



LEANDRO FERREIRA

**INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA O PONTO
CRÍTICO DE MODELOS DE REGRESSÃO
QUADRÁTICA: ABORDAGENS *BOOTSTRAP*,
BAYESIANA E *FUZZY***

LAVRAS - MG

2012

LEANDRO FERREIRA

**INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA O PONTO CRÍTICO DE
MODELOS DE REGRESSÃO QUADRÁTICA: ABORDAGENS
BOOTSTRAP, BAYESIANA E *FUZZY***

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

Orientador
Dr. Augusto Ramalho de Moraes

**LAVRAS - MG
2012**

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Ferreira, Leandro.

Intervalos de confiança para o ponto crítico de modelos de regressão quadrática: abordagens *bootstrap*, bayesiana e *fuzzy* / Leandro Ferreira. – Lavras : UFLA, 2012.

115 p. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2012.

Orientador: Augusto Ramalho de Moraes.

Bibliografia.

1. Análise de regressão. 2. *Bootstrap* paramétrico. 3. Inferência bayesiana. 4. Lógica *fuzzy*. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.536

LEANDRO FERREIRA

**INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA O PONTO CRÍTICO DE
MODELOS DE REGRESSÃO QUADRÁTICA: ABORDAGENS
BOOTSTRAP, *BAYESIANA* E *FUZZY***

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 30 de agosto de 2012.

Dra. Thelma Sáfyadi	UFLA
Dr. Sérgio Martins de Souza	UFLA
Dr. Tadayuki Yanagi Junior	UFLA
Dra. Carla Regina Guimarães Brighenti	UFSJ

Dr. Augusto Ramalho de Morais
Orientador

**LAVRAS - MG
2012**

*À minha mãe, Nenzinha, por ter sempre acreditado em minhas escolhas com seu
imenso amor.*

DEDICO

AGRADECIMENTOS

À Força maior que rege todo o universo, ao grande Mestre, à grande Mãe e aos grandes Amigos espirituais, por mais esta oportunidade de crescimento.

À companheira Simone, presente em todos os momentos, nos quais, aprendemos e crescemos.

Ao meu pai Silvio Ferreira, pelo aprendizado especial.

À madrinha Vilma, pelo seu amor de mãe.

Agradeço ao Eli e à Constança, pela confiança depositada em mim. Obrigado por cada prece.

À família, queridas primas e irmãs Nêm e Damiana, Tio Paulo, Tia Neli, Tio Hércio, Maikon e tantos outros, pelo grande carinho.

Ao professor e orientador Augusto Ramalho de Moraes, por ter acreditado em meu trabalho. Em cada conversa, eu me lembrava que *“a ciência e a religião são duas alavancas da humanidade, uma revela as leis do mundo material e a outra as do mundo moral”*.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), por intermédio do Departamento de Ciências Exatas, pela oportunidade e apoio.

À CAPES, pela concessão da bolsa de estudos.

À banca examinadora, composta pelos professores, Thelma Sáfadi, Sérgio Martins de Souza, Tadayuki Yanagi Junior e Carla Regina Guimarães Brighenti, pela participação, procedentes correções e sábias sugestões.

Ao amigo Augusto Maciel da Silva, pelo grande companherismo. Nunca esquecerei o que fizeste por mim. Foram tantas idas e vindas, e sempre do meu lado, auxiliando-me, superando indiferenças. É verdade que *“amizade só faz sentido se traz o céu para mais perto da gente, e se inaugura aqui mesmo o seu começo”*.

De maneira muito especial, à amiga Ana Lúcia Souza Silva Mateus, pela

grande amizade. É uma das pessoas responsáveis por uma grande conquista em minha vida.

À amiga Giselle Borges, pela grande amizade ao longo de toda vida acadêmica.

Ao amigo Danilo Machado Pires, pelo grande auxílio no desenvolvimento deste trabalho.

Ao amigo, Crysttian Arantes Paixão, pelo grande companherismo.

Aos grandes amigos, Luiz Gustavo Fernandes Julião, Liliam Helena, Bebel, Marilena, Cristiane, Carlos Eduardo, Ana Paula Vicente, Fábio Martins, Daysa, Lucélia e Álvaro, pela grande amizade.

Aos colegas do curso de Estatística e Experimentação Agropecuária, Ana Paula Coelho Madeira, Paulo César, Edcarlos, Paulo Henrique, Vanessa Siqueira Peres, Felipe, Manoel, Juliano e Walmes, pela amizade e apoio.

Aos amigos Lola, Júlia, Marilda, Domingos, Erlene, Márcia e Carlinho, pelo auxílio especial.

Aos professores da UFLA, em particular, Renato Ribeiro de Lima, Maria do Carmo Pacheco de Toledo e Costa, Elaine das Graças Frade, Rosana Maria Mendes, Andréia da Silva Coutinho, José Antônio Araújo Andrade, Osnel Broche Cristo, Onofre Rojas Santos, Luiz Eurico Junqueira Coli e Vicente Gualberto, pelos ensinamentos e oportunidades.

Agradeço de maneira muito especial ao professor Tadayuki Yanagi Junior, pela orientação, dedicação e paciência durante toda a minha vida acadêmica.

Ao professor Sérgio Martins de Souza, pelo incentivo e apoio dados para prosseguir com os estudos.

Às funcionárias do Departamento de Ciências Exatas, Josi, Edila, Selmi-nha e Maria, pela atenção e carinho.

Muito obrigado a todos que contribuíram por mais esta importante conquista!

RESUMO

Em um modelo de regressão quadrática em que, por exemplo, a produção de determinada cultura é avaliada em função de diferentes doses de nutrientes, pode haver interesse em obter um intervalo de confiança para o ponto crítico que represente os valores de doses que proporcionam aproximadamente a produção máxima da cultura. O presente trabalho tem, como objetivo, propor a construção de intervalos de confiança para o ponto crítico, utilizando a metodologia *bootstrap* paramétrico, inferência bayesiana e lógica *fuzzy*, considerando dados de produção de matéria seca do sistema radicular de braquiária em função de diferentes doses de adubação fosfatada. Para a análise *bootstrap* paramétrico, foram consideradas diferentes variâncias teóricas para o erro e intervalos de confiança foram construídos de acordo com diferentes expressões de variâncias para o ponto crítico, além do intervalo de confiança *bootstrap*-t. Na análise bayesiana, intervalos de confiança bayesiano (intervalos de credibilidade de máxima densidade *a posteriori* - HPD) foram encontrados para o ponto crítico, sendo que, para isso, foram definidas prioris para cada parâmetro do modelo de regressão quadrática, inclusive para o ponto crítico, e por meio do amostrador de Gibbs, foram realizadas inferências. Na análise *fuzzy*, por intermédio do princípio de extensão de Zadeh, um modelo *fuzzy* de regressão quadrática foi encontrado, considerando incertezas presentes nas estimativas dos parâmetros obtidas pelo método dos mínimos quadrados. Dessa maneira, foram obtidos um ponto crítico *fuzzy* e intervalos de confiança *fuzzy* por intermédio de operações intervalares e α -níveis. Uma segunda análise *fuzzy* foi realizada considerando a metodologia de Buckley, na qual um estimador *fuzzy* para o ponto crítico foi construído com base em um intervalo de confiança convencional. Pela análise *bootstrap* paramétrico, os intervalos de confiança que consideraram a expressão da variância com covariância entre os parâmetros do modelo de regressão apresentaram maior precisão, sendo que a distribuição de frequência do ponto crítico tende a uma distribuição assimétrica positiva e formato do tipo leptocúrtico com o aumento da variância teórica. De acordo com as prioris assumidas, os intervalos de confiança bayesiano encontrados para o ponto crítico apresentaram alta precisão. Considerando as incertezas tratadas pela análise *fuzzy*, o aumento dos níveis de confiança, baseados em α -níveis, resultaram em maior precisão dos intervalos de confiança *fuzzy*. A metodologia de Buckley apresentou mais informações do que uma estimativa intervalar convencional.

Palavras-chave: Análise de regressão. *Bootstrap* paramétrico. Inferência bayesiana. Lógica *fuzzy*.

ABSTRACT

Using a quadratic regression model where, for example, the production of a certain culture is assessed by different doses of nutrients, might be interesting to obtain a confidence interval for the critical point that represents the value of doses that provide approximately the maximum production culture. This paper has as a main goal, proposes a construction of confidence intervals for the critical point using parametric bootstrap methodology, bayesian inference and fuzzy logic considering data from dry matter production of signal grass at different doses of phosphorus. For the parametric bootstrap analysis were considered different theoretical variances for the error and confidence intervals were constructed according to different expressions of variances of the critical point, beyond the bootstrap-t confidence interval. In bayesian analysis, bayesian confidence intervals (Highest Posterior Density - HPD) were found for the critical point. Thus, priors were defined for each parameter, including the critical point, and through the Gibbs sampler were made inferences. In fuzzy analysis, by the Zadeh's extension principle, a fuzzy quadratic regression model was found considering uncertainties on estimates of the parameters obtained by the least squares method. Thus, a fuzzy critical point and fuzzy confidence intervals were obtained using interval operations and α -cuts. A second fuzzy analysis was performed considering the Buckley's methodology, in which a fuzzy estimator to the critical point were constructed based on a classical confidence interval. For parametric bootstrap analysis, confidence intervals considered that the expression of the variance, which take into consideration the covariance between the parameters of the regression model showed higher precision, and the frequency distribution of the critical point tends to a positive asymmetric distribution and leptokurtic shape with increasing variance of theoretical. According to the priors assumed, the bayesian confidence intervals found for the critical point showed high precision. Considering the uncertainties treated by the fuzzy analysis, the increased levels of confidence, based on α -cuts, resulted in higher precision of the fuzzy confidence intervals. The Buckley's methodology provided more information than a interval estimate conventional.

Keywords: Regression analysis. Parametric bootstrap. Bayesian inference. Fuzzy logic.

LISTA DE FIGURAS

Figura1	Representação de uma função de pertinência triangular	42
Figura2	Princípio de extensão	43
Figura3	Dados de produção de matéria seca em função de diferentes doses de adubação fosfatada	49
Figura4	Fluxograma para obter os intervalos de confiança, considerando a metodologia <i>bootstrap</i>	55
Figura5	Fluxograma referente à análise <i>fuzzy</i> 1	60
Figura6	Fluxograma referente à análise <i>fuzzy</i> 2	63
Figura7	Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 18,25	70
Figura8	Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 22,81	70
Figura9	Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 30,41	71
Figura10	Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 45,61	71
Figura11	Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 91,23	72
Figura12	Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 182,45	72
Figura13	Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 273,68	73
Figura14	Traço da cadeia e gráfico da distribuição <i>a posteriori</i> marginal para o parâmetro β_0	81
Figura15	Traço da cadeia e gráfico da distribuição <i>a posteriori</i> marginal para o parâmetro β_2	81
Figura16	Traço da cadeia e gráfico da distribuição <i>a posteriori</i> marginal para o parâmetro η	82
Figura17	Traço da cadeia e gráfico da distribuição <i>a posteriori</i> marginal para o parâmetro σ^2	82
Figura18	Solução do modelo <i>fuzzy</i> de regressão quadrática, considerando os dados de produção de matéria seca (y) em função de diferentes doses de adubação fosfata (x)	85

Figura19	Solução defuzzificada do modelo <i>fuzzy</i> de regressão quadrática e solução clássica obtida pelo método dos mínimos quadrados, considerando os dados de produção de matéria seca (y) em função de diferentes doses de adubação fosfata (x)	85
Figura20	Representação gráfica da função de pertinência do ponto crítico <i>fuzzy</i>	87
Figura21	Representação gráfica da função de pertinência da estimativa <i>fuzzy</i> do ponto crítico, utilizando a metodologia de Buckley	90

LISTA DE TABELAS

Tabela1	Análise de variância para um modelo de regressão quadrática. . .	24
Tabela2	Valores estimados da produção de matéria seca na primeira amostra <i>bootstrap</i> para variância teórica igual a 18,25 e, estimativas dos parâmetros (β_0 , β_1 e β_2) do modelo de regressão quadrática, dos intervalos de confiança dos parâmetros, estimativa do ponto crítico (η) e intervalos de confiança (IC_1^1 e IC_2^1) para o ponto crítico.	65
Tabela3	Valores estimados da produção de matéria seca na segunda amostra <i>bootstrap</i> para variância teórica igual a 18,25 e, estimativas dos parâmetros (β_0 , β_1 e β_2) do modelo de regressão quadrática, dos intervalos de confiança dos parâmetros, estimativa do ponto crítico (η) e intervalos de confiança (IC_1^2 e IC_2^2) para o ponto crítico.	65
Tabela4	Valores estimados da produção de matéria seca na primeira amostra <i>bootstrap</i> para variância teórica igual a 91,23 e, estimativas dos parâmetros (β_0 , β_1 e β_2) do modelo de regressão quadrática, dos intervalos de confiança dos parâmetros, estimativa do ponto crítico (η) e intervalos de confiança (IC_1^1 e IC_2^1) para o ponto crítico.	66
Tabela5	Valores estimados da produção de matéria seca na segunda amostra <i>bootstrap</i> para variância teórica igual a 91,23 e, estimativas dos parâmetros (β_0 , β_1 e β_2) do modelo de regressão quadrática, dos intervalos de confiança dos parâmetros, estimativa do ponto crítico (η) e intervalos de confiança (IC_1^2 e IC_2^2) para o ponto crítico.	66
Tabela6	Valores médios do ponto crítico e dos diferentes intervalos de confiança, de acordo com as variâncias teóricas consideradas, utilizando o método de reamostragem.	68
Tabela7	Resultados para o teste de assimetria assintótico (g_1), excesso de curtose assintótico (g_2) e estatística W de Shapiro-Wilk referentes aos valores simulados do ponto crítico.	69
Tabela8	Estimativas dos critérios de Raftery e Lewis e, Geweke, utilizados na avaliação da convergência das cadeias amostradas.	79

Tabela9	Valores médios obtidos pela distribuição <i>a posteriori</i> dos parâmetros e seus respectivos limites inferior e superior dos intervalos de confiança bayesianos (HPD).	80
Tabela10	Estimativas dos parâmetros do modelo de regressão quadrática e respectivos erros padrão das estimativas.	83
Tabela11	Limites inferior (η_1^α) e superior (η_2^α) do intervalo de confiança <i>fuzzy</i> para o ponto crítico <i>fuzzy</i> , considerando α -níveis entre 0,20 e 1,00.	88
Tabela12	Estimativa <i>fuzzy</i> $\left(\hat{E}\right)_\alpha$ do ponto crítico considerando α -níveis entre 0,65 e 1,00.	89

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	REFERENCIAL TEÓRICO	17
2.1	Modelos de regressão	17
2.1.1	Modelo de regressão quadrática	19
2.1.2	Ponto crítico de modelo de regressão quadrática	25
2.1.3	Intervalos de confiança para o ponto crítico	25
2.2	Metodologia <i>bootstrap</i>	30
2.2.1	Metodologia <i>bootstrap</i> aplicada em regressão	32
2.3	Inferência bayesiana	33
2.3.1	Teorema de Bayes	33
2.3.2	Distribuições <i>a priori</i>	34
2.3.3	Distribuições <i>a posteriori</i>	35
2.3.4	Intervalos de credibilidade	35
2.3.5	Métodos de simulação	36
2.4	Lógica <i>fuzzy</i>	38
2.4.1	Conjunto <i>fuzzy</i> e função de pertinência	38
2.4.2	Níveis de um conjunto <i>fuzzy</i>	40
2.4.3	Números <i>fuzzy</i>	41
2.4.4	Princípio de extensão de Zadeh	43
2.4.5	Métodos de defuzzificação	44
2.4.6	Teoria da possibilidade	45
2.4.7	Estatística e lógica <i>fuzzy</i>	46
3	MATERIAL E MÉTODOS	48
3.1	Dados de produção de matéria seca	48
3.2	Análise <i>bootstrap</i>	49
3.3	Análise bayesiana	56
3.4	Análise <i>fuzzy</i>	57
3.4.1	Análise 1: ponto crítico <i>fuzzy</i> baseado na divisão de números <i>fuzzy</i>	57
3.4.2	Análise 2: estimador <i>fuzzy</i> do ponto crítico baseado na metodologia de Buckley	61
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	64
4.1	Análise <i>bootstrap</i>	64
4.2	Análise bayesiana	73
4.3	Análise <i>fuzzy</i>	83
4.3.1	Análise 1: ponto crítico <i>fuzzy</i> baseado na divisão de números <i>fuzzy</i>	83

4.3.2	Análise 2: estimador <i>fuzzy</i> do ponto crítico baseado na metodologia de Buckley	88
5	CONCLUSÃO	91
	REFERÊNCIAS	92
	APÊNDICE A	98
	APÊNDICE B	102
	APÊNDICE C	107
	APÊNDICE D	115

1 INTRODUÇÃO

Em diversas pesquisas, pode haver interesse em avaliar a produção de determinada cultura em função de diferentes doses de nutrientes. Considerando que o comportamento dos dados pode ser descrito por meio de um modelo de regressão quadrática, um dos resultados a ser analisado é a estimativa do ponto de máximo ou de mínimo do modelo, denominado de ponto crítico, o qual se refere, respectivamente, à estimativa da dose de nutriente que proporciona uma produção máxima ou mínima da cultura.

Um modelo de regressão quadrática, com uma variável independente, pode ser dado por $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_2 x_i^2$, no qual um estimador para o ponto crítico pode ser encontrado, derivando-se \hat{y}_i em relação a x e fazendo sua derivada igual a zero. Dependendo da forma do modelo, o ponto crítico pode ser caracterizado como um ponto de máximo, quando $\hat{\beta}_2 < 0$, ou ponto de mínimo, quando $\hat{\beta}_2 > 0$.

Admitindo que a curva do modelo apresente uma região suave em torno de um ponto de máximo, o pesquisador, por questão de economia, pode sugerir, por exemplo, a retirada de 10% de dose de nutriente a ser aplicada, obtendo aproximadamente a produção máxima da cultura. Atentando para tratamentos estatístico e *fuzzy* de tal situação, intervalos de confiança podem ser construídos para o ponto crítico. Dessa maneira, com certo nível de confiança, o pesquisador pode sugerir uma dose de nutriente que resulte num valor entre os limites do intervalo de confiança.

Diante disso, diversas metodologias podem ser utilizadas para auxiliar na construção dos intervalos de confiança para o ponto crítico, como: metodologia *bootstrap*, que consiste na obtenção de um novo conjunto de dados por reamostragem do conjunto de dados original; metodologia bayesiana, na qual intervalos de confiança baseados na máxima densidade *a posteriori* podem ser determinados para parâmetros de um modelo e; metodologia *fuzzy*, em que operações intervalares *fuzzy* podem ser realizadas para avaliar incertezas presentes em modelos estatísticos.

Dessa maneira, os objetivos deste trabalho são:

1. obter intervalos de confiança para o ponto crítico, considerando diferentes situações experimentais através da metodologia *bootstrap* paramétrico, de acordo com diferentes variâncias teóricas para o erro e diferentes fórmulas de variância do ponto crítico;
2. determinar intervalos de confiança bayesiano para o ponto crítico, considerando intervalos de máxima densidade *a posteriori*;
3. obter intervalos de confiança *fuzzy*, considerando um ponto crítico *fuzzy* baseado na divisão intervalar de números *fuzzy*;
4. realizar uma análise *fuzzy* com base na metodologia de Buckley para determinar um estimador *fuzzy* para o ponto crítico baseado em um intervalo de confiança convencional.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Modelos de regressão

Com o objetivo de analisar a produção de uma cultura, um pesquisador pode fixar doses crescentes de um determinado nutriente e avaliar a influência destas na produção da cultura. Tal análise pode ser realizada por meio de uma relação funcional entre as doses de nutriente, denominada de variável independente ou variável regressora, x , e a produção da cultura, denominada de variável independente ou variável resposta, y , por meio de um modelo de regressão.

Draper e Smith (1998) classificaram os modelos de regressão, em relação aos seus parâmetros, em lineares, linearizáveis e não-lineares:

- a) modelos lineares: aqueles que são lineares em relação aos parâmetros, ou seja, as derivadas parciais da variável resposta $y = f(x, \theta)$, em relação a cada parâmetro, não dependem dos próprios parâmetros:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} f_i(x, \theta) = g(x) \quad (1)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, p$, sendo que n é o número total de observações e p é o número de parâmetros do modelo;

- b) modelos linearizáveis: aqueles que podem ser transformados em lineares, por meio de alguma transformação, por exemplo:

$$y = \lambda^x \varepsilon \quad (2)$$

na qual o erro ε é denominado multiplicativo;

- c) modelos não lineares: são aqueles que não se enquadram nos casos a) e b), por exemplo:

$$y = \lambda^x + \varepsilon \quad (3)$$

em que o erro ε é denominado aditivo e não existe transformação capaz de tornar o modelo linear. O modelo é dito não-linear, pois a derivada em relação ao parâmetro é dependente do parâmetro.

De acordo com Hoffmann e Vieira (1998), um modelo linear, denominado de modelo de regressão linear múltipla, pode ser expresso como:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_{p-1} x_{i,p-1} + \varepsilon_i \quad (4)$$

em que:

y_i representa os valores observados da variável dependente;

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ são os parâmetros a serem estimados;

$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,p-1}$ representa o i -ésimo valor fixo de uma variável independente;

ε_i são os erros experimentais relacionados com os valores observados y_i que, em geral, são considerados independentes e normalmente distribuídos com média zero e variância constante.

Existem vários métodos que podem ser utilizados para a estimação dos parâmetros, sendo que os mais comumente empregados são o método dos mínimos quadrados e o da máxima verossimilhança.

Draper e Smith (1998) distinguiram os modelos de regressão em função das suposições do erro da seguinte maneira:

- a) modelos ordinários: aqueles cuja estrutura dos erros não viola nenhuma das pressuposições. Pode ser escrito de forma mais eficiente como $\xi \sim N(\mu, I\sigma^2)$, em que ξ é um vetor de erros aleatórios independentes e normalmente distribuídos;
- b) modelos ponderados: são aqueles cuja estrutura dos erros viola a pressuposição de homogeneidade de variâncias. Nesse caso, diz-se que os erros são heterocedásticos. Escreve-se $\xi \sim N(\mu, D\sigma^2)$, em que D é uma matriz

diagonal, positiva definida, que pondera a variância σ^2 ;

- c) modelos generalizados: são aqueles cuja estrutura dos erros viola a pressuposição de independência dos erros e possivelmente a de homogeneidade de variâncias. Diz-se que os erros são correlacionados (e possivelmente heterocedásticos). Escreve-se $\xi \sim N(\mu, W\sigma^2)$, sendo W uma matriz simétrica, positiva definida, que representa as variâncias e covariâncias dos erros.

2.1.1 Modelo de regressão quadrática

Segundo Kutner, Nachtsheim e Neter (2005), o modelo de regressão quadrática, com uma variável independente, é:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i \quad (5)$$

em que:

y_i representa o i -ésimo valor observado de uma variável dependente;

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ são os parâmetros a serem estimados;

x_i representa o i -ésimo valor fixo de uma variável independente;

ε_i representa o i -ésimo erro aleatório, associado à observação y_i que, em geral, são considerados independentes e normalmente distribuídos com média zero e variância constante σ^2 .

Em termos matriciais, pode-se escrevê-lo como:

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

em que:

\underline{Y} é um vetor de realizações da variável dependente, de dimensões $n \times 1$;

X é a matriz dos coeficientes associados aos parâmetros ou matriz do planejamento, de dimensões $n \times 3$;

$\underline{\beta}$ é o vetor de parâmetros, de dimensões 3×1 ;

$\underline{\varepsilon}$ é o vetor de variáveis aleatórias não observáveis (erros experimentais), com dimensões $n \times 1$, os quais são assumidos serem independentes e normalmente distribuídos.

Para estimar os parâmetros do modelo, pode-se utilizar o método dos mínimos quadrados, que consiste em minimizar a soma de quadrados dos erros (SQE), obtendo o sistema de equações normais (SEN). Para tanto, tem-se o vetor de erros e o SQE , conforme apresentado a seguir:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{Y} - X\underline{\beta} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} SQE &= \underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon} = (\underline{Y} - X\underline{\beta})' (\underline{Y} - X\underline{\beta}) \\ &= (\underline{Y}' - \underline{\beta}'X') (\underline{Y} - X\underline{\beta}) \\ &= \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{Y}'X\underline{\beta} - \underline{\beta}'X'\underline{Y} + \underline{\beta}'X'X\underline{\beta} \\ &= \underline{Y}'\underline{Y} - 2\underline{\beta}'X'\underline{Y} + \underline{\beta}'X'X\underline{\beta} \end{aligned} \quad (9)$$

Derivando SQE em relação a β , obtém-se:

$$\frac{\partial \tilde{Y}'\tilde{Y}}{\partial \beta} - 2\frac{\partial \beta' X'\tilde{Y}}{\partial \beta} + \frac{\partial \beta' X'X\beta}{\partial \beta} = -2X'\tilde{Y} + 2X'X\beta \quad (10)$$

na qual, denominando $\hat{\beta}$ como o vetor que anula a derivada, obtém-se o SEN, de acordo com Searle (1971):

$$X'X\hat{\beta} = X'\tilde{Y} \quad (11)$$

Para o caso do modelo de regressão quadrática em questão, as matrizes que constituem o SEN são as seguintes:

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$X'\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

Assim, o sistema de equações normais $X'X\hat{\beta} = X'\tilde{Y}$ tem a seguinte

forma:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

Segundo Kutner, Nachtsheim e Neter (2005), o sistema de equações normais pode também ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &= \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i &= \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{aligned} \quad (15)$$

Dado que a matriz X possui posto coluna completo, então $X'X$ é uma matriz positiva definida e, portanto, invertível. Assim, como em Kutner, Nachtsheim e Neter (2005), a solução única é dada por:

$$\begin{aligned} X'X\hat{\beta} &= X'Y \\ (X'X)^{-1}X'X\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \\ \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \end{aligned} \quad (16)$$

Dessa maneira, a esperança e variância de $\hat{\beta}$ são dadas por:

$$\begin{aligned}
 E \left[\hat{\beta} \right] &= E \left[(X'X)^{-1} X'Y \right] \\
 &= (X'X)^{-1} X' E \left[Y \right] \\
 &= (X'X)^{-1} X' X \beta \\
 &= \beta
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 V \left[\hat{\beta} \right] &= V \left[(X'X)^{-1} X'Y \right] \\
 &= (X'X)^{-1} X' V \left[Y \right] \left[(X'X)^{-1} X' \right]' \\
 &= \sigma^2 (X'X)^{-1} X' \left[(X'X)^{-1} X' \right]' \\
 &= \sigma^2 (X'X)^{-1} X' X (X'X)^{-1} \\
 &= \sigma^2 (X'X)^{-1}
 \end{aligned} \tag{18}$$

A covariância entre dois elementos de $\hat{\beta}$, β_k e β_j , para $k, j = 0, 1, 2, k \neq j$, é dada por $\sigma^2 (X'X)^{-1} = \sigma^2 T_{k+1, j+1}$, sendo $T_{k+1, j+1}$ o elemento da $(k+1)$ -ésima linha e $(j+1)$ -ésima coluna de $(X'X)^{-1}$.

Encontrada a solução do SEN, pode-se determinar as somas de quadrados do modelo de regressão quadrática, obtendo a análise de variância. De acordo com Charnet et al. (2008), pode-se definir:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \tag{19}$$

em que:

$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} = Y'Y - Y'JY = Y'Y - C$ é a soma de quadrados total corrigida pela média, denominada por SQT , representando a variação

total de \underline{Y} em torno de sua média;

$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y}$ é a soma de quadrados do erro, denominada por SQE ;

$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y} - C$ é a soma de quadrados de regressão, denominada por $SQReg$, representando a variação das esperanças específicas de \underline{Y} , dado X , em torno da média.

Dessa maneira, tem-se que:

$$SQT = SQE + SQReg \quad (20)$$

Na Tabela 1, tem-se o esquema de análise de variância para o modelo de regressão quadrática, na qual o número de graus de liberdade (G.L.), expressões para o cálculo das somas de quadrados (S.Q.), quadrados médios (Q.M.) e teste F são apresentados, sendo que:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQE}{n-3} = QME \quad (21)$$

em que QME é o quadrado médio dos erros.

Tabela 1 Análise de variância para um modelo de regressão quadrática.

F.V.	G.L.	S.Q.	Q.M	F
Regressão	2	$\hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y} - C$	$\frac{SQReg}{2}$	$\frac{QMReg}{QME}$
Erro	n-3	$\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y}$	$\frac{SQE}{n-3}$	
Total	n-1	$\underline{Y}'\underline{Y} - C$		

2.1.2 Ponto crítico de modelo de regressão quadrática

Seja o modelo de regressão quadrática, com uma variável independente:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_2 x_i^2 \quad (22)$$

A obtenção de um ponto crítico de uma dada função é feita conforme Guidorizzi (2001), derivando-se o modelo (22) em relação a x e igualando a zero:

$$\frac{d\hat{y}_i}{dx} = \frac{d(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_2 x_i^2)}{dx} = \hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 x_i = 0 \quad (23)$$

Dessa maneira, o estimador do ponto crítico é dado por:

$$\hat{x}_i = \hat{\eta} = -\frac{\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2} \quad (24)$$

De acordo com a derivada segunda do modelo (22), dada por:

$$\frac{d^2\hat{y}_i}{dx^2} = 2\hat{\beta}_2$$

o estimador do ponto crítico será a abscissa de um ponto de máximo se $\hat{\beta}_2$ for negativo e será de mínimo se $\hat{\beta}_2$ for positivo.

2.1.3 Intervalos de confiança para o ponto crítico

Considerando que a estimativa pontual do ponto crítico é dada por $\hat{\eta}$, toda a inferência estatística pode ser realizada com base nessa estimativa. O problema da estimação pontual é que ela não avalia a precisão da estimativa obtida. Dessa maneira, pode-se associar medidas de precisão, como o erro padrão e intervalos de confiança, traduzindo incertezas presente na estimação pontual.

De acordo com Casella e Berger (2010), considerando uma amostra $x =$

(x_1, x_2, \dots, x_n) , intervalos de confiança podem ser construídos da forma:

$$[L(x), U(x)] \quad (25)$$

em que $L(x)$ e $U(x)$ são, respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo de confiança.

Dessa maneira, para um parâmetro θ , tem-se:

$$P[L(x) \leq \theta \leq U(x)] = 1 - \alpha \quad (26)$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$, ou seja, diante de várias realizações do experimento, $100(1 - \alpha)\%$ dos intervalos de confiança obtidos conterão o verdadeiro valor do parâmetro θ . Com isso, tem-se que o intervalo de confiança é uma quantidade aleatória e o parâmetro uma quantidade fixa.

Intervalos de confiança para o ponto crítico, cujo estimador envolve um quociente de variáveis aleatórias, podem ser construídos considerando diferentes metodologias.

Fieller (1954) propôs um método para construção de intervalos de confiança para um quociente de variáveis aleatórias, na qual, de acordo com o quociente

$$z = \frac{x_1}{x_2} \quad (27)$$

em que $x_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $x_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ e $\mu = \frac{m_1}{m_2}$, a variável $u = x_1 - \mu x_2$ terá distribuição normal com média zero e variância $V(u) = \sigma_1^2 + \mu^2 \sigma_2^2$. Sendo s_1^2 e s_2^2 estimadores não viesados de σ_1^2 e σ_2^2 , respectivamente, o quociente

$$\frac{u}{\sqrt{V(\hat{u})}} = \frac{x_1 - \mu x_2}{\sqrt{s_1^2 + \mu^2 s_2^2}} \quad (28)$$

tem distribuição t de Student. Dessa maneira, a um certo nível de probabilidade

α , tem-se:

$$P \left[-t \leq \frac{x_1 - \mu x_2}{\sqrt{s_1^2 + \mu^2 s_2^2}} \leq t \right] = 1 - \alpha \quad (29)$$

na qual a inequação:

$$\frac{x_1 - \mu x_2}{\sqrt{s_1^2 + \mu^2 s_2^2}} \leq t \quad (30)$$

fornece os extremos do intervalo de confiança.

D'Aulísio, Pimentel-Gomes e Nogueira (1976) estudaram a distribuição do quociente:

$$x = -\frac{\hat{b}}{2\hat{c}} \quad (31)$$

que se refere ao ponto de máximo ou de mínimo da função de produção estimada:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}P_1(x) + \hat{c}P_2(x) \quad (32)$$

na qual:

$P_1(x) = x - \bar{x}$ e $P_2(x) = x^2 - k$ são polinômios ortogonais, sendo \bar{x} a média dos valores de x e k um número real;

\hat{a} , \hat{b} e \hat{c} são os estimadores dos parâmetros, sendo \hat{b} e \hat{c} independentes;

\hat{y} são os valores preditos.

Para tanto, foram gerados 16000 dados de distribuição normal. Após ajustados através de variâncias teóricas, foram obtidos 8000 valores para x . As variâncias utilizadas foram 0,015625; 0,0625; 0,25; 1,00; 2,00; 4,00; 6,25 e 9,00. Verificou-se que a distribuição de x foge completamente da normalidade, exceto talvez para o valor mais baixo de σ^2 estudado, e que à medida que crescem os valores das variâncias teóricas estudadas, a distribuição tende a ser leptocúrtica. Além da análise da distribuição, intervalos de confiança foram obtidos para x ,

considerando o método de Fieller; a fórmula da variância comum, dada por:

$$V_1(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{N}}{N-1} \quad (33)$$

em que x_i são os valores simulados e; a fórmula da variância obtida pela diferenciação de $x = -\frac{\hat{b}}{2\hat{c}}$:

$$V_2(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\hat{c}^2} V(\hat{b}) + \frac{\hat{b}^2}{\hat{c}^4} V(\hat{c}) \right] \quad (34)$$

em que $V(\hat{b})$ e $V(\hat{c})$ foram obtidas pelas fórmulas de variâncias usuais e, $\bar{\hat{c}}$ e $\bar{\hat{b}}$ são as médias das estimativas dos valores simulados. Para $\sigma^2 \geq 0,25$, o método de Fieller resultou em intervalos de confiança com extremos infinitos, sendo que os intervalos construídos, considerando $V_2(x)$, apresentaram maior precisão.

Freitas (1978) estudou a distribuição dos erros experimentais associados ao ponto que determina a produção máxima da cultura de algodão, dado por:

$$\sqrt{x} = -\frac{\hat{b}}{2\hat{c}} \quad (35)$$

para o modelo de produção:

$$y_i = a + bx_i^{1/2} + cx_i + e_i \quad (36)$$

em que:

y_i representa a produção obtida na i -ésima dose de nutriente, em quilogramas por hectare;

x_i representa a i -ésima quantidade de dose de nutriente (N , P_2O_5 ou K_2O), em quilogramas por hectare.

Dessa maneira, os erros foram considerados aleatórios e independentes com distribuição normal de média zero e variância σ^2 . Verificou-se que a dis-

tribuição do quociente foi aproximadamente normal para as variâncias $\sigma^2 = 5$ e $\sigma^2 = 10$. Já para as variâncias $\sigma^2 = 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ e 50 , a distribuição caracterizou-se por ser leptocúrtica e com assimetria positiva. Considerando os valores simulados, intervalos de confiança considerando o método de Fieller, $V_1(\sqrt{x})$ e $V_2(\sqrt{x})$, conforme D'Aulísio, Pimentel-Gomes e Nogueira (1976), foram construídos, sendo que diante dos resultados obtidos, os intervalos considerando $V_2(\sqrt{x})$ apresentaram maior precisão.

De acordo com o trabalho desenvolvido por Freitas (1978), Nunes et al. (2004) utilizaram simulação Monte Carlo para avaliar diferentes fórmulas de variâncias para o ponto crítico de um modelo de regressão quadrática, dado por:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x + \hat{c}x^2 \quad (37)$$

no qual o estimador do ponto é dado por:

$$\hat{x} = \frac{\hat{b}}{-2\hat{c}} \quad (38)$$

Para tanto, consideraram-se as variâncias teóricas $\sigma^2 = 0,1, 0,5, 1,0, 5, 10, 15, 20$ e 50 para o erro. As estimativas da variância do ponto crítico foram obtidas por meio das fórmulas da variância comum, por diferenciação do estimador do ponto crítico (D'AULÍSIO; PIMENTEL-GOMES; NOGUEIRA, 1976) e pela fórmula demonstrada para o cálculo da variância de uma razão, considerando a covariância entre \hat{b} e \hat{c} (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974). Intervalos de confiança para o ponto crítico foram encontrados considerando as diferentes fórmulas de variâncias. Pôde-se concluir que a variância do ponto crítico calculada, usando-se a expressão que leva em consideração a covariância entre \hat{b} e \hat{c} , apresentaram resultados mais satisfatórios, assim como os intervalos de confiança que utilizaram tal fórmula. A variância teórica afetou as estimativas do ponto crítico, sendo que maiores variâncias foram relacionadas com maiores valores médios. A distribuição do ponto crítico apresentou uma forte tendência de assimetria à direita e ao formato leptocúrtico para $\sigma^2 \geq 10$.

Hirschberg e Lye (2005) investigaram a construção de intervalos de confi-

ança para o ponto crítico de modelos de regressão quadrática, utilizando o método Delta; método de Fieller; a primeira derivada do modelo de regressão quadrática; inferência bayesiana, na qual uma priori de Jeffreys foi assumida para o ponto crítico; teste de razão de verossimilhança e; método *bootstrap*, no qual intervalos de confiança percentil e *bootstrap-t* foram construídos, sendo que a estimativa do erro padrão do ponto crítico foi obtida utilizando o método Delta. Diante das simulações realizadas, os métodos *bootstrap-t* e Delta apresentaram maior precisão, sendo que o método de Fieller e o teste de razão de verossimilhança apresentaram intervalos de confiança com extremos infinitos.

2.2 Metodologia *bootstrap*

Em inferência estatística, características da população são analisadas com base em amostras. Considerando que a inferência é realizada admitindo o Teorema Central do Limite, em que amostras suficientemente grandes são consideradas, a metodologia *bootstrap* surge como alternativa para analisar situações em que as amostras não são suficientemente grandes, assim como, para obter aproximações de distribuições amostrais de determinadas estatísticas.

A metodologia *bootstrap*, desenvolvida por Efron (1979), consiste em admitir a amostra original como se fosse a própria população, sendo que para isso, a amostra original deve representar bem a população em estudo. Dessa maneira, novas amostras com reposição são obtidas a partir de reamostragem da amostra original, denominadas de amostras *bootstrap*, na qual representam diferentes situações experimentais com a idéia de que o experimento é repetido por diversas vezes.

Para cada amostra *bootstrap*, é calculada uma estimativa para a estatística de interesse. Ao final do processo de reamostragem, o conjunto das estimativas obtidas, denominadas de estimativas *bootstrap*, dá origem à distribuição *bootstrap*, que tem aproximadamente a mesma forma e dispersão da distribuição amostral da estatística, porém está centrada no valor da estatística original e não no valor do parâmetro de interesse (EFRON; TIBSHIRANI, 1993). Com base nas estimativas

bootstrap, intervalos de confiança *bootstrap* podem ser encontrados, realizando milhares de remostragens para que as oscilações provocadas pela aleatoriedade do processo sejam minimizadas. O número de reamostragem mínimo é igual a 1000 e para a grande maioria das situações, um número de reamostragem igual a 2000 fornece excelentes resultados (FERREIRA, 2009).

A metodologia *bootstrap* pode ser implementada tanto de forma não paramétrica quanto de forma paramétrica. No caso do *bootstrap* não paramétrico, a amostragem é feita com reposição da amostra original, supondo que as observações são obtidas a partir de uma distribuição empírica que designa uma probabilidade igual a $1/n$ para cada uma das observações y_1, y_2, \dots, y_n . No caso paramétrico, a amostragem é realizada com base numa distribuição ajustada às observações amostrais.

A partir de uma amostra *bootstrap* $B_b = \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*\}$, em que y_i^* é uma escolha aleatória de $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, calcula-se uma estimativa da estatística de interesse, $\hat{\theta}_b^*$. Realizando esse processo para $b = 1, \dots, B$ vezes, pode-se obter, conforme Efron e Tibshirani (1993), a estimativa *bootstrap* do erro padrão da estatística de interesse:

$$\hat{\sigma}_B^* (\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b^* - \overline{\hat{\theta}^*})^2}{B-1}} \quad (39)$$

em que $\hat{\theta}_b^*$ é o estimador calculado a partir da b -ésima amostra e $\overline{\hat{\theta}^*} = \frac{\sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b^*}{B}$ é a média dos valores reamostrados.

Dessa maneira, a metodologia *bootstrap* oferece um meio alternativo para calcular erros padrão, com a grande vantagem de que a fórmula apresentada anteriormente é aplicável a qualquer estimador (CASELLA; BERGER, 2010).

2.2.1 Metodologia *bootstrap* aplicada em regressão

De acordo com Draper e Smith (1998), dois métodos de reamostragem *bootstrap* não paramétricos podem ser utilizados em modelos de regressão, que são: *Bootstrap* residual e *Bootstrap* de pares. Ambos os métodos são descritos a seguir:

a) *Bootstrap* residual:

1. ajuste um modelo de regressão, considerando os dados da amostra original e obtenha os n resíduos, $\hat{\varepsilon}$;
2. selecione uma amostra aleatória de tamanho n dos resíduos $\hat{\varepsilon}$ obtidos no passo 1, utilizando reamostragem com reposição, com probabilidade $1/n$ para cada resíduo selecionado, obtendo $\tilde{\varepsilon}^*$;
3. gere novos valores de \tilde{Y} fazendo:

$$\tilde{Y}^* = X\tilde{\beta} + \tilde{\varepsilon}^*$$

em que $\tilde{\varepsilon}^*$ são os resíduos obtidos no passo 2 e $\tilde{\beta}$ são as estimativas dos parâmetros obtidas no passo 1;

4. ajuste um modelo de regressão, considerando \tilde{Y}^* , pelo método dos mínimos quadrados, obtendo novas estimativas para os parâmetros, $\tilde{\beta}^*$;
5. Repita os passos 1 a 4, R vezes.

b) *Bootstrap* de pares:

1. reamostre com reposição n pares dos valores originais (y_i, x_i) , com probabilidade $1/n$ para cada par;
2. ajuste um modelo de regressão, considerando os n pares reamostrados no passo 1, pelo método dos mínimos quadrados, obtendo novas estimativas para os parâmetros, $\tilde{\beta}^*$;

3. Repita os passos 1 a 4, R vezes.

Para modelos de regressão, a metodologia *bootstrap* paramétrico (EFRON; TIBSHIRANI, 1993) consiste em, sob hipótese de normalidade, tomar amostras ξ^* da distribuição $N(0, \sigma^2)$, em que σ^2 é o quadrado médio do erro da regressão, gerando novos valores da variável resposta, \underline{Y} , por meio do modelo $\underline{Y}^* = X\hat{\underline{\beta}} + \xi^*$, em que $\hat{\underline{\beta}}$ são os valores estimados dos parâmetros obtidos pelo método dos mínimos quadrados, considerando os dados originais.

2.3 Inferência bayesiana

Na inferência frequentista, um determinado parâmetro θ é considerado como um valor fixo ou constante, enquanto que na inferência bayesiana, θ é considerado como uma variável aleatória. Dessa maneira, a inferência bayesiana consiste em assumir uma distribuição *a priori* para θ , traduzir informações referentes aos dados amostrais através de uma função de verossimilhança, e obter por meio do teorema de Bayes, a distribuição *a posteriori* para θ . O grau de incerteza ou informação que se tem a respeito de θ é representado pela sua distribuição *a priori*, sendo que ocorrido o experimento, a inferência é realizada com base na distribuição *a posteriori*.

2.3.1 Teorema de Bayes

De acordo com Paulino, Turkman e Murteira (2003), o teorema de Bayes é um dos resultados da matemática que se propõe a caracterizar a aprendizagem com a experiência, isto é, modificar a atitude inicial em relação aos "antecedentes", depois de ter a informação adicional de que certo evento se realizou.

Considerando A_i como eventos disjuntos de um espaço amostral e B como

um evento do espaço amostral, o teorema de Bayes é dado por:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)} \quad (40)$$

em que, considerando A como parâmetros desconhecidos e B como variáveis aleatórias correspondentes à amostra, $P(B|A)$ representa a função de verossimilhança relacionada à distribuição probabilística dos dados amostrais, $P(A)$ são distribuições *a priori*, que representam o conhecimento prévio a respeito dos parâmetros e $P(A|B)$ corresponde à distribuição *a posteriori* dos parâmetros, considerando que o experimento ocorreu.

Com isso, a informação que se tem a respeito de um parâmetro θ , representada pela sua distribuição *a priori*, $p(\theta)$, pode ser aumentada, observando-se uma variável aleatória X relacionada com θ , obtendo a distribuição amostral $p(x|\theta)$, na qual para um valor fixo de x , a função $L(\theta; x) = p(x|\theta)$ fornece a verossimilhança de cada um dos possíveis valores de θ (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003). Assim, o teorema de Bayes é dado da seguinte maneira:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int p(\theta,x) d\theta} \quad (41)$$

em que θ é contínuo.

Como o denominador não depende de θ , servindo apenas como uma constante normalizadora de $p(\theta|x)$, o teorema pode ser reescrito como:

$$p(\theta|x) \propto p(x|\theta)p(\theta) \quad (42)$$

2.3.2 Distribuições *a priori*

A informação prévia que se tem a respeito de um determinado parâmetro é representada pela sua distribuição *a priori*. Quando o pesquisador tem alguma informação sobre o parâmetro em estudo, ele pode trabalhar com uma priori de-

nominada de priori informativa. Uma priori é caracterizada como não informativa quando a informação dos dados é dominante ou quando se deseja representar o desconhecimento sobre θ (BOX; TIAO, 1992). Uma das prioris não informativas mais utilizada é a priori de Jeffreys (1961).

2.3.3 Distribuições *a posteriori*

Considerando θ como um vetor de parâmetros e θ_i como um parâmetro específico, a distribuição *a posteriori* conjunta, dada por $p(\theta|x)$, deve ser integrada em relação a todos os parâmetros, exceto a θ_i . Dessa maneira, encontra-se uma distribuição para θ_i , denominada de distribuição marginal de θ_i , sendo expressa por:

$$p(\theta_i|x) = \int \dots \int p(\theta_i, \theta_{-i}|x) d\theta_{-i} \quad (43)$$

em que $\theta_{-i} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_j)$ é o conjunto complementar de parâmetros para θ_i (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

Com base na distribuição marginal *a posteriori*, que contém toda a informação probabilística a respeito do parâmetro, estimativas bayesianas pontuais podem ser encontradas, por exemplo, moda, média e mediana *a posteriori*, além de estimativas bayesianas intervalares, através da construção de intervalos de credibilidade (BOX; TIAO, 1992).

2.3.4 Intervalos de credibilidade

Uma alternativa aos intervalos de confiança abordados na estatística convencional, considerados como intervalos aleatórios, é o intervalo de confiança bayesiano, denominado de intervalo de credibilidade, no qual a quantidade aleatória é o parâmetro.

O intervalo C será um intervalo de credibilidade de $100(1 - \alpha)\%$, ou

nível de credibilidade $1 - \alpha$, para θ se $P(\theta \in C) \geq 1 - \alpha$. Dessa maneira, a definição probabilística expressa a pertinência ou não de θ ao intervalo C . Com o mesmo grau de credibilidade, existe uma infinidade de regiões de credibilidade, surgindo o intervalo de máxima densidade *a posteriori* (*Highest Posterior Density*) ou intervalo HPD, no qual é um intervalo de credibilidade de comprimento mínimo, tomando-se os valores de θ com maior densidade *a posteriori* (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

2.3.5 Métodos de simulação

Em diversas situações, a distribuição marginal *a posteriori* de um determinado parâmetro θ é difícil de ser encontrada, devido à impossibilidade de calcular analiticamente as integrais envolvidas. Dessa maneira, pode-se utilizar métodos aproximados baseados em simulação estocástica, como os métodos não iterativos e iterativos.

Dentre os métodos não iterativos, têm-se os métodos de reamostragem por rejeição e ponderada e, os métodos de Monte Carlo. Como métodos iterativos, têm-se os métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC), que consistem em gerar valores de uma distribuição condicional *a posteriori* para cada parâmetro, como os algoritmos Gibbs (GELFAND; SMITH, 1990) e de Metropolis-Hastings (HASTINGS, 1970).

De acordo com Paulino, Turkman e Murteira (2003), o algoritmo Gibbs ou método de amostragem Gibbs é baseado no fato de que se a distribuição *a posteriori* conjunta, $p(\theta|x)$ for positiva, então, é unicamente determinada pelas distribuições condicionais completas, $p(\theta_i|\theta_{-i},x)$. Segundo Gamerman (1997), a amostragem Gibbs pode ser descrita da seguinte forma:

1. inicie o contador de iterações da cadeia $l = 1$ e escolha valores iniciais $\theta^0 = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_j^{(0)})$;
2. obtenha um novo valor $\theta^l = (\theta_1^{(l)}, \dots, \theta_j^{(l)})$, a partir de $\theta^{(l-1)}$, por meio de

sucessivas gerações de valores:

$$\begin{aligned}\theta_1^{(l)} &\sim p\left(\theta_1|\theta_2^{(l-1)},\theta_3^{(l-1)},\dots,\theta_j^{(l-1)},x\right) \\ \theta_2^{(l)} &\sim p\left(\theta_2|\theta_1^{(l)},\theta_3^{(l-1)},\dots,\theta_j^{(l-1)},x\right) \\ &\vdots \\ \theta_j^{(l)} &\sim p\left(\theta_j|\theta_1^{(l)},\theta_2^{(l)},\dots,\theta_{j-1}^{(l)},x\right)\end{aligned}$$

3. mude o contador l para $l + 1$ e retorne ao passo 2, até atingir a convergência.

No caso em que a forma da distribuição condicional completa não é reconhecida, pode-se utilizar o algoritmo de Metropolis-Hastings. De acordo com Chib e Greenberg (1995), o algoritmo de Metropolis-Hastings pode ser descrito da seguinte maneira:

1. inicie o contador de iterações da cadeia $v = 1$ e especifique valores iniciais $\theta^0 = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_j^{(0)})$;
2. gere um novo valor θ^* de uma distribuição auxiliar proposta $q(\cdot|\theta)$;
3. calcule a probabilidade de aceitação $\alpha(\theta, \theta^*) = \min\left(1, \frac{p(\theta^*|x)q(\theta|\theta^*)}{p(\theta|x)q(\theta^*|\theta)}\right)$, em que p é a distribuição de interesse, e gere $u \sim U(0,1)$;
4. se $u < \alpha(\theta, \theta^*)$, então, aceite o novo valor, θ^* , e faça $\theta^{(v+1)} = \theta^*$, caso contrário, rejeite e faça $\theta^{(v+1)} = \theta^{(v)}$;
5. incremente o contador de v para $v + 1$ e volte ao passo 2.

Nos métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov, tem-se a necessidade de diagnosticar a convergência das cadeias para a distribuição original. Para tanto, têm-se os métodos informais e formais. Os métodos informais foram inicialmente propostos por Gelfand e Smith (1990), na qual sugeriram, por exemplo, a técnica gráfica que consiste em observar a trajetória da cadeia ao longo das iterações, sendo que após um período inicial, se a cadeia apresentar o mesmo comportamento, então, pode-se concluir a convergência. Dentre os métodos formais,

podem-se destacar os critérios propostos por Raftery e Lewis (1992) e Geweke (1992).

O critério de Raftery e Lewis (1992) estima o número de iterações necessárias para que o algoritmo Gibbs apresente convergência, sendo que o método fornece as estimativas do *burn-in*, o número total de iterações que devem ser computadas e a distância mínima de uma iteração à outra (*thin*), para se obter a subamostra aproximadamente independente. A regra de decisão é baseada no fator de dependência, que é responsável pelo acréscimo multiplicativo ao número de iterações necessárias para se alcançar a convergência. Se o fator de dependência for maior que cinco, pode-se concluir que a cadeia não atingiu convergência.

O critério de Geweke (1992) propõe uma análise da convergência baseada no teste de igualdade de médias da primeira e da última parte da cadeia de tamanho N , geralmente, as primeiras $0,1N$ iterações e as últimas $0,5N$ iterações. Para tanto, técnicas de análise espectral são utilizadas para avaliar a convergência da cadeia. A regra de decisão é baseada na estimativa de um valor p , sendo que se esse valor for menor que um nível de significância adotado pelo pesquisador, conclui-se que a cadeia não atingiu convergência.

2.4 Lógica *fuzzy*

2.4.1 Conjunto *fuzzy* e função de pertinência

A lógica *fuzzy*, também conhecida como lógica nebulosa, lógica difusa ou teoria das possibilidades, é uma extensão da lógica clássica, a qual se baseia na teoria dos conjuntos *fuzzy*. A lógica *fuzzy* foi inicialmente introduzida por Zadeh (1965), tendo como objetivo, trabalhar informações imprecisas.

Um conjunto clássico pode ser caracterizado por sua função característica. De acordo com Barros e Bassanezi (2010), sejam U um conjunto universo e A um

subconjunto de U , a função característica de A é definida como:

$$\chi_A : U \rightarrow \{0,1\} \quad (44)$$

em que:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

sendo que χ_A é uma função cujo domínio é U e a imagem está contida no conjunto $\{0,1\}$, com $\chi_A(x) = 1$ indicando que o elemento x está em A , enquanto $\chi_A(x) = 0$ indica que x não é elemento de A .

De acordo com Tanaka (1997), um conjunto ou subconjunto *fuzzy* A de um conjunto universo U é definido por uma função de pertinência μ_A representada por:

$$\mu_A : U \rightarrow [0,1] \quad (45)$$

na qual $\mu_A(x) \in [0,1]$ é o grau de pertinência com que o elemento x de U pertence ao conjunto *fuzzy* A .

Os conjuntos *fuzzy* podem ser expressados de maneira discreta ou contínua. Quando o conjunto universo U é discreto, um conjunto *fuzzy* A pode ser representado como:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)/x_i \quad (46)$$

em que o símbolo $/$ é apenas usado para associar o elemento do conjunto universo U e seu grau de pertinência ao conjunto *fuzzy* A , assim como o sinal $+$ que não significa soma, mas sim conexão entre os elementos.

Quando o conjunto universo U é contínuo, um conjunto *fuzzy* A pode ser

representado como:

$$A = \int_U \mu_A(x_i)/x_i \quad (47)$$

em que o símbolo \int não tem nenhuma conexão com integral, assim como \sum com somatório, no caso discreto.

Operações que envolvem conjuntos clássicos como união, intersecção e complemento também podem ser realizadas por meio de conjuntos *fuzzy*. Sejam A e B conjuntos *fuzzy*. De acordo com Tanaka (1997), as funções de pertinência que representam os conjuntos *fuzzy* união, intersecção e complementar são dadas, respectivamente, por:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \quad (48)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \quad (49)$$

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in U \quad (50)$$

$$\mu_{B'}(x) = 1 - \mu_B(x), \forall x \in U \quad (51)$$

2.4.2 Níveis de um conjunto *fuzzy*

De acordo com Tsoukalas e Uhrig (1997), com qualquer conjunto *fuzzy* A , pode-se associar uma coleção de conjuntos clássicos denominados de α - níveis de A . Um α - nível é um conjunto clássico que consiste de elementos que pertencem ao conjunto *fuzzy* A com grau de pertinência maior ou igual a α , isto é:

$$[A]^\alpha = \{x \in U / \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (52)$$

para $0 < \alpha \leq 1$.

2.4.3 Números *fuzzy*

Com o objetivo de se trabalhar com operações aritméticas que envolvem incertezas, foram definidos os números *fuzzy*. Tanaka (1997) define um conjunto *fuzzy* A como número *fuzzy* quando o conjunto universo no qual $\mu_A(x)$ está definida é o conjunto dos números reais e satisfaz às seguintes condições:

- A é um conjunto convexo;
- existe pelo menos um valor de x que admite pertinência máxima ($\mu_A(x) = 1$);
- $\mu_A(x)$ é contínua em um dado intervalo.

Sejam A e B números *fuzzy* com α - níveis dados, respectivamente, por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Conforme Barros e Bassanezi (2010), valem as seguintes operações intervalares:

a) A soma entre A e B é o número *fuzzy* $A + B$, cujos α - níveis são

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha] \quad (53)$$

b) A diferença entre A e B é o número *fuzzy* $A - B$, cujos α - níveis são

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha] \quad (54)$$

c) A multiplicação de λ por A é o número *fuzzy* λA , cujos α - níveis são

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \quad (55)$$

d) A multiplicação de A por B é o número *fuzzy* $A.B$, cujos α - níveis são

$$[AB]^\alpha = [A]^\alpha[B]^\alpha = [\min P, \max P] \quad (56)$$

em que $P = \{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}$.

e) A divisão de A por B é o número *fuzzy* cujos α - níveis são

$$\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = \left[\frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}, \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha} \right] \quad (57)$$

Considerando um número *fuzzy* triangular A , sua função de pertinência é da seguinte forma:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a \leq x \leq u \\ \frac{b-x}{b-u}, & \text{se } u \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (58)$$

em que $\mu_A(u) = 1$, podendo ser representado de maneira simplificada por $A = (a; u; b)$.

A Figura 1 apresenta uma função de pertinência triangular. Os α - níveis desses números *fuzzy* são os intervalos:

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b] \quad (59)$$

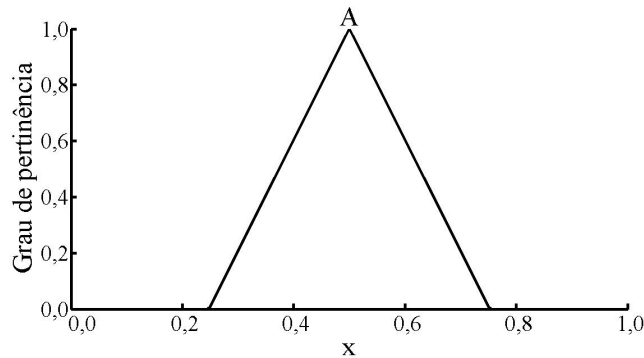


Figura 1 Representação de uma função de pertinência triangular

2.4.4 Princípio de extensão de Zadeh

O princípio de extensão de Zadeh tem como finalidade ampliar operações matemáticas do domínio clássico ao domínio *fuzzy*.

Sejam X e Y conjuntos e f uma aplicação de X em Y , seja A um conjunto *fuzzy* em X , o princípio de extensão afirma que a imagem de A pela função f é um conjunto *fuzzy* $B = f(A)$ em Y , cuja função de pertinência é dada por $\mu_B(y) = \sup_x \mu_A(x)$, sendo ilustrado na Figura 2 (PEDRYCZ; GOMIDE, 1998).

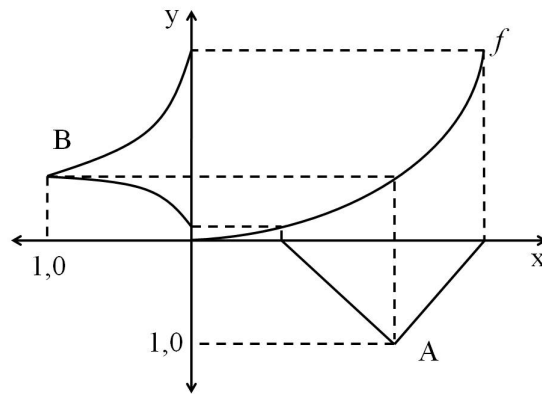


Figura 2 Princípio de extensão

Segundo Jafelice (2004), o princípio de extensão pode ser descrito como:

- o grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré imagem;
- quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo valor máximo dos graus de pertinência dos valores da entrada.

O princípio de extensão pode ser facilmente generalizado para funções de várias variáveis. Sejam $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e Y conjuntos universos, considere os conjuntos A_i em X_i , $i = 1, \dots, n$, e uma função $f : X \rightarrow Y$. Os

conjuntos *fuzzy* A_1, A_2, \dots, A_n são então transformados pela f , produzindo o conjunto *fuzzy* $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ em Y , cuja função de pertinência é $\mu_B(y) = \sup_x \min [\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)]$ para $x \in X$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e $y = f(x)$.

Melo (2009) apresentou uma metodologia computacional que permitiu aplicar o princípio de extensão para funções não monótonas com dois parâmetros *fuzzy*. Para tanto, analisou o problema do Oscilador Harmônico Unidimensional, considerando os parâmetros amplitude e frequência como incertos. Os resultados obtidos mostraram que a solução *fuzzy* aproximou a solução clássica do Oscilador Harmônico Amortecido.

Com o objetivo de apresentar uma metodologia computacional para aplicar lógica *fuzzy* a funções matemáticas gerais, Pires (2010) utilizou o princípio de extensão de Zadeh em grandezas termodinâmicas e em equações de difusão, que são exemplos de equações diferenciais parciais importantes em engenharia. Verificou-se que os resultados tenderam à solução clássica à medida que a incerteza diminuía, concluindo que o processo de construção de funções de pertinência, etapa de fuzzificação, foi bem estruturado.

2.4.5 Métodos de defuzzificação

Uma das etapas importantes, que envolve um estudo baseado em lógica *fuzzy*, é a etapa da defuzzificação. A defuzzificação consiste em traduzir um conjunto *fuzzy* em um número real. Existem diversos métodos de defuzzificação, sendo que o mais utilizado é o método do Centro de Gravidade, também chamado de Centróide ou Centro de Área (MAMDANI, 1974).

De acordo com Barros e Bassanezi (2010), o método do Centro de Gravidade (G) é semelhante à média ponderada para distribuição de dados, com a diferença de que os pesos são os valores $\mu_A(x)$, que indicam o grau de pertinência do valor x_i no conjunto *fuzzy* A .

Para um domínio discreto, tem-se:

$$G(A) = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_A(x_i)} \quad (60)$$

Para um domínio contínuo, tem-se:

$$G(A) = \frac{\int_R x \mu_A(x) dx}{\int_R \mu_A(x) dx} \quad (61)$$

em que R é a região de integração.

2.4.6 Teoria da possibilidade

Na teoria estatística, as informações são tratadas, considerando funções de probabilidade ou funções densidade de probabilidade. A probabilidade está relacionada com a incerteza do resultado futuro de um experimento aleatório, sendo que nesse caso, os eventos são bem definidos e a dúvida está na ocorrência dos mesmos.

Na teoria *fuzzy*, as informações são tratadas por meio de funções de pertinência, $\mu(x) : \Omega \rightarrow [0,1]$, na qual $\mu(x)$ indica a pertinência ou possibilidade de x ser igual a um determinado valor.

Enquanto que, na teoria de probabilidade, os eventos são bem definidos, na teoria da possibilidade, tem-se imprecisão quanto a definição dos eventos.

De acordo com Zadeh (1978), uma distribuição de possibilidade sobre o conjunto $\Omega \neq \emptyset$ é uma função $\mu(x) : \Omega \rightarrow [0,1]$, satisfazendo $\sup_{x \in \Omega} \mu(x) = 1$.

2.4.7 Estatística e lógica *fuzzy*

Com o avanço da teoria dos conjuntos *fuzzy*, envolvendo números *fuzzy* e princípio de extensão, muitas pesquisas têm sido desenvolvidas, combinando métodos estatísticos com lógica *fuzzy* (TAHERI, 2003), como no estudo de variáveis aleatórias (GONZALEZ-RODRIGUES; COLUBI; GIL, 2006; AKBARI; REZAEI, 2009), testes de hipóteses (GRZEGORZEWSKI; HRYNIEWICZ, 1997) e análises de regressão (WU, 2003; BARGIELA; PEDRYCZ; NAKASHIMA, 2007).

Uma das principais aplicações envolvendo estatística e lógica *fuzzy*, foi introduzida por Zadeh (1968), a qual propôs o estudo da probabilidade de um evento *fuzzy*. Seja A um evento *fuzzy*, em que $\mu_A(x) : \Omega \rightarrow [0,1]$, a probabilidade de A é dada por:

$$P(A) = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_A(x_i)}{n} \quad (62)$$

em que m e n são, respectivamente, os números de elementos de A e Ω .

Tanaka, Uejima e Asai (1982) apresentaram a primeira regressão linear *fuzzy*, na qual consideraram a variável dependente como *fuzzy*. Dessa maneira, as observações foram representadas por números *fuzzy* através de funções de pertinência triangulares simétricas, denotados por $\bar{Y}_i = (\bar{y}_i, e_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$, em que \bar{y}_i é o centro e e_i é a largura do i -ésimo dado coletado, dado como:

$$\mu_{\bar{Y}_i}(y_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|\bar{y}_i - y_i|}{e_i} & \text{se } \bar{y}_i - e_i \leq y_i \leq \bar{y}_i + e_i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (63)$$

Nesse caso, o modelo básico assumiu uma função linear *fuzzy*, como se segue:

$$y_i = A_0 + A_1 x_{i1} + \dots + A_N x_{iN} = Y_i = AX_i \quad (64)$$

sendo que $X_i = [X_{i0}, X_{i1}, \dots, X_{iN}]^T$ é um vetor de variáveis independentes do i -ésimo dado, $A = [A_0, A_1, \dots, A_N]$ é um vetor de parâmetros *fuzzy* presente na forma de números *fuzzy* triangulares simétricos, denotados por $A_j = (\alpha_j, c_j)$, $j = 1, \dots, N$, na qual α_j é o centro e c_j a largura. Pelo princípio de extensão, obteve-se a função de pertinência do número *fuzzy* estimado:

$$\mu_{y_i^*}(y_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|y_i - \alpha^T X_i|}{c^T X_i} & \text{se } X_i \neq 0 \\ 1 & \text{se } X_i = 0, y_i = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (65)$$

em que $c^T = (c_0, c_1, \dots, c_N)$ e $\alpha^T = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$.

Buckley (2005) apresentou estimadores *fuzzy* baseados em α - níveis, estabelecendo uma relação com níveis de confiança de intervalos convencionais. Falsafain, Taheri e Mashinchi (2008) utilizaram a metodologia proposta por Buckley (2005), apresentando funções de pertinência únicas para estimadores *fuzzy* de parâmetros de distribuições Normal, Exponencial e Poisson.

Considerando um sistema baseado em regras *fuzzy* (SBRF), Missio e Barros (2009) trataram a variável de entrada do sistema como uma variável aleatória, sendo que seus valores foram estimados pelo método de Monte Carlo. Para isso, geraram-se amostras de valores aleatórios através da distribuição uniforme e, em seguida, tais amostras foram transformadas através da função de distribuição de Weibull truncada. Dessa maneira, os valores de entrada do sistema foram dados pelas médias das amostras obtidas. Como resultado, verificaram a existência de uma aproximação da solução obtida pelo SBRF com a solução apresentada pela literatura. A dificuldade encontrada foi a de determinar uma distribuição de probabilidade para a variável incerta.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Dados de produção de matéria seca

Para a realização deste trabalho, foram considerados dados adaptados da pesquisa desenvolvida por Santos et al. (2002), na qual avaliaram as respostas de fungo micorrízico arbuscular, adubações fosfatada e nitrogenada na produção e qualidade da forragem de braquiarião e amendoim forrageiro consorciados. Para tanto, foi utilizado o delineamento inteiramente casualizado em um esquema fatorial $5 \times 2 \times 2$, com 4 repetições, perfazendo um total de 20 tratamentos, sendo 5 doses de adubação fosfatada, 2 tratamentos de inoculação (inoculado e não inoculado com fungo micorrízico arbuscular) e 2 tratamentos de adubação nitrogenada (com e sem adubação nitrogenada em cobertura).

Dentre as variáveis avaliadas, a produção de matéria seca do sistema radicular do braquiarião (g.vaso^{-1}) foi influenciada significativamente pelas doses de adubação fosfatada (mg.kg^{-1}) quando não inoculada com fungo micorrízico arbuscular e com adubação nitrogenada em cobertura. Dessa maneira, foi considerado o seguinte modelo de regressão quadrática:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i \quad (66)$$

em que:

y_i representa o i -ésimo valor observado da produção de matéria seca;

β_0 , β_1 e β_2 são os parâmetros a serem estimados;

x_i representa o i -ésimo valor fixo da dose de adubação fosfatada;

ε_i é o erro experimental associado a observação y_i , $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Como suposição básica para a realização do estudo, considerou-se que todos os parâmetros são significativamente diferentes de zero, principalmente para β_2 .

A Figura 3 apresenta o comportamento da produção de matéria seca (y) em função de diferentes doses de adubação fosfatada (x).

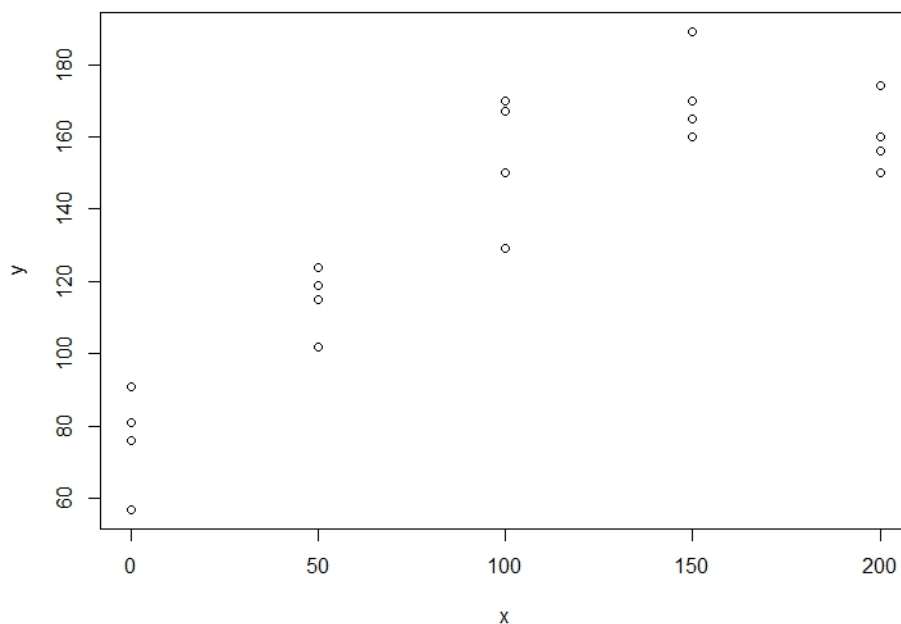


Figura 3 Dados de produção de matéria seca em função de diferentes doses de adubação fosfatada

3.2 Análise *bootstrap*

A análise *bootstrap* paramétrico foi realizada, considerando as estimativas obtidas via método dos mínimos quadrados, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\sigma}^2$, como os verdadeiros valores de β_0 , β_1 , β_2 , η e σ^2 , sendo $\hat{\eta} = -\frac{\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2}$, o estimador do ponto crítico. Dessa maneira, 4000 reamostragens foram realizadas, caracterizando diferentes situações experimentais, em que os erros assumiram uma distribuição normal com média zero e as seguintes variâncias teóricas: $\sigma^2/10$, $\sigma^2/8$, $\sigma^2/6$, $\sigma^2/4$, $\sigma^2/2$, σ^2 e $1,5\sigma^2$.

Intervalos de confiança para o ponto crítico foram obtidos, considerando as fórmulas das variâncias apresentadas por Mood, Graybill e Boes (1974) e D'Aulísio, Pimentel-Gomes e Nogueira (1976).

Como o estimador do ponto crítico envolve um quociente de variáveis aleatórias, Mood, Graybill e Boes (1974) propuseram analisar a variância de tal quociente por meio da expansão da função $f(x,y) = \frac{x}{y}$ em série de Taylor. Assim, de acordo com Lima (2009), a expansão de $f(x,y)$ em torno de (μ_x, μ_y) é dada por:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(\mu_x, \mu_y) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_x, \mu_y)(x - \mu_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mu_x, \mu_y)(y - \mu_y) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu_x, \mu_y)(x - \mu_x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mu_x, \mu_y)(x - \mu_x)(y - \mu_y) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mu_x, \mu_y)(y - \mu_y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mu_x, \mu_y)(x - \mu_x)(y - \mu_y) \right] + \dots \end{aligned} \quad (67)$$

Fazendo as derivadas parciais e uma aproximação para funções de duas variáveis, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx \frac{\mu_x}{\mu_y} + \frac{1}{\mu_y} (x - \mu_x) - \frac{\mu_x}{\mu_y^2} (y - \mu_y) - \frac{1}{\mu_y^2} (x - \mu_x)(y - \mu_y) + \\ &+ \frac{\mu_x}{\mu_y^3} (y - \mu_y)^2 \end{aligned} \quad (68)$$

A partir da definição de variância, Mood, Graybill e Boes (1974) afirmam que:

$$V \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = E \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^2 \right] - \left(E \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^2 \quad (69)$$

Da aproximação obtida anteriormente, tem-se que:

$$E \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx \frac{\mu_x}{\mu_y} - \frac{1}{\mu_y^2} Cov[x,y] + \frac{\mu_x}{\mu_y^3} V[y] \quad (70)$$

Para obter $E \left[\left(\frac{x}{y} \right)^2 \right]$, foi realizada a expansão de $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$ em série de Taylor, obtendo para funções com duas variáveis:

$$f(x,y) \approx \frac{\mu_x^2}{\mu_y^2} + \frac{2\mu_x}{\mu_y^2} (x - \mu_x) - \frac{2\mu_x^2}{\mu_y^3} (y - \mu_y) + \frac{1}{\mu_y^2} (x - \mu_x)^2 - \frac{4\mu_x}{\mu_y^3} (x - \mu_x) (y - \mu_y) + \frac{3\mu_x^2}{\mu_y^4} (y - \mu_y)^2 \quad (71)$$

Aplicando-se o operador esperança matemática, obtém-se:

$$E \left[\left(\frac{x}{y} \right)^2 \right] \approx \frac{\mu_x^2}{\mu_y^2} + \frac{1}{\mu_y^2} V[x] + \frac{3\mu_x^2}{\mu_y^4} V[y] - \frac{4\mu_x}{\mu_y^3} Cov[x,y] \quad (72)$$

Dessa maneira, tem-se que:

$$V \left[\frac{x}{y} \right] \approx \left(\frac{\mu_x}{\mu_y} \right)^2 \left(\frac{1}{\mu_x^2} V[x] + \frac{1}{\mu_y^2} V[y] - \frac{2}{\mu_x \mu_y} Cov[x,y] \right) \quad (73)$$

que é a expressão dada por Mood, Graybill e Boes (1974) para o cálculo da variância de um quociente de duas variáveis aleatórias. Assim, a variância do estimador do ponto crítico pode ser dada por:

$$V_1(\hat{\eta}) = V_1 \left(-\frac{\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2} \right) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\mu_{\hat{\beta}_1}}{\mu_{\hat{\beta}_2}} \right)^2 \left(\frac{V[\hat{\beta}_1]}{\mu_{\hat{\beta}_1}^2} + \frac{V[\hat{\beta}_2]}{\mu_{\hat{\beta}_2}^2} - \frac{2Cov[\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2]}{\mu_{\hat{\beta}_1} \mu_{\hat{\beta}_2}} \right) \right] \quad (74)$$

Para o caso em que a covariância entre $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ é nula ($Cov[\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2] = 0$), a fórmula anterior pode ser simplificada, resultando na mesma fórmula apresentada por D'Aulísio, Pimentel-Gomes e Nogueira (1976), a qual foi obtida através da primeira derivada do estimador do ponto crítico em relação a x , sendo dada por:

$$V_2(\hat{\eta}) = V_2 \left(-\frac{\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{V[\hat{\beta}_1]}{\mu_{\hat{\beta}_2}^2} + \frac{\mu_{\hat{\beta}_1}^2 V[\hat{\beta}_2]}{\mu_{\hat{\beta}_2}^4} \right] \quad (75)$$

Dessa maneira, para cada reamostragem, que originou novas amostras denominadas de amostras *bootstrap*, intervalos de confiança, considerando $V_1(\hat{\eta})$ e $V_2(\hat{\eta})$, foram obtidos:

$$IC_1^r(\eta) = \hat{\eta}^r \pm t_{(v,\alpha/2)} \sqrt{V_1^r(\hat{\eta}^r)} \quad (76)$$

$$IC_2^r(\eta) = \hat{\eta}^r \pm t_{(v,\alpha/2)} \sqrt{V_2^r(\hat{\eta}^r)} \quad (77)$$

para $r = 1, \dots, 4000$, em que $t_{(v,\alpha/2)}$ é o valor crítico da distribuição t de Student para $v = 15$ e $\alpha = 5\%$.

Ao término das 4000 reamostragens, as médias dos intervalos $IC_1^r(\eta)$ e $IC_2^r(\eta)$ foram encontradas, obtendo os intervalos $IC_1(\eta) = [\overline{LI}_1; \overline{LS}_1]$ e $IC_2(\eta) = [\overline{LI}_2; \overline{LS}_2]$, em que \overline{LI}_1 e \overline{LS}_1 são as médias dos limites inferior e superior referentes aos $IC_1^r(\eta)$ e \overline{LI}_2 e \overline{LS}_2 são as médias dos limites inferior e superior referentes aos $IC_2^r(\eta)$.

Considerando $\bar{\eta}$ como a média dos 4000 valores simulados do ponto crítico e a fórmula da variância comum, $V_3(\hat{\eta})$, obteve-se o seguinte intervalo de confiança:

$$IC_3(\eta) = \bar{\eta} \pm t_{(v,\alpha/2)} \sqrt{V_3(\hat{\eta})} \quad (78)$$

em que:

$$V_3(\hat{\eta}) = \frac{\sum_{i=1}^R \hat{\eta}_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^R \hat{\eta}_i\right)^2}{R}}{R-1} \quad (79)$$

para $v = 3999$, $R = 4000$ e $\alpha = 5\%$.

Intervalos de confiança *bootstrap-t* foram gerados de acordo com Efron e Tibshirani (1993), considerando as variâncias $V_1(\hat{\eta})$ e $V_2(\hat{\eta})$, obtendo, respectiva-

mente, $IC_4(\eta)$ e $IC_5(\eta)$ com 95% de confiança:

$$IC_4(\eta) = \left[\hat{\eta} - t_{1-\alpha/2}^1 \sqrt{V_1(\hat{\eta})}; \hat{\eta} - t_{\alpha/2}^1 \sqrt{V_1(\hat{\eta})} \right] \quad (80)$$

$$IC_5(\eta) = \left[\hat{\eta} - t_{1-\alpha/2}^2 \sqrt{V_2(\hat{\eta})}; \hat{\eta} - t_{\alpha/2}^2 \sqrt{V_2(\hat{\eta})} \right] \quad (81)$$

em que $\hat{\eta}$ é a estimativa obtida considerando os dados originais e, t^1 e t^2 são os valores padronizados e ordenados dos 4000 pontos críticos simulados, na qual t^1 e t^2 resultam, respectivamente, das padronizações T^{1r} e T^{2r} :

$$T^{1r} = \frac{\hat{\eta}^r - \hat{\eta}}{\sqrt{V_1^r(\hat{\eta}^r)}}$$

$$T^{2r} = \frac{\hat{\eta}^r - \hat{\eta}}{\sqrt{V_2^r(\hat{\eta}^r)}}$$

para $r = 1, \dots, 4000$.

Com os 4000 valores simulados do ponto crítico foram construídos histogramas da distribuição de frequência e realizados os testes de normalidade de Shapiro-Wilk, assimetria e excesso de curtose assintótico.

Para tanto, os momentos amostrais foram encontrados conforme Mood, Graybill e Boes (1974), no qual, para os valores simulados do ponto crítico, o t -ésimo momento amostral é dado por $m_t = \sum_{r=1}^R (\hat{\eta}^r - \bar{\eta})^t / R$. O estimador do coeficiente de assimetria é dado por $g_1 = m_3 / m_2^{3/2}$, sendo que para $g_1 = 0$ a distribuição é simétrica, $g_1 > 0$ a distribuição é assimétrica a direita (assimetria positiva) e para $g_1 < 0$, a distribuição é assimétrica a esquerda (assimetria negativa). O estimador do coeficiente para avaliar o excesso de curtose é dado por $g_2 = m_4 / m_2^2 - 3$. Tendo como referência a distribuição normal, que possui coeficiente de curtose igual a 0, para $g_2 = 0$, a distribuição é denominada de mesocúrtica, $g_2 > 0$ a distribuição é denominada de leptocúrtica, na qual a curva é mais afilada e para $g_2 < 0$, a distribuição é denominada de platicúrtica, na qual a

curva é mais achatada. Dessa maneira, os testes foram realizados , considerando que $g_1 \sim N(0,6/4000)$ e $g_2 \sim N(0,24/4000)$ (SNEDECOR; COCHRAN, 1980).

A Figura 4 apresenta, resumidamente, os passos utilizados para a obtenção dos intervalos de confiança, considerando a metodologia *bootstrap* para variância teórica igual a $\sigma^2/8$. A análise *bootstrap* foi realizada no *software* R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2012), cuja rotina está apresentada no APÊNDICE A.

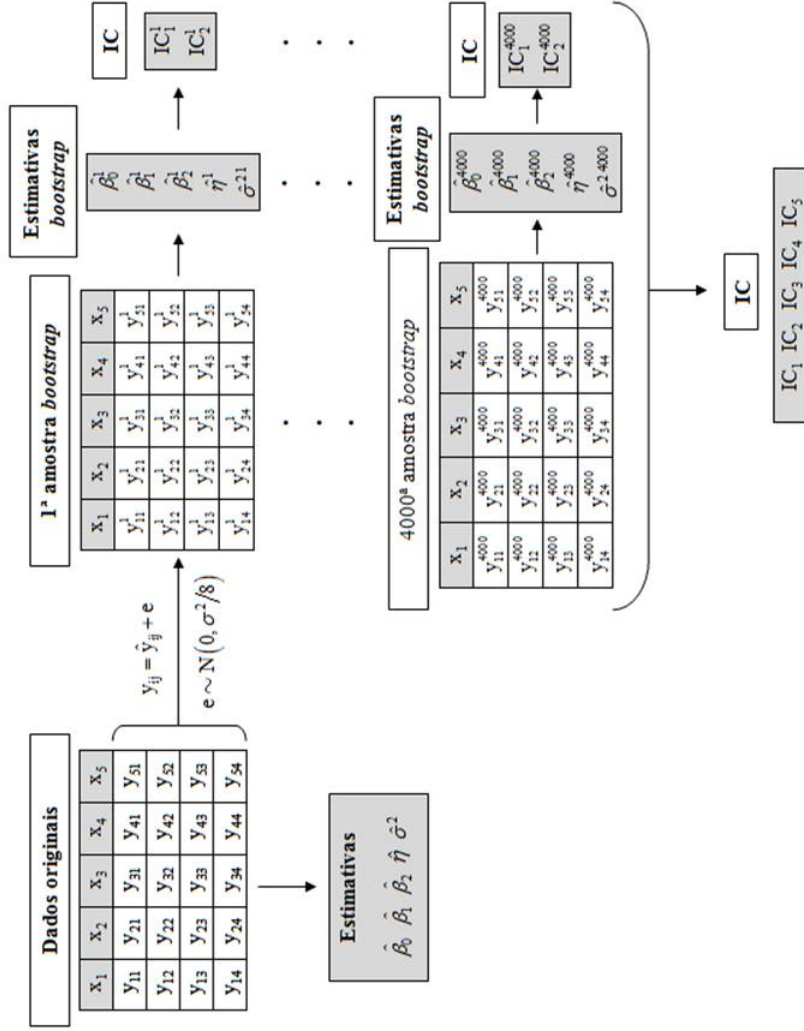


Figura 4 Fluxograma para obter os intervalos de confiança, considerando a metodologia *bootstrap*

3.3 Análise bayesiana

Considerando que o ponto crítico do modelo de regressão quadrática é dado por $\eta = -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$, o modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i$ pode ser reescrito da forma:

$$y_i = \beta_0 - 2\eta\beta_2 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i \quad (82)$$

Dessa maneira, com a finalidade de obter intervalos de confiança bayesianos para os parâmetros do modelo, considerando os dados de produção de matéria seca em função de diferentes doses de adubação fosfatada, foi analisado o vetor de parâmetros desconhecidos $\lambda' = (\beta_0, \beta_2, \eta, \sigma^2)$.

Para a estimativa dos parâmetros, obteve-se a distribuição *a posteriori* conjunta, sendo que para isso foram assumidas as seguintes distribuições *a priori*: $\beta_0 \sim N(\mu_{\beta_0}, \sigma_{\beta_0}^2)$, $\beta_2 \sim N(\mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_2}^2)$, $\eta \sim N(\mu_{\eta}, \sigma_{\eta}^2)$ e $\sigma^2 \sim IG(\alpha, \beta)$.

Pelo teorema de Bayes, a distribuição *a posteriori* conjunta pode ser descrita da seguinte maneira:

$$p(\beta_0, \beta_2, \eta, \sigma^2 | y) \propto L(y | \beta_0, \beta_2, \eta, \sigma^2) \cdot p(\beta_0) \cdot p(\beta_2) \cdot p(\eta) \cdot p(\sigma^2)$$

$$\begin{aligned} p(\beta_0, \beta_2, \eta, \sigma^2 | y) &\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n}{2} + \alpha + 1\right)} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0 + 2\eta\beta_2 x_i - \beta_2 x_i^2]^2 \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(\beta_0 - \mu_{\beta_0})^2}{\sigma_{\beta_0}^2} + \frac{(\beta_2 - \mu_{\beta_2})^2}{\sigma_{\beta_2}^2} + \frac{(\eta - \mu_{\eta})^2}{\sigma_{\eta}^2} \right] - \frac{\beta}{\sigma^2} \right\} \end{aligned} \quad (83)$$

Com o objetivo de obter aproximações das distribuições marginais dos parâmetros, métodos MCMC foram utilizados para gerar valores das distribuições *a*

posteriori condicionais completas para cada parâmetro. Tais distribuições condicionais foram obtidas a partir da distribuição *a posteriori* conjunta. A monitoração da convergência das cadeias foi realizada através de análise gráfica e considerando os critérios de Raftery e Lewis (1992), por meio do fator de dependência, e de Geweke (1992), com base na estimativa de um valor p .

Os métodos MCMC foram implementados no *software* R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2012) como apresentado no APÊNDICE B, sendo que o pacote *Bayesian Output Analysis* (BOA) foi utilizado para avaliar a convergência das cadeias e realizar a inferência sobre os parâmetros do modelo.

3.4 Análise *fuzzy*

3.4.1 Análise 1: ponto crítico *fuzzy* baseado na divisão de números *fuzzy*

Para a análise *fuzzy* 1, as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão quadrática foram consideradas como incertas, sendo que para isso, foram definidos os números *fuzzy* $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\beta}_1$ e $\tilde{\beta}_2$ referentes às estimativas $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$, respectivamente. Tais números *fuzzy* foram representados por meio das seguintes funções de pertinência triangulares:

$$\mu_{\tilde{\beta}_0}(a) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq a_0 - \delta_1 \\ \frac{a - a_0 + \delta_1}{\delta_1}, & \text{se } a_0 - \delta_1 < a \leq a_0 \\ \frac{a_0 + \delta_1 - a}{\delta_1}, & \text{se } a_0 \leq a < a_0 + \delta_1 \\ 0, & \text{se } a \geq a_0 + \delta_1 \end{cases} \quad (84)$$

$$\mu_{\tilde{\beta}_1}(b) = \begin{cases} 0, & \text{se } b \leq b_0 - \delta_2 \\ \frac{b - b_0 + \delta_2}{\delta_2}, & \text{se } b_0 - \delta_2 < b \leq b_0 \\ \frac{b_0 + \delta_2 - b}{\delta_2}, & \text{se } b_0 \leq b < b_0 + \delta_2 \\ 0, & \text{se } b \geq b_0 + \delta_2 \end{cases} \quad (85)$$

$$\mu_{\tilde{\beta}_2}(c) = \begin{cases} 0, & \text{se } c \leq c_0 - \delta_3 \\ \frac{c - c_0 + \delta_3}{\delta_3}, & \text{se } c_0 - \delta_3 < c \leq c_0 \\ \frac{c_0 + \delta_3 - c}{\delta_3}, & \text{se } c_0 \leq c < c_0 + \delta_3 \\ 0, & \text{se } c \geq c_0 + \delta_3 \end{cases} \quad (86)$$

em que a_0 , b_0 e c_0 são, respectivamente, as estimativas dos parâmetros β_0 , β_1 e β_2 obtidas via método dos mínimos quadrados que assumem grau de pertinência máximo igual a 1 em cada função de pertinência e, δ_1 , δ_2 e δ_3 são, respectivamente, os erros padrão das estimativas $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$.

Para realizar a discretização dos números *fuzzy*, foram considerados Δ , como sendo um passo no intervalo de cada função de pertinência, e n , como o número de pontos a serem analisados, tendo, respectivamente, para $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\beta}_1$ e $\tilde{\beta}_2$:

$$\Delta_1 = \frac{(a_0 + \delta_1) - (a_0 - \delta_1)}{n - 1} = \frac{2\delta_1}{n - 1} \quad (87)$$

$$\Delta_2 = \frac{(b_0 + \delta_2) - (b_0 - \delta_2)}{n - 1} = \frac{2\delta_2}{n - 1} \quad (88)$$

$$\Delta_3 = \frac{(c_0 + \delta_3) - (c_0 - \delta_3)}{n - 1} = \frac{2\delta_3}{n - 1} \quad (89)$$

O princípio de extensão de Zadeh foi implementado utilizando a linguagem de programação C++ (APÊNDICE C), sendo que as análises gráficas foram realizadas por meio do *software* GNU PLOT 4.6. Para tanto, foi considerado o seguinte modelo, denominado de modelo *fuzzy* de regressão quadrática:

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + F(\tilde{\beta}_1) + F(\tilde{\beta}_2) \quad (90)$$

em que:

$$\tilde{\beta}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{\beta}_0}(a_i)}{a_i} \quad (91)$$

$$F(\tilde{\beta}_1) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{\beta}_1}(b_i)}{b_i x} \quad (92)$$

$$F(\tilde{\beta}_2) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{\beta}_2}(c_i)}{c_i x^2} \quad (93)$$

Assim, de acordo com Pedrycz e Gomide (1998), obteve-se a seguinte função de pertinência de \tilde{y} :

$$\mu_{(\tilde{\beta}_0 + F(\tilde{\beta}_1) + F(\tilde{\beta}_2))}(z) = \max_{\{(a,b,c):a+b+c=z\}} \min \left[\mu_{\tilde{\beta}_0}(a), \mu_{\tilde{\beta}_1}(b), \mu_{\tilde{\beta}_2}(c) \right] \quad (94)$$

Em seguida, para obter uma curva representativa do modelo *fuzzy*, foi utilizado o método de defuzzificação do Centro de Gravidade para cada valor de x .

Considerando que as estimativas $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ são incertas, surge o ponto crítico *fuzzy* baseado na divisão de números *fuzzy*, que é dado por:

$$\tilde{\eta} = -\frac{\tilde{\beta}_1}{2\tilde{\beta}_2} \quad (95)$$

Com o objetivo de determinar $\tilde{\eta}$ em termos de α -níveis, foram realizadas operações intervalares de multiplicação e divisão conforme Barros e Bassanezi (2010), obtendo:

$$\begin{aligned} [\tilde{\eta}]^\alpha &= -\frac{[\tilde{\beta}_1]^\alpha}{2[\tilde{\beta}_2]^\alpha} = -\frac{[\beta_{11}^{(\alpha)}; \beta_{12}^{(\alpha)}]}{[2\beta_{21}^{(\alpha)}; 2\beta_{22}^{(\alpha)}]} = -\left[\frac{\beta_{11}^{(\alpha)}}{2\beta_{22}^{(\alpha)}}; \frac{\beta_{12}^{(\alpha)}}{2\beta_{21}^{(\alpha)}} \right] = \\ &= \left[-\frac{\beta_{12}^{(\alpha)}}{2\beta_{21}^{(\alpha)}}; -\frac{\beta_{11}^{(\alpha)}}{2\beta_{22}^{(\alpha)}} \right] \end{aligned} \quad (96)$$

Dessa maneira, os α -níveis obtidos foram denominados de intervalos de confiança *fuzzy* com $\alpha\%$ de confiança para o ponto crítico *fuzzy*.

A Figura 5 apresenta um fluxograma referente a análise *fuzzy* 1.

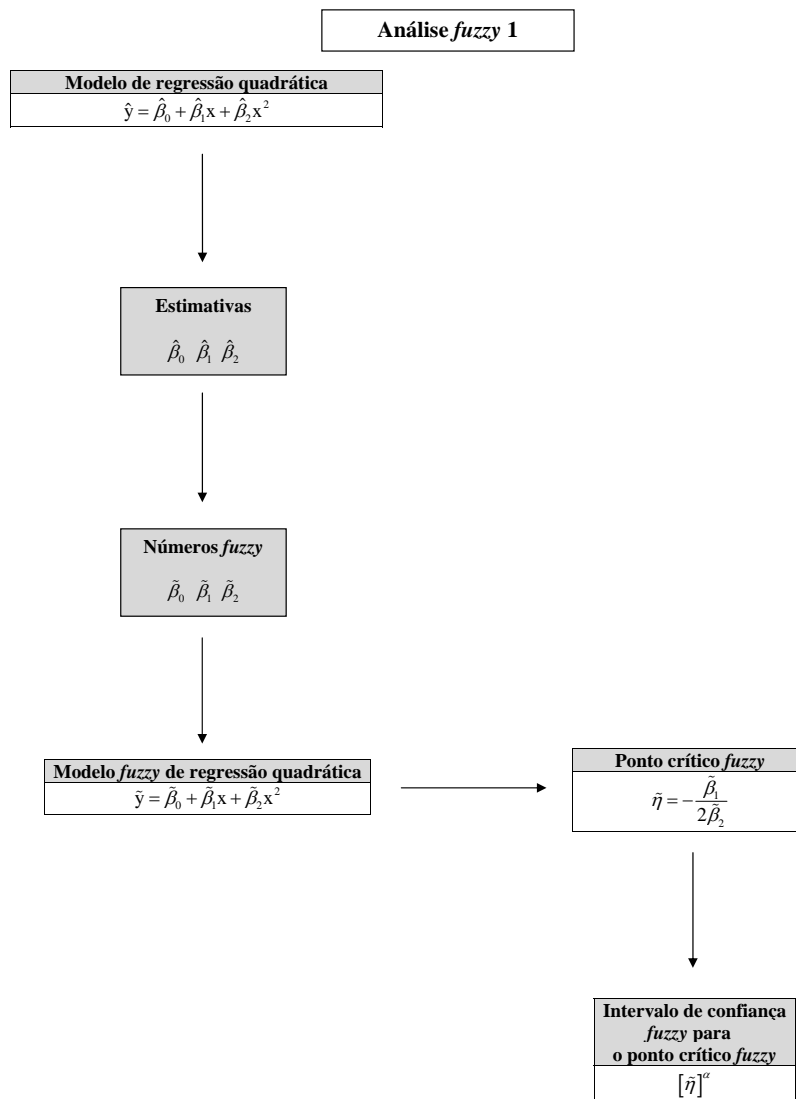


Figura 5 Fluxograma referente à análise fuzzy 1

3.4.2 Análise 2: estimador *fuzzy* do ponto crítico baseado na metodologia de Buckley

A metodologia de Buckley (2005) consiste em considerar uma estimativa pontual de um determinado parâmetro como incerta, sendo que tal incerteza é definida com base em um intervalo de confiança convencional. Para isso, é estabelecida uma relação entre um conjunto composto por todos intervalos de confiança convencionais $100(1 - \beta)\%$, com $0 < \beta \leq 1$, e α -níveis, com $0 < \alpha \leq 1$. Dessa maneira, o conjunto de intervalos de confiança convencionais é transformado em um número *fuzzy*, sendo denominado de estimador *fuzzy*.

Um estimador *fuzzy* do ponto crítico pode ser obtido de acordo com o seguinte intervalo de confiança convencional:

$$IC_{1-\beta}(\eta) = \hat{\eta} \pm t_{(v,\beta/2)} \sqrt{V(\hat{\eta})} \quad (97)$$

em que v é o grau de liberdade do resíduo do modelo de regressão quadrática e

$$V(\hat{\eta}) = V_1 \left(-\frac{\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2} \right) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\mu_{\hat{\beta}_1}}{\mu_{\hat{\beta}_2}} \right)^2 \left(\frac{V[\hat{\beta}_1]}{\mu_{\hat{\beta}_1}^2} + \frac{V[\hat{\beta}_2]}{\mu_{\hat{\beta}_2}^2} - \frac{2Cov[\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2]}{\mu_{\hat{\beta}_1} \mu_{\hat{\beta}_2}} \right) \right]$$

como a variância do ponto crítico de acordo com Mood, Graybill e Boes (1974).

Com isso, obteve-se o seguinte estimador *fuzzy* para η em termos de α -níveis:

$$\left(\hat{E} \right)_{\alpha} = [E_1(\alpha); E_2(\alpha)] \quad (98)$$

$$\left(\hat{E} \right)_{\alpha} = \left[\hat{\eta} - t_{(v,\alpha/2)} \sqrt{V(\hat{\eta})}; \hat{\eta} + t_{(v,\alpha/2)} \sqrt{V(\hat{\eta})} \right] \quad (99)$$

para $0 < \alpha \leq 1$.

Dessa maneira, considerando as estimativas obtidas para os parâmetros via método dos mínimos quadrados, uma estimativa *fuzzy* do ponto crítico foi obtida

por meio do *software* MAPLE 12, cuja rotina está apresentada no APÊNDICE D.

A Figura 6 apresenta um fluxograma referente a análise *fuzzy* 2.

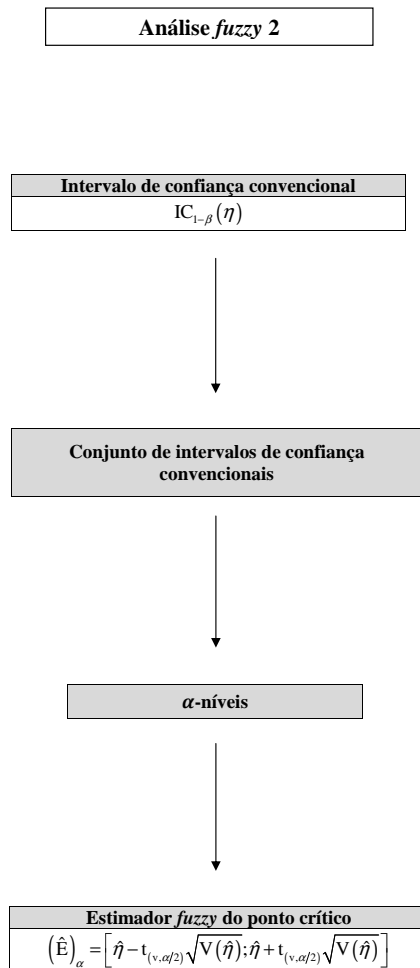


Figura 6 Fluxograma referente à análise *fuzzy* 2

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

De acordo com o método dos mínimos quadrados, o modelo de regressão quadrática ajustado foi igual a $\hat{y} = 73,1929 + 1,1413x - 0,0035x^2$, com $R^2 = 0,9864$, que explica 98,64% da variabilidade dos dados, denotando um modelo adequado para os dados de produção de matéria seca (y) em função das doses crescentes (x) de adubação fosfatada, e $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 = 182,45$. A estimativa pontual do ponto crítico foi de $163,0429 \text{ mg.kg}^{-1}$ de adubo fosfatado, resultando na produção máxima de matéria seca.

4.1 Análise *bootstrap*

As Tabelas 2 a 5 apresentam, como exemplos, as 1ª e 2ª amostras *bootstrap* para as variâncias teóricas $\sigma^2/10 = 18,25$ e $\sigma^2/2 = 91,23$, assim como as estimativas obtidas para cada parâmetro do modelo e os intervalos de confiança, considerando as fórmulas de variâncias de Mood, Graybill e Boes (1974), IC_1^r , dada em (74), e de D'Aulísio, Pimentel-Gomes e Nogueira (1976), IC_2^r , dada em (75), para o ponto crítico.

Tabela 2 Valores estimados da produção de matéria seca na primeira amostra *bootstrap* para variância teórica igual a 18,25 e, estimativas dos parâmetros (β_0 , β_1 e β_2) do modelo de regressão quadrática, dos intervalos de confiança dos parâmetros, estimativa do ponto crítico (η) e intervalos de confiança (IC_1^1 e IC_2^1) para o ponto crítico.

Doses	Repetição				Média
(x)	1	2	3	4	(\bar{y})
0	76,2735	81,6374	74,6918	68,4722	75,2687
50	122,0854	123,6193	116,5861	121,5176	120,9521
100	155,1065	155,0959	149,3904	157,0042	154,1493
150	164,9605	178,2223	160,6313	164,8602	167,1686
200	161,6751	157,2155	167,8994	154,5995	160,3474
Parâmetro	Estimativas	IC			
β_0	74,4186	[69,0783; 79,7589]			
β_1	1,1481	[1,0216; 1,2746]			
β_2	-0,0036	[-0,0042; -0,0030]			
	Esimativa	IC_1^1	IC_2^1		
η	160,4942	[149,0735; 171,9149]	[128,0329; 192,9555]		

Tabela 3 Valores estimados da produção de matéria seca na segunda amostra *bootstrap* para variância teórica igual a 18,25 e, estimativas dos parâmetros (β_0 , β_1 e β_2) do modelo de regressão quadrática, dos intervalos de confiança dos parâmetros, estimativa do ponto crítico (η) e intervalos de confiança (IC_1^2 e IC_2^2) para o ponto crítico.

Doses	Repetição				Média
(x)	1	2	3	4	(\bar{y})
0	75,2814	72,8466	75,0123	66,3474	72,3719
50	119,8854	127,1537	125,2472	116,6153	122,2254
100	148,9168	152,8784	152,2791	150,3163	151,0977
150	165,9986	167,9876	172,8200	173,5792	170,0964
200	175,2504	164,3434	156,0028	164,2843	164,9702
Parâmetros	Esimativas	IC			
β_0	74,4201	[67,5066; 77,3336]			
β_1	1,1509	[1,0345; 1,2673]			
β_2	-0,0034	[-0,0040; -0,0029]			
	Esimativa	IC_1^2	IC_2^2		
η	168,0744	[155,9744; 180,1743]	[135,8293; 200,3195]		

Tabela 4 Valores estimados da produção de matéria seca na primeira amostra *bootstrap* para variância teórica igual a 91,23 e, estimativas dos parâmetros (β_0 , β_1 e β_2) do modelo de regressão quadrática, dos intervalos de confiança dos parâmetros, estimativa do ponto crítico (η) e intervalos de confiança (IC_1^1 e IC_2^1) para o ponto crítico.

Doses (x)	Repetição				Média (\bar{y})
	1	2	3	4	
0	77,1017	68,6865	72,0974	83,4879	75,3434
50	109,8889	126,4010	137,1387	120,4432	123,4680
100	125,8993	145,9273	155,8368	157,7338	146,3493
150	148,7863	170,7925	166,2197	174,8097	165,1521
200	160,9462	160,3773	154,0380	164,3993	159,9402
Parâmetro	Estimativas		IC		
β_0	76,0534		[65,6905; 86,4163]		
β_1	1,0546		[0,8091; 1,3001]		
β_2	-0,0032		[-0,0043; -0,0020]		
	Estimativa	IC_1^1		IC_2^1	
η	166,6423	[139,5185; 193,7660]		[93,5125; 239,7720]	

Tabela 5 Valores estimados da produção de matéria seca na segunda amostra *bootstrap* para variância teórica igual a 91,23 e, estimativas dos parâmetros (β_0 , β_1 e β_2) do modelo de regressão quadrática, dos intervalos de confiança dos parâmetros, estimativa do ponto crítico (η) e intervalos de confiança (IC_1^2 e IC_2^2) para o ponto crítico.

Doses (x)	Repetição				Média (\bar{y})
	1	2	3	4	
0	71,3733	73,1046	64,4405	72,9719	70,4726
50	107,3854	122,8377	102,3631	104,9031	109,3723
100	149,1595	147,4707	175,1896	159,9557	157,9439
150	145,3169	171,7679	171,9503	174,7480	165,9458
200	155,0243	180,0145	170,2966	157,9658	165,8253
Parâmetro	Estimativas		IC		
β_0	67,5119		[56,6297; 78,3941]		
β_1	1,1723		[0,9145; 1,4301]		
β_2	-0,0034		[-0,0046; -0,0022]		
	Estimativa	IC_1^2		IC_2^2	
η	172,9682	[144,2482; 201,6882]		[99,2959; 246,6404]	

Dando continuidade ao processo de reamostragem, a Tabela 6 apresenta os valores médios das estimativas obtidas nas 4000 reamostragens para o ponto crítico (η) e para os cinco diferentes intervalos de confiança propostos (IC_1 , IC_2 , IC_3 , IC_4 e IC_5) em função das diferentes variâncias teóricas do erro experimental. Constata-se que as estimativas do ponto crítico não se alteraram muito, sendo que ligeiro aumento ocorreu com o incremento da variância teórica. Os resultados da Tabela 6 mostram que a variância residual afeta grandemente na estimação dos IC para o ponto crítico. À medida em que a variância foi aumentada, os IC tenderam a apresentar maior amplitude, sugerindo a existência de menor precisão. Tal resultado também foi verificado por Nunes et al. (2004), ao trabalharem com diferentes fórmulas de variância do ponto crítico na avaliação da produção máxima de cultura de algodão. Esse fato vem alertar os pesquisadores na condução do experimento com adubação, na qual tem-se o interesse de estimar a dose ótima. Para se ter uma confiança maior na estimação e provavelmente na indicação dessa dose ótima, maior precisão deve ser buscada no experimento.

Dentre os intervalos de confiança IC_1 e IC_2 , que consideram a média dos intervalos obtidos ao longo das amostras *bootstrap*, o intervalo IC_1 apresenta maior precisão; isso pode ser verificado pela menor amplitude do intervalo, talvez devido ao fato de que o seu estimador leva em consideração a covariância entre β_1 e β_2 . De acordo com o método *bootstrap-t*, o intervalo de confiança IC_5 , que adota a fórmula da variância do ponto crítico proposta por D'Aulísio, Pimentel-Gomes e Nogueira (1976), apresenta maior precisão nas diferentes variâncias teóricas. Dentre os intervalos analisados, o intervalo IC_3 , que considera a fórmula da variância comum, apresenta maior precisão, sendo plausível de uso apenas nos estudos simulados, já que seu cálculo é realizado com as estimativas obtidas em cada reamostragem.

Tabela 6 Valores médios do ponto crítico e dos diferentes intervalos de confiança, de acordo com as variâncias teóricas consideradas, utilizando o método de reamostragem.

Variância teórica	$\hat{\eta}$	IC_1	IC_2	IC_3
18,25	163,3530	[154,8201; 174,6262]	[137,6701; 191,7763]	[155,1041; 174,3423]
22,81	163,4712	[153,5733; 175,5041]	[134,5575; 194,5199]	[153,8705; 175,2070]
30,41	163,7060	[151,7800; 177,4687]	[129,5610; 199,6877]	[152,4681; 176,7806]
45,61	163,8023	[149,1687; 181,0721]	[121,8582; 208,3826]	[149,6936; 180,5473]
91,23	164,3920	[142,4399; 188,9732]	[103,4622 227,9509]	[142,5117; 188,9015]
182,45	166,3862	[131,9563; 203,6495]	[75,2951; 260,3107]	[132,3825; 203,2233]
273,68	168,8741	[121,0386; 217,8047]	[50,3690; 288,4744]	[117,5615; 221,2819]
IC_4				
18,25	163,3530	[136,6507; 198,6299]	[134,4101; 196,3963]	
22,81	163,4712	[137,8673; 201,6671]	[135,3851; 198,6848]	
30,41	163,7060	[137,9856; 200,6145]	[134,8911; 197,3944]	
45,61	163,8023	[138,6562; 202,1101]	[134,9878; 198,0169]	
91,23	164,3920	[140,8762; 204,3448]	[135,8579; 198,8485]	
182,45	166,3862	[144,4611; 207,6514]	[138,6340; 199,7231]	
273,68	168,8741	[146,6550; 208,9989]	[140,2485; 199,2429]	
IC_5				

A Tabela 7 apresenta os resultados referentes ao teste de assimetria assintótico (g_1) e excesso de curtose assintótico (g_2), além da estatística W de Shapiro-Wilk para os valores do ponto crítico nas diversas simulações. As estimativas dos coeficientes de assimetria e curtose aumentaram com o incremento da variância teórica. Os testes de assimetria e curtose indicam que, com o aumento da variância teórica, as estimativas do ponto crítico tendem a não seguir ao de uma distribuição normal, sendo tal resultado verificado pela estatística W de Shapiro-Wilk.

As Figuras 7 a 13 apresentam os histogramas dos valores simulados do ponto crítico, considerando as diferentes variâncias teóricas. Pode-se visualizar que nas menores variâncias, os gráficos sugerem certa aproximação da curva normal. Pode-se observar que a partir da variância teórica igual a 30,41, o ponto crítico apresenta maior tendência a uma distribuição de frequência com assimetria positiva e formato do tipo leptocúrtico.

Tabela 7 Resultados para o teste de assimetria assintótico (g_1), excesso de curtose assintótico (g_2) e estatística W de Shapiro-Wilk referentes aos valores simulados do ponto crítico.

Variância teórica (σ^2)	Assimetria (g_1)	Curtose (g_2)	W
18,25	0,41704*	0,31307*	0,9904*
22,81	0,4337*	0,5822*	0,9899*
30,41	0,4372*	0,2574*	0,9890*
45,61	0,5884*	0,9597*	0,9823*
91,23	1,1794*	3,6228*	0,9437*
182,45	1,4561*	4,2560*	0,9151*
273,68	3,2498*	25,1194*	0,7858*

*significativo a 5%

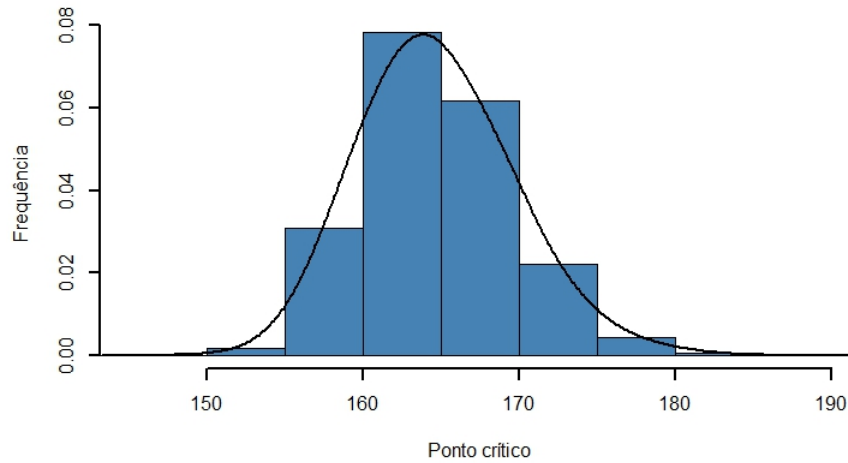


Figura 7 Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 18,25

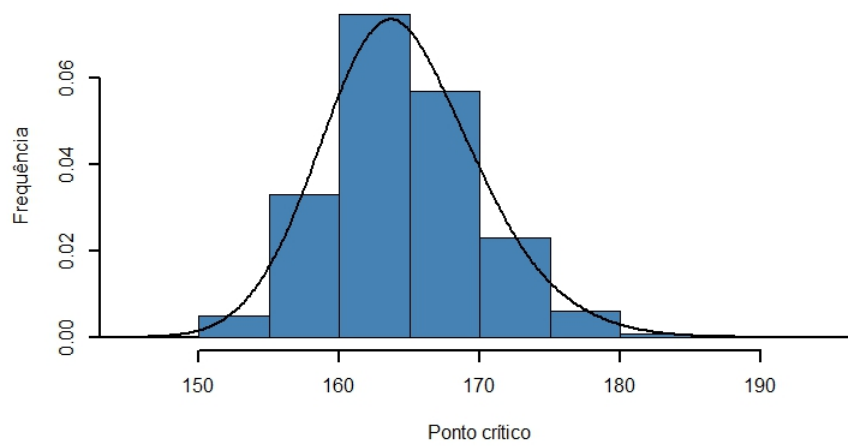


Figura 8 Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 22,81

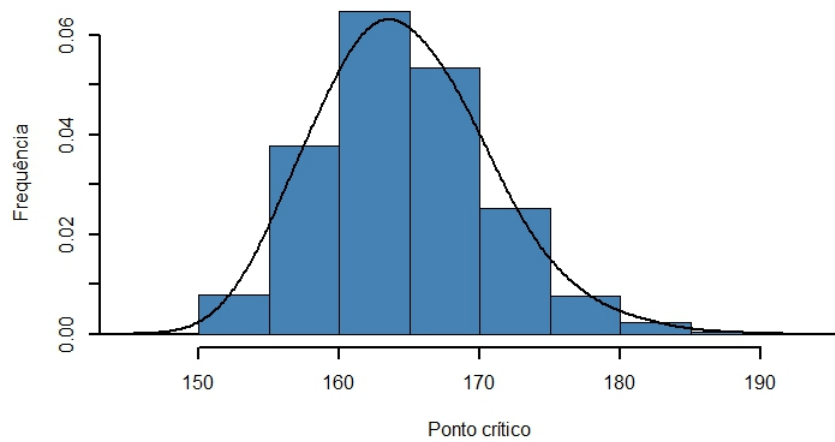


Figura 9 Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 30,41

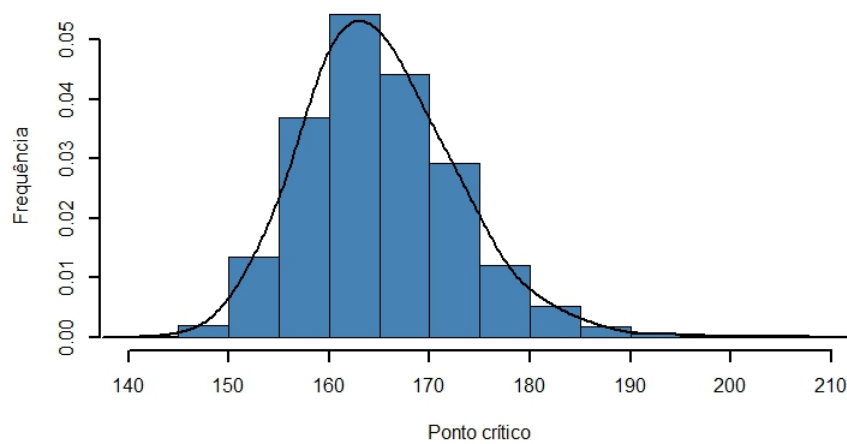


Figura 10 Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 45,61

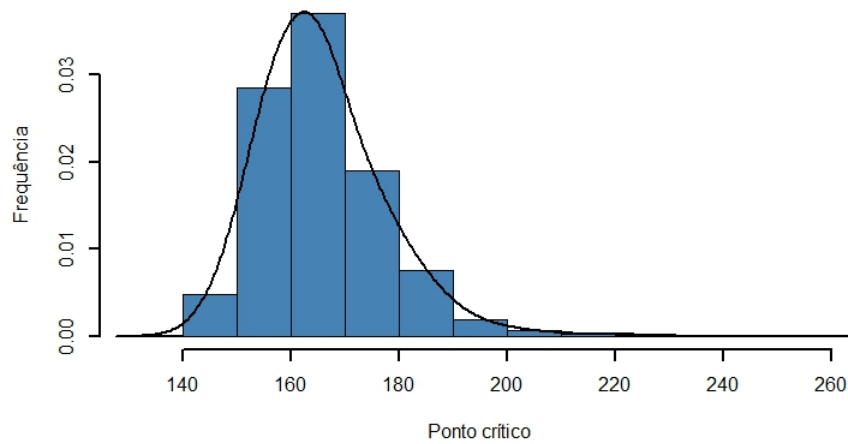


Figura 11 Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 91,23

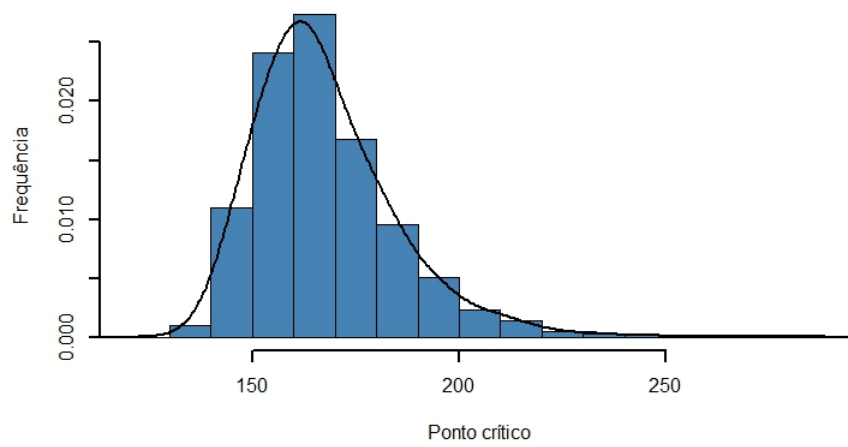


Figura 12 Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 182,45

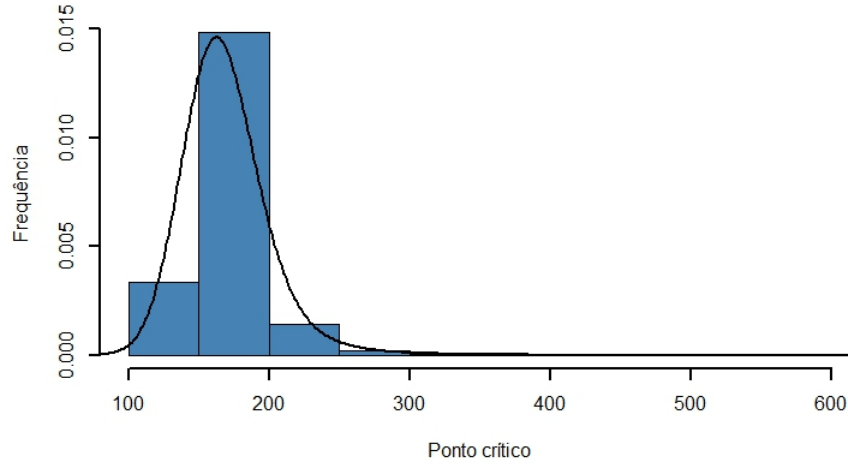


Figura 13 Distribuição de frequência dos valores simulados do ponto crítico para variância teórica igual a 273,68

4.2 Análise bayesiana

A partir da distribuição *a posteriori* conjunta dada em (83), a distribuição *a posteriori* condicional completa para o parâmetro β_0 é dada por:

$$p(\beta_0 | \beta_2, \eta, \sigma^2, y) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0 + 2\beta_2 \eta x_i - \beta_2 x_i^2]^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_0}^2} [\beta_0 - \mu_{\beta_0}]^2 \right\} \quad (100)$$

Fazendo $y_i^* = y_i + 2\beta_2 \eta x_i - \beta_2 x_i^2$, obtém-se:

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i^* - \beta_0]^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_0}^2} [\beta_0 - \mu_{\beta_0}]^2 \right\}$$

Desenvolvendo-se os quadrados, tem-se:

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i^{*2} - 2y_i^* \beta_0 + \beta_0^2] \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_0}^2} [\beta_0^2 - 2\beta_0 \mu_{\beta_0} + \mu_{\beta_0}^2] \right\}$$

Resolvendo o somatório e rearranjando-se os termos, considerando que os termos que não dependem de β_0 são constantes, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[-2\beta_0 \sum_{i=1}^n y_i^* + n\beta_0^2 \right] - \frac{1}{2\sigma_{\beta_0}^2} [\beta_0^2 - 2\beta_0 \mu_{\beta_0} + \mu_{\beta_0}^2] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \sigma_{\beta_0}^2} \left[-2\beta_0 \sigma_{\beta_0}^2 \sum_{i=1}^n y_i^* + n\beta_0^2 \sigma_{\beta_0}^2 + \beta_0^2 \sigma^2 - 2\beta_0 \sigma^2 \mu_{\beta_0} + \sigma^2 \mu_{\beta_0}^2 \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \sigma_{\beta_0}^2} \left[\beta_0^2 (n\sigma_{\beta_0}^2 + \sigma^2) - 2\beta_0 \left(\sigma_{\beta_0}^2 \sum_{i=1}^n y_i^* + \sigma^2 \mu_{\beta_0} \right) + \sigma^2 \mu_{\beta_0}^2 \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{n\sigma_{\beta_0}^2 + \sigma^2}{2\sigma^2 \sigma_{\beta_0}^2} \left[\beta_0 - \frac{\sigma_{\beta_0}^2 \sum_{i=1}^n y_i^* + \sigma^2 \mu_{\beta_0}}{n\sigma_{\beta_0}^2 + \sigma^2} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

que é o núcleo de uma distribuição normal. Dessa maneira, a distribuição *a posteriori* condicional completa para β_0 é uma normal:

$$(\beta_0 | \beta_2, \eta, \sigma^2, y) \sim N \left(\frac{\sigma_{\beta_0}^2 \sum_{i=1}^n (y_i + 2\beta_2 \eta x_i - \beta_2 x_i^2) + \sigma^2 \mu_{\beta_0}}{n\sigma_{\beta_0}^2 + \sigma^2}, \frac{\sigma^2 \sigma_{\beta_0}^2}{n\sigma_{\beta_0}^2 + \sigma^2} \right) \quad (101)$$

A distribuição *a posteriori* condicional completa para o parâmetro β_2 é

dada por:

$$p(\beta_2|\beta_0, \eta, \sigma^2, y) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0 + 2\beta_2\eta x_i - \beta_2 x_i^2]^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_2}^2} [\beta_2 - \mu_{\beta_2}]^2 \right\} \quad (102)$$

Fazendo $y_i^* = y_i - \beta_0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i^* + 2\beta_2\eta x_i - \beta_2 x_i^2]^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_2}^2} [\beta_2 - \mu_{\beta_2}]^2 \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i^* + \beta_2 x_i (2\eta - x_i)]^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_2}^2} [\beta_2 - \mu_{\beta_2}]^2 \right\} \end{aligned}$$

Desenvolvendo-se os quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned} &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i^{*2} + 2y_i^* \beta_2 x_i (2\eta - x_i) + \beta_2^2 x_i^2 (2\eta - x_i)^2] \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_2}^2} [\beta_2^2 - 2\beta_2 \mu_{\beta_2} + \mu_{\beta_2}^2] \right\} \end{aligned}$$

Resolvendo o somatório e rearranjando-se os termos, considerando que os termos que não dependem de β_2 são constantes, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[2\beta_2 \sum_{i=1}^n y_i^* x_i (2\eta - x_i) + \beta_2^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 (2\eta - x_i)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\sigma_{\beta_2}^2} [\beta_2^2 - 2\beta_2 \mu_{\beta_2} + \mu_{\beta_2}^2] \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2\sigma_{\beta_2}^2} \left[2\beta_2\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n y_i^* x_i (2\eta - x_i) + \beta_2^2\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2(2\eta - x_i)^2 + \beta_2^2\sigma^2 - 2\beta_2\sigma^2\mu_{\beta_2} + \sigma^2\mu_{\beta_2}^2 \right] \right\}$$

ou ainda

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2\sigma_{\beta_2}^2} \left[\beta_2^2 \left(\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2(2\eta - x_i)^2 + \sigma^2 \right) - 2\beta_2 \left(-\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n y_i^* x_i (2\eta - x_i) + \sigma^2\mu_{\beta_2} \right) + \sigma^2\mu_{\beta_2}^2 \right] \right\}$$

reagrupando

$$\propto \exp \left\{ -\frac{\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2(2\eta - x_i)^2 + \sigma^2}{2\sigma^2\sigma_{\beta_2}^2} \left[\beta_2 - \frac{-\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n y_i^* x_i (2\eta - x_i) + \sigma^2\mu_{\beta_2}}{\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2(2\eta - x_i)^2 + \sigma^2} \right] \right\}$$

que é o núcleo de uma distribuição normal. Dessa maneira, a distribuição *a posteriori* condicional completa para β_2 é uma normal:

$$(\beta_2 | \beta_0, \eta, \sigma^2, y) \sim N \left(\frac{-\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0) x_i (2\eta - x_i) + \sigma^2\mu_{\beta_2}}{\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2(2\eta - x_i)^2 + \sigma^2}, \frac{\sigma^2\sigma_{\beta_2}^2}{\sigma_{\beta_2}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2(2\eta - x_i)^2 + \sigma^2} \right) \quad (103)$$

A distribuição *a posteriori* condicional completa para o parâmetro η é dada

por:

$$p(\eta|\beta_0, \beta_2, \sigma^2, y) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0 + 2\beta_2\eta x_i - \beta_2 x_i^2]^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\eta^2} [\eta - \mu_\eta]^2 \right\}. \quad (104)$$

Fazendo $y_i^* = y_i - \beta_0 - \beta_2 x_i^2$, obtém-se:

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i^* + 2\beta_2\eta x_i]^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\eta^2} [\eta - \mu_\eta]^2 \right\}$$

Desenvolvendo-se os quadrados, tem-se:

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i^{*2} + 2y_i^*\beta_2\eta x_i + 4\beta_2^2\eta^2 x_i^2] \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\eta^2} [\eta^2 - 2\eta\mu_\eta + \mu_\eta^2] \right\}$$

Resolvendo o somatório e rearranjando-se os termos, considerando que os termos que não dependem de η são constantes, obtém-se:

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[2\beta_2\eta \sum_{i=1}^n y_i^* x_i + 4\beta_2^2\eta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] - \frac{1}{2\sigma_\eta^2} [\eta^2 - 2\eta\mu_\eta + \mu_\eta^2] \right\}$$

ou

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2\sigma_\eta^2} \left[2\beta_2\eta\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n y_i^* x_i + 4\beta_2^2\eta^2\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \eta^2\sigma^2 - 2\eta\sigma^2\mu_\eta + \sigma^2\mu_\eta^2 \right] \right\}$$

agrupando

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2\sigma_\eta^2} \left[\eta^2 \left(4\beta_2^2\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sigma^2 \right) - 2\eta \left(-\beta_2\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n y_i^* x_i + \sigma^2\mu_\eta \right) + \sigma^2\mu_\eta^2 \right] \right\}$$

reagrupando, obtém-se:

$$\propto \exp \left\{ -\frac{4\beta_2^2\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sigma^2}{2\sigma^2\sigma_\eta^2} \left[\eta - \frac{-\beta_2\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n y_i^* x_i + \sigma^2\mu_\eta}{4\beta_2^2\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sigma^2} \right]^2 \right\}$$

que é o núcleo de uma distribuição normal. Dessa maneira, a distribuição *a posteriori* condicional completa para η é uma normal:

$$(\eta | \beta_0, \beta_2, \sigma^2, y) \sim N \left(\frac{-\beta_2\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_2 x_i^2) x_i + \sigma^2\mu_\eta}{4\beta_2^2\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sigma^2}, \frac{\sigma^2\sigma_\eta^2}{4\beta_2^2\sigma_\eta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sigma^2} \right), \quad (105)$$

A distribuição *a posteriori* condicional completa para o parâmetro σ^2 é dada por:

$$p(\sigma^2 | \beta_0, \beta_2, \eta, y) \propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2} - \alpha - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0 + 2\beta_2\eta x_i - \beta_2 x_i^2]^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sigma^2} \right\} \quad (106)$$

Dessa maneira, rearranjando-se os termos, a distribuição *a posteriori* con-

dicional completa para σ^2 é uma gama inversa:

$$\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n}{2} + \alpha + 1\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0 + 2\beta_2 \eta x_i - \beta_2 x_i^2]^2 + \beta \right) \right\}$$

$$(\sigma^2 | \beta_0, \beta_2, \eta, y) \sim IG \left(\alpha^* = \frac{n}{2} + \alpha, \right. \\ \left. \beta^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0 + 2\beta_2 \eta x_i - \beta_2 x_i^2]^2 + \beta \right) \quad (107)$$

Como as distribuições *a posteriori* condicionais completas são de formas conhecidas, no caso, distribuição normal para β_0 , β_2 e η e, distribuição gama inversa para σ^2 , utilizou-se o algoritmo Gibbs para amostrar tais distribuições.

A Tabela 8 apresenta os critérios de Raftery e Lewis e, Geweke, utilizados na análise da convergência das cadeias de cada um dos parâmetros. De acordo com o critério de Raftery e Lewis, os fatores de dependência (FD) de cada parâmetro apresentam valores menores do que cinco, denotando a convergência das cadeias. Pelo critério de Geweke, observa-se que os valores de p são maiores que o nível de significância pré-fixado de 5%, não apresentando, dessa maneira, evidências contra a convergência.

Tabela 8 Estimativas dos critérios de Raftery e Lewis e, Geweke, utilizados na avaliação da convergência das cadeias amostradas.

Parâmetros	Raftery e Lewis (FD)	Geweke (valor p)
β_0	1,0149	0,4230
β_2	1,0149	0,9748
η	0,9904	0,3514
σ^2	0,9824	0,6503

Os resultados apresentados na Tabela 8 podem ser confirmados por meio da visualização gráfica do traço da cadeia, nas Figuras 14 a 17, justificando que as cadeias se encontram em equilíbrio. Ainda nas Figuras 14 a 17, têm-se os gráficos

das distribuições *a posteriori* marginais para cada parâmetro.

A Tabela 9 apresenta as média *a posteriori* para os parâmetros, assim como o intervalo de confiança bayesiano (HPD) com coeficiente de credibilidade de 95% para cada parâmetro do modelo. O intervalo de confiança bayesiano encontrado para η apresenta alta precisão, com magnitude igual a 0,1217. Intervalos de confiança bayesiano com alta precisão também foram encontrados por Buonaccorsi e Gatsonis (1988), na qual utilizaram prioris normais para avaliar a razão de coeficientes de modelos de regressão linear simples no estudo de biodisponibilidade de nutrientes em alimentos.

Tabela 9 Valores médios obtidos pela distribuição *a posteriori* dos parâmetros e seus respectivos limites inferior e superior dos intervalos de confiança bayesianos (HPD).

Parâmetros	Média	HPD	
		LI	LS
β_0	73,0006	72,9395	73,0614
β_2	-0,0035	-0,0038	-0,0032
η	162,9932	162,9295	163,0547
σ^2	180,0873	107,2225	267,1666

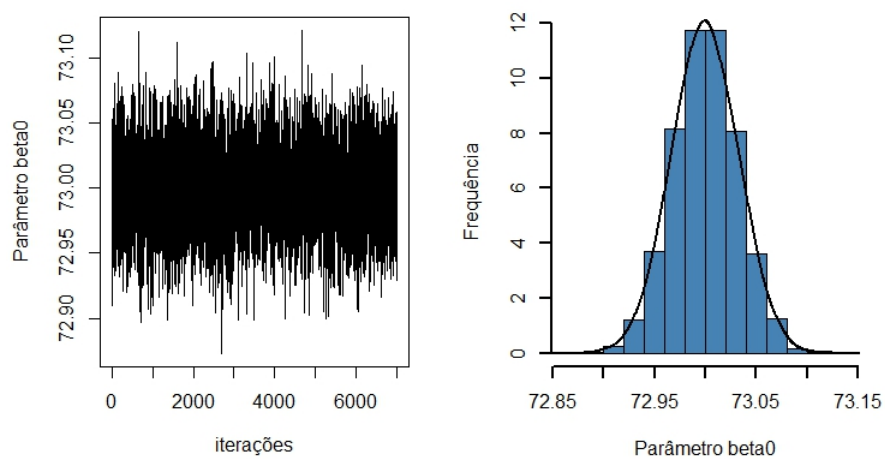


Figura 14 Traço da cadeia e gráfico da distribuição *a posteriori* marginal para o parâmetro β_0

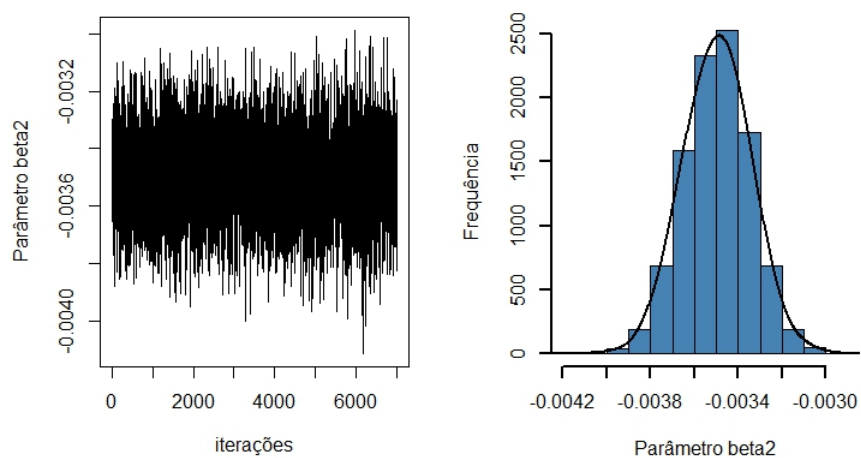


Figura 15 Traço da cadeia e gráfico da distribuição *a posteriori* marginal para o parâmetro β_2

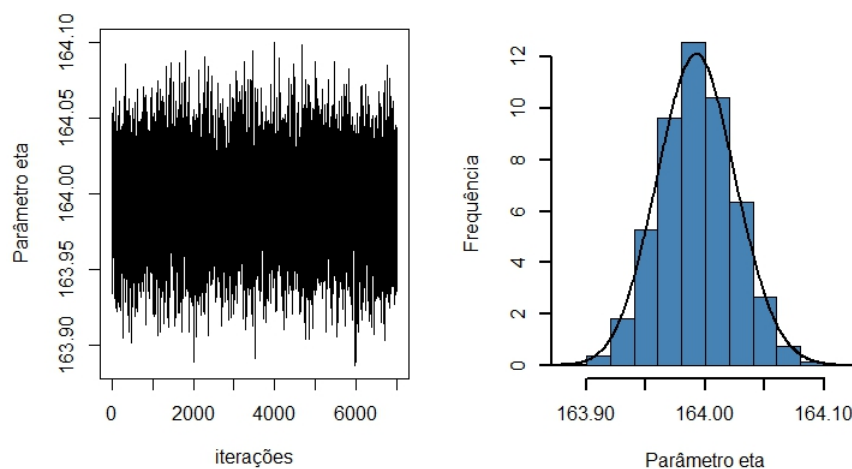


Figura 16 Traço da cadeia e gráfico da distribuição *a posteriori* marginal para o parâmetro η

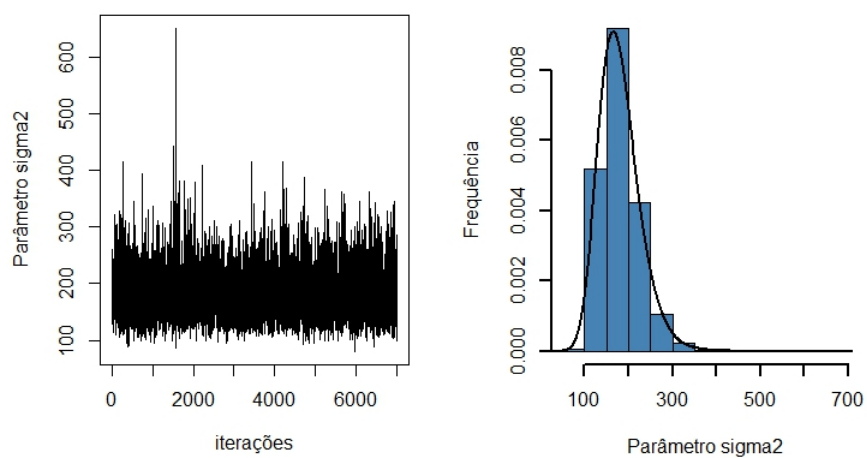


Figura 17 Traço da cadeia e gráfico da distribuição *a posteriori* marginal para o parâmetro σ^2

4.3 Análise *fuzzy*

4.3.1 Análise 1: ponto crítico *fuzzy* baseado na divisão de números *fuzzy*

A Tabela 10 apresenta as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão quadrática por meio do método dos mínimos quadrados e os erros padrão das estimativas, considerando os dados de produção de matéria seca em função de diferentes doses de adubação fosfatada.

Tabela 10 Estimativas dos parâmetros do modelo de regressão quadrática e respectivos erros padrão das estimativas.

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão
β_0	73,1929	6,0839
β_1	1,1413	0,1441
β_2	-0,0035	0,0007

Considerando os erros padrão das estimativas como incertezas no modelo *fuzzy* de regressão quadrática, as seguintes funções de pertinência triangulares foram obtidas:

$$\mu_{\tilde{\beta}_0}(a) = \begin{cases} 0, & se & a \leq 67,1090 \\ \frac{a-67,1090}{6,0839}, & se & 67,1090 < a \leq 73,1929 \\ \frac{79,2768-a}{6,0839}, & se & 73,1929 \leq a < 79,2768 \\ 0, & se & a \geq 79,2768 \end{cases} \quad (108)$$

$$\mu_{\tilde{\beta}_1}(b) = \begin{cases} 0, & se & b \leq 0,9972 \\ \frac{b-0,9972}{0,1441}, & se & 0,9972 < b \leq 1,1413 \\ \frac{1,2854-b}{0,1441}, & se & 1,1413 \leq b < 1,2854 \\ 0, & se & b \geq 1,2854 \end{cases} \quad (109)$$

$$\mu_{\tilde{\beta}_2}(c) = \begin{cases} 0, & \text{se } c \leq -0,0042 \\ \frac{c+0,0042}{0,0007}, & \text{se } -0,0042 < c \leq -0,0035 \\ \frac{-0,0028-c}{0,0007}, & \text{se } -0,0035 \leq c < -0,0028 \\ 0, & \text{se } c \geq -0,0028 \end{cases} \quad (110)$$

A Figura 18 apresenta a solução do modelo *fuzzy* de regressão quadrática através do princípio de extensão de Zadeh, em que a escala entre 0 e 1 representa os graus de pertinência de y (produção de matéria seca, g.vaso⁻¹), sendo que a região amarela representa os valores de y com pertinência em torno de 1. Pode-se observar que para cada valor de x (dose de adubação fosfatada, mg.kg⁻¹) têm-se incertezas quanto ao valor de y . Como exemplo, em $x = 160$, tem-se pertinência em torno de 0 para $y = 120$ e, para $y = 165$, tem-se pertinência em torno de 1. Ainda pode-se verificar que incertezas quanto a y são menos presentes para valores menores de x . A Figura 19 apresenta a solução defuzzificada do modelo *fuzzy* pelo método do Centro de Gravidade e a solução clássica obtida pelo método dos mínimos quadrados.

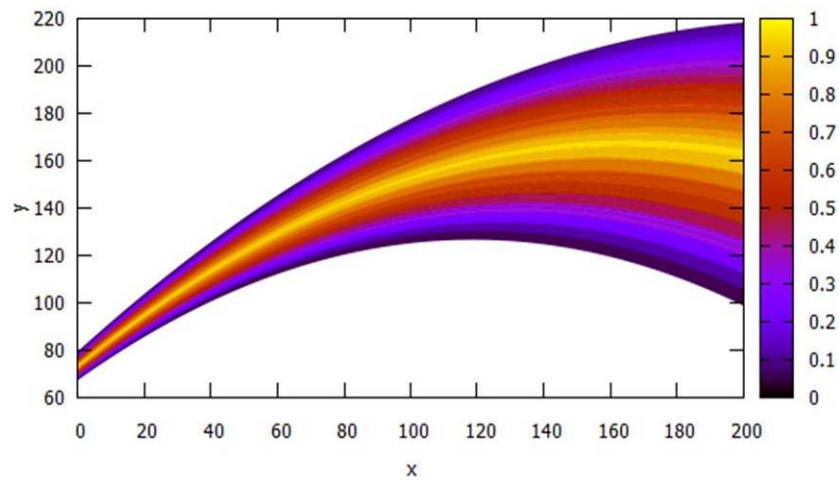


Figura 18 Solução do modelo *fuzzy* de regressão quadrática, considerando os dados de produção de matéria seca (y) em função de diferentes doses de adubação fosfata (x)

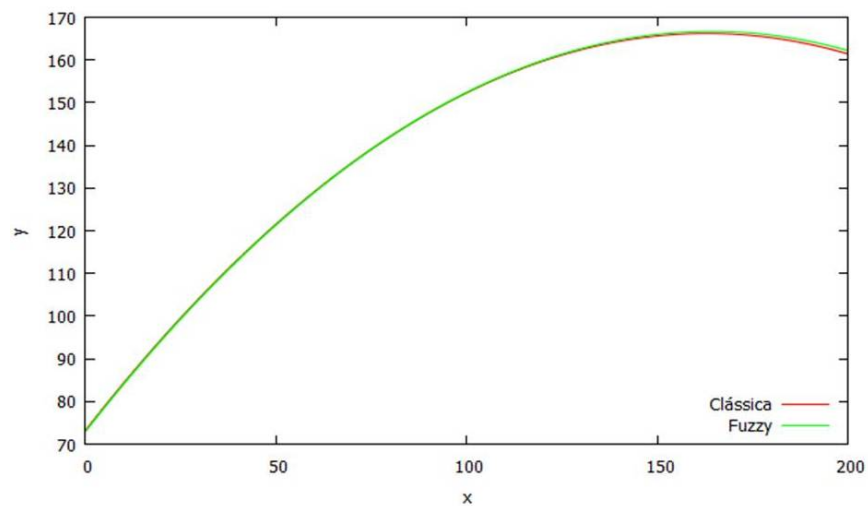


Figura 19 Solução defuzzificada do modelo *fuzzy* de regressão quadrática e solução clássica obtida pelo método dos mínimos quadrados, considerando os dados de produção de matéria seca (y) em função de diferentes doses de adubação fosfata (x)

De acordo com os números *fuzzy* $\tilde{\beta}_1$ e $\tilde{\beta}_2$, foi obtido o ponto crítico *fuzzy* em termos de α -nível:

$$\begin{aligned} [\tilde{\eta}]^\alpha &= \frac{[0,1441\alpha + 0,9972; -0,1441\alpha + 1,2854]}{[0,0014\alpha + 0,0056; -0,0014\alpha + 0,0084]} = \\ &= \left[\frac{0,1441\alpha + 0,9972}{-0,0014\alpha + 0,0084}; \frac{-0,1441\alpha + 1,2854}{0,0014\alpha + 0,0056} \right] \end{aligned} \quad (111)$$

Expressando $[\tilde{\eta}]^\alpha$ em termos de função de pertinência, obteve-se:

$$\mu_{\tilde{\eta}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 118,7143 \\ \frac{0,9972-0,0084x}{-0,1441-0,0014x}, & \text{se } 118,7143 < x \leq 163,0429 \\ \frac{1,2854-0,0056x}{0,1441+0,0014x}, & \text{se } 163,0429 \leq x < 229,5357 \\ 0, & \text{se } x \geq 229,5357 \end{cases} \quad (112)$$

A Figura 20 apresenta a função de pertinência de $\tilde{\eta}$, representado as incertezas quanto ao ponto crítico. Como exemplo, para um ponto crítico igual a 180, tem-se grau de pertinência igual a 0,70 no conjunto $\tilde{\eta}$, sendo que para um ponto crítico igual a 125, tem-se grau de pertinência igual a 0,17.

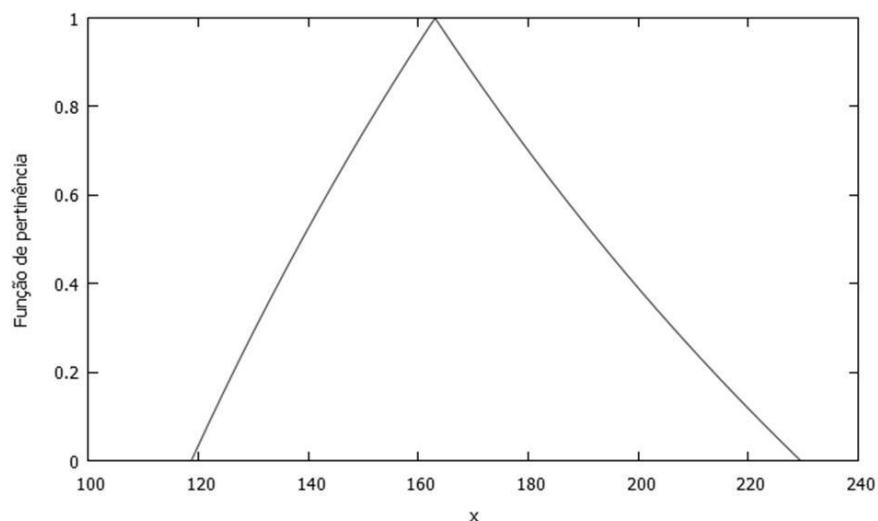


Figura 20 Representação gráfica da função de pertinência do ponto crítico *fuzzy*

A Tabela 11 apresenta intervalos de confiança *fuzzy* para o ponto crítico *fuzzy* para α -níveis entre 0,20 e 1,00. Tem-se, por exemplo, de acordo com a definição de α -nível, valores de x entre 160,4095 e 165,7294 pertencem ao conjunto clássico $[\tilde{\eta}]^{0,95}$; nesse caso, o intervalo $[\tilde{\eta}]^{0,95} = [160,4095; 165,7294]$ é definido como um intervalo de confiança *fuzzy* com 95% de confiança para o ponto crítico *fuzzy*. Com isso, têm-se 95% de possibilidade de obter aproximadamente a produção máxima de matéria seca considerando doses entre 160,4095 e 165,7294 mg.kg^{-1} de adubação fosfatada. Para $\alpha = 1,00$, em que se tem a pertinência máxima, $[\tilde{\eta}]^{1,00} = [163,0429; 163,0429]$ representa um intervalo de confiança *fuzzy* com 100% de confiança para o ponto crítico *fuzzy*, sendo que diante das incertezas consideradas, uma dose igual a 163,0429 mg.kg^{-1} de adubação fosfatada proporciona aproximadamente a produção máxima de matéria seca, sendo que tal dose corresponde a estimativa pontual obtida utilizando o método dos mínimos quadrados. Como a maior dose de adubação fosfatada utilizada no experimento foi igual a 200 mg.kg^{-1} , os intervalos de confiança *fuzzy* com α -níveis menores do que 0,40 não fazem sentido prático, pois extrapolam o limite superior utilizado.

Diante dos resultados apresentados, operações intervalares *fuzzy* se mostram como uma alternativa apropriada para analisar estimadores, como verificado

por Lee (2001).

Tabela 11 Limites inferior (η_1^α) e superior (η_2^α) do intervalo de confiança *fuzzy* para o ponto crítico *fuzzy*, considerando α -níveis entre 0,20 e 1,00.

α	$[\tilde{\eta}]^\alpha$	
	η_1^α	η_2^α
0,20	126,3571	213,7041
0,25	128,3509	209,9790
0,30	130,3797	206,3405
0,35	132,4444	202,7857
0,40	134,5459	199,3117
0,45	136,6853	195,9157
0,50	138,8636	192,5952
0,55	141,0819	189,3477
0,60	143,3413	186,1708
0,65	145,6429	183,0622
0,70	147,9879	180,0198
0,75	150,3776	177,0414
0,80	152,8132	174,1250
0,85	155,2961	171,2688
0,90	157,8277	168,4708
0,95	160,4095	165,7294
1,00	163,0429	163,0429

4.3.2 Análise 2: estimador *fuzzy* do ponto crítico baseado na metodologia de Buckley

De acordo com as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão quadrática, considerando os dados de produção de matéria seca em função de diferentes doses de adubação fosfatada, obteve-se a estimativa *fuzzy* do ponto crítico em termos de α -níveis:

$$\left(\hat{E}\right)_\alpha = [163,0429 - t_{(15,\alpha/2)} \cdot 14,3653; 163,0429 + t_{(15,\alpha/2)} \cdot 14,3653] \quad (113)$$

em que $t_{(v,\alpha/2)}$ é o valor crítico da distribuição t de Student para $v = 15$.

Por exemplo, para $\alpha = 0,95$, tem-se que:

$$\left(\hat{E}\right)_{0,95} = [162,1269; 163,9589]$$

na qual, com grau de possibilidade igual a 0,95, valores do ponto crítico entre 162,1269 e 163,9589 mg.kg^{-1} de adubação fosfatada fornecem aproximadamente a produção máxima da cultura. A Tabela 12 apresenta a estimativa *fuzzy* $\left(\hat{E}\right)_{\alpha}$ do ponto crítico considerando α -níveis entre 0,65 e 1,00.

A Figura 21 apresenta a função de pertinência da estimativa *fuzzy*, na qual pode-se observar que a estimativa pontual do ponto crítico obtida pelo método dos mínimos quadrados, $x = \hat{\eta} = 163,0429$, apresenta grau de pertinência igual a 1,00. Dessa maneira, a estimativa *fuzzy* oferece, com certo grau de pertinência, valores do ponto crítico que resultam aproximadamente na produção máxima da cultura.

De acordo com Buckley (2005), a estimativa *fuzzy* do ponto crítico contém mais informações do que uma simples estimativa pontual ou intervalar convencional, sendo que a estimativa *fuzzy* contém a estimativa pontual $\hat{\eta}$ e todos os 100 $(1 - \beta)$ %. Tal resultado também é enfatizado por Parchami e Mashinchi (2007), na qual utilizaram a metodologia de Buckley em índices de capacidade de processos no controle da qualidade de produtos e serviços.

Tabela 12 Estimativa *fuzzy* $\left(\hat{E}\right)_{\alpha}$ do ponto crítico considerando α -níveis entre 0,65 e 1,00.

α	$\left(\hat{E}\right)_{\alpha}$
0,65	[156,3916; 169,6942]
0,70	[157,4004; 168,6854]
0,75	[158,3807; 167,7052]
0,80	[159,3383; 166,7475]
0,85	[160,2788; 165,8070]
0,90	[161,2069; 164,8789]
0,95	[162,1269; 163,9589]
1,00	[163,0429; 163,0429]

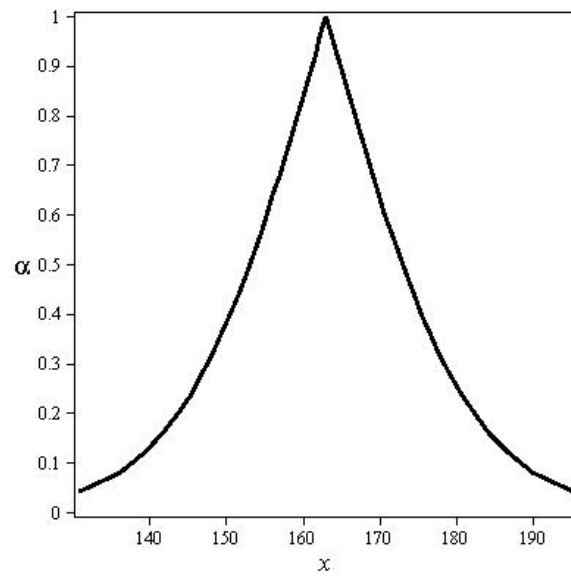


Figura 21 Representação gráfica da função de pertinência da estimativa *fuzzy* do ponto crítico, utilizando a metodologia de Buckley

5 CONCLUSÃO

Na estimação de intervalos de confiança para o ponto crítico do modelo de regressão quadrática, conclui-se que:

1. a metodologia *bootstrap* paramétrico mostrou-se como uma excelente alternativa para a construção de intervalos de confiança para o ponto crítico, cujo estimador envolve um quociente de variáveis aleatórias, e para a análise da distribuição de frequência diante de diferentes situações experimentais. Diante das simulações realizadas, sugere-se usar intervalos de confiança que consideram a covariância entre os parâmetros do modelo;
2. como alternativa a construção de intervalos de confiança convencionais, a análise bayesiana mostrou-se de fácil aplicação de acordo com as priors adotadas para os parâmetros do modelo de regressão quadrática, sendo que o intervalo de confiança bayesiano obtido para o ponto crítico apresenta uma interpretação mais direta do que a de um intervalo de confiança convencional, pois todas as informações da inferência estão resumidas na distribuição *a posteriori*;
3. as incertezas incorporadas no modelo de regressão quadrática proporcionaram a obtenção do ponto crítico *fuzzy*, na qual por meio de operações aritméticas intervalares, resultou na construção de intervalos de confiança *fuzzy* satisfatórios. Diante da metodologia apresentada, o pesquisador pode analisar incertezas advindas de especialistas e dados estatísticos no modelo de regressão, e avaliar níveis de possibilidade para se obter um intervalo para o ponto crítico;
4. a metodologia de Buckley fornece uma análise mais completa de um intervalo de confiança convencional por meio de um estimador *fuzzy*. Dessa maneira, o pesquisador pode avaliar o comportamento de tal estimador diante de diferentes incertezas.

REFERÊNCIAS

AKBARI, M. GH.; REZAEI, A. H. Order statistics using fuzzy random variables. **Statistics and Probability Letters**, n. 79, p. 1031-1037, 2009.

BARGIELA, A.; PEDRYCZ, W.; NAKASHIMA, T. Multiple regression with fuzzy data. **Fuzzy Sets and Systems**, n. 158, p. 2169-2188, 2007.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. 2. ed. Campinas: IMECC-UNICAMP, 2010. 404 p.

BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. **Bayesian inference in statistical analysis**. New York: John Wiley, 1992. 558 p.

BUCKLEY, J. J. Fuzzy statistics: hypothesis testing. **Soft Comput**, n. 9, p. 512-518, 2005.

BUONACCORSI, J. P.; GATSONIS, C. Bayesian inference for ratios of coefficients in a linear model. **Biometrics**, Oxford, v. 44, n. 1, p. 87-101, 1988.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 588 p.

CHARNET, R. et al. **Análise de modelos de regressão linear com aplicação**. 2. ed. Campinas: UNICAMP, 2008. 368 p.

CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. **The American Statistician**, Alexandria, v. 49, n. 4, p. 327-335, Nov. 1995.

D'AULISIO, M. B. G.; PIMENTEL-GOMES, F.; NOGUEIRA, I. R. Estudo da distribuição dos pontos de máximo ou de mínimo de equações de regressão de segundo grau. **Anais da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"**, Piracicaba, v. 38, p. 291-307, 1976.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1998. 706 p.

EFRON, B. Bootstrap methods: Another look at the Jackknife. **The Annals of Statistics**, n. 1, p. 1-20, 1979.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. **An introduction to the Bootstrap**. London: Chapman & Hall, 1993. 436 p.

FALSAFAIN, A.; TAHERI, S. M.; MASHINCHI, M. Fuzzy estimation of parameters in statistical models. **International Journal of Computational and Mathematical Sciences**, v. 2, n. 2, p. 79-85, 2008.

FERREIRA, D. **Estatística básica**. 2. ed. Lavras: UFLA, 2009. 664 p.

FIELLER, E. C. Some Problems in Interval Estimation. **Journal of the Royal Statistical Society - Series B**, v. 16, n. 2, p. 175-185, 1954.

FREITAS, A. R. **A variância dos pontos de máximo ou de mínimo de equações de regressão de segundo grau**, 1978. 81 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz. Universidade de São Paulo, Piracicaba, SP.

GAMERMAN, D. **Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference**. Londres: Chapman & Hall, 1997. 245 p.

GELFAND, A. E.; SMITH, A. F. M. Sampling based approaches for calculating marginal densities. **Journal of the American Statistical Association**, London, v. 85, n. 410, p. 398-409, Jun. 1990.

GEWEKE, J. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments. **In: BERNARDO, J. M.; BERGER, J. O.; DAWID, A. P.; SMITH, A. F. M. (Ed.). Bayesian Statistics 4**. New York: Oxford University Press, 1992. 526 p.

GONZALEZ-RODRIGUES, G.; COLUBI, A.; GIL, A. M. A fuzzy representation of random variables: an operacional tool in exploratory analysis and hypothesis testings. **Computational Statistics and Data Analysis**, n. 51, p. 163-176, 2006.

GRZEGORZEWSKI, P.; HRYNIEWICZ, O. Testing statistical hypotheses in fuzzy environment. **Mathware and Soft Computing**, n. 4, p. 203-217, 1997.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo Vol. 1**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. 658 p.

HASTING, W. K. Monte Carlos Sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, London, v. 57, n. 1, p. 97-109, 1970.

HIRSCHBERG, J. G.; LYE, J. N. Inferences for the extremum of quadratic regression models. **Research paper/ The University of Melbourne/ Department of Economics**, Melbourne, n. 906, p. 1-23, 2005.

HOFFMANN, R., VIEIRA, S. **Análise de regressão: uma introdução à econometria**. 3. ed. São Paulo: HUCITEC, 1998. 379 p.

JAFELICE, R. M. **Modelagem fuzzy para dinâmica de transferência de soropositivos para HIV em doença plenamente manifesta**. 2004. 187 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Unversidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

JEFFREYS, H. **Theory of probability**. Oxford: Claredon, 1961. 325 p.

KUTNER, M. H.; NACHTSHEIM, C. J.; NETER, J.; LI, W. **Applied linear statistical models**. 5. ed. Boston: McGraw-Hill, 2005. 1396 p.

LEE, H. T. C_{pk} index estimation using fuzzy numbers. **European Journal of Operational research**, v. 129, p. 683-688, 2001.

LIMA, E. L. **Análise real - Volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. 189 p.

MAMDANI, E. H. Applications of fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant. **Proceedings of the IEEE**, New York, v. 121, n. 12, p. 1585-1588, 1974.

MELO, G. J. A. **Princípio de extensão de Zadeh aplicado a funções não monótonas com dois parâmetros fuzzy**. 2009. 69 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

MISSIO, M.; BARROS, L. C. Modelo probabilístico para uma variável *fuzzy*. **Biomatemática**, Campinas, v. 19, p. 25-38, Nov. 2009.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D.C. **Introduction to the theory of statistics**. 3. ed. Tokio: McGraw-Hill, 1974. 564 p.

NUNES, C. C. F. et al. Variâncias do ponto crítico de equações de regressão quadrática. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 28, n. 2, p. 389-396, 2004.

PARCHAMI, A.; MASHINCHI, M. Fuzzy estimation for process capability indices. **Information Sciences**, v. 177, p. 1452-1462, 2007.

PAULINO, C. D.; TURKMAN, M. A.; MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. 446 p.

PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets: analysis and design**. Cambridge: MIT, 1998. 461 p.

PIRES, D. M. **Implementação computacional do princípio de extensão de Zadeh**. 2010. 59 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

RAFTERY, A. L.; LEWIS, S. Comment: one long run with diagnostics: implementation strategies for Markov chain Monte Carlo. **Statistical Science**, Hayward, v. 7, n. 4, p. 493-497, Nov. 1992.

R DEVELOPMENT CORE TEAM (2012). R: A language and environment for statistical computing. Disponível em: <http://www.R-project.org>. Acesso em: 20 Mai. 2012.

SANTOS, I. P. A. et al. Influência do fósforo, micorriza e nitrogênio no conteúdo de minerais de *Brachiaria brizantha* e *Arachis pintoi* consorciados. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 31, n. 2, p. 605-616, 2002.

SEARLE, S. R. **Linear Models**. New York: John Wiley, 1971. 532 p.

SNEDECOR, G. W.; COCHRAN, W. G. **Statistical methods**. 7. ed. Ames: Iowa State University, 1980. 507 p.

TAHERI, S. M. Trends in fuzzy statistics. **Austrian Journal of Statistics**, v. 32, n. 3, p. 239-257, 2003.

TANAKA, K. **An introduction to fuzzy logic for practical applications**. Tokyo: Springer, 1997. 138 p.

TANAKA, H.; UEJIMA, S.; ASAI, K. Linear regression analysis with fuzzy model. **IEEE Transactions on Systems**, n. 6, p. 903-907, 1982.

TSOUKALAS, C. D.; UHRIG, M. A. **Fuzzy and neural approaches in engineering**. New York: John Wiley, 1997. 587 p.

WU, H. C. Fuzzy estimates of regression parameters in linear regression models for imprecise input and output data. **Computational Statistics and Data Analysis**, n. 42, p. 203-217, 2003.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Journal Information and Control**, n. 8, p. 338-353, 1965.

———. Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility. **Fuzzy Sets and Systems**, n. 1, p. 3-28, 1978.

———. Probability measures of fuzzy events. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 23, n. 2, p. 421-427, 1968.

APÊNDICE A - Rotina R, programa utilizado para a análise *bootstrap* paramétrico.

```

#Número de reamostragens bootstrap
B<-4000

#Variância teórica
s2T<-18.25

#Dados originais
doses<-c(0,0,0,0,50,50,50,50,100,100,100,100,150,150,150,
150,200,200,200,200)
producao<-c(76,81,91,57,115,119,124,102,129,167,150,170,
160,189,170,165,156,174,160,150)
reg<-lm(producao~doses+I(doses^2))
a0<-round(reg$coeff[1],4)
b0<-round(reg$coeff[2],4)
c0<-round(reg$coeff[3],4)
eta<-round(b0/(-2*c0),4)

X<-cbind(rep(1,20),c(0,0,0,0,50,50,50,50,100,100,100,100,
150,150,150,150,200,200,200,200),c(0,0,0,0,50^2,50^2,50^2,
50^2,100^2,100^2,100^2,100^2,150^2,150^2,150^2,150^2,200^2,
200^2,200^2,200^2))
iXX<-solve(t(X)%*%X)
yest<-matrix(,5,4)
aest<-best<-cest<-etaest<-vector()
sd1<-quan1<-LI1<-LS1<-AMPI<-vector()
sd2<-quan2<-LI2<-LS2<-AMP2<-vector()
LIa<-LSa<-vector()
LIb<-LSb<-vector()
LIc<-LSc<-vector()
doses2<-c(0,50,100,150,200)
producao0<-c(76,81,91,57)
producao50<-c(115,119,124,102)
producao100<-c(129,167,150,170)
producao150<-c(160,189,170,165)
producao200<-c(156,174,160,150)

```

```

dados<-cbind(producao0 , producao50 , producao100 ,
producao150 , producao200)
dadoses<-matrix ( ,B,20)
coef<-matrix ( ,B,3)

for(i in 1:B)
{
  for(j in 1:ncol(dados))
  {
    for(k in 1:nrow(dados))
    {
      e<-rnorm(1,0,sqrt(s2T))
      yest[j,k]<-a0+b0*doses2[j]+c0*((doses2[j])^2)+e
    }
  }
  dres<-c(0,0,0,0,50,50,50,50,100,100,100,100,150,150,
150,150,200,200,200,200)
  yres<-c(yest[1,],yest[2,],yest[3,],yest[4,],yest[5,])
  mod<-lm(yres~dres+I(dres^2))
  dadoses[i,]<-round(cbind(yres),4)
  coef[i,]<-cbind(mod$coef[1],mod$coef[2],mod$coef[3])
  aest[i]<-round(mod$coef[1],4)
  best[i]<-round(mod$coef[2],4)
  cest[i]<-round(mod$coef[3],4)
  etaest[i]<-round((-best[i])/(2*cest[i]))
  fac.doses<-factor(dres)
  reg<-lm(yres~dres+I(dres^2)+I(dres^3)+I(dres^4))
  anova2<-anova(reg)
  VT<-anova2[5,3]*iXX
  LIa[i]<-aest[i]-qt(0.975,15)*(sqrt(VT[1,1]))
  LSa[i]<-aest[i]+qt(0.975,15)*(sqrt(VT[1,1]))
  LIb[i]<-best[i]-qt(0.975,15)*(sqrt(VT[2,2]))
  LSB[i]<-best[i]+qt(0.975,15)*(sqrt(VT[2,2]))
  LIc[i]<-cest[i]-qt(0.975,15)*(sqrt(VT[3,3]))
  LSc[i]<-cest[i]+qt(0.975,15)*(sqrt(VT[3,3]))

#Intervalo de confiança considerando a fórmula da variância
proposto por Mood, Graybill e Boes (1974)
sd1[i]<-sqrt((1/4)*((best[i]/cest[i])^2)*((VT[2,2]/(best[i]^2))

```

```

+(VT[3,3]/(cest[i]^2))-((2*VT[2,3])/(best[i]*cest[i])))
quan1[i]<-((etaest[i]-eta)/sd1[i])
LI1[i]<-etaest[i]-qt(0.975,15)*sd1[i]
LS1[i]<-etaest[i]+qt(0.975,15)*sd1[i]

#Intervalo de confiança considerando a fórmula da variância
proposto por D' Aulísio , Pimentel-Gomes e Nogueira (1976)
sd2[i]<-sqrt((1/4)*((VT[2,2])/((cest[i])^2))+((best[i]^2)
*VT[3,3])/(cest[i]^4)))
quan2[i]<-((etaest[i]-eta)/sd2[i])
LI2[i]<-etaest[i]-qt(0.975,15)*sd2[i]
LS2[i]<-etaest[i]+qt(0.975,15)*sd2[i]
}

#Intervalo de confiança considerando a fórmula da variância
proposto por Mood, Graybill e Boes (1974)
IC1LI1<-mean(LI1)
IC1LS1<-mean(LS1)

#Intervalo de confiança considerando a fórmula da variância
proposto por D' Aulísio , Pimentel-Gomes e Nogueira (1976)
IC2LI2<-mean(LI2)
IC2LS2<-mean(LS2)

#Intervalo de confiança considerando a fórmula comum da
variância
IC3LI3<-mean(etaest)-2*sd(etaest)
IC3LS3<-mean(etaest)+2*sd(etaest)

#Intervalo de confiança bootstrap-t considerando a fórmula da
variância proposto por Mood, Graybill e Boes (1974)
VT1<-182.45*iXX
quanord1<-sort(quan1)
t1<-quanord1[0.975*B]
t2<-quanord1[0.025*B]
sdeta1<-sqrt((1/4)*((b0/c0)^2)*((VT1[2,2]/(b0^2))+((VT1[3,3]/
(c0^2))-((2*VT1[2,3])/(b0*c0))))
IC4LI4<-eta-t1*(sdeta1)
IC4LS4<-eta-t2*(sdeta1)

```

```

#Intervalo de confiança bootstrap-t considerando a fórmula da
variância proposto por D'Aulísio, Pimentel-Gomes e Nogueira (1976)
quanord2<-sort(quan2)
t11<-quanord2[0.975*B]
t22<-quanord2[0.025*B]
sdeta2<-sqrt((1/4)*(((VT1[2,2])/((c0)^2))+((b0^2)*VT1[3,3])/
(c0^4)))
IC5LI5<-eta-t11*(sdeta2)
IC5LS5<-eta-t22*(sdeta2)

#Coeficientes de assimetria e curtose
ma2<-(sum((etaest-mean(etaest))^2))/length(etaest)
ma3<-(sum((etaest-mean(etaest))^3))/length(etaest)
ma4<-(sum((etaest-mean(etaest))^4))/length(etaest)
ass<-ma3/(ma2^(3/2))
cur<-(ma4/(ma2^(2)))-3
asstab<-qnorm(0.95,0,(6/B)^(1/2))
curtab<-qnorm(0.95,0,(24/B)^(1/2))

```

APÊNDICE B - Rotina R, programa utilizado para a análise bayesiana.

```

library(boa)
library(MCMCpack)

#Dados originais
doses<-c(0,0,0,0,50,50,50,50,100,100,100,100,150,150,150,
150,200,200,200,200)
producao<-c(76,81,91,57,115,119,124,102,129,167,150,170,
160,189,170,165,156,174,160,150)
dados<-cbind(doses , producao)
x<-dados[,1]
y<-dados[,2]
n<-length(y)

#Definindo as prioris
meta<-163
veta<-0.001
mbeta0<-73
vbeta0<-0.001
mbeta2<- -0.003
vbeta2<-0.001
alpha<-10
beta<-1800

#Definindo o número de iterações
nit<-10000
beta0<-matrix(0, nit ,1)
eta1<-matrix(0, nit ,1)
beta2<-matrix(0, nit ,1)
sigma2<-matrix(0, nit ,1)

#Chutes iniciais
beta0[1,1]<-73
eta1[1,1]<-163
beta2[1,1]<- -0.003
sigma2[1,1]<-182

ir<-0

```

```

#Início da amostragem
for (ir in 2:nit)
  {
#para o parâmetro eta
soma1<-0
soma2<-0
soma3<-0
soma4<-0
i<-0
for (i in 1:n)
  {
soma1<-(y[i]-beta0[ir-1,1]-beta2[ir-1,1]*(x[i]^2))*x[i]
soma2<-soma2+soma1
soma3<-(x[i]^2)
soma4<-soma4+soma3
  }
mediaeta<-(sigma2[ir-1,1]*meta-veta*beta2[ir-1,1]*soma2)/
(4*veta*(beta2[ir-1,1]^2)*soma4+sigma2[ir-1,1])
desveta<-sqrt((sigma2[ir-1,1]*veta)/(4*veta*(beta2[ir-1,1]^2)
*soma4+sigma2[ir-1,1]))
eta0<-rnorm(1,mean=mediaeta,sd=desveta)
eta1[ir,1]<-eta0
#para o parâmetro beta0
soma5<-0
soma6<-0
i<-0
for (i in 1:n)
  {
soma5<-y[i]+2*beta2[ir-1,1]*eta1[ir,1]*x[i]-beta2[ir-1,1]*
(x[i]^2)
soma6<-soma6+soma5
  }
mediabeta0<-(soma6*vbeta0+sigma2[ir-1,1]*mbeta0)/(vbeta0*n+
sigma2[ir-1,1])
desvbeta0<-sqrt((sigma2[ir-1,1]*vbeta0)/(vbeta0*n+
sigma2[ir-1,1]))
beta00<-rnorm(1,mean=mediabeta0,sd=desvbeta0)
beta0[ir,1]<-beta00
#para o parâmetro sigma2

```

```

soma11<-0
soma12<-0
i<-0
for (i in 1:n)
{
  soma11<-(y[i]-beta0[ir,1]+2*beta2[ir-1,1]*eta1[ir,1]*x[i]
  -beta2[ir-1,1]*(x[i]^2))^2
  soma12<-soma12+soma11
}
alphaa<-(n/2)+alpha
betaa<-0.5*soma12+beta
sigma20<-rinvgamma(1,alphaa,betaa)
sigma2[ir,1]<-sigma20
#para o parâmetro beta2
soma7<-0
soma8<-0
soma9<-0
soma10<-0
i<-0
for (i in 1:n)
{
  soma7<-(y[i]-beta0[ir,1])*x[i]*(2*eta1[ir,1]-x[i])
  soma8<-soma8+soma7
  soma9<-(x[i]^2)*((2*eta1[ir,1]-x[i])^2)
  soma10<-soma10+soma9
}
mediabeta2<-((sigma2[ir,1]*mbeta2)-soma8*(vbeta2))/(soma10*
(vbeta2)+sigma2[ir,1])
desvbeta2<-sqrt((sigma2[ir,1]*vbeta2)/(soma10*(vbeta2)+
sigma2[ir,1]))
beta20<-rnorm(1,mean=mediabeta2,sd=desvbeta2)
beta2[ir,1]<-beta20
}

#Fim da amostragem

# Análise de Convergência
Conv <- matrix(0,nit,4,dimnames=list(c(1:nit),c("beta0","eta1",
"beta2","sigma2")))
Conv[,1]<-beta0

```

```

Conv[,2]<- eta1
Conv[,3]<- beta2
Conv[,4]<- sigma2
boa.rand1(Conv, 0.025, 0.005, 0.95, 0.001)
boa.geweke(Conv, 0.1, 0.5)

#Lendo os dados
beta0<-as.matrix(beta0)
eta1<-as.matrix(eta1)
beta2<-as.matrix(beta2)
sigma2<-as.matrix(sigma2)

#Definindo o "burn-in" e o "thin"
nit<-length(beta0)
burn<-3000
pulo<-1

#Definindo os parâmetros
beta0<-beta0[(burn+1):nit,1]
eta1<-eta1[(burn+1):nit,1]
beta2<-beta2[(burn+1):nit,1]
sigma2<-sigma2[(burn+1):nit,1]

#Início do pulo
nit_novo<-((nit-burn)%/%pulo)
beta0_pulo<-matrix(0,nit_novo,1)
eta1_pulo<-matrix(0,nit_novo,1)
beta2_pulo<-matrix(0,nit_novo,1)
sigma2_pulo<-matrix(0,nit_novo,1)

#Realizando o "thin" (pulo) individualmente para cada parâmetro
i<-0
irr<-0
for (irr in 1:(nit-burn))
{ if (irr-(irr%/%pulo)*pulo==0)(i<-i+1)
  if (irr-(irr%/%pulo)*pulo==0)(beta0_pulo[i,1]<-beta0[irr])
}
i<-0
irr<-0
for (irr in 1:(nit-burn))

```

```

{ if (irr - (irr%%pulo)*pulo == 0) (i <- i + 1)
  if (irr - (irr%%pulo)*pulo == 0) (eta1_pulo[i,1] <- eta1[irr])
}
i <- 0
irr <- 0
for (irr in 1:(nit - burn))
{ if (irr - (irr%%pulo)*pulo == 0) (i <- i + 1)
  if (irr - (irr%%pulo)*pulo == 0) (beta2_pulo[i,1] <- beta2[irr])
}
i <- 0
irr <- 0
for (irr in 1:(nit - burn))
{ if (irr - (irr%%pulo)*pulo == 0) (i <- i + 1)
  if (irr - (irr%%pulo)*pulo == 0) (sigma2_pulo[i,1] <- sigma2[irr])
}

# Intervalo de credibilidade HPD
print(boa.hpd(beta0_pulo, 0.05))
print(boa.hpd(eta1_pulo, 0.05))
print(boa.hpd(beta2_pulo, 0.05))
print(boa.hpd(sigma2_pulo, 0.05))

```

APÊNDICE C - Rotina C++, programa utilizado para a análise *fuzzy* 1.

```

#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>
#include <iomanip>
#include <stdio.h>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;
struct quinteto{
long double valorx , valorfx , valorpa , valorpb , valorpc ;
};

struct trinca{
long double valorx , valorfx , valorp ;
};

double pertinencia(double ,double ,double ,double );
long double operaminimo(double , double);
void ordenacao(vector < trinca > &vet);
void principioextensao(vector<trinca> &vet);
void convexo(vector<trinca> &vet );
long double centroide (vector<trinca> &veto );

ofstream defuzzy("C:/Users/Leandro Ferreira/Desktop/
defu.gnu", ios::out);
ofstream princ("C:/Users/Leandro Ferreira/Desktop/
extensao.gnu", ios::out);
ofstream convex("C:/Users/Leandro Ferreira/Desktop/
aposalgoritmo.gnu", ios::out);
ofstream cla("C:/Users/Leandro Ferreira/Desktop/
classica.gnu", ios::out);
ofstream difereal("C:/Users/Leandro Ferreira/Desktop/
diferenca.gnu", ios::out);
ofstream entrada("C:/Users/Leandro Ferreira/Desktop/
fuzzybruto.gnu", ios::out);

```

```

int main()
{
    vector < quinteto > gvetor;
    vector < trinca > vetorPonto;
    quinteto controltotal;
    trinca armazenar;
    double u, pic, a, x, cont, b, aa, bb, cc, o, auxa, auxb;
    long double passo, passo1, passo2, pon, contador, c, inf,
    sup, contadortotal, z, r, inf1, pic1, sup1, inf2, pic2, sup2, fx;
    const double loop= 200;
    const double inicio= 0;
    cout<<" Insira o intervalo inferior , o pico e o intervalo
    superior da pertinencia triangula , para cada parametro: "<<endl;

    //incertezas consideradas no modelo

    inf=67.109;
    pic=73.1929;
    sup=79.2768;
    inf1=0.9972;
    pic1=1.1413;
    sup1=1.2854;
    inf2=-0.0042;
    pic2=-0.0035;
    sup2=-0.0028;

    cout<<" Digite um numero inteiro de pontos avaliados
    (preferencia mais de 10) dentro da funÃ§Ã£o de pertinencia:
    "<<endl;
    cin>>pon;

    //passos das funcoes de pertinencia

    passo=(sup-inf)/(pon-1.0);
    passo1=(sup1-inf1)/(pon-1.0);
    passo2=(sup2-inf2)/(pon-1.0);

    a=pic;
    b=pic1;

```

```

c=pic2;

x=inicio;
contadortotal=-1.0;
while(x<=loop)
{
    contador=0.0;

    //inicio funcao classica
    z=a+b*x+c*x*x;
    cla<<setiosflags( ios::fixed | ios::showpoint)<<
    setprecision(14.0);
    cla<<x<<" "<<z<<endl;
    //fim funcao classica

    //inicio parametros fuzzy
    aa=inf;
    while (aa<=(sup+0.01))
    {
        auxa=pertinencia( inf , pic , sup , aa);
        bb=inf1;
        while(bb<=sup1)
        {
            auxb=pertinencia( inf1 , pic1 , sup1 , bb);
            cc=inf2;
            while(cc<=sup2)
            {
                fx=aa+bb*x+cc*x*x;
                controltotal.valorx = x;
                controltotal.valorfx = fx;
                controltotal.valorpa = auxa;
                controltotal.valorpb = auxb;
                controltotal.valorpc =
                pertinencia( inf2 , pic2 , sup2 , cc);
                gvetor.push_back( controltotal);
                armazena.valorx = x;
                armazena.valorfx =fx;
                armazena.valorp = operaminimo
                ( controltotal.valorpa , operaminimo
                ( controltotal.valorpb ,

```

```

        controltotal.valorpc));
        vetorPonto.push_back(armazena);
        entrada<<setiosflags(ios::fixed |
        ios::showpoint)<<setprecision(15);
        entrada<<x<<" "<<fx<<" "<<armazena.
        valorp<<endl;
        cc+=passo2;
    }
    bb+=passo1;
    }
    aa+=passo;
    }
    entrada<<" "<<endl;
    //fim parametros fuzzy

    principioextensao(vetorPonto);
    princ<<setiosflags(ios::fixed | ios::showpoint)<<
    setprecision(15);
    for (int v=0;v<vetorPonto.size();v++)
        {
            princ<<vetorPonto[v].valorx<<" "<<vetorPonto[v].
            valorfx<<" "<<vetorPonto[v].valorp<<endl;
        }
    princ<<" "<<endl;

    convexo(vetorPonto);
    convex<<setiosflags(ios::fixed | ios::showpoint)<<
    setprecision(15);
    for (int v=0;v<vetorPonto.size();v++)
        {
            convex<<vetorPonto[v].valorx<<" "<<vetorPonto[v].
            valorfx<<" "<<vetorPonto[v].valorp<<endl;
        }
    convex<<" "<<endl;

    r=centroide(vetorPonto);
    defuzzy<<setiosflags(ios::fixed | ios::showpoint)<<
    setprecision(8.0);
    defuzzy<<armazena.valorx<<" "<<r<<endl;
    u=abs(r-z);

```

```

if(u<1.e-6)
{ cout<<u<<endl;
u=0.0;
cout<<"entrei"<<" "<<u<<endl;
}

difereal<<setiosflags( ios::fixed | ios:: showpoint)<<
setprecision(5);
difereal<<armazena.valorx<<" "<<(100.0*u/abs(z))<<endl;
contadortotal+=1.0;
cout<<contadortotal<<" "<<x<<endl;
x+=0.1;
vetorPonto.clear();

}
return 0;
}

// algoritmo - ordenacao

void ordenacao(vector < trinca > &vet)
{
double b,i;
trinca orden;
b=1;
while (b<vet.size())
{
orden.valorx = vet[b].valorx;
orden.valorfx =vet[b].valorfx;
orden.valorp = vet[b].valorp;
i = (b-1);
while((i>=0)&&(vet[i].valorfx > orden.valorfx))
{
vet[i+1] = vet[i];
i = (i - 1);
}
vet[i+1]=orden;
b+=1;
}
}

```

```

// algoritmo - principio de extensao

void principioextensao(vector<trinca> &vet)
{
    int i,j;
    double apagado;
    j=1;
    apagado=0.0;
    while(j<vet.size())
    {
        i = (j-1);
        if((vet[j].valorfx)==(vet[i].valorfx))
        {
            if(vet[j].valorp>=vet[i].valorp)
            {
                apagado+=1;
                vet.erase(vet.begin()+i);
            }
            else
            {
                apagado+=1;
                vet.erase(vet.begin()+j);
            }
            continue;
        }
        }j+=1;
    }
}

// algoritmo - conjunto convexo

void convexo(vector<trinca> &vet)
{
    double i,j,l,deletado,r;
    j,l,r=1;
    deletado=0.0;
    while (1<(vet.size()-1.0))
    {
        i=j-1;    l=j+1;
        if( (vet[i].valorp>=vet[j].valorp)&&
(vet[j].valorp<=vet[l].valorp))

```

```

        { vet.erase(vet.begin()+j);
          deletado+=1;
          j=1;
                                continue;
        }
        j+=1;
    }
}

// algoritmo - defuzzificacao

long double centroide (vector<trinca> &veto)
{
    long double numerador ,diferen ,denominador ,pertinen ,
    c , numerador1 , numerador2 , denominador1 , denominador2 ;
    denominador1=0.0;
    denominador2=0.0;
    numerador=0.0;
    denominador=0.0;
    numerador1=0.0;
    numerador2=0.0;
    c=0.0;
    while(c<=(veto.size()))
    {
        diferen =(((veto[c].valorp))-1.0);
        numerador1+=(diferen*(veto[c].valorfx));
        numerador2+=(veto[c].valorfx);
        denominador1+=(diferen);
        denominador2+=1.0;
        c+=1.0; }
    denominador=denominador1+denominador2;
    numerador=numerador1+numerador2;
    return (numerador/denominador);
}

// algoritmo - funcao de pertinencia triangular

double pertinencia(double a,double b,double c,double w)
{
    long double pert;
    if (w < a)

```

```
pert=0;
else {
    if ((a<=w)&&(w<=b))
        {
            pert = (w-a)/(b-a);
        }
    else {
        if ((b<w)&&(w<=c))
            {
                pert = (c-w)/(c-b);
            } else
                {pert =0;}
        }
    }
return pert;
}

// algoritmo - operacao de minimo

long double operaminimo(double i, double j)
{
    double minimo, aux;
    aux=i-j;
    if (aux<=0){ minimo=i;} else {minimo=j;}
return minimo;
}
```

APÊNDICE D - Rotina MAPLE, programa utilizado para a análise *fuzzy* 2.

```
with(plots);
with(stats);

f1 := 163.0429-14.3653*statevalf[icdf, studentst[15]](1-(1/2)*y);
f2 := 163.0429+14.3653*statevalf[icdf, studentst[15]](1-(1/2)*y);
eq1 := x = f1(y);
eq2 := x = f2(y);

implicitplot({eq1, eq2}, x = 0 .. 200, y = 0 .. 1, color =
black, thickness = 3, labels = [x, alpha]);
```