



RAUL REZENDE LEITE

**MODELOS NÃO LINEARES NO ESTUDO DO ACÚMULO DE
MATÉRIA SECA DE PLANTAS DE SOJA SOB O EFEITO DE
DIFERENTES TRATAMENTOS**

**LAVRAS – MG
2025**

RAUL REZENDE LEITE

**MODELOS NÃO LINEARES NO ESTUDO DO ACÚMULO DE MATÉRIA SECA DE
PLANTAS DE SOJA SOB O EFEITO DE DIFERENTES TRATAMENTOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de mestre.

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Leite, Raul Rezende.

Modelos não lineares no estudo do acúmulo de matéria seca de
plantas de soja sob o efeito de diferentes tratamentos / Raul
Rezende Leite. - 2025.

70 p. : il.

Orientador(a): Joel Augusto Muniz.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Lavras, 2025.

Bibliografia.

1. Modelos não lineares. 2. Curvas de crescimento. 3.
Regressão. I. Muniz, Joel Augusto. II. Universidade Federal de
Lavras. III. Título.

RAUL REZENDE LEITE

**MODELOS NÃO LINEARES NO ESTUDO DO ACÚMULO DE MATÉRIA SECA DE
PLANTAS DE SOJA SOB O EFEITO DE DIFERENTES TRATAMENTOS**

**NON-LINEAR MODELS IN THE STUDY OF DRY MATTER ACCUMULATION OF
SOYBEAN PLANTS UNDER THE EFFECT OF DIFFERENT TREATMENTS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de mestre.

Aprovada em 18 de fevereiro de 2025.

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz	UFLA
Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima	UFLA
Prof. Dr. Edilson Marcelino Silva	UFRRJ
Prof. Dr. Sílvio de Castro Silveira	FEOL

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Agradeço a Deus por me permitir viver até este momento, por ter me dado resiliência, força e determinação para superar as perdas, tristezas e dificuldades dos últimos 6 anos, e imaginar novos objetivos.

Aos meus pais Jorge (*in memoriam*) e Nancy por tudo que fizeram por mim e por todo exemplo de vida e apoio que me deram.

À minha família, por todo apoio e compreensão especialmente: irmãs Eva e Gina, tia Silvana, tio Edu, primas Ludmila e Bethânia e avô Augusto.

À minha amiga, Dona Ormindia, por ter me incentivado e não me deixar desanimar.

Ao meu orientador, professor Joel, por ter me incentivado tanto, não me deixar desanimar, acreditar em mim e compartilhar o máximo possível de todo seu vasto conhecimento.

Aos professores Renato e Tales por toda ajuda fornecida nos momentos de dificuldade.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), pelo ensino de excelência e qualidade.

A todos os professores do Departamento de Estatística da UFLA.

Ao Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas (ICET) e seus colaboradores.

Ao Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Ao NLIN, Núcleo de Estudos em Regressão Não Linear Aplicada.

A todos os colegas da pós-graduação que de alguma forma me ajudaram durante o curso, especialmente Natiele, Rafaela e Rafael.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu conseguisse chegar neste momento.

MEU MUITO OBRIGADO TODOS.

RESUMO

O Brasil atualmente é o maior produtor mundial de soja. O grão é a parte da planta de maior interesse sendo uma *commoditie*. No início da utilização da soja no Brasil, toda a parte aérea da planta e os grãos, eram alimento para os ruminantes. Assim como o crescimento de outras plantas, a soja também apresenta curva de crescimento ao longo do tempo de caráter sigmoidal, podendo este ser bem ajustado por meio de modelos de regressão não linear. Este trabalho teve como objetivo comparar o ajuste dos modelos não lineares Logístico, Gompertz e von Bertalanffy aos dados de acúmulo de matéria seca total (Mst), dos caules (Msc), das folhas (Msf) e raízes (Msr) em gramas/m², cultivadas nas condições irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF) em relação aos dias após a emergência das plantas. Os dados analisados foram obtidos de Pereira (2002). O experimento foi conduzido no ano agrícola 1998/1999, na Estação Experimental Vila Chaves, no Câmpus da Universidade Federal de Viçosa, localizada no município de Viçosa (MG). Os pressupostos de normalidade, homocedasticidade e independência residual foram verificados com os testes de Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), respectivamente. Os modelos foram ajustados pelo método de mínimos quadrados utilizando o algoritmo de Gauss-Newton por meio do software R. A seleção do modelo que melhor se ajustou aos dados foi baseada no menor critério de informação de Akaike (AIC) e a qualidade do ajuste no coeficiente de determinação (R²) e no desvio padrão residual (DPR). Foram calculados as estimativas e os intervalos de confiança para cada um dos parâmetros dos modelos que melhor se ajustaram aos dados. Também foram gerados os gráficos para cada variável com os modelos ajustados para cada tratamento. Para a variável Mst com o efeito do tratamento IPTP, o modelo mais adequado foi o von Bertalanffy e para os demais tratamentos o modelo Logístico. Para a variável Msc com o efeito dos tratamentos IPTP e ISFV, o modelo mais adequado foi o Logístico e para os tratamentos NIFV e NIFF, o modelo Gompertz foi mais adequado. Para a variável Msf com o efeito dos tratamentos IPTP e NIFV, o modelo von Bertalanffy foi o mais adequado, para o tratamento ISFV, o modelo mais adequado foi o Logístico e para o tratamento NIFF, o modelo Gompertz. Para a variável Msr o modelo Logístico foi o mais adequado para todos os tratamentos.

Palavras-chave: soja; matéria seca; modelos não lineares; regressão.

ABSTRACT

Brazil is currently the world's largest producer of soybeans. The grain is the most economically important part of the plant, being a commodity. In the early stages of soybean use in Brazil, the entire aerial part of the plant, including the grains, was used as feed for ruminants. Like other plants, soybean growth over time follows a sigmoidal curve, which can be well described using nonlinear regression models. This study aimed to compare the fit of three nonlinear models — Logistic, Gompertz, and von Bertalanffy — to data on the accumulation of total dry matter (TDM), stem dry matter (SDM), leaf dry matter (LDM), and root dry matter (RDM), in grams per square meter, under four treatments: fully irrigated throughout the entire period (IPTP), irrigated and shaded during the vegetative stage (ISFV), non-irrigated during the vegetative stage (NIFV), and non-irrigated during the flowering stage (NIFF), in relation to days after plant emergence. The data analyzed were obtained from Pereira (2002). The experiment was conducted during the 1998/1999 growing season at the Vila Chaves Experimental Station, on the campus of the Federal University of Viçosa, located in Viçosa, Minas Gerais, Brazil. The assumptions of normality, homoscedasticity, and residual independence were verified using the Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP), and Durbin-Watson (DW) tests, respectively. The models were fitted by the least squares method using the Gauss-Newton algorithm implemented in R software. Model selection was based on the lowest Akaike Information Criterion (AIC), and model quality was assessed using the coefficient of determination (R^2), the residual standard deviation (RSD). Parameter estimates and confidence intervals were calculated for each model that best fit the data. Plots were also generated for each variable with the fitted models for each treatment. For TDM under the IPTP treatment, the von Bertalanffy model was the most suitable, while the Logistic model best fit the other treatments. For SDM under the IPTP and ISFV treatments, the Logistic model was most appropriate, whereas for the NIFV and NIFF treatments, the Gompertz model performed better. Regarding LDM, the von Bertalanffy model best fit the IPTP and NIFV treatments; for ISFV, the Logistic model was more suitable, and for NIFF, the Gompertz model was preferred. For RDM, the Logistic model provided the best fit across all treatments.

Keywords: soybean; dry matter; nonlinear models; regression.

INDICADORES DE IMPACTO

A utilização dos modelos de regressão para descrever a curva de acúmulo de matéria seca das plantas de soja oferece contribuições significativas para a sojicultura, uma atividade consagrada no Brasil há muitas décadas para produção de grãos e com potencial de uso como planta forrageira. Auxiliando com maior exatidão pesquisadores e produtores nas tomadas de decisão referentes a atividades a serem realizadas durante o ciclo da cultura e por isso a necessidade de conhecer o comportamento da produção de matéria seca. Dois importantes fatores prejudiciais do crescimento da planta de soja da cultivar Capinópolis foram estudados nesta pesquisa são eles o sombreamento e déficit hídrico. Os resultados mostraram que a soja produz a máxima quantidade de matéria seca quando não há sombreamento e nem déficit hídrico. O trabalho é relevante pela aplicação de modelos de regressão em um contexto com escassez de estudos sobre curvas de crescimento da produção de matéria seca de plantas de soja servindo como fonte de informações para futuras pesquisas e melhorias na modelagem de matéria seca de plantas de soja de outras cultivares. Socialmente, a pesquisa beneficia produtores rurais ao fornecer informações para uma alternativa de uso para a soja. Tecnicamente contribui para o manejo da cultura.

IMPACT INDICATORS

The use of regression models to describe the dry matter accumulation curve in soybean plants provides significant contributions to soybean cultivation, an established agricultural activity in Brazil for decades, primarily for grain production and with potential for use as a forage crop. These models assist researchers and producers with greater accuracy in decision-making regarding practices to be carried out throughout the crop cycle, highlighting the importance of understanding the behavior of dry matter production. This study investigated two key limiting factors for the growth of the soybean cultivar Capinópolis: shading and water deficit. The results showed that soybeans produce the maximum amount of dry matter when there is no shading and no water deficit. This work is relevant due to the application of regression models in a context with limited studies on dry matter production growth curves in soybean plants, serving as a source of information for future research and improvements in the modeling of dry matter in other soybean cultivars. Socially, this research benefits farmers by providing information on an alternative use for soybeans, and technically, it contributes to better crop management.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1	Parte aérea de plantas de soja	16
Figura 2.2	Área com cultivo da soja sombreada por árvores de eucalipto	18
Figura 2.3	Curva do modelo da forma geral	20
Figura 2.4	Curva sigmoidal característica dos modelos de crescimento	23
Figura 2.5	Curva do modelo Logístico	25
Figura 2.6	Curva do modelo Gompertz	27
Figura 2.7	Curva do modelo von Bertalanffy	29
Figura 4.1	Ajuste gráfico dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para Mst em cada tratamento	44
Figura 4.2	Ajuste gráfico dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para Msc em cada tratamento	48
Figura 4.3	Ajuste gráfico dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para Msf em cada tratamento	52
Figura 4.4	Ajuste gráfico dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para Msr em cada tratamento	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Valores-p dos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), aplicados aos resíduos dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca total (Mst) para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).....	40
Tabela 4.2	Critérios de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca total (Mst) para os tratamentos (IPTP), (ISFV), (NIFV) e (NIFF).....	41
Tabela 4.3	Estimativas e intervalos de confiança a 95% para os parâmetros dos modelos da variável matéria seca total (Mst) que melhor se ajustaram aos dados para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).....	43
Tabela 4.4	Valores-p dos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), aplicados aos resíduos dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca dos caules (Msc) para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).....	45
Tabela 4.5	Critérios de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca dos caules (Msc) para os tratamentos (IPTP), (ISFV), (NIFV) e (NIFF).....	46
Tabela 4.6	Estimativas e intervalos de confiança a 95% para os parâmetros dos modelos da variável matéria seca dos caules (Msc) que melhor se ajustaram aos dados para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).....	47

Tabela 4.7	Valores-p dos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), aplicados aos resíduos dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca das folhas (Msf) para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).....	49
Tabela 4.8	Critérios de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca das folhas (Msf) para os tratamentos (IPTP), (ISFV), (NIFV) e (NIFF).....	50
Tabela 4.9	Estimativas e intervalos de confiança a 95% para os parâmetros dos modelos da variável matéria seca das folhas (Msf) que melhor se ajustaram aos dados para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).....	51
Tabela 4.10	Valores-p dos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), aplicados aos resíduos dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca das raízes (Msr) para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).....	53
Tabela 4.11	Critérios de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca das raízes (Msr) para os tratamentos (IPTP), (ISFV), (NIFV) e (NIFF).....	54
Tabela 4.12	Estimativas e intervalos de confiança a 95% para os parâmetros dos modelos da variável matéria seca das raízes (Msr) que melhor se ajustaram aos dados para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).....	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	15
2.1	Matéria seca da planta de soja	15
2.2	Estádios Fenológicos de desenvolvimento da soja	16
2.3	Estresse hídrico na soja	17
2.4	Sombreamento na soja.....	17
2.5	Modelagem do crescimento e desenvolvimento de plantas	18
2.6	Análise de Regressão.....	19
2.7	Tipos de dados.....	22
2.8	Modelos não lineares.....	22
2.8.1	Modelo Logístico	24
2.8.2	Modelo Gompertz	26
2.8.3	Modelo von Bertalanffy	28
2.9	Estimação de parâmetros.....	29
2.9.1	Método dos Mínimos Quadrados.....	30
2.9.2	Métodos Iterativos.....	32
2.9.3	Análise de Resíduos	33
2.9.4	Critérios para seleção e avaliação de modelos.....	34
2.9.4.1	Critério de informação de Akaike (AIC)	34
2.9.4.2	Desvio Padrão Residual (DPR)	35
2.9.4.5	Coefficiente de Determinação (R^2).....	35
3	MATERIAL E MÉTODOS.....	36
3.1	Material	36
3.2	Métodos.....	36
3.2.1	Modelos Ajustados	37
3.2.3	Estimação dos Parâmetros	37
3.2.4	Análise dos Resíduos.....	37
3.2.5	Seleção e avaliação de modelos.....	38
3.2.6	Recursos Computacionais.....	38
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	39
4.1	Variável matéria seca total (Mst).....	39
4.2	Variável matéria seca dos caules (Msc).....	44
4.3	Variável matéria seca das folhas (Msf).....	48
4.4	Variável matéria seca das raízes (Msr)	53
5	CONCLUSÕES.....	57
	REFERÊNCIAS	58

ANEXO.....	61
------------	----

1 INTRODUÇÃO

A soja (*Glycine max*), apesar da grande popularidade atualmente e de sua antiga história de cultivo pelos seres humanos, não foi a primeira espécie vegetal a ser domesticada e cultivada. Seu centro de origem está no continente asiático, na região nordeste da China. É uma espécie que pertence à família denominada de Fabaceae. As opiniões mais aceitas sobre o início da domesticação da soja é que tenha ocorrido entre 1.500 a 1.000 a.C.. O primeiro registro do cultivo de soja no Brasil foi em 1882 na Bahia (Gazzoni; Dall' Agnol, 2018).

A primeira utilidade da soja nas américas foi como planta forrageira para alimentar os animais. Posteriormente, começou a ser usada para produção de grãos, para indústria de óleo e farelo. Atualmente é uma das principais culturas produzidas no Brasil, sendo cultivada em todas regiões. Também é uma cultura amplamente cultivada em todo o mundo, sendo o Brasil e Estados Unidos da América os maiores produtores (Gazzoni; Dall' Agnol, 2018).

O Brasil é o maior produtor mundial de soja, produzindo aproximadamente 147,3 milhões de toneladas na safra 2023/2024. O cultivo da soja é de grande importância para o agronegócio brasileiro em vários setores como o econômico, industrial e social. Apesar da grande quantidade exportada *in natura* do grão de soja, o Brasil também exporta os subprodutos originados do processo de esmagamento do grão o farelo e o óleo (CONAB, 2025).

As plantas da família Fabaceae, por possuírem baixa relação carbono/nitrogênio, têm níveis de proteínas superiores às gramíneas expressa na base de matéria seca. Assim, podem ser utilizadas como forragem para os ruminantes, com a intenção de suprir as necessidades nutricionais de proteínas na forma de silagem. E por isso sendo importante o melhor conhecimento da produção de matéria seca da soja (Evangelista; Rezende; Maciel, 2003).

As partes da planta são dinâmicas e variam constantemente de tamanho, forma, cor e massa ao longo de seu ciclo vital. O crescimento destas nada mais é que o acúmulo de quantidade de material das estruturas vegetais desidratadas, raízes, caules e folhas, conhecido como matéria seca total (Benincasa, 2003.)

A fenologia é uma área de estudo da botânica que se dedicada ao estudo das diferentes fases do ciclo de vida das espécies vegetais. Estas fases na planta da soja são: germinação, emergência, crescimento e desenvolvimento vegetativo, florescimento, enchimento de grãos e maturação, determinando a época de ocorrência e as características de cada fase (Câmara, 1998).

O estresse hídrico na planta ocorre quando há condição do solo inadequada ao crescimento e desenvolvimento da cultura relacionado a quantidade de água. Pode ser

ocasionado por falta de água ou por excesso de água (Taiz; Zeiger, 2004). A falta de água, o déficit hídrico, é de maior frequência de ocorrência, sendo possível sua eliminação quando o regime de chuva de determinada região está normal ou quando há disponibilidade de realizar a irrigação (Gonçalves, 2019).

As várias cultivares de soja possuem sensibilidades diferentes entre si quanto ao número de horas de luz por dia. Por isso cada cultivar exige um número de horas de luz por dia adequado para que ocorra, por exemplo, o florescimento. As cultivares de ciclo precoce são menos influenciadas e as cultivares de ciclo tardio só florescem quando as noites são maiores que o número de horas de luminosidade, sendo consideradas plantas de dia curto (Neumaier *et al.*, 2020).

O crescimento e o desenvolvimento das plantas promovem o acúmulo de biomassa e este, quando estudado graficamente, possuem uma curva com o comportamento sigmoide que são descritos por modelos não lineares. O uso destes modelos no estudo dos processos biológicos possui a facilidade da interpretação prática de seus parâmetros proporcionando estimativas úteis (Jane *et al.*, 2020).

Baseando-se nos parâmetros dos modelos de crescimento pode-se inferir sobre a taxa de crescimento e desenvolvimento da cultura, ponto de maturação fisiológica das sementes e também a quantidade de nutrientes acumulados na matéria seca (Gonzaga, 2022).

Os parâmetros obtidos contribuem para o bom manejo da cultura na detecção de fatores prejudiciais para o crescimento e desenvolvimento como: época adequada da semeadura, inoculação nas sementes ou no sulco de plantio, ocorrências de deficiências hídricas e nutricionais, incidência de pragas e doenças e momento ideal da colheita (Gonzaga, 2022).

Assim, usando a técnica de análise de crescimento, o objetivo deste trabalho foi avaliar a produção de matéria seca das plantas de soja e de suas partes conduzidas em diferentes condições hídricas e de interceptação de luz solar, usando os modelos não lineares. Pretende-se indicar o melhor modelo que se ajustou aos dados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção é apresentada uma revisão de literatura sobre importância do estudo da matéria seca das plantas de soja, fases do crescimento e desenvolvimento das plantas de soja, fatores que influenciam o crescimento e desenvolvimento das plantas de soja, modelagem, estimação de parâmetros e os critérios de seleção e avaliação de qualidade de ajustes dos modelos.

2.1 Matéria seca da planta de soja

A base da análise de crescimento considera que grande parte da matéria seca acumulada e produzida pela planta é oriunda das reações da fotossíntese. Esse acúmulo de matéria seca em função do tempo, é usado na estimação de muitos índices fisiológicos para comparação de eficiência entre cultivares (Peixoto, 1998). A partir de vários dados de crescimento estima-se com precisão os motivos que levam à variação entre plantas iguais ou diferentes geneticamente que cresçam em ambiente diferentes (Benincasa, 2003).

Uma possível finalidade para o estudo da matéria seca da soja é quanto ao desejo de se utilizar a parte aérea da soja (caule, folhas, vagens e grãos) como forrageira, seja desidratada em forma de feno ou fermentada em forma de silagem. A matéria seca total é a planta desidratada (parte aérea e sistema radicular), após a remoção máxima da água de constituição dos tecidos vegetais (Evangelista; Rezende; Maciel, 2003).

A parte aérea da soja, quando utilizada como silagem, é colhida ainda com teores altos de umidade para que seja possível o processo fermentativo (Evangelista; Rezende; Maciel, 2003). Na Figura 2.1 tem-se a parte aérea de plantas de soja ainda com uma grande quantidade de água em suas estruturas, para uso como alimento para os animais.

Figura 2.1 - Parte aérea de plantas de soja



Fonte: Do autor (2024)

2.2 Estádios Fenológicos de desenvolvimento da soja

A fenologia estuda as fases do crescimento e desenvolvimento das plantas, descrevendo suas características visuais. O conhecimento da fenologia da soja é importante para o produtor pois, o auxilia nas decisões de manejo durante o ciclo de vida da cultura. É relacionada principalmente com a idade fisiológica e menos com a idade cronológica da planta. Em condições de campo ideais a fenologia tem alta correspondência com a idade fisiológica e com a idade cronológica. Isso não acontece em condições de campo sob estresse devido ao fato de a idade fisiológica ser alterada e a idade cronológica não sofrer alteração em sua contagem (Câmara, 1998).

O conhecimento dos estádios fenológicos permite identificar, visualmente as características morfológicas de uma determinada fase. Estas estão associadas às necessidades específicas da planta, que quando supridas, proporcionarão adequada produtividade. A

descrição de um estágio fenológico da soja é representada por uma letra e um número (Câmara, 1998).

2.3 Estresse hídrico na soja

O problema da estiagem no Brasil ocorre em todo território nacional devido a cada ano ocorrer a manifestação de fenômenos naturais distintos, provocando prejuízos à sojicultura nacional. Pode se dizer que estes são os principais fatores climáticos limitantes ao cultivo da soja em algumas regiões brasileiras (Gonçalves, 2019).

Uma opção para contornar o problema do déficit hídrico é o zoneamento agrícola de risco climático (ZARC), que é uma ferramenta de análise do risco e que auxilia na tomada de decisões no campo, considerando a probabilidade de adversidades climáticas. É baseado em uma série histórica de dados climáticos, características da cultura e do solo. Determina a frequência de ocorrência do déficit hídrico nas fases de florescimento e enchimento de grãos em função da época de semeadura, demanda evapotranspiratória da cultura, disponibilidade hídrica do solo e ciclo da cultivar (MAPA, 2023).

Quando a planta está exposta à condição de déficit hídrico há uma menor translocação de substâncias fotossintetizadas, provocando a redução de crescimento das estruturas das plantas como as folhas. Dessa forma, o acúmulo de matéria seca da parte aérea da planta é afetado pelo déficit hídrico considerando o estágio fenológico da cultura no momento, a intensidade e a duração. A maior produção de grãos é também função de quanto a planta consegue interceptar de luz solar. Então se ocorre déficit hídrico não há produção de folhas em quantidade e tamanho ideais, afetando a produção (Leolato, 2022).

2.4 Sombreamento na soja

A interceptação da luz solar pela planta de soja é influenciada pelo tamanho, forma, cor, orientação e idade das folhas. Parte da radiação solar pode ser absorvida, transmitida e refletida ao atingir a parte aérea das plantas (Taiz; Zeiger, 2004). As plantas de modo geral se adaptam aos estresses e estímulo do ambiente aos quais estão expostas, alterando sua morfologia externa. A soja é exemplo de uma espécie que possui capacidade de adaptação aos diferentes ambientes e ao manejo conduzido, apresentando alterações morfológicas (Heiffig, 2002).

A intensidade e o tipo de radiação afetam os processos fisiológicos das plantas, podendo interferir na produção de matéria seca. A suavização da radiação na parte aérea depende da

quantidade, da organização das folhas no interior da cobertura vegetal e do ângulo existente entre as folhas e os raios solares interceptados (Taiz; Zeiger, 2004).

A importância do conhecimento do comportamento da soja em condições de sombreamento atualmente é necessária devido à recente forma de cultivo no sistema integração lavoura, pecuária e floresta (ILPF). A Figura 2.2 mostra uma área de soja sombreada por árvores de eucalipto.

Figura 2.2 - Área com o cultivo da soja sombreada por árvores de eucalipto.



Fonte: Do autor (2024)

2.5 Modelagem do crescimento e desenvolvimento de plantas

Um modelo estatístico pode ser uma função matemática com um erro associado componente da função, que descrevem um ou mais de um fenômeno biológico. O modelo descreve o comportamento de uma variável resposta de interesse do pesquisador que pode ser o ciclo de vida de uma cultura por meio da estimativa do crescimento e desenvolvimento de suas partes, como folhas, caule, raízes, flores, vagens e grãos (Jame; Curtforth, 1996).

Com a modelagem do crescimento é possível mensurar a quantidade de diferenças entre plantas e entre espécies (Reis; Müller, 1979). A escolha do modelo para ajuste aos dados deve ser feita de acordo com a melhor adequação ao objetivo do estudo, devido ao fato de facilitar a interpretação dos processos envolvidos na produção vegetal (Jones, 1992).

Existem vários modelos que podem ser utilizados (empíricos ou mecânicos) de acordo com o grupo que pertencem, facilitando a interpretação dos processos envolvidos no estudo do fenômeno biológico vegetal de interesse (Jones, 1992). Os modelos empíricos descrevem as relações entre os processos fisiológicos das plantas e as variáveis ambientais, nos diferentes estádios fenológicos de uma cultura (Cruz *et al.*, 2011; Fonseca *et al.*, 2007; Tonato *et al.*, 2010). Os modelos mecânicos são utilizados para descrever o crescimento de pastagens (Cruz *et al.*, 2011).

2.6 Análise de Regressão

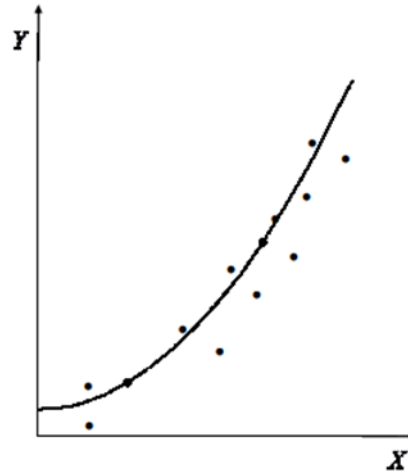
A análise de regressão é uma técnica usada em várias áreas como, por exemplo, agropecuária, biologia e economia. Têm como objetivo modelar a relação entre variáveis por meio de funções matemáticas (Hoffmann, 2015). Os modelos estatísticos são usados para descrever a relação entre uma variável resposta ou variável dependente, denotada por Y , e uma ou mais covariáveis denotadas por X , denominadas de variáveis explicativas ou variáveis independentes. A forma geral que descreve essa relação é (Seber; Wild, 1989):

$$Y_i = f(X_i, \theta) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Sendo que Y_i são os valores observados ou variável dependente, X_i é a variável explicativa ou variável independente, θ é o conjunto de parâmetros do modelo, $f(\cdot)$ uma forma funcional e $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ são os erros aleatórios atribuídos ao modelo, sendo independentes e identicamente distribuídos com distribuição normal, média zero e variância constante.

A figura 2.3 ilustra um possível gráfico para o modelo $Y_i = f(X_i, \theta) + \varepsilon_i$:

Figura 2.3 - Curva do modelo da forma geral



Fonte: Hoffman (2015)

Os modelos de regressão podem ser classificados de três formas como modelos lineares, modelos não lineares e modelos linearizáveis (Bates; Watts, 1988).

Modelos lineares: são aqueles lineares em seus parâmetros, para os quais as derivadas parciais em relação a qualquer parâmetro não dependem de parâmetros do modelo, como exemplo,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \varepsilon,$$

sendo que Y é a variável resposta ou variável dependente, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ são os parâmetros do modelo, X é a variável independente e ε é o erro aleatório associado ao modelo.

Calculando as derivadas parciais em relação a cada um dos parâmetros, obtém-se:

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta_0} = 1 \quad \frac{\partial Y}{\partial \beta_1} = x \quad \frac{\partial Y}{\partial \beta_2} = x^2 \quad \frac{\partial Y}{\partial \beta_3} = x^3$$

Modelos não lineares: são aqueles não lineares em seus parâmetros, ou seja, pelo menos uma das derivadas parciais em relação a qualquer parâmetro depende de algum parâmetro do modelo e não existe transformação que possa torná-los lineares, como exemplo,

$$Y = \beta_0 + \beta_1^x + \varepsilon,$$

sendo que Y é a variável resposta ou variável dependente, β_0 , β_1 são os parâmetros do modelo, X é a variável independente e ε é o erro aleatório associado ao modelo.

Calculando as derivadas parciais em relação a cada um dos parâmetros, obtém-se:

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta_0} = 1 \qquad \frac{\partial Y}{\partial \beta_1} = x\beta_1^{x-1}$$

Modelos linearizáveis: são aqueles não lineares em seus parâmetros, mas que podem se tornar lineares usando alguma transformação, como exemplo,

$$Y = e^{(\alpha + \beta x)} \varepsilon,$$

sendo que Y é a variável resposta ou variável dependente, α e β são os parâmetros do modelo, X é a variável independente e ε é o erro aleatório associado ao modelo.

Calculando as respectivas derivadas parciais em relação a cada um dos parâmetros, obtém-se:

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = e^{(\alpha + \beta x)} \varepsilon \qquad \frac{\partial Y}{\partial \beta} = x e^{\alpha + \beta x} \varepsilon$$

É possível observar que as derivadas parciais dependem dos parâmetros. Então aplicando a transformação logarítmica em ambos os lados, obtém-se:

$$\ln(Y) = \alpha + \beta x + \ln(\varepsilon)$$

Calculando as derivadas parciais em relação a cada um dos parâmetros, obtém-se:

$$\frac{\partial \ln Y}{\partial \alpha} = 1 \quad \frac{\partial \ln Y}{\partial \beta} = x$$

É possível observar que as derivadas parciais do modelo transformado não dependem de nenhum dos parâmetros, caracterizando-o como modelo linearizável.

2.7 Tipos de dados

Em estudos que envolvem a coleta de dados ao longo do tempo as estratégias de coleta podem ser: longitudinal e transversal. A coleta de dados longitudinais é feita no(s) mesmo(s) indivíduo(s) com o passar do tempo. Como vantagem, tem-se uma melhor mensuração das variações ocorridas. A desvantagem é em casos de um período de observação muito longo (Singer; Nobre; Rocha, 2018). A coleta de dados transversais é feita em indivíduos diferentes de uma mesma população com idades diferentes. Como vantagem tem-se a rapidez com que é realizada a coleta dos dados. E a desvantagem é não se obter medidas repetidas em um mesmo indivíduo (Bastos; Duquia, 2007; Ribeiro *et al.*, 2018).

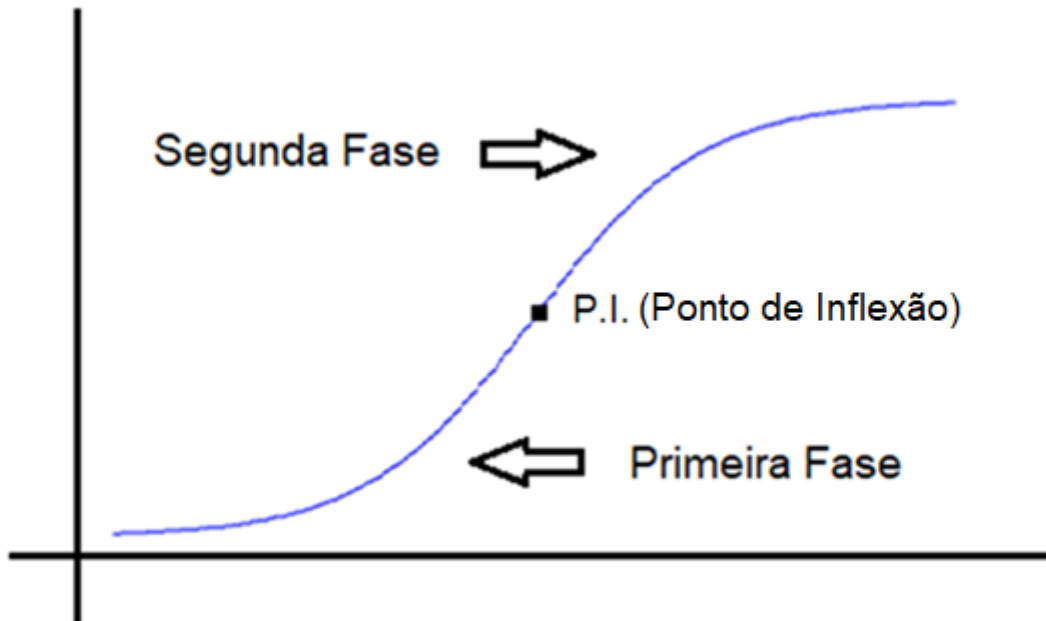
Nos experimentos feitos com vegetais, quando a variável de interesse é a matéria seca, seja de toda planta ou de suas partes é necessária a destruição da planta sendo os dados coletados transversais. Em outros experimentos com plantas, quando a variável de interesse é altura da planta, os dados coletados são longitudinais (Gonzaga, 2022).

2.8 Modelos não lineares

Muitos fenômenos biológicos são melhores representados por meio dos modelos não lineares, por exemplo, o crescimento de plantas e animais. O crescimento das plantas e dos animais pode ser dividido em duas fases: a primeira acontece de forma acelerada com o passar do tempo, que é finalizada no ponto de inflexão (P.I.); e a segunda de forma desacelerada, também com o passar do tempo, porém esta tende a uma estabilidade na fase adulta conhecida como fase assintótica (Mischan; Pinho, 2014). Alguns dos modelos mais utilizados para descrever curvas de crescimento são Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody e Richards (Fernandes *et al.*, 2015).

A análise de um diagrama de dispersão de Y por X, a forma da função pode ser caracterizada por uma curva em formato de “S”, conhecidas como curvas sigmóides ou sigmóides, conforme ilustrado na figura 2.4 (Zeviani; Ribeiro; Bonat, 2013).

Figura 2.4 - Curva sigmóidal característica dos modelos de crescimento



Fonte: Do autor (2025)

O uso de modelos não lineares possui algumas vantagens (Zeviani; Ribeiro; Bonat, 2013):

- a) a escolha é baseada em informações prévias;
- b) parte dos parâmetros possui interpretação de interesse do pesquisador, e;
- c) são mais parcimoniosos, pois possuem menos parâmetros que os lineares.

Como desvantagens têm-se:

- a) requerem procedimentos iterativos de estimação baseados no fornecimento de valores iniciais para os parâmetros;
- b) métodos de inferência são aproximados, e;
- c) exigem conhecimento do pesquisador sobre o fenômeno estudado.

2.8.1 Modelo Logístico

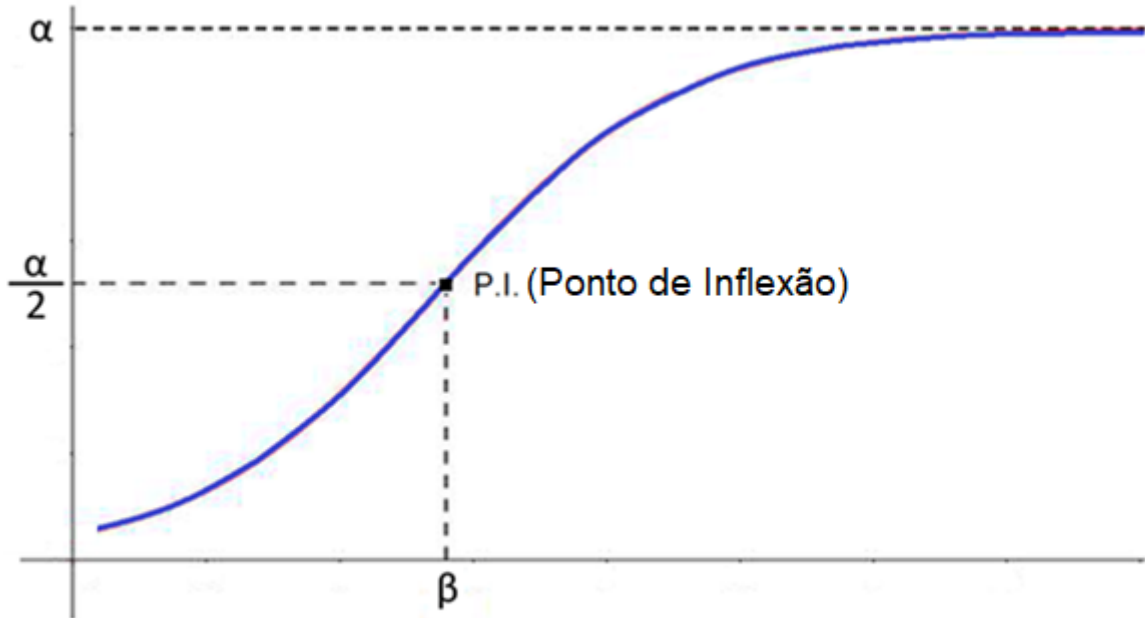
É adequado para representar dados de crescimento de organismos vivos em que o crescimento inicial é exponencial e, após o ponto de inflexão, é assintótico (Mischán; Pinho, 2014). Porém, o uso inicial desse modelo foi em estudos de crescimento populacional (Seber; Wild, 1989). O modelo logístico possui mais de uma parametrização (Zeviani; Ribeiro; Bonat, 2013), e a mais adequada para interpretação dos parâmetros é a seguinte (Fernandes *et al.*, 2015),

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{k(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i,$$

sendo que Y_i é a i -ésima observação da variável dependente, x_i a i -ésima observação da variável independente, α é o valor esperado para o crescimento máximo em estudo, β a abscissa no ponto de inflexão, no qual o crescimento passa a ser desacelerado, k é um índice associado ao crescimento e quanto maior o seu valor menos tempo é necessário para que o objeto em estudo atinja seu ponto de inflexão e ε_i são os erros aleatórios associados às observações, pressupondo-se que sejam independentes e identicamente distribuídos, seguindo uma distribuição normal de média zero e variância constante, ou seja, $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$.

O gráfico do modelo logístico é ilustrado na Figura 2.5:

Figura 2.5 - Curva do modelo logístico



Fonte: Do autor (2025)

A assíntota horizontal (reta horizontal tracejada superior) é a reta $y = \alpha$. A abscissa do ponto de inflexão é o ponto $x = \beta$, que ocorre quando o valor da variável independente anula a derivada de segunda ordem do modelo. Neste ponto ocorre a mudança de taxa de crescimento acelerado para taxa de crescimento desacelerado (Mischán; Pinho, 2014). Substituindo-se esse ponto na função logística tem-se:

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{k(\beta - x_i)}} = \frac{\alpha}{1 + e^{k(\beta - \beta)}} = \frac{\alpha}{2}.$$

Logo, o ponto de inflexão (ponto P.I. que toca a curva em azul) tem a seguinte coordenada $(\beta, \frac{\alpha}{2})$

2.8.2 Modelo Gompertz

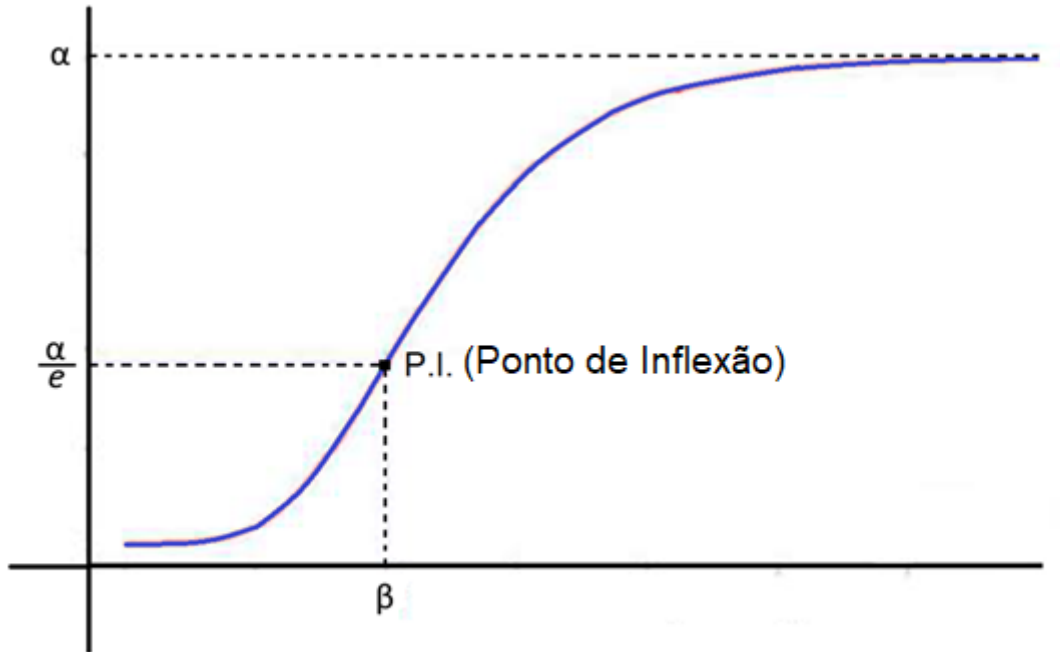
É semelhante ao modelo logístico, adequado para representar dados de crescimento de organismos vivos em que o crescimento inicial é exponencial e, após o ponto de inflexão, é assintótico (Mischak; Pinho, 2014). Porém, o uso inicial deste modelo foi em estudos das tábuas de vida, uma área das ciências atuárias (Seber; Wild, 2003). A seguir é apresentada uma das parametrizações para o modelo,

$$Y_i = \alpha e^{-e^{k(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i,$$

sendo que Y_i é a i -ésima observação da variável dependente, x_i a i -ésima observação da variável independente, α é o valor esperado para o crescimento máximo em estudo, β a abscissa no ponto de inflexão, no qual o crescimento passa a ser desacelerado, k é um índice associado ao crescimento e quanto maior o seu valor menos tempo é necessário para que o objeto em estudo atinja seu ponto de inflexão e ε_i são os erros aleatórios associados às observações, pressupondo-se que sejam independentes e identicamente distribuídos, seguindo uma distribuição normal de média zero e variância constante, ou seja, $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$.

O gráfico do modelo Gompertz é ilustrado na figura 2.6:

Figura 2.6 - Curva do modelo Gompertz



Fonte: Do autor (2025)

A assíntota horizontal (reta horizontal tracejada superior) é a reta $y = \alpha$. A abscissa do ponto de inflexão é o ponto $x = \beta$, que ocorre quando o valor da variável independente anula a derivada de segunda ordem do modelo. Neste ponto ocorre a mudança de taxa de crescimento acelerado para taxa de crescimento desacelerado (Mischan; Pinho, 2014). Substituindo-se esse ponto na função gompertz tem-se:

$$Y_i = \alpha e^{-e^{k(\beta - x_i)}} = Y_i = \alpha e^{-e^{k(\beta - \beta)}} = \frac{\alpha}{e}$$

Logo, o ponto de inflexão (ponto P.I. que toca a curva em azul) tem a seguinte coordenada $(\beta, \frac{\alpha}{e})$.

2.8.3 Modelo von Bertalanffy

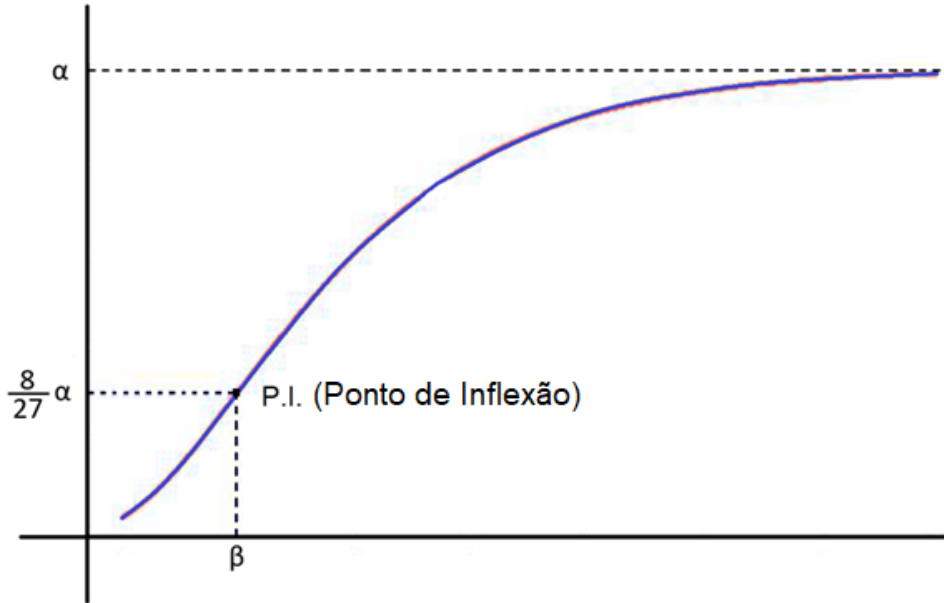
É um modelo com a curva em formato sigmoidal não simétrico (parte da curva anterior ao P.I. é menor que a parte posterior) em relação ao ponto de inflexão e é usado também em estudos de crescimento de plantas (Fernandes *et al.*, 2019). Porém, o uso inicial deste modelo foi em estudos de crescimento de peixes (Vascon; Bazão, 2021). A seguir é apresentada uma das parametrizações para o modelo,

$$Y_i = \alpha \left(1 - \frac{e^{k(\beta - x_i)}}{3} \right)^3 + \varepsilon_i ,$$

sendo que Y_i é a i -ésima observação da variável dependente, x_i a i -ésima observação da variável independente, α é o valor esperado para o crescimento máximo em estudo, β a abscissa no ponto de inflexão, no qual o crescimento passa a ser desacelerado, k é um índice associado ao crescimento e quanto maior o seu valor menos tempo é necessário para que o objeto em estudo atinja seu ponto de inflexão e ε_i são os erros aleatórios associados às observações, pressupondo-se que sejam independentes e identicamente distribuídos, seguindo uma distribuição normal de média zero e variância constante, ou seja, $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$.

O gráfico do modelo von Bertalanffy é ilustrado na Figura 2.7:

Figura 2.7 - Curva do modelo von Bertalanffy



Fonte: Do autor (2025)

A assíntota horizontal (reta horizontal tracejada superior) é a reta $y = \alpha$. A abscissa do ponto de inflexão é o ponto $x = \beta$, que ocorre quando o valor da variável independente anula a derivada de segunda ordem do modelo. Neste ponto ocorre a mudança de taxa de crescimento acelerado para taxa de crescimento desacelerado (Mischán; Pinho, 2014). Substituindo-se esse ponto na função von Bertalanffy tem-se:

$$Y_i = \alpha \left(1 - \frac{e^{k(\beta-x_i)}}{3} \right)^3 = Y_i = \alpha \left(1 - \frac{e^{k(\beta-\beta)}}{3} \right)^3 = \alpha \cdot \frac{8}{27}$$

Logo o ponto de inflexão (ponto P.I. que toca a curva em azul) tem a seguinte coordenada $(\beta, \alpha \frac{8}{27})$.

2.9 Estimação de parâmetros

Nesta seção serão apresentados os métodos de estimação de parâmetros em modelos não lineares, testes para análise de resíduos e critérios para selecionar e avaliar os melhores ajustes de modelos.

2.9.1 Método dos Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados é o mais utilizado para estimar os parâmetros de modelos não lineares, com o objetivo de minimizar a soma dos quadrados dos erros, diferenças entre os valores observados e os valores estimados (Draper; Smith, 1998).

Para a inferência dos parâmetros, o vetor de erros deve atender os seguintes pressupostos: erros identicamente distribuídos, independentes, tendo distribuição normal de média zero e variância homogênea (Seber; Wild, 2003).

O método de mínimos quadrados é classificado em três tipos (Gallant, 1987):

- a) ordinários: os erros não violam os pressupostos, ou seja, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}; \sigma^2)$;
- b) ponderados: os erros violam o pressuposto de homogeneidade de variâncias, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, D\sigma^2)$, sendo D a matriz diagonal, positiva definida, com elementos da diagonal sendo os pesos que ponderam a variância σ^2 ;
- c) generalizados: os erros violam o pressuposto de independência e/ou de homogeneidade de variâncias, assim são correlacionados e possivelmente heterocedásticos. Assim, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, M\sigma^2)$, sendo matriz M de variâncias e covariâncias dos resíduos, os elementos da diagonal principal são as variâncias e fora dela a correlação dos erros.

Então a escolha do método de mínimos quadrados adequado depende das características dos erros no modelo de regressão analisado. Se os erros apresentarem propriedades de um modelo ordinário, aplica-se o método de mínimos quadrados ordinários; se corresponderem a um modelo ponderado, utiliza-se o método de mínimos quadrados ponderados; e, no caso de um modelo generalizado, adota-se o método de mínimos quadrados generalizados (Gonzaga, 2022).

Para exemplificar o método de mínimos quadrados ordinários, considerando a forma geral descrita anteriormente como uma equação de regressão não linear. Esta equação pode ser escrita de forma matricial, como ilustrado a seguir,

$$Y_i = f(X_i, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) ,$$

sendo que:

$$Y_i = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad f(X_i, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} f(X_1, \boldsymbol{\theta}) \\ f(X_2, \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ f(X_n, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \quad \varepsilon_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Tem-se que,

$$E[Y_i] = E[f(X_i, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon_i] = E[f(X_i, \boldsymbol{\theta})] + E[\varepsilon_i]$$

lembrando que,

$$E[\varepsilon_i] = 0$$

então,

$$E[Y_i] = E[f(X_i, \boldsymbol{\theta})] = f(X_i, \boldsymbol{\theta}).$$

O erro é calculado da seguinte forma, $\varepsilon_i = Y_i - f(X_i, \boldsymbol{\theta})$. Minimizando a soma de quadrados dos erros:

$$\begin{aligned} \text{SQErro}(\boldsymbol{\theta}) &= \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})]' [\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})] \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) - [\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})]'\mathbf{Y} + [\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})]'\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade da transposta de matrizes $(\mathbf{A}'\mathbf{B})' = (\mathbf{B}'\mathbf{A})$, tem-se:

$$= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}'\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) + [\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})]'\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$$

Considerando a derivada da $\text{SQErro}(\boldsymbol{\theta})$ tem-se que,

$$\frac{\partial \text{SQErro}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -2\mathbf{Y}'\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})'}{\partial \boldsymbol{\theta}}\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) + [\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})]'\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

Sendo que $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ é a matriz de derivadas parciais, também denominada de matriz jacobiana, que é composta pelas derivadas de primeira ordem, com n número de observações e p número parâmetros do modelo. Esta pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X_1, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f(X_1, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f(X_1, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p} \\ \frac{\partial f(X_2, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f(X_2, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f(X_2, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(X_n, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f(X_n, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f(X_n, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

Denominando-se a matriz jacobiana de matriz X e aplicando a propriedade de matrizes $(A'B)'=(B'A)$, obtém-se o sistema de equações normais (SEN) para o modelo não linear, em que a matriz X e $f(X, \theta)$ estão em função de θ , sendo este sistema é consistente e indeterminado, ou seja,

$$\begin{aligned} - 2 Y'X + 2 [f(X, \theta)]'X &= 0 \\ X' f(X, \theta) &= X'Y . \end{aligned}$$

Assim surge a necessidade do uso de métodos iterativos, que são métodos numéricos para encontrar a solução (Draper; Smith, 1998).

2.9.2 Métodos Iterativos

O uso dos métodos iterativos é necessário para a obtenção da solução do sistema de equações normais não lineares. Os métodos começam usando um valor inicial para os parâmetros e prosseguem adequando-os até que se alcance o critério de convergência. Existem vários métodos como Steepest-Descent, método Marquardt, Gauss-Newton (Bates; Watts, 1988). O método iterativo mais usado é o de Gauss-Newton (Carneiro *et al.*, 2014; Fernandes *et al.*, 2015; Zeviani *et al.*, 2012).

O método de Gauss-Newton é usado na estimação dos parâmetros do modelo, minimizando a soma de quadrados, dos erros. Este método é uma generalização do método de mínimos quadrados (Seber; Wild, 2003). O método lineariza a função não linear utilizando a série de Taylor até a derivada de primeira ordem da função $f(X, \theta)$, dado um valor inicial θ^0 (Silva *et al.*, 2019; Seber; Wild, 2003). Como demonstrado a seguir:

$$f(\theta) \approx f(\theta^0) + F(\theta^0)(\theta - \theta^0) .$$

Substituindo os termos da expansão acima no sistema de equações normais, tem-se que:

$$\begin{aligned} X' f(\theta) &= X'Y \\ X'[f(\theta^0) + F(\theta^0)(\theta - \theta^0)] &= X'Y . \end{aligned}$$

Usando $F(\boldsymbol{\theta}^0) = X$ a matriz de derivadas parciais em relação aos parâmetros do modelo, tem-se:

$$X' [f(\boldsymbol{\theta}^0) + X(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^0)] = X'Y.$$

Usando a propriedade da distributiva em X' :

$$X' f(\boldsymbol{\theta}^0) + X'X(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^0) = X'Y.$$

Subtraindo $X'f(\boldsymbol{\theta}^0)$ em ambos os lados da igualdade, tem-se:

$$\begin{aligned} X'f(\boldsymbol{\theta}^0) + X'X(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^0) - X'f(\boldsymbol{\theta}^0) &= X'Y - X'f(\boldsymbol{\theta}^0) \\ X'X(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^0) &= X'[Y - f(\boldsymbol{\theta}^0)]. \end{aligned}$$

Lembrando que $\boldsymbol{\varepsilon} = Y - f(\boldsymbol{\theta}^0)$ e multiplicando pela inversa de $X'X$, tem-se:

$$(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^0) = (X'X)^{-1} X' \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Obtendo a seguinte forma iterativa de Gauss-Newton:

$$\boldsymbol{\theta}^1 = \boldsymbol{\theta}^0 + (X'X)^{-1} X' \boldsymbol{\varepsilon}.$$

O primeiro passo é atribuir um valor inicial $\boldsymbol{\theta}^0$ e calcular $\boldsymbol{\theta}^1$. O segundo passo é colocar $\boldsymbol{\theta}^1$ na posição de $\boldsymbol{\theta}^0$ e calcular o segundo $\boldsymbol{\theta}^1$. Repetir os passos colocando o $\boldsymbol{\theta}$ calculado na posição do $\boldsymbol{\theta}^0$ até atingir o critério de convergência pré-estabelecido.

2.9.3 Análise de Resíduos

A análise de resíduos tem como função verificar a adequação do modelo para posteriormente realizar a inferência. Quando se estima os parâmetros do modelo deseja-se que os pressupostos de independência, normalidade e homoscedasticidade não sejam violados. No caso de pelo menos um desses pressupostos ser violado, será necessário refazer a estimação dos parâmetros considerando as características do vetor dos erros (Pereira *et al.*, 2014).

O teste de Shapiro-Wilk é usado para testar a normalidade dos resíduos. Testa se os resíduos seguem distribuição normal (Shapiro; Wilk, 1965). As hipóteses do teste são:

H_0 : Os resíduos seguem distribuição normal.

H_1 : Os resíduos não seguem distribuição normal.

O teste de Breusch-Pagan é usado para testar a homoscedasticidade dos resíduos. Testa a hipótese nula de que as variâncias dos resíduos são iguais (Breusch; Pagan, 1979). As hipóteses são:

H_0 : As variâncias dos resíduos são homogêneas.

H_1 : As variâncias dos resíduos não são homogêneas.

O teste de Durbin-Watson é usado para testar a independência dos resíduos. Testa a existência de autocorrelação de primeira ordem nos resíduos (Durbin; Watson, 1951). As hipóteses são:

H_0 : Os resíduos são independentes.

H_1 : Os resíduos não são independentes.

2.9.4 Critérios para seleção e avaliação de modelos

Antes de calcular as estimativas dos parâmetros dos modelos é realizado a análise para seleção de qual modelo melhor se ajusta aos dados e qual a qualidade do ajuste. Para seleção do modelo considera-se o menor AIC e para a qualidade do ajuste considera-se o menor DPR e o maior R^2 . A seguir é descrito cada um dos critérios.

2.9.4.1 Critério de informação de Akaike (AIC)

O critério de informação de Akaike é uma medida relativa usada para selecionar um modelo estatístico estimado, evitando-se modelos com excesso de parâmetros. Assim, sua interpretação é quanto menor o valor mais adequado é o modelo (Akaike, 1974). É calculado da seguinte forma:

$$AIC = n \cdot \left[\ln \left(\frac{SQR}{n} \right) \right] + 2p ,$$

sendo que n é o tamanho amostral, \ln é o operador logaritmo natural, SQR é a soma dos quadrados dos resíduos e p é o número de parâmetros ajustados pela regressão.

2.9.4.2 Desvio Padrão Residual (DPR)

O desvio padrão residual é um indicador da distância entre os valores observados e os valores estimados pelo modelo. Assim, sua interpretação é quanto menor o valor, melhor o ajuste do modelo. É calculado da seguinte forma:

$$DPR = \sqrt{\frac{SQR}{n - p}},$$

sendo que SQR é a soma de quadrado dos resíduos, n é o número de observações e p é o número de parâmetros do modelo.

2.9.4.5 Coeficiente de Determinação (R^2)

O coeficiente de determinação indica quanto da variação dos dados foi explicada pelo modelo. Ele varia de 0 a 1 e indica, em porcentagem, o quanto o modelo consegue explicar os valores observados, ou seja, quanto mais próximo de 1 melhor será o modelo. É calculado da seguinte forma:

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT},$$

sendo que SQR é a soma de quadrados dos resíduos e SQT soma de quadrados total.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Nesta seção são especificados a origem dos dados de matéria seca da planta de soja, da cultivar Capinópolis e os métodos para análise utilizando modelos não lineares.

3.1 Material

Os dados utilizados para ajuste dos modelos, foram extraídos e selecionados de Pereira (2002). O experimento foi conduzido no ano agrícola de 1998/1999, na estação experimental Vila Chaves, no Câmpus da Universidade Federal de Viçosa, município de Viçosa-MG.

O experimento consistiu de quatro tratamentos: irrigado durante todo o período em que a cultura permaneceu no campo (IPTP); irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV); não irrigado na fase vegetativa (NIFV); e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).

As unidades experimentais de 6,0 m X 10,5 m, separadas por uma bordadura de 3,0 m, foram agrupadas em dois blocos separados entre si por uma faixa com largura de 3,5 m. Foi utilizado o delineamento experimental em blocos casualizados com duas repetições.

A evolução do acúmulo da matéria seca foi verificada usando o esquema experimental de parcelas subdivididas, sendo as parcelas principais os tratamentos e as subparcelas as épocas de amostragem. Para mensuração foram feitas coletas de 10 plantas por parcela, a cada dois dias, do quarto DAE (dia após a emergência) até os 36 DAE e a partir desta data, a cada 7 dias até o final do ciclo de vida das plantas de soja. A parcela foi dividida em 24 subparcelas as quais a coleta era sorteada, devido ao fato de se tratar de uma variável em que para obtenção dos dados de uma amostra é necessário a destruição do material, a cada amostragem. A subparcela era constituída de 10 plantas, tendo como bordadura 3 plantas em cada extremidade e uma fileira de cada lado da linha de amostragem. As plantas foram retiradas com todo o sistema radicular, o qual foi lavado para remoção do solo aderido. O material coletado foi enviado para processamento em laboratório. A mensuração da matéria seca foram gramas/m².

3.2 Métodos

Para analisar e modelar a produção de matéria seca total de plantas de soja e das partes das plantas caules, folhas e raízes, primeiro foram feitas as análises dos resíduos. Os modelos em que ocorreu violação do pressuposto de normalidade foram desconsiderados. E os modelos em que ocorreu violação nos pressupostos de homoscedasticidade e independência foram

aplicadas as devidas correções para prosseguirem nas análises. Posteriormente foram calculados o critério de seleção e os de avaliação dos modelos. Finalmente realizou-se a estimação de parâmetros e os intervalos de confiança.

3.2.1 Modelos Ajustados

Os modelos ajustados e suas parametrizações, utilizados foram os seguintes:

a) Modelo Logístico:
$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{k(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i .$$

b) Modelo Gompertz:
$$Y_i = \alpha e^{-e^{k(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i .$$

c) Modelo von Bertalanffy:
$$Y_i = \alpha \left(1 - \frac{e^{k(\beta - x_i)}}{3} \right)^3 + \varepsilon_i .$$

3.2.3 Estimação dos Parâmetros

A estimação dos parâmetros dos modelos foi feita pelo método dos mínimos quadrados, usando o algoritmo de convergência de Gauss-Newton. Os valores iniciais para os parâmetros foram obtidos por meio da análise gráfica dos dados.

3.2.4 Análise dos Resíduos

Os pressupostos de normalidade, homogeneidade e independência dos modelos foram verificados ao nível de 5% de significância pelos testes de Shapiro-Wilk, Breuch-Pagan e Durbin-Watson, respectivamente. Modelos com violação do pressuposto de normalidade foram desconsiderados. Modelos com violação do pressuposto de homoscedasticidade, o fator de ponderação foi estimado usando o argumento “weights” da função “gnls”, as classes testadas foram “varPower()”, “varExp()”, “varIdent()” e selecionou-se a classe que apresentou menor AIC. Modelos com violação da pressuposição de independência foram ajustados novamente com a inclusão do termo autorregressivo de primeira ordem (AR1).

Utilizou-se o teste t de Student para significância dos parâmetros α , β e k , sendo a hipótese nula (H_0) que o parâmetro é igual a zero, e a hipótese alternativa (H_1) que o parâmetro é diferente de zero. Também foram obtidos os intervalos de confiança de 95%.

3.2.5 Seleção e avaliação de modelos

O modelo selecionado para cada tratamento que melhor se ajusta aos dados é o que apresentou menor valor de AIC. A avaliação da qualidade do ajuste do modelo que melhor descreve os dados foram realizadas usando o coeficiente de determinação (R^2) e o desvio padrão residual (DPR).

3.2.6 Recursos Computacionais

As análises foram feitas com o software estatístico R de acesso livre (R Core Team, 2024). Os pacotes utilizados foram nlme, car, lmtest e qpcR e os scripts encontram-se em anexo.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção serão apresentados os resultados e a discussão referentes ao comportamento de cada variável influenciado pelo efeito de cada tratamento. As variáveis são Mst (matéria seca total), Msc (matéria seca dos caules), Msf (matéria seca das folhas) e Msr (matéria seca das raízes). Os tratamentos são IPTP (irrigado por todo o período), ISFV (irrigado e sombreado na fase vegetativa), NIFV (não irrigado na fase vegetativa) e NIFF (não irrigado na fase de florescimento).

4.1 Variável matéria seca total (Mst)

Primeiro ajustou-se os modelos Logístico, Gompertz e Von Bertalanffy aos dados, adotou-se os pressupostos sobre o vetor de erros, ou seja, os resíduos são independentes e identicamente distribuídos e seguem uma distribuição normal de média zero e variância constante ($\varepsilon \sim N(0, \mathbf{I}\sigma^2)$), foi realizada a análise de resíduos utilizando os testes: Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson. Na Tabela 4.1 estão apresentados os resultados obtidos da aplicação dos testes para os três modelos para a variável Mst.

Tabela 4.1 – Valores-p dos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), aplicados aos resíduos dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca total (Mst) para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).

Tratamento	Modelo	SW	BP	DW
IPTP	Logístico	0,0118*	0,0889	0,8151
	Gompertz	0,0458*	0,0783	0,5507
	von Bertalanffy	0,1378	0,0674	0,4163
ISFV	Logístico	0,0813	0,0413*	0,2293
	Gompertz	0,1779	0,1264	0,1292
	von Bertalanffy	0,5701	0,1518	0,0657
NIFV	Logístico	0,0943	0,0227*	0,2320
	Gompertz	0,0095*	0,0630	0,0998
	von Bertalanffy	0,0380*	0,0955	0,0634
NIFF	Logístico	0,2343	0,1416	0,0197*
	Gompertz	0,3248	0,2811	0,0112*
	von Bertalanffy	0,1372	0,3525	0,0009*

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.1, na coluna SW, do teste de Shapiro-Wilk (SW), nota-se que a pressuposição de normalidade residual foi atendida em todos os modelos dos tratamentos ISFV e NIFF e para o modelo von Bertalanffy do tratamento IPTP e o modelo Logístico do tratamento NIFV (valor-p > 0,05). Foi violada nos modelos Logístico e Gompertz do tratamento IPTP e nos modelos Gompertz e von Bertalanffy no tratamento NIFV (valor-p < 0,05). Os modelos com a pressuposição de normalidade violada foram desconsiderados nas análises posteriores, como feito no trabalho de Silva *et al.* (2020).

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.1, na coluna BP, do teste de Breusch-Pagan (BP), nota-se que a pressuposição de homocedasticidade residual foi atendida em todos os modelos dos tratamentos IPTP e NIFF e nos modelos Gompertz e von Bertalanffy dos tratamentos ISFV e NIFV (valor-p > 0,05). Foi violada no modelo Logístico dos tratamentos ISFV e NIFV (valor-p < 0,05) mostrando que existe heterogeneidade das variâncias. É comum ocorrer heterogeneidade das variâncias quando os dados são transversais. Quando são dados de várias fases do ser vivo em estudo, por exemplo, diferentes fases

fenológicas da cultura de soja, geralmente ocorre aumento na variabilidade com o crescimento das plantas (Fernandes *et al.*, 2014).

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.1, na coluna DW, do teste de Durbin-Watson (DW), nota-se que a pressuposição de independência residual foi atendida em todos os modelos dos tratamentos IPTP, ISFV e NIFV (valor-p > 0,05). Foi violada em todos os modelos do tratamento NIFF (valor-p < 0,05), mostrando que os resíduos são autocorrelacionados. Resíduos autocorrelacionados não são esperados quando os dados são transversais, porém Frühauf *et al.* (2020) também observaram resíduos autocorrelacionados em estudos sobre o aumento de diâmetro de cedro.

Depois de avaliados os pressupostos dos resíduos dos modelos, desconsiderando-se os modelos com a pressuposição de normalidade violada, foram obtidos os critérios de seleção dos modelos que estão apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Critérios de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca total (Mst) para os tratamentos (IPTP), (ISFV), (NIFV) e (NIFF).

Tratamento	Modelo	AIC	DPR	R²
IPTP	Logístico	-	-	-
	Gompertz	-	-	-
	von Bertalanffy	194,68810	136,40000	0,95820
ISFV	Logístico	143,17070	0,00610	0,89425
	Gompertz	170,75670	61,43000	0,93136
	von Bertalanffy	173,18050	66,60000	0,91058
NIFV	Logístico	156,79620	0,29120	0,96417
	Gompertz	-	-	-
	von Bertalanffy	-	-	-
NIFF	Logístico	179,41180	81,22000	0,95524
	Gompertz	181,94310	91,21000	0,94480
	von Bertalanffy	184,46750	105,81000	0,91194

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se a Tabela 4.2 as caselas vazias referem-se aos modelos que tiveram a pressuposição de normalidade violada, sendo esses modelos desconsiderados, não sendo calculados os valores dos critérios de seleção e avaliadores de qualidade. Então, para o tratamento IPTP, o único modelo selecionado para descrição dos dados foi o von Bertalanffy.

Para tratamento ISFV, o modelo que melhor descreve o comportamento da variável é o Logístico, pois apresentou o menor AIC. O menor DPR e o maior R^2 indicam a qualidade do ajuste sendo o DPR o menor desvio dos resíduos e o R^2 o quanto da variação dos dados é explicada pelo modelo. E para o tratamento NIFV, o único modelo ajustado para variável Mst foi o Logístico devido ao fato dos outros modelos não atenderem o pressuposto de normalidade. Nos dois tratamentos a estimação dos parâmetros foi realizada usando o método de mínimos quadrados ponderados para que os pontos com maior variabilidade influenciem menos nas estimativas dos parâmetros devido ao fato do pressuposto de homoscedasticidade ter sido violado, como feito por Gonzaga *et al.* (2023) no estudo da evolução da matéria seca de milho.

Para o tratamento NIFF o modelo selecionado foi o Logístico por ter o menor AIC. Para este caso os parâmetros foram estimados pelo do método de mínimos quadrados generalizados, incluindo o termo autorregressivo de primeira ordem (AR1). Porém o parâmetro de autocorrelação não foi colocado no modelo por não ser significativo devido ao fato de o zero estar incluído no intervalo de confiança como feito por Frühauf *et al.* (2021) em estudos de altura de plantas de feijão.

Após a seleção do modelo que melhor descreve a variável dentro de cada tratamento, calculou-se as estimativas e os intervalos de confiança para os parâmetros α (quantidade máxima de matéria seca estimada pelo modelo), β (número de dias que o ponto de inflexão é atingido) e k (está associado ao crescimento, quando comparado modelos iguais o que tem maior k tem menor α). Na Tabela 4.3 estão os valores estimados e os intervalos de confiança para os parâmetros.

Tabela 4.3 – Estimativas e intervalos de confiança a 95% para os parâmetros dos modelos da variável matéria seca total (Mst) que melhor se ajustaram aos dados para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).

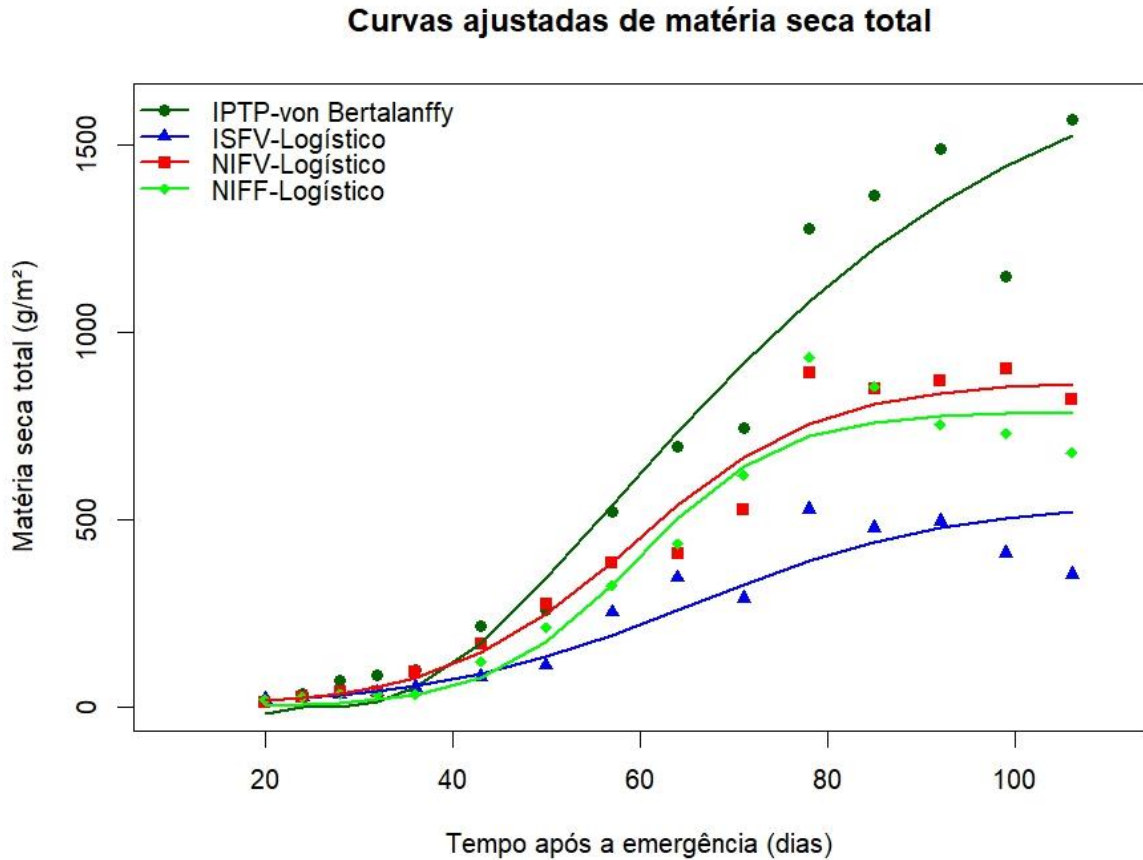
Tratamento	Modelo	Parâmetro	Estimativas	L.I.	L.S.
IPTP	von Bertalanffy	α	1850,000	1473,614	4215,223
		β	57,35	49,73	88,89
		k	0,03451	0,01285	0,04767
ISFV	Logístico	α	549,893	311,787	787,999
		β	65,66	55,35	75,97
		k	0,07242	0,06317	0,08166
NIFV	Logístico	α	869,887	746,113	993,662
		β	59,18	54,77	63,59
		k	0,10000	0,08713	0,11286
NIFF	Logístico	α	788,280	663,100	913,460
		β	59,70	53,41	66,00
		k	0,13106	0,04641	0,21571

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se a Tabela 4.3 os intervalos de confiança dos parâmetros não contêm o zero. Isso indica que os parâmetros dos modelos foram adequados para descrever o comportamento da variável Mst em função dos dias após a emergência das plantas. Observa-se que nas estimativas intervalares, para o parâmetro α , dos modelos que melhor se ajustaram aos dados dos tratamentos ISFV, NIFV e NIFF ocorre intersecção entre os intervalos de confiança não sendo possível inferir qual efeito de tratamento foi mais prejudicial a produção de matéria seca sendo que estes três tratamentos causaram estresse de forma e em estádios diferentes nas plantas. A estimativa para o parâmetro α do tratamento IPTP é maior que as estimativas dos demais tratamentos e não ocorre intersecção entre intervalos de confiança sendo possível inferir que o modelo von Bertalanffy para o tratamento IPTP apresenta a maior produção de matéria seca total de 1.850,00 g/m². Este fato era esperado, pois neste tratamento as plantas de soja não estavam submetidas a nenhum tipo de estresse.

Os ajustes gráficos dos modelos para a matéria seca total são apresentados no Gráfico 4.1. O estresse que casou maior redução da produção de matéria seca foi o sombreamento na fase vegetativa.

Figura 4.1 – Ajuste gráfico dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para Mst em cada tratamento.



Fonte: Do autor (2025)

4.2 Variável matéria seca dos caules (Msc)

Primeiro ajustou-se os modelos Logístico, Gompertz e Von Bertalanffy aos dados, adotou-se os pressupostos sobre o vetor de erros, ou seja, os resíduos são independentes e identicamente distribuídos e seguem uma distribuição normal de média zero e variância constante ($\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$), foi realizada a análise de resíduos utilizando os testes: Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson. Na Tabela 4.4 estão apresentados os resultados obtidos da aplicação dos testes para os três modelos para a variável Msc:

Tabela 4.4 – Valores-p dos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), aplicados aos resíduos dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca dos caules (Msc) para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).

Tratamento	Modelo	SW	BP	DW
IPTP	Logístico	0,16270	0,10230	0,47440
	Gompertz	0,19120	0,15600	0,27630
	von Bertalanffy	0,42650	0,17670	0,09785
ISFV	Logístico	0,05050	0,13320	0,29360
	Gompertz	0,09900	0,20440	0,28490
	von Bertalanffy	0,36410	0,23020	0,13690
NIFV	Logístico	0,02261*	0,15240	0,01866*
	Gompertz	0,05120	0,22880	0,01205*
	von Bertalanffy	0,06179	0,22980	0,00338*
NIFF	Logístico	0,03122*	0,17790	0,00341*
	Gompertz	0,11920	0,24420	0,00410*
	von Bertalanffy	0,19200	0,24980	0,00015*

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.4, na coluna SW, do teste de Shapiro-Wilk (SW), nota-se que a pressuposição de normalidade residual foi atendida em todos os modelos dos tratamentos IPTP e ISFV, e para o modelo Gompertz e von Bertalanffy dos tratamentos NIFV e NIFF (valor-p > 0,05). E foi violada no modelo Logístico dos tratamentos NIFV e NIFF (valor-p < 0,05). Os modelos com a pressuposição de normalidade violada não foram ajustados sendo desconsiderados.

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.4, na coluna BP, do teste de Breusch-Pagan (PB), nota-se que a pressuposição de homocedasticidade residual foi atendida em todos os modelos de todos os tratamentos (valor-p > 0,05).

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.4, na coluna DW, do teste de Durbin-Watson (DW), nota-se que a pressuposição de independência residual foi atendida em todos os modelos dos tratamentos IPTP e ISFV (valor-p > 0,05) mostrando que os resíduos não são autocorrelacionados. Ribeiro *et al.* (2018) observaram resultados semelhantes em estudos com equinos. E foi violada em todos os modelos dos tratamentos NIFV e NIFF (valor-p < 0,05) mostrando que os resíduos são autocorrelacionados.

Depois de testados os pressupostos dos resíduos dos modelos, desconsiderando-se os modelos com a pressuposição de normalidade violada, fez-se as análises para obter os critérios de seleção dos modelos que estão apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Critérios de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca dos caules (Msc) para os tratamentos (IPTP), (ISFV), (NIFV) e (NIFF).

Tratamento	Modelo	AIC	DPR	R²
IPTP	Logístico	162,34820	46,41000	0,96670
	Gompertz	164,68990	50,18000	0,96459
	von Bertalanffy	168,43060	56,84000	0,95173
ISFV	Logístico	157,43990	39,41000	0,85491
	Gompertz	158,16850	40,38000	0,86079
	von Bertalanffy	160,52430	43,68000	0,81100
NIFV	Logístico	-	-	-
	Gompertz	158,26910	40,54000	0,92552
	von Bertalanffy	159,55390	43,91000	0,90326
NIFF	Logístico	-	-	-
	Gompertz	168,56390	63,59000	0,85234
	von Bertalanffy	174,03930	68,53000	0,83406

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se a Tabela 4.5 as caselas vazias referem-se aos modelos que tiveram a pressuposição de normalidade violada e os modelos foram desconsiderados, não sendo calculados os valores dos critérios de seleção e dos avaliadores de qualidade de modelos.

Para os tratamentos IPTP, ISFV o modelo que melhor descreve o comportamento da variável é o Logístico, por ter o menor AIC. Para os tratamentos NIFV e NIFF o modelo que melhor descreve o comportamento da variável é o Gompertz, por ter o menor AIC. Para este caso os parâmetros foram estimados pelo do método de mínimos quadrados generalizados, incluindo o termo autorregressivo de primeira ordem (AR1) devido a violação do pressuposto de independência residual.

Após a seleção do modelo que melhor descreve a variável dentro de cada tratamento, calculou-se as estimativas e os intervalos de confiança para os parâmetros α , β e k . Na Tabela 4.6 estão os valores estimados e os intervalos de confiança para os parâmetros.

Tabela 4.6 – Estimativas e intervalos de confiança a 95% para os parâmetros dos modelos da variável matéria seca dos caules (Msc) que melhor se ajustaram aos dados para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).

Tratamento	Modelo	Parâmetro	Estimativas	L.I.	L.S.
IPTP	Logístico	α	536,204	485,716	594,172
		β	57,05	52,92	61,38
		k	0,12554	0,08599	0,20128
ISFV	Logístico	α	189,447	151,423	227,470
		β	52,91	45,05	60,76
		k	0,17373	-0,02537	0,37285
NIFV	Gompertz	α	301,044	236,669	365,418
		β	47,34	39,59	55,10
		k	0,09051	0,00998	0,17104
NIFF	Gompertz	α	317,245	210,263	424,227
		β	50,57	40,15	60,99
		k	0,10910	-0,02592	0,24406

Fonte: Do autor (2025)

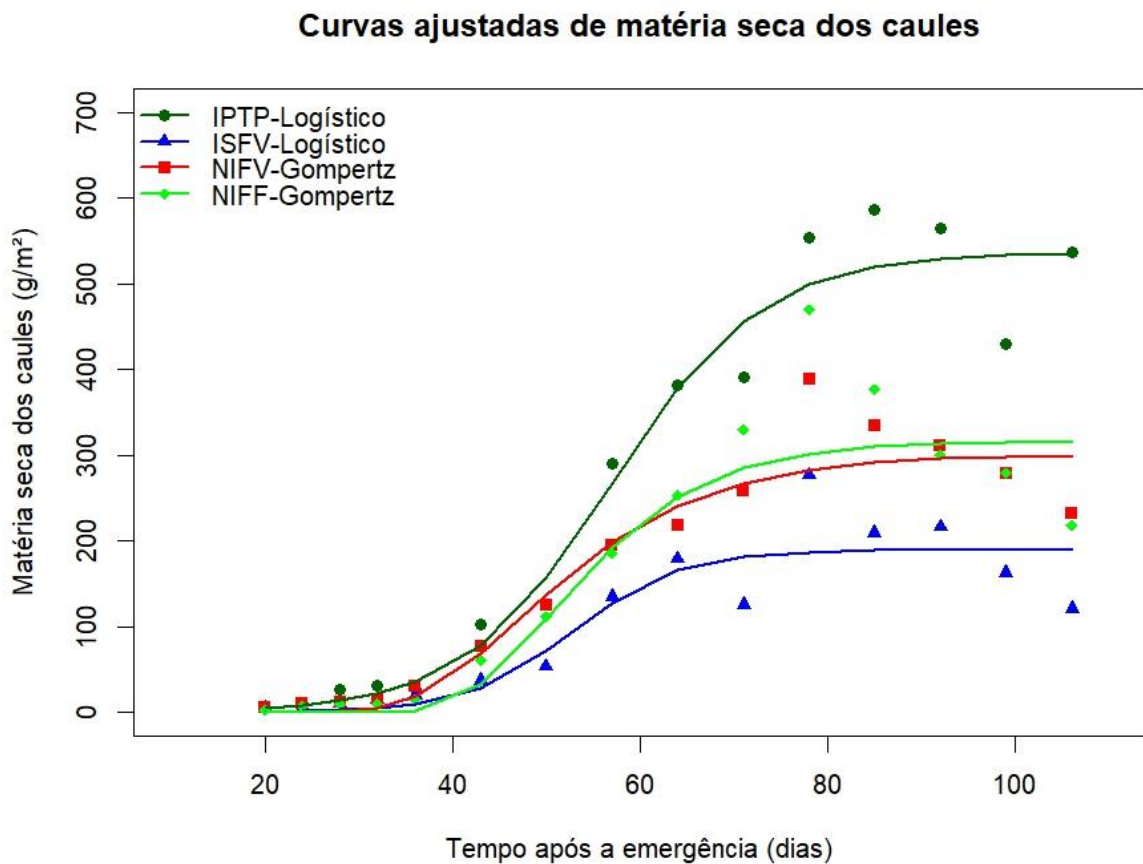
Observando-se a Tabela 4.6 os intervalos de confiança dos parâmetros para os tratamentos IPTP e NIFV não contêm o zero. Indicando que os parâmetros dos modelos foram adequados para descrever o comportamento da variável Msc em função dos dias após a emergência das plantas. Para os tratamentos ISFV e NIFF os intervalos de confiança para o parâmetro k contêm o zero, indicando que o parâmetro pode não ter efeito nos modelos.

Observa-se que nas estimativas intervalares, para o parâmetro α , dos modelos que melhor se ajustaram aos dados dos tratamentos ISFV, NIFV e NIFF existe intersecção entre os intervalos de confiança não sendo possível inferir qual efeito de tratamento foi mais prejudicial a produção de matéria seca sendo que estes três tratamentos causaram estresse de forma e em estádios diferentes nas plantas. A estimativa para o parâmetro α do tratamento IPTP é maior que as estimativas dos demais tratamentos e não ocorre intersecção entre intervalos de confiança sendo possível inferir que o modelo Logístico para o tratamento IPTP apresenta a maior produção de matéria seca dos caules de 536,204 g/m². Este fato era esperado, pois neste tratamento as plantas de soja não estavam submetidas a nenhum tipo de estresse. Bortoluzzi *et al.* (2013) estudando crescimento de feijão-porco com e sem irrigação e datas de semeadura

diferentes obtiveram resultado semelhante em que a produção de matéria seca foi menor para tratamentos que tiveram maior estresse hídrico.

Os ajustes gráficos dos modelos para a matéria seca dos caules são apresentados no Gráfico 4.2. Comparando graficamente os ajustes dos modelos observa-se que os tratamentos submetidos a estresse tiveram uma redução na produção de matéria seca em relação ao tratamento sem estresse com condições ideais de condução da cultura. O estresse que casou maior redução da produção de matéria seca foi o sombreamento na fase vegetativa.

Figura 4.2 – Ajuste gráfico dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para Msc em cada tratamento.



Fonte: Do autor (2025)

4.3 Variável matéria seca das folhas (Msf)

Primeiro ajustou-se os modelos Logístico, Gompertz e Von Bertalanffy aos dados, adotou-se os pressupostos sobre o vetor de erros, ou seja, os resíduos são independentes e

identicamente distribuídos e seguem uma distribuição normal de média zero e variância constante ($\varepsilon \sim N(0, \mathbf{I}\sigma^2)$), foi realizada a análise de resíduos utilizando os testes: Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson. Na Tabela 4.7 estão apresentados os resultados obtidos da aplicação dos testes para os três modelos para a variável Msf:

Tabela 4.7 – Valores-p dos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), aplicados aos resíduos dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca das folhas (Msf) para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).

Tratamento	Modelo	SW	BP	DW
IPTP	Logístico	0,42330	0,01884*	0,00507*
	Gompertz	0,70770	0,02832*	0,00342*
	von Bertalanffy	0,70270	0,02806*	0,00156*
ISFV	Logístico	0,05221	0,13220	0,00271*
	Gompertz	0,12080	0,14680	0,00341*
	von Bertalanffy	0,25000	0,11880	0,00130*
NIFV	Logístico	0,02328*	0,11550	0,00018*
	Gompertz	0,04304*	0,11080	0,00025*
	von Bertalanffy	0,06394	0,10000	7,4e-05*
NIFF	Logístico	0,06731	0,09561	0,00014*
	Gompertz	0,15110	0,11330	0,00031*
	von Bertalanffy	0,23230	0,08201	2,1e-05*

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.7, na coluna SW, do teste de Shapiro-Wilk (SW), nota-se que a pressuposição de normalidade residual foi atendida em todos os modelos dos tratamentos IPTP, ISFV e NIFF e para o modelo von Bertalanffy do tratamento NIFV (valor-p > 0,05). E foi violada nos modelos Logístico e Gompertz do tratamento NIFV (valor-p < 0,05). Os modelos com a pressuposição de normalidade violada não foram ajustados sendo desconsiderados.

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.7, na coluna BP, do teste de Breusch-Pagan (PB), nota-se que a pressuposição de homocedasticidade residual foi atendida em todos os modelos dos tratamentos ISFV, NIFV e NIFF (valor-p > 0,05). E foi violada em

todos os modelos do tratamento IPTP (valor-p < 0,05) mostrando que existe heterogeneidade das variâncias.

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.7, na coluna DW, do teste de Durbin-Watson (DW), nota-se que a pressuposição de independência residual foi violada em todos os modelos de todos os tratamentos (valor-p < 0,05) mostrando que os resíduos são autocorrelacionados. Prado *et al.* (2014) também encontraram resultados de violação da pressuposição de independência estudando ajuste do modelo Logístico ao crescimento de coco anão.

Tabela 4.8 – Critérios de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca das folhas (Msf) para os tratamentos (IPTP), (ISFV), (NIFV) e (NIFF).

Tratamento	Modelo	AIC	DPR	R²
IPTP	Logístico	143,40130	5,26340	0,85669
	Gompertz	144,04440	0,10331	0,81400
	von Bertalanffy	142,95830	0,03860	0,80162
ISFV	Logístico	152,62890	35,96000	0,50244
	Gompertz	152,92990	36,43000	0,48747
	von Bertalanffy	153,09410	36,74000	0,43373
NIFV	Logístico	-	-	-
	Gompertz	-	-	-
	von Bertalanffy	154,50680	45,16000	0,57705
NIFF	Logístico	164,57940	50,00000	0,66506
	Gompertz	160,08120	55,41000	0,48849
	von Bertalanffy	165,76000	52,00000	0,63450

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se a Tabela 4.8 as caselas vazias referem-se aos modelos que tiveram a pressuposição de normalidade violada e os modelos foram desconsiderados, não sendo calculados os valores do critério de seleção e dos avaliadores de qualidade de modelos. Para o tratamento IPTP o modelo selecionado que melhor se ajustou aos dados foi o von Bertalanffy devido a ter o menor AIC. Para o tratamento ISFV o modelo que melhor se ajustou aos dados foi o Logístico devido ao menor AIC. No tratamento NIFV o único modelo que se ajustou aos dados foi von Bertalanffy. E sob o efeito do tratamento NIFF o modelo selecionado foi o Gompertz devido ao menor valor do AIC.

Após a seleção do modelo que melhor descreve a variável dentro de cada tratamento, calculou-se as estimativas e os intervalos de confiança para os parâmetros α , β e k . Na Tabela 4.9 estão os valores estimados e os intervalos de confiança para os parâmetros.

Tabela 4.9 – Estimativas e intervalos de confiança a 95% para os parâmetros dos modelos da variável matéria seca das folhas (Msf) que melhor se ajustaram aos dados para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).

Tratamento	Modelo	Parâmetro	Estimativas	L.I.	L.S.
IPTP	von Bertalanffy	α	333,016	161,304	504,727
		β	45,14	32,99	57,28
		k	0,03024	0,01791	0,04257
ISFV	Logístico	α	77,113	28,034	126,192
		β	46,29	21,20	71,37
		k	0,15927	-0,28571	0,60427
NIFV	von Bertalanffy	α	128,673	52,445	204,901
		β	36,46	18,87	54,05
		k	0,08385	-0,0236	0,19136
NIFF	Gompertz	α	125,477	29,126	221,829
		β	45,02	23,93	66,111
		k	0,11379	-0,15868	0,38627

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se a Tabela 4.9 os intervalos de confiança dos parâmetros α não contêm o zero para o tratamento IPTP. Isso indica que os parâmetros do modelo foram adequados para descrever o comportamento da variável Msf em função dos dias após a emergência das plantas.

Observa-se que nas estimativas intervalares, para o parâmetro α , dos modelos que melhor se ajustaram aos dados dos tratamentos ISFV, NIFV e NIFF ocorre intersecção entre os intervalos de confiança não sendo possível inferir qual efeito de tratamento foi mais prejudicial a produção de matéria seca sendo que estes três tratamentos causaram estresse de forma e em estádios diferentes nas plantas.

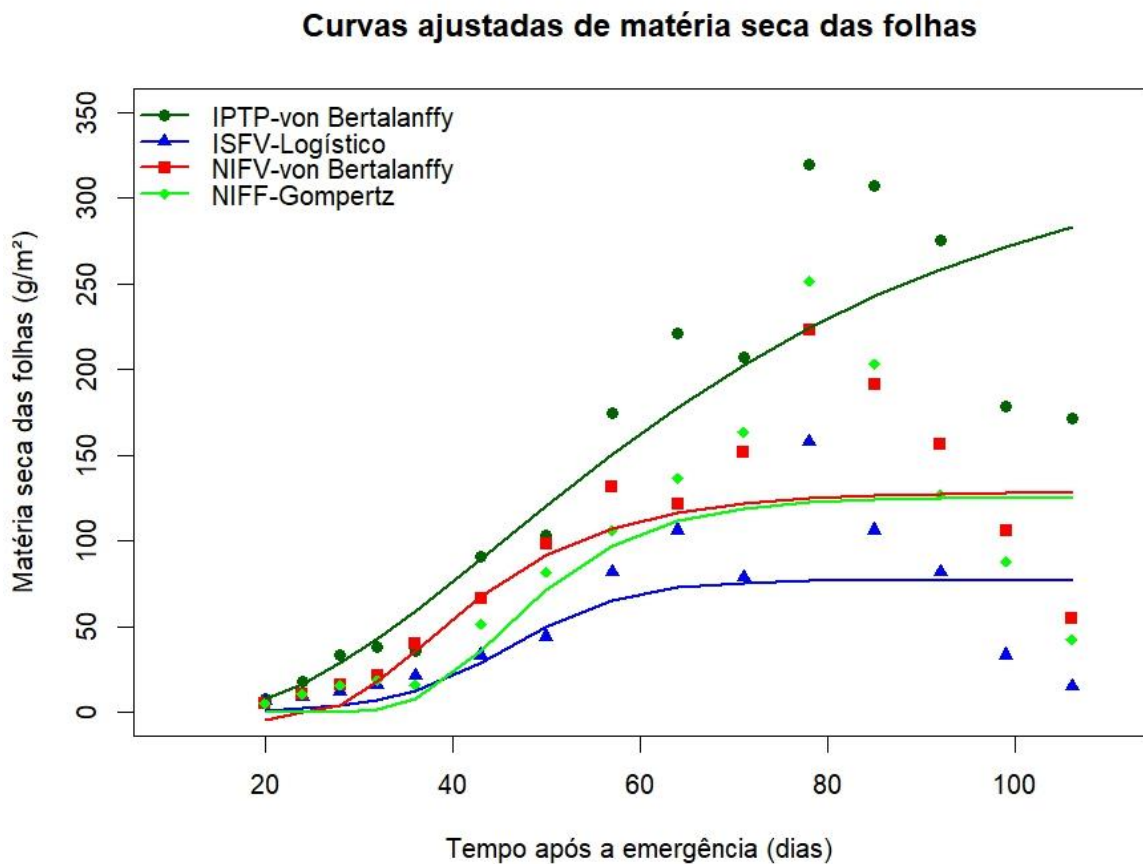
A estimativa para o parâmetro α do tratamento IPTP é maior que as estimativas dos demais tratamentos e não ocorre intersecção entre intervalos de confiança sendo possível inferir que o modelo von Bertalanffy para o tratamento IPTP apresenta a maior produção de matéria

seca das folhas de $333,016 \text{ g/m}^2$. Este fato era esperado, pois neste tratamento as plantas de soja não estavam submetidas a nenhum tipo de estresse. Cruz *et al.* (2010) estudando acúmulo de matéria seca total e incremento de área foliar em plantas de soja obtiveram o resultado de maior índice de área foliar quando a cultura foi semeada na época em que a precipitação ocorre de modo a não causar estresse hídrico nas plantas.

Os intervalos de confiança para o parâmetro k dos tratamentos ISFV, NIFV e NIFF contém o zero sendo um indicativo que o parâmetro não tem efeito nos modelos.

Os ajustes gráficos dos modelos para a matéria seca das folhas são apresentados no Gráfico 4.3. Comparando graficamente os ajustes dos modelos observa-se que os tratamentos submetidos a estresse tiveram uma redução na produção de matéria seca em relação ao tratamento sem estresse com condições ideais de condução da cultura. O estresse que casou maior redução da produção de matéria seca foi o sombreamento na fase vegetativa.

Figura 4.3 – Ajuste gráfico dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para Msf em cada tratamento.



Fonte: Do autor (2025)

4.4 Variável matéria seca das raízes (Msr)

Primeiro ajustou-se os modelos Logístico, Gompertz e Von Bertalanffy aos dados, adotou-se os pressupostos sobre o vetor de erros, ou seja, os resíduos são independentes e identicamente distribuídos e seguem uma distribuição normal de média zero e variância constante ($\varepsilon \sim N(0, \mathbf{I}\sigma^2)$), foi realizada a análise de resíduos utilizando os testes: Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson. Na Tabela 4.10 estão apresentados os resultados obtidos da aplicação dos testes para os três modelos para a variável Msr:

Tabela 4.10 – Valores-p dos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW), aplicados aos resíduos dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca das raízes (Msr) para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).

Tratamento	Modelo	SW	BP	DW
IPTP	Logístico	0,05110	0,12120	0,02528*
	Gompertz	0,01184*	0,23250	0,00382*
	von Bertalanffy	0,00765*	0,29390	0,00199*
ISFV	Logístico	0,61050	0,31490	0,12410
	Gompertz	0,44110	0,38970	0,03730*
	von Bertalanffy	0,28050	0,67390	0,01358*
NIFV	Logístico	0,37040	0,12240	0,00661*
	Gompertz	0,39930	0,17340	0,00367*
	von Bertalanffy	0,53140	0,20010	0,00175*
NIFF	Logístico	0,09867	0,16740	0,00490*
	Gompertz	0,34140	0,26010	0,00210*
	von Bertalanffy	0,40520	0,28130	0,00102*

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.10, na coluna SW, do teste de Shapiro-Wilk (SW), nota-se que a pressuposição de normalidade residual foi atendida em todos os modelos dos tratamentos ISFV, NIFV e NIFF (valor-p > 0,05) e no modelo Logístico do tratamento IPTP. E foi violada nos modelos Gompertz e von Bertalanffy do tratamento IPTP (valor-p < 0,05) e para este caso não se ajustou nenhum modelo.

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.10, na coluna BP, do teste de Breusch-Pagan (PB), nota-se que a pressuposição de homocedasticidade residual foi atendida em todos os modelos para todos os tratamentos (valor-p > 0,05).

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.10, na coluna DW, do teste de Durbin-Watson (DW), nota-se que a pressuposição de independência residual não foi atendida em nenhum modelo de nenhum dos tratamentos IPTP, NIFV e NIFF (valor-p < 0,05) mostrando que os resíduos são autocorrelacionados. Muianga *et al.* (2016) no estudo das dimensões de frutos de caju também encontraram resultados de teste de independência significativos. No tratamento ISFV o pressuposto de normalidade não foi violado para o modelo Logístico.

Depois de testados os pressupostos dos resíduos dos modelos, desconsiderando-se os modelos com a pressuposição de normalidade violada, fez-se as análises para obter os critérios de seleção dos modelos que estão apresentados na Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Critérios de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy da variável matéria seca das raízes (Msr) para os tratamentos (IPTP), (ISFV), (NIFV) e (NIFF).

Tratamento	Modelo	AIC	DPR	R²
IPTP	Logístico	103,71280	6,39400	0,97203
	Gompertz	-	-	-
	von Bertalanffy	-	-	-
ISFV	Logístico	97,28570	5,30000	0,96435
	Gompertz	102,06400	6,42000	0,95659
	von Bertalanffy	106,46000	7,12000	0,93303
NIFV	Logístico	100,98070	6,07000	0,94916
	Gompertz	102,55070	6,64000	0,94586
	von Bertalanffy	103,73430	7,02000	0,93688
NIFF	Logístico	107,11910	7,56000	0,91288
	Gompertz	108,56990	8,25000	0,90571
	von Bertalanffy	109,37650	8,64000	0,89672

Fonte: Do autor (2025)

Observando-se a Tabela 4.11 as caselas vazias referem-se aos modelos que tiveram a pressuposição de normalidade violada e os modelos foram desconsiderados, não sendo calculados os valores do critério de seleção e dos avaliadores de qualidade dos modelos. Para o

tratamento IPTP o único modelo ajustado foi o Logístico. Para os tratamentos ISFV, NIFV e NIFF o modelo que melhor se ajustou aos dados da variável Msr foi o Logístico por ter um menor AIC.

Após a seleção do modelo que melhor descreve a variável dentro de cada tratamento, calculou-se as estimativas e os intervalos de confiança para os parâmetros α , β e k . Na Tabela 4.12 estão os valores estimados e os intervalos de confiança para os parâmetros.

Tabela 4.12 – Estimativas e intervalos de confiança a 95% para os parâmetros dos modelos da variável matéria seca das raízes (Msr) que melhor se ajustaram aos dados para os tratamentos irrigado por todo o período (IPTP), irrigado e sombreado na fase vegetativa (ISFV), não irrigado na fase vegetativa (NIFV) e não irrigado na fase de florescimento (NIFF).

Tratamento	Modelo	Parâmetro	Estimativas	L.I.	L.S.
IPTP	Logístico	α	83,117	74,195	92,039
		β	51,426	46,411	56,442
		k	0,11100	0,06400	0,15800
ISFV	Logístico	α	56,106	50,938	61,890
		β	53,17	49,05	57,20
		k	0,13869	0,08789	0,28570
NIFV	Logístico	α	57,710	49,984	65,436
		β	45,20	39,31	51,08
		k	0,14269	0,05540	0,22998
NIFF	Logístico	α	55,359	43,715	67,003
		β	51,091	41,234	60,949
		k	0,11071	0,02130	0,20012

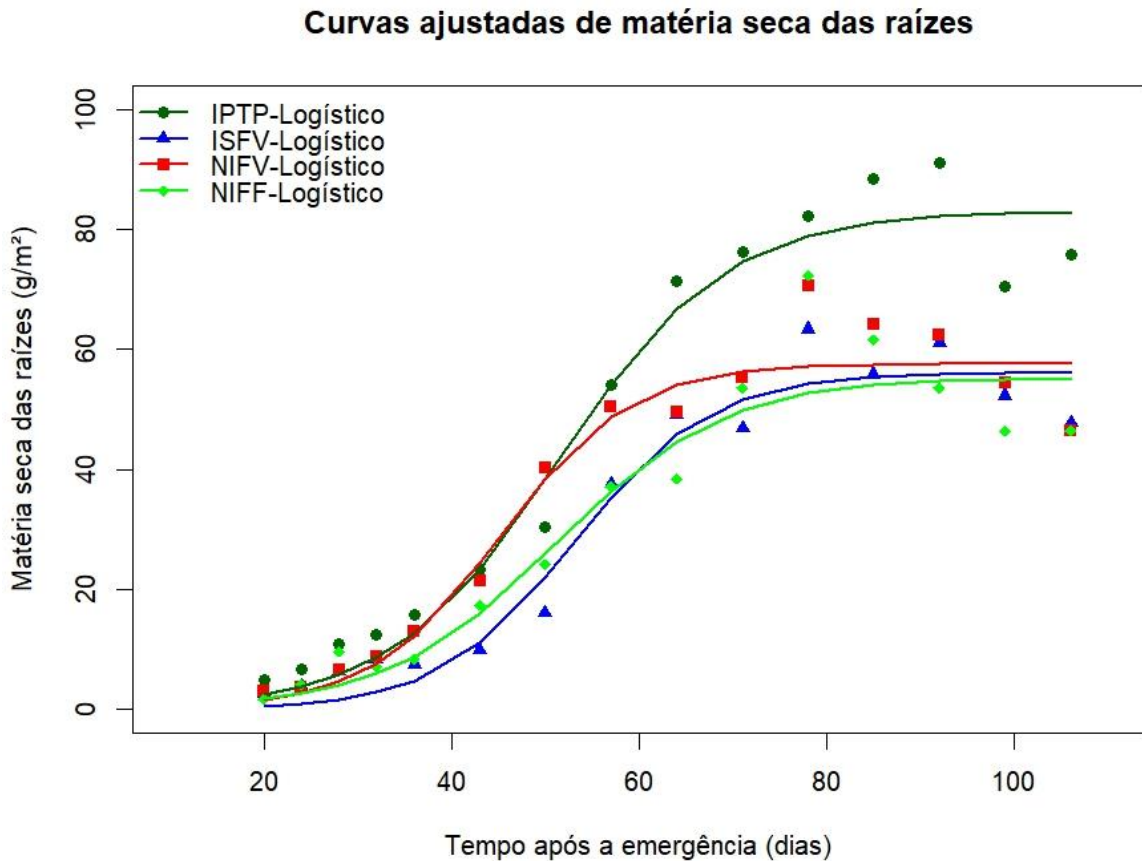
Fonte: Do autor (2025)

Observando-se a Tabela 4.12 os intervalos de confiança dos parâmetros não contêm o zero. Isso indica que os parâmetros dos modelos foram adequados para descrever o comportamento da variável Msr em função dos dias após a emergência das plantas.

Observa-se que nas estimativas intervalares, para o parâmetro α , do modelo que melhor se ajustou aos dados dos tratamentos ISFV, NIFV e NIFF ocorre intersecção entre os intervalos de confiança não sendo possível inferir qual efeito de tratamento foi mais prejudicial a produção de matéria seca sendo que estes três tratamentos causaram estresse de forma e em estádios diferentes nas plantas. No tratamento IPTP, a estimativa do parâmetro α é maior que os demais,

sendo que o intervalo de confiança não possui intersecção com os outros tratamentos. Sartori *et al.* (2016) estudando crescimento e desenvolvimento de raízes de soja irrigada obtiveram resultado de maior produção de matéria seca de raízes.

Figura 4.4 – Ajuste gráfico dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para Msr em cada tratamento.



Fonte: Do autor (2025)

5 CONCLUSÕES

Para descrever o maior acúmulo de matéria seca total sob efeito do tratamento IPTP o modelo mais adequado foi o von Bertalanffy e para os tratamentos ISFV, NIFV e NIFF o modelo Logístico foi o que melhor se ajustou aos dados.

Para descrever o maior acúmulo de matéria seca dos caules sob o efeito dos tratamentos IPTP e ISFV o modelo mais adequado foi o Logístico. E para os tratamentos NIFV e NIFF o modelo mais adequado foi o Gompertz.

Para descrever o maior acúmulo de matéria seca das folhas sob o efeito dos tratamentos IPTP e NIFV o modelo mais adequado foi o von Bertalanffy. Para o tratamento ISFV o modelo mais adequado foi o Logístico. E para o tratamento NIFF o modelo mais adequado foi o Gompertz.

Para descrever o maior acúmulo de matéria seca das raízes sob o efeito dos tratamentos IPTP, ISFV, NIFV e NIFF o modelo que melhor se ajustou aos dados foi o Logístico.

Os maiores acúmulos de matéria seca total, matéria seca dos caules, matéria seca das folhas e matéria seca das raízes foram obtidos sob o efeito do tratamento IPTP.

Para os tratamentos que causaram estresse nas plantas, ISFV, NIFV e NIFF, não é possível afirmar qual foi o que mais contribuiu para menor produção de matéria seca.

REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE transactions on automatic control**, Iee,v. 19, n.6, p. 716-723, 1974.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: Wiley, 1988.
- BASTOS, J. L. D; DUQUIA, R. P. Um dos delineamentos mais empregados em epidemiologia: estudo transversal. **Scientia Medica**, Porto Alegre, v. 17, n. 4, p. 229-232, 2007.
- BENINCASA, M. M. P. **Análise de crescimento de plantas** (noções básicas). 2. ed. Jaboticabal: FUNEP, 2003. 41p.
- BREUSCH, T.; PAGAN, A. Teste simples para heterocedasticidade e coeficiente de variação aleatória econométrica. **Sociedade Econométrica**, Rio de Janeiro, v. 47, p. 1287-1294, 1979.
- BORTOLUZZI, P. M. *et al.* 2013. Crescimento e desenvolvimento do feijão de porco semeado em diferentes datas com e sem irrigação. In: Cenários de Mudanças Climáticas e a sustentabilidade Socioambiental e do Agronegócio na Amazônia. XVIII Congresso Brasileiro de Agrometeorologia – XVIII CBA 2013 e VII Reunião Latino Americana de Agrometeorologia. Belém - PA
- CARNEIRO, A. P. S. *et al.* Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos Tabapuã. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, DF, v. 49, n. 1, p. 57-62, jan. 2014.
- CÂMARA, G. M. S. **Fenologia da soja. Soja**. Informações Agronômicas, n. 82, jun/98 Piracicaba, Associação para Pesquisa da Potassa e do Fosfato, p. 1-6 jun, 1998.
- CRUZ, P. G. *et al.* Modelos empíricos para estimar o acúmulo de matéria seca de capim-marandu com variáveis agrometeorológicas. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v.46, n.7, p.675-681, jul. 2011.
- CRUZ, T. V. *et al.* Acúmulo de matéria seca e área foliar de cultivares de soja em duas épocas de semeadura no oeste da Bahia. **Magistra**, Cruz das Almas, v. 22, n. 2, p. 103-111, 2010.
- COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO (CONAB): Disponível em: <https://portaldeinformacoes.conab.gov.br/safra-estimativa-de-evolucao-graos.html>. Acessado em 01/02/2025.
- DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3. ed. New York: J. Wiley, 1998. 706 p
- DURBIN, J.; WATSON, G. S. Testing for serial correlation in least squares regression. III. **Biometrika**, JSTOR, v. 38, n. 1/2, p. 159-177, 1951.
- EVANGELISTA, A. R.; REZENDE, P. M.; MACIEL, G. A. Uso da soja *Glycine max* (L.) Merrill na forma de forragem. Lavras: Editora UFLA, 2003. 36p (Boletim de Extensão).
- FERNANDES, T. J. *et al.* Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, v. 9, n. 2, p. 207-215, 2014.
- FERNANDES, T. J. *et al.* Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum Technology**, Editora da Universidade Estadual de Maringá-EDUEM, v. 37, n. 4, p. 397-402, 2015.
- FERNANDES, F. A. *et al.* Growth curves of meat-producing mammals by von Bertalanffy's model. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 54, 2019.
- FONSECA, E.L. *et al.* Modelo agrometeorológico-espectral para estimativa da disponibilidade de forragem no bioma “Campos Sulinos”. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, v.15, p.241-249, 2007.

- FRÜHAUF, A. C. *et al.* Nonlinear models in the study of the cedar diametric growth in a seasonally dry tropical forest. **Revista Brasileira de Ciências Agrárias**, v.15, n.4, p. 1-8, 2020.
- FRÜHAUF, A. C. *et al.* Predicting height growth in bean plants using non-linear and polynomial models. **Revista Agrogeoambiental**, v. 13, n. 3, p. 488-497, 2021.
- GALLANT, A. R. **Nonlinear statistical models**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1987. 610 p.
- GAZZONI, D. L.; DALL'AGNOL, A. **A Saga da Soja de 1050 a.C. a 2050 d.C.** 1 ed. Brasília, DF, Embrapa, 2018, 199 p.
- GONZAGA, N. A. **Descrição do acúmulo da massa seca da planta de milho considerando a cultura antecessora por modelos não lineares**, 2022. 70 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2022.
- GONZAGA, N. A. *et al.* Corn plant dry mass accumulation considering the previous crop by non-linear models. **Brazilian Journal of Biometrics**, v. 41, p. 424-444, 2023.
- GONÇALVES, S. L. **Impactos da deficiência hídrica e de altas temperaturas na produtividade da soja no estado do Paraná, safra 2018/2019**. Londrina: Embrapa Soja, 2019. 23 p. (Embrapa Soja. Boletim de pesquisa e desenvolvimento, 22).
- HEIFFIG, L. S. **Plasticidade da cultura da soja (*Glycine max (L.) Merrill*) em diferentes arranjos espaciais**. 2002. Dissertação (Mestrado em Fitotecnia) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2003. doi:10.11606/D.11.2003.tde-20022003-151548.
- HOFFMANN, R. **Análise de regressão: uma introdução à econometria [recurso eletrônico]**. Piracicaba: ESALQ/USP, 2015.
- JAME, Y. W.; CURTFORT, H. W. Crop growth models for decision support systems. **Canadian Journal of Plant Science**, v.76, p. 9-19, 1996.
- JANE, S. A. *et al.* Adjusting the growth curve of sugar cane varieties using non linear models. **Ciência Rural**, v. 50, n. 3, e20190408, 2020.
- JONES, H.G. **A quantitative approach to plant-environment interactions**. In: Plants and microclimate: a quantitative approach to environmental plant physiology. 2. ed. Cambridge: Cambridge University, 1992, p. 1-8.
- LEOLATO, L. S. *et al.* Soybean tolerance to defoliation at the vegetative and reproductive stages as a function of water restriction. **Acta Scientiarum. Agronomy**, v. 44, e55639, 2022. Doi: 10.4025/actasciagron.v44i1.55639.
- MAPA (MINISTÉRIO DA AGRICULTURA PECUÁRIA E ABASTECIMENTO). Disponível em: <https://www.gov.br/agricultura/pt-br/assuntos/riscos-seguro/programa-nacional-de-zoneamento-agricola-de-risco-climatico/zoneamento-agricola>. Acesso em: 20/02/2024.
- MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. **Modelos não lineares: funções assintóticas de crescimento [recurso eletrônico]**. 1. ed. – São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.
- MUIANGA, C. A. *et al.* Descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro por modelos não lineares. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 38, n. 1, p. 22-32, 2016.
- NEUMAIER, N. *et al.* **Ecofisiologia da soja**. In: Seixas *et al.* TECNOLOGIAS DE PRODUÇÃO DE SOJA 1 ed – Londrina: Embrapa Soja, 2020. p. 33-54 (Sistemas de Produção, 17)
- PEREIRA, A. A. *et al.* Descrição do crescimento vegetativo do cafeeiro cultivar Rubi MG 1192, utilizando modelos de regressão, **Coffee Science**, v. 9, n. 2, p. 236-271, 2014.

- PEIXOTO, C. P. **Análise de crescimento e rendimento de três cultivares de soja em três épocas de semeadura e três densidades de plantas**. 1998. 162p. Tese (Doutorado em Fitotecnia) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz-Universidade de São Paulo, Piracicaba, 1998.
- PEREIRA, C.R.. **Análise do crescimento e desenvolvimento da cultura de soja sob diferentes condições ambientais**. 2002. 282p Tese (Doutorado em Engenharia Agrícola). Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2002.
- PEREIRA, A. A. *et al.* Descrição do crescimento vegetativo do cafeeiro cultivar Rubi MG 1192, utilizando modelos de regressão, **Coffee Science**, Lavras, v. 9, n. 2, p. 236-271, 2014.
- PRADO, T. K. L. *et al.* Ajuste do modelo logístico na descrição do crescimento de frutos de coco anão por meio de algoritmos iterativos. **Revista de Estatística UFOP**, Ouro Preto, v. 3, 2014.
- R Core Team (2024). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.
- REIS, G. G. dos; MÜLLER, M. W. **Análise de crescimento de plantas; mensuração do crescimento**. Belém: FCAP, 1979. 47 f. (FCAP. Informe Didático; 01)
- RIBEIRO, R. A. *et al.* Curva de crescimento em altura na cernelha de equinos da raça Mangalarga Marchador considerando-se heterocedasticidade. **Arquivo brasileiro de medicina veterinária e zootecnia**, v. 70, p. 272-278, 2018.
- SARTORI, G. M. S. *et al.* Growth and development of soybean roots according to planting management systems and irrigation in lowland areas. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 46, n. 9, p. 1572-1578, 2016.
- SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New Jersey: John Wiley, 1989. 752 p
- SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New Jersey: Jonh Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2003.
- SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, Cambridge, v. 52, n. 3-4, p. 591-611, 1965.
- SILVA, É. M. *et al.* Descrição do crescimento de frutos de amora-preta por modelos não lineares. **Revista Brasileira de Fruticultura**, v. 42, 2020.
- SILVA, E. M. *et al.* Método de Newton e Gauss-Newton na estimação dos parâmetros de modelo de regressão não linear. **Sigmae**, Alfenas, v.8, n. 2, p. 728-734, 2019.
- SINGER, J. M.; NOBRE, J. S.; ROCHA, F. M. M. **Análise de dados longitudinais**. São Paulo, 2011.
- TAIZ, L.; ZEIGER, E. **Fisiologia Vegetal**. 3. ed. - Porto Alegre: Artmed, 2004. 720 p.
- TONATO, F. *et al.* Desenvolvimento de modelos preditores de acúmulo de forragem em pastagens tropicais. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v.45, p.522-529, 2010.
- VASCON, G. M.; BAZÃO, V. R. O modelo matemático de von Bertalanffy com o método de Gauss-Newton na estimação de parâmetros. **Revista Mundi, Engenharia e Gestão**, Paranaguá, v. 6, n. 3, p. 354-01, 354-09, 2021. DOI: 10.21575/25254782rmetg2021vol6n31646.
- ZEVIANI, W. M. *et al.* Modelos não lineares para a liberação de potássio de esterco animal em latossolos. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 42, n. 10, p. 1789-1796, 2012.
- ZEVIANI, W. M. ; RIBEIRO Jr, P. J. ; BONAT, W. H.. **Curso Modelos de regressão não linear**. Campina Grande – PB 58° RBRAS e 15° SEAGRO, julho 2013. 101 p.

ANEXO

Scripts em linguagem R utilizados para obtenção dos resultados de testes estatísticos, avaliadores de qualidade de modelos, estimativa de parâmetros, intervalos de confiança e geração de gráficos.

Variável Mst tratamento IPTP

```
#carregando os dados Mst IPTP
dados <- read.table("dados.txt", head=T)
dae <- dados$dae
mst <- dados$mst
dados <- data.frame(dae, mst)
plot(dae, mst, xlab = "Tempo após a emergência (dias)", ylab = "Matéria seca total (g/m²)")

##### MODELO LOGÍSTICO #####

log <- nls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))), start=c(a=1569.619, b=55, k=0.05))
summary(log)

#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(log))

#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(log$m$fitted(), "gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)

library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)

library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)

##### MODELO GOMPERTZ #####

gom <- nls(mst~a*exp(-exp(k*(b-dae))), start=c(a=1569.619, b=55, k=0.05))
summary(gom)

#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(gom))
```

```
#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(gom$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)
```

```
library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)
```

```
library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)
```

```
##### MODELO VON BERTALANFFY #####
```

```
vbe <- nls(mst~a*(1-(exp(k*(b-dae)))/3)^3,start=c(a=1569.619,b=55,k=0.05))
summary(vbe)
```

```
#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(vbe))
```

```
#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(vbe$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)
```

```
library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)
```

```
library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)
```

```
library(qpcR)
#Cálculo do R2
Rsq(vbe)
#Cálculo do AIC
AIC(vbe)
```

```
#Cálculo do Intervalo de Confiança
confint(vbe)
```

Variável Mst tratamento ISFV

```
#carregando os dados Mst ISFV
dados <- read.table("dados.txt",head=T)
```

```

dae <- dados$dae
mst <- dados$mst
dados <- data.frame(dae,mst)
plot(dae,mst,xlab = "Tempo após a emergência (dias)",ylab = "Matéria seca total (g/m²)")

##### MODELO LOGÍSTICO #####

log <- nls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))),start=c(a=528.606,b=55,k=0.05))
summary(log)

#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(log))

#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(log$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)

library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)

#_____ Correção da Pressuposição de Homocedasticidade _____

library(nlme)

log_corrigido_varPower <- gnls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))),start=c(a=528.606,b=55,k=0.05),w
eights=varPower(),data=dados)
summary(log_corrigido_varPower)
log_corrigido_varExp <- gnls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))),start=c(a=528.606,b=55,k=0.05),weig
hts=varExp(),data=dados)
summary(log_corrigido_varExp)

log_corrigido_varIdent <- gnls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))),start=c(a=528.606,b=55,k=0.05),wei
ghts=varIdent(),data=dados)
summary(log_corrigido_varIdent)

#_____

library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)
library(qpcR)
#Cálculo do R²
Rsq(log_corrigido_varPower)

#Cálculo do AIC
AIC(log_corrigido_varPower)

```

```
#Cálculo do Intervalo de Confiança
intervals(log_corrigeo_varPower)
```

```
##### MODELO GOMPERTZ #####
```

```
gom <- nls(mst~a*exp(-exp(k*(b-dae))),start=c(a=528.606,b=55,k=0.05))
summary(gom)
```

```
#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(gom))
```

```
#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(gom$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)
```

```
library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)
library(car)
```

```
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)
library(qpcR)
```

```
#Cálculo do R2
Rsq(gom)
```

```
#Cálculo do AIC
AIC(gom)
```

```
#Cálculo do Intervalo de Confiança
confint(gom)
```

```
##### MODELO VON BERTALANFFY #####
```

```
vbe <- nls(mst~a*(1-(exp(k*(b-dae)))/3)^3,start=c(a=528.606,b=55,k=0.05))
summary(vbe)
```

```
#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(vbe))
```

```
#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(vbe$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)
```

```
library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)
```

```
library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)
```

```
library(qpcR)
#Cálculo do R2
Rsq(vbe)
```

```
#Cálculo do AIC
AIC(vbe)
```

```
#Cálculo do Intervalo de Confiança
confint(vbe)
```

Variável Mst tratamento NIFV

```
#carregando os dados Mst NIFV
dados <- read.table("dados.txt", head=T)
dae <- dados$dae
mst <- dados$mst
dados <- data.frame(dae, mst)
plot(dae, mst, xlab = "Tempo após a emergência (dias)", ylab = "Matéria seca total (g/m2)")
```

```
##### MODELO LOGÍSTICO #####
```

```
log <- nls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))), start=c(a=901.265, b=50, k=0.05))
summary(log)
```

```
#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(log))
```

```
#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(log$m$fitted(), "gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)
```

```
library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)
```

```

# _____ Correção da Pressuposição de Homocedasticidade _____

library(nlme)

log_corrigido_varPower <- gnls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))),start=c(a=850.632,b=55,k=0.05),w
eights=varPower(),data=dados)
summary(log_corrigido_varPower)

log_corrigido_varExp <- gnls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))),start=c(a=850.632,b=55,k=0.05),weig
hts=varExp(),data=dados)
summary(log_corrigido_varExp)
|
og_corrigido_varIdent <- gnls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))),start=c(a=850.632,b=55,k=0.05),wei
ghts=varIdent(),data=dados)
summary(log_corrigido_varIdent)
# _____

library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)

library(qpcR)
#Cálculo do R2
Rsq(log_corrigido_varPower)

#Cálculo do AIC
AIC(log_corrigido_varPower)

#Cálculo do Intervalo de Confiança
confint(log_corrigido_varPower)

##### MODELO GOMPERTZ #####

gom <- nls(mst~a*exp(-exp(k*(b-dae))),start=c(a=901.265,b=50,k=0.05))
summary(gom)
#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(gom))
#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(gom$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)

library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)

```

```
library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)
```

```
##### MODELO VON BERTALANFFY #####
```

```
vbe <- nls(mst~a*(1-(exp(k*(b-dae)))/3)^3,start=c(a=901.265,b=50,k=0.05))
summary(vbe)
```

```
#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(vbe))
```

```
#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(vbe$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)
```

```
library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)
```

```
library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)
```

Variável Mst tratamento NIFF

```
#carregando os dados Mst NIFF
dados <- read.table("dados.txt",head=T)
dae <- dados$dae
mst <- dados$mst
dados <- data.frame(dae,mst)
plot(dae,mst,xlab = "Tempo após a emergência (dias)",ylab = "Matéria seca total (g/m²)")
```

```
##### MODELO LOGÍSTICO #####
```

```
log <- nls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))),start=c(a=934.176,b=55,k=0.05))
summary(log)
```

```
#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(log))
```

```
#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(log$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)
```

```

library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)

library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)

#_____ Correção da Pressuposição de Independência _____

library(nlme)

log_corrigido <- gnls(mst~a/(1+exp(k*(b-dae))), start=c(a=934.176,b=55,k=0.05),correlation=
corAR1())
summary(log_corrigido)
#_____

library(qpcR)
#Cálculo do R2
Rsq(log_corrigido)

#Cálculo do AIC
AIC(log_corrigido)

#Cálculo do Intervalo de Confiança
intervals(log_corrigido)

##### MODELO GOMPERTZ #####

gom <- nls(mst~a*exp(-exp(k*(b-dae))),start=c(a=934.176,b=55,k=0.05))
summary(gom)

#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(gom))

#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(gom$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)

library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)
library(car)
#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)

```

```

#_____ Correção da Pressuposição de Independência _____

library(nlme)

gom_corrigido <- gnls(mst~a*exp(-exp(k*(b-dae))), start=c(a=934.176,b=55,k=0.05),correlati
on=corAR1())
summary(gom_corrigido)

#_____

library(qpcR)
#Cálculo do R2
Rsq(gom_corrigido)

#Cálculo do AIC
AIC(gom_corrigido)

#Cálculo do Intervalo de Confiança
intervals(gom_corrigido)

##### MODELO VON BERTALANFFY #####

vbe <- nls(mst~a*(1-(exp(k*(b-dae)))/3)^3,start=c(a=934.176,b=55,k=0.05))
summary(vbe)

#Teste SW - Normalidade
shapiro.test(residuals(vbe))

#Preparação para testes BP e DW
MG <- attr(vbe$m$fitted(),"gradient")
mlg <- lm(mst~-1+MG)

library(lmtest)
#Teste BP - Homocedasticidade
bptest(mlg)
library(car)

#Testes DW - Independência
dwtest(mlg)

```

_____ Correção da Pressuposição de Independência _____

```
library(nlme)
```

```
vbe_corrigido <- gnls(mst~a*(1-(exp(k*(b-dae)))/3)^3, start=c(a=934.176,b=55,k=0.05),correlation=corAR1())
summary(vbe_corrigido)
```

```
library(qpcR)
```

```
#Cálculo do R2
```

```
Rsq(vbe_corrigido)
```

```
#Cálculo do AIC
```

```
AIC(vbe_corrigido)
```

```
#Cálculo do Intervalo de Confiança
```

```
intervals(vbe_corrigido)
```

```
#Gráfico com todos os tratamentos
```

```
plot(dae_iptp, mst_iptp, pch = 16, col = "darkgreen", ylim = c(0, 1600), xlim = c(10, 110),
xlab = "Tempo após a emergência (dias)", ylab = "Matéria seca total (g/m2)",
```

```
main = "Curvas ajustadas de matéria seca total")
```

```
points(dae_isfv, mst_isfv, pch = 17, col = "blue")
```

```
points(dae_nifv, mst_nifv, pch = 15, col = "red")
```

```
points(dae_niff, mst_niff, pch = 18, col = "green")
```

```
# Adiciona curvas ajustadas
```

```
lines(dae_iptp, fitted(iptp), col = "darkgreen", lwd = 2)
```

```
lines(dae_isfv, fitted(isfv), col = "blue", lwd = 2)
```

```
lines(dae_nifv, fitted(nifv), col = "red", lwd = 2)
```

```
lines(dae_niff, fitted(niff), col = "green", lwd = 2)
```

```
# Legenda
```

```
legend("bottomright",
```

```
legend = c("IPTP-von Bertalanffy", "ISFV-Logístico", "NIFV-Logístico", "NIFF-Logístico"),
```

```
col = c("darkgreen", "blue", "red", "green"),
```

```
pch = c(16, 17, 15, 18),
```

```
lty = 1, lwd = 2, bty = "n")
```

```
#####
```

Observação: Repete-se os mesmos scripts para as outras variáveis Msc, Msf e Msr, fazendo as devidas alterações particulares que são necessárias em cada análise.

```
#####
```