



ROXANA CHURATA HUACANI

**PARAMETRIZAÇÕES DE MODELOS NÃO LINEARES NO
ESTUDO DA CURVA DE CRESCIMENTO DE LHAMAS
(*LAMA GLAMA*) NO PRIMEIRO ANO DE IDADE**

**LAVRAS – MG
2025**

ROXANA CHURATA HUACANI

**PARAMETRIZAÇÕES DE MODELOS NÃO LINEARES NO ESTUDO DA CURVA
DE CRESCIMENTO DE LHAMAS (*LAMA GLAMA*) NO PRIMEIRO ANO DE IDADE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA,
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Huacani, Roxana Churata.

Parametrizações de modelos não lineares no estudo da curva de crescimento de Lhamas (*Lama glama*) no primeiro ano de idade / Roxana Churata Huacani. – 2025.

53 p. : il.

Orientador: Tales Jesus Fernandes.

Dissertação (Mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Lavras, 2025.

Bibliografia.

1. Modelos parametrizados. 2. Curvatura intrínseca. 3. Efeitos ambientais. I. Fernandes, Tales Jesus. II. Título.

ROXANA CHURATA HUACANI

**PARAMETRIZAÇÕES DE MODELOS NÃO LINEARES NO ESTUDO DA CURVA
DE CRESCIMENTO DE LHAMAS (*LAMA GLAMA*) NO PRIMEIRO ANO DE
IDADE**

**PARAMETERIZATIONS OF NONLINEAR MODELS FOR GROWTH CURVE
ANALYSIS IN LLAMAS (*LAMA GLAMA*) DURING THE FIRST YEAR OF AGE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 12 de fevereiro de 2025.

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz UFLA

Prof. Dr. Fernando Amarilho Silveira UFRGS

Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

Aos meus pais, Jacinto e Eudocia, ao meu irmão Cliver e às
minhas irmãs, Delia, Ana, Janeth, Jovanna, Irma, Herminia,

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde, força e coragem para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Jacinto e Eudocia e a todos os meus irmãos por fazerem meus dias felizes com o constante carinho, amor e atenção que me dão.

Ao professor Tales pela valiosa orientação, confiança, paciência e pelos ensinamentos transmitidos durante esta etapa da minha formação.

Ao Doutor Rubén Herberht Mamani Cato (INIA-PERU) pelo fornecimento dos dados.

Aos professores do DES-UFLA, pelas grandes contribuições para a minha Formação.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estatística da UFLA.

Ao Programa de Pós-graduação de Estatística e Experimentação Agropecuária da UFLA.

À CAPES, pela bolsa de estudo. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Muito obrigada!

RESUMO

As curvas de crescimento são uma maneira de descrever o crescimento em um determinado período do tempo. Existem muitas funções não lineares (Gompertz, Richards, von Bertalanffy e Logístico) que têm sido amplamente utilizadas, em diferentes espécies pecuárias, para descrever o desenvolvimento do peso corporal. A maioria dos modelos não lineares, utilizados na modelagem de curvas de crescimento em animais domésticos, apresentam diferentes parametrizações e podem ser razoáveis do ponto de vista teórico, mas podem ter parâmetros que são difíceis de interpretar, o que, na prática, podem dificultar seu entendimento, afetar medidas de não linearidade e inferências sobre parâmetros. Nesse sentido, os objetivos deste trabalho foram estudar diferentes parametrizações dos modelos não lineares de Brody, von Bertalanffy e Gompertz, na descrição da curva de crescimento de lhamas, desde o nascimento até os 12 meses de idade, bem como avaliar os efeitos ambientais de sexo e tipo do animal sobre os parâmetros da curva de crescimento. Os dados analisados foram obtidos do Centro Experimental Quimsachata, pertencente ao Instituto Nacional de Innovación Agraria de Puno, Peru. Foram utilizados os pesos corporais individuais de lhamas machos e fêmeas pertencentes a dois tipos do animal: K'ara e Ch'accu. As estimativas dos parâmetros foram obtidas pelo método iterativo de Gauss-Newton implementado na função `nls()` do software R. As medidas de não linearidade, descritas por Bates e Watts (1980), foram obtidas por meio da função `rms.curv()` do pacote MASS do software R. A qualidade do ajuste foi avaliada, com base nos valores do Coeficiente de determinação ajustado (R_a^2), Desvio-padrão residual (DPR), Índice de concordância de Willmott(d) e as medidas de não linearidade, tanto a intrínseca (c^I) quanto a paramétrica (c^θ). Foi utilizado o delineamento inteiramente casualizado com arranjo fatorial de 2×2 (dois sexos e dois tipos do animal), para avaliar os efeitos ambientais de sexo e tipo do animal sobre os parâmetros da curva de crescimento, utilizando o procedimento Mixed do software estatístico SAS. Todos os modelos apresentaram bons ajustes, porém as parametrizações 1 e 2 do modelo Brody apresentaram os maiores valores de R_a^2 (99,5%), os menores valores do DPR (0,67), os maiores valores de d (0,999) e os valores mais baixos das medidas de não linearidade ($c^I = 0,04$, $c^\theta = 0,74$). Conclui-se que as duas primeiras parametrizações do modelo Brody foram as mais adequadas para descrever o crescimento das lhamas com um ano de idade, fornecendo estimativas mais confiáveis dos parâmetros, com as fêmeas alcançando maiores pesos assintóticos (41,68 kg) do que os machos (40,98 kg) e as lhamas do tipo K'ara apresentando pesos superiores (41,97 kg) às do tipo Ch'accu (40,69 kg).

Palavras-chave: modelos parametrizados; curvatura intrínseca; curvatura paramétrica; efeitos ambientais; lhamas.

ABSTRACT

Growth curves are a way to describe growth over a specific period of time. Several non-linear functions (Gompertz, Richards, von Bertalanffy, and Logistic) have been widely used in different livestock species to describe body weight development. Most of the non-linear models used in the modeling of growth curves in domestic animals feature different parameterizations and may be theoretically reasonable, but they can include parameters that are difficult to interpret. In practice, this can complicate their understanding, affect non-linearity measures, and influence inferences about the parameters. In this context, the objectives of this study were to investigate different parameterizations of the non-linear models of Brody, von Bertalanffy, and Gompertz in describing the growth curve of llamas from birth to 12 months of age, as well as to evaluate the environmental effects of sex and animal type on the growth curve parameters. The data analyzed were obtained from the Quimsachata Experimental Center, part of the National Institute of Agricultural Innovation in Puno, Peru. Individual body weights of male and female llamas belonging to two animal types: K'ara and Ch'accu, were used. Parameter estimates were obtained using the iterative Gauss-Newton method implemented in the `nls()` function of the R software. Non-linearity measures described by Bates and Watts (1980) were obtained using the `rms.curv()` function of the MASS package in R. The quality of the fit was evaluated based on the values of the adjusted coefficient of determination (R_a^2), residual standard deviation (RSD), Willmott's concordance index (d), and non-linearity measures, both intrinsic (c^I) and parametric (c^θ). A completely randomized design with a 2×2 factorial arrangement (two sexes and two animal types) was used to evaluate the environmental effects of sex and animal type on the growth curve parameters using the `agricolae` package in R. All models showed good fits, but parameterizations 1 and 2 of the Brody model had the highest R_a^2 values (99.5%), the lowest RSD values (0.67), the highest d values (0.999), and the lowest non-linearity measures ($c^I = 0.04$, $c^\theta = 0.74$). It is concluded that the first two parameterizations of the Brody model were the most appropriate for describing the growth of llamas at one year of age, providing more reliable parameter estimates. Female llamas attained higher asymptotic weights (41.68 kg) than males (40.98 kg), and K'ara-type llamas exhibited greater asymptotic weights (41.97 kg) than Ch'accu-type llamas (40.69 kg).

Keywords: parameterized models; intrinsic curvature; parametric curvature; environmental effects; llamas.

INDICADORES DE IMPACTO

O estudo sobre parametrizações de modelos não lineares na descrição da curva de crescimento de lhamas oferece contribuições significativas para o fortalecimento da produção animal nos Andes peruanos. A lhama, um dos principais camelídeos sul-americanos, desempenha papel fundamental não apenas na alimentação por fornecer carne com alto teor de proteína, mas também na cultura e economia das comunidades andinas. A aplicação de diferentes parametrizações dos modelos de Brody, von Bertalanffy e Gompertz permitiu identificar ajustes mais adequados e interpretações mais precisas dos parâmetros biológicos de crescimento, favorecendo práticas de manejo e seleção genética mais eficientes. Do ponto de vista técnico, o trabalho contribui para a escolha de modelos estatísticos mais robustos e compatíveis com as características dos dados zootécnicos locais. Social e culturalmente, valoriza o conhecimento tradicional e o uso sustentável de uma espécie ancestral, promovendo sua conservação e potencial produtivo. Economicamente, o estudo reforça a viabilidade da criação de lhamas como atividade agropecuária estratégica e adaptada às condições da região andina.

IMPACT INDICATORS

The study on the parameterization of nonlinear models to describe the growth curve of llamas offers significant contributions to the development of animal production in the Peruvian Andes. The llama, one of the main South American camelids, plays a vital role not only in local nutrition providing high-protein meat, but also in the cultural and economic life of Andean communities. The application of different parameterizations of the Brody, von Bertalanffy, and Gompertz models enabled the identification of more suitable fits and more accurate interpretations of biological growth parameters, thereby supporting more efficient management practices and genetic selection. From a technical perspective, the research contributes to the selection of more robust statistical models tailored to local zootechnical data. Socially and culturally, it enhances traditional knowledge and promotes the sustainable use of an ancestral species, encouraging both conservation and productive potential. Economically, the study highlights the viability of llama husbandry as a strategic and sustainable agricultural activity adapted to the conditions of the Andean region.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Criação de lhamas no altiplano peruano.....	15
Figura 2 - Fases da curva de crescimento.....	17
Figura 3 - Curva ajustada das três parametrizações do modelo Brody aos dados de crescimento de peso das lhamas machos.....	45
Figura 4 - Curva ajustada das três parametrizações do modelo Brody aos dados de crescimento de peso das lhamas fêmeas.....	46
Figura 5 - Curva ajustada das três parametrizações do modelo Brody aos dados de crescimento de peso das lhamas K'aras.....	46
Figura 6 - Curva ajustada das três parametrizações do modelo Brody aos dados de crescimento de peso das lhamas Ch'accu.....	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Comparação nutricional da carne de lhama com a carne de outras espécies.....	15
Tabela 2 - Equações de modelos não lineares utilizadas para descrever o crescimento.....	19
Tabela 3 - Distribuição dos pesos (kg) segundo a idade (meses), sexo e tipo das lhamas do Peru.....	32
Tabela 4 - Parametrizações dos modelos Brody, von Bertalanffy e Gompertz. para descrever o crescimento das lhamas.....	34
Tabela 5 - Relação entre os parâmetros nas três parametrizações estudadas para o modelo de Brody.....	34
Tabela 6 - Relação entre os parâmetros nas três parametrizações estudadas para o modelo de von Bertalanffy.....	34
Tabela 7 - Relação entre os parâmetros nas três parametrizações estudadas para o modelo de Gompertz.....	35
Tabela 8 - Estatísticas descritivas dos dados de peso das lhamas.....	37
Tabela 9 - Testes Shapiro-Wilk (SW), Durbin-Watson (DW) e Breusch-Pagan (BP), com os respectivos valores-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados nos dados completos.....	38
Tabela 10 - Estimativas com seus erros-padrão (EP), para os parâmetros das três parametrizações dos modelos Brody, von Bertalanffy e Gompertz, na descrição do crescimento de lhamas obtidos com os dados completos.....	40
Tabela 11 - Avaliadores de qualidade de ajuste para as três parametrizações dos modelos Brody, von Bertalanffy e Gompertz, na descrição do crescimento de lhamas.....	41
Tabela 12 - Análise de variância dos efeitos fixos de sexo e tipo de animal sobre as estimativas da curva de crescimento de lhamas do Peru.....	43
Tabela 13 - Número de observações (N), médias das estimativas dos parâmetros* \pm desvio-padrão do peso corporal assintótico (A) e taxa de maturação (k) do modelo de Brody, de acordo com os efeitos fixos ambientais em lhamas do Peru.....	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	14
2.1	Lhamas.....	14
2.2	Curvas de crescimento.....	16
2.3	Modelos de regressão	18
2.3.1	Modelos de regressão não linear	18
2.4	Parametrização das funções não lineares de crescimento.....	20
2.5	Medidas de não linearidade	21
2.5.1	Medidas de curvatura.....	21
2.6	Estimação de parâmetros em modelos de regressão lineares.....	22
2.6.1	Método de mínimos quadrados.....	22
2.6.2	Métodos iterativos	24
2.6.3	Análise de Resíduos.....	26
2.6.4	Avaliadores de qualidade de ajuste	27
2.7	Estudos de reparametrizações de modelos não lineares aplicados em curvas de crescimento	29
2.8	Avaliação dos efeitos fixos em estudos de curvas de crescimento.....	30
3	METODOLOGIA	32
3.1	Animais e dados.....	32
3.2	Análise estatística	33
3.2.1	Reparametrizações dos modelos Brody, von Bertalanffy e Gompertz.....	33
3.2.2	Efeitos ambientais nos parâmetros da curva de crescimento	35
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	37
4.1	Estatísticas descritivas	37
4.2	Análise de resíduos.....	38
4.3	Estimativas dos parâmetros da curva de crescimento.....	39
4.4	Indicadores de qualidade de ajuste	40
4.5	Efeitos ambientais sobre os parâmetros da curva de crescimento	42
5	CONCLUSÕES	48
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

No Peru, estima-se que existam mais de 5,5 milhões de camelídeos sul-americanos (alpacas e lhamas), com as lhamas compondo aproximadamente 19,6% desse número (Ministerio de Desarrollo Agrario y Riego, 2021). Elas habitam principalmente regiões de alta montanha que se estendem do Norte do Peru ao Norte da Argentina, incluindo também áreas da Bolívia e do Chile (Quintão; Repetti, 2023; Yacobaccio, 2021), onde fazem parte integrante dos meios de vida e das práticas tradicionais das comunidades indígenas. Em outras latitudes, os camelídeos sul-americanos, em particular as lhamas e alpacas, estão ganhando crescente popularidade, sendo principalmente valorizados por sua lã excepcionalmente fina e macia, com um diâmetro do fio oscilando entre 18,99 a 21,85 μm em alpacas jovens (Larios-Francia *et al.*, 2023).

As lhamas e alpacas desempenham um papel importante na subsistência de muitas famílias rurais, nos Altos Andes do Peru, onde mais de 1,5 milhões de habitantes estão direta e indiretamente envolvidas no circuito econômico e social da criação dessas espécies por mais de 114 mil pequenos produtores (Toro, 2020). São muito bem adaptadas às terras altas andinas e fornecem às famílias uma variedade de produtos, como fibras, carne e esterco, enquanto são usadas como animais de carga. Uma grande parte dos produtos é consumida, dentro da comunidade local, mas também são fonte de alguma renda em dinheiro com a venda de fibras e carne (Canaza-Cayo *et al.*, 2015; Ormachea *et al.*, 2022).

A característica mais importante do material vivo é o crescimento, descrito como um aumento no peso e no tamanho em um determinado período de tempo (Ju *et al.*, 2021). A produção de carne é, portanto influenciada pela taxa de crescimento e pelo tamanho corporal dos animais, que são dependentes do peso vivo ou dimensão por unidade de tempo. Uma melhor compreensão do desenvolvimento animal, usando a modelagem estatística dos dados de aumento de peso, permite uma melhor explicação e interpretação dos eventos relacionados ao incremento corporal, que, por sua vez, contribui para melhorar a produtividade geral (Canaza-Cayo *et al.*, 2015).

As curvas de crescimento são uma maneira de descrever o crescimento em um determinado período do tempo. Existem muitas funções não lineares (Gompertz, Richards, von Bertalanffy e Logístico) que têm sido amplamente utilizadas, em diferentes espécies pecuárias, para descrever o desenvolvimento do peso corporal (e.g., Domínguez-Viveros *et al.*, 2023; Araujo *et al.*, 2023, em bovinos, Ozturk *et al.*, 2023, em ovinos, Tavares *et al.*, 2023, em suínos e Yadav *et al.*, 2023, em frangos). Recentes estudos ajustaram as curvas de crescimento em

lhamas jovens de um ano de idade, usando diferentes funções não lineares e concluíram que os modelos Gompertz, Brody e von Bertalanffy podem ser adequadas para descrever o desenvolvimento do peso corporal das lhamas (Canaza-Cayo *et al.*, 2015; Javier; Vladímíro, 2022; Maquera Llano, 2023).

A maioria dos modelos não lineares, utilizados na modelagem de curvas de crescimento em animais domésticos, apresentam diferentes parametrizações e podem ser razoáveis do ponto de vista teórico, mas podem ter parâmetros que são difíceis de interpretar, o que, na prática, pode dificultar seu entendimento, afetar medidas de não linearidade e inferências sobre parâmetros (Fernandes *et al.*, 2020). Bates e Watts (1980) quantificaram a não linearidade presente nos modelos, com base no conceito geométrico de curvatura, e mostraram que essa não linearidade pode ser decomposta em dois componentes: intrínseco (C^I), que é a não linearidade característica do modelo e paramétrico (C^{θ}), que representa a não linearidade efeito do parâmetro.

Os efeitos ambientais, tais como o sexo e o tipo do animal, podem ter influência significativa sobre os parâmetros da curva de crescimento. Uma ferramenta estatística utilizada, para contrastar efeitos de interação e os efeitos principais, é realizada via análise de variância (ANAVA) das estimativas dos parâmetros do modelo ajustado aos dados. Esse é um método de fácil aplicação que usa todos os dados da pesquisa, o que é muito importante dentro da estatística, pois minimiza significativamente a perda de informação, gerando conclusões com maior embasamento. O método é eficiente, pois leva em consideração o comportamento da característica em estudo ao longo do tempo (Salvador *et al.*, 2025).

Sob essas considerações, os objetivos do presente estudo são: a) Fazer o estudo de diferentes parametrizações dos modelos não lineares de Brody, von Bertalanffy e Gompertz na descrição da curva de crescimento de lhamas; b) Avaliar os efeitos fixos de sexo e tipo do animal sobre a curva de crescimento de lhamas utilizando a técnica da análise de variância (ANAVA) para os parâmetros da curva de cada animal até os 12 meses de idade.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos teóricos utilizados para o desenvolvimento deste trabalho. Esta seção inicia apresentando os conceitos das lhamas, curvas de crescimento, os modelos de regressão, a parametrização das funções não lineares, medidas de não linearidade, para posteriormente abordar a estimação de parâmetros em modelos de regressão lineares e finaliza com os estudos de reparametrizações de modelos não lineares aplicados em curvas de crescimento.

2.1 Lhamas

Estima-se que mais de 5,5 milhões de camelídeos sul-americanos encontram-se no Peru, dos quais a lhama (*Lama glama*) representa aproximadamente 19,6% do total. A maioria das lhamas estão distribuídas nas regiões de Puno (33,4%), Cusco (13,5%) e Huancavelica (12%), com o 41,1% restante espalhado por outras regiões do Peru (Ministerio de Desarrollo Agrario y Riego, 2021). O habitat da lhama e outros camelídeos sul-americanos são principalmente as áreas de alta montanha e se estende do Norte do Peru ao Norte da Argentina, as respectivas zonas montanhosas da Bolívia e do Chile (Quintão; Repetti, 2023; Yacobaccio, 2021). As lhamas e alpacas desempenham um papel importante na subsistência de muitas famílias rurais nos Altos Andes do Peru, onde mais de 1,5 milhões de habitantes estão direta e indiretamente envolvidas, no circuito econômico e social da criação dessas espécies por mais de 114 mil pequenos produtores (Toro, 2020) e são muito bem adaptadas às terras altas andinas e fornecem às famílias uma variedade de produtos, como fibras, carne e esterco, enquanto são usadas como animais de carga (Figura 1). Uma grande parte dos produtos é consumida, dentro da comunidade local, mas também são fonte de alguma renda em dinheiro com a venda de fibras e carne (Canaza-Cayo *et al.*, 2015; Ormachea *et al.*, 2022).

No Peru, as lhamas são tradicionalmente classificadas em dois tipos diferentes: Ch'accu, caracterizado pela presença de lã, cobrindo as extremidades, o pescoço e a cabeça e a K'ara, sem fibra nas extremidades, cabeça e orelhas e um crescimento reduzido de fibras no pescoço, mas de maior força, muitas vezes, utilizada pela população andina como um animal de carga (Canaza-Cayo *et al.*, 2015; Ormachea *et al.*, 2022). Ambos os tipos de lhamas fornecem carne com alto teor de proteína representando a principal fonte de alimento de origem animal para a população andina (Mamani-Linares; Gallo, 2013). A idade para o primeiro acasalamento das lhamas aproximadamente se realiza aos três e dois anos de idade em machos e fêmeas,

respectivamente. As lhamas do tipo K'ara são mais pesadas que as Ch'accu, sendo essa diferença de 8,4 e 8,44 ao nascimento, 34,5 e 32 kg ao desmama (6-8 meses), 62,7 e 59,5 kg ao ano de idade e 66,1 e 63,7 aos 21 meses de idade, respectivamente (Ayala; Bustinza; Rodríguez, 2018).

Figura 1 - Criação de lhamas no altiplano peruano.



Fonte: En la montaña... (2025).

Por outro lado, cada vez mais carne e fibra de lhama estão sendo comercializadas, refletindo uma crescente demanda por esses produtos. A carne de lhama é adequada para o consumo humano, tanto pela sua composição química quanto do ponto de vista da qualidade, uma vez que ela contém baixos níveis de gordura (1,6%) e colesterol (39,0 mg/100 g) quando comparadas a outras carnes vermelhas (Tabela 1) (Mamani-Linares; Cayo; Gallo, 2014; Mamani-Linares; Gallo, 2013; Polidori *et al.*, 2007).

Tabela 1 - Comparação nutricional da carne de lhama com a carne de outras espécies.

Nutriente	Lhamas*	Bovinos ^{&}	Ovinos*	Suínos ^{&}
Umidade (%)	73,3	72,2	69,6	70,7
Gordura (%)	1,6	7,8	8,6	7,1
Proteína (%)	23,9	18,6	19,9	20,7
Colesterol (mg/100 g)	39,0	69,0	66,9	74,0

Fonte: * Mamani-Linares, Cayo e Gallo (2014) e [&]Polidori *et al.* (2007).

A ausência de infraestruturas, a qualidade normalizada e a quantidade de carne e fibra de lhama são, no entanto os principais fatores que impedem uma criação mais orientada para o mercado. Esse problema ocorre, porque as lhamas são manipuladas e produzidas, em pequenos

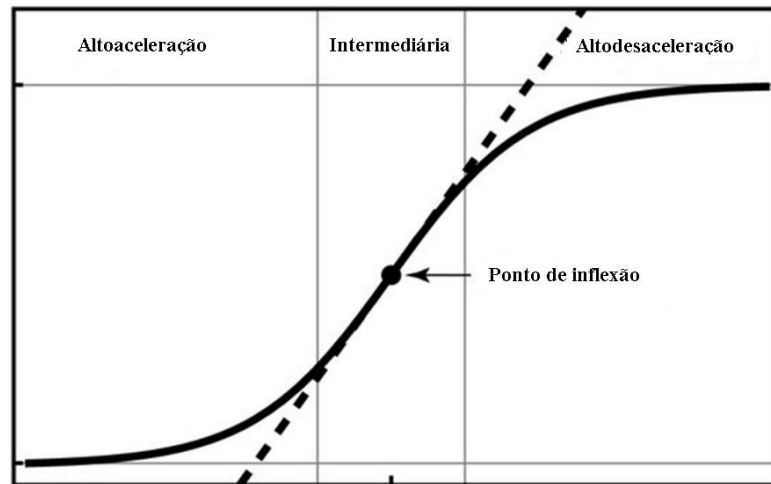
sistemas de produção e com produtores de baixa renda, confrontando as consequências da marginalização dos sistemas de subsistência (Toro, 2020). Por outro lado, a falta de metas de produção não permite a aplicação de programas de melhoramento. Nessas condições de produção, um importante indicador fenotípico da capacidade de produção de carne é a descrição do peso corporal dos animais ao longo do tempo (Canaza-Cayo *et al.*, 2015).

2.2 Curvas de crescimento

O crescimento é uma característica muito importante dos organismos vivos e é definido como o acréscimo de peso e dimensão, ao longo do tempo e controlado por fatores genéticos e ambientais. Uma forma de interpretar e resumir a informação contida na sequência longa de pesos registrados, durante a vida do animal, é pela utilização de modelos matemáticos de crescimento. Entre os procedimentos estatísticos disponíveis, para analisar dados de crescimento, o ajuste de funções não lineares oferece uma oportunidade de resumir a informação contida em toda a sequência de pontos de peso-idade, num pequeno conjunto de parâmetros, que podem ser interpretados biologicamente e usados para derivar outras características de crescimento relevantes (Panik, 2014).

Durante os estágios iniciais da vida, o crescimento é mais acelerado, portanto o aumento de peso é maior que aquele que ocorre próximo à idade adulta, observando-se uma curva de evolução sigmoide ascendente. À medida que o indivíduo se desenvolve, a velocidade de crescimento se altera e apresenta mudança na curvatura, identificando-se o ponto de maior velocidade de crescimento corporal. Depois desse ponto de inflexão, o crescimento diminui paulatinamente e a taxa de crescimento é cada vez mais lenta. Normalmente, a curva de crescimento é composta por três partes diferenciadas (Figura 2): uma fase inicial de altoaceleração, uma fase linear intermediária e uma fase final de altodesaceleração que desaparece à medida que o animal atinge a maturidade (France; Kebreab, 2008; Lawrence; Fowler; Novakofski, 2012).

Figura 2 - Fases da curva de crescimento.



Fonte: Universidade Federal de Lavras (2025).

O ponto de inflexão, durante o crescimento, parece ocorrer em muitas espécies animais logo após a puberdade. A taxa de crescimento varia com a idade, aumentando durante a fase de altoaceleração até atingir um máximo na fase intermediária, quando é relativamente constante. Na última fase, a taxa de crescimento diminui progressivamente até zero, atingindo um platô final, quando o animal atinge o peso corporal maduro ou assintótico, mantendo um peso relativamente estável com alterações atribuídas à disponibilidade de alimento, às demandas do ciclo reprodutivo e à estação do ano (Lawrence; Fowler; Novakofski, 2012).

O estudo da curva de crescimento tornou-se assunto de grande interesse de cientistas e produtores animais, em virtude da importância econômica das estimativas de peso maduro, taxa de maturação e características relacionadas. Essas estimativas podem ser importantes para fins de seleção, dada a sua associação com outras características e com a economia de produção. Uma curva de crescimento ótima poderia ser obtida pela seleção dos valores desejados dos parâmetros da curva de crescimento. A compreensão das implicações biológicas dos parâmetros do modelo e suas relações com outras características de produção fornece uma base sólida para o desenvolvimento de uma estratégia de melhoramento para modificar ou alterar a trajetória de crescimento (Lawrence; Fowler; Novakofski, 2012).

Neste estudo, reconhece-se que, em razão da ausência de dados sobre o crescimento pré-parto, não será possível construir uma curva de crescimento completa das lhamas. Portanto, a fase de altoaceleração, que ocorre antes do parto, não pode ser representada por falta dessas informações essenciais. Além disso, o foco do presente estudo recai sobre lhamas jovens com 12 meses de idade, o que limita a possibilidade de observar a continuidade na fase de altodesaceleração, que se dá após o pico de crescimento. Ayala, Bustinza e Rodríguez (2018)

observaram que o padrão geral de crescimento, em peso vivo de lhamas, foi acelerado até o desmama, continuando de forma menos intensa até o primeiro ano de idade e, a partir daí, até os 21 meses, foi muito mais lento. Assim, espera-se que o desenho da curva de crescimento seja parcialmente desenvolvido, sem contemplar essas duas fases importantes do ciclo de crescimento, mas ainda permitindo uma análise do crescimento das lhamas a partir dessa idade.

As curvas de crescimento, na maioria das espécies agrícolas e pecuárias, podem ser descritas por meio de modelos de regressão.

2.3 Modelos de regressão

Um modelo de regressão é uma ferramenta estatística que descreve a variação que ocorre numa variável aleatória Y , denominada variável dependente ou resposta, em função de um conjunto de outras variáveis denominadas variáveis independentes ou covariáveis X , mais uma componente aleatória, ε (Drapper; Smith, 1998). Quando o modelo apresenta apenas uma covariável ele é denominado modelo de regressão simples e, quando apresenta duas ou mais variáveis independentes, o modelo é chamado de modelo de regressão múltipla. O modelo de regressão pode ser representado por:

$$y_i = f(X_i; \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_i \quad (1)$$

em que $i = 1, 2, \dots, n$; y_i é uma observação do vetor de variáveis resposta; X_i são observações da variável independentes; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ é o vetor parâmetros, que precisa ser estimado; $f(\cdot)$ é a função que descreve a relação entre as variáveis; ε_i são os erros associados ao modelo, assumindo que esses erros seguem pressupostos, como a normalidade, a homocedasticidade e a independência. Os modelos de regressão simples e múltiplos podem ser lineares ou não lineares.

Os modelos de regressão linear são aqueles modelos em que as suas derivadas parciais em relação a seus parâmetros são independentes deles.

2.3.1 Modelos de regressão não linear

Um modelo é não linear em seus parâmetros se, pelo menos, uma de suas derivadas em relação aos parâmetros é dependente de, pelo menos, um desses parâmetros. Os modelos de

regressão não linear mais utilizados para descrever a curva de crescimento de diferentes espécies pecuárias são: Gompertz, Richards, von Bertalanffy, Brody e Logística. Essas pesquisas foram reportadas em bovinos (Araujo *et al.*, 2023; Domínguez-Viveros *et al.*, 2023; Evangelista *et al.*, 2022), em ovinos (Campos *et al.*, 2022; Hojjati; Hossein-Zadeh, 2018; Ozturk *et al.*, 2023; Simanca; Vergara; Bustamante, 2017), em cabras (Magotra; Bangar; Yadav, 2021; Sousa *et al.*, 2021), em suínos (Ceron *et al.*, 2020; Tavares *et al.*, 2023), em frangos (Ibiapina Neto *et al.*, 2020; Yadav *et al.*, 2023) e em lhamas (Canaza-Cayo *et al.*, 2015; Javier; Vladímíro, 2022; Maquera Llano, 2023). A forma matemática das funções de crescimento não linear mais usadas dos modelos Brody, von Bertalanffy e Gompertz mostra-se na Tabela 2.

Tabela 2 - Equações de modelos não lineares utilizadas para descrever o crescimento

Modelo	Fórmula	Referências
Brody	$y_{ij} = A_i(1 - B_i e^{-k_i t_{ij}}) + \varepsilon_{ij}$	Brody (1945)
von Bertalanffy	$y_{ij} = A_i(1 - B_i e^{-k_i t_{ij}})^3 + \varepsilon_{ij}$	von Bertalanffy (1957)
Gompertz	$y_{ij} = A_i e^{-B_i e^{-k_i t_{ij}}} + \varepsilon_{ij}$	Laird (1965)

Fonte: Da autora (2025).

Nota: em que:

y_{ij} representa o peso corporal do animal i no tempo j .

A_i representa o peso assintótico do animal i , que é interpretado como peso ao ano de idade.

B_i representa o parâmetro de integração relacionada ao peso corporal inicial do animal i .

k_i é uma função entre a taxa média de crescimento e o peso adulto do animal i .

t_{ij} é a idade do animal i no tempo j .

ε_{ij} é o erro aleatório.

O parâmetro A é uma estimativa de peso assintótico, quando a idade (t) tende ao infinito, que geralmente representa o peso adulto do animal. Esse peso não é o máximo que o animal atinge e, sim, o peso médio à maturidade, livre das flutuações pelos efeitos climáticos ou disponibilidade de alimento.

O parâmetro k é uma função entre a taxa média de crescimento e o peso adulto do animal, normalmente referido como índice de maturidade, que é uma medida da velocidade com que o animal se aproxima do seu tamanho adulto. Altos valores de k indicam que o animal atinge seu peso assintótico mais rapidamente. Portanto os parâmetros A e k são inversamente proporcionais.

Por outro lado, o parâmetro B ou constante de integração é utilizado, para adequar o valor inicial do peso vivo, nesse caso, peso ao nascer, fazendo com que a curva passe pela

origem e ajuste a curva sigmoideal desde o nascimento até a idade adulta do animal da função utilizada nesta parametrização.

2.4 Parametrização das funções não lineares de crescimento

Um objetivo fundamental da modelagem longitudinal é obter estimativas dos parâmetros do modelo que reflitam aspectos significativos da mudança ao longo do tempo. Muitas vezes, os modelos lineares ou não lineares podem ser razoáveis do ponto de vista teórico, mas pode ter parâmetros que são difíceis de interpretar de uma forma que esclarece hipóteses de interesse. Uma alternativa é que tais modelos podem ser reparametrizados para produzir parâmetros mais facilmente interpretáveis (Fernandes *et al.*, 2015).

A parametrização é a expressão matemática da forma funcional de um modelo em termos de um conjunto de parâmetros. Esses parâmetros determinam a forma específica que o modelo assumirá. Geralmente, há um número infinito de formas de parametrizar um determinado modelo, mas apenas um pequeno número pode ser útil na prática. A reparametrização é a re-expressão de uma função-alvo para que os parâmetros da função re-expressa se alinhem mais estreitamente com questões de interesse científico. Em geral, uma função reparametrizada conterá o mesmo número de parâmetros estimados que a função original e, no contexto da modelagem de crescimento, descreverá uma trajetória idêntica (Preacher; Hancock, 2015).

O uso da reparametrização, em modelos de regressão não linear é comum, pois os pesquisadores reorganizam os parâmetros para que tenham interpretações mais convenientes com a área de estudo de interesse. Porém algumas reparametrizações podem confundem os leitores, tornando o uso da regressão não linear mais complicado que realmente é. Segundo Cordeiro, Prudente e Demétrio (2009), Diel *et al.* (2019) e Zeviani *et al.* (2012), o modelo nem sempre é expresso de forma paramétrica adequada, o que pode dificultar a convergência dos processos iterativos utilizados, para a obtenção das estimativas de seus parâmetros, sendo necessário buscar uma parametrização mais adequada. A parametrização utilizada no modelo não linear pode afetar diretamente suas propriedades estatísticas, a validade das inferências assintóticas e a estimação dos parâmetros, aspectos que podem ser identificados por meio das medidas de não linearidade paramétrica. Segundo Fernandes *et al.* (2015), o uso inadequado de reparametrizações pode prejudicar a compreensão de modelos não lineares. Por isso, apresentar cálculos desde a equação diferencial até um modelo geral pode desmistificar o conhecimento sobre o modelo, conforme feito, por exemplo, por Fernandes *et al.* (2020) com o modelo de von

Bertalanffy. Uma das medidas que permitem medir a não linearidade do modelo foram propostas por Bates e Watts (1980).

2.5 Medidas de não linearidade

Um modelo de regressão é denominado não linear se pelo menos uma das derivadas parciais da função não linear, em relação aos parâmetros, depende de pelo menos um dos parâmetros do modelo. A maioria das inferências, para os modelos não lineares, são assintóticas, pois os métodos de estimação de parâmetros trabalham com aproximações lineares para obter as estimativas dos parâmetros. Assim, quanto mais próximo do linear for o modelo, melhor será a aproximação feita para estimar os parâmetros e mais confiáveis serão as estimativas dos parâmetros (Fernandes *et al.*, 2015).

As medidas de não linearidade são importantes, pois ajudam a medir o quão próximo do linear estão os modelos e assim avaliar se as aproximações são válidas (Ratkowsky, 1983). Assim, medidas de não linearidade são expressões utilizadas para avaliar a adequação da aproximação linear de um modelo não linear e seus efeitos nas inferências. Entre as medidas de não linearidade mais utilizadas estão as medidas de curvatura de Bates e Watts (1980).

2.5.1 Medidas de curvatura

Bates e Watts (1980) dividem o conceito de não linearidade em duas partes: não linearidade intrínseca (C^t) e não linearidade de efeitos de parâmetro (C^θ). A curvatura intrínseca mede a curvatura da superfície de expectativa nas estimativas dos parâmetros, e a curvatura dos efeitos dos parâmetros mede a falta de paralelismo das linhas de parâmetros paralelas que são projetadas na superfície de expectativa. Como resultado, a curvatura C^θ pode ser alterada pela reparametrização do modelo, enquanto a curvatura intrínseca é uma propriedade inerente do modelo que não pode ser afetada pela reparametrização (Bates; Watts, 1980).

A significância estatística de C^t e C^θ é avaliada comparando esses valores com $1/\sqrt{F}$, em que $F=F(\alpha, n-p, p)$ é o inverso da distribuição de probabilidade de Fisher, obtida no nível de significância α , p é o número de parâmetros e n é o número de observações. O valor $1/\sqrt{F}$ pode ser considerado como o raio da curvatura da região de confiança de $100(1-\alpha) \%$. Se C^t e C^θ forem inferiores a $1/\sqrt{F}$, o modelo é considerado próximo ao linear, assim as inferências realizadas no processo de estimação por aproximação linear são válidas. Quando $C^t < 1/\sqrt{F}$, mas $C^\theta > 1/\sqrt{F}$, o modelo é considerado longe de ser linear prejudicando, portanto a qualidade da

inferência realizada pela aproximação linear no processo de estimação dos parâmetros. Porém a curvatura C^{θ} pode ser reduzida pela reparametrização do modelo, tornando-o um modelo quase linear. Se a curvatura intrínseca C^l exceder o valor crítico $1/\sqrt{F}$, isso indica um modelo inerentemente longe de ser linear que não pode ser transformado em um modelo próximo de linear por reparametrização (Leite, 2022).

2.6 Estimação de parâmetros em modelos de regressão lineares

A estimação dos parâmetros, num modelo de regressão linear clássico (também chamado modelo Gauss-Markov ordinário), pode ser feita usando o método dos mínimos quadrados ordinários ou pelo método de máxima verossimilhança (Draper; Smith, 1998).

2.6.1 Método de mínimos quadrados

O Método dos Mínimos Quadrados é utilizado, para a estimação dos parâmetros β , que consiste em minimizar a soma de quadrados dos resíduos. O modelo de regressão linear na forma matricial é:

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (2)$$

Sendo y o vetor de $(n \times 1)$ de observações da variável dependente; X é uma matriz $(n \times p)$ com $p-1$ variáveis explicativas; β é um vetor $(p \times 1)$ com os coeficientes de regressão; $\epsilon \sim N(\mathbf{0}, I\sigma^2)$ é um vetor $(n \times 1)$ de erros aleatórios, ou resíduos.

Um resíduo é a diferença entre o valor observado y e o valor estimado $E[y] = X\beta$, isto é,

$$\epsilon = Y - X\beta \quad (3)$$

A soma dos quadrados dos resíduos (Q) é definida por:

$$Q = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \quad (4)$$

A minimização da soma dos quadrados dos resíduos consiste em derivar a equação (4) em relação ao vetor de parâmetros β e igualar a zero e resolver o sistema de equações resultantes.

Seja:

$$\begin{aligned} Q &= (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \\ Q &= Y'Y - \beta'X'Y - Y'X\beta + \beta'X'X\beta \\ Q &= Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta \end{aligned} \quad (5)$$

Para encontrar os valores de β que minimizam Q , fazemos as derivadas parciais em relação a β .

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \quad (6)$$

A equação (6) pode também ser expressa em termos da função $f(X; \beta)$ como:

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = -2Y' \frac{\partial f(X; \hat{\beta})}{\partial \beta} + \frac{\partial f(X; \hat{\beta})'}{\partial \beta} f(X; \hat{\beta}) + [f(X; \hat{\beta})]' \frac{\partial f(X; \hat{\beta})}{\partial \beta} = 0 \quad (7)$$

Sendo que $\frac{\partial f(X; \hat{\beta})}{\partial \beta}$ é a matriz jacobiana, dada por:

$$\frac{\partial f(X; \beta)}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X_1; \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_1} & \dots & \frac{\partial f(X_1; \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(X_n; \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_n} & \dots & \frac{\partial f(X_n; \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_p} \end{bmatrix}_{n \times p} \quad (8)$$

Ao igualar o resultado a zero, obtém-se o sistema de equações normais:

$$X'X\hat{\beta} = X'Y \quad (9)$$

O estimador $\hat{\beta}$ de mínimos quadrados ordinários obtido é dado por:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (10)$$

Em que $(X'X)^{-1}$ é a inversa da matriz simétrica e não singular $X'X$ de ordem $k \times k$, em que k é o número de variáveis independentes no modelo de regressão linear. Além disso, X está formado por colunas linearmente independentes.

No entanto, quando os modelos são não lineares, o método dos mínimos quadrados gera um sistema de equações normais sem solução explícita, pois, na matriz jacobiana, há parâmetros, uma vez que a matriz jacobiana é composta pelas derivadas parciais, em relação a cada um dos parâmetros, além disso, em um modelo não linear, é impossível separar matricialmente o vetor de parâmetros β do modelo em $X\beta$, ficando sempre $f(X, \beta)$.

Portanto, para conseguir estimar os parâmetros dos modelos não lineares, há a necessidade de usar métodos iterativos para obter a solução.

2.6.2 Métodos iterativos

O uso dos métodos iterativos é necessário para alcançar soluções aproximadas da soma de quadrados residuais em modelos não lineares. Embora existam muitos na literatura, um dos mais usados é o de Gauss-Newton (Bates; Watts, 1988), que faz uso de uma expansão em série de Taylor, para aproximar uma função $f(X, \beta)$ não linear com termos lineares e, posteriormente, aplicar o método dos mínimos quadrados ordinários para estimar os parâmetros dos quais essa função depende. O método busca a convergência para o valor real partindo de valores iniciais aproximando até a derivada de primeira ordem (Mischak; Pinho, 2014).

O método de Gauss-Newton consiste em minimizar a soma de quadrados do erro dada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon' \varepsilon &= (\mathbf{y} - f(X, \beta))'(\mathbf{y} - f(X, \beta)) \\ \varepsilon' \varepsilon &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2 + f'(X, \beta)\mathbf{y} + f'(X, \beta)(f(X, \beta)) \end{aligned} \quad (11)$$

Derivando-se a função (11) em relação a β e igualando a zero, chega-se ao sistema de equações normais:

$$X'f(X, \beta) = X'\mathbf{y} \quad (12)$$

Logo precisa-se determinar J e H da função $\varepsilon' \varepsilon$ para ter uma solução aproximada dos β que minimizam a soma de quadrados do erro:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2 \frac{\partial f'(X, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{y} + 2 \frac{\partial f'(X, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} f(X, \boldsymbol{\beta}) = -2 \frac{\partial f'(X, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} (\mathbf{y} - f(X, \boldsymbol{\beta})) = 2\mathbf{X}' \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2 \left[\mathbf{X}' \mathbf{X} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(X_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} \boldsymbol{\varepsilon}_i \right] \quad (13)$$

Pelo método de Gauss-Newton:

$$\boldsymbol{\beta}^{n+1} = \boldsymbol{\beta}^n - (\mathbf{H}^n)^{-1} \mathbf{J}^n \quad (14)$$

Sendo $\boldsymbol{\beta}^n$ os valores iniciais dos parâmetros.

Substituindo-se J e H na expressão acima (14), tem-se:

$$\boldsymbol{\beta}^{n+1} = \boldsymbol{\beta}^n - \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\mathbf{X}' \mathbf{X} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(X_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} \boldsymbol{\varepsilon}_i \right]^{-1} (-2\mathbf{X}' \boldsymbol{\varepsilon})$$

ou

$$\boldsymbol{\beta}^{n+1} = \boldsymbol{\beta}^n - \left[\mathbf{X}' \mathbf{X} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(X_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} \boldsymbol{\varepsilon}_i \right]^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

Desconsiderando o segundo termo da matriz Hessiana (15), pelo fato do termo $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(X_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} \boldsymbol{\varepsilon}_i$ ser muito pequeno, em relação a $\mathbf{X}' \mathbf{X}$, a medida que se aproxima da solução do sistema. Com essa otimização, o método de Gauss-Newton fica da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\beta}^{n+1} = \boldsymbol{\beta}^n - [\mathbf{X}' \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

Dado que o método usa valores iniciais, para uma boa convergência, são necessários “bons valores iniciais” para os parâmetros. A escolha dos valores iniciais define a rapidez da convergência e reduz as chances de convergir para mínimos locais. Geralmente são obtidas das análises de estudos anteriores. Apesar de, em geral, necessitar de um número maior de iterações, para atingir a convergência em comparação com outros métodos de otimização, os cálculos realizados em cada iteração do método de Gauss-Newton são mais simples que os realizados por outros métodos (Silva *et al.*, 2019).

2.6.3 Análise de Resíduos

A análise de resíduo é uma etapa importante da estimação dos parâmetros e é feita com o objetivo de averiguar se o modelo é adequado para realizar a inferência. Ao estimar os parâmetros do modelo, consideramos que os pressupostos de independência, normalidade e homocedasticidade dos resíduos foram atendidos.

A verificação da independência é usualmente feita por meio do teste de Durbin-Watson que testa a existência de autocorrelação residual. Se houver independência, a magnitude de um resíduo não influencia a magnitude do resíduo seguinte. Nesse caso, a correlação entre resíduos sucessivos é nula ($\rho = 0$).

A estatística do teste de Durbin-Watson (DW) é dada pela seguinte equação:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \quad (17)$$

Onde e_t são os resíduos da regressão no tempo t , n é o número de observações.

As hipóteses do teste, para aferir se a relação entre dois resíduos consecutivos é estatisticamente significativa, são então:

$H_0: \rho = 0$ não existe dependência

$H_A: \rho \neq 0$ existe dependência

No caso de autocorrelação residual, a estimação dos parâmetros é feita usando mínimos quadrados generalizados. A função `durbinWatsonTest()` do pacote `lmtest` do R (Zeileis; Hothorn, 2002) foi usada para o teste de independência dos resíduos.

A verificação de homoscedasticidade dos resíduos pode ser feita pelo uso do teste de Breusch-Pagan (BP), que é dada pela seguinte equação (Wooldridge, 2013):

$$BP = n \cdot R_{aux}^2 \quad (18)$$

Onde: n é o número de observações, R_{aux}^2 é o coeficiente de determinação da regressão auxiliar dos resíduos ao quadrado. As hipóteses do teste são:

$H_0: \sigma_i^2 = \sigma^2$ a variância dos resíduos (σ_i^2) é constante para todas as observações i

$H_A: \sigma_i^2 \neq \sigma^2$ a variância dos resíduos (σ_i^2) não é constante para todas as observações i .

A estatística do teste segue uma distribuição qui-quadrada e o valor obtido é comparado com a tabela dessa distribuição, considerando 1 grau de liberdade. Se o pressuposto da homocedasticidade não for satisfeito, é necessário modelar o inverso da variância e usar mínimos quadrados ponderados. Outra solução é usar mínimos quadrados generalizados. A função `bptest()` do pacote `lmtest` do R (Zeileis; Hothorn, 2002) foi utilizada para o teste de homocedasticidade dos resíduos.

Os resíduos também devem ter distribuição normal de média zero. A importância da ocorrência da normalidade é que ela é fundamental para a validade dos testes de hipóteses, para a construção de intervalos de confiança precisos e para a interpretação confiável dos coeficientes. Neste trabalho, utilizou-se o teste de normalidade de Shapiro e Wilk (1965), calculada com base na comparação entre os valores observados e os valores esperados sob a hipótese de normalidade. A fórmula para calcular é:

$$SW = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (19)$$

Onde: $x_{(i)}$ são os valores da amostra ordenados em ordem crescente; a_i são coeficientes calculados a partir de médias, variâncias e covariâncias de estatísticas de ordem de uma distribuição normal; \bar{x} é a média da amostra. A hipótese nula indica que os resíduos seguem uma distribuição normal. Essas hipóteses são:

$H_0: \varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2)$ Os dados seguem uma distribuição normal.

$H_A: \varepsilon \not\sim N(\mathbf{0}, \sigma^2)$ Os dados não seguem uma distribuição normal.

Se o teste for não significativo, o pressuposto foi satisfeito, no entanto, caso o teste seja significativo deve ser feita uma transformação dos dados, ou então, outro modelo deve ser ajustado, pois há desvios na normalidade. A função `Shapiro.test()` do R foi utilizada para testar a distribuição normal de independência dos resíduos.

2.6.4 Avaliadores de qualidade de ajuste

Em razão das diferenças entre os modelos sob estudo, quando eles são ajustados a um mesmo conjunto de dados, torna-se necessário utilizar metodologias estatísticas com o intuito

de compará-los e indicar o melhor modelo. Tais técnicas são denominadas de avaliadores da qualidade de ajuste. Nesta pesquisa, utilizaram-se os seguintes avaliadores de qualidade de ajuste: o coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2), que compara modelos fazendo uma ponderação pelo número de parâmetros. A equação do R_{aj}^2 é:

$$R_{aj}^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - i)}{n - p} \quad (20)$$

Em que R^2 é o coeficiente de determinação, n é o número de observações, i está relacionado com o ajuste do intercepto na curva, no qual será 0, se não houver intercepto e 1, se houver, p é o número de parâmetros do modelo. Maiores valores do R_{aj}^2 caracterizam o modelo mais adequado para descrever os dados em estudo.

Foi utilizado o desvio-padrão residual (DPR), o qual é proporcional ao quadrado médio do erro, de modo que menores valores indicam melhor qualidade de ajuste. O desvio-padrão residual foi estimado por:

$$DPR = \sqrt{\frac{SQ_{Erro}}{n - p}} \quad (21)$$

Em que SQ_{Erro} é a soma de quadrados do erro; n é o número de observações; p é a quantidade de parâmetros no modelo.

Também foi utilizado o índice de concordância de Willmott, conhecido como ‘Willmott's Index of Agreement’, que é uma medida estatística usada para avaliar a precisão de modelos preditivos. Ele compara os valores preditos por um modelo com os valores observados, quantificando o grau de concordância entre eles. O Índice de Concordância de Willmott não tem uma distribuição específica definida como outras estatísticas (por exemplo, a distribuição normal ou t de Student).

O valor dessa medida estatística varia entre 0 e 1. O valor 1 indica uma concordância perfeita entre os valores preditos e observados, entretanto o valor 0 indica que não há concordância entre os valores preditos e observados. A equação do Willmott's Index of Agreement (d) é:

$$d = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - y_j)^2}{\sum_{j=1}^n (|\hat{y}'_j| + |y'_j|)^2} \quad (22)$$

em que \hat{y}_j e y_j são, respectivamente, os valores preditos e observados.

2.7 Estudos de reparametrizações de modelos não lineares aplicados em curvas de crescimento

Em seus estudos, Fernandes *et al.* (2015) avaliaram três parametrizações mais comuns dos modelos não lineares Logístico e Gompertz, quanto à sua não linearidade em dados de crescimento de massa dos frutos de pequi. Os autores concluíram que a escolha da parametrização afeta a não linearidade e, portanto influencia a confiabilidade e as inferências sobre os parâmetros estimados. Assim, os autores afirmam que as medidas de não linearidade devem ser analisadas em qualquer estudo de curva de crescimento que utilize modelos não lineares. Os autores indicam ainda que devem ser utilizadas parametrizações dos modelos Logístico e Gompertz, em que a estimativa de B é a abcissa do ponto de inflexão, pois possuem interpretação biológica direta para todos os parâmetros. Além disso, para o crescimento do pequi, essas parametrizações apresentaram os menores valores de não linearidade paramétrica.

Fernandes *et al.* (2019) avaliaram a parametrização do modelo de von Bertalanffy com diferentes valores alométricos na descrição da curva de crescimento de mamíferos produtores de carne (bovinos, suínos, coelhos e ovinos). Os autores mostraram que o modelo de von Bertalanffy, com o valor alométrico de $m = 3/4$ e com a parametrização utilizada, forneceu melhores ajustes aos avaliadores de qualidade em animais produtores de carne.

Fernandes *et al.* (2020) desenvolveram três parametrizações diferentes do modelo von Bertalanffy, baseadas no coeficiente de alometria e quantificaram a linearidade dos modelos. Os autores concluíram que as medidas de não linearidade são importantes em curvas de crescimento que utilizam modelos não lineares. As formas mais utilizadas na literatura apresentaram os maiores desvios da linearidade, mostrando a importância da análise dessas medidas em qualquer estudo de curva de crescimento. A parametrização que deve ser utilizada é a que o parâmetro b representa, pois a estimativa b possui interpretação biológica direta e representa a abcissa do ponto de inflexão, a partir do qual o crescimento desacelera, ou seja, corresponde ao tempo de máximo ganho de peso (Fernandes *et al.*, 2015, 2019).

Zeviani *et al.* (2012) avaliaram a parametrização dos modelos de Michaelis-Menten e o modelo exponencial na descrição da liberação de K (potássio) de quatro esterco animais em

combinação com dois solos. Os autores concluíram que o modelo Exponencial foi mais adequado, em termos inferenciais e para aplicação prática, uma vez que por todas as medidas apresentou menor não linearidade.

2.8 Avaliação dos efeitos fixos em estudos de curvas de crescimento

As estimativas individuais dos parâmetros da curva de crescimento são frequentemente ajustadas para efeitos fixos tais como sexo, tipo do animal, idade, etc. A comparação de efeitos fixos é um dos principais objetivos da estatística aplicada na experimentação agrícola, dessa forma, torna-se necessário estudar métodos que possibilitem a comparação do efeito fixos nas curvas de crescimento (Banzatto; Kronka, 2006).

Em curvas assintóticas, o padrão de crescimento pode ser afetado pelos efeitos fixos inerentes aos animais, portanto é importante contrastar possíveis diferenças entre esses efeitos, conforme as curvas ajustadas, tornando preciso averiguar se um determinado parâmetro de uma regressão não linear possui valores constantes em dois ou mais tratamentos (Carvalho; Pinho; Mischan, 2010; Salvador *et al.*, 2025).

Há uma grande quantidade de estudos sobre a verificação da adequação de ajustes de dados a modelos não lineares e sobre a comparação entre esses modelos para identificar o que melhor representa o conjunto de dados. Contudo, conforme apontam Salvador *et al.* (2025), há estudos na literatura sobre a comparação dos efeitos fixos de idade, sexo, tipo do animal, etc. sobre as estimativas dos parâmetros da curva de crescimento após o ajuste do modelo não linear por método de teste de comparação de médias.

Por exemplo, Canaza-Cayo *et al.* (2015), que ajustaram os modelos Brody, von Bertalanffy, Gompertz e Logístico aos dados de peso de lhamas jovens do Peru de um ano de idade. Após a escolha do modelo Gompertz como o melhor, avaliaram a influência dos efeitos fixos de sexo, tipo de animal, mês de nascimento e ano de nascimento nos parâmetros da curva de crescimento. Os autores concluíram que o peso assintótico foi influenciado por todos os efeitos fixos, mas a taxa de maturação foi influenciada apenas pelo mês e ano de nascimento.

Maquera Llano (2023), com dados de um estudo experimental, ajustou os modelos não lineares Brody, von Bertalanffy, Gompertz e Logístico aos dados de peso de lhamas sob duas condições de alimentação (natural e suplementadas). O autor concluiu que o modelo de Brody, seguido pelo modelo de Von Bertalanffy, demonstrou melhor ajuste, para descrever e prever o crescimento das lhamas K'ara e Ch'accu, em condições de alimentação natural e

reconstituintes. Os fatores ambientais inerentes, a idade da mãe, a suplementação reconstituente e a raça afetaram significativamente a curva de crescimento.

Apaza-Zúñiga e Coaquira (2016) compararam o ajuste dos modelos Brody, von Bertalanffy, Gompertz e Logístico aos dados de peso de lhamas, os pesquisadores concluíram que os modelos de Brody e Bertalanffy são os que mostram melhor ajuste. O parâmetro k apresenta valores pequenos, mas positivos; e entre as raças, os valores são similares em ambas as raças. A superioridade do peso das crias K'ara, a partir dos 60 dias até o desmame ($P \leq 0.01$), destaca o potencial de produção de carne, em comparação com a Ch'aco, uma diferença atribuível a fatores genéticos.

3 METODOLOGIA

Nesta seção, são apresentados a descrição dos animais e os dados de peso-idade utilizados e as análises estatísticas para os modelos não lineares ajustados.

3.1 Animais e dados

Os dados de pesagens utilizados neste trabalho foram os pesos corporais individuais de lhamas de machos e fêmeas pertencentes a dois tipos: K'ara e Ch'accu, disponibilizados pela Estación Experimental de Quimsachata, do Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria (INIA), localizado em Puno, Peru. A Estação Quimsachata está localizada a 4025 metros acima do nível do mar, 15° 41' 39" latitude sul, 70° 36' 24" longitude oeste, cujas temperaturas variam entre 5 e 18 °C e as chuvas chegam a 700 mm/ano. Após edição dos dados, o arquivo de dados é composto por 43.332 registros de peso corporal de 3611 lhamas, com 12 registros por animal (Tabela 3), que foram obtidos por meio de balança digital em intervalos mensais do nascimento aos 12 meses de idade, coletados durante 1997 a 2018.

Tabela 3 - Distribuição dos pesos (kg) segundo a idade (meses), sexo e tipo das lhamas do Peru (Continua)

Tipo do animal	Idade	Machos		Fêmeas	
		n	Média ±DP	n	Média ±DP
K'ara	0	984	9,77 ± 1,58	734	9,42 ± 1,64
	1	977	15,8 ± 2,86	735	15,09 ± 2,87
	2	1006	21,41 ± 3,86	738	20,30 ± 3,72
	3	961	25,54 ± 4,27	722	23,98 ± 4,23
	4	961	28,57 ± 4,87	729	26,97 ± 4,95
	5	1032	31,11 ± 5,34	762	29,16 ± 5,42
	6	960	33,14 ± 5,71	719	31,28 ± 5,76
	7	974	34,47 ± 6,2	721	32,45 ± 6,23
	8	960	35,54 ± 6,31	735	33,38 ± 6,30
	9	996	36,62 ± 6,37	752	34,45 ± 6,61
	10	989	38,38 ± 6,34	721	36,14 ± 6,63
	11	846	40,51 ± 6,36	649	38,21 ± 6,89
12	42	41,88 ± 7,22	19	38,74 ± 7,68	
Total		11688		8736	
Ch'accu	0	1168	9,64 ± 1,62	757	9,43 ± 1,59
	1	1175	15,68 ± 2,93	756	15,27 ± 2,79
	2	1191	21,25 ± 3,82	766	20,28 ± 3,55
	3	1127	25,36 ± 4,25	738	24,32 ± 4,18
	4	1161	28,51 ± 4,88	760	27,18 ± 4,86
	5	1211	31,19 ± 5,53	779	29,46 ± 5,23
6	1147	33,42 ± 6,00	736	31,51 ± 5,81	

Tabela 3 - Distribuição dos pesos (kg) segundo a idade (meses), sexo e tipo das lhamas do Peru (Conclusão)

Tipo do animal	Idade	Machos		Fêmeas	
		n	Média \pm DP	n	Média \pm DP
	7	1159	34,94 \pm 6,37	751	32,82 \pm 6,35
	8	1164	35,82 \pm 6,61	750	33,78 \pm 6,52
	9	1189	37,19 \pm 6,82	769	35,08 \pm 6,55
	10	1152	39,26 \pm 6,78	756	36,63 \pm 6,53
	11	1032	41,43 \pm 7,15	668	39,06 \pm 6,67
	12	32	40,59 \pm 6,47	14	35,21 \pm 5,70
Total		13908		9000	

n: número total de registros de peso para uma determinada idade.

Fonte: Da autora (2025).

3.2 Análise estatística

As análises estatísticas dos dados foram focados na modelagem da curva de crescimento das lhamas e na avaliação dos efeitos ambientais sobre os parâmetros estimados.

3.2.1 Reparametrizações dos modelos Brody, von Bertalanffy e Gompertz

A descrição da trajetória de crescimento dos animais foi avaliada pelas reparametrizações (Tabela 4) dos modelos não lineares de Brody, von Bertalanffy e Gompertz (Tabela 1), em que y_{ij} é o peso corporal observado do indivíduo i ($i = 1, \dots, n$), no tempo de medição j ($j = 1, \dots, n_i$) para o animal i , t_{ij} é a idade do animal i em dias no tempo j e ε_{ij} é o termo residual aleatório. Os parâmetros da curva crescimento para o i^{th} animal são: A_i , o peso corporal assintótico do animal i , que é interpretado como peso maduro; B_i é a constante de integração ajustada para o animal i , (em outras parametrizações pode estar diretamente associada ao ponto de inflexão da curva, fornecendo informações sobre o momento em que a taxa de crescimento muda de forma mais acentuada); k_i , a taxa de maturação do animal i , que é interpretada como mudança de peso, em relação ao peso maduro, para indicar a velocidade com que o animal se aproxima do peso adulto. As estimativas dos parâmetros A_i, B_i e k_i bem como os erros-padrão, foram obtidas pelo método iterativo de Gauss-Newton implementado na função `nls()` do software R (R Core Team, 2022).

As medidas de não linearidade, descritas por Bates e Watts (1980), foram obtidas, por meio da função `rms.curv()` do pacote MASS do software R. Para avaliar o ajuste do modelo,

foram calculados os seguintes avaliadores: coeficiente de determinação ajustado, R_{aj}^2 , o desvio-padrão do resíduo, DPR e o índice concordância Willmot, respectivamente.

Tabela 4 - Parametrizações dos modelos Brody, von Bertalanffy e Gompertz. para descrever o crescimento das lhamas.

Modelo Brody [§] (MB)	Modelo von Bertalanffy [£] (MV)	Modelo Gompertz [¥] (MG)
MB ₁ : $y_{ij} = A_i(1 - B_i e^{-k_i t_{ij}}) + \varepsilon_{ij}$	MV ₁ : $y_{ij} = A_i(1 - B_i e^{-k_i t_{ij}})^3 + \varepsilon_{ij}$	MG ₁ : $y_{ij} = A_i e^{-B_i e^{-k_i t_{ij}}} + \varepsilon_{ij}$
MB ₂ : $y_{ij} = A_i(1 - e^{[B_i - k_i t_{ij}]}) + \varepsilon_{ij}$	MV ₂ : $y_{ij} = A_i \left(1 - \frac{e^{[k_i(B_i - t_{ij})]}}{3}\right)^3 + \varepsilon_{ij}$	MG ₂ : $y_{ij} = A_i e^{-e^{(B_i - k_i t_{ij})}} + \varepsilon_{ij}$
MB ₃ : $y_{ij} = A_i(1 - e^{[k_i(B_i - t_{ij})]}) + \varepsilon_{ij}$	MV ₃ : $y_{ij} = A_i(1 - e^{[-B_i - k_i t_{ij}]})^3 + \varepsilon_{ij}$	MG ₃ : $y_{ij} = A_i e^{-e^{[k_i(B_i - t_{ij})]}} + \varepsilon_{ij}$

Fonte: [§]Da autora (2025); [£]Fernandes *et al.* (2020); [¥]Fernandes *et al.* (2015).

As Tabelas 5, 6 e 7 mostram as relações entre os parâmetros para as três parametrizações do modelo de Gompertz, Brody e von Bertalanffy estudadas. Note que, em todas elas, os parâmetros A e k são os mesmos, enquanto o valor de B sofre grandes variações.

Tabela 5 - Relação entre os parâmetros nas três parametrizações estudadas para o modelo de Brody.

	Brody 1	Brody 2	Brody 3
Brody 1		$A_2 = A_1$ $B_2 = \ln B_1$ $k_2 = k_1$	$A_3 = A_1$ $B_3 = \frac{\ln B_1}{k_3}$ $k_3 = k_1$
Brody 2	$A_1 = A_2$ $B_1 = e^{B_2}$ $k_1 = k_2$		$A_3 = A_2$ $B_3 = \frac{B_2}{k_2}$ $k_3 = k_2$
Brody 3	$A_1 = A_3$ $B_1 = e^{k_3 B_3}$ $k_1 = k_3$	$A_2 = A_3$ $B_2 = k_3 B_3$ $k_2 = k_3$	

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 6 - Relação entre os parâmetros nas três parametrizações estudadas para o modelo de von Bertalanffy.

(Continua)

	von Bertalanffy 1	von Bertalanffy 2	von Bertalanffy 3
Von Bertalanffy 1		$A_2 = A_1$ $B_2 = \frac{\ln 3 + \ln B_1}{k_1}$ $k_2 = k_1$	$A_3 = A_1$ $B_3 = -\ln B_1$ $k_3 = k_1$

Tabela 6 - Relação entre os parâmetros nas três parametrizações estudadas para o modelo de von Bertalanffy.

(Conclusão)

	von Bertalanffy 1	von Bertalanffy 2	von Bertalanffy 3
von Bertalanffy 2	$A_1 = A_2$ $B_1 = \frac{e^{k_2 B_2}}{3}$ $k_1 = k_2$		$A_3 = A_2$ $B_3 = \ln 3 - k_2 B_2$ $k_3 = k_2$
von Bertalanffy 3	$A_1 = A_3$ $B_1 = e^{-B_3}$ $k_1 = k_3$	$A_2 = A_3$ $B_2 = \frac{\ln 3 - B_3}{k_3}$ $k_2 = k_3$	

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 7 - Relação entre os parâmetros nas três parametrizações estudadas para o modelo de Gompertz.

	Gompertz 1	Gompertz 2	Gompertz 3
Gompertz 1		$A_2 = A_1$ $B_2 = \ln B_1$ $k_2 = k_1$	$A_3 = A_1$ $B_3 = \frac{\ln B_1}{k_1}$ $k_3 = k_1$
Gompertz 2	$A_1 = A_2$ $B_1 = e^{B_2}$ $k_1 = k_2$		$A_3 = A_2$ $B_3 = \frac{B_2}{k_2}$ $k_3 = k_2$
Gompertz 3	$A_1 = A_3$ $B_1 = e^{k_3 B_3}$ $k_1 = k_3$	$A_2 = A_3$ $B_2 = k_3 B_3$ $k_2 = k_3$	

Fonte: Fernandes *et al.* (2015).

3.2.2 Efeitos ambientais nos parâmetros da curva de crescimento

Após selecionar a parametrização mais adequada do melhor modelo, as estimativas dos seus parâmetros foram consideradas, em um modelo linear de ANOVA, para avaliar a influência de efeitos fixos de sexo ($i = \text{macho e fêmea}$) e tipo do animal ($j = \text{K'ara e Ch'accu}$) sobre os parâmetros da curva de crescimento do modelo selecionado, da seguinte forma:

;

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (23)$$

em que y_{ijk} = m-ésima estimativa do parâmetro de crescimento do i-ésimo sexo, j-ésimo tipo; μ = média populacional; α_i = i-ésimo efeito de sexo; β_j = j-ésimo efeito do tipo do animal; δ_{ij} = efeito de interação do i-ésimo sexo e j-ésimo tipo do animal e ε_{ij} = erro aleatório atribuído a

cada observação. Essa análise foi realizada pelo procedimento MIXED no SAS (Statistical Analysis Software - SAS, 2001). Foram avaliados os parâmetros A_i e k_i que possuem interpretação biológica.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, são apresentados os resultados das estatísticas descritivas, a análise de resíduos, as estimativas dos parâmetros da curva de crescimento e os indicadores de qualidade de ajuste e os efeitos ambientais sobre os parâmetros da curva de crescimento de lhamas.

4.1 Estatísticas descritivas

Inicialmente foram obtidas as estatísticas descritivas dos dados referentes aos pesos das lhamas, segundo o sexo e o tipo de animal, como pode ser visto na Tabela 7. Nota-se que as lhamas K'aras de ambos os sexos apresentaram pesos médios similares, variando de 5 a 63,5 kg. Pode-se observar, também, que a média do peso das lhamas do tipo K'ara, em ambos os sexos, foram superiores (29,27 kg) aos das lhamas do tipo Ch'accu (27,64 kg). Tem-se também que o peso para os 25% dos dados de lhamas K'aras, em ambos os sexos, não ultrapassaram 22 kg e o 75% dos dados não passaram de 37,5 kg, enquanto, nas lhamas Ch'accu de ambos os sexos, esses valores foram 20,5 e 35 kg, respectivamente.

Tabela 8 - Estatísticas descritivas dos dados de peso das lhamas.

Tipo do animal	Sexo		
	Machos	Fêmeas	
K'aras	n	11688	13908
	Média	29,15	29,37
	DP	10,45	10,84
	Min	5,00	5,00
	Max	61,50	63,50
	Quartil inferior	22,00	22,00
	Quartil superior	37,00	37,50
	Ch'accu	n	8736
Média		27,48	27,80
DP		9,99	10,12
Min		5,00	5,00
Max		57,00	57,00
Quartil inferior		20,50	21,00
Quartil superior		35,00	35,00

n: número total de registros de pesos, DP: Desvio-padrão.

Fonte: Da autora (2025).

Com o intuito de identificar o modelo e a parametrização mais adequada para descrever a curva de crescimento das lhamas, foi feito inicialmente um ajuste com as 3 parametrizações de cada modelo aos dados completos (sem separar entre sexo e tipo). Os resultados estão apresentados abaixo.

4.2 Análise de resíduos

Na Tabela 9, é apresentada a análise de resíduos realizada pelos testes estatísticos de Shapiro-Wilk (SW), Durbin-Watson (DW) e Breusch-Pagan (BP), considerando-se um nível de significância de $\alpha = 0,05$, para os ajustes das 3 parametrizações de cada modelo aos dados completos. Observou-se que todos os testes foram não significativos, para todos os modelos avaliados, indicando que os dados de peso das lhamas não apresentaram problemas de violação de pressupostos de resíduo, indicando que os resíduos apresentaram normalidade, homoscedasticidade e foram independentes.

Tabela 9 - Testes Shapiro-Wilk (SW), Durbin-Watson (DW) e Breusch-Pagan (BP), com os respectivos valores-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados nos dados completos.

Modelo	Testes estatísticos		
	SW	DW	BP
Brody 1	0,8285	0,3823	0,0671
Brody 2	0,8286	0,3823	0,0671
Brody 3	0,8285	0,3823	0,0671
von Bertalanffy 1	0,5901	0,3960	0,2426
von Bertalanffy 2	0,5902	0,3960	0,2425
von Bertalanffy 3	0,5901	0,3960	0,2426
Gompertz 1	0,3902	0,4050	0,5250
Gompertz 2	0,3902	0,4050	0,5250
Gompertz 3	0,3902	0,4050	0,5250

Fonte: Da autora (2025).

Conforme comentado por Fernandes *et al.* (2015) os resultados da análise de resíduos não variam entre diferentes parametrizações dos modelos, pois trata-se do mesmo modelo (e, portanto, mesmos resíduos) apenas com parâmetros organizados de maneira diferente na expressão. Da mesma forma, os resultados encontrados no presente estudo corroboram esse comportamento.

4.3 Estimativas dos parâmetros da curva de crescimento

As estimativas dos parâmetros da curva de crescimento, obtidas com um ajuste geral, para todos os modelos reparametrizados de Brody, von Bertalanffy e Gompertz considerados neste estudo, para descrever a curva de crescimento de lhamas com dados completos, ou seja, incluindo ambos os sexos e tipos do animal, são apresentadas na Tabela 10. Em geral, todos os parâmetros dos diferentes modelos avaliados no presente estudo foram significativos pelo teste t. O peso corporal assintótico (A) foi maior no modelo de Brody (42,8 kg) e menor nos modelos von Bertalanffy (40,9 kg) e Gompertz (40,3 kg). A estimativa do parâmetro B variou, segundo as parametrizações dentro de cada modelo e entre os diferentes modelos, sendo maiores nos modelos Gompertz 1 e von Bertalanffy 3 (1,3 e 1,0 meses de idade) e menores nos modelos von Bertalanffy 1 e 2 (0,4 e 0,3 meses de idade) e Gompertz 2 (0,3 meses). É possível observar que as estimativas de B, obtidas com o ajuste dos modelos Brody 1 e Brody 2, foram mais condizentes com os valores reais. Estimativas negativas do parâmetro B foram obtidas, nas parametrizações do modelo Brody 2 e 3, representando valores da constante de integração, pois, no modelo Brody, esse parâmetro não possui interpretação prática. A taxa de maturação (k) variou de 0,19 no modelo Brody, 0,27 no modelo von Bertalanffy e 0,31 no modelo Gompertz.

Existe um número limitado de estudos publicados sobre modelagem de curvas de crescimento em lhamas na literatura (Canaza-Cayo *et al.*, 2015; Maquera Llano, 2023; Wurzinger *et al.*, 2005). De acordo com Canaza-Cayo *et al.* (2015), o modelo de Gompertz foi o mais adequado, entre outros estudados, para a descrição do crescimento de lhamas dos tipos K'ara e Ch'accu. Maquera Llano (2023) relatou que os modelos Brody e von Bertalanffy descreveram bem o crescimento de lhamas de tipos K'ara e Ch'accu sob condições de alimentação natural. No presente estudo, o modelo de Brody destacou-se como o mais adequado para descrever o crescimento de lhamas, evidenciado pelo maior peso corporal assintótico (A) e menor taxa de maturação (k), conforme reportados por Maquera Llano (2023).

Tabela 10 - Estimativas com seus erros-padrão (EP), para os parâmetros das três parametrizações dos modelos Brody, von Bertalanffy e Gompertz, na descrição do crescimento de lhamas obtidos com os dados completos.

Modelo	A	EP	B	EP	k	EP
Brody 1	42,7896	0,9343	0,7687	0,0118	0,1936	0,0141
Brody 2	42,7896	0,9343	-0,2631	0,0153	0,1936	0,0141
Brody 3	42,7896	0,9343	-1,3592	0,1427	0,1936	0,0141
von Bertalanffy 1	40,9039	0,9043	0,3634	0,0125	0,2710	0,0219
von Bertalanffy 2	40,9038	0,9043	0,3186	0,1175	0,2710	0,0219
von Bertalanffy 3	40,9039	0,9043	1,0123	0,0343	0,2710	0,0219
Gompertz 1	40,3187	0,9148	1,3100	0,0625	0,3091	0,0267
Gompertz 2	40,3187	0,9148	0,2700	0,0477	0,3091	0,0267
Gompertz 3	40,3187	0,9148	0,8736	0,1336	0,3091	0,0267

A: Peso assintótico, B: parâmetro de integração relacionada ao peso corporal inicial do animal, k: taxa de maturação, EP: erro-padrão.

Fonte: Da autora (2025).

Como mostrado algebricamente nas Tabelas 5, 6 e 7, as estimativas dos parâmetros A e k foram idênticas, nas parametrizações do mesmo modelo, mas as estimativas do parâmetro B variaram amplamente (Tabela 10), pela parametrização utilizada. Assim, por exemplo, na parametrização Brody 2, o valor de $B = -0,2631$ resulta da relação $B_2 = \ln B_1$ (Tabela 5), $B_2 = \ln(0,7687) = -0,2631$. Para a parametrização von Bertalanffy 2, o valor de $B = 0,3186$ resulta da relação $B_2 = (\ln 3 + \ln B_1)/k_1$ (Tabela 6), $B_2 = (1,0986 + \ln(0,3634))/0,2710 = 0,3186$. Para a parametrização Gompertz 2, o valor de $B = 0,2700$ resulta da relação $B_2 = k_3 B_3$ (Tabela 7), $B_2 = 0,3091 \times 0,8736 = 0,2700$.

Do ponto de vista biológico, o peso assintótico (parâmetro A) representa o peso máximo teórico que as lhamas podem atingir em condições ideais de crescimento, o qual é alcançado por volta dos 3 anos de idade. Já a taxa de maturação (parâmetro k) reflete a velocidade com que as lhamas se aproximam do peso assintótico ao longo do tempo. A interpretação desses parâmetros é crucial para entender o desenvolvimento das lhamas durante o primeiro ano de idade e pode auxiliar na tomada de decisões relacionadas ao manejo nutricional e à seleção genética, visando maximizar o potencial de crescimento desses animais a longo prazo (Canaza-Cayo *et al.*, 2015).

4.4 Indicadores de qualidade de ajuste

Os indicadores de qualidade de ajuste para os modelos analisados estão mostrados na Tabela 11. Nessa tabela, são apresentados os valores do coeficiente de determinação ajustada

(R_a^2), os valores do desvio-padrão residual (DPR), os valores do Índice de Concordância de Willmott (d) e as medidas de não linearidade, tanto intrínseca (c^I) quanto paramétrica (c^θ).

Tabela 11 - Avaliadores de qualidade de ajuste para as três parametrizações dos modelos Brody, von Bertalanffy e Gompertz, na descrição do crescimento de lhamas.

Modelos	R_a^2	DPR	d	c^I	c^θ	N° iterações
Brody 1	0,9951	0,6671	0,9990	0,0433	0,7418	4
Brody 2	0,9951	0,6671	0,9990	0,0433	0,7469	5
Brody 3	0,9951	0,6671	0,9990	0,0433	1,0304	6
von Bertalanffy 1	0,9909	0,8996	0,9981	0,0615	0,6418	6
von Bertalanffy 2	0,9909	0,8996	0,9981	0,0615	0,6845	5
von Bertalanffy 3	0,9909	0,8996	0,9981	0,0615	0,6509	7
Gompertz 1	0,9881	1,0227	0,9976	0,0737	0,6259	8
Gompertz 2	0,9881	1,0227	0,9976	0,0737	0,6353	4
Gompertz 3	0,9881	1,0227	0,9976	0,0737	0,6259	6

R_a^2 : Coeficiente de determinação ajustada, DPR: Desvio-padrão residual, d: Índice de Concordância de Willmott, c^I : Curvatura intrínseca, c^θ : Curvatura paramétrica.

Fonte: Da autora (2025).

As três parametrizações dos modelos Brody e von Bertalanffy possuem valores do coeficiente de determinação ajustado (R_a^2), acima de 0,99. Entretanto as parametrizações do modelo Gompertz apresentaram os menores valores de R_a^2 . As parametrizações do modelo Brody apresentaram menores valores de desvio-padrão residual (DPR) e valores mais próximos de 1 pelo índice de wilmott (d) que os obtidos pelos modelos von Bertalanffy e Gompertz. Considerando os avaliadores de qualidade de ajuste R_a^2 , DPR e d, as parametrizações 1 e 2 do modelo Brody são os modelos mais adequados para descrever as curvas de crescimento de lhamas K'aras e Ch'accu de um ano de idade do Peru. Maquera Llano (2023) relatou resultados menores de R^2 , no ajuste do modelo Brody em lhamas, visto que esses valores foram de 78,58 e 79,86 para lhamas Ch'accu e K'aras, respectivamente. Resultados menores (66 a 72) foram obtidas também por Wurzinger *et al.* (2005), utilizando o modelo Brody e com lhamas Th'ampulli e Kh'ara da Bolívia. À luz desses resultados, os valores encontrados no presente estudo indicam melhor ajuste dos dados de crescimento das lhamas jovens pelos modelos de Brody 1 e 2.

As medidas de não linearidade intrínseca (c^I) e paramétrica (c^θ), para cada parametrização dos modelos avaliados, também são apresentadas na Tabela 11. Como comentado por Fernandes *et al.* (2015, 2019), menores valores das medidas de não linearidade indicam melhores ajustes dos modelos, uma vez que obtêm-se estimativas mais confiáveis (Bates; Watts, 1980; Zeviani *et al.*, 2012). A não linearidade intrínseca costuma ser a medida

mais baixa e, portanto não é significativa. No entanto, mesmo que a c^I não seja significativa, a não linearidade paramétrica pode ser significativa, prejudicando a qualidade das inferências sobre os parâmetros (Mazucheli; Achcar, 2002).

Este estudo mostra que os valores da c^I permanecem praticamente constantes nas três parametrizações para os três modelos: Brody, von Bertalanffy e Gompertz, dado que as parametrizações do modelo Brody têm os valores mais baixos que as obtidas nos anteriores modelos. Fernandes *et al.* (2019), trabalhando com dados de mamíferos produtores de carne (bovinos, coelhos, ovinos e suínos), relataram menores valores de c^I nas parametrizações 1 e 2 do modelo von Bertalanffy.

Como era esperado, a medida de c^θ variou de acordo com a parametrização utilizada nos três modelos, Brody, von Bertalanffy e Gompertz, conforme observado na Tabela 11. Os menores valores da c^θ foram obtidos, nas três parametrizações do modelo Gompertz (0,6), seguido das três parametrizações dos modelos von Bertalanffy e das parametrizações 1 e 2 do modelo Brody (0,7). Entretanto a parametrização 3 do modelo Brody apresentou o maior valor da c^θ (1,03), indicando afastamento da linearidade, portanto a confiabilidade, nas estimativas dos parâmetros obtidos sob essa parametrização, é baixa, conforme sustentam Fernandes *et al.* (2015).

Em seu estudo sobre os avaliadores de qualidade de ajuste Silva *et al.* (2024) concluíram que embora as medidas da curvatura de Battes e Watts sejam importantes para a avaliação da qualidade do ajuste dos modelos, elas não são indicadas para a seleção do melhor modelo. Assim, considerando os bons resultados dos avaliadores de qualidade de ajuste R_a^2 , DPR e d, bem como os baixos valores das medidas de não linearidade intrínseca (c^I) e paramétrica (c^θ), evidencia-se e reforça que as parametrizações 1 e 2 do modelo Brody são os modelos mais adequados para a descrição da curva de crescimento das lhamas K'ara e Ch'accu por resultarem em melhores ajustes. Maquera Llano (2023) e Wurzinger *et al.* (2005), trabalhando com dados de lhamas da Bolívia, selecionaram o modelo Brody como o melhor para a descrição do crescimento das lhamas. No entanto Canaza-Cayo *et al.* (2015) reportaram que o modelo Gompertz forneceu melhores ajustes da curva de crescimento de lhamas do Peru.

4.5 Efeitos ambientais sobre os parâmetros da curva de crescimento

Para avaliar os efeitos ambientais, tais como o sexo e tipo do animal e sua interação entre eles sobre os parâmetros do modelo Brody, pois este foi o selecionado na seção anterior

como o mais adequado, foi feita uma análise de variância com as estimativas dos parâmetros como variáveis de resposta obtidas para cada animal. Previamente foi verificada a normalidade das estimativas dos parâmetros pelo teste de Shapiro Wilk, resultando no cumprimento desse pressuposto em todos os casos.

Dos resultados da Tabela 12, podemos observar que a interação não foi significativa, indicando que os fatores principais de sexo e tipo do animal resultaram ser independentes, ou seja, esses fatores possuem efeitos independentes nas estimativas da curva de crescimento. Portanto a análise de comparação de médias devem ser feitas apenas para os efeitos principais.

A Tabela 12 apresenta os quadrados médios da análise de variância para os efeitos fixos de sexo e tipo de animal nos parâmetros (A, B e k) da curva de crescimento. Efeitos estatisticamente significativos ($P < 0,05$) dos fatores sexo e tipo de animal foram observados sobre o parâmetro A da curva de crescimento. No entanto nenhum efeito desses fatores foi significativo sobre o parâmetro k ($P > 0,05$) da curva de crescimento de lhamas do Peru. Por outro lado, foi observado apenas efeito significativo ($P < 0,05$) do fator tipo do animal sobre o parâmetro B.

Tabela 12 - Análise de variância dos efeitos fixos de sexo e tipo de animal sobre as estimativas da curva de crescimento de lhamas do Peru.

Fontes de Variação	GL	Quadrado Médio					
		A	p-valor	B	p-valor	k	p-valor
Sexo	1	423,19**	0,0050	0,036 ^{ns}	0,4209	10,98 ^{ns}	0,6064
Tipo do animal	1	1415,71**	0,0001	1,727**	0,0001	36,62 ^{ns}	0,3468
Sexo x Tipo do animal	1	156,98 ^{ns}	0,0872	0,023 ^{ns}	0,5237	9,26 ^{ns}	0,6361
Erro	3607	53,62		0,056		41,36	

Significância estatística: * ($P \leq 0,05$); ** ($P \leq 0,01$); ^{ns} = não significativo; A = Peso assintótico; k = taxa de maturação do animal; GL = Graus de liberdade.

Fonte: Da autora (2025).

A Tabela 13 mostra as médias (\pm desvio-padrão) dos quadrados mínimos que foram obtidas, ajustando uma curva individualmente por cada animal, para os parâmetros A, B e k. As fêmeas apresentam significativamente ($P < 0,05$) maiores pesos assintóticos ao ano de idade que os machos. O tipo do animal teve um efeito significativo sobre A, que foi estimado em 1,28 kg a mais nos animais tipo K'ara quando comparados aos Ch'accus ($p < 0,05$) (K'ara = 41,97 kg e Ch'accu = 40,69 kg). Um valor maior de A, para os animais do tipo K'ara, pode ser justificado pelo fato de os animais desse tipo terem uma constituição física mais robusta e um corpo maior que os animais do tipo Ch'accu (Mueller *et al.*, 2015). Efeitos significativos do tipo do animal sobre o peso adulto da lhama foram relatados em estudos anteriores (Canaza-

Cayo *et al.*, 2015). As estimativas para o peso assintótico ao um ano e meio de idade das lhamas (A) são próximas às obtidas por Maquera Llano (2023), cujos pesos máximos de lhamas K'ara e Ch'accu foram entre 34,89 a 40,64 kg utilizando modelos Brody, Logístico, von Bertalanffy e Gompertz. No entanto Canaza-Cayo *et al.* (2015), utilizando os mesmos modelos, reportaram estimativas maiores aos reportados no presente estudo (46,72 a 55,88 kg). Nas parametrizações 1 e 2 do modelo Brody, foram reportadas estimativas negativas do parâmetro B no presente estudo (-0,2631 e -1,3592). Estimativas negativas do parâmetro B (-1,37 a -1,29) do modelo Gompertz foram também reportadas em outro estudo (Maquera Llano, 2023). Em comparação com a bibliografia, os resultados do presente estudo mostram pesos assintóticos (A) semelhantes aos reportados por Maquera Llano (2023), porém inferiores aos descritos por Canaza-Cayo *et al.* (2015). As estimativas negativas do parâmetro B, foram consistentes com os obtidos por Maquera Llano (2023).

Tabela 13 - Número de observações (N), médias das estimativas dos parâmetros* \pm desvio-padrão do peso corporal assintótico (A) e taxa de maturação (k) do modelo de Brody, de acordo com os efeitos fixos ambientais em lhamas do Peru.

Efeitos fixos	N	A	B	k
Sexo				
Machos	1702	40,98 ^b \pm 0,18	0,106 ^a \pm 0,0058	1,76 ^a \pm 0,16
Fêmeas	1909	41,68 ^a \pm 0,17	0,112 ^a \pm 0,0055	1,65 ^a \pm 0,15
Tipo do animal				
K'ara	2133	41,97 ^a \pm 0,16	0,087 ^a \pm 0,0051	1,81 ^a \pm 0,14
Ch'accu	1478	40,69 ^b \pm 0,19	0,132 ^b \pm 0,0062	1,60 ^a \pm 0,17

N: número de animais segundo a categoria; dentro de uma coluna, os valores com letras sobrescritas diferentes diferem significativamente pelo teste de Diferença Mínima Significativa, com $p < 0,05$; *: Obtidos pelo ajuste individual para cada animal.

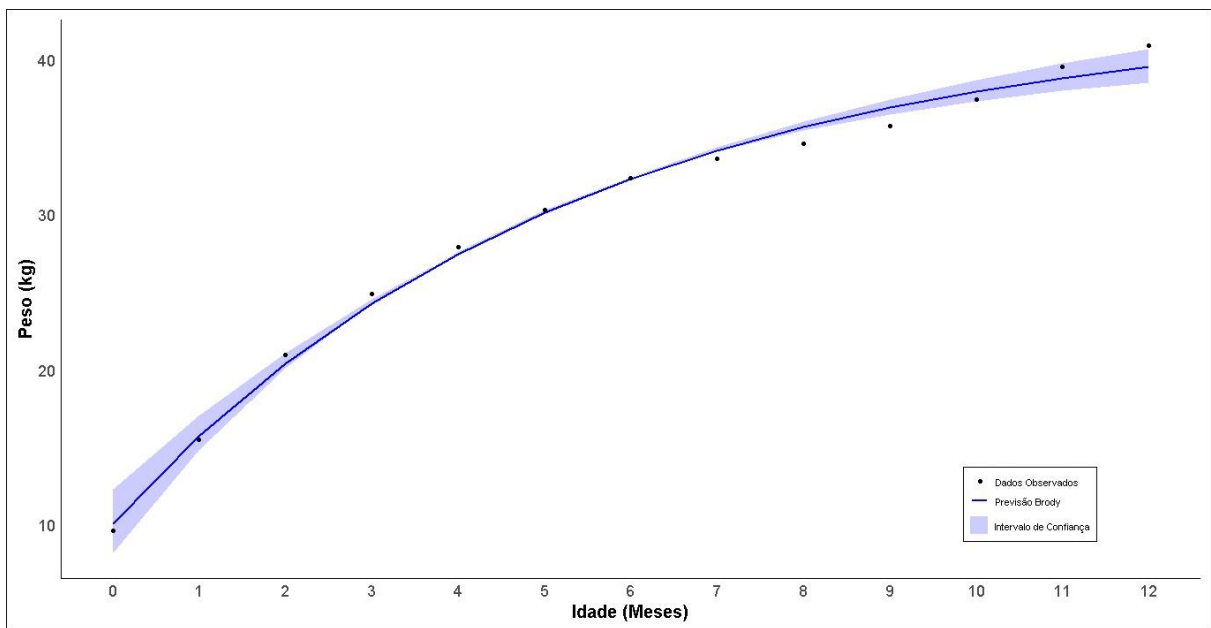
Fonte: Da autora (2025).

As Figuras 3, 4, 5 e 6 mostram as curvas de crescimento em lhamas ajustadas pelas parametrizações Brody 1 ($y_{ij} = A_i(1 - B_i e^{-k_i t_{ij}}) + \varepsilon_{ij}$) e Brody 2 ($y_{ij} = A_i(1 - e^{[B_i - k_i t_{ij}]}) + \varepsilon_{ij}$) (Tabela 4), segundo o sexo e tipo do animal com os respectivos intervalos de confiança, usando os parâmetros estimados na Tabela 13. Essas duas parametrizações foram selecionadas como as mais adequadas para a descrição da curva de crescimento das lhamas. Os intervalos de confiança de 95% observados nos machos e fêmeas (Figura 3 e 4) são mais amplos no início (0-2 meses de idade), o que geralmente indica uma maior variabilidade no crescimento inicial, possivelmente decorrente de diferenças no peso ao nascer, na nutrição da mãe ou nas condições de parto. Na fase intermediária (3-8 meses), o crescimento tende a ser mais estável, resultando em intervalos de confiança mais estreitos, os quais refletem uma menor

variabilidade. No final da curva (9-12 meses), os intervalos de confiança são também mais amplos, sugerindo diferenças no peso assintótico atingido aos 12 meses de idade. Essa variabilidade pode ser atribuída a fatores genéticos, nutricionais ou de manejo (Canaza-Cayo *et al.*, 2015). A mesma tendência foi observada nas curvas de crescimento das lhamas segundo o tipo de animal (Figura 4 e 5), sendo maior a variabilidade nas lhamas do tipo Ch'accu em comparação às do tipo K'ara.

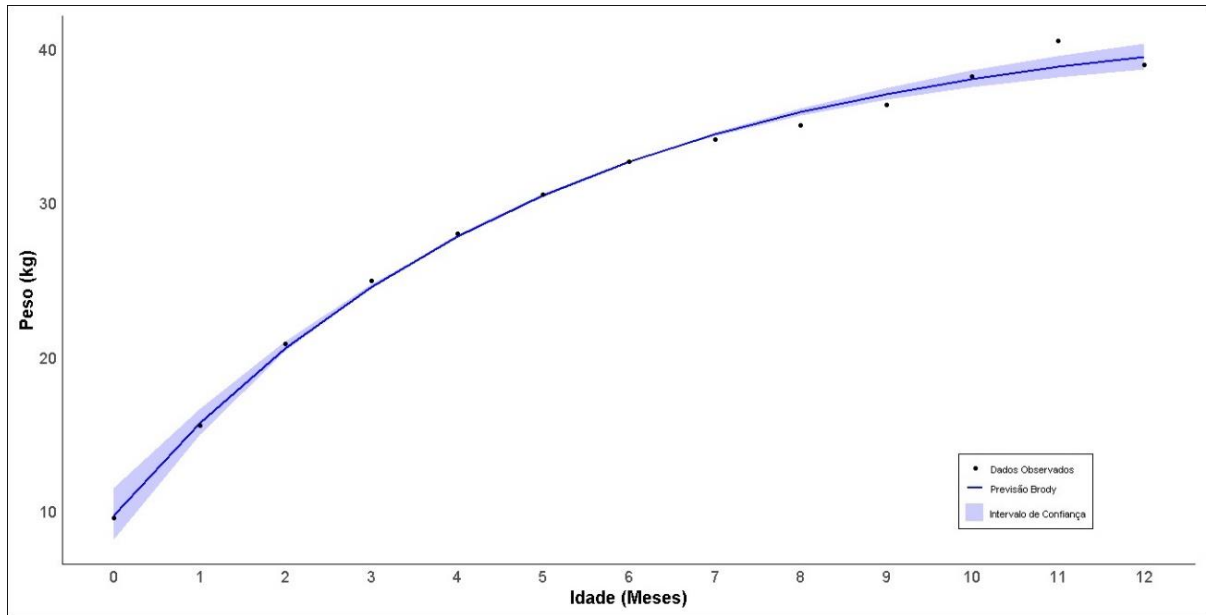
Em geral, visualmente os ajustes foram bons, o que significa que as duas primeiras parametrizações do modelo Brody (Brody 1 e Brody 2) foram consistentes com a variabilidade observada nos dados. Isso demonstrou a qualidade do ajuste do modelo Brody conforme corroborado nas pesquisas de Fernandes *et al.* (2015, 2019).

Figura 3 - Curva ajustada das três parametrizações do modelo Brody aos dados de crescimento de peso das lhamas machos.



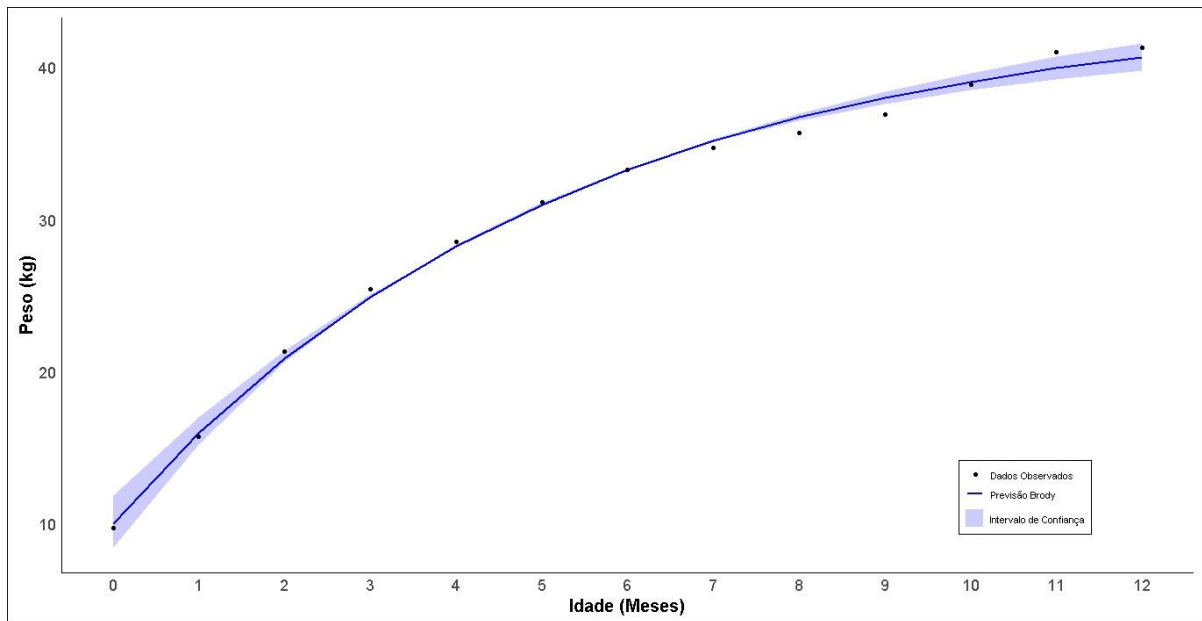
Fonte: Universidade Federal de Lavras (2025).

Figura 4 - Curva ajustada das três parametrizações do modelo Brody aos dados de crescimento de peso das lhamas fêmeas.



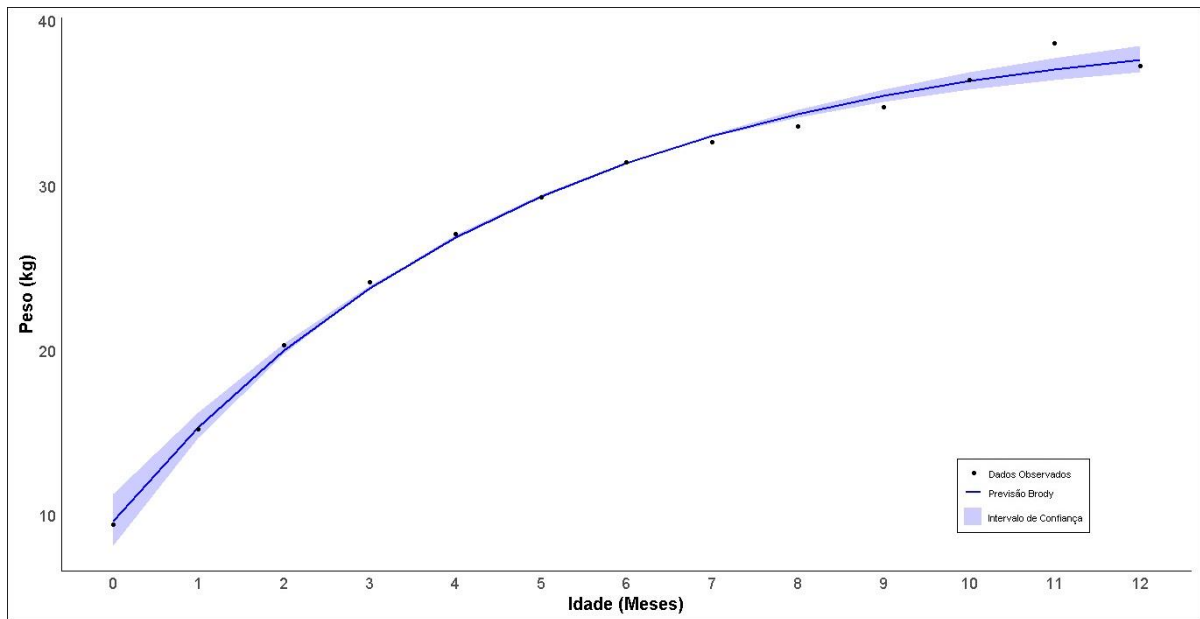
Fonte: Universidade Federal de Lavras (2025).

Figura 5 - Curva ajustada das três parametrizações do modelo Brody aos dados de crescimento de peso das lhamas K'aras.



Fonte: Universidade Federal de Lavras (2025).

Figura 6 - Curva ajustada das três parametrizações do modelo Brody aos dados de crescimento de peso das lhamas Ch'accu.



Fonte: Universidade Federal de Lavras (2025).

5 CONCLUSÕES

As duas primeiras parametrizações do modelo Brody foram as mais adequadas para descrever as curvas de crescimento das lhamas no primeiro ano de idade. Por ser um modelo não linear, seus parâmetros possuem interpretação prática, possibilitando estimar aspectos importantes da curva de crescimento das lhamas, como o peso assintótico e a taxa de maturação de lhamas no primeiro ano de idade, por exemplo.

O teste F aplicado às estimativas dos parâmetros do modelo Brody indicou que não há interação entre os fatores sexo e tipo do animal, demonstrando que esses fatores são independentes para a descrição da curva de crescimento de lhamas até os 12 meses de idade.

No peso assintótico aos doze meses de idade, os efeitos de sexo e tipo de animal foram significativos, visto que as lhamas fêmeas atingiram maiores pesos assintóticos (41,68 kg) que os machos (40,98 kg), enquanto as lhamas de tipo K'ara (41,97 kg) apresentaram maiores pesos assintóticos que os de tipo Ch'accu (40,69 kg).

REFERÊNCIAS

- APAZA-ZÚÑIGA, A.; COAQUIRA, J. E. Q. Pesos, ganancia de peso y modelos de crecimiento en crías de Llamas (*Lama Glama*) K'ara y Ch'aco. **Revista Investigaciones Altoandinas**, Puno, v. 18, n. 2, June 2016.
- ARAUJO, J. I. M. *et al.* Strategies for the identification of precocity in zebu beef cattle based on mixed nonlinear models and multivariate approach. **Tropical Animal Health and Production**, Edinburgh, v. 55, n. 6, p. 362, Oct. 2023.
- AYALA, C.; BUSTINZA, V.; RODRÍGUEZ, T. Crecimiento en peso vivo y en largo de mecha en llamas de la Estación Experimental Patacamaya, Bolivia. **Revista de Investigación e Innovación Agropecuaria y de Recursos Naturales**, La Paz, v. 5, nesp, p. 43-47, 2018.
- BANZATTO, D. A.; KRONKA, S. do N. **Experimentação agrícola**. 4. ed. Jaboticabal: FUNEP, 2006.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. Relative curvature measures of nonlinearity. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B, Statistical Methodology**, London, v. 42, n. 1, p. 1-16, Sept. 1980.
- BRODY, S. **Bioenergetics and growth**. New York, NY: Reinhold Publishing Corp, 1945.
- CAMPOS, N. R. F. *et al.* Effect of supplementation of ewes in the final third of gestation on the development of their lambs. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 51, p. 1-12, 2022.
- CANAZA-CAYO, A. W. *et al.* Modelling of growth curves and estimation of genetic parameters for growth curve parameters in Peruvian young llamas (*Lama glama*). **Small Ruminant Research**, Amsterdam, v. 130, p. 81–89, Sept. 2015.
- CARVALHO, L. R. de; PINHO, S. Z. de; MISCHAN, M. M. Methods to verify parameter equality in nonlinear regression models. **Scientia Agricola**, Piracicaba, v. 67, n. 2, p. 218-222, mar./abr. 2010.
- CERON, M. S. *et al.* Equações não lineares para determinar a curva de crescimento de suínos imunocastrados. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 55, p. 1-5, jan./dez. 2020.
- CORDEIRO, G. M.; PRUDENTE, A. A.; DEMÉTRIO, C. G. B. Uma revisão dos modelos normais não-lineares. **Revista Brasileira de Biometria**, Lavras, v. 27, n. 3, p. 360-393, 2009.
- DIEL, M. I. *et al.* Nonlinear regression for description of strawberry (*Fragaria x ananassa*) production. **The Journal of Horticultural Science and Biotechnology**, Ashford, v. 94, n. 2, p. 259-273, 2019.

- DOMÍNGUEZ-VIVEROS, J. *et al.* Growth curves in purebred and crossbred Limousin cattle. **Revista Mexicana de Ciencias Pecuarias**, Mérida, v. 14, n. 2, p. 412-422, Apr./June 2023.
- DRAPPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- EVANGELISTA, A. F. *et al.* Fit and genetic parameters of the growth curve of Polled Nellore cattle. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, Salvador, v. 23, p. 1-16, 2022.
- FERNANDES, F. A. *et al.* Growth curves of meat-producing mammals by von Bertalanffy's model. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 54, p. 1-8, 2019.
- FERNANDES, F. A. *et al.* Parameterizations of the von Bertalanffy model for description of growth curves. **Brazilian Journal of Biometrics**, Lavras, v. 38, n. 3, p. 369-384, 2020.
- FERNANDES, T. J. *et al.* Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum. Technology**, Maringá, v. 37, n. 4, p. 397-402, out./dez. 2015.
- FRANCE, J.; KEBREAB, E. Mathematical modelling in animal nutrition-introduction. *In*: FRANCE, J.; KEBREAB, E. **Mathematical modelling in animal nutrition**. Wallingford, UK: Cabi, 2008, p 1-11.
- HOJJATI, F.; HOSSEIN-ZADEH, N. G. Comparison of non-linear growth models to describe the growth curve of Mehraban sheep. **Journal of Applied Animal Research**, Izatnagar, v. 46, n. 1, p. 499-504, 2018.
- IBIAPINA NETO, V. *et al.* Non-linear mixed models in the study of growth of naturalized chickens. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 49, p. 1-14, 2020.
- JAVIER, L. M.; VLADÍMIRO, I. Caracterización de llamas K'aras y Ch'acus al primer mes en el CIP-la raya, una-puno. **Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar**, México, v. 6, n. 4, p. 1861-1879, 2022.
- JU, D. *et al.* The role of protein restriction and interaction with antibiotics in the regulation of compensatory growth in pigs: growth performance, serum hormone concentrations, and messenger RNA levels in component tissues of the endocrine growth axis. **Domestic Animal Endocrinology**, Auburn, Ala, v. 74, p. 106524, Jan. 2021.
- LAIRD, A. K. Dynamics of relative growth. **Growth**, Philadelphia, v. 29, n. 3, p. 249-263, Sept. 1965.
- LARIOS-FRANCIA, R. *et al.* Características textiles de la fibra de alpaca Huacaya, según zonas agroecológicas, sexo y edad en la Región Puno (Perú). **Revista de Investigaciones Veterinarias del Perú**, Lima, v. 34, n. 2, Mar./Apr. 2023.
- LAWRENCE, T.; FOWLER, V.; NOVAKOFSKI, J. **Growth of farm animals**. Wallingford, UK: Cabi, 2012.
- LEITE, M. T. The gudermannian growth model: theory, application and statistical analysis. **Brazilian Archives of Biology and Technology**, Curitiba, PR, v. 65, p. 1-11, 2022.

MAGOTRA, A.; BANGAR, Y. C.; YADAV, A. S. Growth curve modeling and genetic analysis of growth curve traits in Beetal goat. **Small Ruminant Research**, Amsterdam, v. 195, p. 106300, Feb. 2021.

MAQUERA LLANO, F. E. Evaluación de modelos matemáticos en curvas de crecimiento en llamas (lama glama) k'ara y ch'accu en alimentación natural y suplemento: Evaluation of mathematical models in growth curves in llamas (lama glama) k'ara and ch'accu in natural food and supplement. **LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades**, Asunción, v. 4, n. 6, p. 33-39, Dic. 2023.

MAMANI-LINARES, L. W.; CAYO, F.; GALLO, C. Características de canal, calidad de carne y composición química de carne de llama: una revisión. **Revista de Investigaciones Veterinarias del Perú**, Lima, v. 25, n. 2, p. 123-150, 2014.

MAMANI-LINARES, L. W.; GALLO, C. B. Meat quality attributes of the Longissimus lumborum muscle of the Kh'ara genotype of llama (Lama glama) reared extensively in northern Chile. **Meat Science**, Barking, v. 94, n. 1, p. 89-94, May 2013.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não-linear. **Acta Scientiarum**, Maringá, v. 24, n. 6, p. 1761-1770, Apr. 2002.

MINISTERIO DE DESARROLLO AGRARIO Y RIEGO. **Anuario Estadístico producción ganadera y avícola 2021**. Peru: Ministerio de Desarrollo Agrario y Riego, 2021. https://siea.midagri.gob.pe/portal/phocadownload/datos_estadisticas/anuarios/pecuaria/pecuaria_2021.pdf. Acceso em: 20 jul. 2023.

MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. **Modelos não lineares: funções assintóticas de crescimento**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

EN LA MONTAÑA – Llama. **DeAnimalia – Enciclopedia Animal**, 5 Mar. 2025. Disponible em: <https://deanimalia.com/montanallama.html>. Acceso em: 20 abr. 2025.

MUELLER, J. P. *et al.* Fibre quality of South American camelids in Argentina: a review. **Animal Genetic Resources/Recursos Génétiques Animales/Recursos Genéticos Animales**, [Rome, Italy], v. 56, p. 97-109, June 2015.

ORMACHEA, E. *et al.* Estudio morfométrico y ecuaciones de predicción del peso corporal en llamas (Lama glama) Ch'aku y Q'ara. **International Journal of Morphology**, Temuco, v. 40, n. 5, p. 1247-1252, 2022.

OZTURK, N. *et al.* Comparison of nonlinear growth models to estimate growth curves in kivircik sheep under a semi-intensive production system. **Animals**, Basel, v. 13, n. 14, p. 2379, July 2023.

PANIK, M. J. **Growth curve modeling: theory and applications**. New York: John Wiley & Sons, 2014.

POLIDORI, P. *et al.* Llama meat nutritional properties. **Italian Journal of Animal Science**, Bologna, v. 6, n. 1, p. 857-858, June 2007. Supplement.

PREACHER, K. J.; HANCOCK, G. R. Meaningful aspects of change as novel random coefficients: A general method for reparameterizing longitudinal models. **Psychological Methods**, Washington, DC, v. 20, n. 1, p. 84-101, Mar. 2015.

QUINTÃO, S. S. A. de; REPETTI, C. S. F. Importância do manejo e enriquecimento ambiental visando o bem-estar animal de lhamas. **Observatório de la Economía Latinoamericana**, Curitiba, v. 21, n. 9, p. 13868-13883, 2023.

R CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2022. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 22 mar. 2023.

RATKOWSKY, D. A. **Nonlinear regression modeling: a unified practical approach**. New York, NY: Marcel Dekker, 1983.

SALVADOR, R. de C. *et al.* Nonlinear models in the comparison of nitrogen fertilizers applied to coffee. **Scientia Agricola**, Piracicaba, v. 82, p. 1-6, 2025.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality: complete samples. **Biometrika**, Oxford, v. 52, n. 3/4, p. 591-611, Dec. 1965.

SILVA, E. M. *et al.* Método de Newton e Gauss-Newton na estimação dos parâmetros de modelo de regressão não linear. **Sigmae**, Alfenas, v. 8, n. 2, p. 728-734, 2019.

SILVA, W. S. *et al.* Accuracy of goodness-of-fit criteria for nonlinear regression: a study via Monte Carlo simulation. **Acta Scientiarum. Technology**, Maringá, v. 46, n. 1, e63428, Sept. 2024

SIMANCA, J. S.; VERGARA, O. G.; BUSTAMANTE, M. Y. Description of growth in sheep creole (*Ovis aries*) in two populations from Córdoba, Colombia. **Revista MVZ Córdoba**, Montería, v. 22, n. 3, p. 6310-6319, 2017.

SOUSA, J. E. R. de *et al.* Evaluation of non-linear models for growth curve in Brazilian tropical goats. **Tropical Animal Health and Production**, Edinburgh, v. 53, n. 2, p. 1-6, Mar. 2021.

STATISTICAL ANALYSIS SOFTWARE (SAS). **SAS/STAT user's guide: version 8**. Cary, NC: SAS Institute Inc, 2001. STATISTICAL ANALYSIS SOFTWARE – SAS. **Statistical analysis system, user's guide: statistics**. Version 8. SAS Institute Inc., Cary, NC, 2001.

TAVARES, J. M. R. *et al.* Water disappearance and manure production at growing–finishing commercial pig farms in Brazil: a simplified model approach. **Water**, Surrey, v. 15, n. 2, p. 278, 2023.

TORO, O. Camélidos sudamericanos domésticos: fibra, carne y más. **Camélidos**, Arequipa, p. 1-7, Aug. 2020. Edición Especial

VON BERTALANFFY, L. Quantitative laws in metabolism and growth. **The Quarterly Review of Biology**, Baltimore, v. 32, n. 3, p. 217–231, Sept. 1957.

WOOLDRIDGE, J. M. **Introductory econometrics: a modern approach**. 5. ed. South-Western: Cengage Learning, 2013.

WURZINGER, M. *et al.* Growth curves and genetic parameters for growth traits in Bolivian llamas. **Livestock Production Science**, Amsterdam, v. 95, n. 1/2, p. 73–81, Aug. 2005.

YACOBACCIO, H. D. The domestication of South American camelids: a review. **Animal Frontiers**, [London], v. 11, n. 3, p. 43-51, June 2021.

YADAV, R. *et al.* Analysis of growth pattern of Rhode Island Red chicken using nonlinear models. **Indian Journal of Animal Health**, Calcutta, v. 62, n. 1, p. 74-81, 2023.

ZEILEIS, A.; HOTHORN, T. Diagnostic checking in regression relationships. **R News**, Viena, v. 2/3, p. 7–10, Dec. 2002.

ZEVIANI, W. M. *et al.* Non linear models to potassium release from animals manure in latosols. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 42, n. 10, p. 1789-1796, out. 2012.