diz que a pesquisa exploratória visa o aprimoramento de idéias ou a descoberta de intuições, ou seja, fornecer ao pesquisador um maior conhecimento sobre o tema ou problema de pesquisa em questão.

A partir destas definições pode-se classificar este trabalho como sendo de pesquisa básica e exploratória, levando em conta a sua natureza e os seus procedimentos, pois com a construção do modelo de Ising baseado em lógica fuzzy objetiva-se gerar conhecimentos básicos ou fundamentais para o entendimento ou descoberta de novos fenômenos físicos e propor alternativas ou teorias que poderão modificar as existentes.

### **4.2. Procedimentos Metodológicos**

A pesquisa foi realizada no período de fevereiro de 2004 à agosto de 2006.

Inicialmente, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre os modelos de cadeia existentes, princípios da lógica fuzzy e técnicas computacionais para o desenvolvimento de um programa que resolva o modelo de cadeia proposto. Foram consultados livros, monografias, teses e dissertações disponibilizadas na Internet e na literatura de modo geral.

A construção do modelo de cadeia utilizando a lógica fuzzy foi baseada no modelo de Ising com spin fuzzy proposto por Horiguchi (1993) que definiu um spin fuzzy para o modelo de Ising e a partir disto criou o modelo de fuzzy Ising.

Horiguchi (1993) em seu trabalho construiu o modelo basicamente utilizando a aritmética básica dos números fuzzy. A partir de seu trabalho resolvemos fuzzificar o modelo de Ising de uma forma análoga e resolvê-lo utilizando o princípio da extensão.

Posteriormente a construção do modelo, foi desenvolvido um programa na linguagem C++ para resolver o modelo proposto.

Ao final do trabalho, foi feita uma análise dos resultados do modelo proposto em relação aos resultados do modelo clássico de cadeia Ising (Baxter, 1982) com o intuito de mostrar a diferença entre modelo de fuzzy Ising e o modelo tradicional.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo apresenta-se a construção do modelo de Ising com spin assimétrico, bem como a descrição da metodologia utilizada para fuzzificação e resolução deste modelo. Ao final deste capítulo é feita uma análise comparativa do modelo proposto em relação ao modelo de Ising tradicional.

### 5.1. Modelo de Ising com Spin Assimétrico

A construção do Modelo de Ising com Spin Assimétrico foi feita com base no modelo de Ising padrão, para isso considere a hamiltoniana do modelo tradicional de Ising descrita de uma forma um pouco diferente da convencional mais ainda sem alterar a natureza do modelo

$$\tilde{H} = \sum_{i=0}^{N-1} J \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} + H(\tilde{\sigma}_i + \tilde{\sigma}_{i+1}),$$

onde  $\tilde{\sigma}$  é uma matriz da forma

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (14)$$

sendo  $a$  e  $b$  parâmetros reais arbitrários. Vale ressaltar que no modelo tradicional de Ising os valores de  $a$  e  $b$  correspondem aos valores das possíveis configurações para o spin, ou seja, valem  $+1$  e  $-1$ .

A matriz  $\tilde{\sigma}$  pode ser escrita na base das matrizes de Pauli, resultando em

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{a+b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \frac{a-b}{2} \sigma_i + \frac{a+b}{2} I \end{aligned} \quad (15)$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $\sigma_i$  é a matriz definida no modelo de Ising tradicional (3).

A partir da substituição da equação (15) em (1) temos a seguinte hamiltoniana dependente apenas de spins na forma padrão  $\sigma_i$

$$\tilde{H} = \sum_{i=0}^{N-1} J' \sigma_i \sigma_{i+1} + H' (\sigma_i + \sigma_{i+1}), \quad (16)$$

onde

$$J' = J \left( \frac{a-b}{2} \right)^2$$

e pode ser interpretado como o novo parâmetro de interação entre spins, nota-se que  $J'$  depende apenas de  $J$ ,  $a$  e  $b$ . Temos também

$$H' = J \left( \frac{a^2 - b^2}{4} \right) + H \left( \frac{a-b}{2} \right)$$

e  $H'$  é referente ao campo magnético externo, pode-se observar que  $H'$  depende de  $J$ ,  $H$ ,  $a$  e  $b$ . Note que a hamiltoniana deste modelo (16) é análoga a hamiltoniana padrão do modelo tradicional de Ising (1), ou seja, como já foram feitos todos os cálculos para o modelo de Ising tradicional, resta apenas a substituição dos valores de  $J'$  e  $H'$ , pois todos os cálculos podem ser considerados análogos. A energia livre para este modelo de Ising pode então ser expressa da seguinte forma

$$f = -kT \ln \left( e^{\beta J'} \cosh \beta H' + \sqrt{e^{2\beta J'} \sinh^2 \beta H' + e^{-2\beta J'}} \right). \quad (17)$$

## 5.2. Modelo de Ising com Spin Fuzzy

A idéia de criar um modelo de Ising que utiliza-se a lógica fuzzy partiu de Horiguchi (1993). Em seu trabalho, Horiguchi mencionou sobre a aplicação de um modelo assim em redes neurais.

Baseando-se na definição de números fuzzy de Dubois e Prade (1978), Horiguchi definiu um spin fuzzy  $\pm 1$  com números fuzzy. Com isso ele, estendeu um spin Ising  $\pm 1$  para um spin Ising fuzzy e, a partir de alguns cálculos utilizando a aritmética básica dos números fuzzy, estendeu o modelo de Ising com spin  $\pm 1$  para um modelo de fuzzy Ising.

Este modelo foi baseado no modelo tradicional de Ising descrito na seção 3.2. A diferença básica entre o modelo tradicional de Ising e o modelo de Ising com spin fuzzy é que o primeiro leva em conta um spin com a configuração sendo precisamente  $+1$  ou  $-1$  ( $s = 1/2$  ou  $s = -1/2$ ), por outro lado, o segundo leva em conta a incerteza com relação

a configuração do spin, para isso as configurações +1 e -1 foram definidas como sendo números fuzzy levando assim ao modelo tradicional de Ising o caráter da incerteza que antes não era tratada.

Veja abaixo, a descrição da hamiltoniana do modelo de fuzzy Ising criado por Horiguchi (1993)

$$H = - \left[ \left( \sum_{i>j} \right) J_{ij} \cdot \sigma_i(\cdot) \sigma_j(\cdot) + \left( \sum_i \right) H_i \cdot \sigma_i \right], \quad (18)$$

onde  $i$  e  $j$  denotam as possíveis combinações entre os sítios,  $J_{ij}$  e  $H_i$  são parâmetros, chamados de números ordinários, e  $\sigma_i$  denota o spin Ising fuzzy para cada sítio  $i$ . Neste modelo todas as operações que estão entre parênteses ( ) são operações da aritmética básica fuzzy.

### 5.2.1. Metodologia para Resolução do Modelo de Fuzzy Ising

A resolução do modelo Ising com spin fuzzy (Horiguchi, 1993) não é tão simples quanto a resolução do modelo tradicional, pois tem que levar em conta as operações com números fuzzy que são feitas de forma diferente da tradicional.

A princípio existem duas maneiras de se resolver um modelo fuzzy Ising, ou seja, de se fazerem contas com números fuzzy. Uma maneira é utilizando o princípio da extensão (conforme seção 2.5) e a outra é utilizando a definição das operações básicas com números fuzzy (conforme seção 2.5.1).

#### 5.2.1.1. Resolução Utilizando a Aritmética dos Números Fuzzy

Horiguchi utiliza-se das operações básicas com números fuzzy para resolver o seu modelo, porém, a resolução desta forma é muito trabalhosa e um tanto quanto complexa. Além disso, para o cálculo de quantidades termodinâmicas a partir de um modelo resolvido desta forma teriam que ser feitas contas adicionais para cada quantidade que se deseja-se calcular.

Apesar da resolução do modelo usando aritmética fuzzy ser diferente de usando o princípio da extensão, vale ressaltar todas as operações básicas da aritmética fuzzy foram definidas utilizando o princípio da extensão, porém mesmo assim, estas são formas diferentes de se resolver o modelo, visto que retornariam resultados um pouco diferentes.

### 5.2.1.2. Resolução Utilizando o Princípio da Extensão : O Modelo de Fuzzy Ising

Levando em consideração as proposições levantadas na seção 5.2.1.1 este trabalho propõe a resolução do modelo de fuzzy Ising utilizando o princípio da extensão. A resolução desta forma é bem mais simples de ser implementada, pois utiliza-se do mapeamento de números fuzzy através de funções clássicas, ou seja, aproveita os cálculos tradicionais que são feitos de forma bem mais simples do que os da aritmética fuzzy.

Para a resolução do modelo de Ising com spin fuzzy (Horiguchi, 1993) utilizamos a hamiltoniana que descreve o modelo de Ising com spin assimétrico (16) que é análoga a hamiltoniana (18) de Horiguchi. A diferença básica entre as duas é que em (18)  $\sigma$  está definido como um número fuzzy e em (16) está definido como

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

como existem várias maneiras de fuzzificar um modelo, decidiu-se fuzzificar, para a resolução utilizando o princípio da extensão, os parâmetros  $a$  e  $b$  (14) podem ser considerados como números fuzzy em torno de +1 e -1, respectivamente, então mapeamos  $a$  e  $b$  como se segue:

$$a \rightarrow \mu_a(x)$$

$$b \rightarrow \mu_b(x)$$

É importante ressaltar que  $a$  e  $b$  no modelo tradicional de Ising valiam precisamente +1 e -1. Ao modelo de Ising com spin assimétrico com os parâmetros  $a$  e  $b$  fuzzificados chamaremos de Modelo de “Fuzzy Ising”.

Para resolver este Modelo de Fuzzy Ising proposto pelo princípio da extensão encontramos duas maneiras diferentes que dependem do conjunto fuzzy que será usado.

Para conjuntos fuzzy discretos o cálculo de uma função que envolva mais de um conjunto fuzzy pode ser feito facilmente resolvido conforme descrito na seção 2.5.

Por outro lado, para conjuntos fuzzy que não sejam discretos o cálculo de funções que envolvam apenas um conjunto fuzzy pode ser resolvido facilmente, em algumas situações, basta para isso, encontrar a sua inversa. Já para funções que envolvam mais de um conjunto fuzzy, como no caso do nosso problema,  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(x)$ , não é possível uma inversão analítica.

Como para a resolução do nosso modelo encontramos este problema, optamos por resolvê-lo numericamente. Primeiramente, avaliamos a função em pequenos intervalos, considerando em média de 128 a 512 pontos, para cada spin fuzzy  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(x)$ . A partir disso, podemos resolver o nosso modelo, facilmente, usando a definição do princípio da extensão para conjuntos discretos.

### 5.2.2. Desenvolvimento do Programa

O desenvolvimento do programa que resolve o modelo de fuzzy Ising proposto foi feito na linguagem de programação C++ utilizando-se do pacote livre GiNaC (Bauer *et al.*).

O pacote GiNaC (Bauer *et al.*) é livre e pode ser acoplado facilmente a linguagem de programação C++. No pacote GiNaC estão implementadas várias funções que tem o objetivo de facilitar cálculos algébricos como derivadas, integrais entre outras funções.

O programa recebe como entrada o número  $n$  que corresponde ao número de pontos no intervalo que você vai calcular e retorna os resultados a um arquivo com extensão .dat. No programa pode-se regular a faixa de temperatura para qual serão calculadas as funções. Foram implementadas no programa as funções para o cálculo das quantidades termodinâmicas da energia livre e entropia.

O programa tem também implementada uma biblioteca chamada membership.h com diferentes tipos de funções de pertinência para os spins fuzzy  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(x)$ .

Veja abaixo três tipos de funções de pertinência da biblioteca membership.h que foram implementadas e que serão usadas nos testes que foram feitos para serem mostrados na próxima seção. É importante lembrar que  $\mu_A(x)$  representa o spin +1 fuzzy e  $\mu_B(x)$  o spin -1 fuzzy.

- Função Triangular :

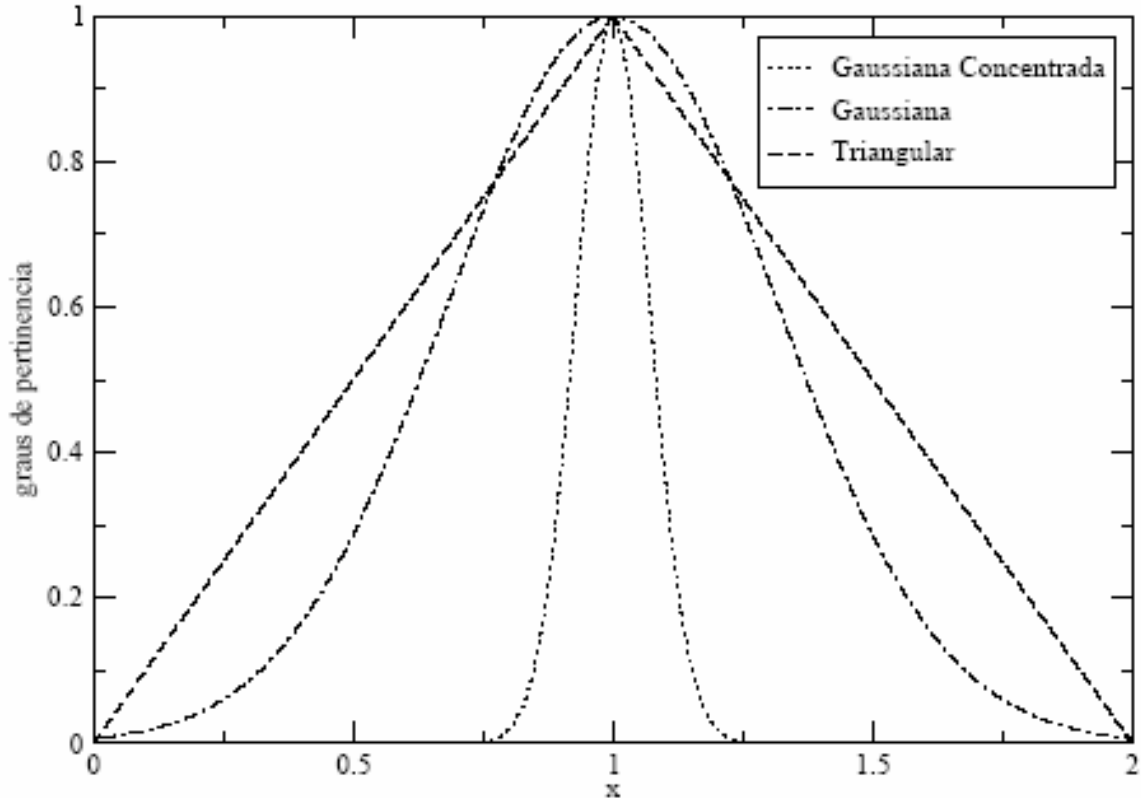
$$\mu_a(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2 - x, & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases} \quad \mu_b(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \in [-2, -1] \\ 2 + x, & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

- Função Gaussiana :

$$\mu_a(x) = \left\{ e^{-5(x-1)^2} \quad \mu_b(x) = \left\{ e^{-5(x+1)^2} \right.$$

- Função Gaussiana Concentrada:

$$\mu_a(x) = \left\{ e^{-100(x-1)^2} \right. \quad \mu_b(x) = \left\{ e^{-100(x+1)^2} \right.$$



**Figura 5.1 - Funções de Pertinência Implementadas em Membership.h**  
 Fonte: Elaborado pelo autor

Vale ressaltar que funções de pertinência Triangular e Gaussiana são semelhantes levando em consideração o tamanho do intervalo, ao passo que a Gaussiana Concentrada tem um intervalo mais concentrado. Estas diferenças entre as funções foram feitas a fim de comparação. Assim poderemos ter uma idéia de como se comportam para uma mesma função diferentes tipos de definições para os spins  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(x)$  e a partir disso decidir qual tipo de função retorna um resultado que mais aproxima o modelo de cadeia fuzzy proposto do modelo de Ising tradicional.

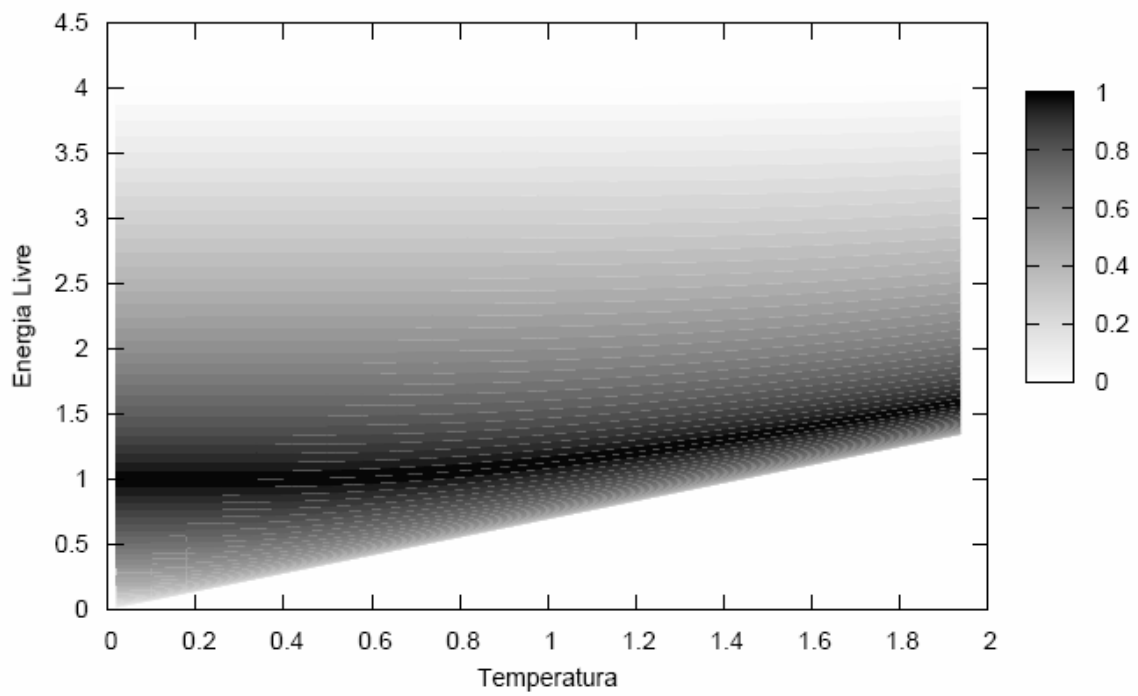
Ao final do cálculo das funções termodinâmicas o programa retorna um borrão do esqueleto dos valores da função calculada com os spins fuzzy  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(x)$  em função da temperatura. A partir deste borrão o programa faz a defuzzificação para a obtenção de um resultado único que possa ser comparado com o do modelo de Ising tradicional.

Existem diferentes maneiras de defuzzificar um resultado, dentre elas, optamos pela média ponderada (Pedrycz & Gomide, 1998), pois em nossos testes foi a que trouxe um resultado que mais se aproximasse do modelo tradicional.

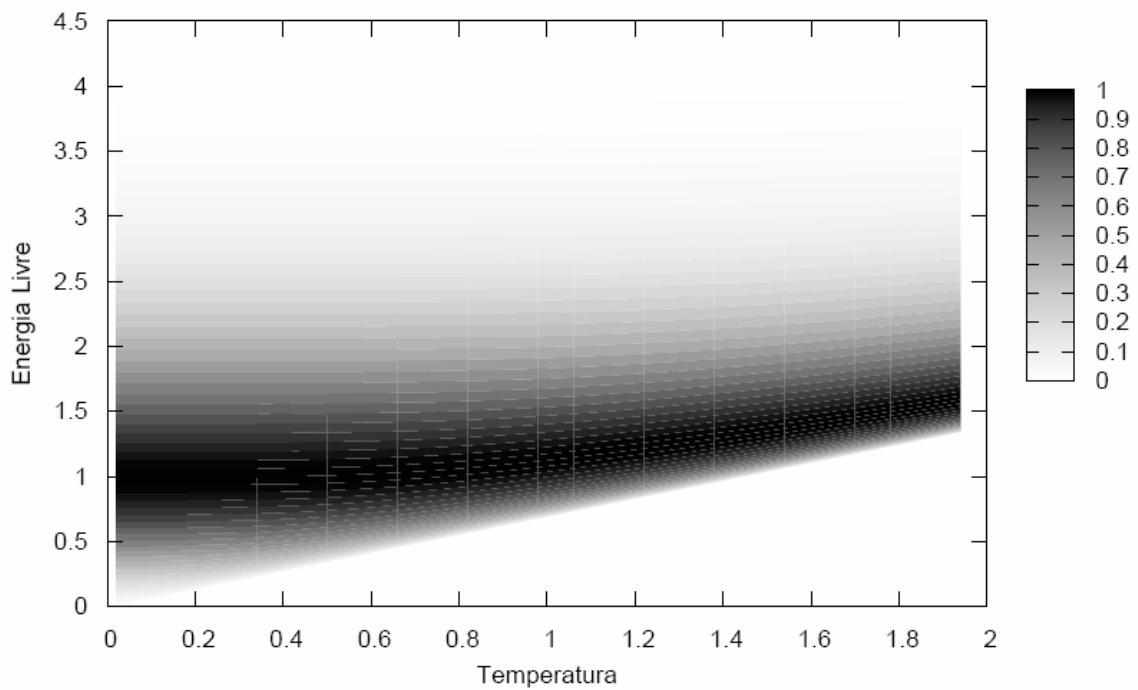
### **5.3. Comparação do Modelo de Fuzzy Ising com o Ising Tradicional**

O programa desenvolvido mostra o resultado do cálculo do modelo de Fuzzy Ising para a função da energia livre e da entropia. Este programa pode ser facilmente estendido para o cálculo de outras quantidades termodinâmicas. Após o cálculo do modelo e a obtenção de seus resultados é feita a defuzzificação dos resultados, utilizando a média ponderada, obtidos para a validação do modelo de fuzzy Ising em relação ao modelo de Ising Padrão.

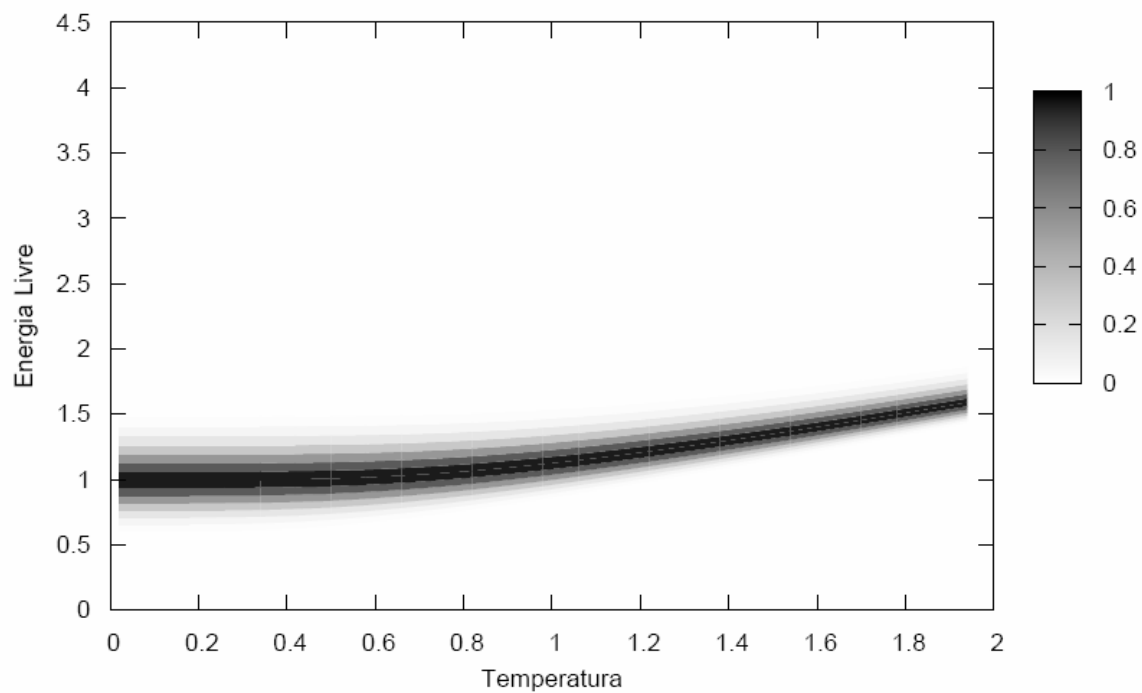
O programa retorna os resultados a um arquivo.dat. Estes resultados são visualizados utilizando-se o programa Gnuplot (Williams & Kelley, 1998) e o Grace (Williams & Kelley, 1998). Veja na figura abaixo os resultados encontrados para a energia livre, e em seguida para a entropia, utilizando as diferentes funções de pertinência implementadas (seção 5.2.2.) e, posteriormente, a comparação dos resultados defuzzificados, utilizando a média ponderada, para os diferentes spins fuzzy em relação ao resultado clássico.



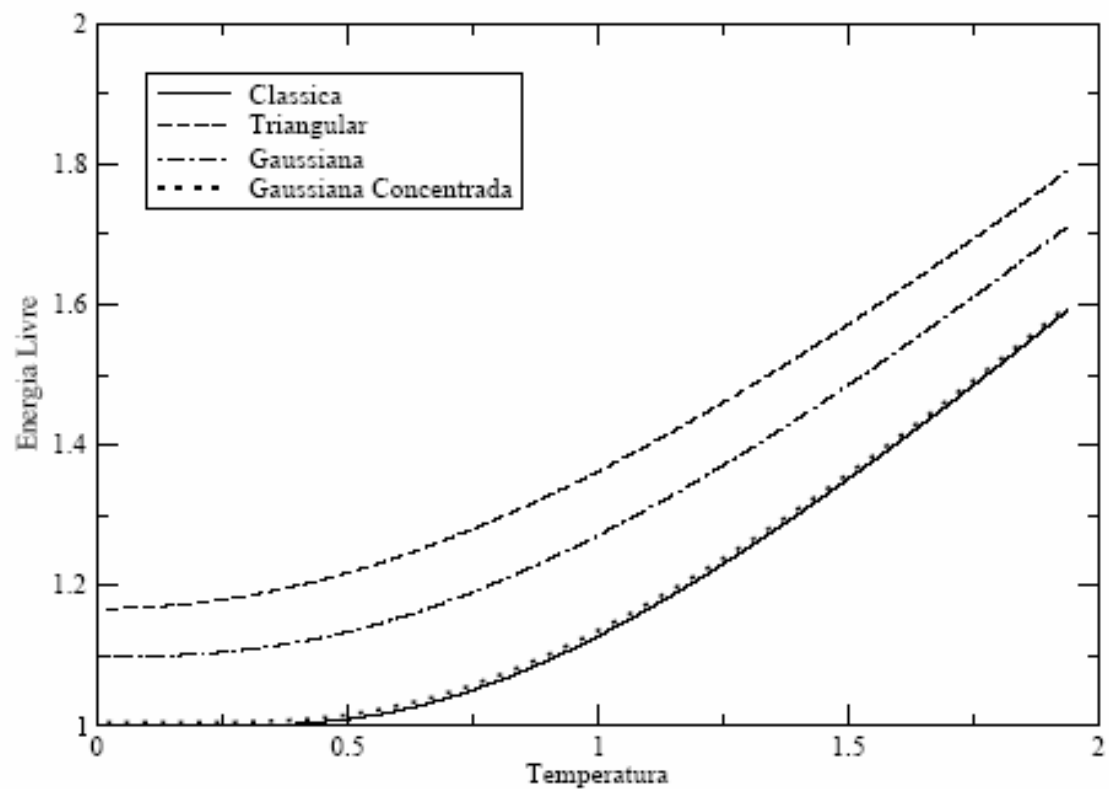
**Figura 5.2 - Função Energia Livre com Spin Fuzzy Triangular**  
**Fonte: Elaborado pelo autor**



**Figura 5.3 - Função da Energia Livre com Spin Fuzzy Gaussiana**  
**Fonte: Elaborado pelo autor**

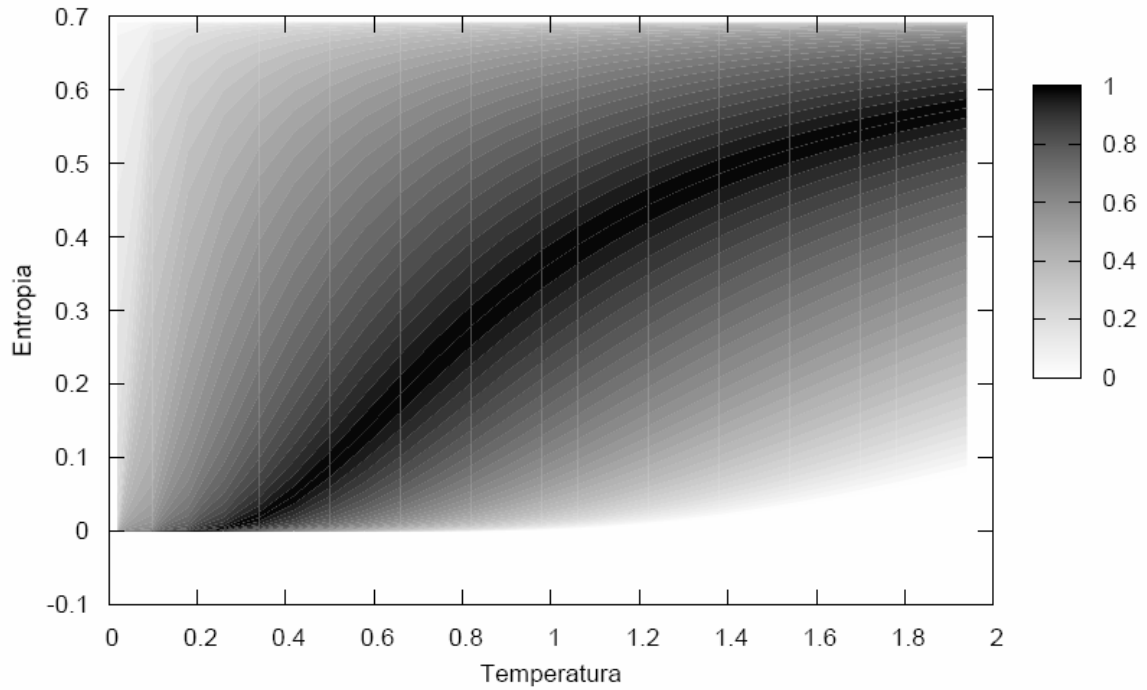


**Figura 5.4 - Função da Energia Livre com Spin Fuzzy Gaussiana Concentrada**  
**Fonte: Elaborado pelo autor**

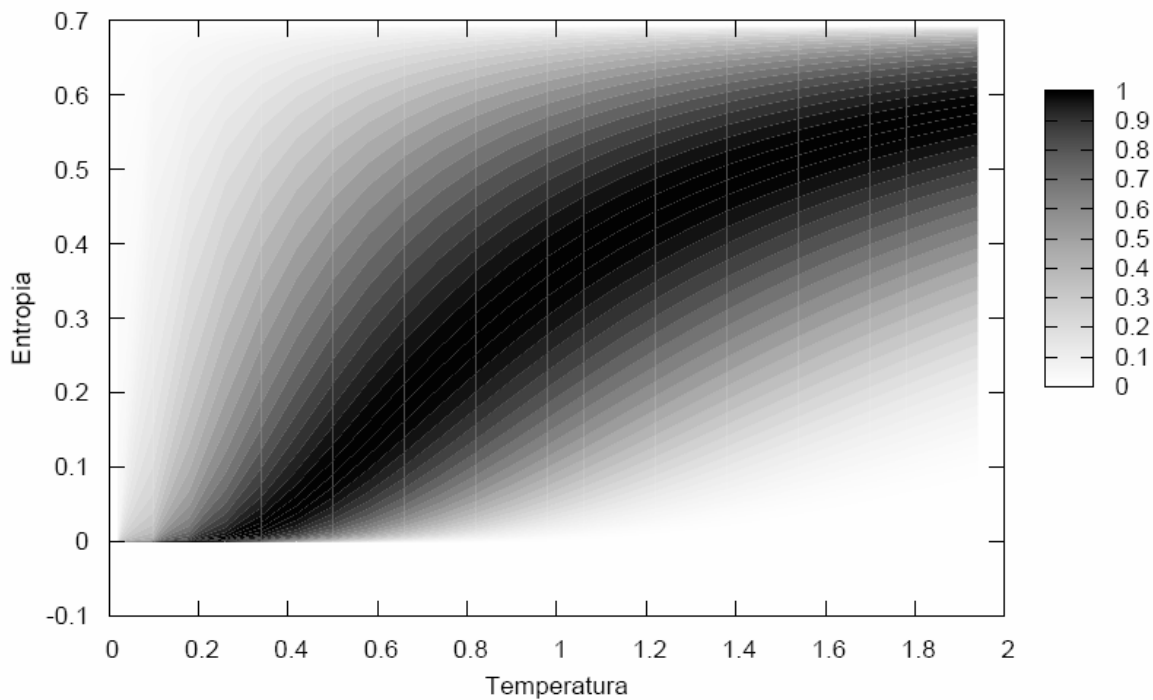


**Figura 5.5 - Comparação dos Resultados para a Energia Livre da Resolução Clássica com os Resultados Defuzzificados dos Diferentes Tipos de Spins**  
**Fonte: Elaborado pelo autor**

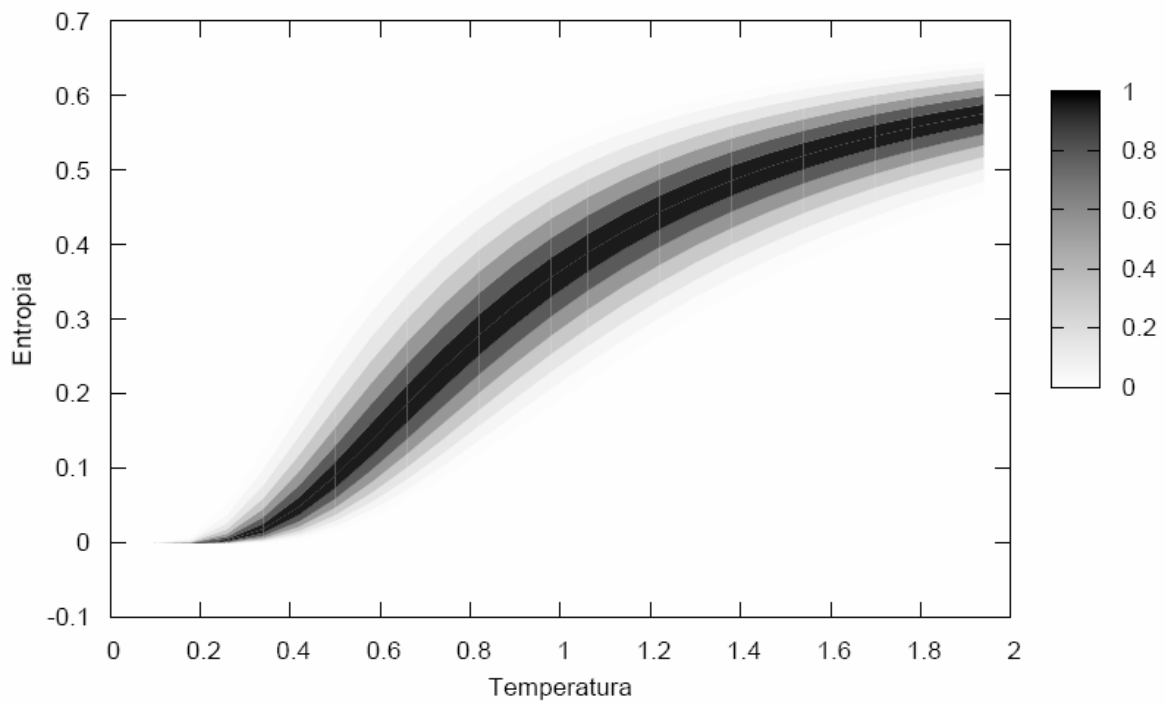
Após a defuzzificação, como mostra a figura 5.5, observamos que quanto mais incerto são os spins, a energia livre se mostra maior em relação ao resultado clássico. No entanto, se a função de pertinência for muito concentrada em torno de 1 e -1, o resultado se aproxima do clássico como é de se esperar.



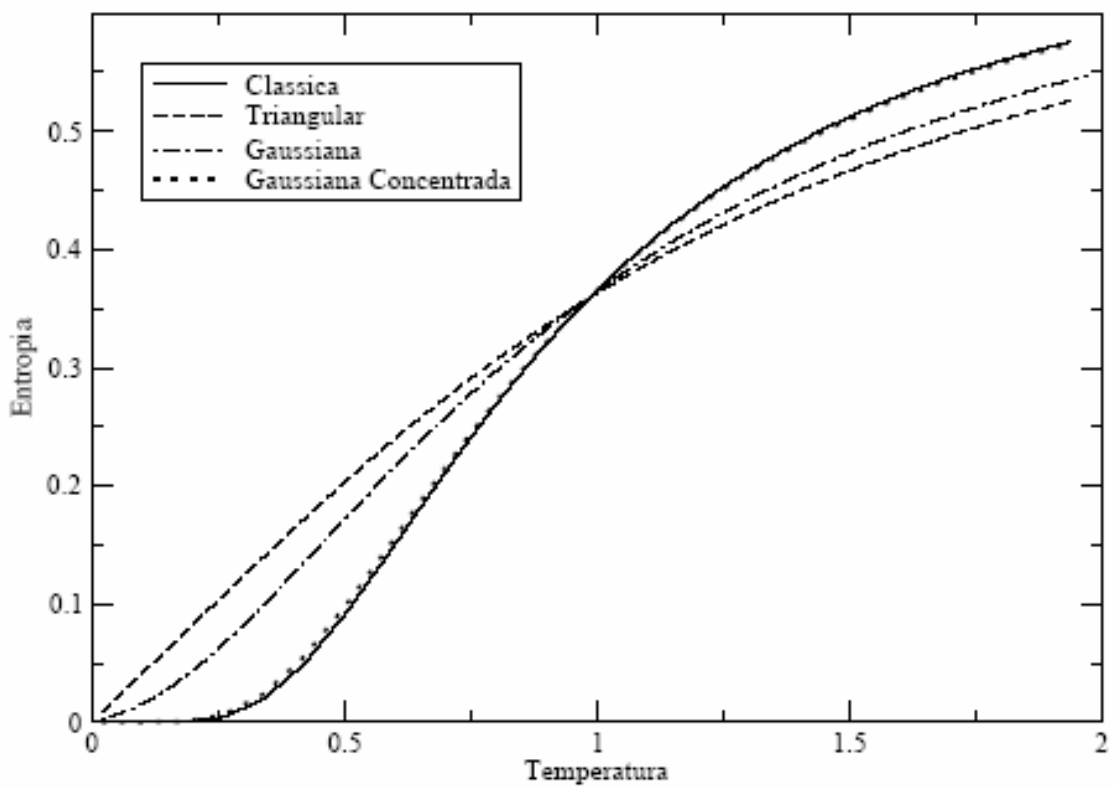
**Figura 5.6 - Função da Entropia com Spin Fuzzy Triangular**  
Fonte: Elaborado pelo autor



**Figura 5.7 - Função da Entropia com Spin Fuzzy Gaussiana**  
Fonte: Elaborado pelo autor



**Figura 5.8 - Função da Entropia com Spin Fuzzy Gaussiana Concentrada**  
**Fonte: Elaborado pelo autor**



**Figura 5.9 - Comparação dos Resultados para a Entropia da Resolução Clássica com os Resultados Defuzzificados dos Diferentes Tipos de Spins**  
**Fonte: Elaborado pelo autor**

Na figura 5.9, observamos, também, que a entropia aumenta quase linearmente para uma função triangular ou gaussiana com a largura da ordem de uma função triangular, mas a medida que a função gaussiana for muito concentrada a entropia também se aproxima ao resultado do modelo de Ising Clássico.

Pode-se observar também que para o spin definido a partir da função de pertinência gaussiana concentrada, que é a função definida com um grau de incerteza bem pequeno, obtemos um resultado equivalente ao modelo de Ising clássico. Por outro lado nas funções onde o grau de incerteza são maiores obtemos um resultado para as funções diferente do que nos traz o modelo de Ising clássico.

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho estendemos o modelo de cadeia Ising com spin  $-1/2$  ( $s=1/2$  ou  $-1/2$ ), para um modelo de cadeia com spin não necessariamente simétrico. Posteriormente, escrevemos este modelo na base do modelo de Ising tradicional, consideramos para isso, os spins não simétricos da cadeia como sendo números fuzzy. Para fuzzificar o modelo de Ising com spin assimétrico usamos o princípio da extensão fuzzy, em cada quantidade termodinâmica. Usamos três tipos de funções de pertinência para os spins assimétricos, função triangular, função gaussiana com largura média igual ao da função triangular e uma função gaussiana concentrada nos valores  $+1$  e  $-1$ . Apresentamos nossos resultados para as quantidades termodinâmicas, energia livre e entropia, mostrando como estas quantidades variam com a escolha da função de pertinência.

O modelo de Ising foi inicialmente proposto para explicar determinados problemas físicos tais como propriedades magnéticas. No entanto, o modelo de Ising fuzzificado, conforme propomos, pode ser aplicado em redes neurais e em diversas áreas como a agricultura, biologia, economia, ciências políticas e outras.

Como sugestão para trabalhos futuros temos a de definir o spin fuzzy utilizando diferentes funções de pertinência com o intuito de tentar encontrar uma definição que extenda o resultado deste modelo com spins  $-1/2$  para um modelo com vários spins.

## 7. REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

Adilea, W. **Extração de Conhecimento a partir de Redes Neurais aplicada ao Problema da Cinemática Inversa na Robótica** Dissertação de Mestrado, USP, 2003.

Bauer, C.; Frink, A.; Kreckel, R.; Volling, J. **GiNaC is Not a CAS**: Disponível em <http://www.ginac.de/>.

Baxter, R. J. **Exactly Solved Models in Statistical Mechanics** – New York, EUA : Academic Press, 1982.

Chaves, A. **Sistemas Complexos e Outras Fronteiras** – Rio de Janeiro, RJ : Reichmann & Affonso Editores, 2001.

Gathen, J. V. Z.; Gerhard, J. **Modern Computer Algebra** – New York, EUA : Cambridge University Press, 2003.

Williams, T; Kelley, C. **An Interactive Plotting Program** – New Jersey, EUA : Prentice-Hall, 1998.

Horiguchi, T. **Spin Model with Fuzzy Ising Spin** – North-Holland, Physics Letters A 176 (1993) 179-183.

Jafelice, R. S. M.; Barros, L. C.; Bassanezi, R. C. **Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações** – São Carlos, SP – Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2005.

Jung, C. F. **Metodologia para Pesquisa & Desenvolvimento** – Rio de Janeiro, RJ : Axcel Books do Brasil Editora, 2004.

Kaufmann, A.; Gupta, M.M. **Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science** – Estados Unidos : Elsevier Science Publishers, 1988.

Klir, G. J.; Clair, U. H. S.; Yuan, B. **Fuzzy Set Theory – Foundations and Applications** – New Jersey, EUA : Prentice-Hall, 1997.

Klir, G. J.; Yuan, B. **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications** – New Jersey, EUA : Prentice-Hall, 1995.

Mukaidono, M. **Fuzzy Logic for Beginners** – Singapore : World Scientific, 2001.

Pedrycz, W.; Gomide, F. **An Introduction to Fuzzy Sets Analysis and Design** – London, England: The MIT Press, 1998.

Santos, G. J. C. **Lógica Fuzzy** – Monografia de conclusão do curso de Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC, 2003.

Santos, O. R.; Souza, S. M; Thomaz, M. T **J. Math. Phys.** 43 (2002) 1390.

Souza, O. T. L. **Desenvolvimento de um Modelo Fuzzy para Determinação do Latente com Aplicação em Sistemas de Irrigação** – Dissertação de Mestrado, UNESP, 2004.

Tanaka, K. **An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications** – New York, EUA : Springer, 1997.

Wyllen, G. J. V.; Sonntag, R. E. **Fundamentos da Termodinâmica Clássica** – São Paulo, SP : Edgard Blucher, 1976.

Zadeh, L. A. **Fuzzy Sets** – Information and Control 8 : 338-53, 1965.