



DAVID MIGUEL SOARES JUNIOR

**FRONTEIRAS MATERIAIS NA ELETRODINÂMICA DE
CARROLL-FIELD-JACKIW**

LAVRAS – MG

2025

DAVID MIGUEL SOARES JUNIOR

**FRONTEIRAS MATERIAIS NA ELETRODINÂMICA DE
CARROLL-FIELD-JACKIW**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, com área de concentração em Física, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Luiz Cleber Tavares de Brito
Orientador

Prof. DSc. Luiz Henrique Campos Borges
Coorientador

**LAVRAS – MG
2025**

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Soares Jr, David Miguel

Fronteiras Materiais na Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw / David Miguel Soares Junior. – Lavras : UFLA, 2025.
66 p. : il.

Dissertação(Mestrado)–Universidade Federal de Lavras,
2025.

Orientador: Prof. DSc. Luiz Cleber Tavares de Brito.
Bibliografia.

1. Violação de Lorentz. 2. Eletrodinâmica de CFJ. 3. Fronteiras Materiais. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

DAVID MIGUEL SOARES JUNIOR

**FRONTEIRAS MATERIAIS NA ELETRODINÂMICA DE
CARROLL-FIELD-JACKIW**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, com área de concentração em Física, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 14 de Fevereiro de 2025.

Prof. DSc. Rodrigo Santos Bufalo UFLA
Prof. DSc. Fabrício Augusto Barone Rangel UNIFEI

Prof. DSc. Luiz Cleber Tavares de Brito
Orientador

Prof. DSc. Luiz Henrique Campos Borges
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

Dedico à minha mãe, Rosineide.

AGRADECIMENTOS

Ao longo deste breve período de Mestrado, tive a honra de trabalhar, conhecer e interagir com pessoas que enriqueceram significativamente minha experiência acadêmica. Além disso, contei com o apoio de indivíduos que foram essenciais para eu me tornar quem sou hoje, tanto como acadêmico quanto como ser humano. Muitas pessoas foram importantes nesse processo, mas, neste referencial (não inercial), reconheço que não há tempo nem espaço para citar todas. Peço desculpas por eventuais omissões e expresso aqui minha gratidão:

Aos meus pais, Rosineide da Costa Pereira e Davi Miguel Soares, por me proporcionarem as maiores lições de vida que já tive. Vocês foram minha primeira e mais importante escola. A vocês devo meu caráter, amor e vida.

Aos meus irmãos de sangue: Pollyanna, por todo o amor e por sua contribuição em minha criação; e Matheus, pelo companheirismo e amizade.

Aos irmãos que a vida me deu: Henrique e Luiz, por sua amizade, apoio e conselhos inestimáveis.

À Letícia, minha musa inspiradora, pelo amor, apoio e paciência. Obrigado por ser meu porto seguro em momentos de insegurança e ansiedade. Mesmo com a distância que nos separou em boa parte deste período, Lavras nos proporcionou momentos únicos. Sem você, toda a experiência do mestrado teria sido menos colorida, menos vívida e mais opaca.

À minha tia Elizete ("tia Zete"), que sempre nos ajudou em casa e que me deu grande suporte no começo do mestrado.

Aos meus orientadores, Luiz Cleber e Luiz Henrique, carinhosamente chamados por mim de "os Luízes"(risos). Os senhores foram cruciais nesta etapa da minha formação. Este trabalho é, em grande parte, fruto de seus ensinamentos. Sou imensamente grato por cada conselho e orientação, que carregarei comigo por toda a vida. Obrigado pela oportunidade de trabalhar com os senhores e espero que possamos colaborar em muitos outros projetos no futuro.

À banca avaliadora: Prof. Rodrigo Búfalo e Prof. Fabrício Barone, por aceitarem avaliar este trabalho. Tenho certeza de que seus apontamentos serão de grande valia.

Ao Prof. Jean Carlos Coelho Felipe. Tive sorte de tê-lo como mentor em todo o período da minha graduação. Grande parte do que sei sobre física devo a você. Espero que, no futuro, possamos colaborar de igual para igual.

Aos amigos que o Departamento de Física me deu: Nathan, Renan, Thiago, Antônia ("Toíinha"), Priscila, Camila, Daniel e João. Sentirei saudade das algazarras que fazíamos na sala da pós-graduação. Os momentos de descontração foram fundamentais para aliviar a tensão entre uma prova e outra.

Aos meus amigos de longa data: Wesley ("Wess"), Hudson, Joel ("Jorel"), Brendon ("Don"), Gustavo ("Delsa"), Gilberto ("Tio Gil"), Matheus ("Theus") e Rafael ("Rafa").

Aos meus sogros, Orlinda e Eduardo, por me acolherem como um filho e por todo o apoio ao longo desta jornada.

Aos professores do Departamento de Física.

À Universidade Federal de Lavras, por ser o cenário dessa etapa tão importante da minha vida.

E, por fim, à CAPES, pelo apoio financeiro essencial para a viabilização deste trabalho.

*Eu quase que nada não sei.
Mas desconfio de muita coisa.
(Guimarães Rosa)*

RESUMO

Este trabalho investiga certos aspectos do setor CPT-ímpar do fóton do Modelo Padrão Estendido (MPE) mínimo na presença de uma placa perfeitamente condutora (espelho perfeito). O setor considerado é descrito pela eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), onde a violação de Lorentz ocorre devido à presença de um único vetor de fundo denotado como $(k_{AF})^\mu$, que foi tratado de forma perturbativa até a segunda ordem. Especificamente, derivou-se o propagador modificado para o campo eletromagnético devido à presença do espelho perfeito, e estudou-se a interação correspondente entre o espelho e uma carga pontual estacionária. Os resultados revelam que quando a carga está posicionada perto do espelho, surge um torque espontâneo, que é um efeito único da quebra de simetria de Lorentz. Além disso, é demonstrado que o método da imagem para esta teoria é aplicável quando o vetor de fundo tem apenas o componente perpendicular ao espelho.

Palavras-chave: Carroll-Field-Jackiw; Eletrodinâmica Planar; Setor CPT-ímpar; Modelo Padrão Estendido; Física de Partículas e Campos.

ABSTRACT

This work investigates certain aspects of the CPT-odd photon sector of the minimal Standard Model Extension (SME) in the presence of a perfectly conducting plate (perfect mirror). The considered sector is described by Carroll-Field-Jackiw (CFJ) electrodynamics, where Lorentz violation is due to the presence of a single background vector denoted as $(k_{AF})^\mu$, which we treat perturbatively up to second order. Specifically, we derive the modified propagator for the electromagnetic field due to the presence of the perfect mirror, and we study the corresponding interaction between the mirror and a stationary point-like charge. Our results reveal that when the charge is positioned near the mirror, a spontaneous torque emerges, which is a unique effect of Lorentz symmetry breaking. Additionally, we demonstrate that the image method for this theory is applicable when the background vector has only the component perpendicular to the mirror.

Keywords: Carroll-Field-Jackiw; Planar Electrodynamics; CPT-odd sector; minimal Standard Model Extension; Particle and Field Physics.

IMPACTOS SOCIAIS, TECNOLÓGICOS, ECONÔMICOS E CULTURAIS

O trabalho tem como foco principal a investigação teórica de aspectos do setor CPT-ímpar do Modelo Padrão Estendido (MPE), especificamente na eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), que envolve a violação da simetria de Lorentz. Embora o estudo seja predominantemente teórico e voltado para a física fundamental, ele tem o potencial de gerar impactos tecnológicos e sociais indiretos, principalmente no longo prazo, como por exemplo: desenvolvimento de novos materiais e dispositivos, especialmente em cenários onde a simetria de Lorentz é violada; tecnologias quânticas, onde o estudo de efeitos quânticos em sistemas com violação de Lorentz pode contribuir para o avanço de tecnologias quânticas, como computação quântica e comunicação quântica. A compreensão de como a violação de Lorentz afeta as interações entre partículas e campos pode ser relevante para o controle de qubits e a manipulação de estados quânticos. Embora os impactos sociais diretos possam não ser imediatamente evidentes, o avanço no entendimento da física fundamental, como a violação de Lorentz, pode levar a mudanças paradigmáticas na nossa compreensão do universo. Isso pode influenciar a educação científica e a forma como ensinamos física, além de inspirar novas gerações de cientistas. No entanto, a realização desses impactos dependerá de avanços futuros tanto na teoria quanto na tecnologia experimental.

SOCIAL, TECHNOLOGICAL, ECONOMIC AND CULTURAL IMPACTS

The work primarily focuses on the theoretical investigation of aspects of the CPT-odd sector of the Standard Model Extended (SME), specifically in Carroll-Field-Jackiw (CFJ) electrodynamics, which involves the violation of Lorentz symmetry. Although the study is predominantly theoretical and aimed at fundamental physics, it has the potential to generate indirect technological and social impacts, particularly in the long term, such as: development of new materials and devices, especially in scenarios where Lorentz symmetry is violated; quantum technologies, where the study of quantum effects in systems with Lorentz violation could contribute to the advancement of quantum technologies, such as quantum computing and quantum communication. Understanding how Lorentz violation affects interactions between particles and fields could be relevant for qubit control and the manipulation of quantum states. Although direct social impacts may not be immediately evident, the advancement in understanding fundamental physics, such as Lorentz violation, could lead to paradigm shifts in our comprehension of the universe. This could influence scientific education and how we teach physics, as well as inspire new generations of scientists. However, the realization of these impacts will depend on future advances in both theory and experimental technology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Comprimento de Planck l_P e outras ordens de magnitude associadas com várias escalas de comprimentos característicos.	13
Figura 1.2 – Matvei Bronstein.	13
Figura 2.1 – Duas cargas pontuais interagentes q_1 e q_2 (em vermelho) separadas por uma distância $R = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 $, tal que $\mathbf{a}_i = (0, 0, a_i)$	24
Figura 2.2 – Placa condutora perfeita sobre o plano (x^1, x^2) a uma altura a da origem do eixo x^3	25
Figura 2.3 – Carga pontual q e o plano condutor separados por uma distância R	34
Figura 2.4 – Equivalência entre a configuração placa-carga e um sistema de duas cargas de sinais opostos. Inicialmente (a esquerda da seta vermelha) o sistema é representado por uma placa (barra vertical em cinza) e a carga (ponto em vermelho). Depois (a direita da seta) o sistema é reconfigurado para uma carga q e sua carga imagem $-q$	36
Figura 3.1 – Decomposição de $\mathbf{k}_{AF} = ((k_{AF})_{\parallel}, (k_{AF})^3)$ em relação ao espelho, com α sendo o ângulo entre a componente $(k_{AF})^3$ normal ao espelho e o vetor de fundo $\mathbf{k}_{AF}$	53
Figura 3.2 – Gráfico de $\tau_{PC} \times \left(\frac{16\pi}{q^2 \mathbf{k}_{AF}^2 R_0} \right)$ dado pela equação (3.77) (eixo vertical). Os eixos estão em unidades adimensionais relativas a escala característica $R_0 = 10^{-6}\text{m}$	53
Figura 1 – Curvas de integração C_1 e C_2 sobre o plano complexo. a) Curva fechada C_1 (semicírculo superior) envolvendo o polo $\Gamma + i\varepsilon$. b) Curva fechada C_2 (semicírculo inferior) envolvendo o polo $-\Gamma - i\varepsilon$	64

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Uma Breve Digressão Histórica	11
1.2	Motivação e Revisão da Literatura	14
1.3	Objetivos	16
1.4	Estrutura Textual	17
1.5	Convenções	17
2	FONTES DE CAMPO E FRONTEIRAS NA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL	19
2.1	Fontes e Campos Na Eletrodinâmica de Maxwell	19
2.1.1	O Propagador do Fóton Livre	21
2.1.2	Energia e Força de Interação	23
2.2	Fronteira Material na Eletrodinâmica de Maxwell	24
2.2.1	O Propagador do Fóton na Presença de uma Placa Condutora	25
2.2.2	Energia e Força de Interação Placa-Carga	33
2.2.3	O Método das Imagens	35
3	FONTES DE CAMPO E FRONTEIRAS NA ELETRODINÂMICA DE CARROLL-FIELD-JACKIW	37
3.1	Fontes Na Eletrodinâmica de CFJ	37
3.1.1	O Propagador do Fóton Livre	38
3.1.2	Energia, Força de Interação e Torque	40
3.2	Fronteira Material na Eletrodinâmica de CFJ	41
3.2.1	O Propagador do Fóton Na Presença de Uma Placa Condutora	41
3.2.2	Energia e Força de Interação Placa-Carga	49
3.2.3	O Método das Imagens	51
3.2.4	Torque devido a quebra da simetria de Lorentz	52
4	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	55
	REFERÊNCIAS	57
	APENDICE A – INTEGRAIS RECORRENTES	64

1 INTRODUÇÃO

Efeitos da gravitação quântica devem ser considerados em uma escala de energia da ordem de 10^{19} GeV (escala de Planck) (WILCZEK, 2005). Uma abordagem possível do espaço-tempo nessa escala de energia envolve uma quebra espontânea das simetrias CPT e relativísticas. Tais investigações têm sido conduzidas principalmente no contexto do Modelo Padrão Estendido (MPE) (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997; COLEMAN; GLASHOW, 1999; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). As anisotropias espaço-temporais do modelo são introduzidas por meio de quantidades tensoriais que surgem como valores esperados no vácuo de campos de uma teoria mais geral. Os efeitos ocasionados por esses tensores constantes são interpretados como uma violação da simetria de Lorentz em um referencial particular (transformações ativas). A busca das consequências de uma possível quebra da simetria de Lorentz tornou-se um campo ativo de pesquisa. Os limites dos valores experimentais dos parâmetros que violam a simetria de Lorentz nos diferentes setores do MPE foram fixados a partir de diversos contextos físicos (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2011).

1.1 Uma Breve Digressão Histórica

Em 1899, Max Planck propôs um sistema de unidades absolutas fundamentado em constantes universais: a velocidade da luz c , a constante gravitacional G , a constante de Planck h e a constante de Boltzmann k_B (WILCZEK, 2005). Com essas constantes, é possível definir unidades de massa (m_P), comprimento (l_P), tempo (t_P) e temperatura (T_P) permitindo que grandezas físicas possam ser expressas em relação à escala de Planck, ou seja, em termos adimensionais. Durante o século XX, verificou-se que c , G e $\hbar$ (a constante reduzida de Planck) desempenham papéis cruciais na formulação de conceitos fundamentais da física, como a unificação de espaço e tempo na relatividade especial, a relação entre curvatura do espaço-tempo e densidade de energia na relatividade geral, e a dualidade onda-partícula na teoria quântica. A Tabela 1.1 apresenta a relação entre as unidades de Planck e as constantes fundamentais.

Um dos trabalhos pioneiros no campo da gravitação quântica que combina as constantes c , G e $\hbar$ foi o artigo de 1936 do físico soviético Matvei Bronstein (cuja imagem está representada na Figura 1.2) (BRONSTEIN, 2012). Ao tentar quantizar a Relatividade Geral (RG)

linearizada¹, Bronstein formulou relações de comutação para os desvios da métrica de Minkowski, derivando um princípio de incerteza análogo ao princípio de Heisenberg:

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} + G\rho^2 \frac{V\Delta x}{\Delta t}, \quad (1.1)$$

onde Δp_x , Δx e Δt representam as incertezas do momento, da posição e do tempo, respectivamente. As constantes G e h correspondem às constantes gravitacional e de Planck. Os parâmetros ρ e V se referem à densidade e ao volume de um corpo teste.

Tabela 1.1 – Relação entre as unidades de Planck e as constantes fundamentais.

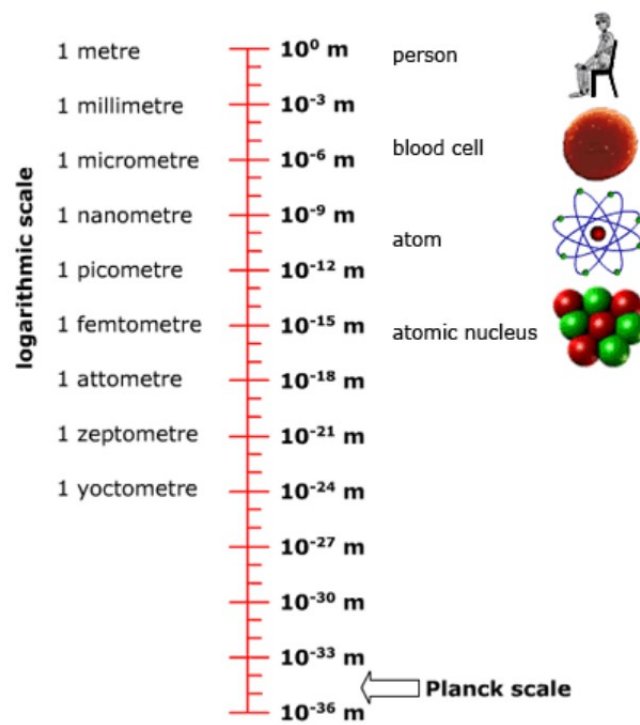
Unidade	Expressão	Ordem de grandeza
Comprimento de Planck	$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$	10^{-35} m
Massa de Planck	$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	10^{-8} kg
Tempo de Planck	$t_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$	10^{-44} s
Temperatura de Planck	$T_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{Gk_B^2}}$	10^{32} K

A equação (1.1) revela um princípio de incerteza similar ao da Mecânica Quântica (MQ), mas com uma contribuição adicional associada ao efeito do procedimento de medida sobre o campo gravitacional. Nas escalas usuais de experimentos descritos pela MQ, a contribuição gravitacional é extremamente pequena em relação ao primeiro termo da equação (1.1). Entretanto, na escala de Planck os efeitos gravitacionais tornam-se significativos (BRONSTEIN, 2012). A Figura 1.1 permite comparar diferentes ordens de magnitude de escalas de comprimento com a escala de Planck.

O trabalho de Bronstein sugere que a MQ, por si só, é insuficiente para descrever a física na escala de Planck, sendo necessária uma teoria de gravitação quântica para este regime. No entanto, é amplamente conhecido que a RG é uma teoria não renormalizável. Do ponto de vista histórico, o sucesso do MP - uma teoria renormalizável - sugeriu a necessidade de modificação da RG para descrever os efeitos gravitacionais no nível quântico (PETROV; NASCIMENTO; PORFIRIO, 2023).

¹ Na qual a métrica geral é expressa por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, com $\eta_{\mu\nu}$ sendo a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ um pequeno desvio.

Figura 1.1 – Comprimento de Planck l_P e outras ordens de magnitude associadas com várias escalas de comprimentos característicos.



Fonte: (WOLFE, 2005)

Figura 1.2 – Matvei Bronstein.



Fonte: (GORELIK, 2005)

No final da década de 1980, Alan Kostelecký e Stuart Samuel demonstraram que a simetria de Lorentz pode ser quebrada por tensores que emergem de um limite de baixas energias das teorias de cordas. Essa quebra resulta em um efeito gravitacional análogo ao mecanismo de Higgs. Kostelecký e Samuel (1989b), Kostelecký e Samuel (1989a), Kostelecký e Samuel (1989c).

Ainda no âmbito das teorias de dimensões $D > 4$, em 1991, Kostelecký e Potting mostraram que o teorema CPT não é válido em geral nas teorias de cordas, sendo aplicável apenas em casos específicos. Esse resultado indica que a teoria de cordas, devido à sua natureza não local, permite a quebra espontânea de simetrias discretas, ou pelo menos a combinação delas (SCHWARTZ, 2008; POLCHINSKI, 1994; KOSTELECKÝ; POTTING, 1991).

Com o objetivo de facilitar investigações experimentais sobre a validade das simetrias de Lorentz e CPT, Colladay e Kostelecký desenvolveram o modelo teórico do MPE mínimo (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997; COLEMAN; GLASHOW, 1999; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). Este modelo incorpora ao MP todos os termos possíveis (respeitando a renormalizabilidade do MP e a invariância de calibre $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$) que envolvem tensores de fundo constantes. Para cada setor do MPE, as contribuições que violam a simetria de Lorentz na Lagrangiana são classificadas em dois tipos: CPT-ímpar e CPT-par. Os termos CPT-ímpar quebram a simetria CPT, enquanto os termos CPT-par preservam essa simetria.

1.2 Motivação e Revisão da Literatura

Em particular, o setor eletromagnético do MPE mínimo é composto por uma parte CPT-ímpar e uma parte CPT-par. A parte CPT-ímpar é descrita pela eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), onde à Lagrangiana de Maxwell é adicionado o termo $\sim \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (k_{AF})_\mu A_\nu F_{\alpha\beta}$ (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990), com $(k_{AF})^\mu$ sendo o vetor de fundo responsável pela violação de Lorentz. Os efeitos do termo CFJ têm sido amplamente estudados na literatura no contexto da eletrodinâmica clássica (BORGES; FERRARI, 2022; RIBEIRO; SILVA; JR, 2023; BARREDO-ALAMILLA; URRUTIA; JR, 2023; SILVA et al., 2021; JR et al., 2020), correções radiativas (ALFARO et al., 2010; ANDRIANOV et al., 2009; BRITO et al., 2021; SANTOS; SOBREIRO, 2017; FELIPE et al., 2014), eletrodinâmica quântica (QED) (GOMES; MALTA, 2016; ADAM; KLINKHAMER, 2001; ADAM; KLINKHAMER, 2003), defeitos topológicos

(CASANA et al., 2014; CASANA; SOURROUILLE, 2013), entre outros. Os limites experimentais também são conhecidos (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2011).

O setor CPT-par é obtido adicionando o termo $\sim (K_F)^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ à Lagrangiana de Maxwell, onde o tensor de fundo $(K_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$ possui 19 coeficientes independentes, sendo 10 deles sensíveis à birrefringência e 9 não birrefringentes (KOSTELECKÝ; MEWES, 2002a). Alguns aspectos envolvendo este setor foram investigados em (BORGES; BARONE; HELAYËL-NETO, 2014; BORGES; BARONE, 2019; BORGES; BARONE, 2016; CASANA et al., 2010; CASANA; JR; SILVA, 2010; CASANA et al., 2009; KOSTELECKÝ; MEWES, 2001; KOSTELECKÝ; MEWES, 2002b; KOSTELECKÝ; MEWES, 2006; SANTOS; JR, 2018).

As teorias de campos quânticos na presença de condições de contorno não triviais têm sido objeto de grande interesse e exploração na literatura, encontrando amplas aplicações em várias áreas da física. Exemplos incluem estudos onde potenciais tipo δ acoplados a campos são usados para descrever fronteiras materiais (BARONE; BARONE, 2014b; CAMILO; BARONE; BARONE, 2013; OLIVEIRA et al., 2021; MILTON, 2001; BORDAG; MOHI-DEEN; MOSTEPANENKO, 2001; MILTON, 2004; BORDAG; KIRSTEN; VASSILEVICH, 1999; GRAHAM et al., 2002; GRAHAM et al., 2003; SUNDBERG; JAFFE, 2004; CAVALCANTI, 2002; BARONE; BARONE, 2014a), investigações relacionadas à eletrodinâmica de Lee-Wick (BARONE; NOGUEIRA, 2015; BARONE; NOGUEIRA, 2016; BLAZHYEVSKA, 2012; BORGES et al., 2020; BORGES; BARONE, 2022), e o exame de certos aspectos de teorias planares devido à presença de condições de contorno (BORGES; BARONE, 2022; BORGES et al., 2020; BORGES; BARONE; OLIVEIRA, 2022).

Teorias envolvendo a quebra de simetria de Lorentz sob a influência de condições de contorno merecem investigação adicional, uma vez que configurações eletromagnéticas em experimentos reais são tipicamente cercadas por condutores. Esses condutores precisam ser devidamente considerados em modelos teóricos. Nesse contexto, os primeiros estudos sobre a violação de Lorentz com condições de contorno para o setor eletromagnético do MPE mínimo foram realizados na referência (BAILEY; KOSTELECKÝ, 2004).

É bem conhecido que o efeito Casimir (CASIMIR, 1948; SPARNAAY, 1958) é uma das manifestações mais diretas da existência de flutuações quânticas do vácuo. A maneira mais simples de explorar esse efeito é a situação onde ocorre a interação entre duas placas paralelas localizadas no vácuo. No contexto do MPE mínimo, as primeiras investigações do efeito Casimir foram realizadas nas referências (FRANK; TURAN, 2006; KHARLANOV; ZHUKOVSKY,

2010). Também mencionamos vários outros trabalhos relacionados ao efeito Casimir em um cenário com violação de Lorentz (CRUZ; MELLO; PETROV, 2017; CRUZ; MELLO; PETROV, 2018; SANTOS; KHANNA, 2016; SILVA; BELICH; HELAYEL-NETO, 2016; MARTÍN-RUIZ; ESCOBAR, 2016; SILVA; MELLO, 2020; MARTÍN-RUIZ et al., 2020; MOJAVEZI; MOAZZEMI; ZOMORRODIAN, 2019; CRUZ; MELLO; PETROV, 2019; ESCOBAR; MEDDEL; MARTÍN-RUIZ, 2020; ERDAS, 2020; VALUYAN, 2020; CRUZ; MELLO; MOTA, 2020; BLASONE et al., 2018; DANTAS; MOTA; MELLO, 2023; ROHIM; ROMADANI; ADAM, 2024; ARAÚJO; FURTADO; MALUF, 2024; MELLO; CRUZ, 2023; MARTÍN-RUIZ; ESCOBAR, 2017).

Adicionalmente, estudos exploraram a eletrodinâmica de Maxwell com violação de Lorentz devido à presença de um condutor perfeito (espelho perfeito) no MPE mínimo (BORGES; BARONE, 2017) e no MPE não mínima (BORGES; BARONE, 2020), a qual inclui termos com violação de Lorentz contendo derivadas de ordem superior (KOSTELECKÝ; MEWES, 2013; KOSTELECKÝ; MEWES, 2009; KOSTELECKÝ; LI, 2019), bem como efeitos relacionados à presença de um espelho semitransparente (BORGES; FERRARI; BARONE, 2020; BORGES; FERRARI, 2022).

Focando no MPE mínimo, a referência (BORGES; BARONE, 2017) investigou algumas características do setor de calibre CPT-par com violação de Lorentz na presença de uma placa perfeitamente condutora. No entanto, uma investigação similar para o setor de calibre CPT-ímpar ainda não foi considerada na literatura até o momento. Explorar esse aspecto pode ser de interesse para compreender os tipos de fenômenos físicos que podem surgir nesse setor na proximidade de um condutor. Além disso, tem havido um interesse significativo em entender as características da eletrodinâmica CFJ.

1.3 Objetivos

Esta dissertação é dedicada à exploração dos efeitos de uma placa perfeitamente condutora sobre uma partícula carregada no contexto do setor CPT-ímpar de fótons puros do MPE mínimo. Especificamente, focamos no modelo CFJ, investigando os efeitos da violação de Lorentz decorrentes da presença de um único espelho perfeito. O vetor de fundo $(k_{AF})^\mu$ é assumido como sendo muito pequeno, e o tratamos perturbativamente até a segunda ordem.

1.4 Estrutura Textual

No Capítulo 2, utilizando o formalismo funcional, serão obtidos resultados clássicos da Eletrodinâmica de Maxwell. Na Seção 2.1, será calculado o propagador livre do fóton, seguido pelo cálculo da energia e da força de interação entre duas cargas pontuais. Com base na metodologia apresentada em (BORDAG; ROBASCHIK; WIECZOREK, 1985), na Seção 2.2, será derivado o propagador da teoria na presença de uma fronteira condutora. Utilizando este propagador, serão calculadas a energia e a força de interação entre uma carga pontual e a placa condutora. Ao final do Capítulo 2, será feita uma breve discussão sobre o método das imagens.

De forma análoga, no Capítulo 3, investigaremos os efeitos da Eletrodinâmica de CFJ tanto na ausência (Seção 3.1) quanto na presença (Seção 3.2) de fronteiras materiais. Na Subseção 3.1.1, será derivado o propagador livre para o campo de calibre, que será utilizado na Subseção 3.1.2 para calcular a energia e a força de interação entre duas cargas pontuais. Também será calculada a presença de um torque entre as duas partículas. Na Subseção 3.2.1, será derivado o propagador do campo de calibre na presença de uma placa condutora. Em seguida, na Subseção 3.2.2, serão calculadas a energia e a força de interação entre uma carga pontual estacionária e o espelho perfeito.

Na Subseção 3.2.3, comparamos os resultados obtidos nas subseções 3.2.2 e 3.1.2, verificando que o método das imagens é válido quando o vetor de fundo possui apenas a componente perpendicular ao espelho. Por fim, na Subseção 3.2.4, demonstraremos que a proximidade de uma carga com o espelho induz um torque espontâneo no sistema, fenômeno que está ausente na eletrodinâmica de Maxwell convencional com um espelho perfeito.

O Capítulo 4 é dedicado às considerações finais e conclusões, consolidando os principais resultados e expondo algumas perspectivas futuras.

1.5 Convenções

Ao longo deste texto, o espaço-tempo de Minkowski possui dimensão $(3 + 1)$ com métrica $\eta^{\rho\nu} = (1, -1, -1, -1)$. Utilizaremos também a convenção para o pseudo-tensor de Levi-Civita $\epsilon^{0123} = 1$. Além disso, adotamos o sistema de unidades naturais, em que $\epsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$, cujas quantidades ϵ_0 , μ_0 , c e $\hbar$ são: a permissividade elétrica do vácuo, a permea-

bilidade magnética do vácuo, a velocidade da luz no vácuo e a constante reduzida de Planck, respectivamente.

2 FONTES DE CAMPO E FRONTEIRAS NA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL

A teoria eletromagnética de Maxwell é uma das descrições mais bem-sucedidas da física. Contudo, é possível modificar o eletromagnetismo usual (NOVELLO, 2010; KRUGLOV, 2017; HEISENBERG; EULER, 1936; BORN; INFELD, 1934). Como referido no Capítulo 1, uma possibilidade é introduzir a quebra da simetria de Lorentz, o que induz naturalmente uma modificação da teoria de Maxwell a partir do fato de o eletromagnetismo ser uma teoria relativística. Tal perspectiva nos permite interpretar o modelo maxwelliano como uma aproximação de uma teoria mais geral. O propósito deste capítulo é apresentar a metodologia necessária para a análise da extensão do eletromagnetismo de Maxwell que será investigada posteriormente.

Serão apresentados alguns resultados da Eletrostática que são bem conhecidos na literatura (GRIFFITHS, 2011; MACHADO, 2002; JACKSON, 1983). Mais especificamente, na seção 2.1, é calculada a energia e a força de interação entre duas cargas puntiformes. Em seguida, na seção 2.2, são realizados cálculos semelhantes para a interação entre uma carga puntiforme e uma placa perfeitamente condutora e infinita. Ao contrário do que é feito na literatura usual, tais efeitos físicos serão calculados via método de integrais de caminho de Feynman (FEYNMAN; BROWN, 2005), que servirá como base para o desenvolvimento do capítulo 3. Ao final do capítulo, serão comparados os resultados obtidos para a força de interação entre placa e carga, calculados via integrais de caminho e via método das imagens.

2.1 Fontes e Campos Na Eletrodinâmica de Maxwell

A teoria eletrodinâmica clássica é descrita por meio das equações de Maxwell (MACHADO, 2002) (em termos de unidades naturais)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (\text{Lei de Gauss}); \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss para o magnetismo}); \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday}); \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell}), \quad (2.4)$$

juntamente com a força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.5)$$

de modo que as quantidades $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ representam os campos elétrico e magnético, respectivamente. Tais campos são gerados pelas densidades de carga ρ e corrente $\mathbf{J}$ (respectivamente), quantidades essas que são provenientes da distribuição de carga q e de sua velocidade $\mathbf{v}$. As equações de Maxwell expressam como os campos são gerados e como eles interagem entre si, enquanto a força de Lorentz descreve a dinâmica das cargas em decorrência dos campos (GRIFFITHS, 2011; MACHADO, 2002).

Por meio do formalismo Lagrangiano, é possível associar as equações (3.2 e 3.3) como equações de movimento ¹ advindas da densidade Lagrangiana ² (LEMOS, 2013)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu, \quad (2.6)$$

em que $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ é uma fonte externa, e $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ é chamado de quadripotencial, onde o potencial elétrico ϕ e o potencial vetor $\mathbf{A}$ são grandezas derivativas dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente (GRIFFITHS, 2011; MACHADO, 2002; HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). Por sua vez, o tensor do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ é definido como sendo

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.7)$$

ou em termos da representação matricial

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

¹ As equações (3.4 e 3.5) são ditas “geométricas”, pois não são obtidas explicitamente por meio do método variacional, e sim por propriedades geométricas do tensor eletromagnético dual $F^{*\mu\nu}$ (JACKSON, 1983).

² Apenas por economia de nomenclatura, este trabalho irá se referir a densidade Lagrangiana apenas como “Lagrangiana”.

Associado ao tensor $F^{\mu\nu}$, tem-se também o seu respectivo tensor dual

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \quad (2.9)$$

no qual é possível mostrar que $\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0$ ³, resultando nas equações homogêneas (3.4 e 3.5) (JACKSON, 1983).

2.1.1 O Propagador do Fóton Livre

Qualquer elemento de matriz de um observável físico pode ser calculado por meio da função de *Green* de N pontos $G^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ (GOMES, 2002). Tal função pode ser gerada através da n -ésima derivada funcional:

$$G^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = (-i)^N \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_N)} \Big|_{J=0} \quad (2.10)$$

tal que o funcional $Z[J]$ é chamado funcional gerador e é definido como

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}A e^{iS}. \quad (2.11)$$

A notação $\int \mathcal{D}A$ representa a soma sobre todas as configurações do campo $A(x)$ e S é a ação provida pela integração em d^4x da Lagrangiana do setor de interesse.

Para o setor do fóton, a ação S é descrita em termos da Lagrangiana (2.6) acrescida por um termo de fixação de calibre proporcional a $(\partial_\mu A^\mu)^2$, de modo a redefinir a Lagrangiana de Maxwell como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\gamma}(\partial_\mu A^\mu)^2 + J^\mu A_\mu, \quad (2.12)$$

com γ sendo o parâmetro de fixação de calibre. Tal termo adicional é essencial à quantização da teoria (FADDEEV; POPOV, 1967; GOMES, 2002; BARCELOS-NETO, 2017).

Um objeto de particular interesse é a função de *Green* de dois pontos $G^{(2)}(x, y)$, também chamada de propagador completo da teoria. Na ausência de interações, essa função é o propagador da teoria livre, denotado por $D_{\mu\nu}(x, y)$ (GOMES, 2002; FEYNMAN; BROWN, 2005). Por meio do propagador da teoria livre, na prescrição de Feynman (propagador de Feynman) é possível representar as demais funções de *Green* perturbativamente através da representação em

³ Essa identidade é trivialmente satisfeita já que $\partial_\mu \partial_\rho \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$.

termos de diagramas de Feynman, úteis para o cálculo de processos de espalhamento da Teoria Quântica de Campos (TQC) (PESKIN, 2018; GOMES, 2002). No que segue, estaremos interessados apenas no propagador de Feynman da teoria livre. Para simplificar notação, o termo $i\epsilon$ será omitido ao longo dos cálculos.

Em geral, o propagador livre pode ser calculado de maneira simples utilizando o seguinte método: integrando por partes a ação definida pela Lagrangiana (2.12) e assumindo que quaisquer termos de quadridivergência vão a zero sobre o bordo do quadrivolume $\Omega(x)$, obtém-se

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x A_{\mu} \mathcal{O}^{\mu\nu} A_{\nu} - \int_{\Omega} d^4x J^{\mu} A_{\mu}, \quad (2.13)$$

em que o operador diferencial é dado por

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} = \square \eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \partial_{\mu} \partial_{\nu}. \quad (2.14)$$

Em seguida, utiliza-se o método das funções de *Green* (GOMES, 2002), de modo que o propagador livre seja a inversa do operador $\mathcal{O}_{\mu\nu}$:

$$\square \eta_{\mu\nu} D_{\lambda}^{\nu}(x, y) = \eta_{\mu\nu} \delta^4(x - y). \quad (2.15)$$

Ao reescrever a equação (2.15) no espaço dos momentos, obtém-se a respectiva representação do propagador livre ⁴

$$\tilde{D}_{\mu\lambda}(p) = -\frac{1}{p^2} \left(\eta_{\mu\lambda} - (1 - \xi) \frac{p_{\mu} p_{\lambda}}{p^2} \right), \quad (2.16)$$

em que

$$D_{\mu\lambda}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}_{\mu\lambda}(p). \quad (2.17)$$

Escolhendo o calibre de Feynman $\gamma = 1$, tem-se por fim

$$\tilde{D}_{\mu\lambda}(p) = -\frac{\eta_{\mu\lambda}}{p^2}. \quad (2.18)$$

⁴ Em nossa convenção omitimos o fator $i = \sqrt{-1}$ na definição do propagador livre. A função de *Green* de dois pontos calculada de $Z[J]$ será $G^{(2)}(x, y) = iD_{\mu\nu}(x, y)$.

2.1.2 Energia e Força de Interação

Obtido o propagador da teoria, pode-se calcular a energia de interação associada a uma fonte J^μ por meio da relação (BARONE; BARONE, 2014b; OLIVEIRA et al., 2021; BARONE; NOGUEIRA, 2015; BORGES; BARONE, 2022; BORGES et al., 2020; BORGES; BARONE; OLIVEIRA, 2022; BORGES; BARONE, 2017; BORGES; BARONE, 2020; BORGES; FERRARI, 2022)

$$E = \frac{1}{2T} \int \int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y), \quad (2.19)$$

sendo que o intervalo de tempo T deve ser tomado no limite $T \rightarrow \infty$.

Seja uma fonte do tipo $J^\mu(x) = q_1 \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + q_2 \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)$ que descreve duas cargas pontuais q_1 e q_2 nas respectivas posições $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ (como mostra a Figura 2.1). A partir do propagador (2.18) e da relação (2.19), tem-se que a energia média de interação entre as duas cargas puntiformes (CC):

$$\begin{aligned} E_{CC} &= \frac{1}{2T} \int \int d^4x d^4y [q_1 \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + q_2 \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)] D_{\mu\nu}(x, y) [q_1 \eta^{\nu 0} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{a}_1) + \\ &\quad + q_2 \eta^{\nu 0} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{a}_2)] \\ &= \frac{q_1 q_2}{2T} \int \int dx^0 dy^0 D'_{00}(x^0, y^0; R) + \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{2T} \int \int dx^0 dy^0 D'_{00}(x^0, y^0; 0), \end{aligned} \quad (2.20)$$

tal que

$$D'_{00}(x^0, y^0; R) \equiv - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \frac{e^{i|\mathbf{p}|R \cos \theta} + e^{-i|\mathbf{p}|R \cos \theta}}{p^2}. \quad (2.21)$$

Em (2.20) e (2.21), a notação x^0 e y^0 representam as componentes temporais de x e y (respectivamente), $R \equiv |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|$ e o fator $\cos \theta$ é proveniente do produto interno entre $\mathbf{p}$ e $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$, com θ sendo o ângulo polar.

Desconsiderando efeitos de auto-interação (termos proporcionais a q_i^2), o cálculo da energia se reduz apenas à primeira integral (proporcional a $q_1 q_2$) do lado direito da equação (2.20). Essa integral pode ser resolvida primeiramente integrando em x^0 (ou y^0) e em seguida integrando em $p^0 \equiv (p^0, 0, 0, 0)$, de modo que

$$E_{CC} = \frac{q_1 q_2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i|\mathbf{p}|R \cos \theta} + e^{i|\mathbf{p}|R \cos \theta}}{|\mathbf{p}|^2}. \quad (2.22)$$

Reescrevendo (2.22) em coordenadas polares e resolvendo a integração, tem-se que a energia de interação é dado por

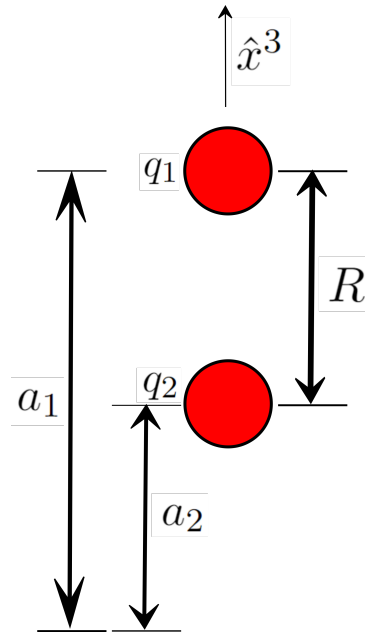
$$E_{CC} = \frac{q_1 q_2}{4\pi R}. \quad (2.23)$$

A partir da expressão acima, calcula-se a força de interação

$$F_{CC} = -\frac{\partial E_{CC}}{\partial R} = \frac{q_1 q_2}{4\pi R^2}, \quad (2.24)$$

que corresponde justamente à lei de Coulomb para duas cargas pontuais.

Figura 2.1 – Duas cargas pontuais interagentes q_1 e q_2 (em vermelho) separadas por uma distância $R = |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|$, tal que $\mathbf{a}_i = (0, 0, a_i)$.



2.2 Fronteira Material na Eletrodinâmica de Maxwell

Esta seção segue a mesma forma metodológica da seção 2.1. A diferença é que agora o interesse é calcular os efeitos introduzidos pela presença de uma fronteira material. Com isso, faz-se necessário introduzir condições de contorno que contenham as informações sobre a fronteira material imposta ao problema. Em linhas gerais, é possível fixar as condições de contorno no funcional gerador da teoria, de forma que se possa calcular o propagador com as correções da fronteira.

2.2.1 O Propagador do Fóton na Presença de uma Placa Condutora

A presença de uma superfície condutora impõe condições de contorno no campo de calibre A_μ , de forma que a força de Lorentz sobre tal superfície deve ser nula (BORGES; BARONE, 2017). Esta condição é dada por:

$$n^\mu F_{\mu\nu}^*(x) = 0, \quad (2.25)$$

em que n^μ é um vetor normal a superfície. Vamos assumir a superfície condutora como um plano (x^1, x^2) a uma distância a da origem do eixo x^3 , como ilustra a Figura 2.2 e, de modo que $n^\mu = \eta_3^\mu = (0, 0, 0, 1)$. Nesta configuração, a condição de contorno (2.25) é dada por:

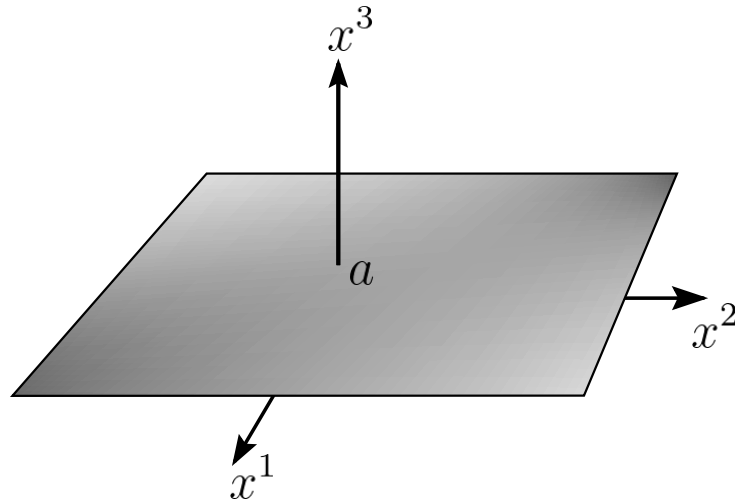
$$F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=a} = \epsilon_{3\nu}^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta(x)|_{x^3=a} = 0. \quad (2.26)$$

O funcional gerador com as condições de contorno (2.26) pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} Z_c[J] &= \int \mathcal{D}A_c e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \\ &= \int \mathcal{D}A \delta[F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=a}] e^{i \int d^4x \mathcal{L}}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $\mathcal{D}A_c$ é a medida de integração das configurações que satisfazem a condição de contorno (2.26). A delta funcional $\delta[F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=a}]$ age como um filtro, permitindo a existência apenas dos campos cuja configuração corresponde à condição $F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=a} = 0$.

Figura 2.2 – Placa condutora perfeita sobre o plano (x^1, x^2) a uma altura a da origem do eixo x^3 .



Por conseguinte, a transformada de Fourier da delta funcional é dada por

$$\delta[F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=a}] = \int \mathcal{D}B \exp \left(i \int d^4x \delta(x^3 - a) B_\nu(x_{||}) F_3^{*\nu}(x) \right), \quad (2.28)$$

tal que $B_\nu(x_{||})$ é um campo auxiliar advindo da transformada do funcional, de modo que tal campo só depende das coordenadas paralelas à placa $x_{||}^\mu = (x^0, x^1, x^2)$.

É possível verificar que o campo auxiliar exhibe simetria de calibre

$$B_\nu^{(k)}(x_{||}) \rightarrow B_\nu^{(k)}(x_{||}) + \partial_{\nu_{||}} \Lambda^{(k)}(x_{||}). \quad (2.29)$$

Portanto, é necessária a aplicação do método de Faddeev-Popov (**FADDEEV; POPOV, 1967**) para que a integral sobre $\mathcal{D}B$ não contenha as ambiguidades de calibre. Deste modo, define-se o funcional

$$F[B_\nu(x_{||})] \equiv \partial_{||}^\nu B_\nu(x_{||}) = f(x_{||}), \quad (2.30)$$

onde $f(x_{||})$ é uma função arbitrária. Aplicando (2.30) em (2.28), podemos escrever

$$\delta[F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=a}] \sim \int \mathcal{D}B \delta[F[B_\nu(x_{||})] - f(x_{||})] \exp \left(i \int d^4x \delta(x^3 - a) B_\nu(x_{||}) F_3^{*\nu}(x) \right). \quad (2.31)$$

O próximo passo é integrar por partes o argumento da exponencial acima e aplicar o truque de 't Hooft (**BORGES; BARONE, 2017**) através da redefinição da equação (2.31) por meio de um funcional conveniente de $f(x_{||})$:

$$\begin{aligned} \delta[F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=a}] &= N \int \mathcal{D}f \int \mathcal{D}B \delta[F[B_\nu(x_{||})] - f(x_{||})] \\ &\quad \times \exp \left(-i \int d^4x \delta(x^3 - a) A_\beta(x) \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x_{||}) \right) \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) f(x_{||}) Q(x, y) f(y_{||}) \delta(y^3 - a) \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Aqui, $Q(x, y)$ é uma função arbitrária, N é uma constante (na qual foi absorvido o determinante de Faddeev-Popov) e ξ é uma constante de fixação de calibre (em geral, diferente do parâmetro

γ do propagador livre que aparece em (2.16)). Ao substituir (2.32) em (2.27), obtém-se que

$$Z_c[J] = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \exp \left(-i \int d^4x \delta(x^3 - a) A_\beta(x) \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x_{||}) \right) \times \exp \left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) B_\mu(x_{||}) \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x_{\mu||} \partial y_{\nu||}} B_\nu(y_{||}) \delta(y^3 - a) \right). \quad (2.33)$$

Em seguida, escolhemos uma mudança de variável em (2.33) que desacople os campos $A_\beta(x)$ e $B_\nu(x)$. Tal desacoplamento é possível por meio da translação:

$$A^\beta(x) \rightarrow A^\beta(x) + \int d^4y D_{\alpha}^{\beta}(x, y) \delta(y^3 - a) \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\nu(y_{||}), \quad (2.34)$$

em que $D_{\beta\alpha}(x, y)$ é o propagador da teoria livre sem fronteiras. Aplicando (2.34) no segundo fator com a exponencial na primeira linha de (2.33), obtém-se

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta(x^3 - a) A_\beta(x) \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x_{||}) &\rightarrow \int d^4x \delta(x^3 - a) A_\beta(x) \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x_{||}) \\ &+ \int d^4x \delta(x^3 - a) \int d^4y D_{\beta\lambda}(x, y) \delta(y^3 - a) \epsilon_3^{\rho\phi\lambda} \partial_\phi B_\rho(y_{||}) \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x_{||}) \\ &= \int d^4x \delta(x^3 - a) A_\beta(x) \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x_{||}) \\ &+ \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) \delta(y^3 - a) B_\nu(x_{||}) B_\rho(y_{||}) \epsilon_3^{\rho\phi\lambda} \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha(x) \partial_\phi(y) D_{\beta\alpha}(x, y). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Analogamente, aplicamos a mesma transformação em $\int d^4x \mathcal{L}$ que aparece na equação (2.33).

Essa operação ocorre em duas etapas (veja a definição (2.13)):

(1) termo quadrático no campo A_μ :

$$\begin{aligned} \int d^4x A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) &\rightarrow \int d^4x A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) \\ &+ \int d^4x d^4z A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} D_{\nu\lambda}(x, z) \delta(z^3 - a) \epsilon_3^{\rho\phi\lambda} \partial_\phi B_\rho(z_{||}) \\ &+ \int d^4x d^4y D_{\mu\alpha}(x, y) \delta(y^3 - a) \epsilon_3^{\beta\gamma\alpha} (\partial_\gamma B_\beta(y_{||})) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) \\ &+ \int d^4x d^4y d^4z D_{\mu\alpha}(x, y) \delta(y^3 - a) \epsilon_3^{\beta\gamma\alpha} (\partial_\gamma B_\beta(y_{||})) \mathcal{O}^{\mu\nu} D_{\nu\lambda}(x, z) \delta(z^3 - a) \epsilon_3^{\rho\phi\lambda} \partial_\phi B_\rho(z_{||}) \\ &= \int d^4x A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) + 2 \int d^4y A_\alpha(y) \delta(y^3 - a) \epsilon_3^{\beta\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\beta(y_{||}) \\ &+ \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) \epsilon_3^{\beta\gamma\alpha} B_\beta(y_{||}) \left(\frac{\partial^2 D_{\lambda\alpha}(x, y)}{\partial x^\gamma \partial y^\phi} \right) \delta(y^3 - a) \epsilon_3^{\rho\phi\lambda} B_\rho(x_{||}), \end{aligned} \quad (2.36)$$

em que na terceira linha foram feitas duas integrações por partes.

(2) Termo de fonte:

$$\begin{aligned} \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x) &\rightarrow \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x) + \int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\alpha}(x, y) \delta(y^3 - a) \epsilon_3^{\beta\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\beta(y_{||}) \\ &= \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x) + \int d^4x d^4y J^\mu(y) \left(\frac{\partial D_{\alpha\mu}(x, y)}{\partial x^\gamma} \right) \delta(x^3 - a) \epsilon_3^{\beta\gamma\alpha} B_\beta(x_{||}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Substituindo os termos (2.35, 2.36 e 2.37) em (2.33), obtém-se então

$$\begin{aligned} Z_c[J] &= N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \exp \left[i \int d^4x \delta(x^3 - a) I^\nu(x) B_\nu(x_{||}) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) \delta(y^3 - a) B_\nu(x_{||}) W^{\nu\pi}(x, y) B_\pi(y_{||}) \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

em que

$$I^\nu(x) \equiv - \int d^4y \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \left(\frac{\partial D_{\alpha\mu}(x, y)}{\partial x^\gamma} \right) J^\mu(y) \quad (2.39)$$

e

$$W^{\nu\pi}(x, y) \equiv \epsilon_3^{\nu\alpha\lambda} \epsilon_3^{\pi\gamma\rho} \frac{\partial^2 D_{\lambda\rho}(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\gamma} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x_{v||} \partial y_{\pi||}}. \quad (2.40)$$

Nota-se que (2.38) pode ser escrita como um produto de dois fatores, sendo eles o funcional gerador da teoria livre $Z[J]$ e o termo correspondente à presença da placa $\bar{Z}[J]$:

$$Z_c[J] = N Z[J] \bar{Z}[J], \quad (2.41)$$

onde

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x \mathcal{L}} = Z[0] \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y) \right) \quad (2.42)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{Z}[J] &= N \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \delta(x^3 - a) I^\nu(x) B_\nu(x_{||}) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) \delta(y^3 - a) B_\nu(x_{||}) W^{\nu\pi}(x, y) B_\pi(y_{||}) \right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Como veremos a seguir, é possível expressar $Z_c[J]$ dado (2.41) na forma usual

$$Z_c[J] = N \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\nu}^c(x, y) J^\nu(y) \right), \quad (2.44)$$

em que

$$D_{\mu\nu}^c(x, y) = D_{\mu\nu}(x, y) + \bar{D}_{\mu\nu}(x, y). \quad (2.45)$$

O termo $\bar{D}_{\mu\nu}(x,y)$ corresponde à correção da placa ao propagador livre $D_{\mu\nu}(x,y)$. Vejamos agora como isso é feito.

A fim de se obter a forma (2.42) para o funcional $\bar{Z}[J]$, é necessário primeiro tratar os termos $W^{\nu\mu}(x,y)$ e $I^\nu(x)$ e estabelecer a forma da função $Q(x,y)$. Segue que o primeiro termo de (2.40) resulta-se em

$$\epsilon_3^{\nu\alpha\lambda} \epsilon_3^{\pi\gamma\rho} \frac{\partial^2 D_{\lambda\rho}(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\gamma} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \epsilon_3^{\nu\alpha\lambda} \epsilon_3^{\pi\gamma\rho} \frac{\eta_{\lambda\rho}}{p^2} p_\alpha p_\gamma, \quad (2.46)$$

tal que

$$\begin{aligned} \epsilon_3^{\nu\alpha\lambda} \eta_{\lambda\rho} \epsilon_3^{\pi\gamma\rho} &= - \begin{vmatrix} \eta^{33} & \eta^{3\pi} & \eta^{3\gamma} \\ \eta^{\nu 3} & \eta^{\nu\pi} & \eta^{\nu\gamma} \\ \eta^{\alpha 3} & \eta^{\alpha\pi} & \eta^{\alpha\gamma} \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^{\nu\pi} & \eta^{\nu\gamma} \\ 0 & \eta^{\alpha\pi} & \eta^{\alpha\gamma} \end{vmatrix} \\ &= \eta^{\nu\pi} \eta^{\alpha\gamma} - \eta^{\nu\gamma} \eta^{\alpha\pi}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

que leva à

$$\epsilon_3^{\nu\alpha\lambda} \epsilon_3^{\pi\gamma\rho} \frac{\eta_{\lambda\rho}}{p^2} p_\alpha p_\gamma = \frac{\eta_{||}^{\nu\pi} p_{||}^2 - p_{||}^\nu p_{||}^\pi}{p^2}. \quad (2.48)$$

Aqui, usou-se a definição de métrica paralela

$$\eta_{||}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \eta_3^\mu \eta^{\nu 3}, \quad (2.49)$$

p^3 e $p_{||}^\mu = (p^0, p^1, p^2)$ representam (respectivamente) os momentos perpendicular e paralelo à placa. Definindo

$$Q(x,y) \equiv - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x_{v||} \partial y_{\pi||}} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_{||}^\nu p_{||}^\pi}{p^2} e^{-ip(x-y)} \quad (2.50)$$

e tomando $\xi = 1$ em (2.40) e substituindo (2.46) e (2.48) em (2.40) tem-se então que

$$\begin{aligned} W^{\nu\pi}(x, y) &= \varepsilon_3^{\nu\alpha\lambda} \varepsilon_3^{\pi\gamma\rho} \frac{\partial^2 D_{\lambda\rho}(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\gamma} - \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x_{\nu\parallel} \partial y_{\pi\parallel}} \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left(\frac{\eta_{\parallel\parallel}^{\nu\pi} p_{\parallel}^2 - p_{\parallel}^\nu p_{\parallel}^\pi}{p^2} + \frac{p_{\parallel}^\nu p_{\parallel}^\pi}{p^2} \right) \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\eta_{\parallel\parallel}^{\nu\pi} p_{\parallel}^2}{p^2}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

de onde concluímos que a transformada de Fourier de $W^{\nu\pi}(x, y)$ no calibre $\xi = 1$ é dada por

$$\tilde{W}^{\nu\pi}(p) = - \frac{\eta_{\parallel\parallel}^{\nu\pi} p_{\parallel}^2}{p^2}. \quad (2.52)$$

Segue que do integrando de (2.39) e da representação de Fourier do propagador livre que

$$\varepsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \frac{\partial D_{\nu\lambda}(x, y)}{\partial x^\alpha} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\varepsilon_3^{\gamma\alpha} p_{\lambda\parallel}}{p^2}. \quad (2.53)$$

Substituindo a identidade (2.53) em (2.39) resulta que

$$I^\gamma(x) = -i \int d^4 y J^\lambda(y) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\varepsilon_3^{\gamma\alpha} p_{\lambda\parallel}}{p^2}. \quad (2.54)$$

Note que em ambos os objetos I^ν e $W^{\nu\pi}$ só existem componentes do momento de integração que são paralelas à placa. Utilizando as integrais (ver o apêndice A)

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2} = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p^2} \quad (2.55)$$

e

$$\int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p^2} = -\frac{i}{2\Gamma} e^{i\Gamma|x^3-y^3|}, \quad \text{com} \quad \Gamma \equiv \sqrt{p_{\parallel}^2}, \quad (2.56)$$

em (2.51) e (2.54) obtêm-se então que

$$W^{\nu\pi}(x, y) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \eta_{\parallel\parallel}^{\nu\pi} p_{\parallel}^2 \frac{e^{i\Gamma|x^3-y^3|}}{\Gamma} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \quad (2.57)$$

e

$$I^\nu(x) = -\frac{1}{2} \int d^4 y J^\mu(y) \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \varepsilon_3^{\nu\gamma} p_{\mu\parallel} \frac{e^{i\Gamma|x^3-y^3|}}{\Gamma}. \quad (2.58)$$

Definindo $W^{\nu\pi}$ em (2.57) somente em termos das componentes $x_{||}$ e $y_{||}$ ao longo da placa, obtemos

$$\begin{aligned} W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) &\equiv \int dx dy \delta(x^3 - a) \delta(y^3 - a) W^{\nu\pi}(x, y) \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \eta_{||}^{\nu\pi} p_{||}^2 \frac{e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}}{\Gamma}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

De forma análoga, da equação (2.58) obtemos

$$I^\nu(x_{||}) \equiv -\frac{1}{2} \int d^4 y J^\mu(y) \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} \epsilon_3^{\nu\gamma} p_{||} \gamma_{||} \frac{e^{i\Gamma|y^3-a|}}{\Gamma}. \quad (2.60)$$

Substituindo (2.59) e (2.60) em (2.43), expressa-se $\bar{Z}[J]$ por

$$\bar{Z}[J] = N \int \mathcal{D}B \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^3 x d^3 y B_\nu(x_{||}) W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) B_\pi(y_{||}) + i \int d^3 x I^\nu(x_{||}) B_\nu(x_{||}) \right]. \quad (2.61)$$

Note que a integral na exponencial de (2.61) apresenta um termo quadrático no campo auxiliar dado por $B_\nu(x_{||}) W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) B_\mu(y_{||})$ e semelhante ao termo quadrático $A_\nu \mathcal{O}^{\nu\pi} A_\mu$ no funcional da teoria livre. Além disso, o segundo termo $I^\nu(x_{||}) B_\nu(x_{||})$ é análogo ao acoplamento do campo do fóton com um termo de fonte $A_\mu J^\mu$. Isso indica que é possível expressar (2.61) na forma

$$\bar{Z}[J] = \bar{Z}[0] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^3 w_{||} d^3 z_{||} I^\pi(w_{||}) V_{\pi\theta}(w_{||}, z_{||}) I^\theta(z_{||}) \right], \quad (2.62)$$

onde $V_{\pi\theta}(w_{||}, z_{||})$ é a inversa de $W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||})$. Essa é a mesma relação existente entre o propagador livre $D_{\mu\nu}(x, y)$ e o operador diferencial $\mathcal{O}^{\mu\nu}(x)$.

Para calcular $V_{\pi\theta}(w_{||}, z_{||})$ aplica-se o método de funções de *Green* dado por

$$\int d^3 y_{||} W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) V_{\pi\theta}(y_{||}, z_{||}) = \eta_{\theta||}^\nu \delta^3(x_{||} - z_{||}). \quad (2.63)$$

Tomando a transformada de Fourier em ambos os lados da equação (2.63) tem-se que

$$\frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \eta_{||}^{\nu\pi} p_{||}^2 \frac{e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}}{\Gamma} \tilde{V}_{\pi\theta}(p_{||}) = \eta_{\theta||}^\nu \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}, \quad (2.64)$$

em que $\tilde{V}_{\pi\theta}(p_{||})$ é a representação de Fourier de $V_{\pi\theta}(y_{||}, z_{||})$. Comparando os integrandos da equação acima, tem-se que

$$\frac{i}{2\Gamma} \eta_{||}^{\nu\pi} p_{||}^2 \tilde{V}_{\pi\theta}(p_{||}) = \eta_{\theta||}^\nu, \quad (2.65)$$

que resulta em

$$\tilde{V}_{\pi\theta}(p_{||}) = -\frac{2i}{\Gamma}\eta_{\pi\theta}. \quad (2.66)$$

Para obter a forma (2.62), toma-se a seguinte translação para o campo auxiliar:

$$B_v(x_{||}) \rightarrow B_v(x_{||}) + \int d^3 y_{||} V_{\pi\theta}(x_{||}, y_{||}) I^\theta(y_{||}). \quad (2.67)$$

Aplicando a transformação acima no segundo termo do exponencial de (2.61) (termo de fonte) tem-se então

$$\int d^3 x_{||} I^\nu(x_{||}) B_v(x_{||}) \rightarrow \int d^3 x_{||} I^\nu(x_{||}) B_v(x_{||}) + \int d^3 x_{||} d^3 y_{||} I^\nu(x_{||}) V_{\pi\theta}(x_{||}, y_{||}) I^\theta(y_{||}). \quad (2.68)$$

Tomando a mesma transformação (2.67) para o primeiro termo do exponencial de (2.61) (termo quadrático do campo), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int d^3 x d^3 y B_v(x_{||}) W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) B_\pi(y_{||}) \rightarrow \int d^3 x d^3 y B_v(x_{||}) W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) B_\pi(y_{||}) \\ & + \int d^3 x d^3 y B_v(x_{||}) W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) \int d^3 z_{||} V_{\nu\theta}(x_{||}, z_{||}) I^\theta(z_{||}) \\ & + \int d^3 z_{||} V_{\pi\theta}(x_{||}, z_{||}) I^\theta(z_{||}) \int d^3 x d^3 y W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) B_\pi(y_{||}) \\ & + \int d^3 x_{||} d^3 y_{||} \int d^3 z_{||} V_{\nu\theta}(x_{||}, z_{||}) I^\theta(z_{||}) W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) \int d^3 w_{||} V_{\pi\rho}(x_{||}, w_{||}) I^\rho(w_{||}) \\ & = \int d^3 x d^3 y B_v(x_{||}) W^{\nu\pi}(x_{||}, y_{||}) B_\pi(y_{||}) + 2 \int d^3 x_{||} B_v(x_{||}) \eta_{\theta}^\nu I^\theta(x_{||}) \\ & + \int d^3 z_{||} d^3 w_{||} I^\theta(z_{||}) V_{\alpha\theta}(z_{||}, w_{||}) I^\alpha(w_{||}). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Substituindo os termos dados em (2.68) e (2.69) em (2.61), resulta que

$$\bar{Z}[J] = \bar{Z}[0] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^3 w_{||} d^3 z_{||} I^\alpha(w_{||}) V_{\alpha\theta}(w_{||}, z_{||}) I^\theta(z_{||}) \right], \quad (2.70)$$

em que

$$I^\alpha(w_{||}) = \int d^4 x J^\mu(x) f_\mu^\alpha(x, w_{||}) \quad (2.71)$$

e

$$I^\theta(z_{||}) = \int d^4 y J^\nu(y) f_\nu^\theta(x, z_{||}), \quad (2.72)$$

com

$$\begin{aligned}
 f_{\mu}^{\alpha}(x, w_{||}) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{||}(w_{||}-x_{||})} \varepsilon_3^{\alpha\gamma} p_{\mu} p_{\gamma} \frac{e^{i\Gamma|x^3-a|}}{\Gamma}, \\
 f_v^{\theta}(x, z_{||}) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_{||}}{(2\pi)^3} e^{-ik_{||}(z_{||}-y_{||})} \varepsilon_3^{\theta\gamma} k_{\gamma} \frac{e^{i\Gamma'|y^3-a|}}{\Gamma'}, \\
 V_{\alpha\theta}(w_{||}, z_{||}) &= -2i \int \frac{d^3 q_{||}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-iq_{||}(w_{||}-z_{||})}}{\Gamma''} \eta_{\alpha\theta}
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

e

$$\Gamma \equiv \sqrt{p_{||}^2}, \quad \Gamma' \equiv \sqrt{k_{||}^2} \quad \text{e} \quad \Gamma'' \equiv \sqrt{q_{||}^2}. \tag{2.74}$$

Ao substituir as relações (2.71) e (2.72) em (2.70), obtém-se então o análogo à (2.42) para $\bar{Z}[J]$:

$$\bar{Z}[J] = \bar{Z}[0] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^3 x d^3 y J^{\mu}(x) \bar{D}_{\mu\nu}(x, y) J^{\nu}(y) \right], \tag{2.75}$$

donde

$$\bar{D}_{\mu\nu}(x, y) = - \int d^3 w_{||} d^3 z_{||} f_{\mu}^{\alpha}(x, w_{||}) V_{\alpha\theta}(w_{||}, z_{||}) f_v^{\theta}(x, z_{||}). \tag{2.76}$$

Para calcular $\bar{D}_{\mu\nu}(x, y)$ substitui-se (2.73) em (2.76), tomando as simplificações adequadas nos momentos de integração, resultando por fim que

$$\bar{D}_{\mu\nu}(x, y) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p_{||}^2} \right) \frac{e^{i\Gamma(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{\Gamma}. \tag{2.77}$$

Como discutido anteriormente (ver a equação (2.45)), o propagador final da teoria deve ter forma

$$D_{\mu\nu}^c(x, y) = D_{\mu\nu}(x, y) + \bar{D}_{\mu\nu}(x, y), \tag{2.78}$$

o que nos leva à

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu}^c(x, y) &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\eta_{\mu\lambda}}{p^2} \\
 &\quad - \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p_{||}^2} \right) \frac{e^{i\Gamma(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{\Gamma}.
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

2.2.2 Energia e Força de Interação Placa-Carga

Semelhante ao que foi feito na seção 2.1, a energia de interação associada a uma fonte J^{μ} é dada por meio da equação (2.19). No contexto de fronteiras materiais, um dos casos mais

simples e recorrente na literatura é o da carga pontual localizada em um ponto acima de um plano condutor perfeito (GRIFFITHS, 2011; JACKSON, 1983; MACHADO, 2002).

É possível representar a fonte J^μ associada à carga pontual sobre o plano condutor por meio de

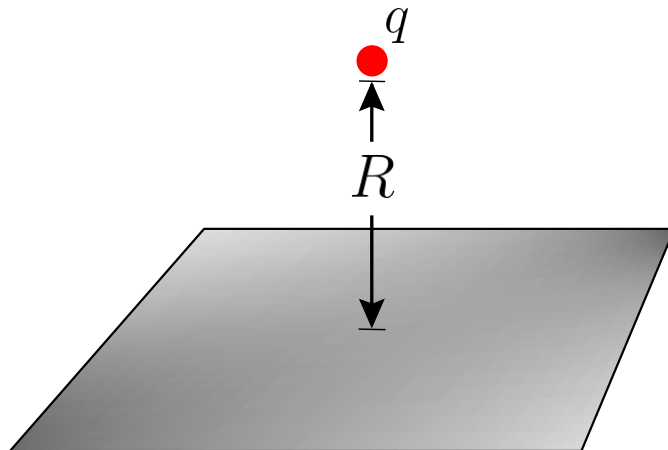
$$J^\mu(x) = q\eta^{\mu 0}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{b}), \quad (2.80)$$

em que q é uma carga pontual localizada em $\mathbf{b} = (0, 0, b)$ e com distância $R = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ do espelho (Figura 2.3). Aplicando as equações (2.80) e (2.79) em (2.19) tem-se que a energia de interação entre a placa e a carga q (PC) é dada por

$$\begin{aligned} E_{PC} &= \frac{q^2}{2T} \int \int d^4x d^4y \delta^2(\mathbf{x}_\parallel) \delta(x^3 - b) \bar{D}_{00}(x, y) \delta^2(\mathbf{y}_\parallel) \delta(y^3 - b) \\ &= -\frac{iq^2}{4T} \int \int dx^0 dy^0 \int \frac{d^3 p_\parallel}{(2\pi)^3} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \left(1 - \frac{(p^0)^2}{(p^0)^2 - \mathbf{p}_\parallel^2} \right) \frac{e^{2i\Gamma R}}{\Gamma} \\ &= -\frac{q^2}{4} \int \frac{d^2 \mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2|\mathbf{p}_\parallel|R}}{|\mathbf{p}_\parallel|} \\ &= -\frac{q^2}{16\pi R}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Na primeira igualdade da expressão acima utilizamos $\eta^{\mu 0} \bar{D}_{\mu\nu}(x, y) \eta^{0\nu} = \bar{D}_{00}(x, y)$ e desprezamos o termo de auto-interação em $D_{\mu\nu}(x, y)$.

Figura 2.3 – Carga pontual q e o plano condutor separados por uma distância R .



Por consequência, a equação (2.81) resulta na força de interação entre a carga e a placa:

$$F_{PC} = -\frac{\partial E_{PC}}{\partial R} = -\frac{q^2}{16\pi R^2}, \quad (2.82)$$

que condiz com o resultado conhecido na literatura (GRIFFITHS, 2011).

2.2.3 O Método das Imagens

Nesta subseção é feita uma breve digressão em relação ao método das imagens e ao teorema de unicidade da equação de Laplace. Tal discussão se faz importante principalmente no capítulo 3, onde será testada a validade do método das imagens para a eletrodinâmica de CFJ.

O teorema de existência e unicidade da equação de Laplace nos assegura que, estabelecidas as condições de contorno do sistema, o potencial eletrostático $\phi(\mathbf{x})$ é único. Tal resultado implica que sistemas eletrostáticos distintos, mas com condições de contorno iguais, vão apresentar exatamente a mesma solução (GRIFFITHS, 2011; JACKSON, 1983; ZANGWILL, 2013). No caso da carga pontual localizada em um ponto acima do plano condutor infinito, tem-se que as condições de contorno para a equação de Laplace são:

$$\begin{cases} \phi_{PC}(\mathbf{a}) = 0 & \text{ao longo da placa;} \\ \phi_{PC}(\mathbf{x}) \rightarrow 0, & \text{para quando } |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{b}|. \end{cases} \quad (2.83)$$

Lembrando que $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ é a posição do espelho (em relação ao eixo x^3) e $\mathbf{b} = (0, 0, b)$ é a posição da carga q , de modo que $R = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ é a distância entre a placa e a carga.

Seja um sistema de duas cargas pontuais q e $-q$ separadas a uma distância $2R$, cujas posições são $\mathbf{a}_1 = (0, 0, a + R)$ e $\mathbf{a}_2 = (0, 0, a - R)$ respectivamente. O potencial de Coulomb para esta configuração é dado por

$$\phi_{CC}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{a}_1|} - \frac{q}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{a}_2|}. \quad (2.84)$$

O potencial descrito por (2.84) exhibe as mesmas condições de contorno de (2.83), levando à conclusão que ⁵ $\phi_{PC}(\mathbf{x}) = \phi_{CC}(\mathbf{x})$, para $x^3 \in [a, \infty)$.

O fato de ambas as situações (PC e CC) apresentarem o mesmo potencial implica que a força de interação entre a carga e a placa é análoga à força de interação entre uma carga q e $-q$. Neste caso, dizemos que a placa atua como um espelho que projeta uma “imagem especular” de

⁵ A priori consideramos que a placa infinita está descarregada. Então o lado diametralmente oposto da placa em relação carga possui $\phi_{PC}(\mathbf{x}) = 0$.

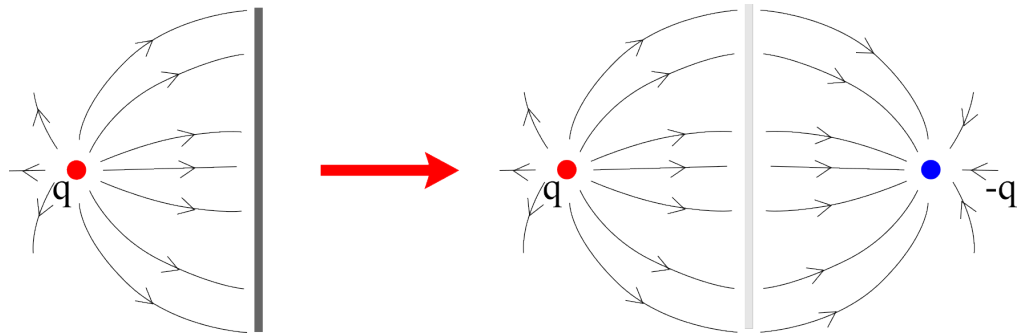
sinal invertido de q , de modo que a carga-imagem $-q$ é projetada a uma distância R em relação ao espelho e diametralmente oposta à q . Tal descrição é exemplificada na Figura 2.4.

Conclui-se pela equação (2.24) que ⁶

$$F_{CC}(2R) = -\frac{q^2}{4\pi(2R)^2} = -\frac{q^2}{16\pi R^2} = F_{PC}(R), \quad (2.85)$$

condizendo com o resultado obtido em (2.82). Essa equivalência ficou conhecida como método das imagens (ou método dos espelhos). Em linhas gerais, o problema descrito no início da seção 2.2 pode ser resolvido de forma quase trivial pela equação (2.85). Contudo, o método funcional descrito nesta seção será indispensável para analisar esse problema em modelos de extensão do eletromagnetismo como o que será abordado no próximo capítulo.

Figura 2.4 – Equivalência entre a configuração placa-carga e um sistema de duas cargas de sinais opostos. Inicialmente (a esquerda da seta vermelha) o sistema é representado por uma placa (barra vertical em cinza) e a carga (ponto em vermelho). Depois (a direita da seta) o sistema é reconfigurado para uma carga q e sua carga imagem $-q$.



⁶ A notação $F_{CC}(2R)$ faz referência a força exercida pela configuração de duas cargas separadas por uma distância $2R$, enquanto $F_{PC}(R)$ se refere ao sistema placa-carga à uma distância R .

3 FONTES DE CAMPO E FRONTEIRAS NA ELETRODINÂMICA DE CARROLL-FIELD-JACKIW

O principal propósito deste capítulo é investigar efeitos físicos na eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ). Primeiramente, o estudo é feito para o cenário de uma teoria livre de fronteiras e, após isso, com a presença de uma fronteira material.

Mais especificamente, assim como foi feito no capítulo 2, será calculado na seção 3.1 o propagador livre da teoria de CFJ na ausência de fronteiras e, posteriormente, seus efeitos físicos sob a energia, a força de interação e o torque sob a partícula. A partir da seção 3.2 serão fixadas as condições de contorno impostas pela placa, as quais atribuirão correções ao propagador da teoria (seção 3.1). Após isso, os efeitos físicos decorrentes da condição de fronteira serão calculados e as quantidades com e sem a presença da placa serão comparadas. Finalizando o capítulo, verifica-se que o método das imagens não é aplicável na eletrodinâmica estendida de CFJ.

3.1 Fontes Na Eletrodinâmica de CFJ

O modelo CFJ faz parte do setor eletromagnético CPT-ímpar do SME mínimo e é descrito pela seguinte densidade Lagrangiana (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998; CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\gamma}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(k_{AF})_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} - J^\mu A_\mu, \quad (3.1)$$

que é uma extensão da densidade de Lagrangiana (2.12). O vetor de fundo constante $(k_{AF})^\mu = (k_{AF}^0, \mathbf{k}_{AF})$ representa o parâmetro de violação de Lorentz, com dimensão de massa. Dado que o vetor de fundo é significativamente menor do que qualquer escala física de massa do problema, $(k_{AF})^\mu$ será tratado perturbativamente.

De modo análogo ao caso das equações de Maxwell, é possível obter duas equações de movimento a partir da Lagrangiana (3.1). Essas são as equações de Maxwell-Carroll-Field-

Jackiw, (MOREIRA; LUZ, 2021):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + (\mathbf{k}_{AF}) \cdot \mathbf{B} = \rho \quad (\text{Lei de Gauss Modificada}); \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - (\mathbf{k}_{AF}) \times \mathbf{E} + (k_{AF})^0 \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell Modificada}); \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss para o magnetismo}); \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday}). \quad (3.5)$$

As duas últimas equações são as equações geométricas usuais.

3.1.1 O Propagador do Fóton Livre

Semelhante ao que foi feito no capítulo 2 (ver início da seção 2.1), a Lagrangiana (3.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L} \rightarrow \frac{1}{2} A_\mu \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu - J^\mu A_\mu, \quad (3.6)$$

de modo que na teoria modificada dada em (3.1) tem-se que

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} \equiv \square \eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \partial_\mu \partial_\nu - 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} (k_{AF})^\rho \partial^\alpha. \quad (3.7)$$

O propagador $D^{\mu\nu}(x, y)$ deve satisfazer a equação

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} D^\nu_\lambda(x, y) = \eta_{\mu\lambda} \delta^4(x - y). \quad (3.8)$$

Usando o calibre de Feynman $\gamma = 1$ e transcrevendo a equação (3.8) para o espaço dos momentos, o problema se reduz a resolver

$$[-p^2 \eta_{\mu\nu} + 2i\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} (k_{AF})^\rho p^\alpha] \tilde{D}^\nu_\lambda(p) = \eta_{\mu\lambda}. \quad (3.9)$$

Pode-se resolver a equação (3.9) por meio de um *Ansatz*, cuja forma geral deve ser (BORGES; FERRARI, 2022)

$$\tilde{D}^{\nu\lambda}(p) = a_1 \eta^{\nu\lambda} + a_2 p^\nu p^\lambda + a_3 (k_{AF})^\nu (k_{AF})^\lambda + a_4 (k_{AF})^\nu p^\lambda + a_5 p^\nu (k_{AF})^\lambda + a_6 \epsilon^{\nu\lambda\beta\phi} (k_{AF})_\beta p_\phi. \quad (3.10)$$

Ao substituir (3.10) em (3.9), chega-se ao sistema

$$\begin{cases} -a_1 p^2 + 2ia_6 [(k_{AF}^2) p^2 - [(k_{AF}^2) \cdot p]^2] = 1, \\ -a_2 p^2 - 2ia_6 (k_{AF}^2) = 0, \\ -a_3 p^2 - 2ia_6 p^2 = 0, \\ -a_4 p^2 + 2ia_6 [(k_{AF}^2) \cdot p] = 0, \\ -a_5 p^2 + 2ia_6 [(k_{AF}^2) \cdot p] = 0, \\ -a_6 p^2 + 2ia_1 = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

cuja solução provê

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{p^2} \left\{ 1 + \left[\frac{4(k_{AF})^2}{p^2} - \frac{4[(k_{AF}) \cdot p]^2}{p^4} \right] \right\}^{-1} \left\{ \eta^{\mu\nu} + \frac{4(k_{AF})^2}{p^2} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} + \frac{(k_{AF})^\mu (k_{AF})^\nu}{p^2} - \frac{4[(k_{AF}) \cdot p]}{p^4} [(k_{AF})^\mu p^\nu + p^\mu (k_{AF})^\nu] + \frac{2i}{p^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (k_{AF})_\alpha p_\beta \right\}. \quad (3.12)$$

Considerando a aproximação

$$\left\{ 1 + \left[\frac{4(k_{AF})^2}{p^2} - \frac{4[(k_{AF}) \cdot p]^2}{p^4} \right] \right\}^{-1} \approx 1 - \frac{4(k_{AF})^2}{p^2} + \frac{4[(k_{AF}) \cdot p]^2}{p^4}, \quad (3.13)$$

até a segunda ordem de $(k_{AF})^\mu$, tem-se finalmente que

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu}(x, y) = & - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2} \left\{ \left[1 + \frac{4[(k_{AF}) \cdot p]^2}{p^4} - \frac{4(k_{AF}^2)}{p^2} \right] \eta^{\mu\nu} + \frac{4(k_{AF}^2)}{p^2} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right. \\ & \left. + \frac{2i}{p^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (k_{AF})_\alpha p_\beta + \frac{4(k_{AF})^\mu (k_{AF})^\nu}{p^2} - \frac{4[(k_{AF}) \cdot p]}{p^4} [(k_{AF})^\mu p^\nu + (k_{AF})^\nu p^\mu] \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1.2 Energia, Força de Interação e Torque

Conforme foi visto no capítulo 2, a energia de interação entre duas cargas puntiformes é dada pela equação (2.20). Utilizando o propagador (3.14) e assumindo que as cargas estão separadas por uma distância R , conforme foi mostrado em (BORGES; FERRARI, 2022), a energia de interação entre duas cargas pontuais na teoria de CFJ é dada por

$$E_{CC} = \frac{q_1 q_2}{4\pi R} \left[1 + \frac{R^2}{2} \left(3(\mathbf{k}_{AF})^2 - \frac{[(\mathbf{k}_{AF}) \cdot \mathbf{R}]^2}{R^2} \right) \right]. \quad (3.15)$$

Aqui, $\mathbf{R} \equiv \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, tal que $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são as posições das cargas q_1 e q_2 respectivamente, de tal modo que $R = |\mathbf{R}|$.

Da expressão (3.15) obtém-se a força de interação entre cargas no modelo de CFJ:

$$F_{CC} = -\frac{\partial E_{CC}}{\partial R} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{R^2} + \frac{3}{2} (\mathbf{k}_{AF}^2)_{\parallel} + [(k_{AF})^3]^2 \right\}. \quad (3.16)$$

Note que tanto a equação (3.15) quanto (3.16) apresentam um termo do tipo Coulombiano. Deste modo, ao tomar $\mathbf{k}_{AF} \rightarrow 0$, recupera-se os limites corretos descritos pelas equações (2.23) e (2.24).

Além das correções para a energia e força de interação, o modelo de CFJ exhibe efeitos físicos não previstos pela eletrodinâmica de Maxwell. Em geral, os vetores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{k}_{AF}$ não apresentam a mesma direção. Com isso, o sistema de duas cargas pontuais não descreve um potencial central, como descreve a lei de Coulomb. Ao assumir que os vetores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{k}_{AF}$ formam um ângulo θ entre si e assumindo que $q_1 = -q_2 = q$, tem-se então que a energia de interação toma a forma:

$$E_{dipolo}^{CC} = -\frac{q^2}{4\pi} \left[\frac{1}{R} + \frac{R(\mathbf{k}_{AF})^2}{2} (3 - \cos^2 \theta) \right]. \quad (3.17)$$

O subíndice “*dipolo*” remete ao segundo termo dentro dos colchetes na equação acima, o qual se assemelha a uma contribuição do tipo dipolo (BORGES; FERRARI, 2022). Por meio da equação (3.17), tem-se a existência de um torque

$$\tau_{dipole}^{CC} = -\frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{q^2 R (\mathbf{k}_{AF})^2}{8\pi} \sin(2\theta) \quad (3.18)$$

que aparece como um efeito exclusivo da quebra da simetria de Lorentz.

3.2 Fronteira Material na Eletrodinâmica de CFJ

Nesta seção considera-se a fronteira material como uma superfície perfeitamente condutora. Conforme discutido na referência (BORGES; BARONE, 2017), a presença de tal superfície em um cenário de violação de Lorentz impõe uma condição de contorno no campo de calibre de tal forma que a força de Lorentz sobre ela deve ser nula. Como foi visto no capítulo 2 seção 2.2, esta condição é dada por

$$n^\mu F_{\mu\nu}^* = 0. \quad (3.19)$$

No que segue, será apresentado o cálculo detalhado do propagador na teoria de CFJ considerando a condição de contorno (3.19).

3.2.1 O Propagador do Fóton Na Presença de Uma Placa Condutora

Estabelecida a condição de contorno e seguindo de maneira totalmente análoga os passos descritos pelas equações (2.27), (2.28) e (2.31) na seção 2.2 do capítulo 2, tem-se que o funcional gerador é da forma

$$\begin{aligned} Z_C[J] = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \exp \left[-i \int d^4x \delta(x^3 - a) A_\beta(x) \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x_\parallel) \right] \\ \times \exp \left[-\frac{i}{2\xi} \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) B_\mu(x_\parallel) \frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x_{\mu\parallel} \partial y_{\nu\parallel}} \delta(y^3 - a) B_\nu(x_\parallel) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Novamente, ξ é o parâmetro de fixação de calibre do campo auxiliar $B_\nu(x_\parallel)$. A função $Q(x,y)$ é arbitrária, advinda do método de Faddeev-Popov.

Como já foi visto no capítulo anterior, o próximo passo se dá pela translação:

$$A^\beta(x) \rightarrow A^\beta(x) + \int d^4y D^\beta_\alpha(x,y) \delta(y^3 - a) \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\nu(y), \quad (3.21)$$

onde agora, $D_{\beta\alpha}(x,y)$ é referente ao propagador livre de CFJ descrito pela equação (3.14).

Ao aplicar a transformação (3.21) no funcional gerador (3.20), tem-se um resultado análogo ao obtido em (2.35), (2.36) e (2.37). Vale ressaltar que, diferentemente do operador diferencial (2.14) da teoria de Maxwell, o operador $\mathcal{O}^{\mu\nu}(x)$ descrito por (3.7) contém um

termo de derivada de primeira ordem, fazendo com que o operador se modifique ao executar a integração por partes.

De maneira direta, ao aplicar (3.21) em (3.20), tem-se que o termo $A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x)$ se transforma da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) \rightarrow \int d^4x A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) \\
& + \int d^4x d^4z A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} D_{\nu\lambda}(x, z) \delta(z^3 - a) \varepsilon_3^{\rho\phi\lambda} \partial_\phi B_\rho(z_{||}) \\
& + \int d^4x d^4y D_{\mu\alpha}(x, y) \delta(y^3 - a) \varepsilon_3^{\beta\gamma\alpha} (\partial_\gamma B_\beta(y_{||})) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) \\
& + \int d^4x d^4y d^4z D_{\mu\alpha}(x, y) \delta(y^3 - a) \varepsilon_3^{\beta\gamma\alpha} (\partial_\gamma B_\beta(y_{||})) \mathcal{O}^{\mu\nu} D_{\nu\lambda}(x, z) \delta(z^3 - a) \varepsilon_3^{\rho\phi\lambda} \partial_\phi B_\rho(z_{||}) \\
& = \int d^4x A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) + \int d^4x d^4z A_\mu(x) \eta_\lambda^\mu \delta^4(x - z) \delta(z^3 - a) \varepsilon_3^{\rho\phi\lambda} \partial_\phi B_\rho(z_{||}) \\
& + \int d^4x d^4y \delta(y^3 - a) \varepsilon_3^{\beta\gamma\alpha} (\partial_\gamma B_\beta(y_{||})) D_{\mu\alpha}(x, y) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) \\
& + \int d^4x d^4y d^4z D_{\mu\alpha}(x, y) \delta(y^3 - a) \varepsilon_3^{\beta\gamma\alpha} (\partial_\gamma B_\beta(y_{||})) \eta_\lambda^\mu \delta^4(x - z) \delta(z^3 - a) \varepsilon_3^{\rho\phi\lambda} \partial_\phi B_\rho(z_{||}).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Definindo $C_\nu^\alpha \equiv \delta(y^3 - a) \varepsilon_3^{\beta\gamma\alpha} (\partial_\gamma B_\beta(y_{||})) A_\nu(x)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
& \int d^4x d^4y D_{\mu\alpha}(x, y) \mathcal{O}^{\mu\nu} C_\nu^\alpha = \int d^4x d^4y D_{\mu\alpha}(x, y) [\square \eta^{\mu\nu} - 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (k_{AF})_\rho \partial_\sigma] C_\nu^\alpha \\
& = \int d^4x d^4y (\square \eta^{\mu\nu} D_{\mu\alpha}(x, y)) C_\nu^\alpha + \int d^4x d^4y [2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (k_{AF})_\rho \partial_\sigma D_{\mu\alpha}(x, y)] C_\nu^\alpha,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

de modo que, pela propriedade antissimétrica do tensor de Levi-Civita, ao fazer $\mu \longleftrightarrow \nu$ tem-se que

$$\begin{aligned}
& \int d^4x d^4y (\square \eta^{\mu\nu} D_{\nu\alpha}(x, y)) C_\mu^\alpha + \int d^4x d^4y [2\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} (k_{AF})_\rho \partial_\sigma D_{\nu\alpha}(x, y)] C_\mu^\alpha \\
& = \int d^4x d^4y [\square \eta^{\mu\nu} - 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (k_{AF})_\rho \partial_\sigma] D_{\nu\alpha}(x, y) C_\mu^\alpha \\
& = \int d^4x d^4y \mathcal{O}^{\mu\nu} D_{\nu\alpha}(x, y) C_\mu^\alpha \\
& = \int d^4x d^4y \delta(y^3 - a) \varepsilon_3^{\beta\gamma\mu} (\partial_\gamma B_\beta(y_{||})) A_\mu(x).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
& \int d^4x A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) \rightarrow \int d^4x A_\mu(x) \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu(x) + 2 \int d^4y A_\alpha(y) \delta(y^3 - a) \varepsilon_3^{\beta\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\beta(y_{||}) \\
& + \int d^4x d^4y \delta(y^3 - a) \varepsilon_3^{\beta\gamma\alpha} B_\beta(y_{||}) \left(\frac{\partial^2 D_{\lambda\alpha}(x, y)}{\partial x^\lambda \partial y^\phi} \right) \delta(y^3 - a) \varepsilon_3^{\rho\phi\lambda} B_\rho(x_{||}),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

similar ao termo encontrado em (2.69).

Ao desacoplar os campos $A_\mu(x)$ e $B_\nu(x_\parallel)$, tem-se novamente um funcional gerador descrito pelo produto

$$Z_C[J] = NZ[J]\bar{Z}[J], \quad (3.26)$$

tal que

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x \mathcal{L}} = Z[0] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x,y) J^\nu(y) \right], \quad (3.27)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{Z}[J] &= \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \delta(x^3 - a) I^\nu(x) B_\nu(x_\parallel) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) \delta(y^3 - a) B_\nu(x_\parallel) W^{\nu\pi}(x,y) B_\pi(y_\parallel) \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Similar ao que foi feito no capítulo anterior, define-se

$$I^\nu(x) = - \int d^4y \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma} D_{\alpha\mu}(x,y) \right) J^\mu(y) \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

e

$$W^{\nu\pi}(x,y) = \epsilon_3^{\nu\alpha\lambda} \epsilon_3^{\pi\gamma\rho} \frac{\partial^2 D_{\lambda\rho}(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\gamma} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x_\nu \partial y_\pi}. \quad (3.31)$$

Para que a integral (3.28) tenha forma analítica gaussiana, toma-se

$$Q(x,y) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \left[\frac{1}{p^2} + \frac{4[(k_{AF}) \cdot p]^2}{p^6} + \frac{4[(k_{AF})^3]^2}{p^4} \right], \quad (3.32)$$

em que foi escolhido o calibre $\xi = 1$. Além disso, $(k_{AF})^3$ é a componente do vetor de fundo perpendicular à placa. Substituindo (3.29) e (3.31) em (3.28) e usando (3.14) e (3.32), tem-se

que a expressão (3.31) toma a forma

$$\begin{aligned}
 W^{\nu\pi}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) = & \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})}}{\Gamma} \left\{ \eta_{\parallel}^{\pi\nu} \left[p_{\parallel}^2 - \frac{[(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]^2}{2p_{\parallel}^2} + \frac{3[(k_{AF})^3]^2}{2} \right] \right. \\
 & + \frac{2[(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]}{p_{\parallel}^2} \left[p_{\parallel}^{\pi} (k_{AF})_{\parallel}^{\nu} + (k_{AF})_{\parallel}^{\pi} p_{\parallel}^{\nu} \right] - 2(k_{AF})_{\parallel}^{\pi} (k_{AF})_{\parallel}^{\nu} \\
 & \left. - i(k_{AF})^3 \varepsilon^{\pi\nu\tau 3} p_{\parallel\tau} \right\}, \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

onde foram empregadas as integrais (12), (13) e (14) no apêndice A. Analogamente, segue que

$$I^{\nu}(x_{\parallel}) = \int d^4 y f_{\mu}^{\nu}(y, x_{\parallel}) J^{\mu}(y), \tag{3.34}$$

tal que

$$\begin{aligned}
 f_{\mu}^{\nu}(y, x_{\parallel}) = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})} \left\{ \varepsilon_3^{\nu\gamma} p_{\parallel\gamma} \left[-1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3[i\Gamma |y^3 - a| - 1]}{p_{\parallel}^2} + |y^3 - a|^2 \right) \right. \right. \\
 & \times \left(\frac{[(k_{AF})^3]^2}{p_{\parallel}^2} + \frac{[(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]^2}{p_{\parallel}^2} \right) + \frac{[i\Gamma |y^3 - a| - 1]}{p_{\parallel}^2} \left(i(k_{AF})^3 (y^3 - a) [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \right. \\
 & \left. \left. - 2(k_{AF}^2)_{\parallel} \right) \right] + \frac{[i\Gamma |y^3 - a| - 1]}{p_{\parallel}^2} \left[2(k_{AF})_{\mu} \varepsilon_3^{\nu\gamma\alpha} p_{\parallel\gamma} (k_{AF})_{\parallel\alpha} \right. \\
 & \left. + i\eta_{\mu 3} \left((k_{AF})_{\parallel}^{\nu} p_{\parallel}^2 - p_{\parallel}^{\nu} [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \right) + i(k_{AF})^3 \left(\eta_{\parallel\mu}^{\nu} p_{\parallel}^2 - p_{\parallel}^{\nu} p_{\parallel\mu} \right) \right] \\
 & \left. + \left[(k_{AF})_{\parallel}^{\nu} p_{\parallel\mu} - \eta_{\parallel\mu}^{\nu} [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \right] (y^3 - a) \right\} \frac{e^{i\Gamma |y^3 - a|}}{\Gamma}, \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

onde $(k_{AF})_{\parallel}^{\mu} = ((k_{AF})^0, (k_{AF})^1, (k_{AF})^2, 0)$ é o quadrivetor de fundo paralelo à placa.

Segue, pelas equações (3.28), (3.33) e (3.34), que

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}[J] = & \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^3 x_{\parallel} I^{\nu}(x_{\parallel}) B_{\nu}(x_{\parallel}) \right] \\
 & \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^3 x_{\parallel} d^3 y_{\parallel} B_{\nu}(x_{\parallel}) W^{\nu\pi}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) B_{\pi}(y_{\parallel}) \right]. \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Aplicando a transformação

$$B_v(x_{\parallel}) \rightarrow B_v(x_{\parallel}) + \int d^3 y_{\parallel} V_{v\theta}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) I^{\theta}(y_{\parallel}) , \quad (3.37)$$

tal que $V_{v\theta}(x_{\parallel}, y_{\parallel})$ é a inversa de $W^{v\pi}(x_{\parallel}, y_{\parallel})$, satisfazendo a relação

$$\int d^3 y_{\parallel} W^{v\pi}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) V_{\pi\theta}(y_{\parallel}, z_{\parallel}) = \eta_{\parallel\theta}^v \delta^3(x_{\parallel} - z_{\parallel}) . \quad (3.38)$$

Para calcular $V_{\pi\theta}(y_{\parallel}, z_{\parallel})$, propõe-se o seguinte *ansatz*:

$$\begin{aligned} V_{\pi\theta}(y_{\parallel}, z_{\parallel}) = & a_1 \eta_{\parallel\pi\theta} + a_2 p_{\parallel\pi} p_{\parallel\theta} + a_3 (k_{AF})_{\parallel\pi} (k_{AF})_{\parallel\theta} + a_4 p_{\parallel\pi} (k_{AF})_{\parallel\theta} + a_5 (k_{AF})_{\parallel\pi} p_{\parallel\theta} \\ & + a_6 \varepsilon_{\pi\theta\rho 3} p_{\parallel}^{\rho} + a_7 \varepsilon_{\pi\theta\rho 3} (k_{AF})_{\parallel}^{\rho} + a_8 p_{\parallel\pi} \varepsilon_{\theta\alpha\rho 3} p_{\parallel}^{\rho} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} + a_9 p_{\parallel\theta} \varepsilon_{\pi\alpha\rho 3} p_{\parallel}^{\rho} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} \\ & + a_{10} (k_{AF})_{\parallel\pi} \varepsilon_{\theta\alpha\rho 3} p_{\parallel}^{\rho} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} + a_{11} (k_{AF})_{\parallel\theta} \varepsilon_{\pi\alpha\rho 3} p_{\parallel}^{\rho} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} \\ & + a_{12} \left(\varepsilon_{\pi\alpha\rho 3} p_{\parallel}^{\rho} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} \right) \left(\varepsilon_{\theta\lambda\phi 3} p_{\parallel}^{\lambda} (k_{AF})_{\parallel}^{\phi} \right) . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) em (3.38), tem-se que

$$\begin{aligned} V_{\pi\theta}(y_{\parallel}, z_{\parallel}) = & \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{2i}{\Gamma} \left[1 + \frac{[(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]^2}{2p_{\parallel}^4} - \frac{[(k_{AF})^3]^2}{2p_{\parallel}^2} \right] \eta_{\parallel\pi\theta} + \frac{2i}{\Gamma} \frac{[(k_{AF})^3]^2}{p_{\parallel}^4} p_{\parallel\pi} p_{\parallel\theta} \right. \\ & - \frac{4i}{\Gamma} \frac{(k_{AF})_{\parallel\pi} (k_{AF})_{\parallel\theta}}{p_{\parallel}^2} + \frac{4i}{\Gamma} \frac{[(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]}{p_{\parallel}^4} \left[p_{\parallel\pi} (k_{AF})_{\parallel\theta} + (k_{AF})_{\parallel\pi} p_{\parallel\theta} \right] \\ & \left. - \frac{2i}{\Gamma} \frac{i}{p_{\parallel}^2} (k_{AF})^3 \varepsilon_{\pi\theta\rho 3} p_{\parallel}^{\rho} \right\} e^{-ip_{\parallel} \cdot (y_{\parallel} - z_{\parallel})} . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Substituindo (3.37) e (3.40) em (3.36), obtém-se o resultado semelhante à (2.62) (visto no capítulo 2):

$$\bar{Z}[J] = \bar{Z}[0] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J^{\mu}(x) \bar{D}_{\mu\nu}(x, y) J^{\nu}(y) \right] , \quad (3.41)$$

onde é possível identificar a função

$$\bar{D}_{\mu\nu}(x, y) = - \int d^3 \omega_{\parallel} d^3 z_{\parallel} f_{\mu}^{\alpha}(x, \omega_{\parallel}) V_{\alpha\theta}(\omega_{\parallel}, z_{\parallel}) f_{\nu}^{\theta}(y, z_{\parallel}) . \quad (3.42)$$

Substituindo (3.35) e (3.40) em (3.42) tem-se, após uma álgebra longa mas elementar, que

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{\mu\nu}(x,y) = & -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})} \left[\left(\eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) [1 + M(x^3, y^3, p_{\parallel})] \right. \\
& + [F_1(p_{\parallel})]_{\mu\nu} + [i\Gamma | y^3 - a | - 1] [F_2(p_{\parallel})]_{\mu\nu} + (y^3 - a) [F_3(p_{\parallel})]_{\mu\nu} \\
& - [i\Gamma | x^3 - a | - 1] [F_4(p_{\parallel})]_{\mu\nu} - [i\Gamma | x^3 - a | - 1] [i\Gamma | y^3 - a | - 1] [F_5(p_{\parallel})]_{\mu\nu} \\
& - (y^3 - a) [i\Gamma | x^3 - a | - 1] [F_6(p_{\parallel})]_{\mu\nu} - (x^3 - a) [F_7(p_{\parallel})]_{\mu\nu} \\
& \left. - (x^3 - a) [i\Gamma | y^3 - a | - 1] [F_8(p_{\parallel})]_{\mu\nu} - (x^3 - a) (y^3 - a) [F_9(p_{\parallel})]_{\mu\nu} \right] \\
& \times \frac{e^{i\Gamma(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{\Gamma} .
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Na expressão acima foram utilizadas as seguintes definições:

$$\begin{aligned}
M(x^3, y^3, p_{\parallel}) = & -\frac{1}{2} \left[\left[(k_{AF})^3 \right]^2 + \frac{[(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]^2}{p_{\parallel}^2} \right] \left[\frac{3}{p_{\parallel}^2} \left(i\Gamma(|x^3 - a| + |y^3 - a|) - 2 \right) \right. \\
& + (|x^3 - a|^2 + |y^3 - a|^2) \left. \right] + \frac{i}{p_{\parallel}^2} (k_{AF})^3 [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \left[i\Gamma(|x^3 - a| (x^3 - a) \right. \\
& + |y^3 - a| (y^3 - a)) - (x^3 - y^3) \left. \right] + \frac{2}{p_{\parallel}^2} (k_{AF})_{\parallel}^2 \left[i\Gamma(|x^3 - a| + |y^3 - a|) - 2 \right] \\
& + \frac{[(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]^2}{2p_{\parallel}^4} - \frac{[(k_{AF})^3]^2}{2p_{\parallel}^2} ,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
[F_1(p_{\parallel})]_{\mu\nu} = & \frac{2}{p_{\parallel}^4} \left\{ \eta_{\parallel\mu\nu} [p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel}^2 - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]^2] + [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] [p_{\parallel\mu} (k_{AF})_{\parallel\nu} \right. \\
& + (k_{AF})_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu}] - p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel\mu} (k_{AF})_{\parallel\nu} - (k_{AF})_{\parallel}^2 p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} \left. \right\} + \frac{i}{p_{\parallel}^2} (k_{AF})^3 \varepsilon_{\mu\nu\lambda 3} p_{\parallel}^{\lambda} ,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
[F_2(p_{\parallel})]_{\mu\nu} = & -\frac{1}{p_{\parallel}^4} \left\{ 2(k_{AF})_{\nu} \left[p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel\mu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] p_{\parallel\mu} \right] - i p_{\parallel}^2 \eta_{\nu 3} \varepsilon_{\mu\alpha\gamma 3} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} p_{\parallel}^{\gamma} \right. \\
& - (k_{AF})^3 \left[i p_{\parallel}^2 \varepsilon_{\mu\nu\gamma 3} p_{\parallel}^{\gamma} + \eta_{\nu 3} \left(p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel\mu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] p_{\parallel\mu} \right) \right] \\
& \left. - [(k_{AF})^3]^2 \left(\eta_{\parallel\mu\nu} p_{\parallel}^2 - p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} \right) \right\}, \tag{3.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[F_2(p_{\parallel})]_{\mu\nu} = & -\frac{1}{p_{\parallel}^4} \left\{ 2(k_{AF})_{\nu} \left[p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel\mu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] p_{\parallel\mu} \right] - i p_{\parallel}^2 \eta_{\nu 3} \varepsilon_{\mu\alpha\gamma 3} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} p_{\parallel}^{\gamma} \right. \\
& - (k_{AF})^3 \left[i p_{\parallel}^2 \varepsilon_{\mu\nu\gamma 3} p_{\parallel}^{\gamma} + \eta_{\nu 3} \left(p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel\mu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] p_{\parallel\mu} \right) \right] \\
& \left. - [(k_{AF})^3]^2 \left(\eta_{\parallel\mu\nu} p_{\parallel}^2 - p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} \right) \right\}, \tag{3.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[F_3(p_{\parallel})]_{\mu\nu} = & -\frac{1}{p_{\parallel}^2} \left\{ -p_{\parallel\nu} \varepsilon_{\mu\alpha\gamma 3} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} p_{\parallel}^{\gamma} + [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \varepsilon_{\mu\nu\gamma 3} p_{\parallel}^{\gamma} \right. \\
& \left. + i (k_{AF})^3 \left[(k_{AF})_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \eta_{\parallel\mu\nu} \right] \right\}, \tag{3.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[F_4(p_{\parallel})]_{\mu\nu} = & -\frac{1}{p_{\parallel}^4} \left\{ -2(k_{AF})_{\mu} \left[p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel\nu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] p_{\parallel\nu} \right] - i p_{\parallel}^2 \eta_{\mu 3} \varepsilon_{\nu\alpha\lambda 3} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} p_{\parallel}^{\lambda} \right. \\
& + (k_{AF})^3 \left[i p_{\parallel}^2 \varepsilon_{\mu\nu\lambda 3} p_{\parallel}^{\lambda} + \eta_{\mu 3} \left(p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel\nu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] p_{\parallel\nu} \right) \right] \\
& \left. + [(k_{AF})^3]^2 \left(\eta_{\parallel\mu\nu} p_{\parallel}^2 - p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} \right) \right\}, \tag{3.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[F_5(p_{\parallel})]_{\mu\nu} = & -\frac{1}{p_{\parallel}^4} \left\{ \eta_{\mu 3} \eta_{\nu 3} \left[p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel}^2 - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]^2 \right] + (k_{AF})^3 \left[\eta_{\mu 3} \left(p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel\nu} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] p_{\parallel\nu} \right) + \eta_{\nu 3} \left(p_{\parallel}^2 (k_{AF})_{\parallel\mu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] p_{\parallel\mu} \right) \right] \\
& \left. + [(k_{AF})^3]^2 \left(\eta_{\parallel\mu\nu} p_{\parallel}^2 - p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} \right) \right\}, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[F_6(p_{\parallel})]_{\mu\nu} &= \frac{i}{p_{\parallel}^2} \left[\eta_{\mu 3} \left((k_{AF}^2)_{\parallel} p_{\parallel\nu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] (k_{AF})_{\parallel\nu} \right) \right. \\
&\quad \left. + (k_{AF})^3 \left((k_{AF})_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \eta_{\parallel\mu\nu} \right) \right], \quad (3.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[F_7(p_{\parallel})]_{\mu\nu} &= -\frac{1}{p_{\parallel}^2} \left[p_{\parallel\mu} \varepsilon_{\nu\alpha\lambda 3} (k_{AF})_{\parallel}^{\alpha} p_{\parallel}^{\lambda} + [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \varepsilon_{\mu\nu\lambda 3} p_{\parallel}^{\lambda} \right. \\
&\quad \left. + i (k_{AF})^3 \left(p_{\parallel\mu} (k_{AF})_{\parallel\nu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \eta_{\parallel\mu\nu} \right) \right], \quad (3.52)
\end{aligned}$$

$$[F_8(p_{\parallel})]_{\mu\nu} = -\frac{i}{p_{\parallel}^2} \left[\eta_{\nu 3} \left((k_{AF}^2)_{\parallel} p_{\parallel\mu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] (k_{AF})_{\parallel\mu} \right) \right] \quad (3.53)$$

$$+ (k_{AF})^3 \left(p_{\parallel\mu} (k_{AF})_{\parallel\nu} - [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \eta_{\parallel\mu\nu} \right) \quad (3.54)$$

e

$$[F_9(p_{\parallel})]_{\mu\nu} = \frac{1}{p_{\parallel}^2} \left[-\eta_{\parallel\mu\nu} [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}]^2 - (k_{AF}^2)_{\parallel} p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} \right] \quad (3.55)$$

$$+ [(k_{AF})_{\parallel} \cdot p_{\parallel}] \left(p_{\parallel\mu} (k_{AF})_{\parallel\nu} + (k_{AF})_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} \right). \quad (3.56)$$

Substituindo as expressões (3.41) e (3.27) em (3.26), o funcional gerador na presença de uma placa perfeitamente condutora torna-se

$$Z_C[J] = Z_C[0] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{\mu}(x) (D_{\mu\nu}(x,y) + \bar{D}_{\mu\nu}(x,y)) J^{\nu}(y) \right]. \quad (3.57)$$

A partir da expressão (3.57), podemos identificar o propagador da teoria (3.1) na presença de uma superfície condutora até segunda ordem no vetor de fundo:

$$D_C^{\mu\nu}(x,y) = D^{\mu\nu}(x,y) + \bar{D}^{\mu\nu}(x,y). \quad (3.58)$$

Note que o propagador (3.58) é composto pela soma do propagador livre (3.14) com a correção (3.43), que leva em conta a presença da placa condutora. No limite $(k_{AF})^{\mu} \rightarrow 0$, o propaga-

dor (3.43) reduz-se ao mesmo encontrado na eletrodinâmica de Maxwell na presença de uma superfície condutora, expresso em (2.79).

Podemos verificar a consistência do resultado (3.58) levando em conta que a solução que descreve o campo produzido por uma fonte externa é dada por (SOARES et al., 2024)

$$A^\beta(x) = \int d^4y D_C^{\beta\rho}(x,y) J_\rho(y) . \quad (3.59)$$

Substituindo a equação (3.59) em (2.26), reescrevemos a condição de contorno da placa condutora como segue:

$$\int d^4y \left[\epsilon_{3\nu\alpha\beta} \frac{\partial D_C^{\beta\rho}(x,y)}{\partial x_\alpha} \right] J_\rho(y) \Big|_{x^3=a} = 0, \quad (3.60)$$

implicando em

$$\epsilon_{3\nu\alpha\beta} \frac{\partial D_C^{\beta\rho}(x,y)}{\partial x_\alpha} \Big|_{x^3=a} = 0 . \quad (3.61)$$

Substituindo a equação (3.58) em (3.61) e utilizando as interações (12) , após longas manipulações algébricas, podemos verificar explicitamente que a condição da placa condutora (3.61) é satisfeita.

3.2.2 Energia e Força de Interação Placa-Carga

Usando o propagador (3.58) obtido na seção anterior, consideraremos nesta seção a energia de interação entre uma carga pontual estacionária e a placa condutora, que pode ser calculada a partir de

$$E = \frac{1}{2T} \int d^4x d^4y J^\mu(x) \bar{D}_{\mu\nu}(x,y) J^\nu(y) , \quad (3.62)$$

conforme apresentado na seção 2.2 do capítulo 2.

Escolhemos uma carga pontual localizada na posição $\mathbf{b} = (0, 0, b)$, perpendicular à placa, como já foi mostrado na Figura 2.3. A fonte externa correspondente é dada por:

$$J^\mu(x) = q\eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{b}) , \quad (3.63)$$

onde q é carga elétrica.

Substituindo as equações (3.63) e (3.43) em (3.62), utilizando as expressões (3.44), (3.45), (3.47), (3.48), (3.49), (3.50), (3.51), (3.52), (3.53), (3.55) e calculando as integrais ¹, obtemos que a energia de interação entre a placa e a carga é dada por

$$E_{PC} = -\frac{q^2}{16\pi^2} \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \frac{e^{-2R\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2}}}{\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{\mathbf{p}_{\parallel}^2} \left(\frac{1}{2} + R\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2} \right) \left[3 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 - \frac{3 \left[(\mathbf{k}_{AF})_{\parallel} \cdot \mathbf{p}_{\parallel} \right]^2}{\mathbf{p}_{\parallel}^2} + 4 \left(\mathbf{k}_{AF}^2 \right)_{\parallel} \right] - 2R^2 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 \right\}. \quad (3.64)$$

Este resultado pode ser simplificado utilizando coordenadas polares e integrando sobre o ângulo sólido, resultando em

$$E_{PC} = -\frac{q^2}{16\pi} \left\{ 2 \left[1 - 2R^2 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 \right] \int_0^{\infty} dp e^{-2Rp} - \left[6 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 + 5 \left(\mathbf{k}_{AF}^2 \right)_{\parallel} \right] \times \left(R \int_0^{\infty} dp \frac{e^{-2Rp}}{p} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dp \frac{e^{-2Rp}}{p^2} \right) \right\}. \quad (3.65)$$

A primeira integral no lado direito da equação (3.65) é dada por

$$\int_0^{\infty} dp e^{-2Rp} = \frac{1}{2R}. \quad (3.66)$$

No entanto, as integrais restantes são divergentes devido a singularidade em $p = 0$ no integrando. Isso exige o uso de algum tipo de regularização. Uma forma de regularizar é inserindo um parâmetro ε , como segue

$$\int_0^{\infty} dp \frac{e^{-2Rp}}{p} = \int_{\varepsilon}^{\infty} dp \frac{e^{-2Rp}}{p} = [Ei(1, 2R\varepsilon)] , \quad (3.67)$$

$$\int_0^{\infty} dp \frac{e^{-2Rp}}{p^2} = \int_{\varepsilon}^{\infty} dp \frac{e^{-2Rp}}{p^2} = \left[\frac{e^{-2R\varepsilon}}{\varepsilon} - 2R[Ei(1, 2R\varepsilon)] \right] , \quad (3.68)$$

onde $Ei(n, s)$ é a função integral exponencial (ARFKEN; WEBER, 1995), definida por

$$Ei(n, s) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-ts}}{t^n} dt \quad \text{com } \Re(s) > 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.69)$$

¹ O resultado por ser obtido forma mais simples calculando as integrais na seguinte sequência: $d^3\mathbf{x}$, $d^3\mathbf{y}$, dx^0 , dp^0 e dy^0 .

No final dos cálculos devemos tomar $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, a energia de interação toma forma:

$$E_{PC} = -\frac{q^2}{16\pi} \left\{ \frac{1}{R} \left[1 - 2R^2 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 \right] - \left[6 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 + 5 (\mathbf{k}_{AF}^2)_{\parallel} \right] \left(\frac{e^{-2R\varepsilon}}{2\varepsilon} \right) \right\}. \quad (3.70)$$

Expandindo o fator dependente do regulador ε ,

$$\frac{e^{-2R\varepsilon}}{2\varepsilon} \cong \frac{1}{2\varepsilon} - R + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (3.71)$$

obtemos que

$$E_{PC} = -\frac{q^2}{16\pi} \left\{ \frac{1}{R} \left[1 - 2R^2 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 \right] - \left[6 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 + 5 (\mathbf{k}_{AF}^2)_{\parallel} \right] \left(-R + \frac{1}{2\varepsilon} \right) \right\} \quad (3.72)$$

Na expressão (3.72), note que o termo singular não depende da distância R . Desse modo, ele não afeta grandezas como o torque e a força. Uma vez que estamos tratando de uma teoria livre, podemos então simplesmente absorver o termo singular em uma redefinição do ponto zero da energia

$$E_{PC} = -\frac{q^2}{16\pi} \left[\frac{1}{R} + R \left(5 (\mathbf{k}_{AF}^2)_{\parallel} + 4 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 \right) \right]. \quad (3.73)$$

Vale ressaltar que (3.73) é um resultado perturbativo até a segunda ordem no vetor de fundo (ver equação (3.13)). O primeiro termo no lado direito reproduz o resultado obtido na eletrodinâmica de Maxwell, enquanto que as contribuições restantes são devidas à quebra da simetria de Lorentz.

A partir da (3.73), obtemos a força de interação entre a placa condutora e a carga

$$F_{PC} = -\frac{\partial E_{PC}}{\partial R} = \frac{q^2}{16\pi} \left[-\frac{1}{R^2} + 5 (\mathbf{k}_{AF}^2)_{\parallel} + 4 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 \right]. \quad (3.74)$$

No limite $\mathbf{k}_{AF} \rightarrow 0$, a força de interação acima reduz-se ao termo coulombiano.

3.2.3 O Método das Imagens

A partir da expressão (3.16), podemos obter a força de interação para o caso específico em que temos duas cargas opostas $q_1 = q$ e $q_2 = -q$ colocadas a uma distância $2R$. Nesse

arranjo, obtemos que

$$F_{CC}(2R) = \frac{q^2}{16\pi} \left[-\frac{1}{R^2} + 6(\mathbf{k}_{AF}^2)_{\parallel} + 4 \left[(k_{AF})^3 \right]^2 \right]. \quad (3.75)$$

Considerando que as componentes espaciais do vetor de fundo paralelas ao espelho não sejam nulas, observamos que a equação (3.74) é diferente da expressão (3.75). Por outro lado, no arranjo em que o vetor de fundo tenha apenas a componente perpendicular ao espelho, ou seja, $\mathbf{k}_{AF} = (0, 0, (k_{AF})^3)$, as expressões (3.74) e (3.75) tornam-se equivalentes entre si, mostrando que o método das imagens é válido neste caso.

Em geral, até a segunda ordem em $(k_{AF})^\mu$, o método da imagem não é válido para o setor de calibre CPT-ímpar do MPE mínimo para a condição de placa condutora (2.26). Vale ressaltar que esse resultado contrasta com o setor de calibre CPT-par do MPE mínimo, no qual o método da imagem permanece válido (BORGES; BARONE, 2017). No entanto, para o modelo não mínimo de violação de Lorentz considerado em (BORGES; BARONE, 2020) o método da imagem não é válido.

3.2.4 Torque devido a quebra da simetria de Lorentz

Quando fixamos a distância entre a carga e o espelho, a partir da equação (3.73) obtemos um torque sobre a partícula em relação à placa. Para calcular esse torque, definimos $0 \leq \alpha \leq \pi$ como o ângulo entre a normal ao espelho e o vetor de fundo $\mathbf{k}_{AF}$ de tal forma que $(\mathbf{k}_{AF}^2)_{\parallel} = \mathbf{k}_{AF}^2 \sin^2(\alpha)$ e $\left[(k_{AF})^3 \right]^2 = \mathbf{k}_{AF}^2 \cos^2(\alpha)$, como representado na Figura 3.1. Assim, a expressão (3.73) se torna

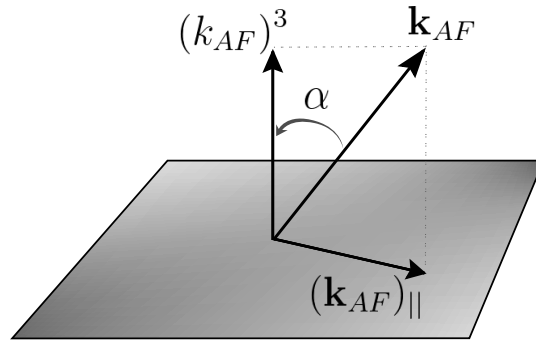
$$E_{PC}(\alpha) = -\frac{q^2}{16\pi} \left[\frac{1}{R} + (\mathbf{k}_{AF}^2) R (4 + \sin^2(\alpha)) \right], \quad (3.76)$$

e o torque é dado por

$$\tau_{PC} = -\frac{\partial E_{PC}(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{q^2}{16\pi} (\mathbf{k}_{AF}^2) R \sin(2\alpha). \quad (3.77)$$

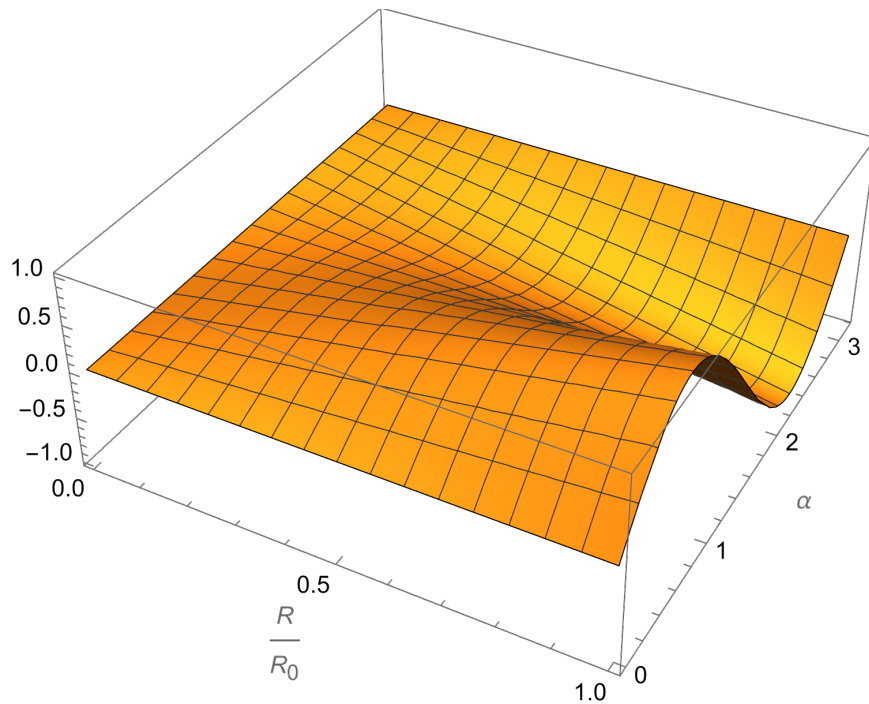
O torque (3.77) não ocorre na eletrodinâmica de Maxwell usual, tornando-se um efeito exclusivo de violação de Lorentz até a segunda ordem no vetor de fundo.

Figura 3.1 – Decomposição de $\mathbf{k}_{AF} = ((k_{AF})_{||}, (k_{AF})^3)$ em relação ao espelho, com α sendo o ângulo entre a componente $(k_{AF})^3$ normal ao espelho e o vetor de fundo $\mathbf{k}_{AF}$.



Se $|\mathbf{k}_{AF}| = 0$ ou $\alpha = 0, \pi/2, \pi$, não haverá torque. Para $\alpha = \pi/4$ o torque atinge a intensidade máxima. Um efeito similar foi obtido na referencia (BORGES; BARONE, 2017) para o setor de calibre CPT-par do SME mínimo, assim como na referencia (BORGES; BARONE, 2020) para o cenário do SME não mínimo. Na Figura 3.2, o comportamento geral do torque (3.77) é mostrado como função de R e α .

Figura 3.2 – Gráfico de $\tau_{PC} \times \left(\frac{16\pi}{q^2 \mathbf{k}_{AF}^2 R_0} \right)$ dado pela equação (3.77) (eixo vertical). Os eixos estão em unidades adimensionais relativas a escala característica $R_0 = 10^{-6}\text{m}$.



O parâmetro de violação de Lorentz do setor CPT-ímpar é fortemente restrito por dados de testes astrofísicos como sendo da ordem de $|\mathbf{k}_{AF}| \sim 10^{-42}$ GeV (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990). Vamos usar esse limite superior para obter uma estimativa da ordem de magnitude para o torque (3.77). Utilizando a distância típica de experimentos atômicos nas proximidades de um condutor, que é da ordem de $R_0 \sim 10^{-6}$ m, e a carga eletrônica fundamental $q \sim 1.60217 \times 10^{-19}$ C, obtemos $\tau_{PC} \sim 10^{-89}$ Nm. Portanto, a ordem de grandeza do efeito é muito menor do que os torques mensuráveis pelos equipamentos experimentais disponíveis (SHAO et al., 2015).

4 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Neste trabalho investigamos alguns aspectos do setor de calibre CPT-ímpar do Modelo Padrão Estendido (MPE). Mostramos no capítulo 2 a consistência do formalismo de integrais de trajetória para calcular efeitos físicos (a nível clássico) conhecidos da eletrodinâmica de Maxwell. O capítulo serviu como preparação para o capítulo 3, onde aplicamos o método funcional à eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ). Os cálculos foram feitos tanto na proximidade de uma placa perfeitamente condutora quanto na ausência de uma fronteira. Obtivemos resultados perturbativos até a segunda ordem no vetor de fundo. Calculamos o propagador modificado para o campo de calibre devido à presença do espelho e determinamos a energia e a força de interação entre o espelho e uma carga pontual estacionária em relação à placa.

Demonstramos que quando a carga é colocada nas proximidades do espelho surge um torque espontâneo na carga devido à orientação do espelho em relação ao vetor de fundo. Esse efeito é relevante no contexto teórico por não possuir equivalente na eletrodinâmica de Maxwell. Tal efeito pode ser significativo também no contexto da Eletrodinâmica Quântica na presença de meios materiais. Um método potencial para medir o torque devido à quebra da simetria de Lorentz seria por meio de experimentos com pêndulos de torção (SHAO et al., 2015). No entanto, a sensibilidade atual desses dispositivos é da ordem de 10^{-16} Nm (SHAO et al., 2015), e portanto ainda são insuficientes para observar o efeito previsto nesta dissertação.

Os resultados obtidos neste trabalho representam contribuições originais relacionadas à eletrodinâmica de CFJ (SOARES et al., 2024). Também demonstramos que o método das imagens para a eletrodinâmica de CFJ é válido apenas no cenário em que o vetor de fundo possui apenas a componente perpendicular ao espelho.

O presente trabalho motiva outras investigações no contexto do setor CPT-ímpar do MPE. Tendo obtido o propagador da teoria com as correções devida à presença da placa condutora (3.58), podemos calcular os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ gerados pela configuração placa-carga na teoria de CFJ. A partir disso, efeitos magnetoelétricos e de emissão de radiação eletromagnética podem ser explorados sob uma abordagem (semi-)clássica e/ou quântica. Além disso, correções perturbativas da Teoria Quântica de Campos podem ser abordadas sob tal temática, como o cálculo do momento anômalo do elétron e o efeito Casimir.

Atualmente estamos investigando as contribuições do setor de calibre CPT-ímpar do MPE para interações atômicas. Nesta investigação, utilizamos a abordagem perturbativa de Rayleigh-Schrödinger para calcular a correção do estado fundamental do átomo de hidrogênio

e, junto a isso, estimar a componente espacial $\mathbf{k}_{AF}$ do vetor de fundo $(k_{AF})^\mu$. Atualmente o trabalho se encontra em fase de escrita e deverá ser submetido à publicação no começo de 2025.

REFERÊNCIAS

- ADAM, C.; KLINKHAMER, F. R. Causality and cpt violation from an abelian chern–simons-like term. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 607, n. 1-2, p. 247–267, 2001.
- ADAM, C.; KLINKHAMER, F. R. Photon decay in a cpt-violating extension of quantum electrodynamics. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 657, p. 214–228, 2003.
- ALFARO, J. et al. Bare and induced lorentz and cpt invariance violations in qed. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 25, n. 16, p. 3271–3306, 2010.
- ANDRIANOV, A. A. et al. Anomalous positron excess from lorentz-violating qed. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 2009, n. 09, p. 057, 2009.
- ARAÚJO, M.; FURTADO, J.; MALUF, R. Casimir effect in a lorentz-violating tensor extension of a scalar field theory. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 139, n. 2, p. 1–12, 2024.
- ARFKEN, G.; WEBER, H. **Mathematical Methods for Physicists**. San Diego, CA: Academic Press, 1995. v. 4.
- BAILEY, Q. G.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating electrostatics and magnetostatics. **Physical Review D**, APS, v. 70, n. 7, p. 076006, 2004.
- BARCELOS-NETO, J. **Teoria de Campos e A Natureza - Parte Quântica**. [S.l.]: Livraria da Física, São Paulo, 2017.
- BARONE, F.; BARONE, F. Field theoretic description of electromagnetic boundaries: The casimir effect between dissimilar mirrors from external potentials. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 74, p. 1–7, 2014.
- BARONE, F.; BARONE, F. Field theoretic description of partially reflective surfaces. **Physical Review D**, APS, v. 89, n. 6, p. 065020, 2014.
- BARONE, F.; NOGUEIRA, A. A conducting surface in lee–wick electrodynamics. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 75, p. 1–11, 2015.
- BARONE, F.; NOGUEIRA, A. Casimir effect in podolsky electrodynamics: A functional approach. In: WORLD SCIENTIFIC. **International Journal of Modern Physics: Conference Series**. [S.l.], 2016. v. 41, p. 1660134.
- BARREDO-ALAMILLA, E.; URRUTIA, L. F.; JR, M. M. F. Electromagnetic radiation in chiral matter: The cherenkov case. **Physical Review D**, APS, v. 107, n. 9, p. 096024, 2023.
- BLASONE, M. et al. Casimir effect in post-newtonian gravity with lorentz-violation. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 78, p. 1–8, 2018.
- BLAZHYEVSKA, M. The casimir effect in the electrodynamics of podolsky. **Journal of physical studies**, v. 16, n. 3, 2012.
- BORDAG, M.; KIRSTEN, K.; VASSILEVICH, D. Ground state energy for a penetrable sphere and for a dielectric ball. **Physical Review D**, APS, v. 59, n. 8, p. 085011, 1999.
- BORDAG, M.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. M. New developments in the casimir effect. **Physics reports**, Elsevier, v. 353, n. 1-3, p. 1–205, 2001.

BORDAG, M.; ROBASCHIK, D.; WIECZOREK, E. Quantum field theoretic treatment of the casimir effect. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 165, n. 1, p. 192–213, 1985.

BORGES, L.; BARONE, F. A perfectly conducting surface in electrodynamics with lorentz symmetry breaking. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 77, n. 10, p. 693, 2017.

BORGES, L.; BARONE, F. Field sources in a cpt-even lorentz-violation maxwell electrodynamics. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, v. 49, p. 571–582, 2019.

BORGES, L.; BARONE, F. New effects in the vicinity of a perfectly conducting plate in a non-minimal lorentz violation scenario. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, v. 50, p. 647–657, 2020.

BORGES, L.; BARONE, F. Features of planar lee-wick electrodynamics. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 824, p. 136759, 2022.

BORGES, L.; BARONE, F.; HELAYËL-NETO, J. Field sources in a lorentz-symmetry breaking scenario with a single background vector. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 74, p. 1–7, 2014.

BORGES, L.; BARONE, F.; OLIVEIRA, H. Higher order derivatives extension of maxwell-chern-simons electrodynamics in the presence of field sources and material boundaries. **Physical Review D**, APS, v. 105, n. 2, p. 025008, 2022.

BORGES, L. et al. New point-like sources and a conducting surface in maxwell–chern–simons electrodynamics. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 80, p. 1–13, 2020.

BORGES, L.; FERRARI, A. Semi-transparent boundaries in cpt-even lorentz violating electrodynamics. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 980, p. 115829, 2022.

BORGES, L.; FERRARI, A.; BARONE, F. Mirrors and field sources in a lorentz-violating scalar field theory. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 954, p. 114974, 2020.

BORGES, L. et al. Dirichlet boundary condition for the lee–wick–like scalar model. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 80, p. 1–8, 2020.

BORGES, L. H. C.; FERRARI, A. F. External sources in a minimal and nonminimal CPT-odd Lorentz violating Maxwell electrodynamics. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 37, n. 04, p. 2250021, 2022.

BORGES, L. H. d. C.; BARONE, F. Traces of lorentz symmetry breaking in a hydrogen atom at ground state. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 76, p. 1–9, 2016.

BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 144, n. 852, p. 425–451, 1934.

BRITO, L. et al. No radiative corrections to the carroll–field–jackiw term beyond one-loop order. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 36, n. 05, p. 2150033, 2021.

BRONSTEIN, M. Republication of: Quantum theory of weak gravitational fields. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 44, n. 1, p. 267–283, 2012.

- CAMILO, G.; BARONE, F.; BARONE, F. Interactions between delta-like sources and potentials. **Physical Review D**, APS, v. 87, n. 2, p. 025011, 2013.
- CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 41, n. 4, p. 1231, 1990.
- CASANA, R. et al. Maxwell–chern–simons vortices in a cpt-odd lorentz-violating higgs electrodynamics. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 74, p. 1–10, 2014.
- CASANA, R. et al. Gauge propagator and physical consistency of the c p t-even part of the standard model extension. **Physical Review D**, APS, v. 80, n. 12, p. 125040, 2009.
- CASANA, R. et al. Feynman propagator for the nonbirefringent c p t-even electrodynamics of the standard model extension. **Physical Review D**, APS, v. 82, n. 12, p. 125006, 2010.
- CASANA, R.; JR, M. M. F.; SILVA, M. R. Parity-odd and c p t-even electrodynamics of the standard model extension at finite temperature. **Physical Review D**, APS, v. 81, n. 10, p. 105015, 2010.
- CASANA, R.; SOURROUILLE, L. Self-dual maxwell–chern–simons solitons from a lorentz-violating model. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 726, n. 1-3, p. 488–492, 2013.
- CASIMIR, H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: **Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.** [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, p. 793.
- CAVALCANTI, R. M. Casimir force between partially transparent plane mirrors. **arXiv preprint hep-th/0201150**, 2002.
- COLEMAN, S.; GLASHOW, S. L. High-energy tests of lorentz invariance. **Physical Review D**, APS, v. 59, n. 11, p. 116008, 1999.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Cpt violation and the standard model. **Physical Review D**, APS, v. 55, n. 11, p. 6760, 1997.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, APS, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- CRUZ, M.; MELLO, E. B. de; MOTA, H. S. Casimir energy and topological mass for a massive scalar field with lorentz violation. **Physical Review D**, APS, v. 102, n. 4, p. 045006, 2020.
- CRUZ, M.; MELLO, E. B. de; PETROV, A. Y. Casimir effects in lorentz-violating scalar field theory. **Physical Review D**, APS, v. 96, n. 4, p. 045019, 2017.
- CRUZ, M.; MELLO, E. B. de; PETROV, A. Y. Fermionic casimir effect in a field theory model with lorentz symmetry violation. **Physical Review D**, APS, v. 99, n. 8, p. 085012, 2019.
- CRUZ, M.; MELLO, E. Bezerra de; PETROV, A. Y. Thermal corrections to the casimir energy in a lorentz-breaking scalar field theory. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 33, n. 20, p. 1850115, 2018.
- DANTAS, R. A.; MOTA, H. F. S.; MELLO, E. R. Bezerra de. Bosonic casimir effect in an aether-like lorentz-violating scenario with higher order derivatives. **Universe**, MDPI, v. 9, n. 5, p. 241, 2023.

- ERDAS, A. Casimir effect of a lorentz-violating scalar in magnetic field. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 35, n. 31, p. 2050209, 2020.
- ESCOBAR, C.; MEDEL, L.; MARTÍN-RUIZ, A. Casimir effect in lorentz-violating scalar field theory: A local approach. **Physical Review D**, APS, v. 101, n. 9, p. 095011, 2020.
- FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the yang-mills field. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 29–30, 1967.
- FELIPE, J. et al. Arbitrariness in the gravitational chern-simons-like term induced radiatively. **Physical Review D**, APS, v. 89, n. 10, p. 105034, 2014.
- FEYNMAN, R. P.; BROWN, L. M. **Feynman's thesis: a new approach to quantum theory**. [S.l.]: World Scientific, 2005.
- FRANK, M.; TURAN, I. Casimir force in a lorentz violating theory. **Physical Review D**, APS, v. 74, n. 3, p. 033016, 2006.
- GOMES, M. O. C. **Teoria Quântica dos Campos**. [S.l.]: Edusp, 2002.
- GOMES, Y.; MALTA, P. Laboratory-based limits on the carroll-field-jackiw lorentz-violating electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 94, n. 2, p. 025031, 2016.
- GORELIK, G. E. Matvei bronstein and quantum gravity: 70th anniversary of the unsolved problem. **Physics-Uspekhi**, IOP Publishing, v. 48, n. 10, p. 1039, 2005.
- GRAHAM, N. et al. Calculating vacuum energies in renormalizable quantum field theories:: A new approach to the casimir problem. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 645, n. 1-2, p. 49–84, 2002.
- GRAHAM, N. et al. Casimir energies in light of quantum field theory. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 572, n. 3-4, p. 196–201, 2003.
- GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics**. [S.l.]: Pearson, 2011.
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 98, n. 11, p. 714–732, 1936.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. **General relativity: an introduction for physicists**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1983.
- JR, M. M. F. et al. Unitarity in Stückelberg electrodynamics modified by a carroll-field-jackiw term. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 804, p. 135379, 2020.
- KHARLANOV, O.; ZHUKOVSKY, V. C. Casimir effect within $d=3+1$ maxwell-chern-simons electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 81, n. 2, p. 025015, 2010.
- KOSTELECKÝ, V. A.; LI, Z. Gauge field theories with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, APS, v. 99, n. 5, p. 056016, 2019.
- KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Cosmological constraints on lorentz violation in electrodynamics. **Physical Review Letters**, APS, v. 87, n. 25, p. 251304, 2001.

KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Signals for lorentz violation in electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 66, n. 5, p. 056005, 2002.

KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Signals for lorentz violation in electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 66, n. 5, p. 056005, 2002.

KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Sensitive polarimetric search for relativity violations in gamma-ray bursts. **Physical review letters**, APS, v. 97, n. 14, p. 140401, 2006.

KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Electrodynamics with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, APS, v. 80, n. 1, p. 015020, 2009.

KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Fermions with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, APS, v. 88, n. 9, p. 096006, 2013.

KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. Cpt and strings. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 359, n. 2-3, p. 545–570, 1991.

KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Data tables for lorentz and cpt violation. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 83, n. 1, p. 11–31, 2011.

KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings. **Physical Review D**, APS, v. 40, n. 6, p. 1886, 1989.

KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories. **Physical Review Letters**, APS, v. 63, n. 3, p. 224, 1989.

KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. **Physical Review D**, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.

KRUGLOV, S. Remarks on heisenberg–euler-type electrodynamics. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 32, n. 16, p. 1750092, 2017.

LEMOIS, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2013.

MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo Volume II**. [S.l.]: Ponta Grossa: Editora UEPG, 2002.

MARTÍN-RUIZ, A.; ESCOBAR, C. Casimir effect between ponderable media as modeled by the standard model extension. **Physical Review D**, APS, v. 94, n. 7, p. 076010, 2016.

MARTÍN-RUIZ, A.; ESCOBAR, C. Local effects of the quantum vacuum in lorentz-violating electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 95, n. 3, p. 036011, 2017.

MARTÍN-RUIZ, A. et al. Lorentz violating scalar casimir effect for a d-dimensional sphere. **Physical Review D**, APS, v. 102, n. 1, p. 015027, 2020.

MELLO, E. Bezerra de; CRUZ, M. Scalar casimir effects in a lorentz violation scenario induced by the presence of constant vectors. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 38, n. 11, p. 2350062, 2023.

MILTON, K. A. **The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy**. [S.l.]: World Scientific, 2001.

- MILTON, K. A. Casimir energies and pressures for δ -function potentials. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 37, n. 24, p. 6391, 2004.
- MOJAVEZI, A.; MOAZZEMI, R.; ZOMORRODIAN, M. E. Nlo radiative correction to the casimir energy in lorentz-violating scalar field theory. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 941, p. 145–157, 2019.
- MOREIRA, R. P. M.; LUZ, R. R. O termo cpt do modelo padrão estendido. **e-Boletim da Física**, v. 10, n. 1, 2021.
- NOVELLO, M. **Eletrodinâmica não linear: causalidade e efeitos cosmológicos**. [S.l.]: Livraria da Física, São paulo, 2010.
- OLIVEIRA, H. et al. Magnetolectric boundary simulated by a chern–simons-like model. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 81, n. 6, p. 1–8, 2021.
- PESKIN, M. E. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: CRC press, 2018.
- PETROV, A.; NASCIMENTO, J. R.; PORFIRIO, P. **Introduction to modified gravity**. [S.l.]: Springer Nature, 2023.
- POLCHINSKI, J. What is string theory? **arXiv preprint hep-th/9411028**, 1994.
- RIBEIRO, F. S.; SILVA, P. D.; JR, M. M. F. Cold plasma modes in the chiral maxwell-carroll-field-jackiw electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 107, n. 9, p. 096018, 2023.
- ROHIM, A.; ROMADANI, A.; ADAM, A. S. Casimir effect of lorentz-violating charged dirac field in background magnetic field. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, Oxford University Press, v. 2024, n. 3, p. 033B01, 2024.
- SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Standard model extension and casimir effect for fermions at finite temperature. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 762, p. 283–287, 2016.
- SANTOS, F. E. d.; JR, M. M. F. Fermion scattering in a cpt-even lorentz violation quantum electrodynamics. **Symmetry**, MDPI, v. 10, n. 8, p. 302, 2018.
- SANTOS, T. R.; SOBREIRO, R. F. Lorentz-violating yang–mills theory: discussing the chern–simons-like term generation. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 77, p. 1–10, 2017.
- SCHWARTZ, M. Introduction to quantum field theory. **Harvard University**, p. 131–132, 2008.
- SHAO, C.-G. et al. Search for lorentz invariance violation through tests of the gravitational inverse square law at short ranges. **Physical Review D**, APS, v. 91, n. 10, p. 102007, 2015.
- SILVA, D. R. da; MELLO, E. de. Electromagnetic casimir effect in a lorentz symmetry violation model. **arXiv preprint arXiv:2006.12924**, 2020.
- SILVA, L.; BELICH, H.; HELAYEL-NETO, J. Casimir effect at finite temperature for the cpt-even extension of qed. **arXiv preprint arXiv:1605.02388**, 2016.

- SILVA, P. D. et al. Effects of c p t-odd terms of dimensions three and five on electromagnetic propagation in continuous matter. **Physical Review D**, APS, v. 104, n. 11, p. 116023, 2021.
- SOARES, D. M. et al. Material boundaries in carroll–field–jackiw lorentz-violating electrodynamics. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 139, n. 2, p. 1–12, 2024.
- SPARNAAY, M. J. Measurements of attractive forces between flat plates. **Physica**, Elsevier, v. 24, n. 6-10, p. 751–764, 1958.
- SUNDBERG, P.; JAFFE, R. The casimir effect for fermions in one dimension. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 309, n. 2, p. 442–458, 2004.
- VALUYAN, M. Radiative correction to the casimir energy for lorentz-violating scalar field in $d+1$ dimensions. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 35, n. 18, p. 2050149, 2020.
- WILCZEK, F. On absolute units, i: Choices. **Physics Today**, American Institute of Physics, v. 58, n. 10, p. 12–13, 2005.
- WOLFE, J. **The Planck scale: relativity meets quantum mechanics meets gravity**. Sidney, 2005. Disponível em: <https://newt.phys.unsw.edu.au/einsteinlight/jw/module6_Planck.htm>.
- ZANGWILL, A. **Modern electrodynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.

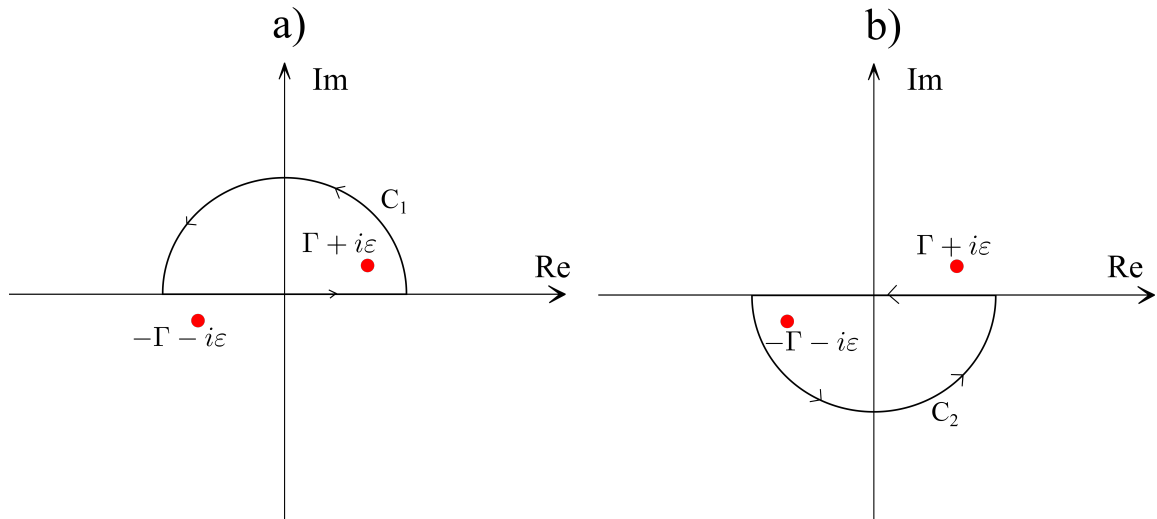
APÊNDICE A – INTEGRAIS RECORRENTES

Neste apêndice, fornecemos alguns detalhes sobre o cálculo das integrais recorrentes ao longo deste trabalho. Para esta tarefa, deixemos explícita a prescrição de Feynman $i\varepsilon$ para deslocar os polos para fora do eixo real do plano complexo de p^3 . Podemos escrever

$$I(x^3, y^3; \Gamma, n) = \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{ip^3(x^3 - y^3)}}{p^{2n}} = (-1)^n \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{ip^3(x^3 - y^3)}}{[(p^3)^2 - \Gamma^2 - i\varepsilon]^n}, \quad (1)$$

com o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ implicitamente assumido. Para $x^3 - y^3 > 0$, fechamos o contorno de integração (semicírculo infinito) no semiplano superior envolvendo o polo em $\Gamma + i\varepsilon$ (como ilustra a Figura 1.a). Para $x^3 - y^3 < 0$, escolhemos o contorno de integração no semiplano inferior, envolvendo o polo em $-\Gamma - i\varepsilon$ (como ilustra a Figura 1.b) (ARFKEN; WEBER, 1995).

Figura 1 – Curvas de integração C_1 e C_2 sobre o plano complexo. a) Curva fechada C_1 (semicírculo superior) envolvendo o polo $\Gamma + i\varepsilon$. b) Curva fechada C_2 (semicírculo inferior) envolvendo o polo $-\Gamma - i\varepsilon$.



O resultado da integral (1) é obtido via cálculo de resíduos referente aos polos contidos na curva adotada e somando essas contribuições usando o teorema dos resíduos. Mostremos como isso é feito: Seja uma função complexa do tipo

$$f(z; \alpha, b, n) = \frac{e^{i\alpha z}}{(z^2 - b^2)^n} = \frac{e^{i\alpha z}}{(z - b)^n (z + b)^n}. \quad (2)$$

Note que $f(z)$ contém dois polos de ordem n , sendo eles $z_0 = b$ e $z_0 = -b$. Temos que o resíduo referente ao polo $z_0 = b$ é dado por

$$\begin{aligned} \text{Re}[f(z); z_0 = b] &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-z_0)^n] \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{e^{i\alpha z}}{(z+b)^n} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Definindo $g(z) \equiv e^{i\alpha z}$ e $h(z) \equiv (z+b)^{-n}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d^m(gh)}{dz^m} &= \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (g'h + h'g) \\ &= \frac{d^{m-2}}{dz^{m-2}} (g''h + 2h'g' + gh'') \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g^{(m-k)} h^{(k)}, \end{aligned} \quad (4)$$

onde

$$\binom{m}{k} \equiv \frac{m!}{k!(m-k)!} \quad (5)$$

e a notação $g' \equiv d(g)/dz$ e $h^{(q)} \equiv d^q(h)/dz^q$. Segue que

$$\frac{d^{m-k}}{dz^{m-k}} e^{i\alpha z} = (i\alpha)^{m-k} e^{i\alpha z} \quad (6)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dz^k} (z+b)^{-n} &= (-1)^k n \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z+b)^{-n-1} \\ &= (-1)^2 n(n+1) \frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}} (z+b)^{-n-2} \\ &\vdots \\ &= (-1)^k n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1) (z+b)^{-n-k} \\ &= \frac{(-1)^k (n+k-1)!}{(n-1)! (z+b)^{n+k}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Substituindo (6) e (7) em (8), tem-se que

$$\frac{d^m(gh)}{dz^m} = \frac{(i\alpha)^m e^{i\alpha z}}{(n-1)! (z+b)^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k (i\alpha)^{-k} (n+k-1)!}{(z+b)^k}. \quad (8)$$

Trocando $m \rightarrow n-1$ na equação (8), e por sua vez, substituindo-a em (3) e em seguida tomando o limite $z \rightarrow b$, obtemos o resíduo da função $f(z)$:

$$Re[f(z); z_0 = b] = \frac{(i\alpha)^{n-1} e^{i\alpha b}}{[(n-1)!]^2 2^n b^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k (i\alpha)^{-k} (n+k-1)!}{2^k b^k}. \quad (9)$$

Assim, com base na equação (9) juntamente com o teorema dos resíduos, tem-se que ao escolher $x^3 - y^3 > 0$ (ou seja, a curva de semi-círculo superior) temos que a integral (1) toma a forma

$$\begin{aligned} (-1)^n \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{[(p^3)^2 - \Gamma^2 - i\epsilon]^n} &= (-1)^n \frac{i^{n-2} |x^3 - y^3|^{n-1} \exp[i|x^3 - y^3|(\Gamma + i\epsilon)]}{[(n-1)!]^2 2^n (\Gamma + i\epsilon)^n} \\ &\times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k (i|x^3 - y^3|)^{-k} (n+k-1)!}{2^k (\Gamma + i\epsilon)^k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Ao omitirmos novamente a prescrição $i\epsilon$, temos por fim que

$$\begin{aligned} I(x^3, y^3; \Gamma, n) &= (-1)^n \frac{i^{n-2} |x^3 - y^3|^{n-1} e^{i|x^3 - y^3|\Gamma}}{[(n-1)!]^2 2^n \Gamma^n} \\ &\times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k (i|x^3 - y^3|)^{-k} (n+k-1)!}{2^k \Gamma^k}. \end{aligned} \quad (11)$$

Por fim, seguem algumas integrais que foram recorrentes ao longo deste trabalho:

$$I(x^3, y^3; \Gamma, 1) = \int \frac{dp^3}{2\pi} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p^2} = -\frac{i}{2\Gamma} e^{i\Gamma|x^3-y^3|}, \quad (12)$$

$$I(x^3, y^3; \Gamma, 2) = \int \frac{dp^3}{2\pi} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p^4} = -\frac{1}{4p_{\parallel}^2} \left(\frac{i}{\Gamma} + |x^3 - y^3| \right) e^{i\Gamma|x^3-y^3|}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} I(x^3, y^3; \Gamma, 3) &= \int \frac{dp^3}{2\pi} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p^6} \\ &= \frac{1}{16p_{\parallel}^4} \left[-3|x^3 - y^3| + \frac{i}{\Gamma} \left(-3 + p_{\parallel}^2 |x^3 - y^3|^2 \right) \right] e^{i\Gamma|x^3-y^3|}. \end{aligned} \quad (14)$$