



LUCIANA EBANI

**INEVITÁVEIS VIOLAÇÕES DE
SIMETRIA EM CÁLCULOS
PERTURBATIVOS DE TQC'S
EM DIMENSÃO $D=1+1$**

**LAVRAS - MG
2015**

LUCIANA EBANI

**INEVITÁVEIS VIOLAÇÕES DE SIMETRIA
EM CÁLCULOS PERTURBATIVOS DE
TQC'S EM DIMENSÃO $D=1+1$**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação física Universidade Ampla, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestra.

Orientador
Dr. Orimar Antônio Battistel

**LAVRAS - MG
2015**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Ebani, Luciana .

Inevitáveis violações de simetria em cálculos perturbativos de
TQC's em dimensão $D=1+1$ / Luciana Ebani. – Lavras : UFLA,
2016.

96 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal de
Lavras, 2015.

Orientador(a): Orimar Antônio Battistel.

Bibliografia.

1. Amplitudes Perturbativas. 2. Ambiguidades. 3. Cálculo
Perturbativo Preditivo. 4. Identidades de Ward. 5. Regularizações. I.
Universidade Federal de Lavras. II. Título.

LUCIANA EBANI

**INEVITÁVEIS VIOLAÇÕES DE SIMETRIA
EM CÁLCULOS PERTURBATIVOS DE
TQC'S EM DIMENSÃO $D=1+1$**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestra.

APROVADA em 27 de fevereiro de 2015.

Dr. Gilson Dallabona	UFLA
Dr. José Abdalla Helayël Neto	CBPF
Dr. Helvécio Fargnolli	UFLA

Dr. Orimar Antônio Battistel
Orientador

**LAVRAS - MG
2015**

"E uma vez que você começa a duvidar, que para mim é uma parte muito fundamental da minha alma: duvidar e perguntar. E quando você duvida e pergunta fica difícil de acreditar."

Richard Feynman

RESUMO

Uma estratégia alternativa aos métodos tradicionais de regularização, desenvolvida para necessárias manipulações e cálculos envolvendo amplitudes perturbativas, provenientes de Teorias Quânticas de Campos, contendo divergências, denominada Cálculo Perturbativo Preditivo, é aplicada em uma investigação com objetivo de verificar a possibilidade de consistência neste tipo de cálculo. O nível de aproximação é "1-loop", em um modelo contendo diferentes espécies de férmions massivos de spin $1/2$ interagindo com bósons de spin 0 e spin 1, com paridades pares e ímpares, formulado em dimensão espaço-temporal $D = 1 + 1$. Será considerado o cálculo explícito das amplitudes e a verificação das relações entre funções de Green bem como das respectivas identidades de Ward e ainda a possibilidade de ambiguidades. Teoremas de baixa energia são igualmente considerados. Ao final, são apresentadas as conclusões que apontam para a impossibilidade de obter consistência no cenário usual onde as amplitudes são interpretadas como quantidades regularizadas. São identificadas violações em relações de simetria e em limites de baixa energia em amplitudes não anômalas, completamente similares àquelas identificadas nas amplitudes anômalas em métodos tradicionais. As conclusões apontam para necessidade de construirmos uma nova interpretação para as amplitudes perturbativas a fim de se obter a desejada consistência.

Palavras-Chaves: Amplitudes Perturbativas. Ambiguidades. Cálculo Perturbativo Preditivo. Identidades de Ward. Regularizações.

ABSTRACT

A alternative strategy to the traditional regularization methods, developed to perform manipulations and calculations involving perturbative amplitudes containing divergences, coming from Quantum Field Theories, which we call Predictive Perturbative Calculation, is applied in an investigation in order to check the possibility of consistency in this kind of calculation. The level of approximation is the 1-loop, in the context of a model containing different species of massive fermions of spin $1/2$, interacting with bosons of spin 0 and spin 1, having even and odd parities and formulated in the space-time dimension $D = 1 + 1$. It is considered the explicit calculation of the amplitudes, the verification of relations among the Green functions and the associated Ward identities as well as the possibility of ambiguities. Low-energy theorems are also considered. At the end it is presented the conclusions of the investigation, which reveal that it is not possible to obtain consistency in the usual context, where the perturbative amplitudes are assumed as regularized amounts. Violations in symmetry relations are identified, as well as in low energy limits, even in non-anomalous amplitudes, in a way completely similar to those identified in anomalous amplitudes, in traditional methods. The conclusions reveal that it is necessary to find a new interpretation for the perturbative amplitudes in order to obtain the desired consistency.

Keywords: Perturbative Amplitudes. Ambiguity. Predictive Perturbative Calculation. Ward's Identities. Regularizations.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Apanhado histórico	11
2	O MODELO E AS AMPLITUDES PERTURBATIVAS	18
2.1	A Lagrangeana	18
2.2	Regras de Feynman	20
2.3	Construção das amplitudes perturbativas	22
3	RELAÇÕES DE SIMETRIA	28
3.1	Identidades de Ward	28
3.2	Relações entre funções de Green	29
4	CÁLCULO DAS AMPLITUDES	34
4.1	Cálculo Perturbativo Preditivo (CPP)	34
4.2	Amplitudes físicas	36
4.2.1	Funções de Green de um ponto	36
4.2.2	Funções de Green de dois pontos	38
5	RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN	42
5.1	Verificação das relações entre funções de Green	42
6	AMBIGUIDADES E IDENTIDADES DE WARD	50
6.1	Ambiguidades	50
6.2	Objetos divergentes e regularizações	54
6.2.1	Regularização Dimensional (RD)	54
6.2.2	Regularização Covariante de Pauli-Villars (PV)	56
7	LIMITES DE BAIXA ENERGIA	59
7.1	Amplitude VV	59
7.2	Amplitude AA	61
7.3	Amplitude AV	63
8	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	70
	APÊNDICE	73

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Auto-energia do fóton	22
Figura 2 Diagrama de Feynman para as funções de Green de um ponto.....	24
Figura 3 Diagrama de Feynman para as funções de Green de dois pontos..	25
Figura 4 Relação entre função de Green esperada para a amplitude SA	32
Figura 5 Relação entre função de Green esperada para a amplitude SV	34

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apanhado histórico

A *Teoria Quântica de Campos (TQC)* é um sofisticado aparato teórico construído com a finalidade de descrever as partículas fundamentais e suas interações. Os ingredientes principais desta construção são a Mecânica Quântica e a Relatividade Restrita.

A origem das ideias acima mencionadas data do início do século *XX* e implicaram na quebra de alguns paradigmas.

Em 1905, Einstein apresenta a Teoria da Relatividade Restrita, modificando o conceito de tempo e espaço absolutos presente nas teorias clássicas. A exigência de que as leis físicas devem manter a mesma forma matemática em todos os sistemas de referência, relacionados por transformações de Lorentz, implicou em modificações significativas na Mecânica Newtoniana no regime de altas velocidades relativas entre dois observadores em referenciais inerciais.

Concomitantemente com as idéias bem sucedidas de Max Plank, na descrição do espectro de radiação térmica de corpos negros e de outros experimentos notáveis como o efeito fotoelétrico e com a introdução da quantização da energia Schrödinger e Heisenberg, independentemente, desenvolveram a Mecânica Quântica que igualmente implicou em drásticas modificações conceituais presentes nas teoria ditas clássicas.

Na Mecânica Quântica as informações a respeito da dinâmica de uma partícula está contida na função de onda $\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$, função da posição $\vec{\mathbf{r}}$ e do tempo t . Esta função é determinada pela solução da equação diferencial de segunda ordem

$$\hat{H}\psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = E\psi(\vec{\mathbf{r}}, t), \quad (1.1)$$

onde \hat{H} é o operador hamiltoniano construído a partir da forma clássica mediante a aplicação da prescrição de Schrödinger que associa o momentum \vec{p} da partícula com sua posição através de $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ e a energia desta com o tempo por $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, sendo \hbar a constante de Plank. As soluções da equação acima são ainda submetidas à exigência de serem de quadrado integrável. Este conjunto de ideias

foi muito bem sucedido na descrição de fenômenos em escala atômica, permitindo finalmente a compreensão da estabilidade de átomos e moléculas, o que através das Leis da Mecânica Clássica não se mostrou possível.

Embora bem sucedidas as ideias da Mecânica Quântica e da Relatividade Restrita, elas não eram compatíveis. A razão está na forma não covariante da equação de Schrödinger, o que implica na não invariância frente a mudança de sistema de referência, e sendo assim, contraditório às ideias da Teoria da Relatividade.

Naturalmente a descrição de partículas fundamentais no regime relativístico exigia desenvolvimentos adicionais. A ideia imediata parecia ser a aplicação da prescrição de Schrödinger na forma relativística para a energia da partícula, gerando assim uma equação de onda relativística e invariante frente a transformações de Lorentz, ou seja, a partir da relação relativística entre momentum e energia,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.2)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e m a massa de repouso da partícula, obtemos a equação

$$(\square + m^2) \phi(\vec{\mathbf{r}}, t) = 0, \quad (1.3)$$

proposta por Klein e Gordon, onde \square é o operador D'lambertiano.

A aplicação desta equação, de modo similar à equação de Schrödinger, não se mostrou satisfatória. Entre outros aspectos, a presença de uma derivada temporal de segunda ordem em relação ao tempo, introduzida pelo operador \square , não permite interpretar o módulo ao quadrado das soluções como uma distribuição de probabilidade pois esta quantidade não é positiva definida.

A fim de contornar estas dificuldades, no início dos anos 30, Dirac propôs uma equação de onda relativística, porém com derivadas lineares nas coordenadas espaço-temporais,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = 0, \quad (1.4)$$

onde γ^μ são matrizes.

Esta proposta introduziu aspectos revolucionários tais como o surgimento natural do spin do elétron, que até então não era relacionado com o espaço-tempo. Além disso permitiu a interpretação da existência de antipartículas como uma si-

metria fundamental fato que, no que diz respeito ao elétron, acabou se confirmando com a descoberta do pósitron por Anderson em 1932.

Apesar dos aspectos surpreendentes, a equação de onda relativística de Dirac mostrou-se limitada à descrição de partículas livres e de spin $1/2$ assim como a Equação de Klein e Gordon se limita a descrever partículas de spin 0. Estas observações são casos particulares da situação geral: cada partícula livre, de acordo com seu spin, é descrita por uma equação de onda relativística específica. A descrição das interações entre partículas relativísticas exige desenvolvimentos adicionais, o que nos leva ao surgimento da TQC.

Neste contexto, a interpretação das soluções das equações de onda relativísticas não podem ser tratadas como funções de onda, mas como campos relativísticos que devem ser quantizados, à luz da *segunda quantização*. Estes campos correspondem às partículas interagentes e os campos surgidos na quantização estão associados às partículas intermediárias trocadas na interação (PESKIN; SCHROEDER, 1995). Sendo assim as interações entre os campos quânticos e relativísticos dão origem a novos campos.

Neste cenário surge a *Eletrodinâmica Quântica (EDQ)*, uma teoria de calibre (SCHWINGER, 1953), com simetria local $U(1)$, através da qual é possível descrever todos os fenômenos envolvendo *elétrons* e *pósitrons*, por meio da emissão e absorção de bósons virtuais, os *fótons*, assim como processos de criação e aniquilação de pares elétron-pósitron, entre outros.

A teoria quântica e relativística das interações eletromagnéticas produziu os melhores resultados da história da ciência na comparação entre predição teórica e resultados experimentais (DITTRICH; REUTER, 1986). Por esta razão a *EDQ* serviu de modelo para a construção de outras teorias como a *Cromodinâmica Quântica*, para as interações fortes, a *Teoria Eletrofraca*, para interações fracas e eletromagnéticas e, posteriormente, o *Modelo Padrão das Partículas Elementares*, que representa a visão atual da física em termos de partículas e interações fundamentais.

Apesar do sucesso sem precedentes da *TQC* como uma ferramenta adequada para a investigação das consequências de simetrias para as interações entre campos relativísticos, para tornar possível a apreciação de suas predições, muitos

problemas tiveram que ser contornados. O formalismo está intimamente ligado à linguagem dos cálculos perturbativos devido à dificuldade de obtenção de soluções exatas das equações de movimento obtidas para os campos, usualmente não lineares e/ou acopladas.

O fato de as soluções serem perturbativas não representaria, em princípio, um problema. Entretanto, neste tipo de soluções em *TQC*'s aparecem indefinições matemáticas associadas a divergências. Assim, é necessário interpretar as expressões obtidas para os processos físicos separando as partes divergentes das partes finitas e, só então, eliminar os infinitos de modo consistente.

Este processo é usualmente feito com a utilização de técnicas de regularização seguida de renormalização. No processo de regularização as amplitudes perturbativas que apresentam divergências são modificadas, através de alguma prescrição que as torne finitas. Manipulações e cálculos passam a ser então permitidos. Ao final das operações, torna-se necessário remover as modificações introduzidas através de algum processo de limite, e este "limite de conexão", na prescrição de regularização utilizada, permitiria retornar às determinações da teoria e, portanto, das simetrias para as amplitudes.

Porém, devido à presença de divergências nas amplitudes as operações intermediárias e a tomada do referido limite sabidamente não comutam. Com isso, é uma situação comum as amplitudes perturbativas dependerem do método específico de regularização utilizado, bem como da sequência específica de operações efetuadas nos passos intermediários. Deste modo, as amplitudes podem ser contaminadas com ambiguidades e, como consequência, apresentarem violações em relações de simetria, violações de princípios básicos de *TQC* como: unitariedade, quebra de invariância de escala, perda da homogeneidade do espaço-tempo, entre outras.

Quanto às ambiguidades, elas se manifestam na forma de dependência das amplitudes com escolhas arbitrárias feitas em passos intermediários, e assim implicam na destruição do poder de predição da teoria, uma vez que, se assim for, não determina um resultado único para as amplitudes. Diferentes usuários do referido formalismo podem encontrar diferentes resultados para uma mesma investigação.

Há evidentemente exceções localizadas para as sentenças colocadas acima,

para métodos específicos aplicados a teorias específicas, como no caso da *EDQ*. Porém, a situação geral, pode ser resumida de modo simples: dentre os métodos tradicionais de regularização não há um que seja consistente e que possa ser aplicado sem restrições a qualquer teoria ou modelo e não há um que seja aplicável sem restrições que produza resultados consistentes.

Neste contexto é razoável nos questionarmos se é possível, de fato, interpretar adequadamente as amplitudes físicas sob o ponto de vista das regularizações. Este é o aspecto principal deste trabalho: em um cenário simples procederemos uma investigação detalhada com o intuito de mostrar que a interpretação de amplitudes perturbativas como quantidades regularizadas não nos permite a obtenção de resultados consistentes para nenhuma forma específica de regularização. Mostraremos que violações de relações de simetria e de teoremas de baixa energia podem ser caracterizadas como inevitáveis para amplitudes não anômalas quando uma interpretação universal é adotada.

As conclusões claras e transparentes produzidas por esta investigação estão intimamente relacionadas à utilização de uma estratégia alternativa aos métodos tradicionais utilizados nas manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes em TQC que fazem uso de regularização. Através da referida estratégia, proposta e desenvolvida originalmente por *O. A. Battistel* (BATTISTEL, 1999), é possível modificar significativamente este cenário, eliminando completamente o papel da regularização em cálculos perturbativos de TQC's. Nos referiremos a esta estratégia como *Cálculo Perturbativo Preditivo (CPP)*, uma vez que são obtidas amplitudes perturbativas livres das ambiguidades intrínsecas a estes tipos de cálculos. As simetrias do espaço-tempo, invariância de escala, unitariedade e simetrias internas dos campos são preservadas.

Nesta abordagem, nenhuma quantidade física, em momento algum, aparece em uma expressão matematicamente indefinida (ou seja, no interior de uma integral de Feynman divergente). As partes divergentes das amplitudes são automaticamente separadas em objetos padronizados e são funções apenas de uma escala arbitrária com dimensão de massa. Tais objetos jamais são, de fato, integrados e apenas propriedades gerais para os mesmos são estabelecidas. A renormalização de teorias, assim como a determinação de elementos do grupo de renormalização,

como funções beta, podem ser efetuados sem a menção sequer de alguma regularização, representando ganhos conceituais significativos.

Como o uso deste método não possui limitações de aplicabilidade de natureza alguma, nos possibilita reescrever completamente a linguagem dos cálculos perturbativos de *TQC's* de modo significativamente vantajoso. É possível tratar teorias formuladas em dimensões espaço-temporais ímpares e pares, renormalizáveis ou não, divergências ultravioletas e infravermelhas simultaneamente, assim como fornecer uma descrição transparente e universal das anomalias. Com isso investigações conclusivas podem ser feitas em cenários onde a utilização de regularizações usuais não permitem conclusões inequívocas e definitivas.

Consideraremos uma teoria muito geral, onde diferentes espécies de férmions massivos interagem via emissão e absorção de bósons escalares, pseudo-escalares, vetoriais e axiais. A estrutura é, portanto, a mesma do Modelo Padrão das Partículas Elementares. A dimensão do espaço-tempo é assumida como $D = 1 + 1$, permitindo o tratamento das amplitudes, com contagem de potências indicando a possibilidade de divergências em um cenário mais simples, sem, entretanto, qualquer perda conceitual.

Por outro lado, *TQC's* formuladas em dimensão $D = 1 + 1$, têm a sua própria importância tanto no contexto formal quanto no fenomenológico. No contexto formal a importância de tais teorias reside principalmente no fato de, nesta dimensão, ser possível a formulação de modelos exatamente solúveis dispondo-se assim de uma rara situação onde ambos os caminhos perturbativo e exato são disponíveis (ABDALLA et al., 1991). Tal laboratório permite testes a respeito dos procedimentos perturbativos em uma situação privilegiada. Isto torna-se útil desde teorias de gauge simples como a EDQ até no contexto de Teoria das Cordas. No campo fenomenológico por outro lado podemos encontrar interesses específicos em aplicações da Física da Matéria Condensada, tais como a física do grafeno.

Os seguintes capítulos, além de mostrarem o desenvolvimento do cálculo das amplitudes perturbativas, através do uso da estratégia *CPP*, irão nos proporcionar um completo exame das relações de simetria existentes na teoria, além de passos intermediários que nos servirão de guia na busca da consistência desejada. Para isto, lançaremos mão de dois vínculos: as relações entre as funções de Green, que

nos darão a possibilidade de relacionar funções de diferentes pontos, e, portanto, funções com diferentes graus de divergências, e as próprias relações de simetria da teoria, ponto importante para a investigação apresentada.

O presente trabalho foi organizado do seguinte modo: no capítulo 2 apresentamos o modelo geral, a partir da especificação da lagrangiana de interação. Neste passo, construiremos as amplitudes perturbativas ao nível "1-loop" de aproximação e poderemos constatar a possibilidade de divergências. No capítulo 3 estabeleceremos inicialmente as relações entre funções de Green, que são identidades válidas para as expressões não integradas das mesmas, as quais esperamos manter preservadas após a implementação da última regra de Feynman como consequência da linearidade da operação de integração. Em seguida, consideraremos as relações de simetria da teoria ou identidades de Ward, que devem ser preservadas pelas amplitudes após a integração no momentum do "loop". No capítulo 4 efetuaremos os calcularemos propriamente ditos das funções de Green associadas às amplitudes físicas. Tais cálculos serão considerados à luz da estratégia à qual nos referimos anteriormente, onde as partes divergentes são separadas das partes finitas, sendo que somente as últimas são, de fato, integradas. De posse das formas explícitas das amplitudes, verificaremos a consistência dos resultados obtidos inspecionando se todas as relações entre funções de Green, estabelecidas no capítulo 3 ao nível do integrando, são satisfeitas após a integração. Já no capítulo 6, verificaremos sob que condições as *relações de simetria* da teoria podem ser preservadas e se as possíveis ambiguidades presentes nas amplitudes podem ser eliminadas. No capítulo 7 consideraremos as formas gerais das amplitudes e estabeleceremos teoremas de baixa energia esperados para as formas calculadas das amplitudes. Por fim, no capítulo 8 apresentaremos nossas considerações finais e conclusões.

2 O MODELO E AS AMPLITUDES PERTURBATIVAS

2.1 A Lagrangeana

Na construção de uma teoria quântica de campos, associamos às partículas, cuja dinâmica queremos descrever, campos e com estes construímos um funcional, a lagrangeana L , que é função dos campos e de suas primeiras derivadas espaço-temporais (PESKIN; SCHROEDER, 1995),

$$L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \equiv \int_{t_0}^{t_i} dt \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (2.1)$$

onde \mathcal{L} é definida como densidade de lagrangeana e ϕ_i são os campos.

Podemos escrever, esquematicamente, este funcional como a soma de duas partes distintas,

$$\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \mathcal{L}_F(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + \mathcal{L}_I(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (2.2)$$

O termo $\mathcal{L}_F(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$, refere-se a lagrangiana livre, que estará ligado às equações de onda relativísticas as quais devem obedecer os campos ϕ_i , de acordo com seus spins. No caso de partículas de spin 1/2 este termo é dado pela lagrangeana livre de Dirac,

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x), \quad (2.3)$$

onde $\psi(x)$ é o campo espinorial, m a massa e γ^μ uma representação para as matrizes de Dirac, no caso que consideraremos no presente trabalho, em duas dimensões A.

Já o termo $\mathcal{L}_I(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$, refere-se a lagrangiana de interação, cuja estrutura depende do conteúdo de simetria considerado relevante, a ser implementado na construção da teoria.

No presente trabalho, consideraremos um modelo muito geral, onde diferentes espécies de férmions massivos interagem com diferentes espécies de bósons. Campos fermiônicos acoplam-se a campos bosônicos de spin 0 (escalares e pseudo-escalares) e de spin 1 (vetores e pseudo-vetores) em um espaço-tempo bidimensional (LOWENSTEIN; SWIECA, 1971).

Os termos de interação são construídos, em mais baixa ordem, acoplando-se aos bósons com as densidades fermiônicas correspondentes, sem envolver derivadas dos campos.

Ela é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & iG_S(\bar{\Psi}_a A^{abc}\Psi_b)\phi_c + iG_P(\bar{\Psi}_a\gamma_3 B^{abc}\Psi_b)\pi_c \\ & - e_V\left(\bar{\Psi}_a\gamma^\mu C^{abc}\Psi_b\right)(A_\mu)_c - e_A\left(\bar{\Psi}_a\gamma_3\gamma^\mu D^{abc}\Psi_b\right)(W_\mu^A)_c, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde ϕ é um campo escalar, π é um campo pseudo-escalar, Ψ é um campo espinorial massivo, A_μ é um campo vetorial e W_μ^A é um campo axial (pseudo-vetor). Os índices a , b e c são relativos aos diferentes sabores dos férmions e bósons e A^{abc} , B^{abc} , C^{abc} e D^{abc} são os operadores que conectam as diferentes espécies de férmions e bósons, que nesta investigação não desempenham papel relevante. As constantes G_S , G_P , e_V , e e_A são as constantes de acoplamento. Elas são *inputs* do modelo, ou seja, estes parâmetros não são determinados pela teoria, mas são necessários para que ela tenha poder de predição, e são, portanto, determinadas experimentalmente. Estas constantes podem ser independentes ou relacionadas, dependendo do conteúdo de simetria implementado na teoria. Para os fins específicos deste trabalho, elas não desempenharão nenhum papel. Serão assumidas, por simplicidade, como iguais à unidade.

Seguindo os procedimentos de uma TQC, com a lagrangiana construída definimos a ação,

$$S \equiv \int d^2x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (2.5)$$

impomos o Princípio da Mínima Ação, que nos leva à condição:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_j} - \frac{\delta}{\delta x_\mu} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_j)} \right) = 0, \quad (2.6)$$

as conhecidas equações de Euler-Lagrange. Como para cada campo teremos uma equação de movimento, este procedimento irá gerar um número de equações diferenciais igual ao número de campos presentes da teoria, cuja parte livre, como vimos, será dada pela equação de onda relativística correspondente. Já com a presença da parte de interação teremos, um conjunto de equações diferenciais acopladas e possivelmente, não lineares. Soluções exatas são possíveis em raros casos

e por isso, somos obrigados a buscar soluções através de métodos perturbativos. Caso determinássemos as soluções exatas, teríamos uma descrição completa de todos os processos possíveis envolvendo os campos presentes na teoria, permitidos pela simetria assumida na construção da mesma.

2.2 Regras de Feynman

Será assumido a existência de métodos e procedimentos bem estabelecidos para a quantização do modelo e para o desenvolvimento das séries perturbativas para as amplitudes correspondentes aos processos pertinentes à teoria e que estes procedimentos são sintetizados pelas regras de Feynman (WEINBERG, 1996). Também assumiremos que é possível construir uma adequada interpretação dos termos da série perturbativa, na ordem perturbativa desejada, em termos dos diagramas de Feynman (FEYNMAN, 1949). Como exemplo, consideremos a representação diagramática que descreve a auto-energia do fóton na figura 1.

$$\begin{array}{c} q \\ \text{~~~~~} \\ \bullet \\ \text{~~~~~} \\ q \end{array} = \begin{array}{c} q \\ \text{~~~~~} \end{array} + \begin{array}{c} q \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ q \end{array} + \dots$$

Figura 1 – Auto-energia do fóton

Esse processo é representado por duas linhas externas bosônicas. As linhas internas, as quais estamos interessados, são descritas por uma circunferência no diagrama e são representadas por setas no sentido horário. O primeiro termo da série (primeiro diagrama do lado direito), corresponde a propagação livre do fóton, e os seguintes correspondem a correções em ordem crescente na constante de acoplamento.

Neste contexto, nossa tarefa se resume a encontrar todos os diagramas possíveis, capazes de conectar as linhas externas que caracterizam o processo escolhido, utilizando para isso as expressões para os propagadores e os vértices, de acordo com as regras de Feynman, para cada processo físico. O papel das regras

de Feynman é fazer a associação entre as expressões matemáticas e os diagramas. Para o caso deste trabalho, as regras de Feynman utilizadas serão as seguintes:

1) Para cada linha fermiônica interna associamos a expressão

$$S_F(k + k_i; m_i) = \frac{\not{k} + \not{k}_i + m_i}{D_i}, \quad (2.7)$$

onde

$$D_i = [(k + k_i)^2 - m_i^2], \quad (2.8)$$

e $\not{k} = k \cdot \gamma$. As quantidades S_F são os correspondentes propagadores fermiônicos na prescrição de Feynman, no espaço dos momentos. Eles correspondem a função de Green para a parte livre da teoria. Carregam momento $k + k_i$ e massa m_i . O termo k_i é o momento arbitrário interno e sua arbitrariedade está associado à liberdade de rotulação das linhas internas do loop, consistente com a conservação de energia e momento em cada vértice.

2) Os operadores de vértices Γ_i são quantidades pertencentes ao conjunto

$$\Gamma_i = \{1, \gamma_3, \gamma_\alpha, \gamma_\alpha \gamma_3\}, \quad (2.9)$$

os mesmos que aparecem na lagrangiana de interação, no acoplamento das correntes fermiônicas com os campos bosônicos, responsáveis pelo caráter escalar, pseudo-escalar, vetorial e axial, respectivamente.

Com propagadores e operadores de vértices podemos construir as amplitudes desejadas, que são funções de Green, de um e dois pontos, puramente fermiônicas, ao nível "1-loop" de aproximação, cuja contagem de potências revele a possibilidade de divergências. Devemos impor a conservação da energia e do momento nos vértices,

$$q = k_i - k_j, \quad (2.10)$$

onde q é identificado como o momento externo, dado pela diferença entre os momentos internos. Esta quantidade não é arbitrária, por sua vez, a soma

$$Q = k_i + k_j \quad (2.11)$$

seria completamente indefinida. Isto significa que qualquer dependência de alguma amplitude física na quantidade Q implicaria em ambiguidades. O grau de divergência considerado na presente investigação não contamina as amplitudes com

tais termos, o que invariavelmente ocorrem em dimensões maiores onde graus de divergência superior ao logarítmico. Como estamos tratando de loop puramente fermiônicos, devemos tirar o traço do produto dos propagadores e vértices, visto que estes formam uma matriz.

Especificadas as regras de Feynman, construiremos as formas matemáticas das amplitudes em duas etapas: primeiro definimos as amplitudes para um único valor do momento do loop k , tarefa esta que nos acuparemos neste capítulo. Em um passo posterior, após adotarmos uma representação conveniente para os propagadores das linhas internas, integraremos sobre todos os momentos irrestritos do loop. Esta operação, só será efetuada após a especificação da estratégia que utilizaremos para as adequadas manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes.

2.3 Construção das amplitudes perturbativas

De acordo com as regras de Feynman citadas na seção anterior, teremos para funções de um ponto

$$t^i = Tr [\Gamma_i S_F (k + k_1; m_1)], \quad (2.12)$$

cujos traços das matrizes de Dirac nos levam a

$$t^i = \frac{(k + k_1)^\alpha}{D_1} Tr (\Gamma_i \gamma_\alpha) + \frac{m_1}{D_1} Tr (\Gamma_i). \quad (2.13)$$

Esquemáticamente podemos visualizar estas funções na figura 2.

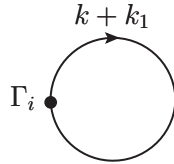


Figura 2 – Diagrama de Feynman para as funções de Green de um ponto

Quanto às funções de dois pontos, teremos:

$$t^{ij} = Tr [\Gamma_i S_F (k + k_1; m_1) \Gamma_j S_F (k + k_2; m_2)], \quad (2.14)$$

cujos traço nos fornecem:

$$\begin{aligned}
 t^{ij} = & \frac{(k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta}{D_{12}} \text{Tr}(\Gamma_i \gamma_\alpha \Gamma_j \gamma_\beta) + \frac{m_1 m_2}{D_{12}} \text{Tr}(\Gamma_i \Gamma_j) \quad (2.15) \\
 & + m_2 \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{12}} \text{Tr}(\Gamma_i \gamma_\alpha \Gamma_j) + m_1 \frac{(k+k_2)^\beta}{D_{12}} \text{Tr}(\Gamma_i \Gamma_j \gamma_\beta),
 \end{aligned}$$

onde $D_{12} = D_1 D_2$.

Podemos visualizar estas funções através da figura 3.

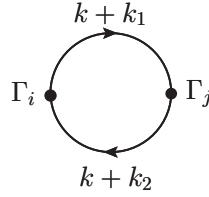


Figura 3 – Diagrama de Feynman para as funções de Green de dois pontos

As amplitudes de nosso interesse serão as de um ponto, dadas por 2.13, contendo um único propagador fermiônico interno, e as funções de dois pontos, dadas por 2.15, contendo dois destes propagadores, pois, como mencionado, nos detemos apenas em amplitudes cuja contagem de potências indica a possibilidade de divergência (linear e logarítmica).

A função de um ponto escalar (S) pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned}
 t^S(k_1, m_1) &= \text{Tr}[S_F(k+k_1; m_1)] \\
 &= 2m_1 \left(\frac{1}{D_1} \right), \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

bastando tomar o operador de vértice $\Gamma_i = 1$ na equação 2.13 e efetuar os traços de Dirac com o auxílio de A .

Tomando o vértice $\Gamma_i = \gamma_3$, teremos a função de um ponto pseudo-escalar (P), que é obtida identicamente nula pelas propriedades dos traços de Dirac,

$$\begin{aligned}
 t^P(k_1, m_1) &= \text{Tr}[\gamma_3 S_F(k+k_1; m_1)] \\
 &= 0. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, $\Gamma_i = \gamma_\mu$, teremos a função de um ponto vetorial (V),

$$\begin{aligned} t_\mu^V(k_1, m_1) &= Tr [\gamma_\mu S_F(k + k_1; m_1)] \\ &= 2 \left[\left(\frac{k_\mu}{D_1} \right) + k_{1\mu} \left(\frac{1}{D_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

E, por último, para $\Gamma_i = \gamma_\mu \gamma_3$, teremos a função de um ponto axial (A),

$$\begin{aligned} t_\mu^A(k_1, m_1) &= Tr [\gamma_\mu \gamma_3 S_F(k + k_1; m_1)] \\ &= 2\varepsilon_{\mu\nu} \left[\left(\frac{k^\nu}{D_1} \right) + k_1^\nu \left(\frac{1}{D_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

As expressões correspondentes para as amplitudes de dois pontos podem ser igualmente obtidas pela escolhas dos operadores dos vértices na expressão 2.15. Omitiremos o argumento das funções de dois pontos, de modo a não sobrecarregar a notação, dado que todas elas são funções de k_1, k_2, m_1 , e m_2 .

Sendo assim, temos a função escalar-escalar (SS)

$$\begin{aligned} t^{SS} &= Tr [S_F(k + k_1; m_1) S_F(k + k_2; m_2)] \\ &= - \left[q^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \left(\frac{1}{D_{12}} \right) + \left(\frac{1}{D_2} \right) + \left(\frac{1}{D_1} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde adotamos $q = k_1 - k_2$.

A função pseudo-escalar-pseudo-escalar (PP),

$$\begin{aligned} t^{PP} &= Tr [\gamma_3 S_F(k + k_1; m_1) \gamma_3 S_F(k + k_2; m_2)] \\ &= \left[q^2 - (m_1 - m_2)^2 \right] \left(\frac{1}{D_{12}} \right) - \left(\frac{1}{D_2} \right) - \left(\frac{1}{D_1} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

A função escalar-pseudo-escalar (SP), por sua vez, é dada por:

$$\begin{aligned} t^{SP} &= Tr [S_F(k + k_1; m_1) \gamma_3 S_F(k + k_2; m_2)] \\ &= -2\varepsilon^{\alpha\beta} \left[\left(\frac{k_\alpha k_\beta}{D_{12}} \right) + k_{2\beta} \left(\frac{k_\alpha}{D_{12}} \right) + k_{1\alpha} \left(\frac{k_\beta}{D_{12}} \right) + k_{1\alpha} k_{2\beta} \left(\frac{1}{D_{12}} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde a troca dos operadores nos fornece a função PS relacionada a função SP por uma troca de sinal.

Agora vamos explicitar as funções de Green, com um índice de Lorentz, começando pela escalar-vetorial (*SV*),

$$\begin{aligned} t_\mu^{SV} &= Tr [S_F(k + k_1; m_1) \gamma_\mu S_F(k + k_2; m_2)] \\ &= 2 \left[(m_2 + m_1) \left(\frac{k_\mu}{D_{12}} \right) + (m_2 k_{1\mu} + m_1 k_{2\mu}) \left(\frac{1}{D_{12}} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

que é idêntica à função vetorial-escalar (*VS*).

A função escalar-axial (*SA*) ficará:

$$\begin{aligned} t_\mu^{SA} &= Tr [S_F(k + k_1; m_1) \gamma_\mu \gamma_3 S_F(k + k_2; m_2)] \\ &= -2\varepsilon_{\mu\alpha} \left[(m_1 + m_2) \left(\frac{k^\alpha}{D_{12}} \right) + (m_1 k_2^\alpha + m_2 k_1^\alpha) \left(\frac{1}{D_{12}} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

idêntica à axial-escalar (*AS*).

A função pseudo-escalar-vetorial (*PV*),

$$\begin{aligned} t_\mu^{PV} &= Tr [\gamma_3 S_F(k + k_1; m_1) \gamma_\mu S_F(k + k_2; m_2)] \\ &= 2\varepsilon_{\mu\alpha} \left[(m_1 - m_2) \left(\frac{k^\alpha}{D_{12}} \right) + (m_1 k_2^\alpha - m_2 k_1^\alpha) \left(\frac{1}{D_{12}} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

relacionada à função vetorial-pseudo-escalar (*VP*) por uma troca de sinal.

A função pseudo-escalar-axial (*PA*),

$$\begin{aligned} t_\mu^{PA} &= Tr [\gamma_3 S_F(k + k_1; m_1) \gamma_\mu \gamma_3 S_F(k + k_2; m_2)] \\ &= -2(m_1 - m_2) \left(\frac{k_\mu}{D_{12}} \right) - (m_1 k_{2\mu} - m_2 k_{1\mu}) \left(\frac{1}{D_{12}} \right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

que relaciona-se à axial-pseudo-escalar (*AP*) por uma troca de sinal.

Agora consideraremos as amplitudes com dois índices de Lorentz. Primeiramente, a vetorial-vetorial (*VV*), associada ao conhecido tensor de polarização do vácuo, pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{VV} &= Tr [\gamma_\mu S_F(k + k_1; m_1) \gamma_\nu S_F(k + k_2; m_2)] \\ &= 2 \left[\frac{(k + k_1)_\mu (k + k_2)_\nu + (k + k_1)_\nu (k + k_2)_\mu}{D_{12}} \right] \\ &\quad + g_{\mu\nu} \left[\frac{-2(k + k_1) \cdot (k + k_2) + 2m_1 m_2}{D_{12}} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Podemos reescrever a expressão acima em uma forma mais conveniente. Para tal, primeiro definimos as quantidades:

$$t_{\mu\nu}^{(\pm)} = \left[\frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu \pm (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu}{D_{12}} \right]. \quad (2.28)$$

Da onde identificamos a forma compacta

$$t_{\mu\nu}^{VV} = t_{\mu\nu}^{(+)} + g_{\mu\nu} t^{PP}. \quad (2.29)$$

A amplitude axial-axial (AA),

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{AA} &= Tr [\gamma_\mu \gamma_3 S_F(k+k_1; m_1) \gamma_\nu \gamma_3 S_F(k+k_2; m_2)] \\ &= 2 \left[\frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu}{D_{12}} \right] \\ &\quad - g_{\mu\nu} \left[\frac{2(k+k_1) \cdot (k+k_2)}{D_{12}} + \frac{2m_1 m_2}{D_{12}} \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

De modo semelhante ao que fizemos para a amplitude VV , podemos colocar a amplitude AA na forma

$$t_{\mu\nu}^{AA} = t_{\mu\nu}^{(+)} - g_{\mu\nu} t^{SS}. \quad (2.31)$$

Resta apenas a função axial-vetorial (AV) para ser considerada. Teremos

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{AV} &= Tr [\gamma_\mu \gamma_3 S_F(k+k_1; m_1) \gamma_\nu S_F(k+k_2; m_2)] \\ &= -2\varepsilon_\mu^\beta \left[\frac{(k+k_1)_\beta (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\beta}{D_{12}} \right] \\ &\quad + 2\varepsilon_\nu^\beta \left[\frac{(k+k_1)_\beta (k+k_2)_\mu - (k+k_1)_\mu (k+k_2)_\beta}{D_{12}} \right] \\ &\quad + 2\varepsilon_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \left[\frac{(k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta}{D_{12}} \right] \\ &\quad - \varepsilon_{\mu\nu} \left[-\frac{2(k+k_1) \cdot (k+k_2)}{D_{12}} + \frac{2m_1 m_2}{D_1} \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

a qual pode ser escrita como:

$$t_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_\nu^\beta t_{\beta\mu}^{(-)} - \varepsilon_\mu^\beta t_{\beta\nu}^{(+)} - g_{\mu\nu} t^{SP} - \varepsilon_{\mu\nu} t^{PP}. \quad (2.33)$$

Com isso concluímos a tarefa de explicitar as amplitudes de um e dois pontos após a tomada dos traços de Dirac. Um importante aspecto a ser notado após estas

operações é o fato de todas as amplitudes serem combinações de apenas cinco estruturas:

$$\frac{1}{D_1}, \frac{k_\mu}{D_1}, \frac{1}{D_{12}}, \frac{k_\mu}{D_{12}}, \frac{k_\mu k_\nu}{D_{12}}. \quad (2.34)$$

Assim, quando implementarmos a última regra de Feynman, ou seja, quando integrarmos sobre todos os momentos irrestritos do loop, identificaremos, por contagem de potências, a possibilidade de divergências linear na estrutura

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu}{D_1}, \quad (2.35)$$

e logarítmica nas integrais

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{D_1}, \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{D_{12}}, \quad (2.36)$$

sendo necessário, a adoção de alguma prescrição para o tratamento destas estruturas a fim de que as amplitudes físicas possam adquirir algum sentido físico, como veremos no que se segue.

Neste ponto, podemos resumir o problema relacionado ao cálculo de amplitudes perturbativas de um modo simples: devemos estabelecer uma estratégia que permita calcular estas quantidades, a respeito do caráter divergente, tal que as expressões obtidas preservem as simetrias pertinentes a elas e estas sejam obtidas livres de ambiguidades.

3 RELAÇÕES DE SIMETRIAS

3.1 Identidades de Ward

Sabe-se que, tanto na Mecânica Clássica quanto na Mecânica Quântica, pode-se associar simetrias a leis de conservação. A invariância da lagrangiana, frente a um conjunto de transformações, decorre da existência de simetrias e estas estarão associadas a quantidades conservadas. Formalmente esta conexão pode ser estabelecida pelo Teorema de Noether (WEINBERG, 1996). Assim, para cada simetria implementada na construção da lagrangiana de uma teoria devemos ter uma corrente conservada, o que é representado pela condição:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.1)$$

Evidentemente que a corrente conservada associamos observáveis físicos. Na *EDQ*, onde teremos uma única espécie de férmion, a *invariância de gauge* leva à existência da corrente vetorial

$$j(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x), \quad (3.2)$$

conservada. A quantidade física associada é a carga elétrica.

No modelo considerado, devido à presença de diferentes espécies de férmions massivos, a corrente fermiônica vetorial não é conservada e o divergente desta corrente estabelece uma conexão com a corrente escalar (TREIMAN et al., 1985). Do mesmo modo o divergente da corrente fermiônica axial, estabelecerá uma relação com a corrente pseudo-escalar. Isto pode ser visto facilmente a partir da definição

$$j_i(x)_{ab} = \bar{\psi}_a(x)\Gamma_i\psi_b(x), \quad (3.3)$$

com o operador de vértice Γ_i caracterizando as densidades escalar $S(x)$, pseudo-escalar $P(x)$, vetorial $V_\mu(x)$ e axial $A_\mu(x)$.

Tomando a divergência das correntes e utilizando a equação de Dirac, chegamos nas Identidades de Ward,

$$\begin{cases} \partial_\mu V_{ab}^\mu(x) = (m_b - m_a) S_{ab}(x) \\ \partial_\mu A_{ab}^\mu(x) = (m_a + m_b) P_{ab}(x) \end{cases}, \quad (3.4)$$

onde a corrente vetorial só será conservada quando as massas forem iguais e a corrente axial quando as massas forem nulas.

Quando calculamos processos físicos, estas relações de simetria estarão presentes nas amplitudes correspondentes. Manter válidas estas relações de simetria é crucial para a renormalização. Se uma identidade de Ward é violada de modo inevitável teremos uma anomalia e a teoria correspondente somente poderá ser renormalizável mediante a construção de um mecanismo de cancelamento de anomalias (BERTLMANN, 2001). Assim para cada amplitude calculada, carregando um índice de Lorentz axial ou vetorial, teremos uma propriedade de simetria para ser verificada.

3.2 Relações entre funções de Green

Podemos identificar, no cálculo perturbativo, outro conjunto de identidades, ainda mais primordial que as relações de simetria. Nós as denominamos relações entre funções de Green. Elas podem ser estabelecidas para as expressões não integradas das amplitudes perturbativas, sendo necessário apenas a utilização da álgebra das matrizes de Dirac e a linearidade da operação de traço. Estas relações, funcionam como preciosos vínculos de consistência para os cálculos perturbativos.

Quando as estruturas envolvidas são explicitamente calculadas, ou seja, as funções de Green são integradas, estas relações devem continuar sendo válidas de modo automático e universal. Mantê-las significa, num primeiro passo, preservar a linearidade da operação de integração. Posteriormente, a consistência será dada pela exigência adicional de preservação das identidades de Ward.

A fim de explicitar tais relações, consideramos inicialmente a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} & (k_1 - k_2)^\mu \left\{ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \gamma^\mu \gamma^3 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} \right\} \\ &= \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} (\not{k}_1 - \not{k}_2) \gamma^3 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

útil para o caso em que um índice axial estiver envolvido. Agora, utilizando a relação

$$\not{k}_i - \not{k}_j = (\not{k} + \not{k}_i - m_i) - (\not{k} + \not{k}_j - m_j) + m_i - m_j, \quad (3.6)$$

podemos reorganizar o lado direito, convenientemente, de forma a obter:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} (\not{k}_1 - \not{k}_2) \gamma_3 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} \\
 = & \gamma_3 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} + \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \gamma_3 \\
 & + (m_1 + m_2) \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \gamma_3 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Tomando o traço em ambos os lados da equação acima, que é uma operação linear e cíclica, identificamos:

$$q^\mu t_\mu^{SA} = t^P(k_2, m_2) + t^P(k_1, m_1) + (m_1 + m_2) t^{SP}. \tag{3.8}$$

Esta é uma relação entre as funções de Green SA , SP e P . Se implementarmos a regra de Feynman remanescente, esta relação se tornará uma relação entre amplitudes do cálculo perturbativo, tal que

$$q^\mu T_\mu^{SA} = T^P(k_2, m_2) + T^P(k_1, m_1) + (m_1 + m_2) T^{SP}. \tag{3.9}$$

A relação 3.9 pode ser visualizada através dos diagramas apresentados na figura 4.

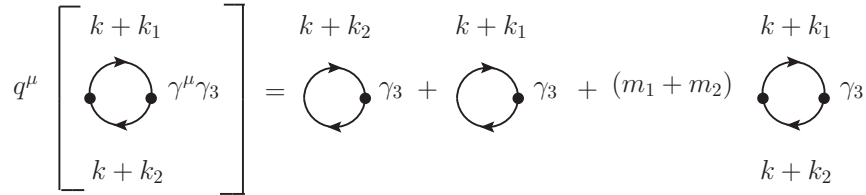


Figura 4 – Relação entre função de Green esperada para a amplitude SA

Seguindo o mesmo procedimento podemos estabelecer outras identidades en-

volvendo amplitudes com vértices axiais. Elas são:

$$q^\mu t_{\mu\nu}^{AV} = t_\nu^A(k_2, m_2) - t_\nu^A(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) t_\nu^{PV} \quad (3.10)$$

$$q^\mu t_{\nu\mu}^{VA} = t_\nu^A(k_2, m_2) - t_\nu^A(k_1, m_1) + (m_1 + m_2) t_\nu^{VP} \quad (3.11)$$

$$q^\mu t_\mu^{AS} = -t^P(k_2, m_2) - t^P(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) t^{PS} \quad (3.12)$$

$$q^\mu t_\mu^{PA} = t^S(k_2, m_2) + t^S(k_1, m_1) + (m_1 + m_2) t^{PP} \quad (3.13)$$

$$q^\mu t_\mu^{AP} = -t^S(k_2, m_2) - t^S(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) t^{SP} \quad (3.14)$$

$$q^\mu t_{\mu\nu}^{AA} = t_\nu^V(k_2, m_2) - t_\nu^V(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) t_\nu^{PA} \quad (3.15)$$

$$q^\nu t_{\mu\nu}^{AA} = t_\mu^V(k_2, m_2) - t_\mu^V(k_1, m_1) + (m_1 + m_2) t_\mu^{AP}. \quad (3.16)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos estabelecer identidades análogas quando um índice de Lorentz for carregado por um operador vetorial. Usando a relação,

$$\begin{aligned} & (k_1 - k_2)^\mu \left\{ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} (k_1 - k_2) \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} \right\} \\ &= \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} - \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \\ & \quad + (m_1 - m_2) \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

estabelecida apenas com a utilização da álgebra das matrizes de Dirac. Quando é tomado o traço em ambos os lados, poderemos identificá-la com a relação

$$q^\mu t_\mu^{SV} = t^S(k_2, m_2) - t^S(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) t^{SS}. \quad (3.18)$$

Após integrarmos esta expressão estabelecemos uma relação entre amplitudes do cálculo perturbativo,

$$q^\mu T_\mu^{SV} = T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T^{SS}, \quad (3.19)$$

que pode ser visualizado nos diagramas de Feynman na figura 5.

Outras relações entre funções de Green envolvendo vértices vetoriais podem ser encontradas. Elas são:

$$q^\mu t_{\nu\mu}^{VV} = t_\nu^V(k_2, m_2) - t_\nu^V(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) t_\nu^{VS} \quad (3.20)$$

$$q^\nu t_{\nu\mu}^{VV} = t_\mu^V(k_2, m_2) - t_\mu^V(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) t_\mu^{SV} \quad (3.21)$$

$$q^\mu t_\mu^{SV} = t^S(k_2, m_2) - t^S(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) t^{SS} \quad (3.22)$$

$$q^\mu t_\mu^{VS} = t^S(k_2, m_2) - t^S(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) t^{SS} \quad (3.23)$$

$$q^\mu t_\mu^{PV} = t^P(k_2, m_2) - t^P(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) t^{PS} \quad (3.24)$$

$$q^\mu t_\mu^{VP} = t^P(k_2, m_2) - t^P(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) t^{SP} \quad (3.25)$$

$$q^\nu t_{\mu\nu}^{AV} = t_\mu^A(k_2, m_2) - t_\mu^A(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) t_\mu^{AS} \quad (3.26)$$

$$q^\nu t_{\nu\mu}^{VA} = t_\mu^A(k_2, m_2) - t_\mu^A(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) t_\mu^{SA}. \quad (3.27)$$

Além destas relações, também temos outras identidades que podem ser estabelecidas, envolvendo as funções de Green com um número par e um número ímpar de matrizes γ_3 , estabelecidas pelas propriedades do tensor de Levi-Civita em $D = 1 + 1$. Entre elas

$$t_\mu^A(k_1, m_1) = 2\varepsilon_{\alpha\mu} [t^V(k_1, m_1)]^\alpha \quad (3.28)$$

$$t_\mu^{AS}(k_1, m_1, k_2, m_2) = \varepsilon_{\alpha\mu} [t^{VS}(k_1, m_1, k_2, m_2)]^\alpha \quad (3.29)$$

$$t_\mu^{PV}(k_1, m_1, k_2, m_2) = \varepsilon_{\alpha\mu} [t^{PA}(k_1, m_1, k_2, m_2)]^\alpha \quad (3.30)$$

que devem igualmente permanecer válidas após a integração ser efetuada em ambos os lados.

Além das propriedades acima consideradas, quando calculamos amplitudes perturbativas outros aspectos gerais devem ser observados para a consistência des-

$$q^\mu \left[\begin{array}{c} k+k_1 \\ \circlearrowleft \quad \gamma^\mu \\ \circlearrowright \\ k+k_2 \end{array} \right] = \begin{array}{c} k+k_2 \\ \circlearrowleft \end{array} - \begin{array}{c} k+k_1 \\ \circlearrowleft \end{array} + (m_1 - m_2) \begin{array}{c} k+k_1 \\ \circlearrowleft \quad \gamma^\mu \\ \circlearrowright \\ k+k_2 \end{array}$$

Figura 5 – Relação entre função de Green esperada para a amplitude SV

tes cálculos. São simetrias fundamentais do espaço-tempo, indispensáveis para que a teoria tenha poder de predição, como homogeneidade, unitariedade e invariância de escala.

A homogeneidade do espaço-tempo se manifesta, na construção das amplitudes perturbativas, na independência destas com a arbitrariedade existente na escolha para os momentos carregados pelas linhas internas aos loops, k_1 e k_2 . Quando as amplitudes são finitas ou logaritmicamente divergentes esta independência é automática. Isto se deve ao fato de uma escolha poder ser levada a outra através de um *shift* no momento de integração. Quando as divergências são de grau linear ou maior, as amplitudes não possuem esta invariância automaticamente pois ao *shift* é necessário uma compensação na forma de termos de superfície. Assim, diferentes escolhas para quantidades arbitrárias, podem levar a diferentes expressões para as amplitudes. Neste cenário não há poder de predição, pois a teoria não determina de modo único suas consequências fenomenológicas.

4 CÁLCULO DAS AMPLITUDES

Após escrevermos as expressões correspondentes às amplitudes físicas ao nível "1-loop" de aproximação 2.3, percebemos que a implementação da última regra de Feynman tornaria as expressões quantidades matematicamente indefinidas. Assim, a fim de completar os cálculos das amplitudes, necessitamos adotar uma prescrição para contornar este problema, separando adequadamente as quantidades potencialmente divergentes para que possamos proceder a integração das partes finitas.

4.1 Cálculo Perturbativo Preditivo (CPP)

A prescrição que adotaremos na presente investigação, é fundamentada em ideias muito simples e permite evitar a introdução de modificações nas amplitudes perturbativas, como é típico em prescrições tradicionais que utilizam-se de técnicas de regularização. Vamos nos referir a este procedimento como Cálculo Perturbativo Preditivo (CPP), uma evolução formal da chamada Regularização Implícita (RI). A estratégia, proposta e desenvolvida por Orimar Antônio Battistel, tem sido aplicada em diferentes contextos na literatura.*

Na formulação que utilizaremos no presente trabalho, a mencionada estratégia elimina completamente o papel da regularização em cálculos perturbativos de $TQC's$. Seu principal aspecto é a adoção de uma representação conveniente para os propagadores das linhas internas, gerando uma sequência de termos com contagem de potências decrescente no momento do loop, de tal modo que quando a integração é tomada, toda a dependência nos momentos internos esteja presente

*Entre inúmeros trabalhos, podemos citar: Violação das simetrias de Lorentz e CPT induzida por correções Radiativas (BATTISTEL; DALLABONA, 2007; BATTISTEL; DALLABONA, 2001; FARIAS et al., 2008; BATTISTEL; DALLABONA, 2006; BATTISTEL; DALLABONA, 2005), O poder de predição do modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL), (GAMBIN et al., 2007) (BATTISTEL; DALLABONA, 2009)(BATTISTEL et al., 2012) (FARIAS et al., 2006; BATTISTEL et al., 2008; BATTISTEL; KLEIN, 2003; BATTISTEL; DALLABONA, 2012), Anomalias em identidades de Ward para funções de três pontos (FONSECA et al., 2013), (BATTISTEL; NEMES, 1999), (BATTISTEL; DALLABONA, 2002), Ambiguidades e relações de simetria em amplitudes divergentes envolvendo densidades fermiônicas tensoriais (DALLABONA; BATTISTEL, 2004), Arbitrariedades, anomalia AV e geração de massa em $D=1+1$ (FONSECA et al., 2013), (BATTISTEL, 2004).

em integrais finitas e nenhum parâmetro físico esteja presente em integrais divergentes.

Esta forma conveniente é proporcionada rescrevendo o propagador fermiônico através da seguinte identidade:

$$\frac{1}{D_i} = \left\{ \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (2k_i \cdot k + k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (2k_i \cdot k + k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} D_i} \right\}, \quad (4.1)$$

onde k_i é o momento (arbitrário) para uma linha interna e λ^2 é um parâmetro (arbitrário) com dimensão de massa. Este parâmetro desempenha um papel de escala comum às partes finitas e divergentes e absorve a arbitrariedade existente na separação da expressão em uma soma de termos correspondentes a diferentes graus de divergência.

Na expressão acima, o valor de N deve ser tomado como o valor do grau superficial de divergência da amplitude perturbativa de maior grau. Isto garante que ao implementarmos a última regra de Feynman, a dependência com os momentos das linhas internas estará sempre em integrais finitas.

O maior grau superficial de divergência residirá nas funções de um ponto e é linear, pois neste caso, temos três potências de k no numerador e duas no denominador, tal que $k^3 k^{-2} = k$. Sendo assim, se fizermos $N = 1$, na expressão 4.1, ficamos com

$$\frac{1}{D_1} = \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} - 2k_1^\alpha \frac{k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_1} \right\}, \quad (4.2)$$

e a representação para o propagador fica na forma

$$S_F = [(\not{k} + \not{k}_1) + m_1] \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} - 2k_1^\alpha \frac{k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_1} \right\}. \quad (4.3)$$

É importante notar que a única propriedade assumida para validar esta operação é a linearidade da operação de integração.

Quando o grau de divergência envolvido for logarítmico, o valor $N = 0$ poderá ser adotado para evitar esforço algébrico desnecessário. Não há restrição sobre valores maiores que o mínimo, pois ao final o resultado poderá sempre ser reduzido àquele correspondente ao menor valor aceitável.

Implementando a última regra de Feynman, as integrais divergentes, assumirão duas formas padronizadas,

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (4.4)$$

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2}. \quad (4.5)$$

E adotaremos, por conveniência, os objetos em termos dos quais as quantidades divergentes serão escritas como sendo combinações adequadas destas formas:

$$I_{\log}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (4.6)$$

e

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)}. \quad (4.7)$$

As razões desta escolha ficarão claras posteriormente.

As integrais finitas obtidas serão resolvidas sem restrições e as divergentes serão mantidas sem qualquer modificação adicional. Estas últimas não necessitarão ser resolvidas em nenhuma situação e apenas propriedades básicas para elas serão estabelecidas. Fica claro neste ponto, que o uso de regularização pode ser completamente evitado. Podemos agora nos ocupar do cálculo das amplitudes.

4.2 Amplitudes Físicas

Com a adoção da estratégia descrita acima podemos completar o cálculo das amplitudes perturbativas consideradas no capítulo anterior. Começaremos pelas mais simples, porém com grau de divergência mais severo; as funções de um ponto.

4.2.1 Funções de Green de um ponto

A expressão obtida para a função escalar (S) :

$$T^S = 2m_1 I_1(k_1^2, m_1^2, \lambda^2), \quad (4.8)$$

onde

$$I_1(k_1^2, m_1^2, \lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{D_1} \right), \quad (4.9)$$

nos revela a possibilidade de divergência logarítmica.

Fazendo $N = 0$ na identidade 4.1, e utilizando métodos usuais de integração, conforme pode ser visto em D, encontramos para 4.9 o resultado dado por D.18. Desta forma

$$T^S(k_1, m_1) = 2m_1 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \left(\frac{i}{4\pi} \right) \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Conforme 2.17, a função pseudo-escalar é identicamente nula.

Por sua vez a função vetorial (V) fica:

$$T_\mu^V = 2 [I_{1\mu}(k_1^2, m_1^2, \lambda^2) + k_{1\mu} I_1(k_1^2, m_1^2, \lambda^2)], \quad (4.11)$$

onde

$$I_{1\mu}(k_1^2, m_1^2, \lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{k_\mu}{D_1} \right) \quad (4.12)$$

nos revela a possibilidade de divergência linear.

Fazendo $N = 1$ na identidade 4.1 e resolvendo as integrais finitas, podemos ver que a solução nos leva a um cancelamento exato destas, restando apenas o termo D.30, onde

$$T_\mu^V(k_1, m_1) = -2k_1^\alpha \Delta_{\alpha\mu}(\lambda^2). \quad (4.13)$$

É interessante notar o caráter completamente arbitrário da expressão, caracterizado pela presença das quantidades k_1 e λ^2 .

Com os mesmos ingredientes utilizados acima, teremos a função de um ponto axial (A);

$$\begin{aligned} T_\mu^A(k_1, m_1) &= -2\varepsilon_{\mu\alpha} [I_1^\alpha(k_1^2, m_1^2, \lambda^2) + k_1^\alpha I_1(k_1^2, m_1^2, \lambda^2)] \\ &= 2\varepsilon_{\mu\alpha} g^{\alpha\lambda} k_1^\beta \Delta_{\beta\lambda}(\lambda^2), \end{aligned} \quad (4.14)$$

que também pode ser escrita como:

$$T_{\mu}^A(k_1, m_1) = \varepsilon_{\alpha\mu} [T^V(k_1, m_1)]^{\alpha}. \quad (4.15)$$

Isto completa o cálculo da amplitudes de um ponto.

4.2.2 Função de Green de dois pontos

Começando pela função escalar-escalar (SS);

$$T^{SS} = - \left[q^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] I_2(q^2, m_1^2, m_2^2) + I_1(k_2^2, m_2^2) + I_1(k_1^2, m_1^2) \quad (4.16)$$

onde para a integral finita adotamos a definição

$$I_2(q^2, m_1^2, m_2^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{D_{12}} \right), \quad (4.17)$$

procedendo as operações necessárias e substituindo D.31 em 4.16, obteremos

$$T^{SS} = - \frac{i}{(4\pi)} \left[q^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \chi_0(q^2, m_1^2, m_2^2) - \frac{i}{(4\pi)} \left[\ln \left(\frac{m_2^2}{\lambda^2} \right) + \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right) \right] + 2I_{\log}(\lambda^2). \quad (4.18)$$

Na expressão acima, definimos as funções

$$\chi_k(m_1^2, m_2^2, q^2, z) \equiv \int_0^1 \frac{dz z^k}{Q(m_1^2, m_2^2, q^2, z)}, \quad (4.19)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots$, onde o polinômio $Q(m_1^2, m_2^2, q^2, z)$ é dado por

$$Q(m_1^2, m_2^2, q^2, z) = q^2 z(1-z) + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2. \quad (4.20)$$

A integração no parâmetro de Feynman pode ser facilmente completada. É, entretanto, conveniente para nossos presentes propósitos, manter a representação integral. A partir de agora omitiremos o argumento das funções χ' s e das integrais de Feynman.

Agora consideramos a função escalar-pseudo-escalar (SP);

$$T^{SP} = -2\varepsilon^{\alpha\beta} (I_{2\alpha\beta} + k_{2\beta}I_{2\alpha} + k_{1\alpha}I_{2\beta} + k_{1\alpha}k_{2\beta}I_2), \quad (4.21)$$

onde introduzimos a integral finita

$$I_{2\alpha} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{k_\alpha}{D_{12}} \right). \quad (4.22)$$

Usando o resultado D.32, é fácil perceber que as propriedades do tensor de Levi-Civita levam a um resultado identicamente nulo para esta expressão. Assim

$$T^{SP} = 0. \quad (4.23)$$

De forma similar, este mesmo resultado pode ser obtido para a amplitude PS .

A função escalar-vetorial (SV), por sua vez, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} T_\mu^{SV} &= 2[(m_1 + m_2) I_{2\mu} + (m_1 k_{2\mu} + m_2 k_{1\mu}) I_2] \\ &= \frac{i}{(4\pi)} 2q_\mu [(m_1 + m_2) \chi_1 - m_1 \chi_0], \end{aligned} \quad (4.24)$$

que é idêntica a amplitude VS .

A função escalar-axial (SA), ficará

$$\begin{aligned} T_\mu^{SA} &= -2\varepsilon_{\mu\nu} [(m_1 + m_2) I_2^\nu + (m_1 k_2^\nu + m_2 k_1^\nu) I_2] \\ &= -\frac{i}{(4\pi)} 2\varepsilon_{\mu\nu} q^\nu [(m_1 + m_2) \chi_1 - m_1 \chi_0], \end{aligned} \quad (4.25)$$

que é idêntica a função AS .

Esta amplitude também pode ser escrita como

$$T_\mu^{AS} = \varepsilon_{\nu\mu} [T^{SV}]^\nu. \quad (4.26)$$

A função pseudo-escalar-pseudo-escalar (PP) ficará:

$$\begin{aligned} T^{PP} &= [q^2 - (m_1 - m_2)^2] I_2 - I_1(k_1^2, m_1^2) - I_1(k_2^2, m_2^2) \\ &= \frac{i}{(4\pi)} [q^2 - (m_1 - m_2)^2] \chi_0 \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)} \left[\ln \left(\frac{m_2^2}{\lambda^2} \right) + \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right) \right] - 2I_{\log}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por sua vez, a função pseudo-escalar-vetorial (PV), assumirá a forma:

$$\begin{aligned} T_\mu^{PV} &= -2\varepsilon_{\alpha\mu} [(m_1 - m_2) I_2^\alpha + (m_1 k_2^\alpha - m_2 k_1^\alpha) I_2] \\ &= \frac{i}{(4\pi)} 2\varepsilon_{\mu\alpha} q^\alpha [(m_1 - m_2) \chi_1 - m_1 \chi_0]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ela se relaciona com a amplitude VP por uma troca de sinal, devido a uma permutação ímpar da matriz γ_3 .

A função pseudo-vetorial-axial (PA), assumirá a forma:

$$\begin{aligned} T_\mu^{PA} &= -2 [(m_1 - m_2) I_{2\mu} + (m_1 k_{2\mu} - m_2 k_{1\mu}) I_2] \\ &= -\frac{i}{(4\pi)} 2q_\mu [(m_1 - m_2) \chi_1 - m_1 \chi_0]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Esta se relaciona com a amplitude AP por uma troca de sinal. Ela ainda poderá ser escrita como

$$T_\mu^{PV} = \varepsilon_{\alpha\mu} [T_\mu^{PA}]^\alpha. \quad (4.30)$$

A função de dois pontos vetorial-vetorial (VV) pode ser obtida primeiramente desenvolvendo a quantidade $T_{\mu\nu}^{(+)}$, que fica:

$$T_{\mu\nu}^{(+)} = 2I_{2\mu\nu} + Q_\nu I_{2\mu} + Q_\mu I_{2\nu} + (k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{1\nu} k_{2\mu}) I_2, \quad (4.31)$$

onde

$$I_{2\alpha\beta} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{k_\alpha k_\beta}{D_{12}} \right), \quad (4.32)$$

é dada por D.34.

Utilizando o resultado encontrado para a amplitude PP 4.27, podemos escrever a amplitude VV como:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= \frac{i}{(4\pi)} 4 [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left[\chi_2 - \frac{\chi_1}{2} \right] - \frac{i}{(4\pi)} 2q_\mu q_\nu \chi_1 \\ &+ \frac{i}{(4\pi)} 2g_{\mu\nu} (m_1^2 - m_2^2) \chi_1 + \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\nu} [q^2 - (m_1 - m_2)^2] \chi_0 \\ &+ 2\Delta_{\mu\nu} (\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\nu} \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Neste mesmo raciocínio, a amplitude axial-axial (AA) ficará:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{AA} &= \frac{i}{(4\pi)} 4 [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] [\chi_2 - \chi_1] \\ &\quad - \frac{i}{(4\pi)} 2g_{\mu\nu} (q^2 - m_1^2 + m_2^2) \chi_1 + \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\nu} [q^2 - (m_1 + m_2)^2] \chi_0 \\ &\quad + 2\Delta_{\mu\nu} (\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\nu} \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

E, finalmente, calculamos a função vetorial-axial (AV). Primeiramente desenvolvemos a quantidade $T_{\mu\nu}^{(-)}$. Inicialmente escrevemos

$$T_{\mu\nu}^{(-)} = q_\mu I_{2\nu} - q_\nu I_{2\mu} + \left(\frac{q_\mu Q_\nu - q_\nu Q_\mu}{2} \right) I_2, \quad (4.35)$$

onde Q é arbitrário, dado pela soma dos momentos internos k_1 e k_2 .

Substituindo os resultados D.34, D.32 e D.31, obtemos um resultado nulo para este tensor,

$$T_{\mu\nu}^{(-)} = 0. \quad (4.36)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{AV} &= -\frac{i}{(4\pi)} 4\varepsilon_\mu^\beta [q_\beta q_\nu - g_{\beta\nu} q^2] [\chi_2 - \chi_1] \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)} 2\varepsilon_{\mu\nu} (q^2 - m_1^2 + m_2^2) \chi_1 - \frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} [q^2 - (m_1 - m_2)^2] \chi_0 \\ &\quad - 2\varepsilon_\mu^\beta \Delta_{\beta\nu} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

que se relaciona com a amplitude anômala VA por uma troca de sinal.

Com isso concluímos a tarefa reservada para este capítulo. Como observação final, notemos que todas as amplitudes foram escritas em termos das funções χ'_k s, onde reside a dependência nos momentos externos. Quanto à parte divergente, ela foi mantida sem modificações e está presente nos objetos $\Delta^{\alpha\xi} (\lambda^2)$ e $I_{\log} (\lambda^2)$. As arbitrariedades intrínsecas, como a escolha para os rótulos das linhas internas do "loop" e da escala comum às partes finitas e divergente foram mantidas. Restamos agora verificar a consistência dos resultados obtidos, verificando primeiro se as relações entre funções de Green foram preservadas pelas operações efetuadas e, posteriormente, se as relações de simetria podem ser satisfeitas.

5 RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN

No capítulo anterior, explicitamos as amplitudes ao nível "1-loop" de aproximação, cuja contagem de potências revelou a possibilidade de divergências: as funções de um e dois pontos puramente fermiônicas. Fizemos isso no contexto de uma estratégia específica para as necessárias manipulações e cálculos envolvendo amplitudes contendo divergências em soluções perturbativas de TQC's.

Com a adoção do CPP foi possível evitar modificações das amplitudes em passos intermediários como é comum no contexto de métodos de regularização, como veremos mais adiante. Nos resultados obtidos estão preservadas todas as arbitrariedades intrínsecas aos referidos cálculos (BATTISTEL, 2004).

Nossa tarefa agora, é verificar se as operações realizadas são consistentes, o que implica em não ter nenhuma simetria implementada na construção da teoria violada. Para tal, verificaremos se as identidades, as quais denominamos relações entre funções de Green, para as expressões não integradas das amplitudes foram preservadas pelas operações feitas até aqui, para as versões integradas. Em outras palavras, significa apenas preservar a propriedade de linearidade da operação de integração, o que no contexto dos métodos usuais para o tratamento de amplitudes divergentes é algo longe de ser trivial.

5.1 Verificação das relações entre funções de Green

Começamos tomando a função SA , dada por 4.25, ao contraírmos com o resultado obtido, teremos:

$$q^\mu T_\mu^{SA} = -\frac{i}{(4\pi)} 2\varepsilon_{\mu\nu} q^\mu q^\nu [(m_1 + m_2) \chi_1 - m_1 \chi_0]. \quad (5.1)$$

O resultado é identicamente nulo devido às propriedades do tensor de Levi-Cevita:

$$\varepsilon_{\mu\nu} q^\nu q^\mu = 0. \quad (5.2)$$

De acordo com a eq. 3.8, esperamos ter a identidade

$$q^\mu T_\mu^{SA} = T^P(k_2, m_2) + T^P(k_1, m_1) + (m_1 + m_2) T^{SP}, \quad (5.3)$$

satisfeita. O zero idêntico obtido para a contração é consistente com a identidade, pois tanto a função P , dada por 2.17, como a função SP , dada por 4.21, foram obtidas identicamente nulas.

A relação é igualmente válida para a contração com a amplitude AS , pois

$$q^\mu T_\mu^{AS} = -T^P(k_2, m_2) - T^P(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) T^{PS}. \quad (5.4)$$

Agora consideremos a expressão obtida para a função SV , dada por 4.24. Se observamos a expressão obtida podemos ver que esta função é finita. A contração desta com o momento externo q^μ é dada por

$$q^\mu T_\mu^{SV} = \frac{i}{(4\pi)} 2q^2 [(m_1 + m_2) \chi_1 - m_1 \chi_0], \quad (5.5)$$

ao passo que no lado direito da relação 5.4 aparecem amplitudes divergentes dadas por 4.10 e 4.16, de modo que estas divergências não se cancelam exatamente. Numa primeira inspeção tenderíamos a concluir pela impossibilidade de satisfazer esta identidade. Entretanto, notemos que na equação 5.5 aparece a função χ_1 , mas na expressão para a função SS , apenas a função χ_0 . Estas funções podem ser relacionadas, como pode ser visto em E, através da identidade

$$2q^2 \chi_1 = (q^2 + m_1^2 - m_2^2) \chi_0 + \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right), \quad (5.6)$$

eliminando a função χ_1 em favor de χ_0 teremos

$$\begin{aligned} q^\mu T_\mu^{SV} &= -\frac{i}{(4\pi)} (m_1 - m_2) \left[q^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \chi_0 \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)} (m_1 + m_2) \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Agora notemos que na expressão para a amplitude S , tomando $k_1 = 0$, podemos identificar

$$I_{\log}(m_1^2) = I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)} \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right). \quad (5.8)$$

A expressão obtida nada mais é do que uma propriedade universal de escala para o objeto logaritmicamente divergente, que pode ser obtida diretamente. Com isso podemos identificar

$$I_{\log}(m_1^2) - I_{\log}(m_2^2) = -\frac{i}{(4\pi)} \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \quad (5.9)$$

Isto permite relacionar o termo finito surgido nas reduções da função χ_1 para a função χ_0 com os objetos divergentes que aparecem nas relações entre as funções de Green SV , SS e S .

Podemos então escrever

$$q^\mu T_\mu^{SV} = -\frac{i}{(4\pi)} (m_1 - m_2) \left[q^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \chi_0 \quad (5.10)$$

$$- (m_1 + m_2) \left[I_{\log}(m_1^2) - I_{\log}(m_2^2) \right],$$

que corresponde precisamente ao resultado desejado pois podemos identificar isto com a relação

$$q^\mu T_\mu^{SV} = T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T^{SS}. \quad (5.11)$$

É importante perceber que este tipo de identidade, ao contrário do que foi feito aqui, é praticamente impossível de ser satisfeita exatamente no contexto de métodos usuais de regularização.

A relação acima é igualmente válida para a contração com a amplitude VS , tal que

$$q^\mu T_\mu^{VS} = T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T^{SS} \quad (5.12)$$

é satisfeita.

Agora consideramos a função AP . A contração com o resultado obtido nos fornece

$$q^\mu T_\mu^{AP} = \frac{i}{(4\pi)} 2q^2 \left[(m_1 - m_2) \chi_1 - m_1 \chi_0 \right]. \quad (5.13)$$

Como no caso da amplitude SV considerada acima, este resultado é finito e no lado direito esperamos quantidades divergentes. Ao reduzirmos a função χ_1 para a função χ_0 encontramos a conexão desejada através da propriedade de escala 5.9 do objeto logaritmicamente divergente $I_{\log}(\lambda^2)$. O resultado disto será a relação

$$q^\mu T_\mu^{AP} = -T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) T^{PP}. \quad (5.14)$$

A relação é igualmente válida para a contração com a amplitude PA , tal que

$$q^\mu T_\mu^{PA} = T^S(k_2, m_2) + T^S(k_1, m_1) + (m_1 + m_2) T^{PP} \quad (5.15)$$

é satisfeita.

A próxima relação refere-se à amplitude PV , dada por 4.28. Contraindo a função PV com o momento externo teremos

$$q^\mu T_\mu^{PV} = \frac{i}{(4\pi)} 2\varepsilon_{\mu\alpha} q^\mu q^\alpha [(m_1 - m_2) \chi_1 - m_1 \chi_0]. \quad (5.16)$$

O resultado é identicamente nulo devido às propriedades do tensor de Levi-Civita. Este resultado é consistente com a identidade

$$q^\mu T_\mu^{PV} = T^P(k_2, m_2) - T^P(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T^{PS}, \quad (5.17)$$

pois tanto a função P , como a função PS foram obtidas identicamente nulas.

A relação é igualmente válida para a contração com a amplitude VP , tal que

$$q^\mu T^{\mu VP} = T^P(k_2, m_2) - T^P(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T^{SP} \quad (5.18)$$

é satisfeita.

A próxima relação envolve a função VV , dada por 4.33. Para esta amplitude estabelecemos:

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\nu^V(k_2, m_2) - T_\nu^V(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T_\nu^{SV}. \quad (5.19)$$

Como esperamos que esta identidade seja mantida após a integração, a expressão obtida para a contração da $T_{\mu\nu}^{VV}$ com o momento externo, por comparação devemos identificar as amplitudes T_ν^V e T_ν^{SV} , o lado direito da identidade acima. Note que isto deve ser válido em qualquer dimensão espaço-temporal e que o lado esquerdo possui um grau de divergência menor do que aquele do lado direito. Esta identidade deve ser mantida ainda na presença de termos potencialmente ambíguos e/ou violadores de simetria.

Tomando o resultado 4.33 para a amplitude VV e contraindo com o momento externo teremos,

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} &= \frac{i}{(4\pi)} 2q_\nu (m_1^2 - m_2^2) \chi_1 - \frac{i}{(4\pi)} 2q^2 q_\nu \chi_1 \\ &+ \frac{i}{(4\pi)} q_\nu [q^2 - (m_1 - m_2)^2] \chi_0 \\ &+ 2q^\mu \Delta_{\mu\nu} (\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)} q_\nu \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

usando 5.6

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = \frac{i}{(4\pi)} q_\nu (m_1^2 - m_2^2) \left(\frac{q^2 + m_1^2 - m_2^2}{q^2} \right) \chi_0 \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{(4\pi)} 2q_\nu m_1 (m_1 - m_2) \chi_0 \\ & + 2q^\mu \Delta_{\mu\nu} (\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)} \frac{q_\nu}{q^2} (m_1^2 - m_2^2) \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Podemos facilmente identificar o último termo com a diferença entre duas amplitudes de um ponto V ,

$$T_\nu^V(k_2, m_2) - T_\nu^V(k_1, m_1) = 2q^\mu \Delta_{\mu\nu} (\lambda^2), \quad (5.23)$$

e os outros termos que aparecem na equação podem ser identificados como a amplitude SV , escrita em termos da função χ_0 . Provando que a identidade 3.21 é mantida após a integração. Esta identidade é igualmente válida quando contraímos com o segundo índice de Lorentz.

Agora consideremos a relação que envolve a contração do momento externo com a amplitude AA , dada por 4.34. Quando contraímos com o primeiro índice, a relação com a amplitude AA é proporcional a diferença entre duas funções de um ponto vetorial V e proporcional a amplitude PA , como estabelecido na equação 3.15,

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} = T_\nu^V(k_2, m_2) - T_\nu^V(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) T_\nu^{PA}. \quad (5.24)$$

Contraindo a expressão 4.34 com o momento externo, teremos:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} &= \frac{i}{(4\pi)} 2q_\nu (m_1^2 - m_2^2) \chi_1 - \frac{i}{(4\pi)} 2q_\nu q^2 \chi_1 \\ &+ \frac{i}{(4\pi)} q_\nu \left[q^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \chi_0 \\ &+ 2q^\mu \Delta_{\mu\nu} (\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)} q_\nu \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Reduzindo em termos da função χ_0 teremos:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} &= \frac{i}{(4\pi)} q_\nu (m_1^2 - m_2^2) \left(\frac{q^2 + m_1^2 - m_2^2}{q^2} \right) \chi_0 \\ &\quad - \frac{i}{(4\pi)} 2q_\nu m_1 (m_1 + m_2) \chi_0 + 2q^\mu \Delta_{\mu\nu} (\lambda^2) \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)} \frac{q_\nu}{q^2} (m_1^2 - m_2^2) \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Como vimos, o último termo é identificado como a diferença de duas funções de um ponto V e os outros termos podem ser identificados com a amplitude PA escrita em termos da função χ_0 , satisfazendo a relação esperada.

A contração com o segundo índice axial, de modo semelhante, mantém a relação entre função de Green preservada.

Até aqui todas as relações entre funções de Green esperadas em 3.2 foram obtidas satisfeitas incondicionalmente. Resta-nos ainda verificar a amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$, dada por 4.37.

Para esta, esperamos que a contração com o vértice vetorial nos forneça

$$q^\nu T_{\mu\nu}^{AV} = T_\mu^A(k_2, m_2) - T_\mu^A(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T_\mu^{AS}. \quad (5.27)$$

Contraindo com a expressão obtida para a amplitude AV , teremos inicialmente

$$\begin{aligned} q^\nu T_{\mu\nu}^{AV} &= \frac{i}{(4\pi)} 2\varepsilon_{\mu\nu} q^\nu (q^2 - m_1^2 + m_2^2) \chi_1 \\ &\quad - \frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} q^\nu \left[q^2 - (m_1 - m_2)^2 \right] \chi_0 \\ &\quad - \varepsilon_{\mu\beta} 2q^\mu \Delta_\mu^\beta (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} q^\nu \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Usando 5.6 podemos escrever

$$\begin{aligned} q^\nu T_{\mu\nu}^{AV} &= -\frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} q^\nu \left(\frac{q^2 + m_1^2 - m_2^2}{q^2} \right) (m_1^2 - m_2^2) \chi_0 \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)} 2\varepsilon_{\mu\nu} q^\nu m_1 (m_1 - m_2) \chi_0 - \varepsilon_{\mu\beta} 2q^\mu \Delta_\mu^\beta (\lambda^2) \\ &\quad - \frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} \frac{q^\nu}{q^2} (m_1^2 - m_2^2) \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde identificamos o último termo com a diferença entre duas amplitude A , e, como pode ser facilmente verificado, os outros termos correspondem aos termos relacionados com a amplitude AS , escrita em termos da função χ_0 .

Da modo semelhante, a relação para a amplitude VA , quando contraída com o índice de Lorentz vetorial, é preservada, tal que

$$q^\nu T_{\nu\mu}^{VA} = T_\mu^A(k_2, m_2) - T_\mu^A(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T^{SA}. \quad (5.30)$$

Faltando apenas a contração com o índice axial, onde esperamos ter a relação

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = T_\nu^A(k_2, m_2) - T_\nu^A(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) T_\nu^{PV} \quad (5.31)$$

satisfeita. Sendo assim, primeiramente estabelecemos a expressão:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{AV} &= \frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} q^\mu \left(\frac{q^2 + m_1^2 - m_2^2}{q^2} \right) (m_1^2 - m_2^2) \chi_0 \\ &\quad - \frac{i}{(4\pi)} 2\varepsilon_{\mu\nu} q^\mu m_1 (m_1 + m_2) \chi_0 - 2\varepsilon_{\nu\beta} q^\mu \Delta_\mu^\beta(\lambda^2) \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} \frac{q^\mu}{q^2} (m_1^2 - m_2^2) \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\mu\nu} q^\mu \Delta_\beta^\beta(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)} 4\varepsilon_{\mu\nu} q^\mu. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Observando o resultado obtido para a função PV , identificamos

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{AV} &= T_\nu^A(k_2, m_2) - T_\nu^A(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) T_\nu^{PV} \\ &\quad - 2\varepsilon_{\mu\nu} q^\mu \left[\Delta_\beta^\beta(\lambda^2) \right] - \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} q^\mu, \end{aligned} \quad (5.33)$$

o que implica que a relação esperada 5.31 somente será satisfeita, se

$$\Delta_\beta^\beta(\lambda^2) = -\frac{i}{2\pi}. \quad (5.34)$$

Neste ponto é importante ressaltar que a violação de uma relação entre a funções de Green implica na violação de um dos princípios matemáticos mais elementares: a linearidade da operação de integração.

Sendo assim, o próximo passo é calcular explicitamente, o valor do objeto $\Delta_\beta^\beta(\lambda^2)$ para enfim podermos verificar se a relação 5.31 foi de fato violada.

Trata-se de uma diferença entre objetos divergentes. Usando o resultado C.47, inicialmente escrevemos

$$\Delta_{\beta}^{\beta}(\lambda^2) = g_{\beta}^{\beta} \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right], \quad (5.35)$$

utilizando a linearidade da operação de integração, podemos facilmente perceber que o resultado é finito, ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta}^{\beta}(\lambda^2) &= g_{\beta}^{\beta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\lambda^2}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\ &= -g_{\beta}^{\beta} \left(\frac{i}{2\pi} \right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Este resultado independe de qualquer prescrição e outro resultado para este objeto implicaria na violação da propriedade de linearidade da operação de integração. Notemos que isto corresponde ao traço do objeto $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)$.

Concluimos então a tarefa de verificar a preservação de todas as relações entre funções de Green estabelecidas no capítulo 3, pelas versões integradas das amplitudes perturbativas, mantendo assim a linearidade da operação de integração preservada. Trata-se de um restritivo teste de consistência para o método utilizado.

6 AMBIGUIDADES E IDENTIDADES DE WARD

No capítulo anterior consideramos as relações entre funções de Green com o intuito de verificar a consistência das operações realizadas. Essencialmente com isso, testamos se as operações envolvendo manipulações de integrais divergentes preservam a linearidade da operação de integração. Se em alguma delas tivéssemos obtido a violação desta propriedade o próximo passo, que é a verificação das relações de simetria, não faria qualquer sentido. Isto porque, como as equações de movimento são equações diferenciais, é crucial para a causalidade a linearidade das operações de diferenciação e integração. Trata-se de um teste necessário mas não suficiente para a consistência dos cálculos perturbativos. A consistência somente será obtida se as amplitudes calculadas puderem obedecer às relações de simetria assim como puderem exibir as propriedades gerais necessárias para a construção do poder de predição como estarem livres de ambiguidades.

Para obtermos a consistência será evidentemente necessário alguma intervenção sobre o caráter divergente das amplitudes diferentemente das relações entre funções de Green onde as amplitudes perturbativas são mantidas intactas. Assim neste capítulo nos questionaremos essencialmente se é possível que as amplitudes satisfaçam às relações de simetria ainda que para isso seja exigido alguma condição sobre as quantidades divergentes presentes. A análise que faremos aqui será crucial para a construção das nossas conclusões.

6.1 Ambiguidades

Antes de considerarmos as identidades de Ward, consideremos um aspecto que, na presente investigação, desempenha um papel secundário, devido à dimensão espaço-temporal adotada. Trata-se da possibilidade de as amplitudes perturbativas dependerem das arbitrariedades existentes na escolha da rotulação para os momentos das linhas internas, que efetivamente ocorre quando as amplitudes possuem grau de divergência superior ao logarítmico (BATTISTEL, 2004).

No presente caso termos destes estão presentes apenas nas amplitudes de um ponto V e A através da dependência com o momento k_1 adotado para a linha

interna, como mostram as expressões:

$$T_\mu^V(k_1, m_1)|_{amb} = -2k_1^\alpha \Delta_{\alpha\mu}(\lambda^2) \quad (6.1)$$

$$T_\mu^A(k_1, m_1)|_{amb} = 2\varepsilon_{\mu\alpha} g^{\alpha\lambda} k_1^\beta \Delta_{\beta\lambda}(\lambda^2). \quad (6.2)$$

Além da ambiguidade associada à escolha do momento da linha interna estas amplitudes são também ambíguas de escala pois o objeto $\Delta_{\alpha\mu}(\lambda^2)$ pode depender de λ^2 que é igualmente arbitrário.

Se nos questionássemos a respeito da possibilidade de eliminar as ambiguidades inerentes aos cálculos perturbativos poderíamos considerar que as ambiguidades fazem de fato parte destes cálculos e exercer o direito de escolhê-las convenientemente, bastando escolher $k_1 = 0$ e o problema teria sido resolvido, mas teríamos que assumir que se tivermos termos que são dependentes das escolhas para as linhas internas, teríamos uma violação na homogeneidade do espaço-tempo, dado que uma translação nos momenta traria consequências físicas.

Entretanto, se observarmos a relação obtida para a amplitude VV , que é emblemática para a consistência das teorias de gauge, em especial a EDQ ,

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\nu^V(k_2, m_2) - T_\nu^V(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T_\nu^{SV}, \quad (6.3)$$

para satisfazermos esta identidade de Ward, que exige que o divergente da corrente vetorial seja proporcional à corrente escalar, devemos ter simultaneamente

$$T_\nu^V(k_2, m_2) = T_\nu^V(k_1, m_1) = 0. \quad (6.4)$$

Nesta situação, não podemos tomar simultaneamente $k_1 = k_2 = 0$. Assim não nos resta outra possibilidade além de impor a propriedade para o objeto divergente

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = 0. \quad (6.5)$$

Este tipo de propriedade é por isso denominada de *relação de consistência (RC)*. Assumindo esta condição teremos

$$T_\mu^V(k_1, m_1) = T_\mu^A(k_1, m_1) = 0, \quad (6.6)$$

independente do valor dos momentos internos arbitrários. Isto significa que os resultados não dependem da escolha, como deve ser. Como consequência teremos

que assumir esta propriedade como universal, ou seja, em todos os lugares onde esta aparece o valor nulo deve ser assumido. Posteriormente nos questionaremos da razoabilidade disto mas, por ora não temos outra solução para evitarmos a presença de ambiguidades nas amplitudes perturbativas. Assim, retirando os termos $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$ teremos para a amplitude VV a expressão:

$$\begin{aligned} \check{T}_{\mu\nu}^{VV} &= \frac{i}{(4\pi)} 4 [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left[\chi_2 - \frac{\chi_1}{2} \right] - \frac{i}{(4\pi)} 2q_\mu q_\nu \chi_1 \\ &+ \frac{i}{(4\pi)} 2g_{\mu\nu} (m_1^2 - m_2^2) \chi_1 + \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\nu} \left[q^2 - (m_1 - m_2)^2 \right] \chi_0 \\ &+ \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\nu} \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

que, como vimos, passa a ter as propriedades

$$q^\mu \check{T}_{\mu\nu}^{VV} = (m_1 - m_2) T_\nu^{VS} \quad (6.8)$$

$$q^\nu \check{T}_{\mu\nu}^{VV} = (m_1 - m_2) T_\mu^{SV}, \quad (6.9)$$

satisfazendo as identidades de Ward correspondentes. Deste modo considerando apenas estas duas amplitudes poderíamos dizer que não haverá chance de consistência se a RC não for satisfeita.

Para a amplitude AA , teremos:

$$\begin{aligned} \check{T}_{\mu\nu}^{AA} &= \frac{i}{(4\pi)} 4 [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] [\chi_2 - \chi_1] \\ &- \frac{i}{(4\pi)} 2g_{\mu\nu} (q^2 - m_1^2 + m_2^2) \chi_1 + \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\nu} \left[q^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \chi_0 \\ &+ \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\nu} \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

que possui as propriedades esperadas

$$q^\nu \check{T}_{\mu\nu}^{AA} = (m_1 + m_2) T_\mu^{AP} \quad (6.11)$$

$$q^\mu \check{T}_{\mu\nu}^{AA} = (m_1 + m_2) T_\nu^{AP}, \quad (6.12)$$

também satisfazendo as identidades de Ward.

Quanto à amplitude AV teremos:

$$\begin{aligned} \check{T}_{\mu\nu}^{AV} &= -\frac{i}{(4\pi)} 4\varepsilon_{\mu}^{\beta} [q_{\beta}q_{\nu} - g_{\beta\nu}q^2] [\chi_2 - \chi_1] \\ &+ \frac{i}{(4\pi)} 2\varepsilon_{\mu\nu} (q^2 - m_1^2 + m_2^2) \chi_1 - \frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} [q^2 - (m_1 - m_2)^2] \chi_0 \\ &- \frac{i}{(4\pi)} \varepsilon_{\mu\nu} \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right), \end{aligned} \quad (6.13)$$

e então

$$q^{\nu} \check{T}_{\mu\nu}^{AV} = (m_1 - m_2) T_{\mu}^{AS} \quad (6.14)$$

$$q^{\mu} \check{T}_{\mu\nu}^{AV} = (m_1 + m_2) T_{\nu}^{VP} \quad (6.15)$$

satisfazendo as identidades de Ward para os índice vetorial e axial.

Notemos que todos estes resultados são consequência da anulação idêntica das funções de um ponto V e A .

Para as demais funções com um índice de Lorentz que não contém a quantidade $\Delta^{\alpha\beta}(\lambda^2)$ mas a quantidade $I_{\log}(\lambda^2)$ a situação não é a mesma. Os resultados obtidos

$$q^{\mu} T_{\mu}^{SV} = T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T^{SS} \quad (6.16)$$

$$q^{\mu} T_{\mu}^{PA} = T^S(k_2, m_2) + T^S(k_1, m_1) + (m_1 + m_2) T^{PP} \quad (6.17)$$

mostram que a presença das funções de um ponto S não se cancelam simultaneamente, e é difícil exigir que o objeto

$$I_{\log}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (6.18)$$

seja nulo. Deste modo a condição necessária e suficiente $\Delta^{\alpha\beta}(\lambda^2) = 0$ para as identidades de Ward envolvendo as amplitudes com dois índices de Lorentz não garante a satisfação das identidades envolvendo um índice vetorial. Seria necessário que $I_{\log}(\lambda^2) = 0$. Embora a primeira exigência, que é uma diferença entre integrais com o mesmo grau de divergência, em princípio possa ser satisfeita parece não ser razoável que a segunda exigência acima o seja.

Antes de prosseguir vamos nos questionar a respeito de como os métodos tradicionais de regularização tratam estes dois objetos.

6.2 Objetos divergentes e Regularizações

Na seção anterior, vimos que os objetos $\Delta^{\alpha\beta}(\lambda^2)$ e $I_{\log}(\lambda^2)$ devem ser nulos para que possamos ter resultados consistentes com a manutenção das identidades de Ward. Nosso objetivo agora é verificar como tratamentos representativos de divergências especificam o valor deste objeto.

6.2.1 Regularização Dimensional (RD)

No contexto da *Regularização Dimensional (RD)*, consideramos que a integral nos momentos,

$$I(2\omega, \alpha, Q) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} \quad (6.19)$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (6.20)$$

também é válida para o caso em que a integral diverge, através da substituição, do lado direito da equação 6.19, da função Gamma de Euler pela sua sua continuação analítica Gamma de Weierstrass, na região onde $\alpha < \omega$. As divergências emergirão como pólos em valores específicos de ω , pois a dimensão do espaço-tempo é assumida como contínua e complexa (ASHMORE, 1973), (BOLLINI; GIAMBIAGI, 1972) e (VELTMAN; HOOFT, 1972).

A relação que estamos interessados aqui, correspondente ao objeto $\Delta_{\mu\nu}$, pode ser obtida pela diferenciação adequada de ambos os lados da Eq. 6.19 em relação ao momento Q , e, depois disto, tomando $Q \rightarrow 0$.

Seguindo este procedimento, nós encontraremos

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-\lambda^2)^{\alpha - \omega}} \quad (6.21)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-\lambda^2)^{\alpha - \omega - 1}}. \quad (6.22)$$

Por comparação, é imediato perceber que

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)}. \quad (6.23)$$

Assim, a RC que emergiu de nossa análise, é automaticamente satisfeita nesta prescrição. É possível dizer, que a consistência da RD reside precisamente neste fato: a anulação de todos os termos de superfície, dado que a relação 6.23 pode ser identificada como

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = (-) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left[\frac{k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)} \right] = 0. \quad (6.24)$$

Notemos entretanto que este resultado é incoerente com aquele que assumimos para a manutenção da relação entre funções de Green envolvendo a função AV , dado por 5.36. Isto porque o resultado identicamente nulo oferecido para o tensor $\Delta_{\mu\nu}$ não é consistente com o valor não nulo para seu traço.

Agora, se utilizamos outro caminho para resolver o objeto $\Delta_{\mu\nu}$ na RD , chegaremos a um resultado diferente daquele acima. Para tal primeiro notamos que a integração simétrica é uma propriedade decorrente da expressão acima para a integral nos momentos

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^2 f(k^2) \quad (6.25)$$

da onde chegamos à seguinte relação:

$$\Delta_{\beta}^{\beta}(\lambda^2) = g_{\beta}^{\beta} \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right] \quad (6.26)$$

que é finita e consistente com o valor obtido para $\Delta_{\beta}^{\beta}(\lambda^2)$.

Assim na RD dois resultados são possíveis para o objeto $\Delta_{\mu\nu}$. Isto será verdade para qualquer objeto que possua a estrutura matemática de um termo de superfície. O resultado nulo entretanto levaria, por coerência, a uma quebra da linearidade na integração pois na amplitude AV teríamos um termo anômalo que quebraria a relação entre funções de Green. Entretanto, se admitirmos que o valor deste objeto é não-nulo estaremos automaticamente violando as identidades de Ward.

Por fim, obviamente que o objeto I_{\log} é não nulo na RD pois

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-\lambda^2)^{\alpha - \omega}} \quad (6.27)$$

será não nulo para $\alpha = 1$. A forma integrada possuirá um pólo em $\omega = 1$.

6.2.2 Regularização Covariante de Pauli-Villars (PV)

Segundo a prescrição de Pauli-Villars (PV), uma integral com um grau arbitrário de divergências, pode ser regularizada ao fazermos (PAULI; VILLARS, 1949)

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} + \lim_{\Lambda_i \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{(k^2 - \Lambda_i^2)}, \quad (6.28)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \lim_{\Lambda_i \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \frac{c_i}{(k^2 - \Lambda_i^2)}, \quad (6.29)$$

onde $c_1 = 1$ e $\Lambda_0^2 = \lambda^2$.

A escolha dos parâmetros c_i 's e Λ_i 's deve ser feita de modo a construir uma superposição, que conduza a resultados desejáveis. Um grau arbitrário de divergências nos leva a

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \frac{(\lambda^2 - \Lambda_1^2)(\lambda^2 - \Lambda_2^2) \dots (\lambda^2 - \Lambda_N^2)}{(\lambda^2 - \Lambda_1^2)(\lambda^2 - \Lambda_2^2) \dots (\lambda^2 - \Lambda_N^2)} \quad (6.30)$$

se todos os parâmetros Λ_i 's tiverem a mesma magnitude, podemos escrever

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^N. \quad (6.31)$$

Assim a regularização de Pauli-Villars pode ser vista como uma modificação no integrando da forma

$$\int_{\Lambda} \frac{d^{2\varpi} k}{(2\pi)^{2\varpi}} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} \rightarrow \int_{\Lambda} \frac{d^{2\varpi} k}{(2\pi)^{2\varpi}} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} \left[\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(k^2, \Lambda_i^2) \right], \quad (6.32)$$

onde

$$G(k^2, \Lambda_i^2) = \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda_i^2}{k^2 - \Lambda_i^2} \right)^N, \quad (6.33)$$

e,

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(k^2, \Lambda_i^2) = 1 \quad (6.34)$$

é o chamado limite de conexão.

Como o objeto $\Delta_{\mu\nu}$, é logaritmicamente divergente, usamos $N = 1$;

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) &\rightarrow \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \sum_{i=0} c_i \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} - g_{\mu\nu} \right] \frac{1}{k^2 - \Lambda_i^2} \quad (6.35) \\ &= \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} - g_{\mu\nu} \right] \frac{k^2 (c_0 + c_1)}{(k^2 - \Lambda_0^2) (k^2 - \Lambda_1^2)} \\ &\quad - \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} - g_{\mu\nu} \right] \frac{(c_0 \Lambda_1^2 + c_1 \Lambda_0^2)}{(k^2 - \Lambda_0^2) (k^2 - \Lambda_1^2)}. \end{aligned}$$

Usando a condição $\sum_{i=0}^N c_i = 0$, teremos

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \right] \frac{(\lambda^2 - \Lambda^2)}{(k^2 - \Lambda^2)} \quad (6.36)$$

onde podemos identificar claramente a função regularizadora

$$G(k^2, \Lambda_i^2) = \frac{(\lambda^2 - \Lambda^2)}{(k^2 - \Lambda^2)}. \quad (6.37)$$

A integral acima pode ser facilmente resolvida utilizando as técnicas descritas em B e C, tal que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) &= -\frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\nu} \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \Lambda^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ &= -\frac{i}{4\pi} g_{\mu\nu} \quad (6.38) \end{aligned}$$

mostrando o caráter não-nulo deste objeto.

Seguindo os mesmos procedimentos, podemos mostrar através da regularização de Pauli-Villars que o traço deste mesmo objeto é dado por

$$\Delta_{\beta}^{\beta}(\lambda^2) = -g_{\beta}^{\beta} \left(\frac{i}{2\pi} \right). \quad (6.39)$$

Portanto o resultado é não nulo para ambos; o tensor $\Delta_{\mu\nu}$ e seu traço Δ_{β}^{β} .

Quanto ao objeto I_{\log} este é não nulo na regularização PV pois

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \frac{(\lambda^2 - \Lambda^2)}{(k^2 - \Lambda^2)} \quad (6.40)$$

será não nulo. A forma integrada possuirá um $\ln\left(\frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right)$. Com os resultados obtidos é fácil perceber que não será possível obter resultados consistentes para as amplitudes perturbativas. Para satisfazermos as identidades de Ward deveríamos obter $\Delta_{\mu\nu} = I_{\log} = 0$ mas, mesmo que isto fosse possível, isto levaria a violação de linearidade na amplitude AV com a presença de um termo anômalo.

7 LIMITES DE BAIXA ENERGIA

Nos capítulos precedentes analisamos as relações entre funções de Green e as relações de simetria para as amplitudes consideradas na presente investigação. Neste vamos acrescentar um outro aspecto que costuma fazer parte das análises envolvendo as soluções perturbativas de TQC, em especial aquelas conectadas com o problema das anomalias (BERTLMANN, 2001). Trata-se dos teoremas ou limites de baixa energia. A fundamentação é bastante simples. Para cada amplitude, de acordo com suas características tensoriais, é possível escrever uma forma geral e obter propriedades igualmente gerais para a contração dos índices tensoriais com os momentos externos. Faremos isto, desenvolveremos as expressões gerais para cada amplitude e estabeleceremos expectativas para um limite cinemático. Esperamos acrescentar novos elementos na análise que estamos fazendo a cerca da possibilidade de consistência no cálculo perturbativo.

7.1 Amplitude VV

Sabemos que esta amplitude, pela sua definição em termos das regras de Feynman, é um tensor simétrico de dois índices, sendo que podemos construir seu caráter tensorial, a partir do momento externo q e do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Isto nos leva a uma forma geral dada por

$$T_{\mu\nu}^{VV} = g_{\mu\nu} [F_1(q^2)] + q_\mu q_\nu [F_2(q^2)], \quad (7.1)$$

onde $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ são duas funções escalares arbitrárias.

As contrações com os momentos externos deste tensor geram outras amplitudes de acordo com as identidades de Ward. Assim contraindo uma vez, teremos

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} &= q^\mu g_{\mu\nu} [F_1(q^2)] + q^\mu q_\mu q_\nu [F_2(q^2)] \\ &= q_\nu [F_1(q^2) + q^2 F_2(q^2)], \end{aligned} \quad (7.2)$$

Mas isto deve estar relacionado com a amplitude SV pela identidade de Ward

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = (m_1 - m_2) T_\nu^{SV}, \quad (7.3)$$

que é um tensor de um índice cujo caráter tensorial deve ser construído a partir do momento externo q , o que nos leva a uma forma geral dada por

$$T_{\nu}^{SV} = q_{\nu} F_3 (q^2), \quad (7.4)$$

onde $F_3 (q^2)$ é uma função escalar arbitrária. Assim esperamos que

$$[F_1 (q^2) + q^2 F_2 (q^2)] = (m_1 - m_2) F_3 (q^2). \quad (7.5)$$

De modo semelhante, a contração de SV com o momento externo deve estabelecer uma relação com a amplitude SS de acordo com a identidade de Ward

$$q^{\nu} T_{\nu}^{SV} = (m_1 - m_2) T^{SS}. \quad (7.6)$$

A amplitude SS por sua vez é um escalar e deve ter a forma geral

$$T^{SS} = F_4 (q^2), \quad (7.7)$$

onde $F_4 (q^2)$ é uma função escalar arbitrária. Com isso as relações

$$q^{\nu} [q^{\mu} T_{\mu\nu}^{VV}] = q_{\nu} [(m_1 - m_2) T_{\nu}^{SV}] = (m_1 - m_2)^2 T^{SS}. \quad (7.8)$$

implicam em

$$q^2 [F_1 (q^2) + q^2 F_2 (q^2)] = (m_1 - m_2) q^2 F_3 (q^2) \quad (7.9)$$

$$= (m_1 - m_2)^2 F_4 (q^2). \quad (7.10)$$

Isto quer dizer que no ponto cinemático $q^2 = 0$ esperamos que as funções arbitrária satisfaçam:

$$q^2 [F_1 (q^2) + q^2 F_2 (q^2)]_{q^2=0} = 0 \quad (7.11)$$

$$q^2 F_3 (q^2)|_{q^2=0} = 0 \quad (7.12)$$

$$F_4 (q^2)|_{q^2=0} = 0. \quad (7.13)$$

O aspecto importante disto é que, inequivocamente, isto estabelece que a amplitude SS deve se anular em $q^2 = 0$. Como já calculamos esta amplitude, podemos verificar se esta propriedade é satisfeita.

Verificando a expressão 4.18 e usando a relação 5.8, temos

$$T^{SS} = -\frac{i}{(4\pi)} \left[q^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \chi_0 + I_{\log}(m_2^2) + I_{\log}(m_1^2). \quad (7.14)$$

Fazendo $q^2 = 0$, obtemos para a função $\chi_0(q^2, m_1^2, m_2^2)$

$$\chi_0|_{q^2=0} = \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)} \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right), \quad (7.15)$$

mostrando que a amplitude T^{SS} não se anula em $q^2 = 0$, tal que

$$T^{SS}|_{q^2=0} = \frac{i}{(4\pi)} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \right) \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) + I_{\log}(m_2^2) + I_{\log}(m_1^2). \quad (7.16)$$

Portanto, podemos concluir sem nenhuma dúvida que o limite de baixa energia,

$$T^{SS}|_{q^2=0} \neq 0, \quad (7.17)$$

não pode ser simultaneamente satisfeito com a relação estabelecida para o divergente da corrente vetorial com a corrente escalar nem mesmo que o objeto divergente I_{\log} pudesse ser assumido identicamente nulo.

7.2 Amplitude AA

Assim como o tensor de polarização no vácuo, a expressão para a amplitude AA , dada por 6.10, é um tensor simétrico de dois índices, sendo assim sua forma geral, é dada por

$$T_{\mu\nu}^{AA} = g_{\mu\nu} [G_1(q^2)] + q_\mu q_\nu [G_2(q^2)], \quad (7.18)$$

onde $G_1(q^2)$ e $G_2(q^2)$ são funções escalares arbitrárias. A contração com o momento externo q^μ , resulta em

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} &= q^\mu g_{\mu\nu} [G_1(q^2)] + q^\mu q_\mu q_\nu [G_2(q^2)] \\ &= q_\nu [G_1(q^2) + q^2 G_2(q^2)]. \end{aligned} \quad (7.19)$$

O divergente da corrente axial, por outro lado, estabelece uma conexão com a corrente pseudo-escalar dada pela identidade de Ward

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} = (m_1 + m_2) T_\nu^{PA}. \quad (7.20)$$

A amplitude AP é um tensor de um índice, sendo então sua forma geral é dada por

$$T_{\nu}^{PA} = q_{\nu} G_3 (q^2), \quad (7.21)$$

onde $G_3 (q^2)$ é uma função escalar arbitrária. Desta forma estabelecemos uma relação entre as funções arbitrárias

$$[G_1 (q^2) + q^2 G (q^2)] = (m_1 + m_2) q^2 G_3 (q^2). \quad (7.22)$$

Por sua vez a contração com o momento externo na amplitude PA estabelece uma relação com a amplitude PP de acordo com a identidade de Ward

$$q^{\nu} T_{\nu}^{PA} = (m_1 + m_2) T^{PP}. \quad (7.23)$$

A amplitude PP sendo um escalar terá a forma geral

$$T^{PP} = G_4 (q^2). \quad (7.24)$$

Assim, em consequência das relações

$$q^{\nu} [q^{\mu} T_{\mu\nu}^{AA}] = q^{\nu} [(m_1 + m_2) T_{\nu}^{PA}] = (m_1 + m_2)^2 T^{PP} \quad (7.25)$$

estabelecemos

$$q^2 [G_1 (q^2) + q^2 G (q^2)] = (m_1 + m_2) q^2 G_3 (q^2) \quad (7.26)$$

$$= (m_1 + m_2)^2 G_4 (q^2). \quad (7.27)$$

Deste modo no ponto cinemático $q^2 = 0$ esperamos que:

$$q^2 [G_1 (q^2) + q^2 G (q^2)]|_{q^2=0} = 0 \quad (7.28)$$

$$q^2 G_3 (q^2)|_{q^2=0} = 0 \quad (7.29)$$

$$G_4 (q^2)|_{q^2=0} = 0. \quad (7.30)$$

Um aspecto importante e imediato destes resultados é que isto estabelece inequivocamente que a amplitude T^{PP} , deve se anular em $q^2 = 0$. Nós então podemos verificar se o resultado obtido satisfaz esta propriedade.

Na expressão 4.27 e usando 5.8, teremos a seguinte expressão:

$$T^{PP} = \frac{i}{(4\pi)} [q^2 - (m_1 - m_2)^2] \chi_0 - I_{\log} (m_2^2) - I_{\log} (m_1^2), \quad (7.31)$$

usando 7.15, em $q^2 = 0$

$$T^{PP}|_{q^2=0} = -\frac{i}{(4\pi)} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) - I_{\log}(m_2^2) - I_{\log}(m_1^2). \quad (7.32)$$

Isto quer dizer que nem mesmo se o objeto I_{\log} pudesse ter o valor identicamente nulo, satisfazendo portanto a identidade de Ward, o limite de baixa energia seria conservado.

7.3 Amplitude AV

A amplitude AV 6.13 é um tensor antissimétrico de ordem dois e deve ser construído a partir de um vetor q , do tensor de antissimétrico de Levi-Cevita $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$.

A forma mais geral para este tensor é portanto:

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\mu\nu} H_1(q^2) + \varepsilon_{\mu\alpha} q^\alpha q_\nu H_2(q^2) + \varepsilon_{\nu\alpha} q^\alpha q_\mu H_3(q^2), \quad (7.33)$$

onde $H_1(q^2)$, $H_2(q^2)$ e $H_3(q^2)$ são funções escalares arbitrárias.

A contração com o índice axial nos fornece

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{AV} &= \varepsilon_{\mu\nu} q^\mu H_1(q^2) + \varepsilon_{\mu\alpha} q^\alpha q^\mu q_\nu H_2(q^2) + \varepsilon_{\nu\alpha} q^\alpha q^2 H_3(q^2) \\ &= \varepsilon_{\nu\alpha} q^\alpha [q^2 H_3(q^2) - H_1(q^2)]. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Esta contração deve estar relacionada com a amplitude PV de acordo com a identidade de Ward

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = (m_1 + m_2) T_\nu^{VP}. \quad (7.35)$$

A amplitude PV , por sua vez, é um tensor ímpar de um índice sendo então sua forma geral dada por

$$T_\nu^{VP} = \varepsilon_{\nu\alpha} q^\alpha H_4(q^2). \quad (7.36)$$

Com isso temos a relação

$$[q^2 H_3(q^2) - H_1(q^2)] = (m_1 + m_2) H_4(q^2). \quad (7.37)$$

Deste modo esperamos que no limite cinemático $q^2 = 0$

$$q^2 H_3(q^2)|_{q^2=0} = 0 \quad (7.38)$$

$$[H_1(q^2) + (m_1 + m_2) H_4(q^2)]|_{q^2=0} = 0. \quad (7.39)$$

As amplitudes PV e AV foram calculadas e é possível verificar se esta relação é satisfeita.

Inspeccionando as expressões obtidas verificamos que obtivemos os resultados para as quantidades acima. Primeiramente consideramos

$$q^2 H_3(q^2) = \frac{i}{(4\pi)} (m_1 + m_2)^2 \chi_0. \quad (7.40)$$

Fazendo $q = 0$, temos

$$q^2 H_3(q^2)|_{q^2=0} = \frac{i}{(4\pi)} \ln\left(\frac{m_2^2}{m_1^2}\right) \left[\frac{2m_1}{(m_1 - m_2)} - 1 \right], \quad (7.41)$$

o que mostra que o limite de baixa energia não é satisfeito.

Tomando agora as quantidades $H_1(q^2)$ e $H_4(q^2)$, dadas por:

$$H_1(q^2) = \frac{i}{(4\pi)} \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{q^2} \right) \left[\ln\left(\frac{m_1^2}{m_2^2}\right) + (m_1^2 - m_2^2) \chi_0 \right] \quad (7.42)$$

e

$$\begin{aligned} H_4(q^2) &= -\frac{i}{(4\pi)} \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{q^2} \right) \left[\ln\left(\frac{m_1^2}{m_2^2}\right) + (m_1^2 - m_2^2) \chi_0 \right] \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)} (m_1 + m_2)^2 \chi_0 \end{aligned} \quad (7.43)$$

podemos verificar se a relação prevista é satisfeita. Mas já estabelecemos a violação através da função $H_3(q^2)$.

A contração com o índice vetorial na amplitude AV

$$\begin{aligned} q^\nu T_{\mu\nu}^{AV} &= \varepsilon_{\mu\nu} q^\nu H_1(q^2) + \varepsilon_{\mu\alpha} q^\alpha q^\nu q_\nu H_2(q^2) + \varepsilon_{\nu\alpha} q^\alpha q^\nu q_\mu H_3(q^2) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu} q^\nu [H_1(q^2) + q^2 H_2(q^2)], \end{aligned} \quad (7.44)$$

deve estar relacionada com a amplitude AS , de acordo com a identidade de Ward

$$q^\nu T_{\mu\nu}^{AV} = (m_1 - m_2) T_\mu^{AS}. \quad (7.45)$$

A amplitude AS por sua vez possui a forma geral

$$T_\mu^{AS} = \varepsilon_{\mu\alpha} q^\alpha H_5(q^2). \quad (7.46)$$

Com isso temos a relação

$$[H_1(q^2) + q^2 H_2(q^2)] = (m_1 - m_2) H_5(q^2). \quad (7.47)$$

Assim esperamos ter no ponto cinemático $q^2 = 0$:

$$q^2 H_2(q^2)|_{q^2=0} = 0 \quad (7.48)$$

$$[(m_1 - m_2) H_5(q^2) - H_1(q^2)]|_{q^2=0} = 0. \quad (7.49)$$

Nos resultados que obtivemos é fácil identificar

$$q^2 H_2(q^2) = \frac{i}{(4\pi)} (m_1 - m_2)^2 \chi_0, \quad (7.50)$$

e verificar que:

$$q^2 H_2(q^2)|_{q^2=0} = \frac{i}{(4\pi)} \ln\left(\frac{m_2^2}{m_1^2}\right) \left[\frac{2m_1}{(m_1 - m_2)} - 1\right], \quad (7.51)$$

o que implica na violação do limite de baixa energia.

As quantidades envolvidas $H_1(q^2)$ e $H_5(q^2)$ são identificadas como

$$H_1(q^2) = -\frac{i}{(4\pi)} \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{q^2}\right) \left[\ln\left(\frac{m_1^2}{m_2^2}\right) + (m_1^2 - m_2^2) \chi_0\right] \quad (7.52)$$

e

$$H_5(q^2) = -\frac{i}{(4\pi)} \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{q^2}\right) \left[\ln\left(\frac{m_1^2}{m_2^2}\right) + (m_1^2 - m_2^2) \chi_0\right] + \frac{i}{(4\pi)} (m_1 - m_2)^2 \chi_0 \quad (7.53)$$

Poderíamos verificar a validade do outro limite de baixa energia envolvido. Porém, já estabelecemos a violação de modo inequívoco através da função $H_3(q^2)$.

Assim, mesmo na condição de as identidades de Ward serem satisfeitas temos todos os limites de baixa energia envolvidos violados.

8 CONCLUSÕES

No presente trabalho consideramos um modelo bastante geral onde diferentes espécies de férmions de spin $\frac{1}{2}$ acoplam-se com bósons de spin 0 e bósons de spin 1, de modo que a estrutura topológica é similar a do Modelo Padrão. O modelo, formulado em dimensão espaço-temporal $D = 1 + 1$, possui todos os ingredientes do cálculo perturbativo no que diz respeito ao tratamento das divergências. As condições entretanto, são consideravelmente mais favoráveis pois as amplitudes divergentes, em ordem "1-loop" de aproximação, são em menor quantidade e possuem graus de divergência menos severos que em dimensões maiores. Este cenário é adequado para o desenvolvimento da investigação proposta no presente trabalho pois permite conclusões claras e transparentes, relativamente aos aspectos relevantes, em uma arena simples.

As amplitudes pertinentes ao modelo, ao nível "1-loop", foram todas explicitadas no contexto do método que denominamos *CPP*, que é uma evolução formal daquele denominado *Regularização Implícita (RI)*. A evolução se deve ao fato de que, na nova formulação, o papel da regularização ter sido completamente eliminado. O ponto principal é uma reinterpretação da sequência de operações adotada na implementação das regras de Feynman. Todas as operações são implementadas, como usualmente, com exceção da última delas a qual prevê a soma sobre todos os momentos não restritos pelas relações de conservação de energia e momentum em contribuições envolvendo "loops". Isto implica na necessidade de integrar a expressão obtida nas operações anteriores, e é isto que estabelece as indefinições matemáticas ou as divergências associadas.

Para dar um passo seguinte, neste caso, torna-se necessário regularizar as amplitudes e isto implica em modificá-las para a realização de alguns passos intermediários o que inclui a integração de objetos originalmente divergentes. A tomada do limite, que removeria a modificação efetuada, sabidamente não comuta com as operações realizadas e isto torna os resultados finais dependentes dos passos intermediários e da regularização utilizada. Neste cenário não é possível afirmar, com segurança, quando um aspecto surpreendente emerge em uma investigação, se trata-se de um efeito físico genuíno ou se é apenas um efeito da regularização e das

ambiguidades intrínsecas aos cálculos. Procedendo de acordo com o método CPP isto é evitado. Primeiro porque a implementação da última regra de Feynman apenas é feita após ser adotada uma representação conveniente para os propagadores das linhas internas ao "loop".

A conveniência vem do fato de a referida representação assumir a forma de uma expansão em potências decrescentes no momento do "loop". Isto não elimina as divergências mas permite separar a parte que contém as quantidades físicas relevantes em termos potencialmente finitos, ou seja, que podem ser integrados sem restrições ou modificações. Além disto, nos permite colocar as partes divergentes em objetos padronizados onde apenas uma escala arbitrária está presente, estando pois estas livres de quantidades físicas. Estes objetos divergentes não necessitam ser calculados de fato para nenhum propósito. Apenas propriedades gerais necessitam ser estabelecidas. Quando a renormalização é feita, por exemplo, estes objetos são absorvidos sem a necessidade da integração ser completada.

Na presente investigação, a utilização do método CPP permitiu estabelecer de modo inequívoco alguns aspectos importantes que usualmente são mascarados pela presença de regularizações. O primeiro aspecto que registramos na presente investigação é a associação do termo anômalo na amplitude AV , que usualmente é admitido de modo natural, com a violação de uma relação entre funções de Green, ou seja, com a violação da linearidade na integração. Quando contraímos a amplitude AV com o momento externo no vértice axial obtivemos

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = T_\nu^A(k_2, m_2) - T_\nu^A(k_1, m_1) - (m_1 + m_2) T_\nu^{PV} - 2\varepsilon_{\mu\nu} q^\mu \left[\Delta_\beta^\beta(\lambda^2) \right] - \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} q^\mu. \quad (8.1)$$

O objeto $\Delta_\beta^\beta(\lambda^2)$ que é a diferença de integrais logaritmicamente divergentes é restringido ao valor

$$\Delta_\beta^\beta(\lambda^2) = -g_\beta^\beta \left(\frac{i}{2\pi} \right). \quad (8.2)$$

para não comprometer a relação entre funções de Green. Verificamos que este valor não nulo é inequívoco e consequência apenas da validade da linearidade na integração. Assim o termo anômalo existirá nesta contração apenas se o objeto

acima for assumido como identicamente nulo. Mas o valor nulo seria claramente inconsistente.

Prosseguindo verificamos as identidades de Ward. Para as identidades envolvendo a contração de momentos externos com as amplitudes contendo dois índices de Lorenz, AA e VV , concluímos que elas somente podem ser satisfeitas se o objeto

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} \right\},\end{aligned}\quad (8.3)$$

for identicamente nulo. Esta é a única possibilidade também de eliminarmos as ambiguidades nas amplitudes A e V , tornando-as identicamente nulas. Este resultado garante as identidades de Ward correspondentes à primeira contração das amplitudes AA e VV com o momento externo e pode ser estabelecido no contexto da RD e é usualmente utilizado, como mostramos explicitamente. Apesar de atraente este valor é inconsistente com o valor não nulo necessário para a satisfação da relação entre funções de Green da amplitude AV como comentamos acima. Claramente um tensor não pode ser identicamente nulo e seu traço ser não nulo. O valor nulo para ambos leva à presença de um termo violador da identidade de Ward axial na amplitude AV identificado com o termo anômalo usual.

No que se seguiu em nossa investigação, notamos que as identidades de Ward correspondentes à segunda contração destas amplitudes, ou seja, relativas às amplitudes PA e SV , necessitam de outra condição além daquela mencionada acima. Isto porque a satisfação da relação de simetria exige que as amplitudes de um ponto S se anulem, como mostra a relação entre funções de Green abaixo

$$q^\mu T_\mu^{PA} = T^S(k_2, m_2) + T^S(k_1, m_1) + (m_1 + m_2) T^{PP} \quad (8.4)$$

$$q^\mu T_\mu^{SV} = T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1) + (m_1 - m_2) T^{SS}. \quad (8.5)$$

Mas isto somente seria possível se o objeto divergente I_{\log} fosse identicamente nulo. Isto não pode ser obtido em nenhum contexto de regularização. As identidades assim não podem ser satisfeitas.

Em seguida, para completarmos nossa análise consideramos os limites de baixa energia, que podem ser estabelecidos de modo muito geral para quaisquer amplitudes do cálculo perturbativo. Tomando as características tensoriais e admitindo que as identidades de Ward podem ser satisfeitas, verificamos que os limites de baixa energia estabelecidos para as funções SS e PP são claramente violados. Da mesma forma os limites estabelecidos a partir das relações entre a amplitude AV e as amplitudes PV e AS são também violados de modo inevitável.

Isto tudo implica que a consistência desejada nos cálculos perturbativos é claramente impossível de ser obtido a partir da interpretação das amplitudes como quantidades a serem regularizadas devido à presença de divergências. O método que utilizamos permite não comprometer a investigação com a presença de regularizações e assim possibilita estas conclusões claras e transparentes.

A principal conclusão é que não é possível estabelecer uma situação de exceção para a amplitude AV e classificá-la como anômala quando a mesmo procedimento é aplicado a todas as amplitudes. Os limites de baixa energia são todos violados mesmo se as identidades de Ward forem assumidas válidas. Mas as violações de identidades de Ward de modo inevitável acontece também nas amplitudes AP e SV .

Assim parece inevitável concluir que devemos buscar uma nova interpretação para as amplitudes perturbativas que possa fornecer a consistência desejada. Amplitudes definidas através de um critério único e universal, que satisfaçam as relações de simetria, estejam automaticamente livres de ambiguidades, estando relativas às arbitrariedades associadas à rotulação dos momentos das linhas internas (homogeneidade do espaço-tempo), como aquelas relacionadas à independência com a escala arbitrária. Além disso, devem satisfazer aos teoremas de baixa energia de modo automático e apresentar consistência com as determinações da unitariedade. Evidentemente que esta nova interpretação não pode destruir os bons resultados construídos com as teorias renormalizáveis, em particular a EDQ . Nesta prescrição não pode haver escolhas de ambiguidades e não pode haver amplitudes que se caracterizem como excessões inevitáveis em um esquema geral. Quando obtemos isto não temos leis nem mesmo princípios mas apenas regras. E regras não podem ser aceitas como a forma final de conhecimento em ciências exatas.

REFERÊNCIAS

ABDALLA, E.; ABDALLA, M. C. B.; ROTHE, K. D. **Non-Perturbative Methods in Two-Dimensional Quantum Field Theory**. Singapore: World Scientific, 1991. 748 p.

ASHMORE, J. F. Renormalization and complex space-time dimensions. **Nuovo Cimento Letters** **4**, New York, v. 29, n. 3, p. 177–187, July 1973.

BATTISTEL, O. A. **Uma nova estratégia para manipulações e cálculos envolvendo divergências em TCQ**. 491 p. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1999.

BATTISTEL, O. A. From arbitrariness to anomalies in two-dimensional perturbative calculations. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, Bristol, v. 30, n. 5, p. 543–564, Feb. 2004.

BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. Ambiguities versus gauge invariance in the calculation of the radiatively induced Chern-Simons shift in extended QED. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, Bristol, v. 27, n. 7, p. L53–L60, July 2001.

BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. Anomalies dismissed of ambiguities and the neutral pion decay. **Journal Physics G: Nuclear and Particle Physics**, Bristol, v. 28, n. 10, p. 2539–2557, Aug. 2002.

BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. Scale ambiguities in perturbative calculations and the value for the radiatively induced Chern-Simons term in extended QED. **Physics Review D**, New York, v. 72, n. 4, p. 45009–45024, Aug. 2005.

BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. A systematization for one-loop 4D Feynman integrals. **The European Physical Journal C**, Les Ulis, v. 45, n. 3, p. 721–743, Mar. 2006.

BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. Mesonic correlation functions at finite temperature in the NJL model. **Nuclear Physics A**, New York, v. 790, p. 332c–335c, Jan. 2007.

BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. From scale properties of physical amplitudes to a predictive formulation of the Nambu–Jona-Lasinio model. **Physical Review D**, New York, v. 80, n. 8, p. 85028–85042, Oct. 2009.

- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. A systematization for one-loop 4D Feynman integrals-different species of massive fields. **Journal of Modern Physics**, Singapore, v. 3, n. 10, p. 1408–1449, Oct. 2012.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G.; KLEIN, G. Predictive formulation of the Nambu–Jona-Lasinio model. **Physics Review D**, New York, v. 77, n. 6, p. 65025–65044, Mar. 2008.
- BATTISTEL, O. A.; FONSECA, M. V.; DALLABONA, G. Anomalies in finite amplitudes: two-dimensional single axial-vector triangle. **Physical Review D**, New York, v. 85, n. 8, p. 85007–85027, Apr. 2012.
- BATTISTEL, O. A.; KLEIN, G. Quark clustering and chiral symmetry breaking in nuclear matter. **Modern Physical Letters A**, Singapore, v. 18, n. 32, p. 2255–2264, Apr. 2003.
- BATTISTEL, O. A.; NEMES, M. C. Consistency in regularizations of the gauged NJL model at one loop level. **Physical Review D**, New York, v. 59, n. 5, p. 55010–55031, 1999.
- BERTLMANN, R. **Anomalies in quantum field theory**. Oxford: Oxford University, 2001. 560 p.
- BOLLINI, C. G.; GIAMBIAGI, J. J. Lowest order "divergent" graphs in V-dimensional space. **Physical Letters B**, New York, v. 40, n. 5, p. 566–568, Aug. 1972.
- DALLABONA, G.; BATTISTEL, O. A. Ambiguities and symmetry relations associated with fermionic tensor densities. **Physical Review D**, New York, v. 70, n. 6, p. 65017–65038, Sept. 2004.
- DITTRICH, W.; REUTER, M. **Selected topics in gauge theories**. Berlin: Springer, 1986. 315 p.
- FARIAS, R. L. S.; DALLABONA, G.; KLEIN, G.; BATTISTEL, O. A. Cutoff-independent regularization of four-fermion interactions for color superconductivity. **Physical Review C**, New York, v. 73, n. 1, p. 18201–18201, Jan. 2006.
- FARIAS, R. L. S.; DALLABONA, G.; KLEIN, G.; BATTISTEL, O. A. Extension of the Nambu–Jona-Lasinio model predictions at high densities and temperatures using an implicit regularization scheme. **Physical Review C**, New York, v. 77, n. 6, p. 65201–65208, June 2008.

FEYNMAN, R. P. Space-time approach to quantum electrodynamics. **Physical Review**, New York, v. 76, n. 6, p. 769–789, Sept. 1949.

FONSECA, M. V.; GIRADI, T. J.; DALLABONA, G.; BATTISTEL, O. A. Ambiguities and symmetry relations in five-dimensional perturbative calculations: the explicit evaluation of the QED5 vacuum polarization tensor. **International Journal of Modern Physics A**, v. 28, n. 27, Oct. 2013. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217751X13501352>>. Acesso em: 10 Maio 2015.

GAMBIN, E.; DALLABONA, G.; BATTISTEL, O. A. Regularizations a unique prescription for all situations. **Brazilian Journal Physics**, São Paulo, v. 37, n. 4, p. 1191–1205, Dec. 2007.

LOWENSTEIN, J.; SWIECA, J. Quantum electrodynamics in two dimensions. **Annals of Physics**, New York, v. 68, p. 172–195, 1971.

PAULI, W.; VILLARS, F. On invariant regularization in relativistic quantum field theory. **Review Modern Physics**, New York, v. 21, n. 3, p. 434–444, July 1949.

PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An introduction to quantum field theory**. Boulder: Westview, 1995. 844 p.

SCHWINGER, J. Theory of quantized fields II. **Physical Review**, New York, v. 91, n. 3, p. 713–728, Aug. 1953.

TREIMAN, S. B.; JACKIW, R.; ZUMINO, B.; WITTEN, E. **Current algebra and anomalies**. Singapore: World Scientific, 1985. 552 p.

VELTMAN, M.; HOOFT, G. T. Regularization and renormalization of gauge fields. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 44, n. 7, p. 189–219, Feb. 1972.

WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**. New York: Cambridge University, 1996. v. 2. 489 p.

A ÁLGEBRA DAS MATRIZES DE DIRAC

Será apresentado neste apêndice a álgebra anticomutativa das matrizes γ 's de Dirac. Estas matrizes aparecem naturalmente, dentro do contexto da Mecânica Quântica Relativística sempre que nos referirmos a partículas de spin semi-inteiro que obedecem a equação de Dirac, ou seja, estas matrizes surgem no contexto de amplitudes físicas fermiônicas. Obedecem a álgebra não-comutativa, desta forma têm associadas a si, relações de anticomutação e estão presentes na lagrangiana de interação, nas funções de Green e, conseqüentemente, nas amplitudes físicas perturbativas, portanto no contexto deste trabalho, somos levados a considerar suas propriedades, assim como as manipulações de certas quantidades envolvendo estas matrizes γ 's.

Representação e álgebra das matrizes de Dirac

Consideraremos a seguinte representação para as matrizes $\gamma_\mu = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$,

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde podemos estabelecer as seguintes relações: $\gamma_1 = \sigma_2$, $\gamma_2 = i\sigma_1$, $\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2$, onde as matrizes σ_i 's são as matrizes de Pauli associadas a Mecânica Quântica Não-Relativística e aparecem na equação de Dirac para partículas de spin 1/2 (WEINBERG, 1996). Os índices 1 e 2 que aparecem nas matrizes referem-se a um espaço-tempo bidimensional $D = 1 + 1$.

Temos também as seguintes definições:

$$g_{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço de Minkowski, e

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

é o tensor totalmente antissimétrico com dois índices de Levi-Civita.

Podemos estabelecer algumas propriedades gerais usando estes objetos,

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^\nu = g^{\nu\mu}\gamma_\mu, \quad (\text{A.5})$$

onde usamos a notação de Einstein, que diz que quando um índice aparecer repetido significa que deve ser feita uma soma sobre ele. Quando utilizarmos o índice superior, estamos nos referindo a um objeto contravariante, definido a partir das suas propriedades de transformação frente a um sistema de coordenadas, já o índice inferior se refere a um objeto covariante, pelo mesmo argumento.

Estas matrizes obedecem a álgebra não comutativa de Clifford, dada por,

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}\hat{I}, \quad (\text{A.6})$$

com $\mu, \nu = 1, 2$ e \hat{I} a matriz identidade em 2 dimensões.

A partir destas considerações, podemos estabelecer as seguintes propriedades:

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 2 \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_3\gamma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_3\gamma_3 = \hat{I} \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma_3\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_3. \quad (\text{A.10})$$

Da onde podemos ver (A.10), que a matriz γ_3 está associada a uma álgebra anti-comutativa. Ela anticomuta com todas as outras matrizes γ' s, tal que

$$[\gamma_3, \gamma_\nu]_+ = \gamma_3\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_3 = 0. \quad (\text{A.11})$$

É conveniente definir a matriz γ_3 através das outras γ' s,

$$\gamma_3 \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta. \quad (\text{A.12})$$

Dentro do contexto deste trabalho, utiliza-se uma operação linear chamada traço. O traço de uma matriz quadrada é a função matricial que associa a matriz à soma dos elementos da sua diagonal principal (??). Assim, podemos calcular os traços das matrizes de Dirac.

O traço de uma matriz de Dirac é nulo,

$$\text{tr}(\gamma_\mu) = 0, \quad (\text{A.13})$$

já o traço de duas matrizes pode ser encontrado utilizando a relação, definida na equação (A.6)

$$\gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo na operação de traço, temos,

$$\text{tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu) = 2g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.15})$$

Já o traço de três matrizes, pode ser calculado multiplicando as matrizes dentro do traço pela identidade, que é dada pela multiplicação de $\gamma_3 \gamma_3$, sem alterar o produto das matrizes,

$$\text{tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha) = \text{tr}(\gamma_3 \gamma_3 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha) \quad (\text{A.16})$$

e como a matriz γ_3 anticomuta com as matrizes γ_μ temos,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha) &= -\text{tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Desta forma podemos associar um resultado nulo ao produto de matrizes γ' s com um número ímpar de matrizes, o sinal do traço é dado por $(-1)^n$ onde n é o número de matrizes presentes na operação.

Para o traço de quatro matrizes γ' s,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta) &= \text{tr}[(2g_{\nu\mu} - \gamma_\mu \gamma_\nu) \gamma_\alpha \gamma_\beta] \\ &= 4g_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} - 4g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} \\ &\quad + 4g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} - \text{tr}[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

usando a ciclicidade do traço,

$$\text{tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 2g_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} - 2g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} + 2g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha}. \quad (\text{A.19})$$

Alguns resultados importantes que aparecem nas funções de Green associados aos processos físicos que nos propomos a estudar neste trabalho, têm associados a matriz γ_3 , complementando o estudo das matrizes de Dirac, tal que, o traço de um número ímpar de matrizes de Dirac, com uma matriz quiral é identicamente nulo,

$$\text{tr}(\gamma_\alpha \gamma_3 \gamma_\beta \dots \gamma_\lambda) = 0 \quad (\text{A.20})$$

pois basta anticomutar a matriz quiral com todas as matrizes dentro do traço e usar a ciclicidade do mesmo, para obter,

$$\text{tr}(\gamma_3 \gamma_\alpha \gamma_\beta \dots \gamma_\lambda) = -\text{tr}(\gamma_3 \gamma_\alpha \gamma_\beta \dots \gamma_\lambda). \quad (\text{A.21})$$

Já o traço da matriz γ_3 com um número par de matrizes de Dirac, pode ser calculado de tal forma que, substituindo a propriedade (A.12) dentro da operação de traço temos,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma_3 \gamma_\alpha \gamma_\beta) &= \text{tr}\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\right) \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

como o tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ é antissimétrico

$$\text{tr}(\gamma_3 \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 2\varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.23})$$

Algumas identidades úteis para o cálculo dos traços, podem ser resumidas a seguir:

$$\text{tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\varepsilon) = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\delta) &= 2[g_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}g_{\lambda\delta} - g_{\alpha\lambda}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\lambda}) \\ &\quad - g_{\mu\alpha}(g_{\nu\beta}g_{\lambda\delta} - g_{\nu\lambda}g_{\beta\delta} + g_{\nu\delta}g_{\beta\lambda}) \\ &\quad + g_{\mu\beta}(g_{\nu\alpha}g_{\lambda\delta} - g_{\nu\lambda}g_{\alpha\delta} + g_{\nu\delta}g_{\alpha\lambda}) \\ &\quad - g_{\mu\lambda}(g_{\nu\alpha}g_{\beta\delta} - g_{\nu\beta}g_{\alpha\delta} + g_{\nu\delta}g_{\alpha\beta}) \\ &\quad + g_{\mu\delta}(g_{\nu\alpha}g_{\beta\lambda} - g_{\nu\beta}g_{\alpha\lambda} + g_{\nu\lambda}g_{\alpha\beta})] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma_3 \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma_\eta) &= 2\varepsilon_{\alpha\beta}g_{\delta\eta} - 2\varepsilon_{\alpha\delta}g_{\beta\eta} + 2\varepsilon_{\alpha\eta}g_{\beta\delta} \\ &\quad + 2\varepsilon_{\beta\delta}g_{\alpha\eta} - 2\varepsilon_{\beta\eta}g_{\alpha\delta} + 2\varepsilon_{\delta\eta}g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Também podemos explorar outras propriedades das matrizes de Dirac, como a contração de matrizes γ 's com quadrivetores, representada por,

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu, \quad (\text{A.27})$$

onde podemos facilmente estabelecer as seguintes identidades:

$$\not{k}\not{q} + \not{q}\not{k} = 2k \cdot q \quad (\text{A.28})$$

$$\gamma^\mu \not{k} + \gamma^\mu \not{k} = 2k_\mu \quad (\text{A.29})$$

$$\gamma^\mu \not{k}\not{q}\gamma_\mu = \not{q}\not{k} + 2k \cdot q \quad (\text{A.30})$$

$$\gamma^\mu \not{k}\gamma_\mu = -\not{k}. \quad (\text{A.31})$$

Todos os resultados apresentados neste apêndice são suficientes e necessários para o desenvolvimento das manipulações algébricas associadas às matrizes de Dirac. Estes resultados utilizados para a construção das matrizes que obedecem à álgebra anticomutativa, definida em A.6 podem ser estendidos para qualquer dimensão. Mas um fato importante que deve ser mencionado é que não é possível estender, para dimensões ímpares, a definição da matriz $\gamma^{2\omega+1}$ (análoga à matriz γ^3 em dimensão $D = 2$), sendo assim não é possível definir uma matriz quiral que anticomute com todas as matrizes γ^μ estabelecidas para a dada dimensão, portanto não podemos estabelecer transformações quirais nestas dimensões (FONSECA et al., 2013).

B PARAMETRIZAÇÃO DE FEYMNAN

Para calcularmos amplitudes físicas a partir de *TQC's*, somos levados a utilizar métodos perturbativos devido o fato de encontrarmos integrais razoavelmente complicadas.

É fácil observar, por meio de contagem de potências, que algumas dessas integrais,

$$(I_N)^{\mu\nu\dots\rho} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1, k^\mu, k^\mu k^\nu, k^\mu k^\nu \dots k^\rho}{[(k + k_1)^2 - m_1^2] \dots [(k + k_N)^2 - m_N^2]} \quad (\text{B.1})$$

que são combinações de integrais de Feynman, são divergentes e outras finitas. Desta forma, a possibilidade de estruturas matematicamente indefinidas, presentes no interior dessas integrais, levou ao desenvolvimento de métodos puramente algébricos que nos permite separar a parte divergente da parte finita das integrais. A parte divergente não é integrada e pode ser escrita como uma combinação de dois objetos divergentes básicos. Já as integrais finitas são calculadas usando métodos usuais de integração, e, com o intuito de construir uma sistematização para as operações, presentes nas partes finitas, utilizaremos um "truque", que no nosso caso é o chamado de *Parametrização de Feynman*.

O método utilizado, nos possibilitará colocar as integrais presentes no cálculo das amplitudes físicas em uma forma geral, que simplificará substancialmente as integrações dos momentos. O que faremos é utilizar identidades, reescrevendo assim o integrando numa forma conveniente.

Começaremos com a mais simples destas identidades, que é a seguinte:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \frac{1}{[(b-a)z + a]^2} \quad (\text{B.2})$$

Todas as identidades estão contidas em uma forma geral, que pode ser escrita de forma geral como

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int dx_1 \dots \int dx_n \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right)}{[a_1 x_1 + \dots + a_n x_n]^n}. \quad (\text{B.3})$$

Na expressão acima, os a'_i 's podem ser identificados como os propagadores de campos correspondentes às linhas internas dos diagramas. Porém, esta identidade não compreende a todas as possíveis formas que poderemos encontrar nos integrandos, pois podemos nos deparar com integrais onde os propagadores podem aparecer repetidos. Neste caso, devemos encontrar uma identidade análoga a acima mostrada para procedermos à parametrização. Para isso, basta que derivemos a expressão acima em relação a algum dos parâmetros a'_i 's. Deste modo teremos:

$$\frac{1}{a_1^2 a_2 \dots a_n} = n! \int dx_1 \dots \int dx_n \frac{\delta \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) x_1}{[a_1 x_1 + \dots + a_n x_n]^n + 1}. \quad (\text{B.4})$$

Com o uso destas relações, e outras que podem ser deduzidas a partir destas, podemos construir a lista de identidades que são necessárias para procedermos à parametrização das integrais finitas que surgem ao longo do presente trabalho. Esta lista é formada pelas relações:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \frac{1}{[(b-a)z+a]^2} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 dz \frac{(1-z)}{[(b-a)z+a]^3} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{a^3 b} = 3 \int_0^1 dz \frac{(1-z)^2}{[(b-a)z+a]^4} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{1}{a^4 b} = 4 \int_0^1 dz \frac{(1-z)^3}{[(b-a)z+a]^5} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{[(b-a)y+(c-a)z+a]^3} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{a^2 bc} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{(1-y-z)}{[(b-a)y+(c-a)z+a]^4} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{1}{a^3 bc} = 12 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{(1-y-z)^2}{[(b-a)y+(c-a)z+a]^5} \quad (\text{B.11})$$

A fim de exemplificarmos o método que acabamos de apresentar, aplicaremos

a parametrização de Feynman a seguinte integral

$$I_{finita} = - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + \lambda^2 - m_2^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_2)^2 - m_2^2]} \quad (\text{B.12})$$

que surge na solução da integral de Feynman (I_2). Como o denominador é da forma a^2b , usaremos a parametrização (B.6). Onde:

$$a = k^2 - \lambda^2 \quad (\text{B.13})$$

$$b = (k + k_2)^2 - m_2^2 \quad (\text{B.14})$$

assim teremos

$$(b - a)z + a = (k + k_2z)^2 + k_2^2(1 - z)z + (\lambda^2 - m_2^2)z - \lambda^2. \quad (\text{B.15})$$

Renomeando

$$k' = k + k_2z \quad (\text{B.16})$$

$$H(z) = k_2^2(1 - z)z + (\lambda^2 - m_2^2)z - \lambda^2 \quad (\text{B.17})$$

logo

$$\frac{\partial H(z)}{\partial z} = k_2^2(1 - 2z) + \lambda^2 - m_2^2 \quad (\text{B.18})$$

substituindo estes resultados na integral (C.2)

$$I_{finita} = -2 \int_0^1 dz (1 - z) \left\{ \frac{\partial H(z)}{\partial z} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \frac{1}{[k' + H(z)]^3} + 2k_2^\alpha \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \frac{k'_\alpha}{[k' + H(z)]^3} \right\}. \quad (\text{B.19})$$

Impondo a invariância de Lorentz e renomeando I_{finita} para I'_{finita} , obtemos

$$I'_{finita} = -2 \int_0^1 dz (1 - z) \frac{\partial H(z)}{\partial z} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \frac{1}{[k' + H(z)]^3}. \quad (\text{B.20})$$

Após obtermos a forma acima para a integral de Feynman finita, devemos integrar, sob todo momento irrestrito do loop k , e para isso, devemos utilizar a técnica de Integração Dimensional, que será vista no próximo capítulo.

C INTEGRAÇÃO DIMENSIONAL

Vimos no apêndice anterior, um recurso matemático para o tratamento de integrais de Feynman que nos fornece uma forma genérica para o integrando, qualquer que seja a integral. Sendo assim, nosso objetivo agora é calcular tais integrais, ou seja, integrar nos momentos.

Considerando a forma geral das integrais de Feynman

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, k^2, k_\mu k_\nu k_\rho \dots)}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha}. \quad (\text{C.1})$$

Para que não seja necessário resolver separadamente cada uma destas integrais, partiremos da integral mais simples e então encontrar um método para determinar a solução das demais a partir desta solução.

Seja

$$I(Q) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha}, \quad (\text{C.2})$$

a fim de eliminar o termo ímpar, reescrevemos o denominador da seguinte forma:

$$k^2 + 2Q \cdot k - H^2 = (k + Q)^2 - (Q^2 + H^2) \quad (\text{C.3})$$

e, uma vez que estas integrais são finitas podemos fazer um *shift* na variável de integração sem nos preocuparmos com os termos de superfície.

Tal que,

$$k' = (k + Q) \quad (\text{C.4})$$

e,

$$M^2 = Q^2 + H^2. \quad (\text{C.5})$$

A integral (C.2) fica escrita como

$$I(Q) = \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k'^2 - M^2)^\alpha}. \quad (\text{C.6})$$

Para resolvermos integrais deste tipo, utilizaremos a extensão $n = m + 1$ -dimensional, tal que

$$I(Q, n) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - M^2)^\alpha} \quad (\text{C.7})$$

em um espaço de Minkowski, teremos

$$d^n k = dk_0 dk_1 dk_2 \dots dk_m = dk_0 d^m k = dk^{m+1} \quad (\text{C.8})$$

e como usual, as componentes do espaço-tempo ficam escritas como

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2 \quad (\text{C.10})$$

onde $m = n - 1$. Desta forma, a integral (C.7) é dada por

$$\begin{aligned} I(Q, n) &= \int d^m k \frac{1}{(k^2 - M^2)^\alpha} \\ &= \int d^m k \int dk_0 \frac{1}{\left[k_0^2 - \left((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} \right)^2 \right]^\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

A integral acima apresenta pólos em

$$k_0^2 = (\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} \quad (\text{C.12})$$

$$k_0^2 = -(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} \quad (\text{C.13})$$

sendo assim, fica evidente que (4.9) tem um problema: o integrando é singular nos pólos (C.12) e (C.13), e por isso a integral diverge. Para calcularmos esta integral, vamos estender k_0 para o plano complexo, e considerar o integrando como uma função da variável complexa $k_0 \in \mathbb{C}$. Em outras palavras: faremos uma continuação analítica do integrando no plano complexo. Sendo assim, introduziremos um "regulador" ε arbitrário, que tem como objetivo remover os pólos da reta real, deslocando-os ligeiramente, ou seja,

$$I = \int d^m k \int dk_0 \frac{1}{\left\{ k_0^2 - \left[(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\varepsilon \right]^2 \right\}^\alpha} \quad (\text{C.14})$$

que faz com que os pólos sejam deslocados para o eixo complexo, nos pontos

$$k_0^2 = (\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\varepsilon \quad (\text{C.15})$$

$$k_0^2 = -(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} + i\varepsilon. \quad (\text{C.16})$$

Com o contorno C fixado, a integral $f(k_0)$

$$f(k_0) = \frac{1}{\left\{ k_0^2 - \left[(\mathbf{k}^2 + M^2 - i\varepsilon)^{1/2} \right]^2 \right\}^\alpha} \quad (\text{C.17})$$

se anula. Também podemos observar que para $k_0 \rightarrow \infty$, $f(k_0)$ também se anula. Isto é,

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} [f(k_0)] \simeq \frac{1}{k_0^{2\alpha}}, \quad (\text{C.18})$$

então a contribuição sobre o círculo se anula e restando apenas as contribuições sobre os eixos.

Fica mais fácil integrar em k caso possamos passar para coordenadas esféricas, podemos fazer isso se passarmos para o espaço euclidiano por meio de uma rotação de Wick, de modo que

$$k_0 = i\bar{k}_0 \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{k}_m = \bar{\mathbf{k}}_m \quad (\text{C.20})$$

a medida invariante fica

$$k^2 = (i\bar{k}_0)^2 - (\bar{\mathbf{k}}_m)^2 \quad (\text{C.21})$$

$$= -(\bar{k}_{m+1})^2 \quad (\text{C.22})$$

e,

$$d^m k = i d\bar{k}_0 d\bar{\mathbf{k}}_m = i d\bar{k}^{m+1}. \quad (\text{C.23})$$

Fazendo a conveniente mudança de variáveis $\bar{k}_0 = k_{m+1}$, com k_{m+1} real.

Com isso a integral k_0 fica

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{m+1} f(ik_{m+1}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{m+1} \frac{1}{\left\{ (ik_{m+1})^2 - \left[(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\varepsilon \right]^2 \right\}^\alpha} \\ &= i (-1)^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{m+1} \frac{1}{(k_{m+1}^2 + K^2 + i\varepsilon)^\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

A relação entre as integrais nos dois espaços é dada por

$$\int_{Mink} d^n k \frac{1}{(k^2 - M^2)^\alpha} = i (-1)^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d^n k \frac{1}{(k^2 + M^2)^\alpha}. \quad (C.25)$$

Como a regularização dimensional só muda a dimensão do espaço-tempo não quebra nenhuma simetria deste espaço. Agora precisamos expressar o espaço euclidiano n -dimensional em coordenadas polares,

$$k_1 = k \sin \theta_m \sin \theta_{m-1} \dots \sin \theta_2 \sin \theta_1 \quad (C.26)$$

$$k_2 = k \sin \theta_m \sin \theta_{m-1} \dots \sin \theta_2 \sin \theta_1 \quad (C.27)$$

...

$$k_{m+1} = k \cos \theta \quad (C.28)$$

desta forma, o elemento de volume em coordenadas polares em n dimensões é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^n k = \int_0^\infty k^m dk \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{m-1} \theta_m d\theta_m. \quad (C.29)$$

A integral nos momentos fica da forma:

$$I = i (-1)^\alpha \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{m-1} \theta_m d\theta_m \int_0^\infty \frac{dk k^m}{(k^2 + M^2 - i\varepsilon)^\alpha}, \quad (C.30)$$

como o integrando não depende de θ podemos integrar nos ângulos, usando

$$\int_0^\pi \sin^m \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)} \quad (C.31)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (C.32)$$

Deste modo,

$$\int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{m-1} \theta_m d\theta_m = \frac{2\pi (\sqrt{\pi})^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \quad (C.33)$$

Substituindo este resultado na integral

$$I = \frac{i (-1)^{-\alpha} (\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{(k^2)^{\frac{m-1}{2}} dk^2}{(k^2 + M^2)^\alpha}, \quad (C.34)$$

usando a expressão para a função Beta de Euler, obtemos:

$$I = \frac{i(-1)^{-\alpha} (\pi)^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \left(\frac{m-1}{2}\right)\right)}{(2\pi)^{m+1} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) (M^2)^{\alpha - \left(\frac{m-1}{2}\right)} \Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{(k^2)^{\frac{m-1}{2}} dk^2}{(k^2 + M^2)^\alpha}. \quad (\text{C.35})$$

Fazendo $n = m + 1$

$$I = \frac{(-1)^{-\alpha} i \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha) (M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}}. \quad (\text{C.36})$$

A forma da expressão justifica a definição $n \equiv 2\varpi$, que nos fornecerá:

$$I(Q, \omega) = \left(\frac{i}{(4\pi)^\varpi} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \varpi)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \varpi}} \quad (\text{C.37})$$

que é o resultado desejado. A presença da função $\Gamma(\alpha - \varpi)$ nos garante que este resultado só é válido para $\alpha > \varpi$, ou seja, para integrais finitas.

Sendo assim, temos a partir da equação (C.2) e da discussão feita acima a forma geral das integrais de Feynman, ou seja,

$$\begin{aligned} I(Q, \omega) &= \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}, \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

onde $n = D = 2\varpi$.

Agora podemos calcular as demais integrais de Feynman que aparecem no cálculo explícito das amplitudes. Para calcular a primeira das integrais derivamos a equação (C.38) em relação ao momento externo Q_μ ,

$$\frac{d}{dQ^\mu} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \frac{d}{dQ^\mu} \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.39})$$

da onde

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = (-) \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{Q_\mu \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (\text{C.40})$$

Repetindo este procedimento podemos obter todas as outras integrais necessárias, tal que,

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha'+1}} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega}} + \frac{\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega-1}} \right] \quad (\text{C.41})$$

Segue abaixo, a solução necessárias para o cálculo das integrais que surgem na avaliação das funções de Green. Assim sendo, apresentaremos a seguir todos os resultados necessários para o cálculo das funções apresentadas neste trabalho.

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha'}} = (-) \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{Q_\mu \Gamma(\alpha' - \omega)}{\Gamma(\alpha') (-Q^2 - H^2)^{\alpha'-\omega}} \quad (\text{C.42})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega}} + \frac{\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega-1}} \right] \quad (\text{C.43})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q^2 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega}} + \frac{\varpi \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega-1}} \right] \quad (\text{C.44})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q_\beta Q_\alpha Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega}} \right. \\ &+ \frac{\frac{1}{2} (g_{\mu\beta} Q_\alpha Q_\nu + g_{\nu\beta} Q_\alpha Q_\mu + g_{\alpha\beta} Q_\mu Q_\nu) \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega-1}} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} (g_{\alpha\nu} Q_\mu Q_\beta + g_{\alpha\mu} Q_\nu Q_\beta + g_{\mu\nu} Q_\alpha Q_\beta) \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega-1}} \\ &\left. + \frac{\frac{1}{4} (g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} + g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} + g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega-2}} \right] \quad (\text{C.45}) \end{aligned}$$

É interessante notar que estes resultados decorrem das seguintes propriedades:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k^2) k_\mu = 0 \quad (\text{C.46})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{2\varpi} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} k^2 f(k^2) \quad (\text{C.47})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu\alpha\beta} + g_{\mu\alpha\nu\beta} + g_{\mu\beta\nu\alpha}}{4(\varpi + 1)} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} k^4 f(k^2) \quad (\text{C.48})$$

onde: $g_{\mu\nu\alpha\beta} + g_{\mu\alpha\nu\beta} + g_{\mu\beta\nu\alpha} = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$.

D SOLUÇÕES DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN

Neste apêndice nos preocuparemos em calcular todas as integrais que aparecem explicitamente nas integrais de Feynman. De uma forma geral, estas integrais podem ser escritas tal como apresentado abaixo.

- Com um propagador:

$$\left[(I_1); (I_1)_\mu \right] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1; k_\mu]}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \quad (\text{D.1})$$

- Com dois propagadores:

$$\left[(I_2); (I_2)_\mu; (I_2)_{\mu\nu} \right] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1; k_\mu; k_\mu k_\nu]}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.2})$$

Portanto, as quantidades que aparecem do lado esquerdo das expressões acima, estão associadas, no caso dos diagramas contendo loops, ao fato de dever-se efetuar a implementação da última das regras de Feynman da teoria, ou seja, integração sobre todos os momentos não fixados pelas regras de conservação de energia e momentum dos vértices.

Cálculo de I_1

Começaremos por solucionar a integral I_1 , que de acordo com a equação 4.9, é dada por,

$$(I_1) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{D_1} \right), \quad (\text{D.3})$$

por contagem de potências, esta integral tem grau de divergência logarítmico, assim devemos usar a identidade 4.1, com $N = 0$, da onde o integrando fica escrito como

$$\frac{1}{D_1} = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)}{(k^2 - \lambda^2) D_1}. \quad (\text{D.4})$$

Integrando:

$$I_1 = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)}{(k^2 - \lambda^2) D_1}, \quad (\text{D.5})$$

o primeiro termo do lado direito está associado a divergência e o segundo termo está associado a parte convergente da nossa integral. Podemos escrever a expressão acima como

$$I_1 = I_D + I_C \quad (\text{D.6})$$

onde

$$I_D = - \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)}{(k^2 - \lambda^2) D_1} \quad (\text{D.7})$$

e,

$$I_C = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}. \quad (\text{D.8})$$

Resolveremos somente a integral convergente.

Usando a parametrização de Feynman (B.5) e redefinindo

$$k' = k + k_1 z \quad (\text{D.9})$$

$$-H^2 = k_1^2 z(1-z) + (\lambda^2 - m_1^2)z - \lambda^2 \quad (\text{D.10})$$

temos

$$I_C = - \int_0^1 dz \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)}{[(k')^2 + (-H^2)]^2} \quad (\text{D.11})$$

fazendo o *shift* no numerador,

$$k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2 = 2k_1 \cdot k' + \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \quad (\text{D.12})$$

onde

$$\frac{\partial(-H^2)}{\partial z} = k_1^2(1-2z) + \lambda^2 - m_1^2 \quad (\text{D.13})$$

excluindo os termos ímpares, temos

$$I_C = - \int_0^1 dz \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(k')^2 + (-H^2)]^2} \quad (\text{D.14})$$

usando integração dimensional para resolver a integral em k , temos

$$\begin{aligned} I_C &= -\frac{i}{4\pi} \int_0^1 dz \left(\frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{(-H^2)} \right) \\ &= -\frac{i}{4\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

desta forma a resposta da nossa integral é

$$\begin{aligned} I_1 &= I_C + I_D \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{i}{4\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

da onde identificamos o objeto divergente básico,

$$I_{\log}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (\text{D.17})$$

assim temos

$$I_1(m_1^2, \lambda^2) = I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{4\pi} \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right). \quad (\text{D.18})$$

Cálculo de $I_{1\mu}$

Por contagem de potência dos k 's, identificamos que a integral 4.12, diverge linearmente, de forma que ao reescrever o denominador, retirando os termos nulos (ímpares), temos

$$I_{1\mu} = -k_1^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m^2)^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.19})$$

A primeira integral do lado direito da equação acima corresponde a parte divergente da nossa integral primitiva e a segunda integral do lado direito corresponde a parte da integral finita. Desta forma podemos escrever a equação acima como

$$I_{1\mu} = I_D + I_C \quad (\text{D.20})$$

onde

$$I_D = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m^2)^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2]} \quad (\text{D.21})$$

e,

$$I_C = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2}. \quad (\text{D.22})$$

Resolveremos a integral convergente. Desta forma, utilizando a parametrização de Feynman B.6, e usando as mesmas definições dos parâmetros de Feynman feitas para a integral I_1 , ficamos com

$$\begin{aligned}
 I_C &= 8k_1^\alpha \int_0^1 dz (1-z) \left(\frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right) \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \frac{k'_\alpha k'_\mu}{[(k')^2 + (-H^2)]^3} \\
 &\quad - 8k_1^\alpha k_1^\beta k_{1\mu} \int_0^1 dz (1-z) z \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \frac{k'_\alpha k'_\beta}{[(k')^2 + (-H^2)]^3} \quad (\text{D.23}) \\
 &\quad - 2k_{1\mu} \int_0^1 dz (1-z) z \left(\frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right)^2 \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(k')^2 + (-H^2)]^3},
 \end{aligned}$$

integrando nos momentos e reorganizando os termos

$$\begin{aligned}
 I_C &= \frac{i}{(4\pi)} 2k_{1\mu} \int_0^1 dz (1-z) \left[\frac{\partial}{\partial z} \ln(-H^2) \right] \\
 &\quad - \frac{i}{(4\pi)} 2k_1^2 k_{1\mu} \int_0^1 dz (1-z) z \left[\frac{1}{(-H^2)} \right] \quad (\text{D.24}) \\
 &\quad + \frac{i}{(4\pi)} k_{1\mu} \int_0^1 dz (1-z) z \left[\frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{(-H^2)} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

resolvendo a integral ficamos com

$$\begin{aligned}
 I_C &= \frac{i}{(4\pi)} k_{1\mu} \ln(-m_1^2) - \frac{i}{(4\pi)} k_{1\mu} \ln(-\lambda^2) \\
 &= \frac{i}{(4\pi)} k_{1\mu} \ln\left(\frac{m_1^2}{\lambda^2}\right). \quad (\text{D.25})
 \end{aligned}$$

Voltando para a nossa integral $I_{1\mu}$.

$$\begin{aligned}
 I_{1\mu} &= I_D + I_C \\
 &= -k_1^\alpha \left[\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\alpha} \ln\left(\frac{m_1^2}{\lambda^2}\right) \right], \quad (\text{D.26})
 \end{aligned}$$

Podemos identificar a seguinte estrutura tensorial, presente na amplitude de um ponto V e A ,

$$I_{1\mu} + k_{1\mu} I_1, \quad (\text{D.27})$$

resolvendo

$$\begin{aligned}
 I_{1\mu} + k_{1\mu}I_1 &= -k_1^\alpha \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{i}{(4\pi)} g_{\mu\alpha} \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right) \right] \\
 &\quad + k_{1\mu} \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{i}{(4\pi)} \ln \left(\frac{m_1^2}{\lambda^2} \right) \right] \\
 &= -k_1^\alpha \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{g_{\mu\alpha}}{(k^2 - \lambda^2)} \right] \quad (\text{D.28})
 \end{aligned}$$

onde o termo dentro do parênteses pode ser identificado como o objeto divergente

$$\Delta_{\alpha\mu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{g_{\mu\alpha}}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (\text{D.29})$$

da onde ficamos com

$$I_{1\mu} + k_{1\mu}I_1 = -k_1^\alpha [\Delta_{\alpha\mu}]. \quad (\text{D.30})$$

Cálculo de I_2

Passamos agora para o cálculo das integrais com dois propagadores. Começaremos com primeira das integrais, que é dada por (4.17). Observamos pela contagem de potências dos k 's que esta é uma integral finita, da onde, utilizando as técnicas descritas anteriormente, podemos facilmente chegar a

$$I_2 = \frac{i}{(4\pi)} \chi_0(q^2, m_1^2, m_2^2). \quad (\text{D.31})$$

Cálculo de $I_{2\mu}$

Também verificamos que por contagem de potências esta integral é convergente, cujo resultado é dado por

$$I_{2\mu}(q^2, m_2^2, m_1^2) = \frac{i}{(4\pi)} [q_\mu \chi_1(q^2, m_1^2, m_2^2) - k_{1\mu} \chi_0(q^2, m_1^2, m_2^2)] \quad (\text{D.32})$$

Cálculo da $I_{2\mu\nu}$

Por inspeção, constatamos que a integral 4.32 é logaritmicamente divergente, após algumas manipulações e um certo esforço algébrico, chegamos a

$$\begin{aligned}
 I_{2\mu\nu}(q^2, m_2^2, m_1^2) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
 &\quad - \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \ln\left(\frac{m_2^2}{\lambda^2}\right) \\
 &\quad + \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (m_1^2 - m_2^2) \chi_1(q^2, m_1^2, m_2^2) \\
 &\quad + \frac{i}{(4\pi)} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left[\chi_2(q^2, m_1^2, m_2^2) - \frac{\chi_1(q^2, m_1^2, m_2^2)}{2} \right] \\
 &\quad - \frac{i}{(4\pi)} \frac{q_\mu q_\nu}{2} \left[\chi_1(q^2, m_1^2, m_2^2) - \frac{\chi_0(q^2, m_1^2, m_2^2)}{2} \right] \\
 &\quad - \frac{i}{(4\pi)} \left[\frac{q_\mu Q_\nu + q_\nu Q_\mu}{2} \right] \left[\chi_1(q^2, m_1^2, m_2^2) - \frac{\chi_0(q^2, m_1^2, m_2^2)}{2} \right] \\
 &\quad + \frac{i}{(4\pi)} Q_\mu Q_\nu \frac{\chi_0(q^2, m_1^2, m_2^2)}{4}
 \end{aligned} \tag{D.33}$$

Com esta integral calculada, já temos a mão todas as integrais necessárias para determinarmos as amplitudes físicas de um e dois pontos.

E RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES χ' s

Em 4.19, definimos as funções χ' s. A partir de agora, vamos determinar as relações existentes entre as diferentes funções que aparecem no decorrer deste trabalho, de modo que possamos reduzir todas as funções para a mais simples delas: a função $\chi_0(q^2, m_1^2, m_2^2)$.

Temos

$$\chi_k = \int_0^1 \frac{dz z^k}{Q(m_1^2, m_2^2, q^2, z)}, \quad (\text{E.1})$$

com $k = 0, 1, 2, \dots$ onde o polinômio $Q(m_1^2, m_2^2, q^2, z)$ é dado por

$$Q(m_1^2, m_2^2, q^2, z) = q^2 z(1-z) + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2. \quad (\text{E.2})$$

Omitiremos o argumento das funções.

Derivando E.2 em relação a z ,

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = q^2(1-2z) + m_1^2 - m_2^2, \quad (\text{E.3})$$

onde

$$z = \frac{1}{q^2} \left[-\frac{\partial Q}{\partial z} + q^2 + m_1^2 - m_2^2 \right]. \quad (\text{E.4})$$

Fazendo $k = 1$ na equação E.1,

$$\chi_1(q^2, m_1^2, m_2^2) = \int_0^1 \frac{dz z}{Q(m_1^2, m_2^2, q^2, z)} \quad (\text{E.5})$$

substituindo E.4,

$$\chi_1 = -\frac{1}{2q^2} \int_0^1 dz \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{Q} \right) + \frac{(q^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2q^2} \int_0^1 dz \left(\frac{1}{Q} \right), \quad (\text{E.6})$$

identificando

$$2q^2 \chi_1 = - \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} (\ln Q) + (q^2 + m_1^2 - m_2^2) \chi_0, \quad (\text{E.7})$$

finalmente

$$2q^2 \chi_1 = (q^2 + m_1^2 - m_2^2) \chi_0 + \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right). \quad (\text{E.8})$$

Fazendo $k = 2$ na equação 4.19

$$\chi_2(q^2, m_1^2, m_2^2) = \int_0^1 \frac{dz z^2}{Q(m_1^2, m_2^2, q^2, z)}, \quad (\text{E.9})$$

isolando z^2

$$z^2 = \frac{1}{q^2} [-Q + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2 + q^2 z] \quad (\text{E.10})$$

substituindo

$$\begin{aligned} \chi_2 = & -\frac{1}{q^2} \int_0^1 dz + \int_0^1 dz \left(\frac{z}{Q} \right) - \frac{m_1^2}{q^2} \int_0^1 dz \left(\frac{1}{Q} \right) \\ & + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{q^2} \int_0^1 dz \left(\frac{z}{Q} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

finalmente

$$q^2 (\chi_2 - \chi_1) = (m_1^2 - m_2^2) \chi_1 - m_1^2 \chi_0 - 1. \quad (\text{E.12})$$