



**VÂNIA DE FÁTIMA LEMES DE MIRANDA**

**PROPOSIÇÃO E AVALIAÇÃO DE TESTES PARA  
INDEPENDÊNCIA ENTRE GRUPOS DE VARIÁVEIS**

**LAVRAS – MG**

**2021**

**VÂNIA DE FÁTIMA LEMES DE MIRANDA**

**PROPOSIÇÃO E AVALIAÇÃO DE TESTES PARA INDEPENDÊNCIA ENTRE  
GRUPOS DE VARIÁVEIS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Doutora.

Prof. DSc. Daniel Furtado Ferreira  
Orientador

**LAVRAS – MG**  
**2021**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca  
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Miranda, Vânia de Fatima Lemes de.  
Proposição e Avaliação de Testes para Independência entre  
Grupos de variáveis / Vânia de Fatima Lemes de Miranda. - 2021.  
140 p.

Orientador(a): Daniel Furtado Ferreira.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Lavras, 2021.  
Bibliografia.

1. Testes. 2. Comedian. 3. Bootstrap Paramétrico. I. Ferreira,  
Daniel Furtado. II. Título.

**VÂNIA DE FÁTIMA LEMES DE MIRANDA**

**PROPOSIÇÃO E AVALIAÇÃO DE TESTES PARA INDEPENDÊNCIA ENTRE  
GRUPOS DE VARIÁVEIS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Doutora.

APROVADA em 22 de Fevereiro de 2021.

Prof. DSc. Jair Rocha do Prado	UFU
Prof. DSc. Alessandra Querino da Silva	UFGD
Prof. DSc. Augusto Ramalho de Moraes	UFLA
Prof. DSc. Paulo Henrique Sales Guimarães	UFLA

Prof. DSc. Daniel Furtado Ferreira  
Orientador

**LAVRAS – MG  
2021**

*À memória de minhas muito amadas avó Orides e tia 'Toca', cujas ausência deixou muita saudade e muitos ensinamentos para superar cada obstáculo.*

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho não seria realizado sem as bençãos de Deus, apoio de meus pais, Antônio e Maria Aparecida, de meu esposo William e filhos Ana Luiza e Raul, e também de meus cinco irmãos, esposas e sobrinhas, que não pouparam esforços para que eu pudesse dar sequência aos meus estudos, superando todas as dificuldades e a distância para manter-me neste processo de aprendizado.

Ao meu orientador, Daniel Furtado Ferreira, pela ajuda, atenção, amizade, empenho, paciência e pela excelente orientação ao longo desses anos (mestrado 2004 e agora doutorado 2020). Levo e continuarei levando seu exemplo de profissional e pessoa para o meu trabalho e minha vida.

Aos amigos do mestrado e doutorado com os quais tivemos bons momentos durante a fase de estudos. Foram horas dedicadas para adquirir um pouco mais de conhecimento, conversas, risadas, viagens e festas que ajudaram a descontraír. Também pela ajuda e colaborações sempre em boa hora. Em especial agradeço a super amiga Patricia, Cristian, Rafael, Luciano, Cláudio, Rodrigo e Henrique de Paula, pela amizade, carinho e atenção.

Aos amigos que, de alguma forma, colaboraram para que se pudesse desenvolver e concluir essa tese. Mesmo nas simples atitudes, como em palavras de incentivo e apoio, foram fundamentais para que eu pudesse chegar aqui, cito Ariana, Kelly Lima e Carlos Pereira.

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas (DEX) por serem sempre tão gentis e prestativos, em especial a Nádia Ferreira.

À Universidade Federal de Lavras e ao departamento de Estatística (DES), pela oportunidade concedida para a realização do doutorado, o qual possibilitou, através de seus professores e disciplinas, desenvolver esse trabalho através da sua estrutura, em especial ao coordenador Prof. Dr. Renato Ribeiro Lima.

A todos os professores do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Lavras, pelos conselhos e ensinamentos transmitidos. Serei eternamente grata a todas as pessoas que me ajudaram de alguma forma a realizar este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço ao Laboratório de Computação Científica (LCC) do Departamento de Estatística da UFLA. Sem esse laboratório, os resultados científicos apresentados nesta tese não seriam possíveis.

À Universidade Federal de Uberlândia e a Faculdade de Matemática por terem me concedido afastamento para cursar o doutorado.

*Um ladrão rouba um tesouro, mas não furta a inteligência. Uma crise destrói uma herança, mas não uma profissão. Não importa se você não tem dinheiro, você é uma pessoa rica, pois possui o maior de todos os capitais: a sua inteligência. Invista nela. Estude!*  
(Augusto Cury)

*Ir mais além.  
Vencer um desafio,  
Procurar a superação,  
Escapar por um fio,  
E torná-se campeão,  
Superá-se em cada gesto,  
Conquistar o infinito,  
Ir mais além do que o certo,  
Ultrapassar o mais bonito,  
Ir além da superação  
E conquistar o impossível,  
Ir além da imaginação  
Para vencer o invencível.  
(Rômulo Raulino)*

## RESUMO

Para testar a independência entre dois grupos de variáveis oriundas de uma população normal multivariada comumente é usado o teste de Wilks (teste de razão de verossimilhanças, *LRT*). Entretanto, o desempenho desse teste é afetado na presença de outliers, pois seu estimador que é a matriz de covariâncias amostrais é influenciado por valores discrepantes e também é afetado sob a não normalidade dos dados. Dessa forma, estatísticas robustas devem ser utilizadas, como o estimador robusto *comedian* da matriz de covariâncias. Outra questão a considerar é a substituição do determinante da matriz de covariâncias pelo traço. Com base nisso, nesta tese, foi proposto e avaliado sete novos testes assintóticos e robustos para a independência entre dois grupos de variáveis, por meio de adaptações feitas tanto no teste *LRT* quanto nos novos testes propostos usando o critério do traço, sendo que esses testes são assintóticos e outros foram construídos baseando-se no método *bootstrap* paramétrico com e sem o estimador *comedian* para a matriz de covariâncias. O desempenho desses testes foi avaliado e comparado ao teste *LRT* de Wilks modificado, considerando amostras pequenas e também de alta dimensão, oriundas de distribuições normais multivariadas, contaminadas e distribuições não normais, utilizando simulações Monte Carlo. Foram considerados o poder do teste e a taxa de erro tipo I como medidas avaliativas. Os resultados mostraram que o teste *LRT* com a substituição da matriz de covariâncias pelo estimador *comedian* não controlou as taxas de erro tipo I, já o teste usando o critério do traço foi efetivo e ainda, os testes usando o método *bootstrap* foram efetivos em todas as situações avaliadas.

**Palavras-chave:** Testes. Bootstrap Paramétrico. LRT. Comedian.

## ABSTRACT

For testing the independence of two random vectors follows a  $p$ -dimensional normal distribution, the Wilks test (likelihood ratio test, *LRT*) is used. However, it performs badly in the presence of outliers, as its estimator, which is the sample covariance matrix, is influenced by outliers and is also affected by the non-normality of the data. Thus, robust statistics should be used, such as the robust *comedian* estimator of the covariance matrix. Another issue to consider is the replacement of the determinant of the covariance matrix by the trace. Based on this, in this thesis, seven new asymptotic and robust tests for independence between two groups of variables were proposed and evaluated, through adaptations made both in the *LRT* test and in the new tests proposed using the trace criterion, being that these tests are asymptotic and others were built based on the parametric *bootstrap* method with and without the *comedian* estimator for the covariance matrix. The performance of these tests was evaluated and compared to the corrected Wilks *LRT* test, considering small and also of high dimension, from normal multivariate distributions, contaminated and non-normal distributions, using Monte Carlo simulations. The type I error rates and power were computed in all Monte Carlo simulations by using the R software. The prejudiced results that the *LRT* test with the replacement of the covariance matrix by the estimator *comedian* did not control the type I error rates, the test using the trace criterion was effective. showed that the proposed test T and TR control type I error rates also for non-normal distributions outperforming the ordinary test and the tests using the bootstrap method were effective in all situations evaluated.

**Keywords:** Tests. Parametric Bootstrap. LRT. Comedian.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Combinações simuladas por Srivastava e Reid (2012), sendo $n$ o tamanho amostral, $p_1$ e $p_2$ o número de elementos em cada grupo, foram simuladas as configurações $n \leq p_1 + p_2$ e $n > p_1 + p_2$ . . . . .	33
Tabela 2.2 – Tabela de combinações simuladas por Jiang, Bai e Zheng (2013), sendo $n$ o tamanho amostral, $p_1$ e $p_2$ o número de elementos em cada grupo, foram simuladas as configurações $n > p_1 + p_2$ e $n = p_1 + p_2$ . . . . .	34
Tabela 3.1 – Valores do tamanho da amostra ( $n$ ) e do número de variáveis no primeiro ( $p_1$ ) e segundo ( $p_2$ ) grupos de variáveis para a realização das simulações. .	43
Tabela 3.2 – Nomenclatura dos testes avaliados . . . . .	47
Tabela 4.1 – Taxa de erro tipo I dos testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> para $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição normal multivariada</b> , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	52
Tabela 4.2 – Erro tipo I dos testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição normal multivariada contaminada</b> , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	53
Tabela 4.3 – Erro tipo I dos testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição <i>t</i> de Student multivariada</b> com $\nu = 5$ graus de liberdade ao nível nominal de 5% de significância. . .	54
Tabela 4.4 – Erro tipo I dos testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição <i>t</i> de Student multivariada</b> com $\nu = 30$ graus de liberdade, ao nível nominal de 5% de significância. .	55
Tabela 4.5 – Erro tipo I dos testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição lognormal multivariada</b> ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	56
Tabela 4.6 – Poder dos testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição normal multivariada</b> , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	58
Tabela 4.7 – Poder para testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição normal multivariada contaminada</b> , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	59

Tabela 4.8 – Poder para testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição t multivariada</b> $v = 5$ , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	60
Tabela 4.9 – Poder para testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição t multivariada</b> $v = 30$ , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	61
Tabela 4.10 – Poder para testes <i>LRT0</i> , <i>LRTR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição lognormal multivariada</b> , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	62
Tabela 4.11 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( <i>T</i> ) e traço robusto ( <i>TR</i> ) com $p_1 + p_2 \geq n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição normal multivariada</b> , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	66
Tabela 4.12 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( <i>T</i> ) e traço robusto ( <i>TR</i> ) com $p_1 + p_2 \geq n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição normal multivariada contaminada</b> , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	68
Tabela 4.13 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( <i>T</i> ) e traço robusto ( <i>TR</i> ) com $p_1 + p_2 \geq n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição t de Student multivariada</b> com $v = 5$ graus de liberdade, ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	70
Tabela 4.14 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( <i>T</i> ) e traço robusto ( <i>TR</i> ) com $p_1 + p_2 \geq n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição t de Student multivariada</b> com $v = 30$ graus de liberdade, ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	72
Tabela 4.15 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( <i>T</i> ) e traço robusto ( <i>TR</i> ) com $p_1 + p_2 > n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a <b>distribuição lognormal multivariada</b> , ao nível nominal de 5% de significância. . . . .	73
Tabela 4.16 – Taxa de erro tipo I dos testes <i>LRT0B</i> , <i>LRTRB</i> , <i>TB</i> e <i>TRB</i> com $\alpha = 5\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada. . . . .	75

Tabela 4.17 – Poder testes <i>LRTOB</i> , <i>LTRTB</i> , <i>TB</i> e <i>TRB</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada. . . . .	76
Tabela 4.18 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( <i>TB</i> ) e traço robusto ( <i>TRB</i> ) com $p_1 + p_2 \geq n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada. . . . .	77
Tabela 4.19 – Estatísticas e <i>p</i> -valor dos testes para independência entre dois grupos de variáveis aplicados nos dados químicos de solo e dados de plantas. . . . .	78
Tabela 1 – Taxa de erro tipo I dos testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada. . . . .	84
Tabela 2 – Poder dos dos testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada. . . . .	86
Tabela 3 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( <i>T</i> ) e traço robusto ( <i>TR</i> ) com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada. . . . .	88
Tabela 4 – Erro tipo I dos testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada contaminada. . . . .	91
Tabela 5 – Poder para testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada. . . . .	93
Tabela 6 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( <i>T</i> ) e traço robusto ( <i>TR</i> ) com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 > n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada contaminada. . . . .	95
Tabela 7 – Erro tipo I dos testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição t de student multivariada com $\nu = 5$ graus de liberdade . . . . .	98
Tabela 8 – Poder para testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição t multivariada $\nu = 5$ . . . . .	100

Tabela 9 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço (T) e traço robusto (TR) com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 > n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição t de student multivariada com $\nu = 5$ graus de liberdade. . . . .	102
Tabela 10 – Erro tipo I dos testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição t de student multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade. . . . .	105
Tabela 11 – Poder para testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição t multivariada $\nu = 30$ . . . . .	107
Tabela 12 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço (T) e traço robusto (TR) com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 > n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição t de student multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade. . . . .	109
Tabela 13 – Erro tipo I dos testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição lognormal multivariada. . . . .	112
Tabela 14 – Poder para testes <i>LRTO</i> , <i>LRTOR</i> , <i>T</i> e <i>TR</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição lognormal. . . . .	114
Tabela 15 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço (T) e traço robusto (TR) com $p_1 + p_2 > n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição lognormal. . . . .	116
Tabela 16 – Taxa de erro tipo I dos testes <i>LRTOB</i> , <i>LRTORB</i> , <i>TB</i> e <i>TRB</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada. . . . .	119
Tabela 17 – Poder testes <i>LRTOB</i> , <i>LRTORB</i> , <i>TB</i> e <i>TRB</i> com $\alpha = 10\%$ , $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ e $p_1 + p_2 < n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição normal multivariada. . . . .	121
Tabela 18 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço (TB) e traço robusto (TRB) com $p_1 + p_2 > n$ , $\rho_1 = 0,9$ e $0,2$ e $\rho_2 = 0,9$ e $0,2$ considerando a distribuição lognormal. . . . .	123

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .	17
2.1	Distribuições Multivariadas . . . . .	18
2.1.1	Distribuição Normal Multivariada . . . . .	18
2.1.2	Distribuição Normal Multivariada Contaminada . . . . .	19
2.1.3	Distribuição Lognormal Multivariada . . . . .	20
2.1.4	Distribuição <i>t</i> de <i>Student</i> Multivariada . . . . .	20
2.2	Teste da Hipóteses Baseados na Razão de Verossimilhança . . . . .	21
2.3	Dados Discrepantes - <i>Outliers</i> . . . . .	22
2.4	Estatística Robusta . . . . .	22
2.4.1	Princípios de Estimação Robusta . . . . .	23
2.4.2	Estimadores Robustos . . . . .	24
2.4.2.1	Estimador Desvio Absoluto Mediano - MAD . . . . .	25
2.4.2.2	Estimador <i>Comedian</i> . . . . .	25
2.5	Variáveis Canônicas . . . . .	28
2.6	Teste da Razão de Verossimilhança para a Independência entre Dois Grupos de Variáveis . . . . .	28
2.7	Testes Alternativos para Independência entre Dois Grupos de Variáveis . . . . .	30
2.8	Teste Baseado no Critério do Traço para Alta Dimensionalidade . . . . .	35
2.9	<i>Bootstrap</i> . . . . .	35
2.10	<i>Bootstrap</i> Paramétrico . . . . .	36
3	MÉTODOS . . . . .	38
3.1	Hipóteses do teste . . . . .	38
3.2	Testes . . . . .	39
3.2.1	Teste de Razão de Verossimilhança Original (LRTO) . . . . .	40
3.2.2	Propostas de Novos Testes . . . . .	40
3.2.2.1	Teste de Razão de Verossimilhança Robusto (LRTR) . . . . .	40
3.2.2.2	Testes Baseados em Traço (T e TR) . . . . .	41
3.2.2.3	Testes <i>Bootstrap</i> Paramétrico (LRTOB, LRTRB, TB e TRB) . . . . .	42
3.3	Avaliação do Desempenho dos Testes . . . . .	42
3.3.1	Desempenho em Relação ao Tamanho do Teste . . . . .	43

3.3.2	O Teste Binomial Exato . . . . .	45
3.3.3	Desempenho em Relação ao Poder . . . . .	45
3.4	Nomenclatura Utilizada para os Testes que Foram Avaliados . . . . .	46
3.5	Exemplo Real . . . . .	47
4	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> . . . . .	49
4.1	Desempenho em Relação aos Tamanhos e Poder dos Testes Assintóticos . .	49
4.1.1	Desempenho em Relação aos Tamanhos dos Testes para $p_1 + p_2 < n$ . . .	50
4.1.2	Desempenho dos testes em relação ao poder para $p_1 + p_2 < n$ . . . . .	57
4.1.3	Desempenho em Relação aos Tamanhos e ao Poder dos Testes para $p_1 + p_2 \geq n$	64
4.2	Desempenho em Relação aos Tamanhos e Poder dos Testes <i>Bootstrap</i> . . .	74
4.2.1	Desempenho em Relação aos Tamanhos dos Testes <i>Bootstrap</i> para $p_1 + p_2 < n$	74
4.2.2	Desempenho em Relação ao Poder dos Testes <i>Bootstrap</i> para $p_1 + p_2 < n$ .	75
4.2.3	Desempenho em Relação aos Tamanhos e ao Poder dos Testes <i>Bootstrap</i> para $p_1 + p_2 \geq n$ . . . . .	76
4.3	Exemplo de Aplicação . . . . .	78
5	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	79
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	81
	<b>APENDICE A – Tabelas - taxas de erro tipo I e poder</b> . . . . .	84
	<b>APENDICE B – Comandos usados no R</b> . . . . .	126

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, há uma vasta quantidade de dados originários das mais diversas atividades humanas, que dizem respeito às diferentes áreas de conhecimento, que podem ser coletados de vários fenômenos, os quais requer uma análise envolvendo muitas variáveis diferentes. Uma alternativa para lidar com tais dados seria realizar testes ou estimação para cada uma separadamente. Entretanto, elas podem estar correlacionadas entre si, e quanto maior o número delas, mais complexa torna-se a interpretação das análises por métodos comuns de estatística univariada. Uma segunda alternativa, seria utilizar algum tipo de método que envolva as variáveis simultaneamente em uma única análise, explorando suas correlações e facilitando as interpretações.

Para o estudo de várias variáveis simultaneamente usa-se a estatística multivariada, que é um ramo da estatística direcionado para a análise e interpretações entre as suas relações. Com isso, há uma simplificação da interpretação e na maioria das vezes, há uma análise muito mais poderosa do que os métodos equivalentes univariados. Com o avanço das tecnologias computacionais nas últimas décadas não existe limitações para cálculos matriciais e ainda, a utilização de testes e procedimentos de estimação multivariados se tornaram possíveis em qualquer área do conhecimento humano.

Os métodos de análise vêm se mostrando cada vez mais eficazes, fornecendo maior confiabilidade na tomada de decisões. Dentre as suposições exigidas para a realização de inferência estatística paramétrica, supostamente, a mais importante é a suposição de que as amostras sejam independentes e provenientes de populações conhecidas, como a distribuição normal univariada ou multivariada. No entanto, não se pode excluir situações práticas, nas quais a população amostrada não seja normal, não há independência entre as observações, a presença de *outliers* e que o número de variáveis seja maior que o tamanho da amostra.

Entre as alternativas para solucionar esses problemas estão a utilização de métodos que não sejam influenciados pelas medidas discrepantes, como os métodos robustos, que podem ser utilizados para estimar os parâmetros de interesse e métodos computacionalmente intensivos para lidar com a ausência de normalidade.

Em várias áreas da ciência, como agronomia, econometria, informática, saúde, entre outras, é muito comum que se obtenha conjuntos de dados amostrais, resultantes das pesquisas, tendo como objetivo avaliar se um grupo de variáveis é correlacionado com o outro. E ainda, que esses dois grupos conjuntamente possuem distribuição normal multivariada.

Para verificar a independência entre dois grupos de variáveis dispostas nos vetores aleatórios  $\mathbf{Y}_1$  com dimensão  $p_1 \times 1$  e  $\mathbf{Y}_2$  com dimensão  $p_2 \times 1$ , pode se aplicar um teste multivariado clássico da razão de verossimilhanças. Por exemplo, estes vetores podem representar medições físicas e psicológicas em um dado indivíduo e o interesse pode ser o de verificar se as medições físicas e psicológicas são relacionadas ou não.

O teste da razão de verossimilhanças (LRT), elaborado por Wilks (1935), para testar a independência entre dois grupos de variáveis consiste em identificar se há ou não relação de independência, ou seja, se as covariâncias entre os dois grupos são nulas, isto é, testar  $H_0: \Sigma_{12} = \mathbf{0}$ . Porém, esse teste é indicado quando os vetores  $\mathbf{Y}_1$  e  $\mathbf{Y}_2$  possuem distribuição normal multivariada conjuntamente (JOHNSON; WICHERN, 2007) e o número de variáveis  $p = p_1 + p_2$  é menor que o tamanho amostral  $n$ .

Vários autores têm discutido e modificado o teste da razão de verossimilhanças de Wilks para os casos em que os vetores não atendem as pressuposições (de normalidade), ou a presença de *outliers*, para dados em alta dimensão.

Para o contexto de independência, Srivastava e Reid (2012) propuseram dois testes considerando o uso do traço nas suas estatísticas, mostrando que estes testes são válidos tanto para os casos tradicionais em que  $n > p$  quanto para o caso em que  $n < p$ . Dois testes foram elaborados também por Jiang, Bai e Zheng (2013). No primeiro caso, a primeira estatística é baseada em uma correção do teste de razão de verossimilhança usando a *teoria da matriz aleatória (TMA)* e a segunda estatística é elaborada usando também TMA e o traço no lugar dos determinantes.

Recentemente, uma nova estatística foi proposta por Li, Chen e Yao (2016) para testar a independência entre dois grupos de variáveis para quando apenas um grupo tem dimensão grande. Essa estatística também usa o critério traço e apresentou desempenho superior as dos testes de Jiang, Bai e Zheng (2013).

Se houver *outliers* na amostra, pode-se considerar a possibilidade de uso de alguma estatística robusta, cujo objetivo principal é atenuar o efeito deles, bem como preservar a confiabilidade de procedimentos construídos para substituir os métodos clássicos (HAMPEL, 1971). A teoria da robustez, aliada a métodos Monte Carlo e métodos numéricos, permite que problemas de natureza estatística sejam compreendidos e que soluções sejam imediatamente obtidas (BUSTOS; YOHAI, 1986).

Um dos estimadores robustos para a matriz de variância e covariância é o *comedian* que é um método eficiente quando a amostra é grande, podendo ser usado para substituir a matriz de variância e covariância  $S$  amostral tradicional (SAJESH; SRINIVASAN, 2012).

Tendo como base essas informações, o objetivo dessa tese foi propor novos testes de independência entre dois grupos de variáveis utilizando o método robusto *comedian* e substituições de determinantes por traços nas estatísticas, aliando-se a eles procedimentos *bootstrap* paramétrico para obter a distribuição nula das estatísticas dos testes. Além disso, o desempenho dos novos testes e do teste de razão de verossimilhança (LRT) para independência entre dois grupos de variáveis sob distribuições normais e não-normais, com e sem a presença de *outliers*, foi avaliado por meio de simulações Monte Carlo para diferentes tamanhos de amostras e níveis de correlação, determinando-se as taxas de erro tipo I e poder dos testes.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

A Estatística Multivariada consiste de um conjunto de métodos aplicados em situações nas quais várias variáveis são medidas simultaneamente em cada elemento amostral. Uma observação multivariada de dimensão  $p$ , ou  $p$ -variada, é um vetor dado da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_p]^T, \quad (2.1)$$

cujas coordenadas  $Y_1$  a  $Y_p$  são variáveis aleatórias oriundas de várias medidas de um mesmo elemento amostral, com matriz de observações  $p$ -variadas, ou matriz de dados  $\mathbf{Y}_{n \times p}$ , sendo  $n$  o número de medidas e  $p$  o número de variáveis.

Segundo Ferreira (2018) a matriz de dados  $\mathbf{Y}_{n \times p}$  pode ser dada por:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1k} & \cdots & Y_{1p} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2k} & \cdots & Y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{j1} & Y_{j2} & \cdots & Y_{jk} & \cdots & Y_{jp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nj} & \cdots & Y_{np} \end{bmatrix}.$$

Nesta forma de representação dos dados, cada linha da matriz é um vetor  $p$  dimensional de observações multivariadas, e cada coluna, um vetor  $n$ -dimensional das  $n$  cópias independentes de uma determinada variável.

Muitas vezes, em um conjunto de dados univariado, bivariado ou multivariado há presença de *outliers*, os quais podem comprometer as estimativas obtidas e ainda influenciar as suas inferências. Por isso, antes de aplicar algum método univariado ou multivariado, deve-se investigar se *outliers* estão presentes nos dados coletados.

Os testes propostos foram avaliados em cenários considerando algumas distribuições multivariadas como a distribuição normal multivariada, distribuição log-normal multivariada, a distribuição normal multivariada contaminada, a distribuição  $t$  de *Student* com  $\nu = 5$  graus de liberdade e a distribuição  $t$  de *Student*  $\nu = 30$  graus de liberdade.

## 2.1 Distribuições Multivariadas

### 2.1.1 Distribuição Normal Multivariada

Várias técnicas de análise multivariada pressupõem normalidade dos dados para sua efetivação, apesar dos dados originais não serem quase nunca “exatamente” normal multivariados, a densidade normal se constitui muitas vezes numa aproximação adequada e útil da verdadeira distribuição populacional.

A distribuição normal multivariada apresenta algumas vantagens, tais como, ser contínua, simétrica e matematicamente tratável. Assim, tal distribuição é útil, na prática, por ser um modelo populacional adequado para lidar com certos fenômenos e por ser uma distribuição aproximada de amostragem para muitas estatísticas.

Como exemplo, para aplicação do teste da razão de verossimilhanças entre dois grupos de variáveis é necessário que os vetores  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  tenham distribuição normal multivariada.

A distribuição normal multivariada é uma generalização da densidade normal univariada (JOHNSON; WICHERN, 2007). Considerando o vetor aleatório  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^\top$  de dimensão  $p$ , tal que cada componente  $X_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) possui média  $\mu_i$ , variância  $\sigma_{ii}$  e segue a distribuição normal, denotada por  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_{ii})$  sendo a função densidade de probabilidade dada por

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ii}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} \right)^2 \right\} \quad (2.2)$$

O expoente da densidade normal univariada

$$\left( \frac{x_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} \right)^2 = (x_i - \mu_i)(\sigma_{ii})^{-1}(x_i - \mu_i), \quad (2.3)$$

mede a distância quadrada de  $x_i$  em relação à  $\mu_i$  em unidade de desvio padrão.

A distância (2.3) pode ser generalizada para o caso multivariado, e a densidade conjunta das  $p$  variáveis independentes dispostas no vetor aleatório  $\mathbf{X}$  é a distribuição normal multivariada, em que, os parâmetros  $\mu_i$  e  $\sigma_{ii}$  podem ser representados matricialmente, com o vetor de médias populacionais representado por  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^\top$  e a matriz de variâncias e

covariâncias por  $\Sigma_{p \times p}$ , cuja notação é  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ , (ANDERSON, 2003). Logo tem-se

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

assim, a função densidade da distribuição normal multivariada (ANDERSON, 2003) é dada por

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-p/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}. \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Distribuição Normal Multivariada Contaminada

A distribuição normal multivariada contaminada é uma outra distribuição muito importante para o estudo proposto, serão simulados dados desta distribuição para avaliar a robustez dos testes estudados.

A geração de populações normais multivariadas com a presença de *outliers* pode ser realizada por meio da mistura de distribuições normais multivariadas. Essa mistura gera populações cuja distribuição é também conhecida como distribuição normal multivariada contaminada (BARBOSA; PEREIRA; OLIVEIRA, 2018).

De acordo com Johnson e Wichern (2007), considerando o vetor aleatório  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_p]^\top \in \mathbb{R}^p$  com distribuição normal multivariada contaminada, sua função densidade de probabilidade é

$$f(\mathbf{x}) = \delta (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^\top \Sigma_1^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) \right] + \quad (2.5)$$

$$(1 - \delta) (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma_2|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \Sigma_2^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) \right],$$

em que:

$\delta$  é a probabilidade que o processo tem de ser realizado por uma normal  $p$  variada, considerando

$N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$ ;

$(1 - \delta)$  é a probabilidade que o processo tem de ser realizado por uma normal  $p$  variada, considerando  $N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$ ;

$\Sigma_i$  é uma matriz positiva definida, com  $i = 1, 2$ ;

$\boldsymbol{\mu}_i \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de médias,  $i = 1, 2$  e  $0 \leq \delta < 1$ .

Conforme Johnson e Wichern (2004), a geração de variáveis aleatórias da distribuição normal contaminada pode ser a partir da equação (2.5) de acordo com os seguintes passos:

I gerar um valor  $u$  de uma distribuição uniforme contínua, com valores entre 0 e 1. Se  $u \leq \delta$  avance para o passo II. Caso contrário, execute o passo III;

II gerar  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ ;

III gerar  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ ;

IV repetir o passo I até que  $n$  observações sejam geradas.

O problema em usar a equação (2.5) (JOHNSON; WICHERN, 2007), não está na geração da variável mas, sim, na seleção dos parâmetros que é  $p^2 + 3p + 1$ , os quais correspondem a  $2p$  médias,  $2p$  variâncias,  $p^2 - p$  correlações e a probabilidade  $\delta$  de mistura.

### 2.1.3 Distribuição Lognormal Multivariada

Considerando um vetor aleatório  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]$  com dimensão  $p$  e  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . A distribuição lognormal é obtida da distribuição normal através da transformação de variável  $Y_i = \exp(X_i)$ , e assim definindo  $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_p]$  com dimensão  $p$ . A densidade de  $\mathbf{Y}$  é a distribuição lognormal multivariada, cuja expressão é dada por

$$f(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{y_i} (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\ln(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\ln(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (2.6)$$

em que  $\ln(\mathbf{y}) = [\ln(y_1), \ln(y_2), \dots, \ln(y_p)]$  é um vetor coluna de dimensão  $p$  e  $y_i = \exp(x_i)$ .

### 2.1.4 Distribuição $t$ de Student Multivariada

Além das anteriores, uma distribuição de igual importância é a  $t$  de Student multivariada que pertence a família das distribuições elípticas. Segundo Ferreira (2018) vetor aleatório  $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_p]^\top$  de dimensão  $p$  com função densidade de probabilidade dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \Gamma[(v+p)/2]}{\Gamma(v/2) v^{p/2} \pi^{p/2}} \left[ 1 + \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{v} \right]^{-(v+p)/2}, \quad (2.7)$$

tem distribuição de probabilidade  $t$  multivariada com parâmetros  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  e com  $v$  graus de liberdade, cuja notação é  $\mathbf{X} \sim t_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, v)$ . A distribuição  $t$  multivariada se aproxima da distribuição normal multivariada com matriz de covariância  $\boldsymbol{\Sigma}$  quando  $v \rightarrow \infty$  (LANGE; LITTLE; TAYLOR, 1989).

## 2.2 Teste da Hipóteses Baseados na Razão de Verossimilhança

O teste da razão de verossimilhanças é um procedimento completamente geral de obtenção da estatística de teste em qualquer situação, univariada ou multivariada, para o qual é possível maximizar a probabilidade da hipótese nula sob a hipótese alternativa (FERREIRA, 2018).

Considerando a função de probabilidade ou função densidade de probabilidade  $f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$  de uma amostra aleatória  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$  independente e identicamente distribuída, a função de verossimilhança é a distribuição conjunta, dada por:

$$f(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n | \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{y}_1) \cdot f(\mathbf{y}_2) \cdot \dots \cdot f(\mathbf{y}_n) = \prod_{j=1}^n f(\mathbf{y}_j) = L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}). \quad (2.8)$$

A hipótese nula  $H_0$  de que um parâmetro  $\boldsymbol{\theta}$  pertence a algum subespaço  $\mathbb{R}^s$ , o qual é conhecido como conjunto nulo expresso por  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^s$ , equivale ao espaço restrito. A hipótese alternativa  $H_1$  equivale ao espaço irrestrito, em que este subespaço diz respeito as restrições impostas nos parâmetros. Para a distribuição de  $\mathbf{y}_j$  em  $\mathbb{R}^p$  dependendo do parâmetro  $\boldsymbol{\theta}$  com as hipóteses:  $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0$  e  $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1$ , a estatística da razão de verossimilhança (FERREIRA, 2009)

$$\Lambda = \frac{L_{\Omega_0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \mathbf{Y})}{L_{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \mathbf{Y})} \quad (2.9)$$

em que:

$L_{\Omega_0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \mathbf{Y})$  é o máximo da função de verossimilhança para o espaço restrito e

$L_{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \mathbf{Y})$  é o máximo da função de verossimilhança para o espaço irrestrito.

Se a razão  $\Lambda$  for grande, provavelmente a hipótese  $H_0$  não será rejeitada, caso contrário, a hipótese  $H_1$  deverá ser escolhida. Como é complicado obter a distribuição nula sob  $H_0$  de  $\Lambda$ ; a estatística do teste passa a ser calculada por  $-2 \ln(\Lambda)$ , que tem distribuição assintoticamente qui-quadrado (FERREIRA, 2009).

Testes baseados na razão de verossimilhança são utilizados para verificar hipóteses sobre matrizes de covariância de populações normais, os quais são importantes na estatística multivariada sendo usados em: componentes principais, análise de variância e correlação canônica. Porém, esses testes apresentam menor robustez em relação aos testes sobre vetores de médias, sendo influenciados principalmente sob desvios de normalidade (FERREIRA, 2009).

### 2.3 Dados Discrepantes - *Outliers*

Segundo Sajesh e Srinivasan (2013), *outliers* são observações periféricas, incomuns, não representativas, remotas ou valores extremos, ou ainda, podem ser pontos que não se ajustam ao modelo do restante dos dados.

A presença de *outliers* pode influenciar na obtenção de estimativas para um determinado parâmetro (SINGH, 1996). Por exemplo, para um vetor aleatório  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$  supostamente normal multivariado,  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , considera-se que o vetor de médias amostrais  $\bar{\mathbf{X}}$  e a matriz de variâncias e covariâncias amostral  $\mathbf{S}$  são estimadores que representam bem os componentes do vetor aleatório  $\mathbf{X}$ , possuindo as propriedades de eficiência, consistência e ausência de viés.

Considerando isso, nesta tese foi avaliado o uso de estimadores robustos como o *comedian*, que foi sugerido por Falk (1998), o qual gera estimadores robustos afim-equivariantes de locação e de escala e com alto ponto de ruptura que podem ser utilizados nos testes sugeridos.

### 2.4 Estatística Robusta

A estatística robusta pode ser descrita como uma generalização da estatística clássica que leva em consideração a possibilidade de especificações incorretas do modelo e da distribuição dos dados em estudo (DAMIÃO; PEREIRA, 2007).

O principal objetivo da estatística robusta é atenuar o efeito de *outliers*, bem como preservar a forma, a dispersão e a simetria dos dados reais, preocupando-se com a construção de procedimentos que forneçam resultados confiáveis, e ainda, em situações nas quais o modelo não esteja em conformidade com os dados, quando eles apresentam algum tipo de desvio, como, por exemplo, arredondamento de observações, ocorrência de erros grosseiros e/ou registro errado de observações. O modelo por si só poderá ser somente uma aproximação sobre o mecanismo de inferência (HAMPEL, 1971).

A teoria da robustez, aliada a métodos Monte-Carlo e métodos numéricos, auxilia no entendimento de problemas de natureza estatística e na rapidez de obtenção de soluções (BUS-TOS; YOHAI, 1986).

Encontram-se na literatura alguns estimadores robustos, como tendência central de *Hampel* ou *ondas de Andrews*, que são mais robustas do que a média. Além disso, existem estimadores robustos para medidas de dispersão, como desvio de *Stahel*, desvio de *Ronchetti*, um

dos mais utilizados é o desvio absoluto mediano (DAM) conhecido também apenas por desvio mediano.

Para o caso multivariado são encontrados na literatura métodos para as estimativas dos parâmetros de locação e escala, os mais utilizados são os métodos baseados no volume mínimo do elipsoide (MVE), métodos baseados no determinante mínimo da matriz de covariâncias (MDC) (ROUSSEEUW, 1985) e o estimador *comedian* (FALK, 1998).

A seguir serão apresentados as propriedades dos estimadores robustos e o estimador robusto para matriz de variância e covariância *comedian*.

#### 2.4.1 Princípios de Estimação Robusta

Ponto de ruptura de um estimador segundo Bulhões (2013) pode ser intuitivamente compreendido como sendo a proporção de contaminação (ou seja, observações arbitrariamente grandes em módulo) que um estimador pode suportar antes de acusar resultados arbitrariamente grandes.

Tomando como exemplo a média amostral, o estimador de  $\mu$ , o seu ponto de ruptura é zero, pois substituindo apenas uma única observação da amostra por uma observação discrepante *outlier* a média amostral pode se tornar arbitrariamente grande. A mediana amostral é obtida tomando o termo do meio da amostra ordenada segundo algum critério de grandeza tendo o maior ponto de ruptura possível, 50% ou 0,5 (ROUSSEEUW; LEROY, 2005).

Segundo Gonçalves e Mendes-Lopes (2013), o ponto de ruptura não pode exceder 50%, pois se mais da metade das observações estiver contaminada então não seria mais possível distinguir entre a distribuição base e a distribuição contaminada.

Desta forma, o ponto de ruptura para amostras finitas nada mais é do que a menor fração de contaminação que pode fazer com que o estimador tome valores arbitrariamente grandes.

Alguns estimadores para a dispersão ( $S$  e  $S^2$ , por exemplo) utilizam a média amostral para o seu cálculo e, portanto, também apresentam ponto de ruptura igual a zero. Um estimador mais robusto para a dispersão é o intervalo interquartilício ( $IQ$ ), que toma a diferença entre o terceiro e o primeiro quartil. Seu ponto de ruptura é 0,25 ou 25%.

Para estimar o vetor de médias e a matriz de covariância amostral, é conveniente que use estimadores com alto ponto de ruptura, aproximadamente em torno de 50% (LEROY; ROUSSEEUW, 1987)

A função de influência é também utilizada para construir estimadores robustos, a qual mede o efeito no estimador ao adicionar um pequeno valor arbitrário ao conjunto de dados; um estimador robusto ideal é aquele que tem função de influência limitada. Ela descreve o efeito de uma contaminação infinitesimal na estimativa de  $T$ , o que dá uma imagem do viés assintótico causado pela contaminação nos dados (HAMPEL et al., 2011).

Um estimador  $T$  de locação é dito afim-equivariante se:

$$T(\mathbf{AX} + \mathbf{v}) = AT(\mathbf{X}) + \mathbf{v}, \quad (2.10)$$

para toda matriz  $\mathbf{A}_{p \times p}$  não singular e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$ , em que  $\mathbf{AX} + \mathbf{v} = \{\mathbf{Ax}_1 + \mathbf{v}, \dots, \mathbf{Ax}_n + \mathbf{v}\}$ .

Segundo Palacios et al. (1994) o estimador da matriz de variância e covariância  $\hat{\Sigma}$  simétrica positiva definida é dito afim-equivariante se:

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{AX} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\hat{\Sigma}(\mathbf{X})\mathbf{A}^T, \quad (2.11)$$

para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$ .

## 2.4.2 Estimadores Robustos

Na literatura existem métodos de estimação robustos a *outliers*, que geram estimadores robustos, os quais constituem um meio de lidar com influências deles na amostra (HAMPEL et al., 2011). Esses estimadores que possuem alto ponto de ruptura são afim-equivariantes de locação e de escala e têm potencial de serem utilizados nos testes que serão estudados.

As propriedades ponto de ruptura e afim-equivariância são muito importantes para gerar estimadores robustos a *outliers*, pois indicam, respectivamente, o quão resistente é um estimador, além de preservarem a propriedade de robustez em qualquer combinação linear desse estimador.

Os estimadores robustos são aqueles que constituem um meio de lidar com influências de possíveis *outliers* na amostra (HAMPEL et al., 2011), estes estimadores quando utilizados tornam os métodos que os utilizam robustos também.

A seguir serão apresentados os estimadores *desvio absoluto mediano* (MAD) e o *comediano*.

### 2.4.2.1 Estimador Desvio Absoluto Mediano - MAD

Uma alternativa robusta para o parâmetro  $\mu$  de uma variável aleatória  $X$  conhecida como uma medida de locação é a mediana, denotada por  $med(X)$  (FALK, 1998). A partir da mediana pode-se computar uma medida alternativa robusta para  $\sigma$ , o desvio padrão, que é uma medida de escala. Esta medida é o desvio absoluto mediano (MAD), definido por

$$MAD(X) = med(|X - med(X)|). \quad (2.12)$$

Este estimador não será utilizado neste trabalho, mas seu conceito foi introduzido para melhor compreensão do estimador *comedian*.

### 2.4.2.2 Estimador *Comedian*

A covariância (COV) entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , é dada por

$$COV(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))], \quad (2.13)$$

em que  $E$  é o operador esperança.

Uma alternativa altamente robusta criado por Falk (1997) para a covariância baseada na mediana é o *comedian* entre as variáveis  $X$  e  $Y$  definido como:

$$COM(X,Y) = med[(X - med(X))(Y - med(Y))] \quad (2.14)$$

em que o termo  $med$  denota a mediana.

Uma de suas vantagens é que ele sempre existe, enquanto a  $COV(X,Y)$  requer a existência dos dois primeiros momentos de  $X$  e  $Y$ , e ainda, é simétrico, invariante para a média e covariância, tem forte consistência e normalidade assintótica (FALK, 1997). Isso significa que a equação (2.14) generaliza o método “MAD” quando  $X = Y$  e, também, tem o maior ponto de ruptura possível (FALK, 1997).

Para combinações lineares têm-se:

$$COM(X, aY + b) = aCOM(X, Y). \quad (2.15)$$

A equação (2.15) satisfaz:

$$COM(X, Y) = 0, \quad \text{se } X \text{ e } Y \text{ são independentes} \quad (2.16)$$

$$COM(X, Y) = aMAD(X)^2, \quad \text{se } Y = aX + b \text{ quase certamente;} \quad (2.17)$$

se na equação (2.17) tiver  $a = 1$  o *comedian* pode ser considerado como uma extensão bivariada do MAD.

Assim, uma medida robusta alternativa para o coeficiente de correlação  $\rho$  é

$$\rho(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad (2.18)$$

em que  $\rho(X, Y)$  é o coeficiente de correlação;  $COV(X, Y)$  é a covariância entre as variáveis X e Y;  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  é desvio padrão X e Y, respectivamente.

E a *correlação mediana* é dada por:

$$\delta(X, Y) = \frac{COM(X, Y)}{MAD(X)MAD(Y)}, \quad (2.19)$$

com  $\delta \in [-1, 1]$  para dados bivariados (FALK, 1997);  $COM(X, Y)$  a covariância entre as variáveis X e Y;  $MAD(X)$  e  $MAD(Y)$  o desvio absoluto mediano das variáveis X e Y, respectivamente.

A versão multivariada do estimador *comedian* (matriz de variância e covariância robusta) para uma matriz  $\mathbf{X}_{p \times p}$  de dados com linhas  $\mathbf{X}_i^\top$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e colunas  $\mathbf{X}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  (SAJESH; SRINIVASAN, 2012), é definida por

$$COM(\mathbf{X}) = COM(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k), \quad j, k = 1, 2, \dots, p. \quad (2.20)$$

Assim, a matriz  $COM(\mathbf{X})$  pode ser obtida por

$$COM(\mathbf{X})_{p \times p} = \begin{bmatrix} MAD^2(\mathbf{X}_1) & COM(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) & \cdots & COM(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_p) \\ COM(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) & MAD^2(\mathbf{X}_2) & \cdots & COM(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ COM(\mathbf{X}_p, \mathbf{X}_1) & \cdots & \cdots & MAD^2(\mathbf{X}_p) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

A matriz  $COM(\mathbf{X})$  pode ser usada para substituir a matriz de covariâncias amostral  $\mathbf{S}$  dada em (2.24) na estatística para independência de grupos de variáveis.

Similarmente, a matriz *de correlação mediana* multivariada  $\boldsymbol{\delta}$  é definida por Sajesh e Srinivasan (2012), como:

$$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{X}) = \mathbf{D}COM(\mathbf{X})\mathbf{D}^\top, \quad (2.22)$$

em que  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal com elementos  $1/MAD(X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Um problema comumente na estimação robusta da matriz de covariâncias é que a matriz  $COM(\mathbf{X})$  é, em geral, não positiva (semi-) definida (FALK, 1997). Para lidar com isso, Sajesh e Srinivasan (2012) adotaram os seguintes passos para obter estimativas robustas para o vetor de médias e matriz de covariâncias:

1. defina  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{X}) = \mathbf{D}COM(\mathbf{X})\mathbf{D}^\top$  como a matriz de correlação mediana multivariada em que  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal com elementos  $1/MAD(\mathbf{X}_i)$ ,  $i=1,2,\dots,p$ ;
2. calcule os autovalores  $\lambda_j$  e os autovetores  $\mathbf{e}_j$  de  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{X})$ , para  $j = 1, 2, \dots, p$  e chame de  $\mathbf{E}$  a matriz cujas colunas são os  $\mathbf{e}_j$ 's. Assim  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{X}) = \mathbf{E}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{E}^\top$ , em que  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ;
3. seja  $\mathbf{Q} = \mathbf{D}(\mathbf{X})^{-1}\mathbf{E}$ , em que  $\mathbf{D}$  foi definida anteriormente em (2.22) e  $\mathbf{z}_i = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ ; e
4. as estimativas robustas para o vetor de médias  $\mathbf{m}(\mathbf{X})$  e matriz de covariâncias  $\mathbf{S}(\mathbf{X})$  são definidas como

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{Q}^\top \quad \text{e} \quad \mathbf{m}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\mathbf{I} \quad (2.23)$$

em que  $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(MAD(\mathbf{Z}_1)^2, \dots, MAD(\mathbf{Z}_p)^2)$  e  $\mathbf{I} = (\text{med}(\mathbf{Z}_1), \dots, \text{med}(\mathbf{Z}_p))^\top$ .

As estimativas podem ser fornecidas por meio de um processo iterativo substituindo a matriz de correlação mediana ( $\boldsymbol{\delta}$ ) pela matriz de covariância amostral ( $\mathbf{S}$ ) e repetindo os passos 1, 2 e 3. Estas matrizes são positiva definida e aproximadamente afim-equivariante. Além disso, as estimativas obtidas pelo método *comedian* terão um alto ponto de ruptura. A eficiência do método aumenta com o aumento da dimensão dos dados (SAJESH; SRINIVASAN, 2012).

## 2.5 Variáveis Canônicas

Em várias áreas do conhecimento pode haver interesse em comparar grupos de variáveis para explicar a dependência entre ambos. Se tiver correlação entre os dois grupos vale a pena fazer a correlação canônica, cujo objetivo principal é o estudo das relações lineares existentes entre dois conjuntos de variáveis (MINGOTI, 2017). Um pressuposto importante a ser verificado para o uso da correlação canônica é se os vetores de medidas das variáveis dos dois grupos,  $\mathbf{Y}_{(1)}$  e  $\mathbf{Y}_{(2)}$ , são independentes entre si, ou não correlacionados; pois, caso isso ocorra, a análise de correlação canônica perde sua utilidade, porque a correlação entre todas as combinações lineares será igual a zero (FERREIRA, 2018).

A condição de independência entre dois grupos de variáveis pode ser verificada pelo teste da razão da verossimilhança. Entretanto, esse teste somente tem validade quando os  $\mathbf{Y}_{(1)}$  e  $\mathbf{Y}_{(2)}$  são normais multivariados (JOHNSON; WICHERN, 2004). Quando a normalidade multivariada é válida, também é possível construir um teste estatístico para avaliar a significância das variáveis canônicas obtidas.

## 2.6 Teste da Razão de Verossimilhança para a Independência entre Dois Grupos de Variáveis

Um estudo de interesse na relação entre variáveis conjuntamente, reside na verificação de dependência entre dois vetores aleatórios. Por exemplo,  $\mathbf{Y}_{(1)}$  e  $\mathbf{Y}_{(2)}$  podem representar vetores de medições físicas e psicológicas no  $i$ -ésimo indivíduo da amostra, cujo interesse do pesquisador pode ser o de verificar se as medições físicas e psicológicas são relacionadas. Um teste que pode ser usado é o teste da razão de verossimilhança para a independência entre dois grupos de variáveis que consiste em identificar se há ou não relação de independência, ou seja, se as covariâncias entre os dois grupos são nulas, isto é,  $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$ . Este teste é apresentado a seguir.

Considerando os vetores de variáveis aleatórias  $\mathbf{Y}_{(1)}$  e  $\mathbf{Y}_{(2)}$  com média  $\boldsymbol{\mu}$  e covariância  $\boldsymbol{\Sigma}$ , dadas por

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{(1)} \\ \boldsymbol{\mu}_{(2)} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix},$$

respectivamente.

E matriz de covariância amostral  $\mathbf{S}$  particionada pode ser escrita como:

$$\mathbf{S} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \hline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right]. \quad (2.24)$$

Quando os vetores  $\mathbf{Y}_{(1)}$  e  $\mathbf{Y}_{(2)}$  são normais multivariados, a independência entre os dois grupos de variáveis pode ser avaliada pelo teste da razão de verossimilhança (JOHNSON; WILCHERN, 2007).

Desta forma, são definidas as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma}_{12} \neq \mathbf{0}$$

ou

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 = \left[ \begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array} \right] \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} = \left[ \begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \hline \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array} \right]$$

e a estatística do teste da razão de verossimilhança para a independência de  $q = 2$  grupos é dada por

$$\Lambda = \frac{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|^{n/2}}{\left[ \prod_{i=1}^2 |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ii}| \right]^{n/2}} = \frac{|\mathbf{S}|^{n/2}}{\left[ \prod_{i=1}^2 |\mathbf{S}_{ii}| \right]^{n/2}} = \frac{|\mathbf{R}|^{n/2}}{\left[ \prod_{i=1}^2 |\mathbf{R}_{ii}| \right]^{n/2}}, \quad (2.25)$$

sendo  $\mathbf{R}$  a matriz de covariâncias amostrais e  $\mathbf{R}_{ii}$  a partição correspondente ao  $i$ -ésimo grupo. Sob a hipótese nula de independência entre grupos, para grandes amostras,  $-2\ln(\Lambda)$  possui distribuição assintótica qui-quadrado (FERREIRA, 2009). Sendo dada por

$$\chi_c^2 = -n [\ln|\mathbf{S}| - (\ln|\mathbf{S}_{11}| + \ln|\mathbf{S}_{22}|)] \quad (2.26)$$

com  $\nu = 2p^2$  para grandes amostras, em que:

$n$ : o tamanho de amostra;

$\ln$ : o logaritmo natural;

$\mathbf{S}_{11}$ : é a matriz de covariância amostral do grupo de variáveis  $\mathbf{Y}_{(1)}$ ;

$\mathbf{S}_{22}$ : é a matriz de covariância amostral do grupo de variáveis  $\mathbf{Y}_{(2)}$ ;

$\mathbf{S}$ : é a matriz de covariância dos vetores  $\mathbf{Y}'_j$ s.

A estatística do teste da razão de verossimilhança com correção de Box (1949) é dada por

$$\chi_c^2 = -(n-1)(1-C)[\ln|\mathbf{S}| - (\ln|\mathbf{S}_{11}| + \ln|\mathbf{S}_{22}|)], \quad (2.27)$$

em que  $n$  é o tamanho da amostra,  $\ln$  é o logaritmo neperiano e

$$C = \frac{4\Gamma_3 + 6\Gamma_2}{12(n-1)\Gamma_2} \quad \text{e} \quad \Gamma_r = (p_1 + p_2)^r - (p_1^r + p_2^r) \quad \text{para} \quad r = 2, 3.$$

Sob  $H_0$ ,  $\chi_c^2$  tem distribuição  $\chi_v^2$  sendo  $v = \Gamma_2/2 = p_1 p_2$  graus de liberdade.

## 2.7 Testes Alternativos para Independência entre Dois Grupos de Variáveis

O clássico teste paramétrico, de razão de verossimilhança (LRT) conhecido como  $\Lambda$  de Wilks ou *critério de Wilks* ou ainda *estatística de Wilks*, proposto por Wilks (1935) pode ser usado para testar a independência entre dois vetores aleatórios, ou seja, para testar as hipóteses

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma}_{12} \neq \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

quando os vetores  $\mathbf{Y}_{(1)}$  e  $\mathbf{Y}_{(2)}$ , com dimensão  $p_1$  e  $p_2$ , respectivamente, possuem distribuição normal multivariada com vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}$  e matriz de variância e covariância  $\boldsymbol{\Sigma}$ . A estatística do teste de Wilks, sob  $H_0$ , possui distribuição assintótica qui-quadrado com  $p_1 p_2$  graus de liberdade.

O *critério de Wilks* tem sido discutido e modificado por vários autores, para os casos em que os vetores não atendem as pressuposições (de normalidade), ou há presença de *outliers*, ou ainda, para um conjunto de dados com alta dimensão. Para testar as hipóteses de independência (2.28) entre dois grupos de variáveis, com  $p_1$  e  $p_2$  variáveis em cada grupo, sendo  $p = p_1 + p_2$ , Pillai e Jayachandran (1967) estudaram os critérios de Wilks (1932), Roy (1945), Pillai et al. (1955) e Pillai (1960).

Os critérios abordados foram:

**I** Critério de Roy para maior raiz característica,  $\lambda_q^2$

$$\text{II } U^{(q)} = \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{\lambda_i^2}{(1-\lambda_i^2)} \right\}$$

**III** Critério de Pillai,  $V^{(q)} = \sum_{i=1}^q \lambda_i^2$

IV Critério de Wilks,  $W^{(q)} = \prod_{i=1}^q (1 - \lambda_i^2)$

que são baseado nas raízes características  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_p^2$  de

$$\left| \mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{22}^{-1} \mathbf{S}_{12}^\top - \lambda^2 \mathbf{S}_{11} \right| = 0. \quad (2.29)$$

Estes critérios foram avaliados (PILLAI; JAYACHANDRAN, 1967) considerando  $q = 2$  via simulação nas seguintes situações, valores de  $m = 0, 1, 2$ , e  $5$  e  $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40$  e  $60$  e  $\alpha = 0,05$ , em que  $m = 1/2(f_2 - p - 1)$ ,  $n = 1/2(f_1 - p - 1)$  e  $v = f_1 + f_2$  concluindo que os três critérios são bons para a testar as hipóteses de independência, e que, para pequenos desvios nos parâmetros, houve pequenas diferenças entre os três critérios, porém para grandes desvios,  $V^{(2)}$  apresentou maior poder, e ainda, para amostra grande  $U^{(2)}$  apresentou maior poder.

Para testar a independência de dois grupos de variáveis quando  $n \leq p$  ou  $n > p$ , para  $n$  observações, nas mesmas condições para o *critério de Wilks*, Srivastava e Reid (2012) propuseram a estatística

$$T_1 = n \frac{\hat{a}_{(1,2)}}{\sqrt{2\hat{a}_{2(1)}\hat{a}_{2(2)}}}, \quad (2.30)$$

sendo

$$\hat{a}_{(1,2)} = \frac{n^2}{(n-1)(n+2)p} \left[ tr(\mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{12}^\top) - \frac{1}{n} tr(\mathbf{S}_{11}) tr(\mathbf{S}_{22}) \right],$$

$$\hat{a}_{2(i)} = \frac{n^2}{(n-1)(n+2)p} \left[ tr(\mathbf{S}_{ii}^2) - \frac{1}{n} \{tr(\mathbf{S}_{ii})\}^2 \right], \quad i = 1, 2,$$

e a matriz  $\mathbf{S}$  particionada por

$$\mathbf{S} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \hline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right]. \quad (2.31)$$

Propuseram, também, o teste baseado na estatística  $T_1^*$  que utiliza o traço é dada por:

$$T_1^* = n \frac{\hat{a}_{(1,2)}^*}{\sqrt{2\hat{a}_{2(1)}^* \hat{a}_{2(2)}^*}}, \quad (2.32)$$

sendo

$$\begin{aligned}\hat{a}_{(1,2)}^* &= \frac{1}{p} \left\{ \text{tr}(\mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{12}^\top) - \frac{p_1 p_2}{p} \right\}, \\ \hat{a}_{2(1)}^* &= \frac{1}{p} \left\{ \text{tr}(\mathbf{R}_{11}^2) - \frac{p_1^2}{p} \right\}, \\ \hat{a}_{2(2)}^* &= \frac{1}{p} \left\{ \text{tr}(\mathbf{R}_{22}^2) - \frac{p_2^2}{p} \right\},\end{aligned}$$

e a matriz  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \hline \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{22} \end{array} \right] = D_{\mathbf{s}}^{*-1/2} \mathbf{S} D_{\mathbf{s}}^{*-1/2},$$

sendo  $D_{\mathbf{s}}^* = \text{diag}(\mathbf{s}_{11}, \dots, \mathbf{s}_{pp})$ .

Sob hipótese nula  $H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ , as estatísticas  $T_1$  e  $T_1^*$ , têm distribuição normal assintótica com média 0 e variância 1.

Em estudo de simulação Monte Carlo, Srivastava e Reid (2012) avaliaram o desempenho das estatísticas  $T_1$  e  $T_1^*$  comparando-os com duas aproximações para a distribuição do teste da razão de verossimilhança, denotadas por  $LR_1$  (2.33) e  $LR_2$  (2.34), dadas por:

$$\lambda^* = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|},$$

$$LR_1 = -g \log \lambda^*, \quad (2.33)$$

sob  $H_0$ , a estatística (2.33) possui distribuição assintótica qui-quadrado  $\chi_{p_1 p_2}^2$ , sendo  $g = n - 3 - p/2$ . E, a aproximação (LR2) que pode ter melhor robustez quando  $p$  for próximo de  $n$ , dada por:

$$LR_2 = \frac{(-g \log \lambda^* - f)}{(2f)^{1/2}}, \quad (2.34)$$

sob  $H_0$ , a estatística (2.34) possui distribuição assintótica normal  $N(0, 1)$ , com  $f = p_1 \times p_2$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

As estatísticas  $T_1$ ,  $T_1^*$ ,  $LR_1$  e  $LR_2$  foram comparadas ao nível nominal  $\alpha = 0,05$  por Srivastava e Reid (2012), nas combinações para  $n$ ,  $p_1$  e  $p_2$  apresentadas na Tabela 2.1, sendo que  $LR_1$  e  $LR_2$  foram obtidos somente quando  $p < n$ .

Tabela 2.1 – Combinações simuladas por Srivastava e Reid (2012), sendo  $n$  o tamanho amostral,  $p_1$  e  $p_2$  o número de elementos em cada grupo, foram simuladas as configurações  $n \leq p_1 + p_2$  e  $n > p_1 + p_2$ .

n	$p_1$	$p_2$	n	$p_1$	$p_2$	n	$p_1$	$p_2$	n	$p_1$	$p_2$
15	2	3	25	2	3	50	2	3	100	2	3
15	5	5	25	5	5	50	5	5	100	5	5
15	10	15	25	10	15	50	10	15	100	10	15
15	50	50	25	50	50	50	50	50	100	50	50
15	50	100	25	50	100	50	50	100	100	50	100
15	100	200	25	100	200	50	100	200	100	100	200
15	200	300	25	200	300	50	200	300	100	200	300
15	400	600	25	400	600	50	400	600	100	400	600

Os autores Srivastava e Reid (2012) concluíram que mesmo para pequenos valores de  $p$  e  $n$  grande, os testes baseados em  $T_1$  e  $T_1^*$  apresentaram um desempenho melhor do que as duas aproximações para o teste da razão de verossimilhança, e ainda, o teste baseado em  $T_1^*$  é melhor que o  $T_1$ . Os testes propostos  $T_1$  e  $T_1^*$  são válidos para  $p < n$  e  $p > n$  e, portanto, podem ser recomendados em detrimento do teste da razão de verossimilhança, que só pode ser usado quando  $p < n$ . Sobretudo, quando  $p$  está próximo de  $n$ , os resultados indicaram que o teste da razão de verossimilhança pode ter baixo poder.

Para testar a independência de conjuntos de dados com alta dimensão ( $p > n$ ), Jiang, Bai e Zheng (2013), compararam o desempenho do teste da razão de verossimilhanças original, denotado por  $T_3$  com duas novas estatísticas, teste da razão de verossimilhanças corrigido ( $T_1$ ) para amostras grandes e o teste usando o critério do traço para alta dimensão ( $T_2$ ). Estas estatísticas  $T_1$  e  $T_2$  foram baseadas na *teoria da matriz aleatória - TMA*, a qual foi usada por Ledoit e Wolf (2002), Bai et al. (2009), Chen, Zhang e Zhong (2010), Cai, Jiang et al. (2011) Li, Chen et al. (2012), mostrando que pode ser útil para resolver problemas de alta dimensão. Para a comparação com o teste  $T_3$ , Jiang, Bai e Zheng (2013) realizaram 100 000 simulações para cada configuração da Tabela 2.2, sendo o teste avaliado ao nível de significância de 5%.

Tabela 2.2 – Tabela de combinações simuladas por Jiang, Bai e Zheng (2013), sendo  $n$  o tamanho amostral,  $p_1$  e  $p_2$  o número de elementos em cada grupo, foram simuladas as configurações  $n > p_1 + p_2$  e  $n = p_1 + p_2$

$n$	$p_1$	$p_2$	$n$	$p_1$	$p_2$
60	20	10	30	20	10
120	40	20	60	40	20
240	80	40	120	80	40
480	160	20	240	160	20
960	320	160	480	320	160

Foi observado para o teste da razão de verossimilhança clássico  $T_3$  que quando a dimensão é grande em relação ao tamanho da amostra, as taxas de erro tipo I convergem para 100% e os testes  $T_1$  e  $T_2$  ficaram próximas de 5% em todas as combinações simuladas. Segundo Jiang, Bai e Zheng (2013) os novos testes se mostraram robustos quando a dimensão é maior ou menor que o tamanho amostral. O  $T_3$  não é recomendado quando a dimensão é grande em relação ao tamanho amostral.

Um novo teste foi proposto por Li, Chen e Yao (2016), para testar a independência entre dois grupos de variáveis para quando apenas um grupo tem alta dimensão. A estatística de teste é

$$T_n = \frac{n}{\sqrt{2k_n}} \frac{\hat{\gamma}_{12}}{\sqrt{\hat{\gamma}_{11}\hat{\gamma}_{22}}}, \quad (2.35)$$

sendo

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{12} &= k_n \left[ tr(\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{12}^\top) - \frac{1}{n} tr(\mathbf{S}_{11}) tr(\mathbf{S}_{22}) \right], & \hat{\gamma}_{11} &= k_n \left[ tr(\mathbf{S}_{11}^2) - \frac{(tr^2 \mathbf{S}_{11})}{n} \right] \text{ e} \\ \hat{\gamma}_{22} &= k_n \left[ tr(\mathbf{S}_{22}^2) - \frac{tr^2(\mathbf{S}_{22})}{n} \right] & \text{com } k_n &= \frac{n^2}{(n-1)(n+2)}. \end{aligned}$$

A estatística (2.35) possui distribuição normal com média 0 e variância 1. O desempenho via simulação Monte Carlo de  $T_n$  foi comparado com os testes  $T_1$  e  $T_2$  de Jiang, Bai e Zheng (2013). O teste  $T_n$  demonstrou ser superior aos outros testes em todas as situações simuladas, sendo uma delas,  $n = 50$ ,  $p_1 = 4$  fixo e  $p_2$  variando de 5 a 45.

## 2.8 Teste Baseado no Critério do Traço para Alta Dimensionalidade

Para os casos em que a matriz de variâncias e covariâncias envolve dados de alta dimensão, as vezes a dimensão  $p$  é maior que o tamanho amostral  $n$ , fazendo com que a matriz de covariância  $\mathbf{S}$  seja singular. Ledoit e Wolf (2002) propuseram duas estatísticas que usam o traço da matriz  $\mathbf{S}$  para testar se a matriz de covariâncias  $\mathbf{\Sigma}$  é proporcional a matriz identidade  $\mathbf{I}$  e, se a matriz de covariâncias  $\mathbf{\Sigma}$  é igual a matriz identidade  $\mathbf{I}$ .

Para testar a hipótese  $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}$ , a estatística proposta foi

$$W = \frac{1}{p} \text{tr} \left[ (\mathbf{S} - \mathbf{I})^2 \right] - \frac{p}{n} \left[ \frac{1}{p} \text{tr}(\mathbf{S}) \right]^2 + \frac{p}{n}, \quad (2.36)$$

a qual, sob  $H_0$ , possui distribuição assintótica  $\chi^2$  com  $p(p+1)/2$  graus de liberdade.

Foram simuladas as combinações para  $n, p = 4, 8, \dots, 256$  com 10 000 simulações para cada caso, comparando com outras duas estatísticas. Os autores concluíram que esta estatística (2.36) é robusta para grande dimensão.

## 2.9 Bootstrap

O método de bootstrap é um processo de reamostragem das amostras que permite obter as estimativas dos parâmetros sem pressupor a distribuição dos estimadores. Esse método tem apresentado resultados satisfatórios e tem sido utilizado por muitos pesquisadores. As técnicas computacionais têm sido aplicadas para realizar testes de hipóteses e obter estimativas de parâmetros. Entre essas técnicas o método de *bootstrap* tem se destacado (JOHNSON, 2001).

A técnica do *bootstrap* foi considerada sistematicamente por Efron (1979), apesar de genericamente o método ter sido usado em circunstâncias particulares antes disso. A essência do *bootstrap* consiste na ideia de que na ausência de qualquer outro conhecimento da população, a distribuição dos valores encontrados em uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da população é o melhor guia da distribuição da população. Portanto, para aproximar o que acontece quando a população é reamostrada, basta reamostrar a amostra. A amostragem é feita com reposição, o que é a única diferença entre *bootstrap* e aleatorização em muitas aplicações (MANLY, 2006).

A vantagem de se utilizar o método *bootstrap* para realizar inferência é quando a distribuição de probabilidade da população não é conhecida e a condição de normalidade é violada (FERREIRA, 2013).

Os passos para a realização do algoritmo de *bootstrap* são definidos por Ramos e Ho (2003) como:

**Primeiro passo:** tome uma amostra aleatória  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  constituída de  $n$  elementos da população  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  em estudo;

**Segundo passo:** sorteia-se amostras com reposição de mesmo tamanho  $r$  sendo  $(r < n)$  a partir da amostra original  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

**Terceiro passo:** Calcula-se uma estatística de *bootstrap* com base nas amostras geradas no segundo passo;

**Quarto passo:** repetem-se do primeiro ao terceiro passo  $B$  vezes;

**Quinto passo:** obtém-se a distribuição de *bootstrap* das estatísticas obtidas no quarto passo.

A obtenção dessas amostras *bootstrap* podem ser feitas de forma empírica ou de acordo com algum modelo de probabilidade, o método *bootstrap* pode ser classificado em *bootstrap* não-paramétrico e *bootstrap* paramétrico.

O *bootstrap* paramétrico refere-se ao caso em que o algoritmo de *bootstrap* é feito com base em uma distribuição conhecida ou estabelecida e no *bootstrap* não-paramétrico não há conhecimento da distribuição verdadeira dos dados.

Nesta tese optou-se por utilizar o método *bootstrap* paramétrico o que será descrito sucintamente a seguir.

## 2.10 *Bootstrap* Paramétrico

O *bootstrap* paramétrico refere-se ao caso em que a reamostragem é feita a partir de uma amostra aleatória  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  com base em uma distribuição conhecida ou estabelecida. O estimador de um parâmetro  $\theta$  dessa distribuição  $f$  com base na amostra aleatória  $\mathbf{X}$  pode ser estimado por  $\hat{\theta}$ , o qual é um estimador de máxima verossimilhança, este estimador pode ser um escalar ou um vetor de parâmetros. Ferreira (2013) ressalta o aspecto de assumir como conhecida a distribuição da variável aleatória, mas não seus parâmetros.

Segundo Domingues et al. (2015) as amostras *bootstrap* paramétrico são obtidas a partir de  $f(\mathbf{X}|\hat{\theta})$  não sendo reamostradas dos dados mas, sim, sendo amostras aleatórias reais geradas utilizando-se o princípio do “*plug-in*”.

Para o *bootstrap* paramétrico, as amostras  $x_i^*$  são geradas a partir de uma função densidade (caso contínuo) ou função de probabilidade (caso discreto)  $f(\mathbf{X}|\hat{\theta})$ , que se supõe conhecida (EFRON; TIBSHIRANI, 1994).

Esses conceitos apresentados visam melhorar a aproximação distribucional dos novos testes propostos, com o intuito de obter ganho em poder, assim, o método que foi utilizado para avaliar o erro tipo I e poder destes testes foi o método Monte Carlo, que envolve simulação estatística.

### 3 MÉTODOS

Para avaliar o desempenho do teste da razão de verossimilhança para independência entre dois grupos de variáveis sob distribuições não-normais com a presença de *outliers* realizadas simulações Monte Carlo determinando-se as taxas de erro tipo I e poder do teste. Também foram incluídos novos testes robustos a *outliers* neste estudo de simulação. Estes novos testes foram propostos neste trabalho.

Os detalhes das hipóteses, das proposições e modificações dos testes a serem utilizados e das simulações de avaliação de desempenho serão descritos nas próximas subseções.

#### 3.1 Hipóteses do teste

Um vetor aleatório  $\mathbf{Y}$  de ordem  $(p \times 1)$  foi particionado da seguinte forma

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{(1)} \\ \mathbf{Y}_{(2)} \end{bmatrix}$$

em que  $\mathbf{Y}_{(1)}$  e  $\mathbf{Y}_{(2)}$  são de dimensões  $p_1$  e  $p_2$  com  $p = p_1 + p_2$  de uma distribuição qualquer com as partições para o vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}$  e matriz de variâncias e covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}$  dadas por

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}.$$

Desta forma, as hipóteses nula de independência entre os dois grupos de variáveis e alternativa são dadas por

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma}_{12} \neq \mathbf{0} \quad (3.1)$$

ou

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}.$$

### 3.2 Testes

Nesta seção são descritos os testes para a hipótese (3.1). Para isso, foi considerada uma amostra aleatória  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ , de uma população com média  $\boldsymbol{\mu}$  e covariância  $\boldsymbol{\Sigma}$ . O estimador não viesado de  $\boldsymbol{\Sigma}$  considerado foi

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}}) (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}})^\top \\ &= \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \mathbf{Y}_j^\top - \frac{\left( \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \right) \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \right)^\top}{n} \right], \end{aligned}$$

em que são consideradas as partições

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix},$$

sendo  $\mathbf{S}_{ii}$  uma matriz  $p_i \times p_i$ ,  $i = 1, 2$ , com  $p = p_1 + p_2$  e

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j.$$

Além disso, considerou-se que esta amostra aleatória de tamanho  $n$  foi extraída de uma distribuição normal multivariada. Inicialmente, aplicou-se o teste de razão de verossimilhanças, que pressupõe normalidade e cuja estatística possui distribuição assintótica qui-quadrado.

Se, no entanto, a suposição de normalidade multivariada for violada ou ocorrerem *outliers*, este teste tem seu desempenho muito influenciado. Assim, foram propostos novos testes que são robustos às violações mencionadas.

Desta forma, foram propostos sete novos testes neste trabalho. O primeiro deles tem por ideia substituir o estimador  $\mathbf{S}$  pelo estimador robusto  $\mathbf{S}^*$  na estatística do teste de razão de verossimilhanças (LRT), que se utiliza-se de determinante das matrizes. Inspirando-se nos trabalhos de Ledoit e Wolf (2002), em dois dos novos testes propostos, os determinantes foram substituídos pelo traço na estatística LRT. Além disso, no primeiro, usou-se o estimador  $\mathbf{S}$  e no segundo, o estimador  $\mathbf{S}^*$ .

Finalmente, estes dois testes foram submetidos a um procedimento *bootstrap* paramétrico, além de considerar a distribuição qui-quadrado da estatística. Para isso, foram simulados amostras normais multivariadas sob  $H_0$  e computadas todas as quatro estatísticas. Com base na distribuição nula *bootstrap* paramétrica, os valores- $p$  serão computados, alternativamente às versões assintóticas, que fazem uso da distribuição qui-quadrado.

### 3.2.1 Teste de Razão de Verossimilhança Original (LRTO)

A partir da amostra aleatória e do estimador  $\mathbf{S}$ , computa-se a estatística do teste com correção de Box (1949), dada por

$$\chi_c^2 = -(n-1)(1-C)[\ln|\mathbf{S}| - (\ln|\mathbf{S}_{11}| + \ln|\mathbf{S}_{22}|)], \quad (3.2)$$

em que  $n$  é o tamanho da amostra, e  $\ln$  é o logaritmo neperiano e

$$C = \frac{4\Gamma_3 + 6\Gamma_2}{12(n-1)\Gamma_2} \quad \text{e} \quad \Gamma_r = (p_1 + p_2)^r - (p_1^r + p_2^r) \quad \text{para} \quad r = 2, 3.$$

sob  $H_0$ ,  $\chi_c^2$  tem distribuição  $\chi_v^2$  com  $v = \Gamma_2/2 = p_1 p_2$  graus de liberdade.

### 3.2.2 Propostas de Novos Testes

Nesta subsecção serão descritos os novos testes propostos. Essencialmente eles são baseados na estatística LRT de (2.27) substituindo  $\mathbf{S}$  por  $\mathbf{S}^*$ , o determinante pelo traço e a distribuição assintótica qui-quadrado pela distribuição *bootstrap*.

#### 3.2.2.1 Teste de Razão de Verossimilhança Robusto (LRTR)

A estatística do teste foi obtida substituindo-se na LRTO (2.27) o estimador  $\mathbf{S}$  pelo estimador robusto  $\mathbf{S}^*$  obtido pelo método *comedian* descritos na sessão 2.4.2.2. Assim, a estatística do teste é:

$$\chi_R^2 = -(n-1)(1-C)[\ln|\mathbf{S}^*| - (\ln|\mathbf{S}_{11}^*| + \ln|\mathbf{S}_{22}^*|)], \quad (3.3)$$

em que  $\mathbf{S}^*$ ,  $\mathbf{S}_{11}^*$  e  $\mathbf{S}_{22}^*$  são os estimadores *comedian* de  $\mathbf{\Sigma}$ ,  $\mathbf{\Sigma}_{11}$  e  $\mathbf{\Sigma}_{22}$ , respectivamente. As estimativas *comedian* são obtidas por meio do pacote *robustbase* do programa R (TEAM et al.,

2016) com a função *covcomed*. A estatística  $\chi_R^2$ , sob normalidade e sob  $H_0$ , foi considerada como apresentando a distribuição  $\chi^2$ , com  $\nu = \Gamma_2/2$  graus de liberdade.

### 3.2.2.2 Testes Baseados em Traço (T e TR)

Inspirando-se em Ledoit e Wolf (2002), dois novos testes foram propostos. Inicialmente, definiu-se as seguintes matrizes

$$\mathbf{D} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^* = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11}^* & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22}^* \end{array} \right]. \quad (3.4)$$

em que  $\mathbf{S}_{11}$  e  $\mathbf{S}_{22}$  são os estimadores  $\Sigma_{11}$  e  $\Sigma_{22}$  e  $\mathbf{S}_{11}^*$  e  $\mathbf{S}_{22}^*$  são os estimadores *comedian* de  $\Sigma_{11}$  e  $\Sigma_{22}$ , respectivamente.

Definindo-se também as matrizes  $\mathbf{V} = \text{diag}(\mathbf{S})$  e  $\mathbf{V}^* = \text{diag}(\mathbf{S}^*)$ , então a estatística, usando o estimador clássico de  $\Sigma$ , é

$$\begin{aligned} \chi_T^2 &= (1 - C) \left( \frac{n-1}{2} \right) \text{tr} \left[ \mathbf{V}^{-1/2} (\mathbf{S} - \mathbf{D}) \mathbf{V}^{-1/2} \right]^2 \\ &= (1 - C) \left( \frac{n-1}{2} \right) \text{tr} \left[ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_D)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que  $\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{S} \mathbf{V}^{-1/2}$  é a matriz de correlação amostral e  $\mathbf{R}_D$  é

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{D} \mathbf{V}^{-1/2} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_D^* = \mathbf{V}^{*-1/2} \mathbf{D}^* \mathbf{V}^{*-1/2} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{11}^* & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22}^* \end{array} \right],$$

$\mathbf{R}_{11}$ ,  $\mathbf{R}_{22}$  são os estimadores da matriz de correlação dos subgrupos de variáveis 1 e 2,  $\mathbf{R}_{11}^*$  e  $\mathbf{R}_{22}^*$  são os estimadores robustos dos subgrupos de variáveis 1 e 2, respectivamente. Foi considerado que a estatística  $\chi_T^2$ , sob  $H_0$ , tem distribuição  $\chi_V^2$ , com  $\nu = \Gamma_2/2 = p_1 p_2$  graus de liberdade.

Para o caso robusto, considerou-se a estatística

$$\begin{aligned} \chi_{TR}^2 &= (1 - C) \left( \frac{n-1}{2} \right) \text{tr} \left[ \mathbf{V}^{*-1/2} (\mathbf{S}^* - \mathbf{D}^*) \mathbf{V}^{*-1/2} \right]^2 \\ &= (1 - C) \left( \frac{n-1}{2} \right) \text{tr} \left[ (\mathbf{R}^* - \mathbf{R}_D^*)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

que, sob  $H_0$ , tem distribuição  $\chi_V^2$ , com  $\nu = \Gamma_2/2 = p_1 p_2$  graus de liberdade.

### 3.2.2.3 Testes *Bootstrap* Paramétrico (LRTOB, LRTRB, TB e TRB)

Como as distribuições das estatísticas de (3.2), (3.3), (3.5) e (3.6) são apenas assintóticas ou aproximadamente assintóticas, então buscou-se corrigir o problema usando o método *bootstrap* paramétrico em cada uma delas. Considerou-se  $\chi_i^2$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , como sendo as estatísticas originais, ou seja,  $\chi_1^2$  é *LRT0*,  $\chi_2^2$  é *LRTR*,  $\chi_3^2$  é a *T* e  $\chi_4^2$  é a *TR*. A partir da amostra original são estimados  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  por  $\bar{\mathbf{X}}$  ou  $\bar{\mathbf{X}}^*$  e  $\mathbf{S}$  ou  $\mathbf{S}^*$ , respectivamente. A partir destas estimativas de covariância, as matrizes  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}^*$  de (3.4) foram computados.

Assim, utilizando-se as matrizes  $\mathbf{D}$  ou  $\mathbf{D}^*$  e os vetores  $\bar{\mathbf{X}}$  e  $\bar{\mathbf{X}}^*$ , a função densidade da normal multivariada (2.1.1) foi estimada, substituindo  $\boldsymbol{\mu}$  por  $\bar{\mathbf{X}}$  ou  $\bar{\mathbf{X}}^*$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  por  $\mathbf{D}$  ou  $\mathbf{D}^*$ . Assim, distribuições  $N_p(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{D})$  ou  $N_p(\bar{\mathbf{X}}^*, \mathbf{D}^*)$  foram especificadas. Com isso, a hipótese nula foi imposta e estas funções densidades foram usadas para se sortear amostras aleatórias *bootstrap* paramétrico. Uma vez gerada uma amostra de uma destas populações, as estatísticas associadas devem ser computadas. Para o caso das estatísticas  $\chi_1^2$  e  $\chi_3^2$  as amostras foram geradas das populações  $N_p(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{D})$  e para as estatísticas  $\chi_2^2$  e  $\chi_4^2$ , as amostras foram geradas da população  $N_p(\bar{\mathbf{X}}^*, \mathbf{D}^*)$ . Se  $\chi_{bi}^2$  for o  $b$ -ésimo valor *bootstrap* paramétrico da estatística  $i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , então o  $p$ -valor do  $i$ -ésimo teste é dado por

$$p_i - Valor = \frac{\sum_{b=1}^{B+1} I(\chi_{bi}^2 \geq \chi_i^2)}{B+1}, \quad (3.7)$$

em que  $I(A)$  é a função indicadora do evento  $A$  e  $B$  é o número de reamostragens *bootstrap* para a  $i$ -ésima estatística, com  $i = 1, 2, 3, 4$ .

### 3.3 Avaliação do Desempenho dos Testes

Para avaliar o desempenho dos oito testes estudados, foram realizadas simulações Monte Carlo, que consisti essencialmente de duas etapas. Na primeira foi avaliado o desempenho em relação à taxa de erro tipo I, e na segunda, avaliou-se o poder dos testes. Em ambas as etapas foram consideradas distribuições normais multivariadas, com presença ou não de *outliers* e também distribuições não normais. Os casos normais com presença de *outliers* e não normais foram utilizados para a avaliação de robustez dos testes. O caso normal multivariado, foi considerado como referência para os demais casos.

### 3.3.1 Desempenho em Relação ao Tamanho do Teste

Inicialmente, foram simuladas amostras Monte Carlo da distribuição normal multivariada considerando diversos tamanhos  $n$  e dimensão  $p$ , sob a hipótese nula. Com isso, em  $N$  repetições Monte Carlo, avaliou-se empiricamente as taxas de erro tipo I. Foram considerados os mesmos valores de  $n$  e  $p$  de Jiang, Bai e Zheng (2013) que são mostrados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Valores do tamanho da amostra ( $n$ ) e do número de variáveis no primeiro ( $p_1$ ) e segundo ( $p_2$ ) grupos de variáveis para a realização das simulações.

$n$	$p_1$	$p_2$	$n$	$p_1$	$p_2$	$n$	$p_1$	$p_2$
60	20	10	30	20	10	30	30	10
120	40	20	60	40	20	60	40	30
240	80	40	120	80	40	480	220	320
480	160	20	240	160	20			
960	320	160	480	320	160			

Foram consideradas  $N = 2000$  repetições para cada configuração. Em cada configuração foram simuladas amostras normais multivariadas  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , em que, sem perda de generalidade,  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  é

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left[ \begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array} \right], \quad (3.8)$$

com

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \sigma_1^2 [(1 - \rho_1) I_{p_1} + \rho_1 J_{p_1}] \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{22} = \sigma_2^2 [(1 - \rho_2) I_{p_2} + \rho_2 J_{p_2}], \quad (3.9)$$

sendo  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$ ,  $J_{p_i}$  é uma matriz de uns  $p_i \times p_i$ ,  $I_{p_i}$  uma matriz identidade de ordem  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ), e  $\sigma_1^2 = 10$  e  $\sigma_2^2 = 15$  sem perda de generalidade. Os valores de  $p_i$  foram apresentados na Tabela 3.1.

Cada amostra simulada foi submetida a cada teste, sendo obtido o  $p_i$ -valor,  $i = 1, 2, \dots, 8$  para os testes LRTO, LRTR, T, TR, LRTOB, LRTRB, TB e TRB, respectivamente. A taxa de erro tipo I empírica do  $i$ -ésimo teste foi computada por

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{\ell=1}^N I(p_i - \text{valor} \leq \alpha)}{N}, \quad (3.10)$$

em que  $\alpha$  é o valor nominal do nível de significância. Foram considerados os valores nominais de  $\alpha$  de 10, 5 e 1 %.

Para avaliar a robustez dos testes, foram simuladas amostras das distribuições, normal multivariada, normal multivariada contaminada, *t* de Student multivariada e lognormal multivariada, além de considerar a presença de *outliers*. Neste último caso, considerou-se o modelo normal multivariado contaminado, dado por

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \delta (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] + (1 - \delta) (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_1|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) \right], \quad (3.11)$$

em que  $1 - \delta$  é a proporção de contaminante de  $0 < \delta < 1$ .

Foi considerado que  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_1$ ,  $\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{1}_p$  e  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , então a variância é

$$V(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma} + \delta (1 - \delta) \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p^T = \boldsymbol{\Sigma} + \delta (1 - \delta) \mathbf{J}_p.$$

Logo, observa-se que há uma perturbação do parâmetro que está sendo testado, pois ele deixou de ser igual ao valor especificado para  $\boldsymbol{\Sigma}$  sob  $H_0$  e sob  $H_1$ . Assim, serão simulados situações idênticas às escolhidas para a distribuição normal multivariada e  $\delta = 0,90$ . As taxas de erro empíricas serão computadas utilizando-se (3.10) substituindo-se os valores  $p_i$  por aqueles computados nas amostras da normal contaminada.

No caso de distribuições não normais, foram consideradas as distribuições *t* de Student multivariada com  $\nu = 5$  e  $\nu = 30$  graus de liberdade e a lognormal com  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Assim, vetores  $\mathbf{Y}_{(1)}$  e  $\mathbf{Y}_{(2)}$  foram simulados independentemente de cada uma destas distribuições. Com isso, garantiu-se a independência entre os 2 grupos de variáveis e  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ . Os parâmetros para gerar  $\mathbf{Y}_{(1)}$  foram  $\boldsymbol{\mu}_{(1)} = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$  e para gerar  $\mathbf{Y}_{(2)}$ ,  $\boldsymbol{\mu}_{(2)} = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ , que são os mesmos especificados para a distribuição normal multivariada. Os valores de  $n$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  foram os mesmos anteriormente especificados.

Uma vez simuladas as amostras, aplicados os testes, as taxas de erro tipo I foram estimadas usando-se (3.10), utilizando rotinas implementadas no programa R (R CORE TEAM, 2020).

### 3.3.2 O Teste Binomial Exato

As taxas de erro tipo I e o poder dos testes foram avaliados via procedimento Monte Carlo. Segundo Oliveira e Ferreira (2010), estes não estão livres de erro. Então, utiliza-se o teste binomial exato para verificar se os novos testes propostos podem ser considerados exatos, liberal ou conservativo. A estatística do teste binomial exato é obtida utilizando a relação entre  $F$  e a distribuição binomial, com probabilidade de sucesso  $p = \alpha$ . Se  $y$  é o número de rejeições de  $H_0$  nas simulações Monte Carlo então a estatística do teste é dada por:

$$F = \left( \frac{y+1}{N-y} \right) \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right), \quad (3.12)$$

que, sob a hipótese nula, segue uma distribuição  $F$  com  $v_1 = 2(N-y)$  e  $v_2 = 2(y+1)$  graus de liberdade. Se  $F_c \leq F_{\alpha/2;v_1,v_2}$  ou  $F_c > F_{(1-\alpha)/2}$  então rejeita-se  $H_0$  em que  $F_{\alpha/2}$  e  $F_{1-\alpha/2;v_1,v_2}$  são os quantis superiores 100  $(\alpha/2)\%$  e 100 $(1-\alpha/2)\%$  da distribuição  $F$  com  $v_1$  e  $v_2$  graus de liberdade.

Neste sentido, considerando um nível nominal de significância de 1%, utilizou-se as seguintes hipóteses de teste

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \alpha = 1\% \quad vs \quad H_1 : \alpha \neq 1\% \\ H_0 : \alpha = 5\% \quad vs \quad H_1 : \alpha \neq 5\% \\ H_0 : \alpha = 10\% \quad vs \quad H_1 : \alpha \neq 10\%. \end{array} \right.$$

Se a hipótese nula for rejeitada e a taxa de erro tipo I for considerada significativamente inferior ao nível nominal adotado, o teste é considerado conservativo; se a hipótese nula for rejeitada e a taxa de erro tipo I for considerada significativamente superior ao nível nominal adotado, o teste é considerado liberal; e a hipótese nula não for rejeitada o teste é considerado exato.

### 3.3.3 Desempenho em Relação ao Poder

Para avaliar o poder, as distribuições consideradas foram a normal multivariada, a  $t$  multivariada com  $v = 5$  ou 30 graus de liberdade e a lognormal multivariada. Em todos os

casos foi considerado  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  dada por

$$V(\mathbf{X}) = \sigma^2 [(1 - \rho)I_p + \rho\mathbf{J}_p], \quad (3.13)$$

com  $\sigma^2 = 10$  e  $\rho = 0,90; 0,2$ . Os mesmos tamanhos de amostras e dimensões do estudo do tamanho dos testes foram aplicados. Para cada uma das amostras, em cada uma das configurações e das  $N$  repetições Monte Carlo, os *oito* testes foram aplicados e os valores de poder foram estimados por:

$$\widehat{(1 - \beta)}_i = \frac{\sum_{\ell=1}^N I(\text{valor-}p_i \leq \alpha)}{N}, \quad (3.14)$$

em que  $i = 1, 2, \dots, 8$  e  $\alpha = 10, 5$  ou  $1 \%$ .

### 3.4 Nomenclatura Utilizada para os Testes que Foram Avaliados

As nomenclaturas dos testes utilizadas são definidas na Tabela 3.2. Os testes que utilizam as estatísticas com distribuição assintótica qui-quadrada com  $v = p_1 p_2$  graus de liberdade são *LRT0* e *T* usam o estimador  $\mathbf{S}$ , os testes *LRTR* e *TR* têm as estatísticas modificadas, substituindo o estimador  $\mathbf{S}$  pelo estimador *comedian*  $\mathbf{S}^*$ .

Os testes de *bootstrap* *LRT0B*, *LRTRB*, *TB* e *TRB* utilizam a distribuição de *bootstrap*.

Tabela 3.2 – Nomenclatura dos testes avaliados

<b>Assintóticos</b>		
<b>Nome</b>	<b>Estatística</b>	<b>Descrição</b>
<i>LRT0</i>	2.27	Teste da razão de verossimilhanças original matriz de covariâncias $\mathbf{S}$
<i>LTR</i>	3.3	Teste da razão de verossimilhanças robusto matriz de covariâncias comedian $\mathbf{S}^*$
<i>T</i>	3.5	Teste baseado no traço matriz de correlação amostral $\mathbf{R}$
<i>TR</i>	3.6	Teste baseado no traço matriz de correlação amostral robusta/comedian $\mathbf{R}^*$
<b>Método Bootstrap Paramétrico</b>		
<b>Nome</b>	<b>Estatística</b>	<b>Descrição</b>
<i>LRT0B</i>	2.27	Teste da razão de verossimilhanças original matriz de covariâncias $\mathbf{S}$
<i>LTRB</i>	3.3	Teste da razão de verossimilhanças robusto matriz de covariâncias comedian $\mathbf{S}^*$
<i>TB</i>	3.5	Teste baseado no traço - matriz de correlação amostral $\mathbf{R}$
<i>TRB</i>	3.6	Teste baseado no traço matriz de correlação amostral robusta/comedian $\mathbf{R}^*$

### 3.5 Exemplo Real

Para ilustrar a aplicação dos testes propostos foi utilizado um exemplo real cujo os dados foram obtidos do projeto BIOSBRASIL, sendo os dados coletados nos solos e nas mesmas parcelas. Como o interesse deste trabalho é propor e avaliar testes de hipótese para a independência entre dois grupos de variáveis, foram considerados o grupo 1 composto de *seis* variáveis referentes a plantas (MSRAIZ, MSPA, MSTOTAL, NoNOD, NODFRESCO, ACUMULONmg) e o grupo 2 composto de 23 variáveis referentes a dados de solo (pH, P, K, Ca, Mg, Al, HAL, SB, t, CTCT, V, m, MO, Zn, Fe, Mn, Cu, B, S, umidade areia, argila, Prem), assim,  $p_1 + p_2 = 29$  e o tamanho amostral foi  $n = 98$ .

Os dados são provenientes do projeto “Conservation and sustainable Management of Below-Ground Biodiversity” que foi coordenado pelo “Tropical Soil Biology and Fertility Institute” (TSBF) do CIAT, financiado pelo “Global Environment Facility” (GEF), implementado pelo “United Nations Environment Programme (UNEP)” e executado em sete países: Brasil, Costa do Marfim, Índia, Indonésia, Quênia, México e Uganda. No Brasil o projeto é denominado BIOSBRASIL, sua coordenação está a cargo da UFLA - Universidade Federal de Lavras,

as seguintes instituições são co-executoras: INPA (Instituto Nacional de Pesquisa da Amazônia), UFAM (Universidade Federal do Amazonas), EMBRAPA-Solos, FURB (Universidade Regional de Blumenau), UnB (Universidade de Brasília), CENA (Centro de Energia Nuclear na Agricultura) e CEULM/ULBRA. No Brasil, cerca de 100 participantes, entre pesquisadores, estudantes de graduação e pós-graduação, técnicos e outros bolsistas estavam envolvidos no projeto.

O objetivo do projeto é promover a conscientização, conhecimento e compreensão da biodiversidade do solo, importante para a produção agrícola sustentável em paisagens tropicais pela demonstração de métodos para a conservação e manejo sustentável. Especificamente neste exemplo objetivou-se verificar se havia relação entre as medidas químicas do solo e as características das plantas neles cultivadas.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para avaliar o desempenho do teste da razão de verossimilhança para independência entre dois grupos de variáveis sob distribuições normais e não-normais com a presença de *outliers* foram realizadas simulações Monte Carlo determinando-se as taxas de erro tipo I e poder. Também foram incluídos novos testes robustos a *outliers* neste estudo de simulação.

Uma avaliação dos resultados das simulações para os três níveis de significância  $\alpha = 0,10$ ,  $\alpha = 0,05$  e  $\alpha = 0,01$  permite que se notem comportamentos semelhantes quando considerados a mesma hipótese, o mesmo tamanho amostral, a mesma dimensionalidade e a mesma distribuição.

Será apresentado os resultados das simulações considerando 5% de significância, como apresentado em Li, Chen e Yao (2016) e outros autores para assim estabelecer uma comparação direta entre os testes estudados. Além do mais, justifica-se ainda pelo fato de estes casos serem semelhantes aos casos de 1% e 10% em termos do padrão apresentado.

Os resultados das simulações considerando 1% e 10% de significância encontram-se nos Apêndices A, nas Tabelas 1 a 18. Foram simulados várias combinações entre  $n$  e  $p$  para todos os testes em estudo.

Como o teste da razão de verossimilhanças se degenera quando  $p > n$  pelo fato da matriz de covariâncias amostral ser singular, então os testes *LRT0*, *LRTR*, *LRT0B* e *LRTRB* têm resultados de simulações apenas para os casos em que  $n > p$ . Já os testes, *T*, *TR*, *TB* e *TRB* admitem simulações para todas as combinações entre  $n$  e  $p$ .

As distribuições simuladas são a normal multivariada, log-normal multivariada,  $t$  de Student multivariada com  $\nu = 5$  graus de liberdade,  $t$  de Student multivariada com  $n = 30$  graus de liberdade e normal multivariada contaminada, para avaliar a robustez quanto à assimetria da distribuição e quanto à presença de *outliers*.

### 4.1 Desempenho em Relação aos Tamanhos e Poder dos Testes Assintóticos

Como o tamanho do teste é uma característica fundamental para o seu desempenho, o teste *binomial exato* de Oliveira e Ferreira (2010) foi usado para classificar os testes em liberais, exatos ou conservativos, de acordo com seus tamanhos reais.

Se o teste tiver tamanho real equivalente ao tamanho nominal, então é considerado exato. Testes que têm um tamanho real menor do que o nominal são considerados conservativos e aqueles que apresentam taxas de erro tipo I maiores do que os níveis nominais  $\alpha$  são conside-

rados liberais. Foram consideradas as seguintes hipóteses:  $H_0 : \alpha = 0,10$  versus  $H_1 : \alpha \neq 0,10$ ,  $H_0 : \alpha = 0,05$  versus  $H_1 : \alpha \neq 0,05$  e  $H_0 : \alpha = 0,01$  versus  $H_1 : \alpha \neq 0,01$ , para os níveis nominais de 10%, 5% e 1%; respectivamente.

Os resultados foram destacados a fim de facilitar a visualização da classificação dos testes da seguinte maneira: os valores sinalizados com  $^+$  se referem a testes liberais, com  $^-$  a testes conservativos e, em negrito a testes exatos.

O poder dos testes propostos foram avaliados em relação à capacidade de rejeição da hipótese nula nas situações simuladas sob  $H_1$ . Para observar se existe algum padrão de controle de taxas de erro tipo I diferente entre os testes, foram simuladas para as mesmas distribuições diferentes números de grupos e diferentes correlações entre os grupos.

Para avaliar a taxa de erro tipo I e poder dos testes foram utilizadas rotinas implementadas usando o programa R (TEAM et al., 2016), que estão apresentadas no APÊNDICE B.

#### 4.1.1 Desempenho em Relação aos Tamanhos dos Testes para $p_1 + p_2 < n$

Nas Tabelas 4.1, 4.2, 4.4, 4.3, e 4.5, estão apresentados os tamanhos reais estimados dos testes *LRT0*, *LRTR*, *T* e *TR* descritos na tabela 3.2, considerando as distribuições multivariada normal (4.1), normal contaminada (4.2), log-normal, *t* de *Student* com  $v = 5$  graus de liberdade (4.3), *t* de *Student* com  $v = 30$  graus de liberdade (4.4), considerando as combinações de  $n$ ,  $p_1$  e  $p_2$  com  $p_1 + p_2 < n$ . O comportamento dos testes foi verificado para diferentes níveis de correlação considerando grupos de variáveis com baixa correlação ( $\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,2$ ), um com baixa e outro com alta correlação ( $\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $\rho_2 = 0,2$ ) e grupos de variáveis altamente correlacionadas ( $\rho_1 = 0,9$  e  $\rho_2 = 0,9$ ).

Os valores das taxas de erro tipo I foram comparados com cada nível nominal de significância nominal associado mediante o teste binomial exato ao nível de significância de 1%. O teste *LRT0* original de Wilks (WILKS, 1935) foi utilizado para comparação entre os demais testes com  $p_1 + p_2 < n$ .

Um resultado esperado para o teste é que ele tenha taxa de erro tipo I igual ao nível de significância, o que é equivalente dizer que o teste é exato. Porém, se o mesmo for considerado conservativo, é aceitável, pois os erros tipo I reais são inferiores aos valores nominais. Isso é verdade se o poder deste teste não for muito comprometido, uma vez que existe relação direta entre baixas taxas de erro tipo I e poder dos testes.

São encontrados poucos resultados conservativos em todos os cenários, como observado nas Tabelas 4.1 a 4.5. Na Tabela 4.1 foi considerada a distribuição normal multivariada, nela observa-se que os testes  $T$  e  $TR$  para os casos em que os grupos possuem baixa correlação ( $\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,2$ ) apresentaram taxa de erro tipo I significativamente inferior ao valor nominal, indicando testes conservativos. Nas demais configurações de  $n$ ,  $p_1$  e  $p_2$  as taxas de erro tipo I foram acima do nível de significância nominal, indicando testes liberais.

Os autores Jiang, Bai e Zheng (2013) encontraram controle do erro tipo I no teste usando o critério do traço com matriz teórica aleatória (RMT). Neste trabalho foram obtidos resultados semelhantes, pois o teste mais poderoso e com controle do erro tipo I é baseado no mesmo princípio teórico do teste desses autores. Para testar a independência entre dois vetores quando somente um deles possui grande dimensão, os autores Li, Chen e Yao (2016) propuseram um teste usando o critério do traço. Nas configurações avaliadas por eles, constatou-se que foram eficientes no controle do erro tipo I. Srivastava e Reid (2012) propuseram dois testes usando o critério do traço e apresentaram resultados de simulação para amostras de  $n = 15$  a  $n = 100$  e grupos de pequena e grande dimensão, os quais se mostraram eficientes no controle da taxa de erro tipo I.

Em todas situações avaliadas os testes  $LRT_0$ ,  $LRT_1$  são considerados liberais. Observa-se ainda que à medida que se aumenta a dimensão e o tamanho amostral, as taxas de erro tipo I também aumentam aproximando-se de 1 para amostras  $n = 960$ ,  $p_1 = 320$  e  $p_2 = 160$ . Estes resultados também foram encontrados por Jiang, Bai e Zheng (2013) para o teste  $LRT_0$ , o que evidencia que o teste de Wilks não é adequado para amostras de grande dimensão. Não se verificou efeito da correlação no desempenho do teste  $LRT_0$ . Nos demais testes, quanto maior a correlação entre variáveis nos dois grupos, maior a liberalidade do teste.

Os testes de razão de verossimilhanças  $LR_1$  e  $LR_2$  estudados por Srivastava e Reid (2012) para amostras de tamanho até  $n = 100$  e grupos de variáveis pequenos ( $p_1 = 2$  e  $p_2 = 3$  a  $p_1 = 10$  e  $p_2 = 15$ ) apresentaram controle da taxa de erro tipo 1, e também os testes que usam o critério do traço  $T_1$  e critério do traço robusto  $T_1^*$  para amostras de tamanho até  $n = 100$  e grupos de variáveis  $p_1 + p_2 < n$  apresentaram controle da taxa de erro tipo I.

Em relação ao aumento do tamanho amostral e dimensão dos dados, destaca-se que os testes  $T$  e  $TR$  obtiveram um excelente desempenho.

Tabela 4.1 – Taxa de erro tipo I dos testes *LRT0*, *LRTR*, *T* e *TR* para  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição normal multivariada**, ao nível nominal de 5% de significância.

<i>n</i>	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	<i>LRT0</i>	<i>LRTR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
60	20	10	0,2	0,2	0,0750 <sup>+</sup>	0,0915 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,0755 <sup>+</sup>	0,1260 <sup>+</sup>	<b>0,0595</b>	0,0695 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,0840 <sup>+</sup>	0,2245 <sup>+</sup>	0,1050 <sup>+</sup>	0,1295 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,0800 <sup>+</sup>	0,2205 <sup>+</sup>	0,1930 <sup>+</sup>	0,2050 <sup>+</sup>
120	40	20	0,2	0,2	0,1325 <sup>+</sup>	0,1355 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>
			0,9	0,2	0,1290 <sup>+</sup>	0,2165 <sup>+</sup>	0,0975 <sup>+</sup>	0,1045 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1195 <sup>+</sup>	0,1400 <sup>+</sup>	0,0830 <sup>+</sup>	0,0805 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1135 <sup>+</sup>	0,1945 <sup>+</sup>	0,2025 <sup>+</sup>	0,2115 <sup>+</sup>
240	80	40	0,2	0,2	0,2295 <sup>+</sup>	0,2300 <sup>+</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	0,0035 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,2345 <sup>+</sup>	0,2395 <sup>+</sup>	0,0860 <sup>+</sup>	0,0860 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,2095 <sup>+</sup>	0,2310 <sup>+</sup>	0,0995 <sup>+</sup>	0,0995 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,2095 <sup>+</sup>	0,2245 <sup>+</sup>	0,2165 <sup>+</sup>	0,2180 <sup>+</sup>
480	160	80	0,2	0,2	0,5595 <sup>+</sup>	0,5595 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,5430 <sup>+</sup>	0,5440 <sup>+</sup>	0,0935 <sup>+</sup>	0,0935 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,5315 <sup>+</sup>	0,5335 <sup>+</sup>	0,0910 <sup>+</sup>	0,0910 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,5595 <sup>+</sup>	0,5605 <sup>+</sup>	0,2280 <sup>+</sup>	0,2275 <sup>+</sup>
960	320	160	0,2	0,2	0,9535 <sup>+</sup>	0,9535 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,9645 <sup>+</sup>	0,9645 <sup>+</sup>	0,0825 <sup>+</sup>	0,0825 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,9640 <sup>+</sup>	0,9640 <sup>+</sup>	0,0805 <sup>+</sup>	0,0805 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,9640 <sup>+</sup>	0,9640 <sup>+</sup>	0,2155 <sup>+</sup>	0,2155 <sup>+</sup>

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

**negrito:** o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Pode ser visto na Tabela 4.2, na qual foi considerada a distribuição normal multivariada contaminada, que o teste *TR* foi conservativo para os casos em que os grupos possuem baixa correlação ( $\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,2$ ) em todas as configurações de  $n$ ,  $p_1$  e  $p_2$ . Para as demais situações avaliadas a taxa de erro tipo I superou significativamente o valor nominal, indicando desempenho liberal. Nota-se que em todas situações avaliadas os testes *LRT0*, *LRTR* e *T* foram considerados liberais, ou seja, com taxas de erro tipo I acima do nível de significância nominal, observa-se ainda que, as taxas de erro tipo I aumentam aproximando-se de 1 para as amostras acima  $n = 120$ ,  $p_1 = 40$  e  $p_2 = 20$ . A presença de *outliers* trouxe grandes efeitos negativos no desempenho dos testes *LRT0*, *LRTR* e *T*, o que pode ser visto quando se compara os resultados das Tabelas 4.2 e 4.1. Nota-se que o *TR* manteve-se com bom desempenho para amostras de grande dimensão e na presença de *outliers*.

Tabela 4.2 – Erro tipo I dos testes *LRT0*, *LRTR*, *T* e *TR* com  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição normal multivariada contaminada**, ao nível nominal de 5% de significância.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	<i>LRT0</i>	<i>LRTR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
60	20	10	0,2	0,2	0,6575 <sup>+</sup>	0,5785 <sup>+</sup>	0,9925 <sup>+</sup>	0,0330 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,3850 <sup>+</sup>	0,5875 <sup>+</sup>	0,9795 <sup>+</sup>	0,1590 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,3905 <sup>+</sup>	0,5970 <sup>+</sup>	0,9705 <sup>+</sup>	0,1455 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,3050 <sup>+</sup>	0,6365 <sup>+</sup>	0,9440 <sup>+</sup>	0,2890 <sup>+</sup>
120	40	20	0,2	0,2	0,8615 <sup>+</sup>	0,9180 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0170 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,6420 <sup>+</sup>	0,9315 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1530 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,7040 <sup>+</sup>	0,9410 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2160 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,5225 <sup>+</sup>	0,9240 <sup>+</sup>	0,9940 <sup>+</sup>	0,2800 <sup>+</sup>
240	80	40	0,2	0,2	0,9930 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0165 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,9325 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1415 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,9545 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1555 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,8855 <sup>+</sup>	0,9990 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2625 <sup>+</sup>
480	160	80	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0135 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1445 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1565 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,9990 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2495 <sup>+</sup>
960	320	160	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0135 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2710 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1375 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1430 <sup>+</sup>

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

negrito: o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Nas configurações avaliadas considerando a distribuição *t* de *Student* com  $v = 5$  graus de liberdade, apresentada na Tabela 4.3, observa-se que a taxa de erro tipo I superou significativamente o valor nominal, indicando que os testes *LRT0*, *LRTR*, *T* e *TR* apresentaram desempenho liberal. Novamente, existe grande efeito de falta de robustez, pois a distribuição *t* multivariada, principalmente com baixo número de graus de liberdade, tem “caudas” mais pesadas que a normal multivariada.

Em relação ao aumento do tamanho amostral e dimensão dos dados, destaca-se que o teste *TR* apresentou um melhor desempenho em relação aos testes *LRT0*, *LRTR* e *T* os quais tiveram as taxas de erro tipo I aproximando-se de 1 para as amostras acima  $n = 120$ . Observa-se ainda que a baixa ou alta correlação entre as variáveis de cada grupo não influenciaram no desempenho dos testes.

Tabela 4.3 – Erro tipo I dos testes *LRT0*, *LRTR*, *T* e *TR* com  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição *t* de Student multivariada** com  $\nu = 5$  graus de liberdade ao nível nominal de 5% de significância.

<i>n</i>	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	<i>LRT0</i>	<i>LRTR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
60	20	10	0,2	0,2	0,9475 <sup>+</sup>	0,9830 <sup>+</sup>	0,5830 <sup>+</sup>	0,1955 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,9435 <sup>+</sup>	0,9790 <sup>+</sup>	0,5025 <sup>+</sup>	0,3130 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,9350 <sup>+</sup>	0,9855 <sup>+</sup>	0,4860 <sup>+</sup>	0,2880 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,9345 <sup>+</sup>	0,9855 <sup>+</sup>	0,3645 <sup>+</sup>	0,2715 <sup>+</sup>
120	40	20	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9025 <sup>+</sup>	0,4495 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4085 <sup>+</sup>	0,2890 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,6950 <sup>+</sup>	0,3865 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,6560 <sup>+</sup>	0,3500 <sup>+</sup>
240	80	40	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9950 <sup>+</sup>	0,7605 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4745 <sup>+</sup>	0,3355 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8440 <sup>+</sup>	0,4635 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8260 <sup>+</sup>	0,4185 <sup>+</sup>
480	160	80	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9680 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4795 <sup>+</sup>	0,3340 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9255 <sup>+</sup>	0,4535 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4795 <sup>+</sup>	0,3340 <sup>+</sup>
960	320	160	0,2	0,2	0,8850 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8000 <sup>+</sup>	0,8550 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,8980 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,5320 <sup>+</sup>	0,2250 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,8845 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8080 <sup>+</sup>	0,1865 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,8870 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,7200 <sup>+</sup>	0,2680 <sup>+</sup>

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

**negrito:** o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Taxas de erro tipo I foram apresentadas na Tabela 4.4 considerando a distribuição *t* de Student multivariada com  $\nu = 30$ . Nela observa-se que os testes *T* e *TR* apresentaram taxas de erro tipo I significativamente inferior ao valor nominal, indicando conservativos, para os casos em que os grupos possuem baixa correlação ( $\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,2$ ) para todas as configurações de  $n$ ,  $p_1$  e  $p_2$ . Para as demais situações avaliadas os testes superaram significativamente o valor nominal, indicando desempenho liberal.

Em todas situações avaliadas os testes *LRT0*, *LRTR* foram considerados acima do nível de significância nominal, indicando testes liberais, observa-se ainda que, a medida que aumenta a dimensão e tamanho amostral, as taxas de erro tipo I também aumentam aproximando-se de 1 para amostras maiores que  $n = 240$ ,  $p_1 = 80$  e  $p_2 = 40$ . Houve uma melhora em relação à distribuição *t* multivariada com  $\nu = 5$  graus de liberdade, mas embora os resultados tenham se assemelhados mais com os da normal, ainda estavam distantes da situação de referência, indicando baixa robustez. Se compararmos os desempenhos dos testes *T* e *TR*, veremos que

o desempenhos dos mesmos foram muito superiores aos dos demais testes. Suas taxas de erro tipo I, embora estivessem acima significativamente do nível nominal de 5% não ultrapassaram expressivamente, como aconteceu com os demais testes, principalmente quando se aumentou as dimensões e os tamanhos amostrais.

Tabela 4.4 – Erro tipo I dos testes *LRTO*, *LRTR*, *T* e *TR* com  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição *t* de Student multivariada** com  $\nu = 30$  graus de liberdade, ao nível nominal de 5% de significância.

<i>n</i>	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	<i>LRTO</i>	<i>LRTR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
60	20	10	0,2	0,2	0,1865 <sup>+</sup>	0,3125 <sup>+</sup>	0,0070 <sup>-</sup>	0,0075 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,1755 <sup>+</sup>	0,3645 <sup>+</sup>	0,0885 <sup>+</sup>	0,1015 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1870 <sup>+</sup>	0,4555 <sup>+</sup>	0,1290 <sup>+</sup>	0,1640 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1820 <sup>+</sup>	0,4710 <sup>+</sup>	0,2075 <sup>+</sup>	0,2140 <sup>+</sup>
120	40	20	0,2	0,2	0,4190 <sup>+</sup>	0,6165 <sup>+</sup>	0,0065 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,4150 <sup>+</sup>	0,6950 <sup>+</sup>	0,1055 <sup>+</sup>	0,1110 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,4150 <sup>+</sup>	0,7790 <sup>+</sup>	0,1320 <sup>+</sup>	0,1405 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,4150 <sup>+</sup>	0,7435 <sup>+</sup>	0,2260 <sup>+</sup>	0,2345 <sup>+</sup>
240	80	40	0,2	0,2	0,8815 <sup>+</sup>	0,9795 <sup>+</sup>	0,0060 <sup>-</sup>	0,0065 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,8815 <sup>+</sup>	0,9905 <sup>+</sup>	0,1195 <sup>+</sup>	0,1155 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,8820 <sup>+</sup>	0,9920 <sup>+</sup>	0,1210 <sup>+</sup>	0,1340 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,8815 <sup>+</sup>	0,9860 <sup>+</sup>	0,2375 <sup>+</sup>	0,2375 <sup>+</sup>
480	160	80	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	0,0075 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1195 <sup>+</sup>	0,1190 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1255 <sup>+</sup>	0,1305 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2480 <sup>+</sup>	0,2570 <sup>+</sup>
960	320	160	0,2	0,2	0,9570 <sup>+</sup>	0,9570 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1295 <sup>+</sup>	0,1310 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1295 <sup>+</sup>	0,1325 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2680 <sup>+</sup>	0,2580 <sup>+</sup>

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

**negrito:** o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Na Tabela 4.5 foram apresentadas as taxas de erro tipo I considerando a distribuição lognormal multivariada. Em todas situações avaliadas os testes *LRTO* e *LRTR* foram consideradas acima do nível de significância nominal, indicando testes liberais, não controlaram a taxa de erro tipo I em nenhuma das situações simuladas. Observa-se ainda que somente o teste *T* apresentou taxas de erro tipo I mais baixas, sendo considerado liberal, ainda estavam distantes da situação de referência, indicando baixa robustez, mostrando um melhor desempenho para os casos em que os grupos possuem baixa correlação ( $\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,2$ ) nas configurações de  $n = 960$ ,  $p_1 = 320$  e  $p_2 = 160$ , o teste pode ser considerado exato. Comparando com os outros testes *LRTO*, *LRTR* e *TR*, pode se observar que houve uma melhora do teste *T*, que apresen-

tou taxas de erro tipo mais baixas, para altas correlações em todas as situações de  $n$ ,  $p_1$  e  $p_2$  simuladas, mas ainda estavam distante da situação de referência, indicando baixa robustez.

Tabela 4.5 – Erro tipo I dos testes  $LRTO$ ,  $LRTR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição lognormal multivariada** ao nível nominal de 5% de significância.

$n$	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$LRTO$	$LRTR$	$T$	$TR$
60	20	10	0,2	0,2	0,7305 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1330 <sup>+</sup>	0,5030 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,7645 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2035 <sup>+</sup>	0,4170 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,7895 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1880 <sup>+</sup>	0,3930 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,8125 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1330 <sup>+</sup>	0,2995 <sup>+</sup>
120	40	20	0,2	0,2	0,2145 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1340 <sup>+</sup>	0,6530 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,9120 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2320 <sup>+</sup>	0,5125 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,9210 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2015 <sup>+</sup>	0,4605 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,9390 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0995 <sup>+</sup>	0,3815 <sup>+</sup>
240	80	40	0,2	0,2	0,9595 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0980 <sup>+</sup>	0,8120 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,9790 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2390 <sup>+</sup>	0,5725 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,9775 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2235 <sup>+</sup>	0,5210 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0880 <sup>+</sup>	0,4315 <sup>+</sup>
480	160	80	0,2	0,2	0,9935 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0860 <sup>+</sup>	0,9125 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,9980 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2255 <sup>+</sup>	0,6150 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,9985 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2215 <sup>+</sup>	0,5750 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0830 <sup>+</sup>	0,5450 <sup>+</sup>
960	320	160	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0625</b>	0,9770 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2065 <sup>+</sup>	0,6945 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2090 <sup>+</sup>	0,6040 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0700 <sup>+</sup>	0,7515 <sup>+</sup>

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

**negrito:** o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Pode se inferir que dos testes avaliados ( $LRTO$ ,  $LRTR$ ,  $T$  e  $TR$ ), os que apresentaram um melhor desempenho para dados provenientes de distribuições multivariadas não normais e amostras de grande dimensão foram os testes  $T$  e  $TR$ . Observou-se que não houve diferença significativa no desempenho dos testes  $LRTO$ ,  $LRTR$  à medida em que se aumenta o tamanho amostra e a dimensão tanto para dados normais quanto não normais e ainda com a presença de *outliers*. Já o teste  $T$  teve seu desempenho grandemente afetado ao ser aplicado a dados proveniente de distribuição  $t$  de *Student*.

Li, Chen e Yao (2016) examinaram a robustez dos testes para populações não normais considerando que apenas um grupo de variáveis ( $p_2$ ) é grande, usando o critério do traço ( $T_n$ ), o teste da razão de verossimilhança corrigido proposto por Jiang, Bai e Zheng (2013) ( $T_1$ ) e o teste usando o critério do traço para  $p_1 + p_2 < n$  ( $T_2$ ). Os autores notaram que os testes controlaram as

taxas de erro tipo I, sendo que o teste do traço  $T_n$  e o teste da razão de verossimilhança corrigido  $T_1$ , apresentam um melhor desempenho em relação ao teste  $T_2$  à medida que as dimensões da amostra aumentam.

#### 4.1.2 Desempenho dos testes em relação ao poder para $p_1 + p_2 < n$

Nas Tabelas 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 estão apresentados o poder dos testes propostos, avaliados nos mesmos casos usados para avaliar a taxa de erro tipo I. Dos testes que apresentaram controle adequado do erro tipo I, espera-se que os que são conservativos e os que são exatos sejam menos poderosos que os considerados liberais.

Observando a Tabela 4.6 na qual foi considerada a distribuição normal multivariada, nota-se que os testes  $LRT_0$  e  $LRTR$  apresentaram poder inferior em relação aos testes  $T$  e  $TR$  apenas para amostras pequenas  $n = 60$ ,  $p_1 = 20$  e  $p_2 = 10$  em que o valor de poder foi inferior a 70%, para as demais configurações simuladas, o desempenho dos testes se igualou e seus valores de poder se aproximaram de 100%.

Estas mesmas configurações foram simuladas por Jiang, Bai e Zheng (2013), sendo observado que o poder do teste de razão de verossimilhança clássico  $T_3$  foi maior que o dos testes de razão de verossimilhança corrigido  $T_1$  e que usou o critério do traço para alta dimensão  $T_2$ , em amostras  $n \leq 480$ .

No estudo de poder dos testes propostos por Li, Chen e Yao (2016), foi observado que o poder dos testes diminuem a medida que  $p_2$  aumenta, sendo  $p_2$  a dimensão do segundo grupo de variáveis. No entanto, o poder do teste  $T_n$  diminui mais lentamente do que  $T_1$  e  $T_2$  demonstrando que o teste  $T_n$  apresenta ser mais robusto.

Srivastava e Reid (2012) notaram que o poder foi baixo para os testes de razão de verossimilhança  $LR_1$  e  $LR_2$  estudados para amostras de tamanho até  $n = 100$  e grupos de variáveis pequenos ( $p_1 = 2$  e  $p_2 = 3$  a  $p_1 = 10$  e  $p_2 = 15$ ). Já os testes que usam o critério do traço  $T_1$  e critério do traço robusto  $T_1^*$  para amostras de tamanho até  $n = 100$  e grupos de variáveis  $p_1 + p_2 < n$  apresentaram excelentes resultados de poder.

Tabela 4.6 – Poder dos testes  $LRT0$ ,  $LRTR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição normal multivariada**, ao nível nominal de 5% de significância.

$n$	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$LRT0$	$LRTR$	$T$	$TR$
60	20	10	0,2	0,2	0,6410	0,6630	0,9980	0,9975
			0,2	0,9	0,6625	0,6775	0,9975	0,9965
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
120	40	20	0,2	0,2	0,9665	0,9680	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,9600	0,9595	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
240	80	40	0,2	0,2	0,9995	0,9995	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
480	160	80	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
960	320	160	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Pode ser visto na Tabela 4.7, na qual foi considerada a distribuição normal multivariada contaminada, que o poder de todos os testes nas configurações simuladas se igualou e seus valores aproximaram-se de 100%.

Tabela 4.7 – Poder para testes  $LRTO$ ,  $LRTR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição normal multivariada contaminada**, ao nível nominal de 5% de significância.

$n$	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$LRTO$	$LRTR$	$T$	$TR$
60	20	10	0,2	0,2	0,9970	0,9505	1,0000	0,9970
			0,2	0,9	0,9950	0,9495	1,0000	0,9980
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
120	40	20	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
240	80	40	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
480	160	80	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
960	320	160	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Nas configurações avaliadas considerando a distribuição  $t$  de *Student* com  $\nu = 5$  graus de liberdade, apresentada na Tabela 4.8, observa-se que o poder de todos os testes se igualou e seus valores se aproximaram de 100%.

Tabela 4.8 – Poder para testes  $LRTO$ ,  $LRTR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição t multivariada**  $v = 5$ , ao nível nominal de 5% de significância.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$LRTO$	$LRTR$	$T$	$TR$
60	20	10	0,2	0,2	0,9990	0,9980	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,9980	0,9995	1,0000	0,9990
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
120	40	20	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
240	80	40	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
480	160	80	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
960	320	160	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Na Tabela 4.9 foi considerada a distribuição  $t$  de *Stud* multivariada  $v = 30$ , nela nota-se que o teste  $LRTO$  apresentou poder inferior em relação aos testes  $T$  apenas para amostras pequenas  $n = 60$ ,  $p_1 = 20$  e  $p_2 = 10$  em que o valor de poder foi inferior a 80%, o poder foi inferior a 86% para o teste  $LRTR$ , nas demais configurações simuladas, o desempenho dos testes  $LRTO$ ,  $LRTR$ ,  $T$  e  $TR$  se igualou e seus valores de poder se aproximaram de 100%.

Tabela 4.9 – Poder para testes  $LRTO$ ,  $LRTR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição t multivariada**  $\nu = 30$ , ao nível nominal de 5% de significância.

$n$	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$LRTO$	$LRTR$	$T$	$TR$
60	20	10	0,2	0,2	0,7935	0,8480	0,9990	0,9980
			0,2	0,9	0,7980	0,8535	0,9970	0,9945
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
120	40	20	0,2	0,2	0,9945	0,9975	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,9965	0,9985	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
240	80	40	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
480	160	80	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
960	320	160	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Na Tabela 4.10 foram apresentadas o poder dos testes  $LRTO$ ,  $LRTR$ ,  $T$  e  $TR$  considerando a distribuição lognormal multivariada. Em todas situações avaliadas nota-se que o teste  $T$  apresentou poder inferior em relação aos testes  $LRTO$ ,  $LRTR$  e  $TR$  apenas para amostras pequenas  $n = 60$ ,  $p_1 = 20$  e  $p_2 = 10$  em que o valor de poder foi inferior a 83%, para as demais configurações simuladas, o desempenho dos testes  $LRTO$ ,  $LRTR$ ,  $T$  e  $TR$  se igualou e seus valores de poder se aproximaram de 100%.

Tabela 4.10 – Poder para testes *LRT0*, *LRT1*, *T* e *TR* com  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição lognormal multivariada**, ao nível nominal de 5% de significância.

<i>n</i>	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	<i>LRT0</i>	<i>LRT1</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
60	20	10	0,2	0,2	0,9965	1,0000	0,8185	0,9170
			0,2	0,9	0,9945	1,0000	0,8290	0,9140
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
120	40	20	0,2	0,2	0,9990	1,0000	0,9900	0,9980
			0,2	0,9	0,9990	1,0000	0,9900	0,9980
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
240	80	40	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
480	160	80	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
960	320	160	0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Nota-se que não houve diferença entre o poder dos testes nas configurações simuladas para distribuições normais e não normais, os quais ficaram próximos de 1. Li, Chen e Yao (2016) também notaram que o poder dos três testes testados por eles via simulação foram similares sob populações normais e não normais.

### 4.1.3 Desempenho em Relação aos Tamanhos e ao Poder dos Testes para $p_1 + p_2 \geq n$

Nas Tabelas 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, e 4.15, estão apresentados os tamanhos reais e poder dos testes  $T$  e  $TR$  descritos na tabela 3.2, considerando as distribuições: normal multivariada (4.11), normal multivariada contaminada (4.12),  $t$  de *Student* multivariada com  $n = 5$  graus de liberdade (4.13),  $t$  de *Student* multivariada com  $n = 30$  graus de liberdade (4.14) e a lognormal multivariada (4.15) considerando as combinações de  $n$ ,  $p_1$  e  $p_2$  com  $p_1 + p_2 \geq n$ . O comportamento dos testes foi verificado para diferentes níveis de correlação considerando grupos de variáveis com baixa correlação ( $\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,2$ ), um com baixa e outro com alta correlação ( $\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $\rho_2 = 0,2$ ) e grupos de variáveis altamente correlacionadas ( $\rho_1 = 0,9$  e  $\rho_2 = 0,9$ ).

Os valores das taxas de erro tipo I foram comparados com cada nível nominal de significância associado mediante o teste binomial exato ao nível de significância de 1%.

Um resultado esperado para o teste é que ele tenha taxa de erro tipo I igual ao nível de significância, o que é equivalente dizer que o teste é exato. Porém, se o mesmo for considerado conservativo, é aceitável, pois os erros tipos I reais são inferiores aos valores nominais.

Na Tabela 4.11 foi considerada a distribuição normal multivariada, nela observa-se que os testes  $T$  e  $TR$  apresentaram taxa de erro tipo I significativamente inferior ao valor nominal, indicando testes conservativos em todas configurações simuladas, exceto, para os casos em que os grupos possuem alta correlação ( $\rho_1 = 0,9$  e  $\rho_2 = 0,9$ ) apresentaram as taxas de erro tipo I acima do nível de significância nominal, indicando testes liberais. Observa-se que para dados provenientes da distribuição normal multivariada não houve diferença significativa entre os testes  $TR$  robusto e  $T$  não robusto.

O poder dos testes  $T$  e  $TR$  nas configurações em que  $p_1 + p_2 \geq n$  foram inferiores para amostras pequenas  $n = 30$ ,  $p_1 = 20$  e  $p_2 = 10$  sendo seus valores de poder inferiores a 20%, e nas demais configurações simuladas desempenho dos testes se igualou e seus valores de poder se aproximaram de 100%. Para  $p_1 + p_2 > n$  o poder dos testes  $T$  e  $TR$  foram inferiores para amostras pequenas  $n = 30$ ,  $p_1 = 30$  e  $p_2 = 10$  em que os valores de poder foram inferiores a 1%, para  $n = 60$ ,  $p_1 = 40$  e  $p_2 = 30$  os valores foram inferiores a 80%, para amostra maior  $n = 480$ ,  $p_1 = 220$  e  $p_2 = 320$ , o desempenho dos testes se igualou e seus valores de poder se aproximaram de 100%. Observa-se que para a distribuição normal multivariada, os teste se igualaram quanto ao poder.

Jiang, Bai e Zheng (2013) obtiveram controle do erro tipo I no teste usando o critério do traço com matriz teórica aleatória (RMT), embora apresentasse poder abaixo de 60% para amostras  $n \leq 240$ .

O poder dos testes usando o critério do traço  $T_1$  e traço robusto  $T_1^*$ , estudados por Srivastava e Reid (2012), foram abaixo de 80% para amostras de tamanho  $n = 15$  e grupos com  $p_1 \leq 400$  e  $p_2 \leq 600$ . Nos demais casos, estes testes apresentaram poder baixo para grupos pequenos e poder alto para grupos de maior dimensão.

Para os casos em que  $p_1 + p_2 \leq n$  sendo  $p_1$  fixo e  $p_2$  cresce, Li, Chen e Yao (2016) observaram que o poder dos teste  $T_1$  e  $T_2$  são similares, decrescendo à medida que  $p_2$  cresce. Além disso, o poder do teste proposto por eles  $T_n$  foi maior que os dos outros dois testes, decrescendo também mais lentamente.

Tabela 4.11 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( $T$ ) e traço robusto ( $TR$ ) com  $p_1 + p_2 \geq n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição normal multivariada**, ao nível nominal de 5% de significância.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	erro tipo I		poder	
					$T$	$TR$	$T$	$TR$
30	20	10	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,1800	0,1385
			0,2	0,9	0,0040 <sup>-</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	0,1875	0,1460
			0,9	0,2	0,0040 <sup>-</sup>	0,0170 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0915 <sup>+</sup>	0,1105 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
60	40	20	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9400	0,9185
			0,2	0,9	0,0085 <sup>-</sup>	0,0090 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0070 <sup>-</sup>	0,0120 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1225 <sup>+</sup>	0,1340 <sup>+</sup>	0,9380	0,9210
120	80	40	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0085 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0080 <sup>-</sup>	0,0110 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1120 <sup>+</sup>	0,1265 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
240	160	80	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0085 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0095 <sup>-</sup>	0,0095 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1230 <sup>+</sup>	0,1280 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	320	160	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0085 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0045 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1295 <sup>+</sup>	0,1295 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
30	30	10	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0070	0,0030
			0,2	0,9	0,0000 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	0,0050	0,0020
			0,9	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0275 <sup>-</sup>	<b>0,0420</b>	1,0000	1,0000
60	40	30	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,7570	0,7115
			0,2	0,9	0,0020 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,7815	0,7355
			0,9	0,2	0,0045 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0825 <sup>+</sup>	0,0875 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	220	320	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0045 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0030 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1040 <sup>+</sup>	0,1040 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

negrito: o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Pode ser visto na Tabela 4.12, na qual foi considerada a distribuição normal multivariada contaminada, que apenas o teste  $TR$  foi conservativo, ou seja, apresentou taxa de erro tipo I significativamente inferior ao valor nominal, exceto, para os casos em que os grupos possuem alta correlação ( $\rho_1 = 0,9$  e  $\rho_2 = 0,9$ ) o qual apresentou taxas de erro tipo I acima do nível de

significância nominal, indicando teste liberal, e ainda, para os casos:  $n = 30$ ,  $p_1 = 20$ ,  $p_2 = 10$ ,  $\rho_1 = 0,9$ ,  $\rho_2 = 0,2$  e  $n = 30$ ,  $p_1 = 30$ ,  $p_2 = 10$ ,  $\rho_1 = 0,9$ ,  $\rho_2 = 0,9$ , apresentou taxa de erro tipo I igual ao valor nominal, indicando teste exato.

Em todas situações avaliadas o teste  $T$  foi considerado acima do nível de significância nominal, indicando teste liberal, observa-se ainda que, as taxas de erro tipo I aumentam aproximando-se de 1.

Ao comparar o desempenho dos testes  $T$  e  $TR$ , nota-se que a presença de *outliers* trouxe grandes efeitos negativos no desempenho do teste  $T$  e que o desempenho do teste  $TR$  foi muito superior ao  $T$ . Suas taxas de erro tipo I, permaneceram constantes mesmo quando aumentou as dimensões e os tamanhos amostrais.

O poder do teste  $TR$  nas configurações em que  $p_1 + p_2 \geq n$  foi inferior em relação ao teste  $T$  para amostras pequenas  $n = 30$ ,  $p_1 = 20$  e  $p_2 = 10$  sendo seus valores de poder inferiores a 25%, e nas demais configurações simuladas o desempenho dos testes  $T$  e  $TR$  se igualaram e seus valores de poder se aproximaram de 100%. Para  $p_1 + p_2 > n$  o poder do teste  $TR$  foi inferior para amostras pequenas  $n = 30$ ,  $p_1 = 30$  e  $p_2 = 10$  em que os valores de poder foram inferiores a 1%, e para  $n = 60$ ,  $p_1 = 40$  e  $p_2 = 30$  os valores de poder foram inferiores a 80%, para amostra maior  $n = 480$ ,  $p_1 = 220$  e  $p_2 = 320$ , o desempenho dos testes se igualou e seus valores de poder se aproximaram de 100%.

Observa-se que para amostras de uma distribuição normal multivariada contaminada, o teste  $TR$  foi inferior ao teste assintótico  $T$  apenas para amostras pequenas tanto para  $p_1 + p_2 \geq n$  quanto para  $p_1 + p_2 > n$ .

Tabela 4.12 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( $T$ ) e traço robusto ( $TR$ ) com  $p_1 + p_2 \geq n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição normal multivariada contaminada**, ao nível nominal de 5% de significância.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	erro tipo I		poder	
					T	TR	T	TR
30	20	10	0,2	0,2	0,8265 <sup>+</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	0,9665	0,2295
			0,2	0,9	0,7785 <sup>+</sup>	0,0195 <sup>-</sup>	0,9665	0,2295
			0,9	0,2	0,7940 <sup>+</sup>	<b>0,0400</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,6955 <sup>+</sup>	0,1465 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
60	40	20	0,2	0,2	0,9840 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	0,9485
			0,2	0,9	0,9625 <sup>+</sup>	0,0230 <sup>-</sup>	1,0000	0,9475
			0,9	0,2	0,9725 <sup>+</sup>	0,0280 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,9270 <sup>+</sup>	0,1345 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
120	80	40	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,9985 <sup>+</sup>	0,0170 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,9935 <sup>+</sup>	0,1495 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,9935 <sup>+</sup>	0,1495 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
240	160	80	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	0,0210 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	0,0255 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	0,1410 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	320	160	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	0,0195 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	0,0220 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	0,1530 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
30	30	10	0,2	0,2	0,6465 <sup>+</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	0,9250	0,0150
			0,2	0,9	0,6030 <sup>+</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	0,9355	0,0155
			0,9	0,2	0,6370 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	1,0000	0,9995
			0,9	0,9	0,5410 <sup>+</sup>	<b>0,0600</b>	1,0000	1,0000
60	40	30	0,2	0,2	0,9730 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	0,7985
			0,2	0,9	0,9375 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,9995	0,7945
			0,9	0,2	0,9605 <sup>+</sup>	0,0080 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,8965 <sup>+</sup>	0,1130 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	220	320	0,2	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000 <sup>+</sup>	0,1145 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

negrito: o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Nas configurações avaliadas considerando a distribuição  $t$  de *Student* com  $\nu = 5$  graus de liberdade, apresentada na Tabela 4.13, observa-se que a taxa de erro tipo I superou significativamente o valor nominal, indicando que o teste  $T$  apresentou desempenho liberal, exceto para o caso  $n = 30$ ,  $p_1 = 20$ ,  $p_2 = 10$ ,  $\rho_1 = 0,2$ ,  $\rho_2 = 0,2$  que o teste  $T$  apresentou taxa de erro tipo

I igual ao valor nominal, indicando teste exato, e ainda, nos casos  $n = 30$ ,  $p_1 = 30$ ,  $p_2 = 10$ , o teste  $T$  foi conservativo, ou seja, apresentou taxa de erro tipo I significativamente inferior ao valor nominal. Nota-se que, existe grande efeito de falta de robustez, pois a distribuição  $t$  multivariada, principalmente com baixo número de graus de liberdade, tem “caudas” mais pesadas que a normal multivariada.

Pode-se verificar que o teste  $TR$ , controlou a taxa de erro tipo I em nível inferior ou no máximo igual ao valor nominal de 5%, mostrando ser exato em algumas situações, este teste se sobressai em relação ao teste  $T$  por controlar a taxa de erro tipo I, mesmo quando aumenta a dimensão da amostra. Novamente, existe grande efeito de falta de robustez, pois a distribuição  $t$  multivariada, principalmente com baixo número de graus de liberdade, tem “caudas” mais pesadas que a normal multivariada.

Os testes  $T$  e  $TR$  nas configurações em que  $p_1 + p_2 \geq n$  apresentaram poder abaixo de 50% para amostras pequenas  $n = 30$ ,  $p_1 = 20$  e  $p_2 = 10$  e nas demais configurações simuladas o desempenho dos testes se igualou e seus valores de poder se aproximaram de 100%. Para  $p_1 + p_2 > n$  o poder dos testes  $T$  e  $TR$  foram inferiores para amostras pequenas  $n = 30$ ,  $p_1 = 30$  e  $p_2 = 10$  em que os valores de poder foram inferiores a 1%, e para  $n = 60$ ,  $p_1 = 40$  e  $p_2 = 30$  os valores de poder apenas para o teste  $TR$  foi mais baixo, aproximando-se de 80%, para amostra maior  $n = 480$ ,  $p_1 = 220$  e  $p_2 = 320$  o desempenho dos testes se igualaram e seus valores de poder se aproximaram de 100%. Pode-se inferir que para a distribuição  $t$  de student com  $\nu = 5$  graus de liberdade, os testes se igualaram quanto ao poder.

Tabela 4.13 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( $T$ ) e traço robusto ( $TR$ ) com  $p_1 + p_2 \geq n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição  $t$  de Student multivariada** com  $\nu = 5$  graus de liberdade, ao nível nominal de 5% de significância.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	erro tipo I		poder	
					$T$	$TR$	$T$	$TR$
30	20	10	0,2	0,2	<b>0,0605</b>	0,0005 <sup>-</sup>	0,4780	0,2580
			0,2	0,9	0,1160 <sup>+</sup>	0,0280 <sup>-</sup>	0,4775	0,2600
			0,9	0,2	0,1450 <sup>+</sup>	<b>0,0400</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,2030 <sup>+</sup>	0,1420 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
60	40	20	0,2	0,2	0,1660 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,9895	0,9560
			0,2	0,9	0,2270 <sup>+</sup>	<b>0,0390</b>	0,9895	0,9560
			0,9	0,2	0,2180 <sup>+</sup>	<b>0,0465</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,2630 <sup>+</sup>	0,1760 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
120	80	40	0,2	0,2	0,2840 <sup>+</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,2980 <sup>+</sup>	<b>0,0520</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,3015 <sup>+</sup>	<b>0,0560</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,3050 <sup>+</sup>	0,1900 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
240	160	80	0,2	0,2	0,4300 <sup>+</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,3865 <sup>+</sup>	0,0705 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,3890 <sup>+</sup>	<b>0,0690</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,3105 <sup>+</sup>	0,2285 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	320	160	0,2	0,2	0,5975 <sup>+</sup>	0,0020 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,4970 <sup>+</sup>	0,0845 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,4865 <sup>+</sup>	0,0735 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,3545 <sup>+</sup>	0,2135 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
30	30	10	0,2	0,2	0,0120 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0695	0,0085
			0,2	0,9	0,0285 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	0,0750	0,0085
			0,9	0,2	0,0360 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1080 <sup>+</sup>	<b>0,0570</b>	1,0000	1,0000
60	40	30	0,2	0,2	0,0815 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9400	0,7790
			0,2	0,9	0,1365 <sup>+</sup>	0,0125 <sup>-</sup>	0,9400	0,7790
			0,9	0,2	0,1320 <sup>+</sup>	0,0120 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,2110 <sup>+</sup>	0,1335 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	220	320	0,2	0,2	0,3460 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,3485 <sup>+</sup>	0,0345 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,3615 <sup>+</sup>	0,0325 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,3165 <sup>+</sup>	0,1820 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

negrito: o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Taxas de erro tipo I foram apresentadas na Tabela 4.14 considerando a distribuição  $t$  de Student multivariada com  $\nu = 30$ . Nela observa-se que os testes  $T$  e  $TR$  apresentaram taxas de erro tipo I significativamente inferior ao valor nominal, indicando conservativos, exceto para os casos em que os grupos possuem alta correlação ( $\rho_1 = 0,9$  e  $\rho_2 = 0,9$ ) em todas as

configurações de  $n$ ,  $p_1$  e  $p_2$  as quais os testes superaram significativamente o valor nominal, indicando desempenho liberal.

Houve uma melhora do teste  $T$  em relação à distribuição  $t$  multivariada com  $\nu = 5$  graus de liberdade, mas embora os resultados tenham se assemelhados mais com os da normal, ainda estavam distantes da situação de referência, indicando baixa robustez. Ao comparar o desempenhos do teste  $TR$ , observa que o desempenho deste teste foi muito superior ao teste  $T$ . Suas taxas de erro tipo I, embora estivessem acima significativamente do nível nominal de 5% não ultrapassaram expressivamente, como aconteceu com os demais testes, principalmente quando se aumentou as dimensões e os tamanhos amostrais.

Tabela 4.14 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( $T$ ) e traço robusto ( $TR$ ) com  $p_1 + p_2 \geq n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição  $t$  de Student multivariada** com  $\nu = 30$  graus de liberdade, ao nível nominal de 5% de significância.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	erro tipo I		poder	
					$T$	$TR$	$T$	$TR$
30	20	10	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,2020	0,1400
			0,2	0,9	0,0080 <sup>-</sup>	0,0095 <sup>-</sup>	0,2020	0,1400
			0,9	0,2	0,0120 <sup>-</sup>	0,0185 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0980 <sup>+</sup>	0,1275 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
60	40	20	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9485	0,9140
			0,2	0,9	0,0070 <sup>-</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	0,9485	0,9140
			0,9	0,2	0,0135 <sup>-</sup>	0,0120 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1270 <sup>+</sup>	0,1220 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
120	80	40	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0130 <sup>-</sup>	0,0070 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0165 <sup>-</sup>	0,0105 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1435 <sup>+</sup>	0,1365 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
240	160	80	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0170 <sup>-</sup>	0,0140 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0160 <sup>-</sup>	0,0160 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1335 <sup>+</sup>	0,1340 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	320	160	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0125 <sup>-</sup>	0,0110 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0125 <sup>-</sup>	0,0115 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1330 <sup>+</sup>	0,1425 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
30	30	10	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0060	0,0015
			0,2	0,9	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0070	0,0020
			0,9	0,2	0,0010 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0345 <sup>-</sup>	<b>0,0410</b>	1,0000	1,0000
60	40	30	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,8035	0,6920
			0,2	0,9	0,0040 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,8035	0,6920
			0,9	0,2	0,0045 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0955 <sup>+</sup>	0,0975 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	220	320	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0070 <sup>-</sup>	0,0060 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0080 <sup>-</sup>	0,0040 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1155 <sup>+</sup>	0,1200 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

negrito: o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Na Tabela 4.15 foram apresentadas as taxas de erro tipo I considerando a distribuição lognormal multivariada. Pode-se verificar que os testes  $T$  e  $TR$ , controlaram a taxa de erro tipo I em nível inferior ou no máximo igual ao valor nominal de 5%. Em alguns casos, os testes

mostraram-se exatos para amostras pequenas com baixa correlação, foram conservativos em algumas situações.

Tabela 4.15 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( $T$ ) e traço robusto ( $TR$ ) com  $p_1 + p_2 > n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a **distribuição lognormal multivariada**, ao nível nominal de 5% de significância.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder	
					$T$	$TR$	$T$	$TR$
30	20	10	0,2	0,2	0,0060 <sup>-</sup>	<b>0,0405</b>	0,1865	0,2520
			0,2	0,9	<b>0,0590</b>	0,1185 <sup>+</sup>	0,2025	0,2665
			0,9	0,2	0,0940 <sup>+</sup>	0,1425 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0860 <sup>+</sup>	0,1310 <sup>+</sup>	1,0000	0,9995
60	40	20	0,2	0,2	0,0070 <sup>-</sup>	<b>0,0650</b>	0,5430	0,6675
			0,2	0,9	0,0820 <sup>+</sup>	0,1420 <sup>+</sup>	0,5430	0,6675
			0,9	0,2	0,1055 <sup>+</sup>	0,1810 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0795 <sup>+</sup>	0,1270 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
120	80	40	0,2	0,2	0,0055 <sup>-</sup>	<b>0,0690</b>	0,9200	0,9625
			0,2	0,9	0,1080 <sup>+</sup>	0,1395 <sup>+</sup>	0,9200	0,9625
			0,9	0,2	0,1315 <sup>+</sup>	0,1855 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0740 <sup>+</sup>	0,1040 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
240	160	80	0,2	0,2	0,0065 <sup>-</sup>	0,0380 <sup>-</sup>	0,9985	1,0000
			0,2	0,9	0,1085 <sup>+</sup>	0,1020 <sup>+</sup>	0,9985	1,0000
			0,9	0,2	0,1190 <sup>+</sup>	0,1650 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0735 <sup>+</sup>	<b>0,0675</b>	1,0000	1,0000
480	320	160	0,2	0,2	0,0020 <sup>-</sup>	0,0115 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0855 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0825 <sup>+</sup>	0,0960 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0660</b>	0,0280 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
30	30	10	0,2	0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0290	0,0060
			0,2	0,9	0,0160 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	0,0290	0,0060
			0,9	0,2	0,0260 <sup>-</sup>	0,0195 <sup>+</sup>	1,0000	0,9910
			0,9	0,9	0,0695 <sup>+</sup>	<b>0,0495</b>	1,0000	0,9910
60	40	30	0,2	0,2	0,0015 <sup>-</sup>	0,0060 <sup>-</sup>	0,2965	0,2475
			0,2	0,9	<b>0,0585</b>	<b>0,0520</b>	0,2965	0,2475
			0,9	0,2	<b>0,0635</b>	0,0980 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,0730 <sup>+</sup>	0,0930 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	220	320	0,2	0,2	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0855 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,0775 <sup>+</sup>	0,0840 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0580</b>	0,0105 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000

-: o teste é conservativo ao nível de 1% de significância.

+: o teste é liberal ao nível de 1% de significância.

negrito: o teste é exato ao nível de 1% de significância.

Em geral, os novos testes propostos não tiveram um bom desempenho. A exceção são os testes  $T$  e  $TR$  que mostraram controle do erro tipo I e poder suficiente alto no caso de correlações

$\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,2$ . Isso decorre do fato de os demais testes dependerem do determinante e à medida que a correlação aumenta, aproxima-se mais de uma multicolinearidade com isso o determinante se aproxima de zero, fazendo com que o teste de degenerere.

## 4.2 Desempenho em Relação aos Tamanhos e Poder dos Testes *Bootstrap*

Nesta seção serão apresentados os resultados dos desempenhos dos testes *bootstrap* tanto em relação ao tamanho quanto em relação ao poder dos testes. Situações semelhantes aos dos testes assintóticos são consideradas.

### 4.2.1 Desempenho em Relação aos Tamanhos dos Testes *Bootstrap* para $p_1 + p_2 < n$

Na Tabela 4.16, estão apresentados os tamanhos reais estimados dos testes *LRTOB*, *LRTRB*, *TB* e *TRB* descritos na tabela 3.2, considerando a distribuição multivariada normal, considerando as combinações de  $n$ ,  $p_1$  e  $p_2$  com  $p_1 + p_2 < n$ . O comportamento dos testes foi verificado considerando os níveis de correlação.

Pode-se verificar que os testes *bootstrap* paramétricos apresentaram melhor desempenho em relação ao controle de erro tipo I do que os testes assintóticos, podendo ser considerados exatos em todas as configurações simuladas, mesmo para amostras maiores. Nas situações em que os testes não foram exatos, os resultados foram no sentido de apresentarem desempenho conservativo, embora com magnitude dos tamanhos dos testes não expressivamente, embora significativas, menores que o valor nominal (Tabela 4.16).

Estes resultados encontrados para as taxas de erro tipo I permitem inferir que uma sensível melhora foi obtida, isso ocorreu devido ao fato de que todas as taxas de erro tipo I observadas para todas as configurações simuladas foram iguais ou inferiores ao valor nominal de 5%. Assim, conclui-se que a versão *bootstrap* desses testes foram eficientes para o controle da taxa de erro tipo I.

Tabela 4.16 – Taxa de erro tipo I dos testes *LRTOB*, *LRTRB*, *TB* e *TRB* com  $\alpha = 5\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	LRTOB	LRTRB	TB	TRB
60	20	10	0,2	0,2	<b>0,0495</b>	<b>0,0405</b>	<b>0,0395</b>	0,0335 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	<b>0,0476</b>	0,0355 <sup>-</sup>	<b>0,0476</b>	<b>0,0532</b>
			0,9	0,2	<b>0,0550</b>	<b>0,0530</b>	<b>0,0490</b>	<b>0,0520</b>
			0,9	0,9	<b>0,0455</b>	<b>0,0485</b>	<b>0,0505</b>	<b>0,0505</b>
120	40	20	0,2	0,2	<b>0,0470</b>	<b>0,0410</b>	<b>0,0425</b>	<b>0,0395</b>
			0,2	0,9	<b>0,0515</b>	<b>0,0430</b>	<b>0,0515</b>	<b>0,0540</b>
			0,9	0,2	<b>0,0535</b>	<b>0,0440</b>	<b>0,0385</b>	<b>0,0410</b>
			0,9	0,9	<b>0,0590</b>	<b>0,0480</b>	<b>0,0510</b>	<b>0,0510</b>
240	80	40	0,2	0,2	<b>0,0570</b>	<b>0,0564</b>	<b>0,0466</b>	<b>0,0466</b>
			0,2	0,9	<b>0,0460</b>	<b>0,0410</b>	<b>0,0470</b>	<b>0,0455</b>
			0,9	0,2	<b>0,0559</b>	<b>0,0483</b>	<b>0,0445</b>	<b>0,0439</b>
			0,9	0,9	<b>0,0570</b>	<b>0,0536</b>	<b>0,0447</b>	<b>0,0447</b>
480	160	80	0,2	0,2	<b>0,0614</b>	<b>0,0606</b>	0,0382 <sup>-</sup>	<b>0,0404</b>
			0,2	0,9	<b>0,0502</b>	<b>0,0470</b>	0,0340 <sup>-</sup>	0,0340 <sup>-</sup>
			0,9	0,2	<b>0,0519</b>	<b>0,0478</b>	<b>0,0511</b>	<b>0,0503</b>
			0,9	0,9	<b>0,0582</b>	<b>0,0558</b>	<b>0,0439</b>	<b>0,0463</b>
960	320	160	0,2	0,2	<b>0,0504</b>	<b>0,0693</b>	<b>0,0542</b>	0,0793 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	<b>0,0404</b>	<b>0,0404</b>	<b>0,0457</b>	<b>0,0457</b>
			0,9	0,2	<b>0,0437</b>	<b>0,0437</b>	<b>0,0536</b>	<b>0,0536</b>
			0,9	0,9	<b>0,0481</b>	<b>0,0481</b>	<b>0,0525</b>	<b>0,0525</b>

#### 4.2.2 Desempenho em Relação ao Poder dos Testes *Bootstrap* para $p_1 + p_2 < n$

Serão apresentados os poderes dos testes propostos na versão *bootstrap*, avaliados nos mesmos casos usados para avaliar a taxa de erro tipo I. Na Tabela 4.17 foi considerada a distribuição normal multivariada, na qual se nota que os testes *LRTOB* e *LRTRB* apresentaram poder inferior em relação aos testes *TB* e *TRB* apenas para amostras pequenas como em  $n = 60$ ,  $p_1 = 20$  e  $p_2 = 10$ , em que o valor de poder foi inferior a 56%. Para as demais configurações simuladas, o desempenho dos testes se igualou e seus valores de poder se aproximaram de ou foram iguais à 100%.

Estes resultados também foram obtidos nas configurações simuladas para os testes assintóticos considerando a distribuição normal multivariada. A grande vantagem dos testes *bootstrap* em relação aos testes assintóticos, foi o controle quase perfeito do erro tipo I, haja vista que os dois tipos de testes apresentaram valores de poder elevados e na maioria das vezes igual a 100%.

Tabela 4.17 – Poder testes *LRTOB*, *LRTRB*, *TB* e *TRB* com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	LRTOB	LRTRB	TB	TRB
60	20	10	0,2	0,2	0,5570	0,4860	1,0000	0,9990
			0,2	0,9	0,5599	0,4870	1,0000	0,9990
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,9780	0,9790	1,0000	1,0000
120	40	20	0,2	0,2	0,8960	0,8830	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,8970	0,9320	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,9990	0,9990	0,9990	0,9990
240	80	40	0,2	0,9	0,9950	0,9950	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,2	0,9991	0,9991	0,9991	0,9991
480	160	80	0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
960	320	160	0,2	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

### 4.2.3 Desempenho em Relação aos Tamanhos e ao Poder dos Testes *Bootstrap* para $p_1 + p_2 \geq n$

Na Tabela 4.18 estão apresentados os tamanhos reais e poderes dos testes propostos na versão *bootstrap* (*TB* e *TRB*) descritos na tabela 3.2, para  $p_1 + p_2 \geq n$  considerando a distribuição normal multivariada, avaliados nos mesmos casos usados para avaliar a taxa de erro tipo I. Os valores das taxas de erro tipo I foram comparados com cada nível nominal de significância nominal associado mediante o teste binomial exato ao nível de significância de 1%.

Observa-se que os testes *TB* e *TRB* apresentaram taxas de erro tipo I não significativamente diferente do valor nominal, indicando serem testes exatos na maioria das configurações simuladas, exceto, para amostras pequenas  $n = 30$ ,  $60$  e  $120$  para os grupos com baixa correlação ( $\rho_1 = 0,2$  e  $\rho_2 = 0,2$ ), em que apresentaram taxas de erro tipo I abaixo do nível de significância nominal, indicando serem conservativos.

Constatou-se também que para o caso em que  $p_1 + p_2 \geq n$  com  $n = 30$ ,  $p_1 = 30$  e  $p_2 = 10$  os testes *TB* e *TRB* apresentaram taxas de erro tipo I não significativamente diferentes

do valor nominal, indicando testes exatos. Nota-se ainda que não houve diferença expressivas em relação aos desempenhos relativos dos testes *bootstrap TRB* robusto e *TB* não robusto.

O poder dos testes *bootstrap TB* e *TRB* nas configurações simuladas foram iguais na grande maioria dos casos ou muito semelhantes, com diferenças não expressivamente grandes de desempenho e seus valores de poder se aproximaram ou foram iguais à 100%.

Tabela 4.18 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço (*TB*) e traço robusto (*TRB*) com  $p_1 + p_2 \geq n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	erro tipo I				poder	
			$\rho_1$	$\rho_2$	<i>TB</i>	<i>TRB</i>	<i>TB</i>	<i>TRB</i>
30	20	10	0,2	0,2	0,0225 <sup>-</sup>	0,0180 <sup>-</sup>	0,9720	0,9260
			0,2	0,9	<b>0,0420</b>	0,0350 <sup>-</sup>	0,9740	0,9220
			0,9	0,2	0,0360 <sup>-</sup>	0,0370 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0555</b>	<b>0,0575</b>	1,0000	1,0000
60	40	20	0,2	0,2	0,0330 <sup>-</sup>	0,0295 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	<b>0,0400</b>	0,0325 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	<b>0,0460</b>	<b>0,0445</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0580</b>	<b>0,0650</b>	1,0000	1,0000
120	80	40	0,2	0,2	0,0361 <sup>-</sup>	0,0356 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	<b>0,0460</b>	<b>0,0470</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	<b>0,0495</b>	<b>0,0470</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0505</b>	<b>0,0520</b>	1,0000	1,0000
240	160	80	0,2	0,2	<b>0,0439</b>	<b>0,0429</b>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	<b>0,0434</b>	<b>0,0434</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	<b>0,0440</b>	<b>0,0470</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0464</b>	<b>0,0513</b>	1,0000	1,0000
480	320	160	0,2	0,2	<b>0,0464</b>	<b>0,0464</b>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,0094 <sup>-</sup>	0,0104 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	<b>0,0431</b>	0,0031 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0487</b>	0,0115 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
30	30	10	0,2	0,2	0,0245 <sup>-</sup>	0,0175 <sup>-</sup>	0,9840	0,9500
			0,2	0,9	0,0358 <sup>-</sup>	0,0358 <sup>-</sup>	0,9840	0,9500
			0,9	0,2	<b>0,0464</b>	<b>0,0531</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0550</b>	<b>0,0605</b>	1,0000	1,0000
60	40	30	0,2	0,2	<b>0,0385</b>	0,0360 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	<b>0,0420</b>	0,0345 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	<b>0,0405</b>	0,0355 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0530</b>	<b>0,0585</b>	1,0000	1,0000
480	220	320	0,2	0,2	<b>0,0447</b>	<b>0,0447</b>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	<b>0,0477</b>	<b>0,0487</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	<b>0,0488</b>	<b>0,0466</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	<b>0,0469</b>	<b>0,0481</b>	1,0000	1,0000

Convém salientar que o tamanho e dimensão da amostra praticamente não influenciaram o poder e as taxas de erro tipo I dos testes *bootstrap* paramétrico.

Os testes *bootstrap* paramétrico apresentaram resultados superiores quando comparados com os resultados obtidos por Li, Chen e Yao (2016), Jiang, Bai e Zheng (2013) e também Srivastava e Reid (2012) em que os testes apresentaram poder baixo para grupos com menor dimensão e poder alto para grupos de maior dimensão.

### 4.3 Exemplo de Aplicação

Para exemplificar e ilustrar os testes propostos, foram utilizados os dados do projeto BIOSBRASIL testando a hipótese de independência entre os dados químicos dos solos e de variáveis das plantas colhidas nas mesmas parcelas, como descritos na seção 3.5. Foram  $p_1 = 6$  no grupo de variáveis de plantas e  $p_2 = 23$  variáveis no grupo de solos, totalizando  $p_1 + p_2 = 29$  variáveis observadas em  $n = 98$  unidades amostrais. Os resultados dos testes, estatísticas e  $p$ -valor estão apresentados na Tabela seguinte. Considerou-se um nível nominal de significância de 5%.

Tabela 4.19 – Estatísticas e  $p$ -valor dos testes para independência entre dois grupos de variáveis aplicados nos dados químicos de solo e dados de plantas.

Assintóticos				
	LRTO	LRTR	T	TR
$\chi^2$	178,0889	292,0071	241,1077	306,9673
$p$ -valor	0,01217099	$4.37872e^{-13}$	$1,320616e^{-07}$	$7.105427e^{-15}$
Bootstrap				
	LRTOB	LRTRB	TB	TRB
$\chi^2$	178,0889	292,0071	241,1077	306,9673
$p$ -valor	0,02098951	0.0004997501	0.03098451	0.007996002

Como o  $p$ -valor associado ao valor da estatística é menor que 0,05 para todos os testes, foi possível inferir que a hipótese nula de independência deve ser rejeitada e as variáveis dos dois grupos não são independentes. Esse resultado é muito esperado, pois as características das plantas dependem, além da genética, das características ambientais onde elas são cultivadas.

## 5 CONCLUSÃO

Nesta tese os objetivos propostos foram alcançados e obtiveram-se as seguintes conclusões:

1. O estimador robusto *comedian* não foi efetivo ao ser adaptado no teste de razão de verossimilhança (*LRTR*) na presença de *outliers*, com suposição de não normalidade e amostras grandes.
2. Para o teste usando o critério do traço (*TR*) a introdução do estimador robusto *comedian* foi efetivo na presença de *outliers*, na suposição de não normalidade e amostras grandes.
3. Os testes *T* e *TR* para  $p_1 + p_2 < n$ , controlaram para algumas situações de não normalidade o erro tipo I, em níveis iguais ou inferiores aos valores nominais de significância, apresentaram desempenho superior aos testes *LRT0* e *LRTR* que são liberais nas situações de grandes amostras e alta dimensionalidade e também para as situações de não normalidade.
4. O teste *T* para  $p_1 + p_2 \geq n$ , apresentou para as situações de não normalidade o erro tipo I em níveis iguais ou maiores aos dos valores nominais de significância, com desempenho superior aos testes *LRT0* e *LRTR*, que são liberais nas situações de grandes amostras, alta dimensionalidade e também para as situações de não normalidade. A exceção ocorreu nas simulações considerando a distribuição normal multivariada contaminada.
5. O teste *TR* para  $p_1 + p_2 \geq n$ , apresentou para as situações de não normalidade o erro tipo I, em níveis iguais ou maiores aos valores nominais de significância, além de apresentar desempenho superior aos testes *LRT0* e *LRTR* que são liberais em algumas situações de grandes amostras, alta dimensionalidade e também para as situações de não normalidade, exceto para o as simulações considerando a distribuição normal multivariada contaminada.
6. Os testes *LRT0B*, *LRTRB*, *TB* e *TRB* são recomendados para testar a hipótese de independência entre grupos de variáveis, nas situações de grandes amostras e alta dimensionalidade e também para as situações de não normalidade. Os resultados obtidos foram os mesmos no ambiente favorável que é o da distribuição normal multivariada. Isso mostra que os testes são robustos para amostras grandes e alta dimensionalidade. Outras distribuições devem ser contempladas em futuros trabalhos para que esses resultados possam

ser generalizados de forma mais ampla. Além do mais, se  $p_1 + p_2$  forem maiores que  $n$ , então o teste  $TB$  é recomendado.

7. Portanto, recomenda-se a aplicação destes testes em situações reais.

## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, T. W. **An Introduction to Multivariate Statistical Analysis**. 3. ed. John Wiley and Sons Ltd, 2003. 752 p. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/3605073/t\\_w\\_anderson\\_an\\_introduction\\_to\\_multivariate\\_statistical\\_analysis.html](https://www.ebook.de/de/product/3605073/t_w_anderson_an_introduction_to_multivariate_statistical_analysis.html)>.
- BAI, Z. et al. Corrections to lrt on large-dimensional covariance matrix by rmt. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 37, n. 6B, p. 3822–3840, 2009.
- BARBOSA, J. J.; PEREIRA, T. M.; OLIVEIRA, F. L. P. d. Uma proposta para identificação de outliers multivariados. 2018.
- BOX, G. E. A general distribution theory for a class of likelihood criteria. **Biometrika**, JSTOR, v. 36, n. 3/4, p. 317–346, 1949.
- BULHÕES, R. d. S. **Contribuições à análise de outliers em modelos de equações estruturais**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.
- BUSTOS, O. H.; YOHAI, V. J. Robust estimates for arma models. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 81, n. 393, p. 155–168, 1986.
- CAI, T. T.; JIANG, T. et al. Limiting laws of coherence of random matrices with applications to testing covariance structure and construction of compressed sensing matrices. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 39, n. 3, p. 1496–1525, 2011.
- CHEN, S. X.; ZHANG, L.-X.; ZHONG, P.-S. Tests for high-dimensional covariance matrices. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 105, n. 490, p. 810–819, 2010.
- DAMIÃO, J. E. F.; PEREIRA, P. V. Comparação de carteiras otimizadas segundo o critério média-variância formadas através de estimativas robustas de risco e retorno. **São Paulo**, 2007.
- DOMINGUES, K. et al. Estimação de intervalos de confiança via reamostragem bootstrap. i encontro interestadual de engenharia de produção-einepro 2015. **São João da Barra, RJ**, p. 1–12, 2015.
- EFRON, B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. **The Annals of Statistics**, v. 7, n. 1, p. 1–26, jan. 1979.
- FALK, M. On mad and comedians. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, Springer, v. 49, n. 4, p. 615–644, 1997.
- FALK, M. A note on the comedian for elliptical distributions. **Journal of Multivariate Analysis**, Academic Press, v. 67, n. 2, p. 306–317, 1998.
- FERREIRA, D. **Estatística computacional em Java**. 1. ed. Lavras: UFLA, 2013. ISBN 9788581270135.
- FERREIRA, D. F. **Estatística Basica**. 2. ed. Lavras: UFLA, 2009. ISBN 9788587692719.
- FERREIRA, D. F. **Estatística Multivariada**. 3. ed. Lavras: UFLA, 2018. ISBN 8581270638.
- GONÇALVES, E.; MENDES-LOPES, N. **Probabilidades Princípios Teóricos**. 2. ed. Lisboa: Escolar Editora, 2013. ISBN 978-972-592-365-8.

HAMPEL, F. R. A general qualitative definition of robustness. **The Annals of Mathematical Statistics**, JSTOR, p. 1887–1896, 1971.

HAMPEL, F. R. et al. **Robust statistics: the approach based on influence functions**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 196.

JIANG, D.; BAI, Z.; ZHENG, S. Testing the independence of sets of large-dimensional variables. **Science China Mathematics**, Springer, v. 56, n. 1, p. 135–147, 2013.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. Multivariate analysis. **Encyclopedia of Statistical Sciences**, Wiley Online Library, v. 8, 2004.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 6. ed. New Jersey: Pearson, 2007. ISBN 978-0131877153.

JOHNSON, R. W. An introduction to the bootstrap. **Teaching Statistics**, Wiley Online Library, v. 23, n. 2, p. 49–54, 2001.

LANGE, K. L.; LITTLE, R. J.; TAYLOR, J. M. Robust statistical modeling using the t distribution. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis Group, v. 84, n. 408, p. 881–896, 1989.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Some hypothesis tests for the covariance matrix when the dimension is large compared to the sample size. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 30, n. 4, p. 1081–1102, 2002.

LEROY, A. M.; ROUSSEEUW, P. J. Robust regression and outlier detection. **J. Wiley&Sons, New York**, 1987.

LI, J.; CHEN, S. X. et al. Two sample tests for high-dimensional covariance matrices. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 40, n. 2, p. 908–940, 2012.

LI, W.; CHEN, J.; YAO, J. Testing the independence of two random vectors where only one dimension is large. **Statistics**, Informa UK Limited, v. 51, n. 1, p. 141–153, dec 2016.

MANLY, B. F. J. **Randomization, Bootstrap and Monte Carlo Methods in Biology**. Chapman and Hall/CRC, 2006. ISBN 1584885416. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/5507681/bryan\\_f\\_j\\_manly\\_randomization\\_bootstrap\\_and\\_monte\\_carlo\\_methods\\_in\\_biology.html](https://www.ebook.de/de/product/5507681/bryan_f_j_manly_randomization_bootstrap_and_monte_carlo_methods_in_biology.html)>.

MINGOTI, S. A. **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada**. [S.l.]: Editora UFMG, 2017.

OLIVEIRA, I. Cardoso de; FERREIRA, D. Multivariate extension of chi-squared univariate normality test. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 80, n. 5, p. 513–526, 2010.

PALACIOS, Y. D. A. et al. Estimadores de regressão com alto ponto de ruptura e detecção multiplas observações discrepantes. [sn], 1994.

PILLAI, K. et al. Some new test criteria in multivariate analysis. **The Annals of Mathematical Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 26, n. 1, p. 117–121, 1955.

- PILLAI, K. S. **Statistical tables for tests of multivariate hypotheses**. 1. ed. New York, NY: Springer, 1960. ISBN 978-1-4612-5611-3.
- PILLAI, K. S.; JAYACHANDRAN, K. Power comparisons of tests of two multivariate hypotheses based on four criteria. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 54, n. 1-2, p. 195–210, 1967.
- RAMOS, A. W.; HO, L. L. Procedimentos inferenciais em índices de capacidade para dados autocorrelacionados via bootstrap. **Production**, SciELO Brasil, v. 13, n. 3, p. 50–62, 2003.
- ROUSSEEUW, P. J. Multivariate estimation with high breakdown point. **Mathematical statistics and applications**, v. 8, n. 283-297, p. 37, 1985.
- ROUSSEEUW, P. J.; LEROY, A. M. **Robust regression and outlier detection**. 1. ed. Belgium: John Wiley & Sons, 2005. v. 589. ISBN 978-0471488552.
- ROY, S. N. The individual sampling distribution of the maximum, the minimum and any intermediate of the p-statistics on the null-hypothesis. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics**, JSTOR, p. 133–158, 1945.
- SAJESH, T.; SRINIVASAN, M. Outlier detection for high dimensional data using the comedian approach. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor and Francis, v. 82, n. 5, p. 745–757, 2012.
- SAJESH, T.; SRINIVASAN, M. An overview of multiple outliers in multidimensional data. **Sri Lankan Journal of Applied Statistics**, The Institute of Applied Statistics, Sri Lanka, v. 14, n. 2, p. 87–120, 2013.
- SINGH, A. Outliers and robust procedures in some chemometric applications. **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**, Elsevier BV, v. 33, n. 2, p. 75–100, jun 1996.
- SRIVASTAVA, M. S.; REID, N. Testing the structure of the covariance matrix with fewer observations than the dimension. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 112, p. 156–171, 2012.
- TEAM, R. R. C. et al. R: A language and environment for statistical computing. 2018. **R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria**, 2016.
- WILKS, S. S. Certain generalizations in the analysis of variance. **Biometrika**, JSTOR, p. 471–494, 1932.
- WILKS, S. S. On the independence of k sets of normally distributed statistical variables. **Econometrica, Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 309–326, 1935.

**APÊNDICE A – Tabelas - taxas de erro tipo I e poder**

Tabela 1 – Taxa de erro tipo I dos testes LRTO, LRTOR, T e TR com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRTO	LRTOR	T	TR
60	20	10	0,2	0,2	0,1	0,1340 <sup>+</sup>	0,1620 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>
					0,05	0,0750 <sup>+</sup>	0,0915 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>
					0,01	0,0200 <sup>+</sup>	0,0285 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,1450 <sup>+</sup>	0,2075 <sup>+</sup>	0,0710 <sup>-</sup>	0,0795 <sup>-</sup>
					0,05	0,0755 <sup>+</sup>	0,1260 <sup>+</sup>	<b>0,0595</b>	0,0695 <sup>+</sup>
					0,01	0,0018 <sup>-</sup>	0,0040 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	0,0047 <sup>-</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,1565 <sup>+</sup>	0,3405 <sup>-</sup>	<b>0,1180</b>	0,1485 <sup>+</sup>		
			0,05	0,0840 <sup>+</sup>	0,2245 <sup>+</sup>	0,1050 <sup>+</sup>	0,1295 <sup>+</sup>		
			0,01	0,0200 <sup>+</sup>	0,0840 <sup>+</sup>	0,0785 <sup>+</sup>	0,1010 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,1430 <sup>+</sup>	0,3225 <sup>+</sup>	0,2005 <sup>+</sup>	0,2155 <sup>+</sup>		
			0,05	0,0800 <sup>+</sup>	0,2205 <sup>+</sup>	0,1930 <sup>+</sup>	0,2050 <sup>+</sup>		
			0,01	0,0205 <sup>+</sup>	0,0890 <sup>+</sup>	0,1765 <sup>+</sup>	0,1890 <sup>+</sup>		
120	40	20	0,2	0,2	0,1	0,2155 <sup>+</sup>	0,2195 <sup>+</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	0,0035 <sup>-</sup>
					0,05	0,1325 <sup>+</sup>	0,1355 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>
					0,01	0,0375 <sup>+</sup>	0,0385 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>
			0,9	0,2	0,1	0,2235 <sup>+</sup>	0,3270 <sup>+</sup>	<b>0,1035</b>	<b>0,1130</b>
					0,05	0,1290 <sup>+</sup>	0,2165 <sup>+</sup>	0,0975 <sup>+</sup>	0,1045 <sup>+</sup>
					0,01	0,0350 <sup>+</sup>	0,0715 <sup>+</sup>	0,0850 <sup>+</sup>	0,0915 <sup>+</sup>
	0,2	0,9	0,1	0,2055 <sup>+</sup>	0,2350 <sup>+</sup>	<b>0,0900</b>	<b>0,0875</b>		
			0,05	0,1195 <sup>+</sup>	0,1400 <sup>+</sup>	0,0830 <sup>+</sup>	0,0805 <sup>+</sup>		
			0,01	0,0335 <sup>+</sup>	0,0425 <sup>+</sup>	0,0755 <sup>+</sup>	0,0740 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,1980 <sup>+</sup>	0,3015 <sup>+</sup>	0,2065 <sup>+</sup>	0,2165 <sup>+</sup>		
			0,05	0,1135 <sup>+</sup>	0,1945 <sup>+</sup>	0,2025 <sup>+</sup>	0,2115 <sup>+</sup>		
			0,01	0,0350 <sup>+</sup>	0,0710 <sup>+</sup>	0,1960 <sup>+</sup>	0,2040 <sup>+</sup>		
240	80	40	0,2	0,2	0,1	0,3585 <sup>+</sup>	0,3590 <sup>+</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	0,0035 <sup>-</sup>
					0,05	0,2295 <sup>+</sup>	0,2300 <sup>+</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	0,0035 <sup>-</sup>
					0,01	0,0785 <sup>+</sup>	0,0785 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,3575 <sup>+</sup>	0,3660 <sup>+</sup>	<b>0,0900</b>	<b>0,0895</b>
					0,05	0,2345 <sup>+</sup>	0,2395 <sup>+</sup>	0,0860 <sup>+</sup>	0,0860 <sup>+</sup>
					0,01	0,0800 <sup>+</sup>	0,0845 <sup>+</sup>	0,0800 <sup>+</sup>	0,0810 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,3265	0,3520 <sup>+</sup>	<b>0,1030</b>	<b>0,1030</b>		
			0,05	0,2095 <sup>+</sup>	0,2310 <sup>+</sup>	0,0995 <sup>+</sup>	0,0995 <sup>+</sup>		
			0,01	0,0690 <sup>+</sup>	0,0825 <sup>+</sup>	0,0910 <sup>+</sup>	0,0935 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,3265 <sup>+</sup>	0,3485 <sup>+</sup>	0,2180 <sup>+</sup>	0,2195 <sup>+</sup>		
			0,05	0,2095 <sup>+</sup>	0,2245 <sup>+</sup>	0,2165 <sup>+</sup>	0,2180 <sup>+</sup>		
			0,01	0,0690 <sup>+</sup>	0,0795 <sup>+</sup>	0,2110 <sup>+</sup>	0,2130 <sup>+</sup>		

Continuação da Tabela 1:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRT0	LRTOR	T	TR
480	160	80	0,2	0,2	0,1	0,6825 <sup>+</sup>	0,6825 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>
					0,05	0,5595 <sup>+</sup>	0,5595 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>
					0,01	0,2815 <sup>+</sup>	0,2815 <sup>+</sup>	0,0020 <sup>-</sup>	0,0020 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,6815 <sup>+</sup>	0,6825 <sup>+</sup>	<b>0,0945</b>	<b>0,0945</b>
					0,05	0,5430 <sup>+</sup>	0,5440 <sup>+</sup>	0,0935 <sup>+</sup>	0,0935 <sup>+</sup>
					0,01	0,3000 <sup>+</sup>	0,3015 <sup>+</sup>	0,0870 <sup>+</sup>	0,0870 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	0,6680 <sup>+</sup>	0,6715 <sup>+</sup>	<b>0,0940</b>	<b>0,0940</b>
					0,05	0,5315 <sup>+</sup>	0,5335 <sup>+</sup>	0,0910 <sup>+</sup>	0,0910 <sup>+</sup>
					0,01	0,2870 <sup>+</sup>	0,2885 <sup>+</sup>	0,0875 <sup>+</sup>	0,0870 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	0,6825 <sup>+</sup>	0,6840 <sup>+</sup>	0,2305 <sup>+</sup>	0,2300 <sup>+</sup>
					0,05	0,5595 <sup>+</sup>	0,5605 <sup>+</sup>	0,2280 <sup>+</sup>	0,2275 <sup>+</sup>
					0,01	0,2815 <sup>+</sup>	0,2820 <sup>+</sup>	0,2255 <sup>+</sup>	0,2250 <sup>+</sup>
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRT0	LRTOR	T	TR
960	320	160	0,2	0,2	0,1	0,9815 <sup>+</sup>	0,9815 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>
					0,05	0,9535 <sup>+</sup>	0,9535 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>
					0,01	0,8505 <sup>+</sup>	0,8505 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,9850 <sup>+</sup>	0,9850 <sup>+</sup>	<b>0,0835</b>	<b>0,0835</b>
					0,05	0,9645 <sup>+</sup>	0,9645 <sup>+</sup>	0,0825 <sup>+</sup>	0,0825 <sup>+</sup>
					0,01	0,8705 <sup>+</sup>	0,8705 <sup>+</sup>	0,0815 <sup>+</sup>	0,0815 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	0,9815 <sup>+</sup>	0,9815 <sup>+</sup>	0,0815 <sup>-</sup>	0,0815 <sup>-</sup>
					0,05	0,9640 <sup>+</sup>	0,9640 <sup>+</sup>	0,0805 <sup>+</sup>	0,0805 <sup>+</sup>
					0,01	0,8645 <sup>+</sup>	0,8645 <sup>+</sup>	0,0790 <sup>+</sup>	0,0790 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	0,9815 <sup>+</sup>	0,9815 <sup>+</sup>	0,2165 <sup>+</sup>	0,2165 <sup>+</sup>
					0,05	0,9640 <sup>+</sup>	0,9640 <sup>+</sup>	0,2155 <sup>+</sup>	0,2155 <sup>+</sup>
					0,01	0,8645 <sup>+</sup>	0,8645 <sup>+</sup>	0,2135 <sup>+</sup>	0,2135 <sup>+</sup>

Tabela 2 – Poder dos dos testes LRTO, LRTOR, T e TR com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRTO	LRTOR	T	TR
60	20	10	0,2	0,2	0,1	0,7670	0,7810	0,9985	0,9985
					0,05	0,6410	0,6630	0,9980	0,9975
					0,01	0,3765	0,4020	0,9960	0,9935
			0,9	0,9	0,1	0,7855	0,8005	0,9975	0,9965
					0,05	0,6625	0,6775	0,9975	0,9965
					0,01	0,3890	0,4100	0,9945	0,9930
	0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
120	40	20	0,2	0,2	0,1	0,9860	0,9860	1,0000	1,0000
					0,05	0,9665	0,9680	1,0000	1,0000
					0,01	0,8660	0,8670	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,9825	0,9830	1,0000	1,0000
					0,05	0,9600	0,9595	1,0000	1,0000
					0,01	0,8625	0,8650	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
240	80	40	0,2	0,2	0,1	0,9995	0,9995	1,0000	1,0000
					0,05	0,9995	0,9995	1,0000	1,0000
					0,01	0,9975	0,9975	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		

Continuação da Tabela 2:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRTO	LRTOR	T	TR
480	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRTO	LRTOR	T	TR
960	320	160	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 3 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço (T) e traço robusto (TR) com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder		
						T	TR	T	TR	
30	20	10			0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,2155	0,1685	
					0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,1800	0,1385	
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,1220	0,0920	
					0,1	0,0045 <sup>-</sup>	0,0050 <sup>-</sup>	0,2180	0,1725	
					0,2	0,0040 <sup>-</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	0,1875	0,1460	
					0,01	0,0025 <sup>-</sup>	0,0020 <sup>-</sup>	0,1285	0,0965	
		0,9	0,2			0,1	0,0060 <sup>-</sup>	0,0175 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	0,0040 <sup>-</sup>	0,0170 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,01	0,0020 <sup>-</sup>	<b>0,0105</b>	1,0000	1,0000
						0,1	<b>0,1005</b>	0,1190 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	0,0915 <sup>+</sup>	0,1105 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
						0,01	0,0795 <sup>+</sup>	0,1005 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
60	40	20			0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9465	0,9280	
					0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9400	0,9185	
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9215	0,8945	
					0,1	0,0105 <sup>-</sup>	0,0100 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,0085 <sup>-</sup>	0,0090 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,01	<b>0,0060</b>	<b>0,0070</b>	1,0000	1,0000	
		0,9	0,2			0,1	0,0100 <sup>-</sup>	0,0140 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	0,0070 <sup>-</sup>	0,0120 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,01	0,0040 <sup>-</sup>	<b>0,0085</b>	1,0000	1,0000
						0,1	0,1265 <sup>+</sup>	0,1375 <sup>+</sup>	0,9455	0,9305
						0,05	0,1225 <sup>+</sup>	0,1340 <sup>+</sup>	0,9380	0,9210
						0,01	0,1180 <sup>+</sup>	0,1230 <sup>+</sup>	0,9155	0,8945
120	80	40			0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,1	0,0095 <sup>-</sup>	0,0090 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,0085 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,01	<b>0,0085</b>	<b>0,0085</b>	1,0000	1,0000	
		0,9	0,2			0,1	0,0080 <sup>-</sup>	0,0115 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	0,0080 <sup>-</sup>	0,0110 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,01	<b>0,0065</b>	<b>0,0100</b>	1,0000	1,0000
						0,1	<b>0,1145</b>	0,1285 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	0,1120 <sup>+</sup>	0,1265 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
						0,01	0,1105 <sup>+</sup>	0,1225 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

Continuação da Tabela 3:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder	
						T	TR	T	TR
240	160	80	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	0,0085 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0085 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0085</b>	<b>0,0085</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,0095 <sup>-</sup>	0,0095 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0095 <sup>-</sup>	0,0095 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0090</b>	<b>0,0090</b>	1,0000	1,0000
					0,1	0,1240 <sup>+</sup>	0,1285 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1230 <sup>+</sup>	0,1280 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1215 <sup>+</sup>	0,1255 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	320	160	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	0,0085 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0085 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0080</b>	<b>0,0080</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,0045 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0045 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0045 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	0,1310 <sup>+</sup>	0,1310 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1295 <sup>+</sup>	0,1295 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1290 <sup>+</sup>	0,1290 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
30	30	10	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0075	0,0035
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0070	0,0030
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0045	0,0025
					0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	0,0060	0,0020
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	0,0050	0,0020
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0020	0,0010
			0,9	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	0,0290 <sup>-</sup>	0,0435 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0275 <sup>-</sup>	<b>0,0420</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0235 <sup>-</sup>	0,0365 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000

Continuação da Tabela 3:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder	
						T	TR	T	TR
60	40	30	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,7820	0,7390
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,7570	0,7115
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,7285	0,6790
					0,1	0,0030 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,8025	0,7575
					0,05	0,0020 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,7815	0,7355
					0,01	0,0010 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,7355	0,6910
			0,9	0,2	0,1	0,0050 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0045 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0045 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	<b>0,0860</b>	<b>0,0890</b>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0825 <sup>+</sup>	0,0875 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0775 <sup>+</sup>	0,0840 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	220	320	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	0,0045 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0045 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0040 <sup>-</sup>	0,0040 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,0030 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0030 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0030 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	<b>0,1045</b>	<b>0,1045</b>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1040 <sup>+</sup>	0,1040 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1030 <sup>+</sup>	0,1030 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

Tabela 4 – Erro tipo I dos testes *LRT0*, *LRTOR*, *T* e *TR* com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada contaminada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRT0	LRTOR	T	TR
60	20	10	0,2	0,2	0,1	0,7685 <sup>+</sup>	0,6835 <sup>+</sup>	0,9935 <sup>+</sup>	0,0395 <sup>-</sup>
					0,05	0,6575 <sup>+</sup>	0,5785 <sup>+</sup>	0,9925 <sup>+</sup>	0,0330 <sup>-</sup>
					0,01	0,4040 <sup>+</sup>	0,3725 <sup>+</sup>	0,9910 <sup>+</sup>	0,0215 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,5205 <sup>+</sup>	0,6975 <sup>+</sup>	0,9800 <sup>+</sup>	0,1825 <sup>+</sup>
					0,05	0,3850 <sup>+</sup>	0,5875 <sup>+</sup>	0,9795 <sup>+</sup>	0,1590 <sup>+</sup>
					0,01	0,1765 <sup>+</sup>	0,3845 <sup>+</sup>	0,9770 <sup>+</sup>	0,1235 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,5075 <sup>+</sup>	0,6980 <sup>+</sup>	0,9715 <sup>+</sup>	0,1610 <sup>+</sup>		
			0,05	0,3905 <sup>+</sup>	0,5970 <sup>+</sup>	0,9705 <sup>+</sup>	0,1455 <sup>+</sup>		
			0,01	0,1880 <sup>+</sup>	0,3965 <sup>+</sup>	0,9685 <sup>+</sup>	0,1140 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,4265 <sup>+</sup>	0,7310 <sup>+</sup>	0,9475 <sup>+</sup>	0,2975 <sup>+</sup>		
			0,05	0,3050 <sup>+</sup>	0,6365 <sup>+</sup>	0,9440 <sup>+</sup>	0,2890 <sup>+</sup>		
			0,01	0,1225 <sup>+</sup>	0,4185 <sup>+</sup>	0,9410 <sup>+</sup>	0,2695 <sup>+</sup>		
120	40	20	0,2	0,2	0,1	0,9210 <sup>+</sup>	0,9505 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0205 <sup>-</sup>
					0,05	0,8615 <sup>+</sup>	0,9180 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0170 <sup>-</sup>
					0,01	0,6930 <sup>+</sup>	0,8035 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0095</b>
			0,2	0,9	0,1	0,7770 <sup>+</sup>	0,9595 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1610 <sup>+</sup>
					0,05	0,6420 <sup>+</sup>	0,9315 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1530 <sup>+</sup>
					0,01	0,3880 <sup>+</sup>	0,8275 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1325 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,7995 <sup>+</sup>	0,9675 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2290 <sup>+</sup>		
			0,05	0,7040 <sup>+</sup>	0,9410 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2160 <sup>+</sup>		
			0,01	0,4590 <sup>+</sup>	0,8525 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1970 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,6625 <sup>+</sup>	0,9520 <sup>+</sup>	0,9945 <sup>+</sup>	0,2870 <sup>+</sup>		
			0,05	0,5225 <sup>+</sup>	0,9240 <sup>+</sup>	0,9940 <sup>+</sup>	0,2800 <sup>+</sup>		
			0,01	0,2900 <sup>+</sup>	0,8265 <sup>+</sup>	0,9940 <sup>+</sup>	0,2715 <sup>+</sup>		
240	80	40	0,2	0,2	0,1	0,9980 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0175 <sup>-</sup>
					0,05	0,9930 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0165 <sup>-</sup>
					0,01	0,9595 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0145</b>
			0,2	0,9	0,1	0,9640 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1490 <sup>+</sup>
					0,05	0,9325 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1415 <sup>+</sup>
					0,01	0,8010 <sup>+</sup>	0,9990 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1310 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,9760 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1615 <sup>+</sup>		
			0,05	0,9545 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1555 <sup>+</sup>		
			0,01	0,8600 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1445 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,9390 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2665 <sup>+</sup>		
			0,05	0,8855 <sup>+</sup>	0,9990 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2625 <sup>+</sup>		
			0,01	0,7160 <sup>+</sup>	0,9990 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2585 <sup>+</sup>		

Continuação da Tabela 4:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRT0	LRTOR	T	TR
480	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0150 <sup>-</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0135 <sup>-</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0125</b>
			0,2	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1455 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1445 <sup>+</sup>
					0,01	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1405 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1600 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1565 <sup>+</sup>
					0,01	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1545 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2500 <sup>+</sup>
					0,05	0,9990 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2495 <sup>+</sup>
					0,01	0,9990 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2470 <sup>+</sup>
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRT0	LRTOR	T	TR
960	320	160	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0140 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0135 <sup>-</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0125</b>
			0,2	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2715 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2710 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2700 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1395 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1375 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1355 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1440 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1430 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1415 <sup>+</sup>

Tabela 5 – Poder para testes  $LRTO$ ,  $LRTOR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$
60	20	10	0,2	0,2	0,1	0,9995	0,9765	1,0000	0,9980
					0,05	0,9970	0,9505	1,0000	0,9970
					0,01	0,9850	0,8505	1,0000	0,9950
			0,2	0,9	0,1	0,9985	0,9745	1,0000	0,9985
					0,05	0,9950	0,9495	1,0000	0,9980
					0,01	0,9795	0,8495	1,0000	0,9950
	0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
120	40	20	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	0,9995	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	0,9995	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
240	80	40	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		

Continuação da Tabela 5:

<i>n</i>	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>p</i> <sub>2</sub>	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>L</i> <i>R</i> <i>T</i> <i>O</i>	<i>L</i> <i>R</i> <i>T</i> <i>O</i> <i>R</i>	<i>T</i>	<i>T</i> <i>R</i>
480	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
<i>n</i>	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>p</i> <sub>2</sub>	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>L</i> <i>R</i> <i>T</i> <i>O</i>	<i>L</i> <i>R</i> <i>T</i> <i>O</i> <i>R</i>	<i>T</i>	<i>T</i> <i>R</i>
960	320	160	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 6 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço (T) e traço robusto (TR) com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 > n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada contaminada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder	
						T	TR	T	TR
30	20	10	0,2	0,2	0,1	0,8365 <sup>+</sup>	0,0040 <sup>-</sup>	0,9680	0,2650
					0,05	0,8265 <sup>+</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	0,9665	0,2295
					0,01	0,8105 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,9630	0,1780
			0,2	0,9	0,1	0,7860 <sup>+</sup>	0,0225 <sup>-</sup>	0,9680	0,2650
					0,05	0,7785 <sup>+</sup>	0,0195 <sup>-</sup>	0,9665	0,2295
					0,01	0,7570 <sup>+</sup>	<b>0,0145</b>	0,9630	0,1780
	0,9	0,2	0,1	0,7985 <sup>+</sup>	0,0485 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,7940 <sup>+</sup>	<b>0,0400</b>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,7715 <sup>+</sup>	0,0335 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	0,7055 <sup>+</sup>	0,1550 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,6955 <sup>+</sup>	0,1465 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,6760 <sup>+</sup>	0,1360 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
n	P1	P2	rho1	rho2	alpha	TA	TRA	TA	TRA
60	40	20	0,2	0,2	0,1	0,9850 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	0,9530
					0,05	0,9840 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	0,9485
					0,01	0,9820 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	0,9290
			0,2	0,9	0,1	0,9630 <sup>+</sup>	0,0240 <sup>-</sup>	1,0000	0,9555
					0,05	0,9625 <sup>+</sup>	0,0230 <sup>-</sup>	1,0000	0,9475
					0,01	0,9610 <sup>+</sup>	0,0210 <sup>+</sup>	1,0000	0,9325
	0,9	0,2	0,1	0,9735 <sup>+</sup>	0,0305 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,9725 <sup>+</sup>	0,0280 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,9705 <sup>+</sup>	0,0215 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	0,9285 <sup>+</sup>	0,1380 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,9270 <sup>+</sup>	0,1345 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,9250 <sup>+</sup>	0,1305 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
n	P1	P2	rho1	rho2	alpha	TA	TRA	TA	TRA
120	80	40	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,9985 <sup>+</sup>	0,0190 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,9985 <sup>+</sup>	0,0170 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,9985 <sup>+</sup>	<b>0,0150</b>	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,1	0,9935 <sup>+</sup>	0,1505 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,9935 <sup>+</sup>	0,1495 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,9935 <sup>+</sup>	0,1455 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	0,9935 <sup>+</sup>	0,1505 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,9935 <sup>+</sup>	0,1495 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,9935 <sup>+</sup>	0,1455 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		

Continuação da Tabela 6:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder	
						T	TR	T	TR
240	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0220 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0210 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,0190 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0265 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0255 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,0235 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,1410 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,1410 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,1400 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	P1	P2	rho1	rho2	alpha	TA	TRA	TA	TRA
480	320	160	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0195 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0195 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,0185 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0235 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0220 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,0220 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,1535 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,1530 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,1525 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	P1	P2	rho1	rho2	alpha	TA	TRA	TA	TRA
30	30	10	0,2	0,2	0,1	0,6635 <sup>+</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	0,9270	0,0175
					0,05	0,6465 <sup>+</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	0,9250	0,0150
					0,01	0,6175 <sup>+</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	0,9185	0,0090
					0,1	0,6115 <sup>+</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	0,9370	0,0165
					0,05	0,6030 <sup>+</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	0,9355	0,0155
					0,01	0,5800 <sup>+</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	0,9300	0,0110
			0,9	0,2	0,1	0,6505 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	1,0000	0,9995
					0,05	0,6370 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	1,0000	0,9995
					0,01	0,6160 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	1,0000	0,9995
					0,1	0,5490 <sup>+</sup>	0,0630 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,5410 <sup>+</sup>	<b>0,0600</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,5215 <sup>+</sup>	0,0500 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000

Continuação da Tabela 6:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder	
						T	TR	T	TR
60	40	30	0,2	0,2	0,1	0,9750 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	0,8180
					0,05	0,9730 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	0,7985
					0,01	0,9685 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	0,7655
					0,1	0,9410 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,9995	0,8105
					0,05	0,9375 <sup>+</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,9995	0,7945
					0,01	0,9355 <sup>+</sup>	0,0020 <sup>-</sup>	0,9995	0,7480
			0,9	0,2	0,1	0,9615 <sup>+</sup>	0,0090 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,9605 <sup>+</sup>	0,0080 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,9595 <sup>+</sup>	<b>0,0075</b>	1,0000	1,0000
					0,1	0,8990 <sup>+</sup>	<b>0,1145</b>	1,0000	1,0000
					0,05	0,8965 <sup>+</sup>	0,1130 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,8940 <sup>+</sup>	0,1085 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	P1	P2	rho1	rho2	alpha	TA	TRA	TA	TRA
480	220	320	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0055</b>	1,0000	1,0000
					0,1	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,1159</b>	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	0,1145 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	0,1140 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

Tabela 7 – Erro tipo I dos testes  $LRTO$ ,  $LRTOR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição t de student multivariada com  $v = 5$  graus de liberdade

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$
60	20	10	0,2	0,2	0,1	0,9700 <sup>+</sup>	0,9920 <sup>+</sup>	0,6445 <sup>+</sup>	0,2600 <sup>+</sup>
					0,05	0,9475 <sup>+</sup>	0,9830 <sup>+</sup>	0,5830 <sup>+</sup>	0,1955 <sup>+</sup>
					0,01	0,8510 <sup>+</sup>	0,9455 <sup>+</sup>	0,4865 <sup>+</sup>	0,1135 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,9690 <sup>+</sup>	0,9895 <sup>+</sup>	0,5340 <sup>+</sup>	0,3490 <sup>+</sup>
					0,05	0,9435 <sup>+</sup>	0,9790 <sup>+</sup>	0,5025 <sup>+</sup>	0,3130 <sup>+</sup>
					0,01	0,8485 <sup>+</sup>	0,9400 <sup>+</sup>	0,4495 <sup>+</sup>	0,2495 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,9680 <sup>+</sup>	0,9940 <sup>+</sup>	0,5200 <sup>+</sup>	0,3180 <sup>+</sup>		
			0,05	0,9350 <sup>+</sup>	0,9855 <sup>+</sup>	0,4860 <sup>+</sup>	0,2880 <sup>+</sup>		
			0,01	0,8355 <sup>+</sup>	0,9585 <sup>+</sup>	0,4355 <sup>+</sup>	0,2305 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,9675 <sup>+</sup>	0,9920 <sup>+</sup>	0,3785 <sup>+</sup>	0,2840 <sup>+</sup>		
			0,05	0,9345 <sup>+</sup>	0,9855 <sup>+</sup>	0,3645 <sup>+</sup>	0,2715 <sup>+</sup>		
			0,01	0,8455 <sup>+</sup>	0,9595 <sup>+</sup>	0,3460 <sup>+</sup>	0,2580 <sup>+</sup>		
120	40	20	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9215 <sup>+</sup>	0,5135 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9025 <sup>+</sup>	0,4495 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8635 <sup>+</sup>	0,3200 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4120 <sup>+</sup>	0,2925 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4085 <sup>+</sup>	0,2890 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,3940 <sup>+</sup>	0,2825 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,7180 <sup>+</sup>	0,4130 <sup>+</sup>		
			0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,6950 <sup>+</sup>	0,3865 <sup>+</sup>		
			0,01	0,9990 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,6640 <sup>+</sup>	0,3430 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,6760 <sup>+</sup>	0,3730 <sup>+</sup>		
			0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,6560 <sup>+</sup>	0,3500 <sup>+</sup>		
			0,01	0,9995 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,6260 <sup>+</sup>	0,3055 <sup>+</sup>		
240	80	40	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9950 <sup>+</sup>	0,7995 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9950 <sup>+</sup>	0,7605 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9905 <sup>+</sup>	0,6870 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4785 <sup>+</sup>	0,3380 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4745 <sup>+</sup>	0,3355 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4650 <sup>+</sup>	0,3300 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8525 <sup>+</sup>	0,4760 <sup>+</sup>		
			0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8440 <sup>+</sup>	0,4635 <sup>+</sup>		
			0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8260 <sup>+</sup>	0,4335 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8300 <sup>+</sup>	0,4300 <sup>+</sup>		
			0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8260 <sup>+</sup>	0,4185 <sup>+</sup>		
			0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,8165 <sup>+</sup>	0,3940 <sup>+</sup>		

Continuação da Tabela 7:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$
480	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9730 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9680 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9570 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4810 <sup>+</sup>	0,3350 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4795 <sup>+</sup>	0,3340 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,4775 <sup>+</sup>	0,3330 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9730 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9680 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9570 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9280 <sup>+</sup>	0,4630 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9255 <sup>+</sup>	0,4535 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,9215 <sup>+</sup>	0,4395 <sup>+</sup>
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$
960	320	160	0,2	0,2	0,1	0,9060 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0090 <sup>+</sup>	0,0560 <sup>-</sup>
					0,05	0,8850 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0080 <sup>-</sup>	<b>0,0550</b>
					0,01	0,8190 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0070</b>	0,0530 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,9330 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0840</b>	0,2260 <sup>+</sup>
					0,05	0,8980 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0830 <sup>+</sup>	0,2250 <sup>+</sup>
					0,01	0,8310 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0790 <sup>+</sup>	0,2230 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	0,9145 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1900 <sup>+</sup>	0,1885 <sup>+</sup>
					0,05	0,8845 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1080 <sup>+</sup>	0,1865 <sup>+</sup>
					0,01	0,8155 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1075 <sup>+</sup>	0,1820 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	0,9160 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2200 <sup>+</sup>	0,2680 <sup>+</sup>
					0,05	0,8870 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2200 <sup>+</sup>	0,2680 <sup>+</sup>
					0,01	0,8150 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2190 <sup>+</sup>	0,2660 <sup>+</sup>

Tabela 8 – Poder para testes  $LRTO$ ,  $LRTOR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição  $t$  multivariada  $v = 5$ .

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$
60	20	10	0,2	0,2	0,05	0,9990	0,9980	1,0000	1,0000
					0,01	0,9925	0,9970	0,9995	0,9985
					0,1	1,0000	0,9995	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,05	0,9980	0,9995	1,0000	0,9990
					0,01	0,9945	0,9980	0,9995	0,9965
					0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
120	40	20	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
240	80	40	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		

Continuação da Tabela 8:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>LRTO</i>	<i>LRTOR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
480	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n	P1	P2	rho1	rho2	alpha	LRTO	LRTOR	T	TR
960	320	160	0,2	0,2	0,1	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
					0,05	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
					0,01	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
					0,05	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
					0,01	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 9 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço (T) e traço robusto (TR) com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 > n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição t de student multivariada com  $\nu = 5$  graus de liberdade.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder	
						T	TR	T	TR
30	20	10	0,2	0,2	0,1	0,0705 <sup>-</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	0,5290	0,2915
					0,05	<b>0,0605</b>	0,0005 <sup>-</sup>	0,4780	0,2580
					0,01	0,0475 <sup>+</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	0,3930	0,1790
					0,1	0,1305 <sup>+</sup>	0,0365 <sup>-</sup>	0,5215	0,3130
					0,05	0,1160 <sup>+</sup>	0,0280 <sup>-</sup>	0,4775	0,2600
					0,01	0,0970 <sup>+</sup>	<b>0,0165</b>	0,4020	0,1765
			0,9	0,2	0,1	0,1585 <sup>+</sup>	0,0480 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1450 <sup>+</sup>	<b>0,0400</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1205 <sup>+</sup>	0,0245 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	0,2140 <sup>+</sup>	0,1480 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,2030 <sup>+</sup>	0,1420 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1870 <sup>+</sup>	0,1255 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
60	40	20	0,2	0,2	0,1	0,1800 <sup>+</sup>	0,0020 <sup>-</sup>	0,9920	0,9620
					0,05	0,1660 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	0,9895	0,9560
					0,01	0,1430 <sup>+</sup>	<b>0,0010</b>	0,9845	0,9385
					0,1	0,2335 <sup>+</sup>	0,0435 <sup>-</sup>	0,9920	0,9620
					0,05	0,2270 <sup>+</sup>	<b>0,0390</b>	0,9895	0,9560
					0,01	0,2105 <sup>+</sup>	0,0330 <sup>+</sup>	0,9845	0,9385
			0,9	0,2	0,1	0,2285 <sup>+</sup>	0,0500 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,2180 <sup>+</sup>	<b>0,0465</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1985 <sup>+</sup>	0,0390 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	0,2675 <sup>+</sup>	0,1815 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,2630 <sup>+</sup>	0,1760 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,2540 <sup>+</sup>	<b>0,1700</b>	1,0000	1,0000
120	80	40	0,2	0,2	0,1	0,2935 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,2840 <sup>+</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,2670 <sup>+</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	0,3050 <sup>+</sup>	0,0535 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,2980 <sup>+</sup>	<b>0,0520</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,2835 <sup>+</sup>	0,0475 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,3070 <sup>+</sup>	0,0575 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3015 <sup>+</sup>	<b>0,0560</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,2870 <sup>+</sup>	0,0515 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,1	0,3095 <sup>+</sup>	0,1930 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3050 <sup>+</sup>	0,1900 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,2985 <sup>+</sup>	0,1875 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

Continuação da Tabela 9:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
240	160	80	0,2	0,2	0,1	0,4375 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,4300 <sup>+</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,4145 <sup>+</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,3890 <sup>+</sup>	0,0710 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3865 <sup>+</sup>	0,0705 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,3815 <sup>+</sup>	0,0680 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,3955 <sup>+</sup>	0,0730 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3890 <sup>+</sup>	<b>0,0690</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,3830 <sup>+</sup>	0,0665 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,3115 <sup>+</sup>	0,2290 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3105 <sup>+</sup>	0,2285 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,3085 <sup>+</sup>	0,2255 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
480	320	160	0,2	0,2	0,1	0,6010 <sup>+</sup>	0,0020 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,5975 <sup>+</sup>	0,0020 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,5875 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,4990 <sup>+</sup>	<b>0,0855</b>	1,0000	1,0000
					0,05	0,4970 <sup>+</sup>	0,0845 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,4910 <sup>+</sup>	0,0825 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,4880 <sup>+</sup>	0,0745 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,4865 <sup>+</sup>	0,0735 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,4820 <sup>+</sup>	0,0715 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,3555 <sup>+</sup>	0,2135 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3545 <sup>+</sup>	0,2135 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,3535 <sup>+</sup>	0,2135 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
30	30	10	0,2	0,2	0,1	0,0135 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0810	0,0115
					0,05	0,0120 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>+</sup>	0,0695	0,0085
					0,01	0,0105	0,0000	0,0545	0,0025
			0,2	0,9	0,1	0,0305	0,0015 <sup>-</sup>	0,0870 <sup>+</sup>	0,0100
					0,05	0,0285 <sup>-</sup>	0,0010 <sup>-</sup>	0,0750	0,0085
					0,01	0,0235 <sup>-</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	0,0580	0,0050
			0,9	0,2	0,1	0,0385 <sup>-</sup>	0,0020 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0360 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0305 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,1135 <sup>+</sup>	0,0590 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1080 <sup>+</sup>	<b>0,0570</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0965 <sup>+</sup>	0,0500 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

Continuação da Tabela 9:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
60	40	30	0,2	0,2	0,1	<b>0,0865</b>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9490	0,8050
					0,05	0,0815 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9400	0,7790
					0,01	0,0725 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9225	0,7365
			0,2	0,9	0,1	0,1410 <sup>+</sup>	0,0135 <sup>-</sup>	0,9490	0,8050
					0,05	0,1365 <sup>+</sup>	0,0125 <sup>-</sup>	0,9400	0,7790
					0,01	0,1260 <sup>+</sup>	<b>0,0105</b>	0,9225	0,7365
			0,9	0,2	0,1	0,1375 <sup>+</sup>	0,0145 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1320 <sup>+</sup>	0,0120 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1230 <sup>+</sup>	<b>0,0100</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,2135 <sup>+</sup>	0,1385 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,2110 <sup>+</sup>	0,1335 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,2040 <sup>+</sup>	0,1275 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
480	220	320	0,2	0,2	0,1	0,3485 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3460 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,3390 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,3490 <sup>+</sup>	0,0350 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3485 <sup>+</sup>	0,0345 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,3460 <sup>+</sup>	0,0345 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,3635 <sup>+</sup>	0,0335 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3615 <sup>+</sup>	0,0325 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,3570 <sup>+</sup>	0,0320 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,3165 <sup>+</sup>	0,1830 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,3165 <sup>+</sup>	0,1820 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,3155 <sup>+</sup>	0,1820 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

Tabela 10 – Erro tipo I dos testes *LRT0*, *LRTOR*, *T* e *TR* com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição t de student multivariada com  $\nu = 30$  graus de liberdade.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>LRT0</i>	<i>LRTOR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
60	20	10	0,2	0,2	0,1	0,2915 <sup>+</sup>	0,4230 <sup>+</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	<b>0,0130</b>
					0,05	0,1865 <sup>+</sup>	0,3125 <sup>+</sup>	0,0070 <sup>-</sup>	0,0075 <sup>-</sup>
					0,01	0,0500 <sup>+</sup>	0,1370 <sup>+</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	0,0020 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,2765 <sup>+</sup>	0,4850 <sup>+</sup>	0,1085 <sup>+</sup>	0,1275 <sup>+</sup>
					0,05	0,1755 <sup>+</sup>	0,3645 <sup>+</sup>	0,0885 <sup>+</sup>	0,1015 <sup>+</sup>
					0,01	0,0660 <sup>+</sup>	0,1870 <sup>+</sup>	0,0640 <sup>+</sup>	0,0700 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,3010 <sup>+</sup>	0,5820 <sup>+</sup>	0,1550 <sup>+</sup>	0,1910 <sup>+</sup>		
			0,05	0,1870 <sup>+</sup>	0,4555 <sup>+</sup>	0,1290 <sup>+</sup>	0,1640 <sup>+</sup>		
			0,01	0,0570 <sup>+</sup>	0,2595 <sup>+</sup>	0,0985 <sup>+</sup>	0,1320 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,2870 <sup>+</sup>	0,5785 <sup>+</sup>	0,2160 <sup>+</sup>	0,2250 <sup>+</sup>		
			0,05	0,1820 <sup>+</sup>	0,4710 <sup>+</sup>	0,2075 <sup>+</sup>	0,2140 <sup>+</sup>		
			0,01	0,0610 <sup>+</sup>	0,2605 <sup>+</sup>	0,1875 <sup>+</sup>	0,1965 <sup>+</sup>		
120	40	20	0,2	0,2	0,1	0,5615 <sup>+</sup>	0,7390 <sup>+</sup>	0,0070 <sup>-</sup>	<b>0,0105</b>
					0,05	0,4190 <sup>+</sup>	0,6165 <sup>+</sup>	0,0065 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>
					0,01	0,1965 <sup>+</sup>	0,3860 <sup>+</sup>	0,0035 <sup>-</sup>	<b>0,0060</b>
			0,2	0,9	0,1	0,5630 <sup>+</sup>	0,7980 <sup>+</sup>	<b>0,1130</b>	0,1205 <sup>+</sup>
					0,05	0,4150 <sup>+</sup>	0,6950 <sup>+</sup>	0,1055 <sup>+</sup>	0,1110 <sup>+</sup>
					0,01	0,1785 <sup>+</sup>	0,4845 <sup>+</sup>	0,0915 <sup>+</sup>	0,0965 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,5630 <sup>+</sup>	0,8470 <sup>+</sup>	0,1405 <sup>+</sup>	0,1525 <sup>+</sup>		
			0,05	0,4150 <sup>+</sup>	0,7790 <sup>+</sup>	0,1320 <sup>+</sup>	0,1405 <sup>+</sup>		
			0,01	0,1785 <sup>+</sup>	0,5730 <sup>+</sup>	0,1100 <sup>+</sup>	0,1190 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,5630 <sup>+</sup>	0,8220 <sup>+</sup>	0,2290 <sup>+</sup>	0,2395 <sup>+</sup>		
			0,05	0,4150 <sup>+</sup>	0,7435 <sup>+</sup>	0,2260 <sup>+</sup>	0,2345 <sup>+</sup>		
			0,01	0,1785 <sup>+</sup>	0,5265 <sup>+</sup>	0,2200 <sup>+</sup>	0,2220 <sup>+</sup>		
240	80	40	0,2	0,2	0,1	0,9345 <sup>+</sup>	0,9925 <sup>+</sup>	0,0070 <sup>-</sup>	0,0070 <sup>-</sup>
					0,05	0,8815 <sup>+</sup>	0,9795 <sup>+</sup>	0,0060 <sup>-</sup>	0,0065 <sup>-</sup>
					0,01	0,7020 <sup>+</sup>	0,9325 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,0040 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,9345 <sup>+</sup>	0,9950 <sup>+</sup>	0,1255 <sup>+</sup>	0,1210 <sup>+</sup>
					0,05	0,8815 <sup>+</sup>	0,9905 <sup>+</sup>	0,1195 <sup>+</sup>	0,1155 <sup>+</sup>
					0,01	0,7020 <sup>+</sup>	0,9640 <sup>+</sup>	0,1120 <sup>+</sup>	0,1060 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,9335 <sup>+</sup>	0,9965 <sup>+</sup>	0,1240 <sup>+</sup>	0,1410 <sup>+</sup>		
			0,05	0,8820 <sup>+</sup>	0,9920 <sup>+</sup>	0,1210 <sup>+</sup>	0,1340 <sup>+</sup>		
			0,01	0,7060 <sup>+</sup>	0,9715 <sup>+</sup>	0,1125 <sup>+</sup>	0,1245 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,9345 <sup>+</sup>	0,9925 <sup>+</sup>	0,2410 <sup>+</sup>	0,2395 <sup>+</sup>		
			0,05	0,8815 <sup>+</sup>	0,9860 <sup>+</sup>	0,2375 <sup>+</sup>	0,2375 <sup>+</sup>		
			0,01	0,7020 <sup>+</sup>	0,9560 <sup>+</sup>	0,2360 <sup>+</sup>	0,2360 <sup>+</sup>		

Continuação da Tabela 10:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$
480	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0095 <sup>-</sup>	0,0080 <sup>-</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	0,0075 <sup>-</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0080</b>	<b>0,0070</b>
			0,2	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1225 <sup>+</sup>	0,1225 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1195 <sup>+</sup>	0,1190 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1145 <sup>+</sup>	0,1120 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1280 <sup>+</sup>	0,1330 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1255 <sup>+</sup>	0,1305 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1195 <sup>+</sup>	0,1255 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2485 <sup>+</sup>	0,2595 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2480 <sup>+</sup>	0,2570 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2455 <sup>+</sup>	0,2535 <sup>+</sup>
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$
960	320	160	0,2	0,2	0,1	0,9855 <sup>+</sup>	0,9855 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>
					0,05	0,9570 <sup>+</sup>	0,9570 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>
					0,01	0,8490 <sup>+</sup>	0,8490 <sup>+</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>
			0,2	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1310 <sup>+</sup>	0,1335 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1295 <sup>+</sup>	0,1310 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1275 <sup>+</sup>	0,1290 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1305	0,1335 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1295 <sup>+</sup>	0,1325 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1285 <sup>+</sup>	0,1295 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2695 <sup>+</sup>	0,2585 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2680 <sup>+</sup>	0,2580 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2675 <sup>+</sup>	0,2570 <sup>+</sup>

Tabela 11 – Poder para testes  $LRTO$ ,  $LRTOR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição  $t$  multivariada  $v = 30$ .

$n$	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$			
60	20	10	0,2	0,2	0,1	0,8800	0,9110	0,9995	0,9985			
					0,05	0,7935	0,8480	0,9990	0,9980			
					0,01	0,5675	0,6550	0,9970	0,9935			
			0,2	0,9	0,1	0,8775	0,9125	0,9975	0,9975			
					0,05	0,7980	0,8535	0,9970	0,9945			
					0,01	0,5540	0,6590	0,9955	0,9910			
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
			0,9	0,9	0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
			120	40	20	0,2	0,2	0,1	0,9980	0,9990	1,0000	1,0000
								0,05	0,9945	0,9975	1,0000	1,0000
								0,01	0,9735	0,9860	1,0000	1,0000
0,2	0,9	0,1				0,9980	0,9990	1,0000	1,0000			
		0,05				0,9965	0,9985	1,0000	1,0000			
		0,01				0,9775	0,9895	1,0000	1,0000			
0,9	0,2	0,1				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
		0,05				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
		0,01				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
0,9	0,9	0,05				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
		0,01				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
		0,01				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
240	80	40				0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
								0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
								0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
			0,9	0,9	0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			

Continuação da Tabela 11:

<i>n</i>	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>p</i> <sub>2</sub>	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>LRTO</i>	<i>LRTOR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
480	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
<i>n</i>	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>p</i> <sub>2</sub>	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>LRTO</i>	<i>LRTOR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
960	320	160	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
					0,05	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 12 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço (T) e traço robusto (TR) com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 > n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição t de student multivariada com  $\nu = 30$  graus de liberdade.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder			
						T	TR	T	TR		
30	20	10			0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,2455	0,1745		
					0,2	0,2	0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,2020	0,1400
							0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,1305	0,0930
							0,1	0,0100 <sup>-</sup>	0,0100 <sup>-</sup>	0,2455	0,1745
					0,2	0,9	0,05	0,0080 <sup>-</sup>	0,0095 <sup>-</sup>	0,2020	0,1400
							0,01	0,0050 <sup>-</sup>	<b>0,0060</b>	0,1305	0,0930
	0,1	0,0170 <sup>-</sup>	0,0200 <sup>-</sup>	1,0000			1,0000				
	0,9	0,2	0,2	0,05	0,0120 <sup>-</sup>	0,0185 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000			
				0,01	<b>0,0070</b>	<b>0,0145</b>	1,0000	1,0000			
				0,1	<b>0,1050</b>	0,1355 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000			
		0,9	0,9	0,05	0,0980 <sup>+</sup>	0,1275 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000			
				0,01	0,0890 <sup>+</sup>	0,1145 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000			
60	40	20			0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9580	0,9245		
					0,2	0,2	0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,9485	0,9140
							0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000	0,9265	0,8795
							0,1	0,0075 <sup>-</sup>	0,0060 <sup>-</sup>	0,9580	0,9245
					0,2	0,9	0,05	0,0070 <sup>-</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	0,9485	0,9140
							0,01	<b>0,0060</b>	0,0050 <sup>-</sup>	0,9265	0,8795
	0,1	0,013 <sup>-5</sup>	0,0125 <sup>-</sup>	1,0000			1,0000				
	0,9	0,2	0,2	0,05	0,0135 <sup>-</sup>	0,0120 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000			
				0,01	<b>0,0115</b>	<b>0,0100</b>	1,0000	1,0000			
				0,1	0,1320 <sup>+</sup>	0,1280 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000			
		0,9	0,9	0,05	0,1270 <sup>-</sup>	0,1220 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000			
				0,01	0,1210 <sup>+</sup>	0,1140 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000			
120	80	40			0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000		
					0,2	0,2	0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
							0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
							0,1	0,0135 <sup>-</sup>	0,0075 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,2	0,9	0,05	0,0130 <sup>-</sup>	0,0070 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
							0,01	<b>0,0125</b>	<b>0,0060</b>	1,0000	1,0000
	0,1	0,0170 <sup>-</sup>	0,0105 <sup>-</sup>	1,0000			1,0000				
	0,9	0,2	0,2	0,05	0,0165 <sup>-</sup>	0,0105 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000			
				0,01	<b>0,0145</b>	<b>0,0105</b>	1,0000	1,0000			
				0,1	0,1460 <sup>+</sup>	0,1380 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000			
		0,9	0,9	0,05	0,1435 <sup>+</sup>	0,1365 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000			
				0,01	0,1410 <sup>+</sup>	0,1325 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000			

Continuação da Tabela 12:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
240	160	80	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,0175 <sup>-</sup>	0,0150 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0170 <sup>-</sup>	0,0140 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0160</b>	<b>0,0140</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,0165 <sup>-</sup>	0,0170 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0160 <sup>-</sup>	0,0160 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0155</b>	<b>0,0155</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,1340 <sup>+</sup>	0,1345 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1335 <sup>+</sup>	0,1340 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1320 <sup>+</sup>	0,1320 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
480	320	160	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,0125 <sup>-</sup>	0,0110 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0125 <sup>-</sup>	0,0110 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0125</b>	<b>0,0110</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	<b>0,0130</b>	<b>0,0120</b>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0125 <sup>-</sup>	0,0115 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0120</b>	<b>0,0115</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,1330 <sup>+</sup>	0,1425 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1330 <sup>+</sup>	0,1425 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1320 <sup>+</sup>	0,1410 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
30	30	10	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0080	0,0025
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0060	0,0015
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0025	0,0010
			0,2	0,9	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0085	0,0030
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0070	0,0020
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0030	0,0015
			0,9	0,2	0,1	0,0010	0,0010	1,0000	1,0000
					0,05	0,0010	0,0010	1,0000	1,0000
					0,01	0,0005	0,0005	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,0385	0,0455	1,0000	1,0000
					0,05	0,0345 <sup>-</sup>	<b>0,0410</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0285 <sup>-</sup>	0,0350 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000

Continuação da Tabela 12:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
60	40	30	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,8200	0,7125
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,8035	0,6920
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,7710	0,6475
			0,2	0,9	0,1	0,0045 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,8200	0,7125
					0,05	0,0040 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,8035	0,6920
					0,01	0,0015 <sup>-</sup>	0,0030 <sup>-</sup>	0,7710	0,6475
			0,9	0,2	0,1	0,0045 <sup>-</sup>	0,0050 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0045 <sup>-</sup>	0,0045 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0040 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	<b>0,0965</b>	<b>0,0995</b>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0955 <sup>+</sup>	0,0975 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0925</b>	<b>0,0905</b>	1,0000	1,0000
480	220	320	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,0070 <sup>-</sup>	0,0060 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0070 <sup>-</sup>	0,0060 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0070</b>	<b>0,0060</b>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,0080 <sup>-</sup>	0,0040 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0080 <sup>-</sup>	0,0040 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0080</b>	0,0040 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	<b>0,1155</b>	0,1200 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1155 <sup>+</sup>	0,1200 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1150 <sup>+</sup>	0,1185 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000

Tabela 13 – Erro tipo I dos testes  $LRTO$ ,  $LRTOR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição lognormal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$
60	20	10	0,2	0,2	0,1	0,7505 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1520 <sup>+</sup>	0,5550 <sup>+</sup>
					0,05	0,7305 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1330 <sup>+</sup>	0,5030 <sup>+</sup>
					0,01	0,6945 <sup>+</sup>	0,9990 <sup>+</sup>	0,1040 <sup>+</sup>	0,4230 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,7785 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2100 <sup>+</sup>	0,4425 <sup>+</sup>
					0,05	0,7645 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2035 <sup>+</sup>	0,4170 <sup>+</sup>
					0,01	0,7330 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1895 <sup>+</sup>	0,3550 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,8065 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1935 <sup>+</sup>	0,4240 <sup>+</sup>		
			0,05	0,7895 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1880 <sup>+</sup>	0,3930 <sup>+</sup>		
			0,01	0,7605 <sup>+</sup>	0,9995 <sup>+</sup>	0,1780 <sup>+</sup>	0,3570 <sup>+</sup>		
			0,9	0,9	0,1	0,8225 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1340 <sup>+</sup>	0,3230 <sup>+</sup>
					0,05	0,8125 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1330 <sup>+</sup>	0,2995 <sup>+</sup>
					0,01	0,7940 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1250 <sup>+</sup>	0,2515 <sup>+</sup>
120	40	20	0,2	0,2	0,1	0,2180 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1410 <sup>+</sup>	0,6760 <sup>+</sup>
					0,05	0,2145 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1340 <sup>+</sup>	0,6530 <sup>+</sup>
					0,01	0,2085 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1190 <sup>+</sup>	0,5945 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,9165 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2355 <sup>+</sup>	0,5340 <sup>+</sup>
					0,05	0,9120 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2320 <sup>+</sup>	0,5125 <sup>+</sup>
					0,01	0,8975 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2215 <sup>+</sup>	0,4730 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,9260 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2065 <sup>+</sup>	0,4845 <sup>+</sup>		
			0,05	0,9210 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2015 <sup>+</sup>	0,4605 <sup>+</sup>		
			0,01	0,9085 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,1980 <sup>+</sup>	0,4355 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,9415 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,1000</b>	0,4005 <sup>+</sup>		
			0,05	0,9390 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0995 <sup>+</sup>	0,3815 <sup>+</sup>		
			0,01	0,9325 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0970 <sup>+</sup>	0,3475 <sup>+</sup>		
240	80	40	0,2	0,2	0,1	0,9620 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,1015</b>	0,8250 <sup>+</sup>
					0,05	0,9595 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0980 <sup>+</sup>	0,8120 <sup>+</sup>
					0,01	0,9540 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0910 <sup>+</sup>	0,7845 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,9820 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2425 <sup>+</sup>	0,5820 <sup>+</sup>
					0,05	0,9790 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2390 <sup>+</sup>	0,5725 <sup>+</sup>
					0,01	0,9760 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2350 <sup>+</sup>	0,5485 <sup>+</sup>
	0,9	0,2	0,1	0,9785 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2245 <sup>+</sup>	0,5335 <sup>+</sup>		
			0,05	0,9775 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2235 <sup>+</sup>	0,5210 <sup>+</sup>		
			0,01	0,9735 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2190 <sup>+</sup>	0,4955 <sup>+</sup>		
	0,9	0,9	0,1	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0880</b>	0,4440 <sup>+</sup>		
			0,05	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0880 <sup>+</sup>	0,4315 <sup>+</sup>		
			0,01	0,0010 <sup>-</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0865 <sup>+</sup>	0,4065 <sup>+</sup>		

Continuação da Tabela 13:

<i>n</i>	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>p</i> <sub>2</sub>	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>L</i> <i>R</i> <i>T</i> <i>O</i>	<i>L</i> <i>R</i> <i>T</i> <i>O</i> <i>R</i>	<i>T</i>	<i>T</i> <i>R</i>
480	160	80	0,2	0,2	0,1	0,9940 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0870</b>	0,9205 <sup>+</sup>
					0,05	0,9935 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0860 <sup>+</sup>	0,9125 <sup>+</sup>
					0,01	0,9925 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0800 <sup>+</sup>	0,9020 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	0,9980 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2260 <sup>+</sup>	0,6240 <sup>+</sup>
					0,05	0,9980 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2255 <sup>+</sup>	0,6150 <sup>+</sup>
					0,01	0,9975 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2210 <sup>+</sup>	0,5975 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	0,9985 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2225 <sup>+</sup>	0,5830 <sup>+</sup>
					0,05	0,9985 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2215 <sup>+</sup>	0,5750 <sup>+</sup>
					0,01	0,9985 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2185 <sup>+</sup>	0,5630 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0835</b>	0,5565 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0830 <sup>+</sup>	0,5450 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0830 <sup>+</sup>	0,5195 <sup>+</sup>
<i>n</i>	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>p</i> <sub>2</sub>	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>L</i> <i>R</i> <i>T</i> <i>O</i>	<i>L</i> <i>R</i> <i>T</i> <i>O</i> <i>R</i>	<i>T</i>	<i>T</i> <i>R</i>
960	320	160	0,2	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0640 <sup>-</sup>	0,9775 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	<b>0,0625</b>	0,9770 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0615 <sup>+</sup>	0,9755 <sup>+</sup>
			0,2	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2065 <sup>+</sup>	0,7000 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2065 <sup>+</sup>	0,6945 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2055 <sup>+</sup>	0,6865 <sup>+</sup>
			0,9	0,2	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2090 <sup>+</sup>	0,6105 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2090 <sup>+</sup>	0,6040 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,2085 <sup>+</sup>	0,5950 <sup>+</sup>
			0,9	0,9	0,1	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0700 <sup>-</sup>	0,7595 <sup>+</sup>
					0,05	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0700 <sup>+</sup>	0,7515 <sup>+</sup>
					0,01	1,0000 <sup>+</sup>	1,0000 <sup>+</sup>	0,0700 <sup>+</sup>	0,7395 <sup>+</sup>

Tabela 14 – Poder para testes  $LRTO$ ,  $LRTOR$ ,  $T$  e  $TR$  com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição lognormal.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$LRTO$	$LRTOR$	$T$	$TR$
60	20	10			0,1	0,9965	1,0000	0,8380	0,9365
					0,2	0,9965	1,0000	0,8185	0,9170
					0,01	0,9945	1,0000	0,7695	0,8820
					0,1	0,9955	1,0000	0,8505	0,9315
					0,2	0,9945	1,0000	0,8290	0,9140
					0,01	0,9930	1,0000	0,7810	0,8685
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
120	40	20			0,1	0,9990	1,0000	0,9910	0,9980
					0,2	0,9990	1,0000	0,9900	0,9980
					0,01	0,9990	1,0000	0,9875	0,9960
					0,1	0,9990	1,0000	0,9910	0,9980
					0,2	0,9990	1,0000	0,9900	0,9980
					0,01	0,9990	1,0000	0,9875	0,9960
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
240	80	40			0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
	0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				

Continuação da Tabela 14:

<i>n</i>	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>p</i> <sub>2</sub>	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>LRTO</i>	<i>LRTOR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
480	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
<i>n</i>	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>p</i> <sub>2</sub>	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	<i>LRTO</i>	<i>LRTOR</i>	<i>T</i>	<i>TR</i>
960	320	160	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 15 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( $T$ ) e traço robusto ( $TR$ ) com  $p_1 + p_2 > n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição lognormal.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder	
						$T$	$TR$	$T$	$TR$
30	20	10	0,2	0,2	0,1	0,0080 <sup>-</sup>	0,0560 <sup>-</sup>	0,2100	0,3025
					0,05	0,0060 <sup>-</sup>	0,0405 <sup>-</sup>	0,1865	0,2520
					0,01	0,0035 <sup>-</sup>	0,0220 <sup>+</sup>	0,1395	0,1725
			0,2	0,9	0,1	0,0675 <sup>-</sup>	0,1365 <sup>-</sup>	0,2290	0,3145
					0,05	<b>0,0590</b>	0,1185 <sup>+</sup>	0,2025	0,2665
					0,01	0,0490 <sup>+</sup>	0,0875 <sup>+</sup>	0,1585	0,1790
	0,9	0,2	0,1	0,1020 <sup>+</sup>	0,1680 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,0940 <sup>+</sup>	0,1425 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,0775 <sup>+</sup>	0,1085 <sup>+</sup>	1,0000	0,9995		
	0,9	0,9	0,1	<b>0,0875</b>	0,1415 <sup>+</sup>	1,0000	0,9995		
			0,05	0,0860 <sup>+</sup>	0,1310 <sup>+</sup>	1,0000	0,9995		
			0,01	0,0810 <sup>+</sup>	0,1085 <sup>+</sup>	1,0000	0,9995		
60	40	20	0,2	0,2	0,1	0,0080 <sup>-</sup>	0,0800 <sup>-</sup>	0,5730	0,7085
					0,05	0,0070 <sup>-</sup>	0,0650 <sup>-</sup>	0,5430	0,6675
					0,01	0,0040 <sup>-</sup>	0,0460 <sup>-</sup>	0,4915	0,5860
			0,2	0,9	0,1	<b>0,0870</b>	0,1565 <sup>+</sup>	0,5730	0,7085
					0,05	0,0820 <sup>+</sup>	0,1420 <sup>+</sup>	0,5430	0,6675
					0,01	0,0780 <sup>+</sup>	0,1240 <sup>+</sup>	0,4915	0,5860
	0,9	0,2	0,1	<b>0,1080</b>	0,1925 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,1055 <sup>+</sup>	0,1810 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,0995 <sup>+</sup>	0,1560 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	0,0800 <sup>-</sup>	0,1330 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,0795 <sup>+</sup>	0,1270 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,0785 <sup>+</sup>	0,1185 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
120	80	40	0,2	0,2	0,1	0,0060 <sup>-</sup>	0,0755 <sup>-</sup>	0,9300	0,9675
					0,05	0,0055 <sup>-</sup>	<b>0,0690</b>	0,9200	0,9625
					0,01	0,0045 <sup>-</sup>	0,0545 <sup>+</sup>	0,9085	0,9515
			0,2	0,9	0,1	<b>0,1115</b>	0,1450 <sup>+</sup>	0,9300	0,9675
					0,05	0,1080 <sup>+</sup>	0,1395 <sup>+</sup>	0,9200	0,9625
					0,01	0,1030 <sup>+</sup>	0,1230 <sup>+</sup>	0,9085	0,9515
	0,9	0,2	0,1	0,1330 <sup>+</sup>	0,1905 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,1315 <sup>+</sup>	0,1855 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,1270 <sup>+</sup>	0,1730 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	0,0745 <sup>-</sup>	<b>0,1065</b>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,0740 <sup>+</sup>	0,1040 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,0730 <sup>+</sup>	0,0995 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		

Continuação da Tabela 15:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
240	160	80	0,2	0,2	0,1	0,0070 <sup>-</sup>	0,0405 <sup>-</sup>	0,9990	1,0000
					0,05	0,0065 <sup>+</sup>	0,0380 <sup>+</sup>	0,9985	1,0000
					0,01	<b>0,0060</b>	0,0315 <sup>+</sup>	0,9985	1,0000
			0,2	0,9	0,1	<b>0,1090</b>	<b>0,1055</b>	0,9990	1,0000
					0,05	0,1085 <sup>+</sup>	0,1020 <sup>+</sup>	0,9985	1,0000
					0,01	0,1065 <sup>+</sup>	0,0955 <sup>+</sup>	0,9985	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,1190 <sup>+</sup>	0,1675 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,1190 <sup>+</sup>	0,1650 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1175 <sup>+</sup>	0,1560 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,0735 <sup>-</sup>	0,0690 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0735 <sup>+</sup>	<b>0,0675</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0730 <sup>+</sup>	0,0655 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
480	320	160	0,2	0,2	0,1	0,0020 <sup>-</sup>	0,0120 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0020 <sup>-</sup>	0,0115 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0020 <sup>-</sup>	<b>0,0105</b>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	<b>0,0865</b>	0,0060 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0855 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0850 <sup>+</sup>	0,0050 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,0825 <sup>-</sup>	<b>0,0965</b>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0825 <sup>+</sup>	0,0960 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0820 <sup>+</sup>	0,0950 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,0660 <sup>-</sup>	0,0285 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	<b>0,0660</b>	0,0280 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0660 <sup>+</sup>	0,0275 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
30	30	10	0,2	0,2	0,1	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0345	0,0075
					0,05	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0290	0,0060
					0,01	0,0000 <sup>-</sup>	0,0000 <sup>-</sup>	0,0210	0,0025
			0,2	0,9	0,1	0,0170 <sup>-</sup>	0,0110 <sup>-</sup>	0,0345	0,0075
					0,05	0,0160 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	0,0290	0,0060
					0,01	<b>0,0125</b>	<b>0,0080</b>	0,0210	0,0025
			0,9	0,2	0,1	0,0275 <sup>-</sup>	0,0230 <sup>-</sup>	1,0000	0,9950
					0,05	0,0260 <sup>-</sup>	0,0195 <sup>+</sup>	1,0000	0,9910
					0,01	0,0225 <sup>+</sup>	<b>0,0145</b>	1,0000	0,9845
			0,9	0,9	0,1	0,0710 <sup>-</sup>	0,0530 <sup>-</sup>	1,0000	0,9950
					0,05	0,0695 <sup>+</sup>	<b>0,0495</b>	1,0000	0,9910
					0,01	0,0645 <sup>+</sup>	0,0440 <sup>+</sup>	1,0000	0,9845

Continuação da Tabela 15:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
60	40	30	0,2	0,2	0,1	0,0015 <sup>-</sup>	0,0080 <sup>-</sup>	0,3170	0,2815
					0,05	0,0015 <sup>-</sup>	0,0060 <sup>-</sup>	0,2965	0,2475
					0,01	0,0015 <sup>-</sup>	0,0050 <sup>-</sup>	0,2675	0,1980
			0,2	0,9	0,1	0,0620 <sup>-</sup>	0,0580 <sup>-</sup>	0,3170	0,2815
					0,05	<b>0,0585</b>	<b>0,0520</b>	0,2965	0,2475
					0,01	0,0565 <sup>+</sup>	0,0425 <sup>+</sup>	0,2675	0,1980
			0,9	0,2	0,1	0,0645 <sup>-</sup>	<b>0,1060</b>	1,0000	1,0000
					0,05	<b>0,0635</b>	0,0980 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0585 <sup>+</sup>	0,0875 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,0740 <sup>-</sup>	<b>0,0960</b>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0730 <sup>+</sup>	0,0930 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0725 <sup>+</sup>	0,0870 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	$T$	$TR$	$T$	$TR$
480	220	320	0,2	0,2	0,1	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0015 <sup>-</sup>	0,0015 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0015 <sup>-</sup>	0,0005 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	<b>0,0865</b>	0,0060 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0855 <sup>+</sup>	0,0055 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0850 <sup>+</sup>	0,0050 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	0,0775 <sup>-</sup>	<b>0,0855</b>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0775 <sup>+</sup>	0,0840 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0760 <sup>+</sup>	0,0810 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
			0,9	0,9	0,1	0,0580 <sup>-</sup>	0,0105 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	<b>0,0580</b>	0,0105 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0580 <sup>+</sup>	<b>0,0105</b>	1,0000	1,0000

Tabela 16 – Taxa de erro tipo I dos testes *LRTOB*, *LRTORB*, *TB* e *TRB* com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRTOB	LRTORB	TB	TRB	
60	20	10	0,2	0,2	0,1	<b>0,1015</b>	<b>0,0880</b>	<b>0,0885</b>	<b>0,0840</b>	
					0,05	<b>0,0495</b>	<b>0,0405</b>	<b>0,0395</b>	0,0335 <sup>-</sup>	
					0,01	<b>0,0110</b>	<b>0,0080</b>	<b>0,0075</b>	0,0050 <sup>-</sup>	
			0,2	0,9	0,1	<b>0,0919</b>	<b>0,0839</b>	<b>0,1024</b>	<b>0,0984</b>	
					0,05	<b>0,0476</b>	0,0355 <sup>-</sup>	<b>0,0476</b>	<b>0,0532</b>	
					0,01	<b>0,0081</b>	<b>0,0073</b>	<b>0,0113</b>	<b>0,0097</b>	
	0,9	0,2	0,1	<b>0,1175</b>	<b>0,1035</b>	<b>0,0995</b>	<b>0,0975</b>			
			0,05	<b>0,0550</b>	<b>0,0530</b>	<b>0,0490</b>	<b>0,0520</b>			
			0,01	<b>0,0100</b>	<b>0,0120</b>	<b>0,0105</b>	<b>0,0115</b>			
	120	40	20	0,9	0,9	0,1	<b>0,0950</b>	<b>0,0875</b>	<b>0,1000</b>	<b>0,0975</b>
						0,05	<b>0,0455</b>	<b>0,0485</b>	<b>0,0505</b>	<b>0,0505</b>
						0,01	<b>0,0090</b>	<b>0,0105</b>	<b>0,0115</b>	<b>0,0115</b>
0,2				0,2	0,1	<b>0,0990</b>	<b>0,0925</b>	<b>0,0900</b>	<b>0,0855</b>	
					0,05	<b>0,0470</b>	<b>0,0410</b>	<b>0,0425</b>	<b>0,0395</b>	
					0,01	<b>0,0105</b>	<b>0,0095</b>	<b>0,0060</b>	<b>0,0065</b>	
240	80	40	0,2	0,9	0,1	<b>0,1065</b>	<b>0,0925</b>	<b>0,1030</b>	<b>0,1000</b>	
					0,05	<b>0,0515</b>	<b>0,0430</b>	<b>0,0515</b>	0,0540	
					0,01	<b>0,0100</b>	<b>0,0095</b>	<b>0,0075</b>	<b>0,0075</b>	
			0,9	0,2	0,1	<b>0,1045</b>	<b>0,0875</b>	<b>0,0900</b>	<b>0,0865</b>	
					0,05	<b>0,0535</b>	<b>0,0440</b>	<b>0,0385</b>	<b>0,0410</b>	
					0,01	<b>0,0120</b>	<b>0,0090</b>	<b>0,0105</b>	<b>0,0075</b>	
240	80	40	0,9	0,9	0,1	<b>0,1040</b>	<b>0,0915</b>	<b>0,0970</b>	<b>0,0955</b>	
					0,05	<b>0,0590</b>	<b>0,0480</b>	<b>0,0510</b>	<b>0,0510</b>	
					0,01	<b>0,0130</b>	<b>0,0105</b>	<b>0,0115</b>	<b>0,0080</b>	
			0,2	0,2	0,1	<b>0,1063</b>	<b>0,1036</b>	<b>0,0910</b>	<b>0,0910</b>	
					0,05	<b>0,0570</b>	<b>0,0564</b>	<b>0,0466</b>	<b>0,0466</b>	
					0,01	<b>0,0104</b>	<b>0,0104</b>	0,0466 <sup>+</sup>	<b>0,0082</b>	
240	80	40	0,2	0,9	0,1	<b>0,0925</b>	0,0065 <sup>-</sup>	0,0090 <sup>-</sup>	0,0085 <sup>-</sup>	
					0,05	<b>0,0460</b>	<b>0,0410</b>	<b>0,0470</b>	<b>0,0455</b>	
					0,01	<b>0,0075</b>	<b>0,0065</b>	<b>0,0090</b>	<b>0,0085</b>	
			0,9	0,2	0,1	<b>0,1095</b>	<b>0,0971</b>	<b>0,0846</b>	<b>0,0835</b>	
					0,05	<b>0,0559</b>	<b>0,0483</b>	<b>0,0445</b>	<b>0,0439</b>	
					0,01	<b>0,0103</b>	<b>0,0146</b>	<b>0,0076</b>	0,0065	
0,9	0,9	0,1	<b>0,1117</b>	<b>0,1061</b>	<b>0,0922</b>	<b>0,0916</b>				
		0,05	<b>0,0570</b>	<b>0,0536</b>	<b>0,0447</b>	<b>0,0447</b>				
		0,01	<b>0,0123</b>	<b>0,0106</b>	<b>0,0067</b>	<b>0,0056</b>				

Continuação da Tabela 16:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRTOB	LRTORB	TB	TRB
480	160	80	0,2	0,2	0,1	<b>0,1130</b>	<b>0,1130</b>	0,0711 <sup>-</sup>	0,0711 <sup>-</sup>
					0,05	<b>0,0614</b>	<b>0,0606</b>	0,0382 <sup>-</sup>	<b>0,0404</b>
					0,01	<b>0,0127</b>	<b>0,0127</b>	<b>0,0060</b>	<b>0,0060</b>
			0,2	0,9	0,1	<b>0,0883</b>	<b>0,0916</b>	<b>0,0843</b>	<b>0,0818</b>
					0,05	<b>0,0502</b>	<b>0,0470</b>	0,0340 <sup>-</sup>	0,0340 <sup>-</sup>
					0,01	<b>0,0105</b>	<b>0,0065</b>	<b>0,0065</b>	<b>0,0065</b>
			0,9	0,2	0,1	<b>0,1096</b>	<b>0,0981</b>	<b>0,0866</b>	<b>0,0882</b>
					0,05	<b>0,0519</b>	<b>0,0478</b>	<b>0,0511</b>	<b>0,0503</b>
					0,01	<b>0,0091</b>	<b>0,0107</b>	<b>0,0074</b>	<b>0,0074</b>
			0,9	0,9	0,1	<b>0,1061</b>	<b>0,1053</b>	0,0813 <sup>-</sup>	0,0781 <sup>-</sup>
					0,05	<b>0,0582</b>	<b>0,0558</b>	<b>0,0439</b>	<b>0,0463</b>
					0,01	<b>0,0088</b>	<b>0,0080</b>	<b>0,0096</b>	<b>0,0080</b>
960	320	160	0,2	0,2	0,1	<b>0,0945</b>	<b>0,1096</b>	<b>0,1008</b>	<b>0,1297</b>
					0,05	<b>0,0504</b>	<b>0,0693</b>	<b>0,0542</b>	0,0793 <sup>+</sup>
					0,01	<b>0,0126</b>	0,0378 <sup>+</sup>	<b>0,0076</b>	<b>0,0151</b>
			0,2	0,9	0,1	<b>0,0787</b>	<b>0,0787</b>	<b>0,0883</b>	<b>0,0883</b>
					0,05	<b>0,0404</b>	<b>0,0404</b>	<b>0,0457</b>	<b>0,0457</b>
					0,01	<b>0,0138</b>	<b>0,0138</b>	<b>0,0106</b>	<b>0,0106</b>
			0,9	0,2	0,1	<b>0,0918</b>	<b>0,0918</b>	<b>0,0995</b>	<b>0,0995</b>
					0,05	<b>0,0437</b>	<b>0,0437</b>	<b>0,0536</b>	<b>0,0536</b>
					0,01	0,0033 <sup>-</sup>	0,0033 <sup>-</sup>	<b>0,0098</b>	<b>0,0098</b>
			0,9	0,9	0,1	<b>0,0917</b>	<b>0,0906</b>	<b>0,1048</b>	<b>0,1048</b>
					0,05	<b>0,0481</b>	<b>0,0481</b>	<b>0,0525</b>	<b>0,0525</b>
					0,01	0,0033 <sup>-</sup>	0,0033 <sup>-</sup>	<b>0,0087</b>	<b>0,0087</b>

Tabela 17 – Poder testes *LRTOB*, *LRTORB*, *TB* e *TRB* com  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  e  $p_1 + p_2 < n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição normal multivariada.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRTOB	LRTORB	TB	TRB
60	20	10	0,2	0,2	0,1	0,7020	0,6370	1,0000	1,0000
					0,05	0,5570	0,4860	1,0000	0,9990
					0,01	0,2800	0,2100	0,9990	0,9980
			0,2	0,9	0,1	0,7006	0,6347	0,9980	0,9980
					0,05	0,5599	0,4870	1,0000	0,9990
					0,01	0,2814	0,2106	1,0000	0,9990
	0,9	0,2	0,1	1,0000	0,9980	0,9980	0,9980		
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	0,9	0,1	0,9920	0,9890	1,0000	0,9980
					0,05	0,9780	0,9790	1,0000	1,0000
					0,01	0,9470	0,9420	1,0000	1,0000
0,2			0,2	0,1	0,9460	0,9330	1,0000	1,0000	
				0,05	0,8960	0,8830	1,0000	1,0000	
				0,01	0,7380	0,7150	1,0000	1,0000	
120	40	20	0,2	0,9	0,1	0,9450	0,9330	1,0000	1,0000
					0,05	0,8970	0,9320	1,0000	1,0000
					0,01	0,7420	0,9310	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9	0,9	0,1	0,9	0,1	0,9990	0,9990	0,9990	0,9990	
				0,05	0,9990	0,9990	0,9990	0,9990	
				0,01	0,9990	0,9990	0,9990	0,9990	
		0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
				0,05	0,9970	0,9970	1,0000	1,0000	
				0,01	0,9701	0,9701	1,0000	1,0000	
240	80	40	0,2	0,9	0,1	0,9980	0,9980	1,0000	1,0000
					0,05	0,9950	0,9950	1,0000	1,0000
					0,01	0,9680	0,9680	1,0000	1,0000
			0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
		0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
		0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			

Continuação da Tabela 17:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	LRTOB	LRTORB	TB	TRB	
480	160	80	0,2	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
					0,05	0,9991	0,9991	0,9991	0,9991	
					0,01	0,9991	0,9991	0,9991	0,9991	
			0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
			0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
			0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000			
	960	320	160	0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
						0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
						0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2				0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
					0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
					0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
0,2	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
		0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
		0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
0,9	0,2	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
		0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
		0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
0,9	0,9	0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
		0,05	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
		0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				

Tabela 18 – Taxa de erro tipo I e poder para os testes traço ( $TB$ ) e traço robusto ( $TRB$ ) com  $p_1 + p_2 > n$ ,  $\rho_1 = 0,9$  e  $0,2$  e  $\rho_2 = 0,9$  e  $0,2$  considerando a distribuição lognormal.

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder	
						$TB$	$TRB$	$TB$	$TRB$
30	20	10	0,2	0,2	0,1	0,0595 <sup>-</sup>	0,0475 <sup>-</sup>	0,9790	0,9620
					0,05	0,0225 <sup>-</sup>	0,0180 <sup>-</sup>	0,9720	0,9260
					0,01	0,0025 <sup>-</sup>	0,0040 <sup>-</sup>	0,9120	0,8180
			0,2	0,9	0,1	<b>0.0835</b>	0,0730 <sup>-</sup>	0,9860	0,9590
					0,05	<b>0.0420</b>	0,0350 <sup>-</sup>	0,9740	0,9220
					0,01	<b>0.0080</b>	<b>0.0050</b>	0,8980	0,8090
	0,9	0,2	0,1	0,00601 <sup>-</sup>	0,00501 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	0,03604 <sup>-</sup>	0,03704 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,08208 <sup>+</sup>	0,06406 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,1	<b>0.1040</b>	<b>0.1145</b>	1,0000	1,0000		
			0,05	<b>0.0555</b>	<b>0.0575</b>	1,0000	1,0000		
			0,01	<b>0.0100</b>	<b>0.0150</b>	1,0000	1,0000		
60	40	20	0,2	0,2	0,1	0,0720 <sup>-</sup>	0,0635 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0330 <sup>-</sup>	0,0295 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0.0055</b>	<b>0.0065</b>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,0810 <sup>-</sup>	0,0735 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	<b>0.0400</b>	0,0325 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0.0080</b>	<b>0.0080</b>	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,1	<b>0.0850</b>	<b>0.0860</b>	1,0000	1,0000		
			0,05	<b>0.0460</b>	<b>0.0445</b>	1,0000	1,0000		
			0,01	<b>0.0100</b>	<b>0.0120</b>	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	<b>0.1130</b>	0,1190 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	<b>0.0580</b>	<b>0.0650</b>	1,0000	1,0000		
			0,01	<b>0.0145</b>	<b>0.0095</b>	1,0000	1,0000		
120	80	40	0,2	0,2	0,1	0,0751 <sup>-</sup>	0,0734 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	0,0361 <sup>-</sup>	0,0356 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0029 <sup>-</sup>	0,0046 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
			0,2	0,9	0,1	0,0065 <sup>-</sup>	0,0065 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,05	<b>0.0460</b>	<b>0.0470</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0915 <sup>+</sup>	0,0900 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
	0,9	0,2	0,1	0,0075 <sup>-</sup>	0,0075 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	<b>0.0495</b>	<b>0.0470</b>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,1020 <sup>+</sup>	0,0900 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		
	0,9	0,9	0,1	0,0080 <sup>-</sup>	0,0120 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000		
			0,05	<b>0.0505</b>	<b>0.0520</b>	1,0000	1,0000		
			0,01	0,1030 <sup>+</sup>	0,0970 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000		

Continuação da Tabela 18:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder		
						$TB$	$TRB$	$TB$	$TRB$	
240	160	80			0,1	0,0063 <sup>-</sup>	0,0063 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,05	<b>0,0439</b>	<b>0,0429</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1036 <sup>+</sup>	0,1025 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000	
					0,1	0,0079 <sup>-</sup>	0,0089 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,05	<b>0,0434</b>	<b>0,0434</b>	1,0000	1,0000
					0,01	0,1046 <sup>+</sup>	0,1056 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000	
		0,9	0,2			0,1	0,0050 <sup>-</sup>	0,0050 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0440</b>	<b>0,0470</b>	1,0000	1,0000
						0,01	0,0050 <sup>-</sup>	0,0050 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
						0,1	0,0049 <sup>-</sup>	0,0059 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0464</b>	<b>0,0513</b>	1,0000	1,0000
						0,01	0,0049 <sup>+</sup>	<b>0,0059</b>	1,0000	1,0000
480	320	160			0,1	<b>0,0977</b>	<b>0,0977</b>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,05	<b>0,0464</b>	<b>0,0464</b>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0059</b>	<b>0,0059</b>	1,0000	1,0000	
					0,1	0,0094 <sup>-</sup>	0,0104 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,05	0,0094 <sup>-</sup>	0,0104 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0094</b>	<b>0,0104</b>	1,0000	1,0000	
		0,9	0,2			0,1	0,0956	0,0956	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0431</b>	0,0031 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,01	0,0037 <sup>-</sup>	0,0031 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,1	<b>0,1097</b>	<b>0,1087</b>	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0487</b>	0,0115 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,01	0,1097 <sup>+</sup>	0,1087 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
30	30	10			0,1	0,0025 <sup>-</sup>	0,0025 <sup>-</sup>	0,9940	0,9790	
					0,2	0,05	0,0245 <sup>-</sup>	0,0175 <sup>-</sup>	0,9840	0,9500
					0,01	<b>0,0580</b>	0,0440 <sup>-</sup>	0,9280	0,8400	
					0,1	0,0084 <sup>-</sup>	0,0042 <sup>-</sup>	0,9940	0,9790	
					0,2	0,05	0,0358 <sup>-</sup>	0,0358 <sup>-</sup>	0,9840	0,9500
					0,01	0,0752 <sup>+</sup>	0,0699 <sup>+</sup>	0,9280	0,8400	
		0,9	0,2			0,1	0,0104 <sup>-</sup>	0,0089 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0464</b>	<b>0,0531</b>	1,0000	1,0000
						0,01	<b>0,0104</b>	<b>0,0089</b>	1,0000	1,0000
						0,1	0,0150 <sup>-</sup>	0,0125 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0550</b>	<b>0,0605</b>	1,0000	1,0000
						0,01	<b>0,0150</b>	<b>0,0125</b>	1,0000	1,0000

Continuação da Tabela 18:

n	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\alpha$	erro tipo I		poder		
						$TB$	$TRB$	$TB$	$TRB$	
60	40	30			0,1	0,0055 <sup>-</sup>	0,0050 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,05	<b>0,0385</b>	0,0360 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0730 <sup>+</sup>	0,0615 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000	
					0,1	0,0085 <sup>-</sup>	0,0075 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,05	<b>0,0420</b>	0,0345 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
					0,01	0,0825 <sup>+</sup>	0,0780 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000	
		0,9	0,2			0,1	0,0080 <sup>-</sup>	0,0065 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0405</b>	0,0355 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,01	0,0840 <sup>+</sup>	0,0800 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
						0,1	0,0080 <sup>-</sup>	0,0125 <sup>-</sup>	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0530</b>	<b>0,0585</b>	1,0000	1,0000
						0,01	0,1045 <sup>+</sup>	0,0970 <sup>+</sup>	1,0000	1,0000
480	220	320			0,1	<b>0,0955</b>	<b>0,0955</b>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,05	<b>0,0447</b>	<b>0,0447</b>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0081</b>	<b>0,0081</b>	1,0000	1,0000	
					0,1	<b>0,1028</b>	<b>0,1049</b>	1,0000	1,0000	
					0,2	0,05	<b>0,0477</b>	<b>0,0487</b>	1,0000	1,0000
					0,01	<b>0,0042</b>	<b>0,0042</b>	1,0000	1,0000	
		0,9	0,2			0,1	<b>0,0965</b>	<b>0,0965</b>	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0488</b>	<b>0,0466</b>	1,0000	1,0000
						0,01	<b>0,0055</b>	<b>0,0055</b>	1,0000	1,0000
						0,1	<b>0,0995</b>	<b>0,0984</b>	1,0000	1,0000
						0,05	<b>0,0469</b>	<b>0,0481</b>	1,0000	1,0000
						0,01	<b>0,0092</b>	<b>0,0092</b>	1,0000	1,0000

**APÊNDICE B – Comandos usados no R**

```
### This function computes the direct sum of two vectors or
```

```
### matrices resulting in a block diagonal matrix
```

```
###
```

```
### Arguments
```

```
### x = a numeric matrix or vector
```

```
### y = a numeric matrix or vector
```

```
###
```

```
direct.sum <- function(x, y)
```

```
{
```

```
  if ( is.vector( x ) ) {
```

```
    A <- matrix( x )
```

```
  }
```

```
  else {
```

```
    if (is.matrix( x ) ) {
```

```
      A <- x
```

```
    }
```

```
    else {
```

```
      stop("Argument x is not a matrix or vector")
```

```
    }
```

```
  }
```

```
  if ( is.vector( y ) ) {
```

```
    B <- matrix( y )
```

```
  }
```

```
  else {
```

```
    if ( is.matrix( y ) ) {
```

```
      B <- y
```

```
    }
```

```
    else {
```

```
      stop("Argument y is not a matrix or vector")
```

```
    }
```

```
  }
```

```

C <- rbind(cbind(A, matrix(0, nrow = nrow(A), ncol = ncol(B))),
           cbind(matrix(0, nrow = nrow(B), ncol = ncol(A)), B))
return(C)
}

```

```

# Teste do traço, com distribuição qui-quadrado assintótica

```

```

# da estatística com estimador de Sigma tradicional

```

```

T.test <- function(X, p1, p2)

```

```

{

```

```

  n <- nrow(X)

```

```

  p <- ncol(X)

```

```

  R <- cor(X)

```

```

  g2 <- (p1 + p2) ^2 - (p1 ^2 + p2 ^2)

```

```

  g3 <- (p1 + p2) ^3 - (p1 ^3 + p2 ^3)

```

```

  C <- (4 * g3 + 6 * g2) / (12 * (n - 1) * g2)

```

```

  Rm <- (R - direct.sum(R[1:p1,1:p1], R[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p]))

```

```

  chi2T <- (n - 1) / 2 * (1.0 - C) * sum(diag(Rm %*% Rm))

```

```

  nu <- p1 * p2

```

```

  p.value <- 1.0 - pchisq(chi2T, nu)

```

```

  return(list(chi2T = chi2T, p.value = p.value))

```

```

}

```

```

# Teste do traço robusto, com distribuição qui-quadrado

```

```

# assintótica da estatística com estimador de Sigma robusta.

```

```

# Depende do pacote robustbase

```

```

library(robustbase)

```

```

TR.test <- function(X, p1, p2)

```

```

{

```

```

  SR <- covComed(X)$cov

```

```

  DInvRoot <- diag(diag(SR) ^(-0.5))

```

```

  R <- DInvRoot %*% SR %*% DInvRoot

```

```

n <- nrow(X)
p <- ncol(X)
g2 <- (p1 + p2)^2 - (p1 ^2 + p2^2)
g3 <- (p1 + p2) ^3 - (p1^3 + p2^3)
C <- ( 4 * g3 + 6 * g2) / (12 * (n - 1) * g2)
Rm <- (R - direct.sum(R[1:p1,1:p1], R[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p]))
chi2T <- (n - 1) / 2 * (1.0 - C) * sum(diag(Rm %*% Rm))
nu <- p1 * p2
p.value <- 1 - pchisq(chi2T, nu)
return(list(chi2TR = chi2T, p.value = p.value))
}

# Teste LRT original com correção de Box (1949), com distribuição
# qui-quadrado assintótica da estatística.
LRTO.test <- function(X, p1, p2)
{
  S <- var(X)
  n <- nrow(X)
  p <- ncol(X)
  g2 <- (p1 + p2) ^2 - (p1 ^2 + p2 ^2)
  g3 <- (p1 + p2) ^3 - (p1 ^3 + p2 ^3)
  C <- (4 * g3 + 6 * g2) / (12 * (n - 1) * g2)
  chi2T <- -(n - 1) * (1 - C) *
    (sum(log(eigen(S)$values)) -
     (sum(log(eigen(S[1:p1,1:p1])$values)) +
      sum(log(eigen(S[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p])$values))))
  nu <- p1 * p2
  p.value <- 1 - pchisq(chi2T, nu)
  return(list(chi2TR = chi2T, p.value = p.value))
}

```

```
# Teste LRT robusto com correção de Box (1949), com distribuição
# qui-quadrado assintótica da estatística.
```

```
# Depende do pacote robustbase
```

```
LRTR.test <- function(X, p1, p2)
```

```
{
```

```
  S <- covComed(X)$cov
```

```
  n <- nrow(X)
```

```
  p <- ncol(X)
```

```
  g2 <- (p1 + p2) ^2 - (p1 ^2 + p2 ^2)
```

```
  g3 <- (p1 + p2) ^3 - (p1 ^3 + p2 ^3)
```

```
  C <- (4 * g3 + 6 * g2) / (12 * (n - 1) * g2)
```

```
  chi2T <- -(n - 1) * (1 - C) * (sum(log(eigen(S)$values)) -
```

```
    (sum(log(eigen(S[1:p1,1:p1])$values)) +
```

```
      sum(log(eigen(S[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p])$values))))
```

```
  nu <- p1 * p2
```

```
  p.value <- 1 - pchisq(chi2T, nu)
```

```
  return(list(chi2TR = chi2T, p.value = p.value))
```

```
}
```

```
# Testes bootstrap robustos: todos baseados no estimador
```

```
# robusto de Sigma para criar a  $N_p(X^{*m} D^{*})$ , impondo
```

```
#  $H_0$ . Assim LRTO e LRTR usam a mesma distribuição, bem
```

```
# como o T e TR. Diferença só na estimativa original
```

```
BP.test <- function(X, p1, p2, B = 2000)
```

```
{
```

```
  n <- nrow(X)
```

```
  p <- ncol(X)
```

```
  LRTO <- LRTO.test(X, p1, p2)
```

```
  LRTR <- LRTR.test(X, p1, p2)
```

```
  TO <- T.test(X, p1, p2)
```

```
  TR <- TR.test(X, p1, p2)
```

```
  robust <- covComed(X)
```

```

Sest <- robust$cov
Xest <- robust$center
Dest <- direct.sum(Sest[1:p1,1:p1], Sest[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p])
g2 <- (p1 + p2)^2 - (p1^2 + p2^2)
g3 <- (p1 + p2)^3 - (p1^3 + p2^3)
C <- (4 * g3 + 6 * g2) / (12 * (n - 1) * g2)
LRTB <- NULL
LRTRB <- NULL
TB <- NULL
TRB <- NULL
ct <- 1 / (B + 1)
pvalue.TO <- ct
pvalue.TR <- ct
pvalue.LRTO <- ct
pvalue.LRTR <- ct
for (i in 1:B)
{
  Xb <- mvnorm(n, Xest, Dest)
  S <- var(Xb)
  chi2LRT <- -(n - 1) * (1 - C) * (sum(log(eigen(S)$values)) -
    (sum(log(eigen(S[1:p1,1:p1])$values)) +
      sum(log(eigen(S[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p])$values))))
  SR <- covComed(Xb)$cov
  chi2LRTR <- -(n - 1) * (1 - C) * (sum(log(eigen(SR)$values)) -
    (sum(log(eigen(SR[1:p1,1:p1])$values)) +
      sum(log(eigen(SR[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p])$values))))
  LRTB <- c(LRTB, chi2LRT)
  LRTRB <- c(LRTRB, chi2LRTR)
  R <- cor(Xb)
  Rm <- (R - direct.sum(R[1:p1,1:p1], R[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p]))
  chi2TB <- (n - 1) / 2 * (1 - C) * sum(diag(Rm %*% Rm))
  DInvRoot <- diag(diag(SR)^(-0.5))
}

```

```

RR <- DInvRoot %*% SR %*% DInvRoot
RRm <- (RR - direct.sum(RR[1:p1,1:p1], RR[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p]))
chi2TRB <- (n - 1) / 2 * (1 - C) * sum(diag(RRm %*% RRm))
TB <- c(TB, chi2TB)
TRB <- c(TRB, chi2TRB)
if (chi2LRT >= LRTO$chi2TR) pvalue.LRTO <- pvalue.LRTO + ct
if (chi2LRTR >= LRTR$chi2TR) pvalue.LRTR <- pvalue.LRTR + ct
if (chi2TB >= TO$chi2T) pvalue.TO <- pvalue.TO + ct
if (chi2TRB >= TR$chi2TR) pvalue.TR <- pvalue.TR + ct
}
return(list(LRTO = LRTO$chi2TR, pvalue.LRTO = pvalue.LRTO,
           LRTR = LRTR$chi2TR, pvalue.LRTR = pvalue.LRTR,
           TO = TO$chi2T, pvalue.TO = pvalue.TO,
           TR = TR$chi2TR, pvalue.TR = pvalue.TR))
}

```

# Testes bootstrap robustos ( $p \geq n$ ): todos baseados no estimador

# robusto de Sigma para criar a  $N_p(X \wedge^m D \wedge^*)$ , impondo

#  $H_0$ . BPpGEn.test <- function(X, p1, p2, B = 2000)

```

{
  n <- nrow(X)
  p <- ncol(X)
  # LRTO <- LRTO.test(X, p1, p2)
  # LRTR <- LRTR.test(X, p1, p2)
  TO <- T.test(X, p1, p2)
  TR <- TR.test(X, p1, p2)
  robust <- covComed(X)
  Sest <- robust$cov
  Xest <- robust$center
  Dest <- direct.sum(Sest[1:p1,1:p1], Sest[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p])
  g2 <- (p1 + p2) ^2 - (p1 ^2 + p2 ^2)
  g3 <- (p1 + p2) ^3 - (p1 ^3 + p2 ^3)

```

```

C <- (4 * g3 + 6 * g2) / (12 * (n - 1) * g2)
# LRTB <- NULL
# LRTRB <- NULL
TB <- NULL
TRB <- NULL
ct <- 1 / (B + 1)
pvalue.TO <- ct
pvalue.TR <- ct
# pvalue.LRTO <- ct
# pvalue.LRTR <- ct
for (i in 1:B)
{
  Xb <- mvrnorm(n, Xest, Dest)
  # S <- var(Xb)
  # chi2LRT <- -(n - 1) * (1 - C) * (sum(log(eigen(S)$values)) -
    # (sum(log(eigen(S[1:p1,1:p1])$values)) +
    # sum(log(eigen(S[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p])$values))))
  SR <- covComed(Xb)$cov
  # chi2LRTR <- -(n - 1) * (1 - C) * # (sum(log(eigen(SR)$values)) -
    # (sum(log(eigen(SR[1:p1,1:p1])$values)) +
    # sum(log(eigen(SR[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p])$values))))
  # LRTB <- c(LRTB, chi2LRT)
  # LRTRB <- c(LRTRB, chi2LRTR)
  R <- cor(Xb)
  Rm <- (R - direct.sum(R[1:p1,1:p1], R[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p]))
  chi2TB <- (n - 1) / 2 * (1 - C) * sum(diag(Rm %*% Rm))
  DInvRoot <- diag(diag(SR) ^(-0.5))
  RR <- DInvRoot %*% SR %*% DInvRoot
  RRm <- (RR - direct.sum(RR[1:p1,1:p1], RR[(p1 + 1):p,(p1 + 1):p]))
  chi2TRB <- (n - 1) / 2 * (1 - C) * sum(diag(RRm %*% RRm))
  TB <- c(TB, chi2TB)
  TRB <- c(TRB, chi2TRB)
}

```

```

# if (chi2LRT >= LRTO$chi2TR) pvalue.LRTO <- pvalue.LRTO + ct
# if (chi2LRTR >= LRTR$chi2TR) pvalue.LRTR <- pvalue.LRTR + ct
if (chi2TB >= TO$chi2T) pvalue.TO <- pvalue.TO + ct
if (chi2TRB >= TR$chi2TR) pvalue.TR <- pvalue.TR + ct
}
# return(list(LRTO = LRTO$chi2TR, pvalue.LRTO = pvalue.LRTO,
             # LRTR = LRTR$chi2TR, pvalue.LRTR = pvalue.LRTR,
             # TO = TO$chi2T, pvalue.TO = pvalue.TO,
             # TR = TR$chi2TR, pvalue.TR = pvalue.TR))
}
return(list(TO = TO$chi2T, pvalue.TO = pvalue.TO,
           TR = TR$chi2TR, pvalue.TR = pvalue.TR))
}

```

```

# Simular amostras lognormal

```

```

logNormalp <- function(n, mu, Sigma)

```

```

{
  p <- nrow(Sigma)
  M <- matrix(rep(exp(mu + diag(Sigma) / 2), times = n),
             n, p, byrow = TRUE)
  X <- exp(mvnorm(n, mu, Sigma)) - M
  return(X)
}

```

```

#similar amostras normal multivariada contaminada

```

```

library(MASS)

```

```

rNCM <- function(n, delta , mu, mu2, Sigma, Sigma2)

```

```

{
  p <- nrow(Sigma)
  u <- runif(n)
  n1 <- length(u[u <= delta])
  if (n1 < 1) n1 <- 1

```

```

n2 <- n - n1
X <- matrix(0, n, p)
X[u <= delta, ] <- mvrnorm(n1, mu, Sigma)
if (n2 > 0) X[u > delta, ] <- mvrnorm(n2, mu2, Sigma2)
return(X)
}

# Programa para realizar simulações Monte Carlo
# Simular as populações 1: Normal, 2: Normal Contaminada
# 3: t de Student com nu=5, 4: t multivariada t=30,
# 5: lognormal.
# Sob H_0: independência de 2 grupos e
# Sob H_1: sem restrições
# Normal Contaminada: delta = 0.9 (contaminação é 1-delta)
library(MASS)
library(mvtnorm)
Sim_TestInd_Desemp <- function(dist = 1, h0 = TRUE, N = 1000, B = 2000,
                               n, p1, p2, rho1 = 0.2, rho2 = 0.2, sig2 = 10,
                               delta = 0.9)
{
  rej <- matrix(0, 8, 3)
  rownames(rej) <- c("LRTOA", "LRTRA", "TA", "TRA", "LRTOB", "LRTRB", "TB", "TRB")
  colnames(rej) <- c("0,10", "0,05", "0,01")
  N1R <- 1.0 / N
  p <- p1 + p2
  mu <- rep(0, times = p)
  if (h0 == TRUE)
  {
    Sigma1 <- sig2 * ((1 - rho1) * diag(p1) + rho1 * matrix(1, p1, p1))
    sig2_2 <- 15
    Sigma2 <- sig2_2 * ((1 - rho2) * diag(p2) + rho2 * matrix(1, p2, p2))
    Sigma <- direct.sum(Sigma1, Sigma2) } else Sigma <- sig2 * ((1 - rho1) * diag(p) +

```

```

rho1 * matrix(1, p, p))
  if (dist == 2) # Normal Contaminada - Pensar Parâmetros
  {
mu2 <- rep(10, times = p)
Sigma2 <- 2 * Sigma
  }
resultpvalue <- matrix(c(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),1,8)
colnames(resultpvalue) <- c("LRTOA","LRTRA","TA","TRA","LRTOB","LRTRB","TB",
"TRB")
# lixo <- NULL
for (i in 1:N)
{
  if (dist == 1) X <- mvrnorm(n, mu, Sigma) else
    if (dist == 2) X <- rNCM(n, delta, mu, mu2, Sigma, Sigma2) else
      if (dist == 3) {
        if (h0 == TRUE) {
          X1 <- rmvt(n, Sigma1, df = 5)
          X2 <- rmvt(n, Sigma2, df = 5)
          X <- cbind(X1, X2)
        } else X <- rmvt(n, Sigma, df = 5) } else
        if (dist == 4) {
          if (h0 == TRUE) {
            X1 <- rmvt(n, Sigma1, df = 30)
            X2 <- rmvt(n, Sigma2, df = 30)
            X <- cbind(X1, X2)
          } else X <- rmvt(n, Sigma, df = 30) } else
          if (dist == 5) X <- logNormalp(n, mu, Sigma)
          res1 <- LRTO.test(X, p1, p2)
          res2 <- LRTR.test(X, p1, p2)
          res3 <- T.test(X, p1, p2)
          res4 <- TR.test(X, p1, p2)
          # res3

```

```

#lixo <- c(lixo,res3$chi2T)
#cor(X)
if (p>= n) res5 <- BPpGEn.test(X, p1, p2, B) else
res5 <- BP.test(X, p1, p2, B)
# if (res1$p.value <= 0.10) rej[1,1] <- rej[1,1] + N1R
# if (res1$p.value <= 0.05) rej[1,2] <- rej[1,2] + N1R
# if (res1$p.value <= 0.01) rej[1,3] <- rej[1,3] + N1R
# if (res2$p.value <= 0.10) rej[2,1] <- rej[2,1] + N1R
# if (res2$p.value <= 0.05) rej[2,2] <- rej[2,2] + N1R
# if (res2$p.value <= 0.01) rej[2,3] <- rej[2,3] + N1R
# if (res3$p.value <= 0.10) rej[3,1] <- rej[3,1] + N1R
# if (res3$p.value <= 0.05) rej[3,2] <- rej[3,2] + N1R
# if (res3$p.value <= 0.01) rej[3,3] <- rej[3,3] + N1R
# if (res4$p.value <= 0.10) rej[4,1] <- rej[4,1] + N1R
# if (res4$p.value <= 0.05) rej[4,2] <- rej[4,2] + N1R
# if (res4$p.value <= 0.01) rej[4,3] <- rej[4,3] + N1R
#if (res5$pvalue.LRTO <= 0.10) rej[5,1] <- rej[5,1] + N1R
if (res5$pvalue.LRTO <= 0.05) rej[5,2] <- rej[5,2] + N1R
#if (res5$pvalue.LRTO <= 0.01) rej[5,3] <- rej[5,3] + N1R
#if (res5$pvalue.LRTR <= 0.10) rej[6,1] <- rej[6,1] + N1R
if (res5$pvalue.LRTR <= 0.05) rej[6,2] <- rej[6,2] + N1R
#if (res5$pvalue.LRTR <= 0.01) rej[6,3] <- rej[6,3] + N1R
#if (res5$pvalue.TO <= 0.10) rej[7,1] <- rej[7,1] + N1R
if (res5$pvalue.TO <= 0.05) rej[7,2] <- rej[7,2] + N1R
#if (res5$pvalue.TO <= 0.01) rej[7,3] <- rej[7,3] + N1R
#if (res5$pvalue.TR <= 0.10) rej[8,1] <- rej[8,1] + N1R
if (res5$pvalue.TR <= 0.05) rej[8,2] <- rej[8,2] + N1R
#if (res5$pvalue.TR <= 0.01) rej[8,3] <- rej[8,3] + N1R
# resultpvalue[,1] <- res1$p.value
# resultpvalue[,2] <- res2$p.value
# resultpvalue[,3] <- res3$p.value
# resultpvalue[,4] <- res4$p.value

```

```
resultpvalue[,5] <- res5$pvalue.LRTO
resultpvalue[,6] <- res5$pvalue.LRTR
resultpvalue[,7] <- res5$pvalue.TO
resultpvalue[,8] <- res5$pvalue.TR

if (i==1) write.table(resultpvalue, "/home/vaniaflm/saidacont1.txt",
  row.names = FALSE) else
  write.table(resultpvalue, "/home/vaniaflm/saidacont1.txt", append=TRUE,
  row.names = FALSE, col.names = FALSE)
# if (i==1) write.table(resultpvalue, "C:/Users/vania/OneDrive/Área de
  #Trabalho/simulação/saida/saida23.txt",
  #row.names = FALSE) else
  # write.table(resultpvalue, "C:/Users/vania/OneDrive/Área de
  # Trabalho/simulação/saida/saida9.txt", append=TRUE,
  # row.names = FALSE, col.names = FALSE)
}
return(rej)
}
```