



LAÍLA LUANA CAMPOS

**PROPOSTA DE TESTES DE ESFERICIDADE ROBUSTOS
QUANTO A PRESENÇA DE *OUTLIERS* E A ALTA
DIMENSIONALIDADE DOS DADOS**

LAVRAS – MG

2023

LAÍLA LUANA CAMPOS

**PROPOSTA DE TESTES DE ESFERICIDADE ROBUSTOS QUANTO A PRESENÇA
DE *OUTLIERS* E A ALTA DIMENSIONALIDADE DOS DADOS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Doutor.

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

**LAVRAS – MG
2023**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Campos, Laíla Luana

Proposta de testes de esfericidade robustos quanto a presença de *outliers* e a alta dimensionalidade dos dados / Laíla Luana Campos. – 2023.

115 p. : il.

Tese (doutorado)–Universidade Federal de Lavras, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira.

Coorientador: .

Bibliografia.

1. Robustez. 2. Matriz de Covariâncias. 3. Simulação. I. Ferreira, Daniel Furtado. II. Título.

LAÍLA LUANA CAMPOS

**PROPOSTA DE TESTES DE ESFERICIDADE ROBUSTOS QUANTO A PRESENÇA
DE *OUTLIERS* E A ALTA DIMENSIONALIDADE DOS DADOS
PROPOSAL FOR ROBUST SPHERICITY TESTS REGARDING THE PRESENCE OF
OUTLIERS AND THE HIGH DIMENSIONALITY OF THE DATA**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 15 de março de 2023.

Prof. Dr. Marcelo Tavares	UFU
Prof. Dr. Tiago Moreira Vargas	UFG
Prof. Dr. Lúcio Borges de Araújo	UFU
Prof. Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães	UFLA

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

**LAVRAS – MG
2023**

AGRADECIMENTOS

Aos professores do Departamento de Estatística (DES) da Universidade Federal de Lavras (UFLA), por todo o aprendizado. Em especial ao Daniel Furtado Ferreira, por quem tive a honra de ser orientada. Obrigada por todo o conhecimento, apoio e amizade!

Aos professores da Faculdade de Matemática (FAMAT) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), que me acolheram e me proporcionaram o primeiro contato com o mundo acadêmico. Principalmente aos que se tornaram grandes amigos, além da sala de aula.

A todos os professores que passaram em minha vida, principalmente os que, de alguma forma, se empenharam para ver o meu crescimento profissional e pessoal. Meu muito obrigada!

A todos os membros da banca examinadora, por terem aceitado o convite e por contribuírem com a melhoria do trabalho.

Por receio de esquecer algum nome importante, faço um agradecimento geral a todos que torceram por mim. Aos meus verdadeiros amigos e aos poucos da minha família que, mesmo sem entender a importância desta conquista, me apoiaram e comemoraram a vitória.

Às pessoas queridas e essenciais na minha vida, que, infelizmente, não puderam participar desta conquista. Sei que seriam meu apoio e estariam ao meu lado. Enfim, cumpri minha promessa, papai!

À UFLA, pela oportunidade da realização da pós graduação. À UFU, por me permitir cursar a graduação. Ao Colégio Losango de Formiga e à Escola Municipal Paulo Barbosa, locais em que construí minha base para processar meus estudos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Para a hipótese de esfericidade, propôs-se o estudo de dez testes para verificar a robustez quanto a presença de *outliers* e à alta dimensionalidade dos dados. Como o teste da razão de verossimilhanças se degenera quando $p \geq n$, aplicou-se a estatística do teste de John (1971) (*JAs*) por ser robusta quando $p \geq n$, sua versão modificada: trocando a matriz de covariância pelo estimador comediano (*JAsR*) e as abordagens *bootstrap* (*JB*) e *bootstrap* modificada (*JBR*). Foi estudado também o teste da razão de verossimilhanças (*LRTAs*), assim como o *LRTAs* com a estatística de teste modificada, seguindo o mesmo critério da estatística *J*: *LRTAsR*, *LRTB* e *LRTBR*. Utilizou-se ainda uma adaptação da estatística do teste de máximo proposto por Chen et al. (2020): *TB* e *TBR*. Foram utilizadas as distribuições normal e normal contaminada com 30% de contaminação. Concluiu-se que as versões *bootstrap* dos testes apresentaram um desempenho melhor, pois foram robustas quanto à presença de *outliers*, e que o *JB* e o *JBR* foram, ainda, robustos em relação à alta dimensionalidade dos dados.

Palavras-chave: Robustez. Matriz de Covariâncias. Simulação.

ABSTRACT

For the sphericity hypothesis, the study of ten tests was proposed to verify the robustness regarding the presence of outliers and the high dimensionality of the data. As the likelihood ratio test degenerates when $p \geq n$, the test statistic proposed by John (1971) was applied, as it is robust when $p \geq n$, and its modifications, in which the covariance matrix was replaced by its robust comedian estimator (*JAsR*), its bootstrap version (*JB*) and the modification of the bootstrap version, which replaced the sample covariance matrix by its robust comedian estimator (*JBR*). The likelihood ratio test (*LRTAs*) was also studied, as well as the *LRTAs* with modified test statistics, following the same criteria as the *J* statistic: *LRTAsR*, *LRTB* and *LRTBR*. An adaptation of the maximum test statistic proposed by Chen et al. (2020) was also used: *TB* and *TBR*. The normal and contaminated normal distributions with 30% contamination were used. It was concluded that the bootstrap versions of the tests performed better, as they were robust in terms of the presence of outliers, and that *JB* and *JBR* were also robust in relation to the high dimensionality of the data.

Keywords: Robustness. Covariance Matrix. Simulation.

LISTA DE SIGLAS

AFD: taxa média da descoberta falsa, proposta por Srivastava (2010).

AR: processo autorregressivo.

C: estimador *comedian*.

δ : proporção de contaminação de *outliers* Σ : matriz de covariâncias populacional de ordem $p \times p$.

FDR: método da taxa de descoberta falsa, proposto por Benjamini e Hochberg (1995).

GBIC: critério de informação bayesiana generalizado.

GLRT: teste da razão de verossimilhanças generalizado.

JAs: teste assintótico que utilizou a estatística *J* de John (1971) com *S*.

JAsR: teste assintótico que utilizou a estatística *J* de John (1971) com o estimador *C*.

JB: teste da versão *bootstrap* da estatística *J* de John (1971) com *S*.

JBR: teste da versão *bootstrap* da estatística *J* de John (1971) com o estimador *C*.

LBIT: o melhor teste de esfericidade localmente invariante, proposto por John (1971).

LRT: teste da razão de verossimilhanças.

LRTAs: teste da razão de verossimilhanças assintótico com a covariância clássica (*S*).

LRTAsR: teste da razão de verossimilhanças assintótico com o estimador robusto da covariância (*C*).

LRTB: teste da razão de verossimilhanças versão *bootstrap* com *S*.

LRTBR: teste da razão de verossimilhanças versão *bootstrap* com o estimador *C*.

LRTMC: teste da razão de verossimilhanças versão Monte Carlo utilizando o estimador *S*.

LRTMCR: teste da razão de verossimilhanças versão Monte Carlo utilizando o estimador *C*.

M_d : mediana.

MAD: desvio absoluto mediano.

MIMO: radar *Multiple Imput Multiple Output*.

n: tamanho amostral.

p: número de variáveis (a dimensionalidade dos dados).

QLRT: estatística de teste quasi razão de verossimilhanças, proposta por Li e Yao (2016).

QST: teste de esfericidade quadrática, proposto por Font-Segura et al. (2013).

\mathcal{S} : matriz de covariâncias amostral..

TB : teste do máximo entre as versões *bootstrap* $LRTB$ e JB das estatísticas (3.2) e (3.3).

W : estatística de teste para a hipótese de identidade proposta por Ledoit e Wolf (2002).

WAs : teste assintótico que utiliza a estatística W de Ledoit e Wolf (2002) com o estimador \mathcal{S} .

$WAsR$: teste assintótico que utiliza a estatística W de Ledoit e Wolf (2002) com o estimador \mathcal{C} .

WMC : teste da versão Monte Carlo da estatística W de Ledoit e Wolf (2002) utilizando o estimador \mathcal{S} .

$WMCR$: teste da versão Monte Carlo da estatística W de Ledoit e Wolf (2002) utilizando o estimador \mathcal{C} .

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Tamanhos reais dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.	51
Tabela 4.2 – Tamanhos reais dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.	53
Tabela 4.3 – Tamanhos reais dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.	54
Tabela 4.4 – Tamanhos reais dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.	56
Tabela 4.5 – Valores de poder dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando H_1 : $\Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.	58
Tabela 4.6 – Valores de poder dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando H_1 : $\Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.	60
Tabela 4.7 – Valores de poder dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando H_1 : $\Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.	61

Tabela 4.8 – Valores de poder dos testes <i>LRTB</i> , <i>LRTBR</i> , <i>JB</i> , <i>JBR</i> , <i>TB</i> e <i>TBR</i> considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.	63
Tabela 4.9 – Valores de poder dos testes <i>LRTAs</i> , <i>LRTAsR</i> , <i>JAs</i> e <i>JAsR</i> considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.	64
Tabela 4.10 – Valores de poder dos testes <i>LRTB</i> , <i>LRTBR</i> , <i>JB</i> , <i>JBR</i> , <i>TB</i> e <i>TBR</i> considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.	66
Tabela 4.11 – Valores de poder dos testes <i>LRTAs</i> , <i>LRTAsR</i> , <i>JAs</i> e <i>JAsR</i> considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.	67
Tabela 4.12 – Valores de poder dos testes <i>LRTB</i> , <i>LRTBR</i> , <i>JB</i> , <i>JBR</i> , <i>TB</i> e <i>TBR</i> considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.	68
Tabela 1 – Tamanhos reais dos testes <i>LRTAs</i> , <i>LRTAsR</i> , <i>JAs</i> e <i>JAsR</i> sob a hipótese $H_0: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.	82
Tabela 2 – Tamanhos reais dos testes <i>LRTB</i> , <i>LRTBR</i> , <i>JB</i> , <i>JBR</i> , <i>TB</i> e <i>TBR</i> sob a hipótese $H_0: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.	83

Tabela 3 –	Tamanhos reais dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.	84
Tabela 4 –	Tamanhos reais dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.	85
Tabela 5 –	Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando H_1 : $\Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.	86
Tabela 6 –	Poderes dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando H_1 : $\Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.	87
Tabela 7 –	Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando H_1 : $\Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.	88
Tabela 8 –	Poderes dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando H_1 : $\Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.	89
Tabela 9 –	Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando H_1 : $\Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)I + \rho I]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.	90

Tabela 10 – Poderes dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando H_1 : $\Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.	91
Tabela 11 – Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando H_1 : $\Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.	92
Tabela 12 – Poderes dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando H_1 : $\Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.	93
Tabela 13 – Tamanhos reais dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2\mathbf{I}$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.	94
Tabela 14 – Tamanhos reais dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2\mathbf{I}$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.	95
Tabela 15 – Tamanhos reais dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2\mathbf{I}$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.	96
Tabela 16 – Tamanhos reais dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2\mathbf{I}$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.	97

Tabela 17 – Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.	98
Tabela 18 – Poderes dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.	99
Tabela 19 – Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.	100
Tabela 20 – Poderes dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.	101
Tabela 21 – Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.	102
Tabela 22 – Poderes dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.	103
Tabela 23 – Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.	104

Tabela 24 – Poderes dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando H_1 :
 $\Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)I + \rho I]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repe-
tições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada
com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância. 105

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	Distribuição normal multivariada contaminada	19
2.2	<i>Outliers</i>	20
2.3	Robustez	20
2.3.1	<i>Comedian</i>	21
2.4	Simulação Monte Carlo	23
2.5	Bootstrap	23
2.6	Teste de Esfericidade	24
2.6.1	Teste de identidade	26
2.6.1.1	Teste proposto por Chen et al. (2020)	27
2.6.1.2	Testes propostos por Campos (2019)	29
3	MATERIAL E MÉTODO	42
3.1	Nomenclaturas utilizadas	47
4	RESULTADOS	49
4.1	Desempenho em relação ao controle das taxas do erro do tipo I	49
4.2	Desempenho dos testes em relação ao poder	57
4.3	Considerações finais	67
5	CONCLUSÕES	74
	REFERÊNCIAS	76
	APENDICE A – Resultados ao nível de 10% de significância	82
	APENDICE B – Resultados ao nível de 1% de significância	94
	APENDICE C – Comandos usados no R	106

1 INTRODUÇÃO

Existem vários tipos de testes a respeito das estruturas da matriz de covariâncias. Para cada tipo de hipótese é obtida uma estatística de teste diferente. O teste de esfericidade é um dos vários testes existentes sobre a estrutura da matriz de covariâncias. Nele, o interesse do pesquisador é averiguar se a matriz de covariâncias é composta por variâncias homogêneas e por covariâncias nulas.

O modelo de regressão matricial é dado por: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, em que $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p]'$. Uma das aplicações do teste de esfericidade ocorre na verificação das pressuposições para a análise de regressão, as quais são: os erros (ε_i 's) serem independentes, aleatórios, homocedásticos e normalmente distribuídos com média 0. Assim, para que os erros sejam homocedásticos e independentes, $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma^2 > 0$ e $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, para $i \neq j$, ou seja, $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$, em que \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem p . Como afirmado por Cribari-Neto e Gois (2002), a suposição de homocedasticidade é violada em muitas situações, especialmente quando o interesse reside na modelagem de dados de corte transversal. Neste caso, é muito comum que os dados apresentem heterocedasticidade.

Alguns trabalhos, como o de Ledoit e Wolf (2002), tiveram o objetivo de encontrar testes de esfericidade robustos quanto à alta dimensionalidade dos dados em que $p \geq n$, sendo p o número de variáveis (a dimensionalidade dos dados) e n o tamanho amostral. Campos (2019) realizou um estudo para encontrar ou propor algum teste de esfericidade para variâncias homogêneas e iguais a um e covariâncias nulas robusto em relação à alta dimensionalidade dos dados, na presença de *outliers* e também à assimetria da distribuição. A autora propôs o uso da versão Monte Carlo do teste da razão de verossimilhanças para os casos em que $n > p$, e, para quaisquer situações de n e p , incluindo quando $p \geq n$, recomendou o uso da versão Monte Carlo da estatística W proposta originalmente por Ledoit e Wolf (2002). Nenhum dos testes estudados tiveram um bom desempenho em relação ao controle das taxas de erro do tipo I nos casos de assimetria da distribuição.

Chen et al. (2020) propuseram novas estatísticas para o teste de identidade, cuja hipótese nula a ser testada é: $H_0 : \Sigma = I$, e também para o teste de igualdade entre duas matrizes, alterando a estatística do teste da razão de verossimilhanças (*LRT*) e a estatística baseada na norma Frobenius, considerando o valor absoluto do máximo dessas duas estatísticas modificadas. O teste de identidade proposto teve, em geral, desempenho superior aos testes já existentes, sendo eles os testes de Bai e Silverstein (2008), de Chen, Zhang e Zhong (2010), de Fisher (2012), de Ledoit e Wolf (2002), de Wang, Yao et al. (2013), de Cai, Ma et al. (2013) e de Srivastava, Yanagihara e Kubokawa (2014). O teste proposto apresentou bom desempenho para o caso de alta e de baixa dimensionalidade.

O objetivo deste estudo é propor testes robustos de esfericidade em situações de distribuição normal com e sem *outliers* e também de alta dimensionalidade dos dados. São propostas as versões assintóticas do teste da razão de verossimilhanças e do teste de John (1971), assim como as modificações de suas estatísticas de teste. São, ainda, obtidas as versões *bootstrap* dos testes assintóticos originais e modificados, e do teste de máximo, adaptado de Chen et al. (2020).

O trabalho foi dividido em 5 capítulos, os quais são descritos a seguir. O presente capítulo (1) é a Introdução ao trabalho. No capítulo 2 encontra-se o Referencial Teórico. No capítulo 3 é apresentado a Metodologia utilizada. No capítulo 4 são mostrados os Resultados das simulações dos dados, assim como os comentários. O capítulo 5 dedica-se às Conclusões finais. Após a Referência Bibliográfica, encontram-se os Apêndices A e B, os quais correspondem aos resultados das simulações dos dados considerando 10% e 1% de significância, respectivamente. E, no Apêndice C é disponibilizado o *script* do software *R* utilizado para as simulações realizadas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O tamanho amostral é denotado por n , e o número de variáveis ou a dimensionalidade dos dados, por p . Neste estudo, considerou-se haver alta dimensionalidade dos dados quando $p \geq n$. De acordo com Srivastava, Kollo e Rosen (2011), nos casos com p finito e n grande ($n > p$), não se faz necessária a obtenção de testes robustos. Muitos estudos consideraram encontrar um teste que apresente valores de poder maiores que os testes até então existentes.

Neste trabalho, abordou-se inicialmente os principais conceitos para o desenvolvimento do que foi proposto, tais como distribuição normal multivariada contaminada, *outlier*, robustez, simulação Monte Carlo, *bootstrap*. Seguiu-se com os rudimentos sobre o teste de esfericidade, algumas de suas aplicações e também uma abrangente revisão bibliográfica do teste em estudo.

2.1 Distribuição normal multivariada contaminada

A distribuição normal contaminada multivariada é a mistura de distribuições normais multivariadas. Em uma distribuição normal contaminada, assim como o nome sugere, existem alguns dados que não seguem o comportamento padrão dos demais, os chamados *outliers*. A quantidade de dados discrepantes é determinada pela constante de contaminação, presente na expressão.

A função densidade de probabilidade de um vetor aleatório $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]' \in \mathbb{R}^p$ cuja distribuição é a normal multivariada contaminada é dada por

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \delta(2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}_1|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)' \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) \right\} + \\ + (1 - \delta)(2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}_2|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) \right\},$$

sendo $\boldsymbol{\Sigma}_i$ uma matriz de covariâncias positiva definida, $\boldsymbol{\mu}_i \in \mathbb{R}^p$ o vetor de médias, $i = 1, 2$ e $0 \leq \delta \leq 1$ a constante de contaminação.

2.2 Outliers

Um *outlier* é também conhecido como uma observação discrepante, extrema, atípica, periférica, incomum, não representativa ou remota. Como afirmado por Sathe e Aggarwal (2018), um *outlier* é um ponto que se distancia expressivamente dos demais pontos dos dados, levantando a suspeita de que foi gerado por outro processo. Sajesh e Srinivasan (2013) definiram *outlier* como o ponto que não segue o padrão do restante dos dados. Desta maneira, os dados inseridos incorretamente ou que não pertencem à mesma população que os demais dados podem distorcer as estimativas e gerar resultados enganosos nas análises a que estão sujeitos.

De acordo com Sathe e Aggarwal (2018), os algoritmos para detecção de *outliers* são computacionalmente intensivos. Os autores ressaltaram que no caso da alta dimensão, os atributos irrelevantes ocultam os *outliers* ao mascará-los. Sathe e Aggarwal (2018) e Barbosa, Pereira e Oliveira (2018) afirmaram que a detecção dos *outliers* em alta dimensionalidade é complexa por eles estarem em diferentes subespaços, visto que as variáveis são definidas em um espaço p -dimensional. Assim, Sabino, Lage e Almeida (2014) indicaram utilizar as técnicas estatísticas robustas em casos de presença de *outliers* como uma medida de intervenção para que a análise dos dados não seja prejudicada.

2.3 Robustez

Conforme Campos (2019), o uso de estatísticas robustas visa produzir estimadores que não tenham seu desempenho afetado por pequenas violações nos pressupostos do modelo. Assim, os estimadores robustos permanecem consistentes mesmo em situações de presença de *outliers* e desvios de normalidade dos dados, por exemplo.

Segundo Srivastava, Kollo e Rosen (2011), quando $n > p$, com n grande e p finito, não é necessário o uso de testes robustos, pois o teste clássico *LRT* é eficiente. De acordo com Marden e Gao (2002), desvios de normalidade podem afetar significativamente o tamanho e o poder dos testes estudados. Ronchetti (2006), afirmou, concordando com Srivastava, Kollo e Rosen (2011) e com Marden e Gao (2002), que os procedimentos clássicos são ótimos quando o modelo pressuposto é exatamente satisfeito, mas são viesados e/ou ineficientes quando desvios estão presentes.

Para estimar a matriz de covariâncias existem muitos métodos robustos, e uma maneira para obter os estimadores robustos é modificar as estatísticas dos estimadores clássicos. No presente estudo foi utilizado o *comedian*, assim como realizado por Campos (2019). O seu uso é justificado pelos resultados dos trabalhos de Pereira (2017) e de Sajesh e Srinivasan (2013), os quais concluíram que o *comedian* é o melhor estimador robusto, ao compararem os testes que utilizam o *comedian* e testes que usam outros estimadores robustos.

No trabalho de Pereira (2017) foram propostos e avaliados testes de normalidade multivariada baseados em distâncias robustas quanto à presença de *outliers*. A autora verificou que o teste que usa o *comedian* tem os melhores resultados, controlando as taxas de erro do tipo *I* e obtendo o poder alto sob normalidade multivariada dos dados. O poder de um teste pode estar entre os valores 0 e 1, sendo que, quanto mais próximo de 1, mais alto é o poder do teste. Sajesh e Srinivasan (2013) concluíram que o *comedian* é capaz de detectar todos os *outliers* eficientemente baseado na taxa de sucesso e na taxa de detecção falsa sendo que sua eficiência aumenta com o aumento da dimensionalidade dos dados.

2.3.1 *Comedian*

O *comedian* é uma medida alternativa robusta da matriz de covariâncias, a qual utiliza a mediana (M_d), e foi proposta por Falk (1997). Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, M_d a mediana. O *comedian* de X e Y é definido por:

$$C(X, Y) = M_d[(X - M_d(X))(Y - M_d(Y))].$$

O *comedian* generaliza o desvio absoluto mediano (*MAD*), uma vez que, se $Y = X$, $C(X, Y) = C(Y, Y) = MAD(Y)^2$, o que foi provado por Mantaj, Pater e Wagner (2010). O *MAD*(Y) é dado por:

$$MAD(Y) = M_d[|(Y - M_d(Y))|].$$

Como ressaltado por Rodríguez et al. (2017), o $C(X, Y)$ se assemelha à $Cov(X, Y)$, porém o *comedian* sempre existe, e já a covariância requer a existência dos dois primeiros momentos de X e Y . Palma, Srinivasan e Sajesh (2013) afirmaram que o *comedian* tem outras características

importantes, como a consistência forte e a normalidade assintótica, as quais são provadas por Falk (1997).

Outras propriedades conhecidas do *comedian* são a simetria, a locação invariante e a escala equivariante. A escala equivariante é tal que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $C(X, aY + b) = aC(X, Y)$. A simetria e a locação invariante garantem que $C(X, Y) = C(Y, X)$. Um estimador é consistente se ele se torna cada vez mais próximo do parâmetro na medida que se aumenta o tamanho amostral. O estimador pode ter consistência fraca ou forte, sendo a convergência apenas em probabilidade ou quase certa, respectivamente. $\hat{C}(X, Y)$ é assintoticamente normal se $(\hat{C}(X, Y) - a_n)/b_n \xrightarrow{D} Z$, em que $Z \sim N(0, 1)$ e as constantes a_n e b_n são a média e o desvio padrão assintóticos de $\hat{C}(X, Y)$, respectivamente. As provas das propriedades do *comedian* foram reescritas no trabalho de Campos (2019).

Segundo Sajesh e Srinivasan (2013), o problema de estimadores não positivos semi-definidos ocorre frequentemente em estimativas robustas de matrizes de covariância, o que foi notado também para o *comedian*. Alguns trabalhos, como os de Sajesh e Srinivasan (2012) e de Rousseeuw e Molenberghs (1993) focaram em solucionar esse problema, ou seja, lidar com o estimador da matriz *comedian* não positiva semi-definida. Uma matriz positiva definida tem elementos diagonais estritamente positivos, enquanto uma matriz positiva semi-definida tem elementos diagonais não negativos

O *comedian* é uma medida de dependência entre duas variáveis. Assim, uma matriz *comedian* é uma versão multivariada do *comedian*, conforme observado por Rodríguez et al. (2017). A matriz *comedian* é definida como:

$$\mathbf{C}(\mathbf{Y}) = (C(Y_i, Y_j)),$$

em que $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, p$.

O *comedian* é, portanto, uma estatística robusta para a matriz de covariâncias. Para avaliar o desempenho dos testes no presente estudo, foi utilizada a simulação Monte Carlo. Foram simuladas amostras sob a hipótese nula para avaliar as taxas empíricas do erro do tipo I e sob a hipótese alternativa para estimar o poder dos testes.

2.4 Simulação Monte Carlo

O método de simulação Monte Carlo é um algoritmo computacional que, como afirmado por Pereira (2017), utiliza sequências de números pseudoaleatórios, modelando, assim, a propagação da incerteza. A simulação Monte Carlo vem ganhando uma importância considerável graças ao avanço da informática.

De acordo com Ferreira (2013), a simulação Monte Carlo tem a vantagem de não ser afetada pela alta dimensionalidade dos dados, permite inferir a respeito das distribuições das estatísticas de teste nos casos em que os parâmetros são desconhecidos e também nos casos de violações das suposições dos modelos, além de avaliar o desempenho dos testes por meio da validação do controle das taxas de erro do tipo I e do custo do poder.

A técnica é adequada nos casos em que pode substituir um sistema real e não pode ser empregada quando não se pode determinar, de forma precisa, a distribuição do componente aleatório. No caso de inviabilidade do uso da simulação Monte Carlo, é indicado o uso do método *bootstrap* ou de permutação.

2.5 Bootstrap

Segundo Ferreira (2013), o método *bootstrap* consiste na reamostragem com reposição n vezes de uma amostra original de tamanho n , acarretando a existência de n^n amostras *bootstrap* distintas ordenadas. Em cada uma, é computado o valor de uma estatística ou de uma quantidade pivotal de interesse. A distribuição dessa quantidade de interesse é denominada distribuição *bootstrap*, sendo a inferência realizada com base nessa distribuição.

Os métodos *bootstrap* são utilizados para a realização de testes de hipótese, estimação de parâmetros por intervalos e estimação de erros padrões. Como ressaltado por Ferreira (2013), eles são aplicáveis em situações em que os métodos tradicionais não poderiam ser, como nos casos em que as pressuposições assumidas para os métodos clássicos são violadas.

No *bootstrap* paramétrico, são feitas suposições a respeito da distribuição e reamostram-se observações da distribuição postulada, mas usando os valores das estimativas dos parâmetros no processo de geração de pseudo-amostras. Espera-se que seja mais eficiente quando as suposições paramétricas são verdadeiras, se comparado ao método não-paramétrico.

No *bootstrap* não-paramétrico, o processo de reamostragem se dá a partir da função de distribuição empírica dos dados (ou dos resíduos quando há uma estrutura de regressão). É mais robusto com relação às hipóteses a respeito das distribuições, se comparado ao paramétrico.

2.6 Teste de Esfericidade

No trabalho de Mauchly (1940) foi introduzido o teste de esfericidade, o qual testa a homogeneidade das variâncias e a independência entre as variáveis. A hipótese a ser testada é, portanto,

$$H_0 : \Sigma = \sigma^2 I,$$

em que Σ é a matriz de covariâncias populacional de ordem $p \times p$, σ^2 é uma constante real positiva desconhecida ou não especificada (ou seja, $\sigma^2 > 0$) e I é a matriz identidade de ordem $p \times p$.

Mauchly (1940) mostrou ainda que uma população esférica permanece esférica sob uma transformação linear ortogonal, assim como uma amostra esférica também é invariante sob esta transformação. Segundo Ferreira (2018), como os contornos de mesma densidade são esféricos, o teste resultante é denominado teste de esfericidade.

O teste de esfericidade utiliza a adaptação do teste da razão de verossimilhanças (*LRT*) de Neyman e Pearson (1933) para a hipótese de esfericidade. Para as situações em que $n > p$, o teste estatístico mais apropriado e comumente utilizado é o *LRT* para obter uma função poder monótona crescente da razão dos autovalores da matriz de covariâncias populacional, como mostrado por Carter e Srivastava (1977). Conforme Fisher, Sun e Gallagher (2010), as técnicas clássicas de testes de hipóteses são baseadas na razão de verossimilhanças e se degeneram quando $p > n$.

Srivastava, Yanagihara e Kubokawa (2014) ressaltaram que existem alternativas para os casos em que $p > n$. Uma delas é reduzir a dimensão usando o método da taxa de descoberta falsa (*FDR*) proposta por Benjamini e Hochberg (1995), nos casos em que as observações forem igualmente positivamente relacionadas. Outra é aplicar a taxa média da descoberta falsa (*AFD*) proposta por Srivastava (2010). De acordo com Benjamini e Hochberg (1995), o *FDR*

exige o controle desejável contra erros originários da multiplicidade. Srivastava, Yanagihara e Kubokawa (2014) enfatizaram que o FDR e o AFD não garantem que p possa ser reduzida a uma dimensão muito menor que n .

Onatski et al. (2013) estudaram o poder assintótico do teste de esfericidade sob perturbações em uma única direção desconhecida, pois $(p, n) \rightarrow \infty$. Onatski et al. (2013) concluíram que o poder do LRT aproxima-se do poder assintótico. Desta maneira, o LRT supera, em termos de poder, os testes propostos por John (1971), Ledoit e Wolf (2002), Srivastava (2005) e Bai et al. (2009).

Chen et al. (2020) afirmaram ainda que, para muitos problemas de teste o LRT é considerado o teste mais poderoso quando $p < n$, mas se degenera quando $p > n$. Os autores complementaram com a informação de que quando p é grande se comparado ao n , o LRT corrigido para ser aplicável nestas situações tem desempenho ruim em relação ao poder, embora controle bem os tamanhos do teste.

Teste da razão de verossimilhanças

A teoria do teste da razão de verossimilhanças (LRT) é encontrada em Ferreira (2018). Considere a distribuição da amostra aleatória $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n)'$ indexada por um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, $H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0$ e $H_1: \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1$ duas hipóteses consideradas. Então a estatística de razão de semelhança para testar H_0 versus H_1 é definida como

$$\Lambda = \frac{L_0^*}{L_1^*}, \quad (2.1)$$

em que L_i^* é o maior valor que a taxa de probabilidade leva na região Ω_i , $i = 0, 1$. A estatística equivalente que pode ser usada é

$$-2 \log \Lambda = 2(\log L_1^* - \log L_0^*).$$

É utilizada a aproximação qui-quadrado assintótica que, sob H_0 , $-2\log(\Lambda)$ com $f = \frac{p(p+1)}{2} - 1$ graus de liberdade, é

$$\chi_1^2 = n \left\{ p \log \left[\frac{\text{tr}(\mathbf{S})}{p} \right] - \log |\mathbf{S}| \right\}.$$

O *LRT* é a razão entre a média aritmética e a média geométrica dos autovalores da matriz de covariâncias amostral. Conseqüentemente, ambas as médias são iguais apenas se os autovalores forem todos iguais. Portanto, o teste de esfericidade pode também ser interpretado como sendo um teste de igualdade dos autovalores.

Box (1949) propôs uma correção para obter um melhor desempenho no teste, melhorando a distribuição assintótica de $-2\log(\Lambda)$, a qual é dada por

$$\chi_2^2 = - \left[(n-1) - \frac{2p^2 + p + 2}{6p} \right] \{ \log |\mathbf{S}| - p \log [\text{tr}(\mathbf{S})/p] \},$$

que, sob H_0 , possui distribuição qui-quadrado com $f = p(p+1)/2 - 1$ graus de liberdade.

Em resumo, o teste de esfericidade verifica se as variâncias são homogêneas e as covariâncias são nulas. Quando, além destas suposições, houver a restrição de que as variâncias sejam iguais a 1, obtém-se o teste de identidade.

2.6.1 Teste de identidade

O teste de identidade é um caso particular do teste de esfericidade em que as variâncias são homogêneas e iguais a 1 ($\sigma^2 = 1$) e as covariâncias são nulas. A hipótese a ser testada é dada por:

$$H_0 : \mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}, \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{\Sigma}$ é a matriz de covariâncias populacional de ordem $p \times p$ e \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem $p \times p$.

Wang, Yao et al. (2013) provaram que, se sob a hipótese nula $H_0 : \mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$, em que σ^2 não é especificada, os testes forem independentes do parâmetro de escala σ^2 sob o valor nulo, pode ser assumido que $\sigma^2 = 1$ sem perda de generalidade, ao lidar com as distribuições nulas

dessas estatísticas de testes. Portanto, nas condições citadas, a hipótese de esfericidade torna-se a hipótese de identidade.

Mais recentemente, [Chen et al. \(2020\)](#) propuseram um teste de identidade que superou os demais testes existentes, controlando melhor as taxas de erro do tipo I e obtendo valores de poder mais altos. Assim, o artigo dos referidos autores motivou o presente estudo, em que a estatística do teste de identidade proposta pelos autores foi modificada para a hipótese geral de esfericidade.

2.6.1.1 Teste proposto por [Chen et al. \(2020\)](#)

[Chen et al. \(2020\)](#) propuseram dois novos testes para matrizes de covariâncias de alta dimensão, considerando p grande mas não maior que n , sendo um teste de identidade e o outro teste o de igualdade de duas matrizes de covariâncias. Os testes propostos são aplicáveis em populações vindas de distribuições com quatro momentos finitos. O presente trabalho focou no teste de identidade proposto por [Chen et al. \(2020\)](#), o qual foi adaptado para o problema em estudo.

A estatística do LRT para o teste de identidade é dada por

$$L_1 = tr\mathbf{A} - \log|\mathbf{A}| - p, \quad (2.3)$$

em que:

$$\mathbf{A} = (n-1)n^{-1}\mathbf{S},$$

$$\mathbf{S} = \frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top}{n-1},$$

sendo p a dimensão dos dados.

A estatística baseada na norma de Frobenius, também proposta por [Chen et al. \(2020\)](#) para o teste de identidade, é dada por:

$$L_2 = tr[(\mathbf{S} - \mathbf{I})^2], \quad (2.4)$$

em que:

$$\mathbf{S} = \frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top}{n - 1}$$

e \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem $p \times p$.

A estatística proposta por Chen et al. (2020) para a hipótese (2.2), é:

$$T = \max\{|T_1|, |T_2|\},$$

em que $T_1 = \frac{1}{\sigma_1}(tr\mathbf{S} - \log|\mathbf{S}| - \mu_1)$ e $T_2 = \frac{1}{\sigma_2}(tr[(\mathbf{S} - \mathbf{I}_p)^2] - \mu_2)$, são as estatísticas de teste (2.3) e (2.4), respectivamente, padronizadas sob a H_0 dada em (2.2), e μ_1, μ_2, σ_1 e σ_2 são apresentados no Teorema no trabalho de Chen et al. (2020). Para derivar a distribuição assintótica do teste que utiliza a estatística T (T_{max}) sob H_0 , primeiro foi estabelecido o Teorema do Limite Central para $tr\mathbf{S}$, $tr\mathbf{S}^2$ e $\log|\mathbf{S}|$ no Lema mostrado em Chen et al. (2020). O vetor (T_1, T_2) segue uma distribuição assintótica normal bivariada, com vetor de médias zero e com a matriz de covariâncias com dois elementos diagonais iguais a 1 e elementos não diagonais iguais a $\frac{2\gamma_{n-1}^2}{(\sigma_1\sigma_2)}$.

Foram realizadas simulações numéricas para avaliar o desempenho do teste proposto sob distribuições multivariadas normais e não normais. As distribuições foram: a normal padrão ($N(0, 1)$), a distribuição gama ($G(4, 2) - 2$), a qui-quadrado $\left(\frac{\chi_4^2 - 4}{\sqrt{8}}\right)$, a t de Student $\left(\frac{t_6}{\sqrt{1,5}}\right)$, a log-normal ($LN(\mu, \sigma^2)$) e as misturas de distribuições normais ($0,85N(0, 1) + 0,15N(0, 4)$ e $0,85N(0, 1) + 0,15N(0, 9)$). Os cenários de dimensão e tamanho amostral considerados foram de $(p, n) = (40, 80), (40, 160), (40, 320), (40, 640), (80, 160), (80, 320), (80, 640), (160, 320), (160, 640), (320, 640), (480, 640)$, e, para cada um deles realizaram 5000 repetições para a simulação ao nível de significância de 0,05. Para avaliar o tamanho dos testes foram simuladas amostras sob $H_0 : \mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}$. Para avaliar o poder dos testes simularam amostras sob a $H_1 : \mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{p \times p}$, em que $\sigma_{ij} = 1,05$ se $i = j$, $\sigma_{ij} = 0,05$ se $0 < |i - j| \leq 3$ e $\sigma_{ij} = 0$ se $|i - j| > 3$.

O T_{max} foi comparado aos outros testes de identidade propostos por Bai e Silverstein (2008), Chen, Zhang e Zhong (2010), Fisher (2012), Ledoit e Wolf (2002), Wang, Yao et al. (2013), Cai, Ma et al. (2013) e Srivastava, Yanagihara e Kubokawa (2014). O T_{max} superou os demais testes em casos de distribuições com caudas pesadas e pequeno excesso de curtose.

Para distribuições excessivamente pesadas (ou seja, com excesso de curtose), os testes T_{max} , de Bai e Silverstein (2008), Wang, Yao et al. (2013), Cai, Ma et al. (2013) e Srivastava, Yanagihara e Kubokawa (2014) são liberais se (p, n) são pequenos mas se tornam exatos quando (p, n) aumentam. Nos casos de p grande, T_{max} apresenta o maior poder, se comparado às demais estatísticas de teste estudadas. O T_{max} apresenta bom desempenho tanto em baixa quanto em alta dimensionalidade e, em geral, supera os demais testes.

2.6.1.2 Testes propostos por Campos (2019)

No trabalho de Campos (2019) foram utilizadas as seguintes nomenclaturas, definidas no Quadro 2.1.

Quadro 2.1 – Nomenclaturas e descrição dos testes em estudo no trabalho de Campos (2019).

Nome	Descrição
$LRTAs$	Teste da razão de verossimilhanças assintótico utilizando o estimador \mathbf{S} .
$LRTAsR$	Teste da razão de verossimilhanças assintótico utilizando utilizando o estimador \mathbf{C} .
WAs	Teste assintótico que utiliza a estatística W de Ledoit e Wolf (2002) com o estimador \mathbf{S} .
$WAsR$	Teste assintótico que utiliza a estatística W de Ledoit e Wolf (2002) com o estimador \mathbf{C} .
$LRTMC$	Teste da razão de verossimilhanças versão Monte Carlo utilizando o estimador \mathbf{S} .
$LRTMCR$	Teste da razão de verossimilhanças versão Monte Carlo utilizando o estimador \mathbf{C} .
WMC	Teste da versão Monte Carlo da estatística W de Ledoit e Wolf (2002) utilizando o estimador \mathbf{S} .
$WMCR$	Teste da versão Monte Carlo da estatística W de Ledoit e Wolf (2002) utilizando o estimador \mathbf{C} .

Fonte: Campos (2019).

Campos (2019) estudou o desempenho dos testes de identidade assintóticos LRT e W (proposto por Ledoit e Wolf (2002)), denominados por $LRTAs$ e WAs , respectivamente; das

modificações destas versões assintóticas em que a matriz de covariâncias amostral \mathbf{S} foi substituída por seu estimador robusto *comedian* (\mathbf{C}), gerando os testes *LRTAsR* e *WAsR* e das versões Monte Carlo dos testes (*LRTMC*, *WMC*, *LRTMCR* e *WMCR*).

A estatística do teste de razão de verossimilhanças para a hipótese (2.2) com a correção de Korin (1968) é dada por

$$\chi_1^2 = \left[(n-1) - \frac{1}{6} \left(2p+1 - \frac{2}{p+1} \right) \right] [\text{tr}(\mathbf{S}) - \log |\mathbf{S}| - p], \quad (2.5)$$

que, sob H_0 possui distribuição *qui-quadrado* com $\nu = p(p+1)/2$ graus de liberdade, sendo \mathbf{S} o estimador de $\mathbf{\Sigma}$ dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \mathbf{Y}_j' - \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j'}{n} \right] \quad (2.6)$$

e p é o número de variáveis e $\mathbf{Y}_j \in \mathbb{R}^p$, $j = 1, 2, \dots, n$, são as observações amostrais em uma amostra de tamanho n .

A estatística de teste W , de Ledoit e Wolf (2002) é

$$\chi_2^2 = \frac{n}{2} \text{tr}[(\mathbf{S} - \mathbf{I})^2] - \frac{p^2}{2} \left[\frac{1}{p} \text{tr}(\mathbf{S}) \right]^2 + \frac{p^2}{2}, \quad (2.7)$$

sob H_0 segue assintoticamente uma distribuição *qui-quadrado* com $\nu = p(p+1)/2$ graus de liberdade.

A ideia do trabalho de Campos (2019) foi aplicar as estatísticas (2.5) e (2.7), substituindo o estimador (2.6) pelo estimador *comedian* (\mathbf{C}) de $\mathbf{\Sigma}$. As estatísticas (2.5) e (2.7) modificadas ficam

$$\chi_3^2 = \left[(n-1) - \frac{1}{6} \left(2p+1 - \frac{2}{p+1} \right) \right] [\text{tr}(\mathbf{C}) - \log |\mathbf{C}| - p] \quad (2.8)$$

e

$$\chi_4^2 = \frac{n}{2} \text{tr}[(\mathbf{C} - \mathbf{I})^2] - \frac{p^2}{2} \left[\frac{1}{p} \text{tr}(\mathbf{C}) \right]^2 + \frac{p^2}{2}, \quad (2.9)$$

respectivamente. Sob H_0 , é considerada a distribuição *qui*-quadrado assintótica para ambas as estatísticas, com $\nu = p(p+1)/2$ graus de liberdade.

Como as estatísticas de teste (2.5) e (2.7) foram modificadas, tornando-se (2.8) e (2.9), e também por haver violação dos pressupostos do teste de esfericidade, suspeitou-se que a distribuição assintótica *qui*-quadrado com $\nu = p(p+1)/2$ graus de liberdade possa não ser adequada para as estatísticas de teste (2.5), (2.7), (2.8) e (2.9). Então, foi obtida uma versão Monte Carlo de cada uma delas e os autores esperavam haver um ganho no desempenho dos testes.

O trabalho de Campos (2019) resultou em quatro testes robustos quanto à presença de *outliers* para o teste de esfericidade com variâncias homogêneas e iguais a um: *LRTMC*, *LRTMCR*, *WMC* e *WMCR*, sendo que *WMC* e *WMCR* são robustos também quanto à alta dimensionalidade dos dados ($p \geq n$). As versões Monte Carlo dos testes *WMC*, *WMCR*, *LRTMC* e *LRTMCR* têm o desempenho melhor se comparados aos testes assintóticos *WAs*, *WAsR*, *LRTAs* e *LRTAsR*, respectivamente, por controlarem melhor as taxas de erro do tipo *I*. *WMC* e *WMCR* são testes mais poderosos que o teste baseado em *W*.

Não é possível afirmar qual teste é melhor, se *LRTMC*, *LRTMCR*, *WMC* ou *WMCR*, visto que cada um deles controla melhor as taxas de erro do tipo *I* dependendo da distribuição, do tamanho amostral e da dimensionalidade dos dados. Ressalta-se a vantagem de se utilizar *WMC* ou *WMCR*, por serem aplicáveis a qualquer configuração de n e p . Portanto, conclui-se que os testes das versões Monte Carlo *LRTMC*, *LRTMCR*, *WMC* e *WMCR* são robustos quanto à presença de *outliers*, sendo *WMC* e *WMCR* testes robustos também quanto à alta dimensionalidade dos dados.

Aplicações do teste de esfericidade

Williams e Johnson (1990) propuseram uma estatística para o teste de esfericidade para estimar o número de fontes de sonar. A distribuição aproximada desta estatística de teste converge assintoticamente mais rápido para a distribuição *qui*-quadrado se comparada às estatísticas de teste propostas anteriormente, e, portanto, fontes mais fracas são detectadas mais rapida-

mente. A estatística de teste proposta fornece então uma melhor resolução de fontes espaçadas de perto e a capacidade de detectar fontes com melhores relações entre o sinal e o ruído.

Como afirmado por Butler, Huzurbazar e Booth (1993), o teste de esfericidade é também importante na análise de medidas repetidas. Os contrastes ortogonais entre os componentes das observações devem ser não correlacionados e ter variâncias iguais para que os testes F sejam válidos.

El-Sallam, Leung e Zoubir (2005) estudaram uma abordagem no domínio de frequências para estimativas de canal parcimonioso, o que resultou na implementação de um receptor RAKE (isto é, um tipo de receptor de rádio) de baixa complexidade e melhor desempenho em relação aos métodos clássicos. Para tal, os autores mencionados usaram o teste de esfericidade para identificar o número de componentes e caminhos múltiplos significativos.

De acordo com Wang e Yao (2013), se os dados forem um erro multivariado com p componentes e seguirem uma distribuição normal, a hipótese nula de esfericidade representa a hipótese de que o erro é transversalmente não correlacionado, ou seja, independente, e tem a mesma variância (homocedasticidade).

Klausner e Azimi-Sadjadi (2013) estudaram a detecção de objetos subaquáticos nas imagens de sonar usando o teste de esfericidade. O método proposto é adaptável ao local, independente da qualidade da imagem, do alcance do sonar e de qualquer conjunto de treinamento pré-definido. O teste da razão de verossimilhanças generalizado ($GLRT$) foi então usado para discriminar a região de interesse que contém alvos da região que não contém. O método proposto detectou mais de 90% dos alvos no conjunto de dados utilizado neste estudo, ao contrário do método existente comparado, que detectou apenas um pouco mais da metade.

Liu, Sun e Zhao (2017) desenvolveram um método de enumeração de fontes por meio do critério de informação bayesiana generalizado ($GBIC$) baseado em uma estatística para o teste de esfericidade no ruído gaussiano e também no ruído não gaussiano. Sob o ruído branco, a matriz de covariâncias dos componentes dos subespaços de ruído das observações é proporcional à matriz identidade, podendo ser testada, portanto, por um teste de esfericidade. O método proposto tem alta probabilidade de detecção correta tanto no ruído gaussiano quanto no ruído não gaussiano, além de apresentar desempenho melhor quando o número de amostras é menor

que o número de sensores da matriz (ou seja, quando $n < p$), se comparado aos outros métodos existentes aplicáveis a situação. Neste trabalho, Liu, Sun e Zhao (2017) não provaram a consistência da estimativa proposta devido à dificuldade, e sugeriram o tema para o um trabalho posterior.

Smith et al. (2018) propuseram e analisaram a detecção rápida de espectro em uma rede de rádio cognitiva com vários usuários primários e secundários. Para tal, utilizaram o teste de esfericidade de múltiplas amostras e também a metanálise. No teste de esfericidade de múltiplas amostras para a detecção centralizada de espectro, ou seja, a capacidade de usuários secundários de detectar a presença de usuários primários, cada usuário secundário envia ao processador central o traço e o determinante da matriz de covariâncias amostrais para detectar o sinal principal do usuário. Na metanálise, cada usuário secundário envia apenas o valor- p ao processador central. Os autores concluíram haver desempenho muito próximos do teste de esfericidade e da metanálise, sendo que a metanálise exige somente metade de informação enviada ao processador central, reduzindo pela metade a sua sobrecarga.

Xiao et al. (2018) utilizaram o teste de esfericidade invariante localmente mais poderoso de vetores gaussianos proposto por Ramirez et al. (2013) para detectar alvos no radar *Multiple Input Multiple Output* (MIMO). Os autores mencionados obtiveram um desempenho superior se comparado a outros métodos já existente, além da redução do tempo computacional gasto.

Como observado, o teste de esfericidade tem inúmeras aplicações em estudos já publicados. A seguir foram descritos, de forma resumida, alguns trabalhos a respeito do teste de esfericidade, assim como suas contribuições. Os relatos foram ordenados de forma crescente pelos anos de publicações.

Outros estudos sobre o teste de esfericidade

O teste de esfericidade foi proposto por Mauchly (1940) baseado no *LRT* nas situações em que $n \geq p$. Entretanto, nos casos em que $n < p$, o *LRT* não é aplicável. Sugiura e Nagao (1968) afirmaram que o *LRT* para o teste de esfericidade é imparcial e provaram que o teste de esfericidade também é imparcial no caso de amostra, ao reduzir o tamanho da amostra (n) para os graus de liberdade $n - 1$ do teste *LRT*. Sugiura (1969) desenvolveu a distribuição nula

e também a distribuição não nula, ambas assintóticas, para a hipótese de esfericidade. Khatri e Srivastava (1971) estabeleceram uma distribuição exata não nula para a hipótese do teste de esfericidade. Pillai, Nagarsenker et al. (1971) obtiveram os momentos da estatística de teste proposta por Mauchly (1940) em populações normal com matriz de covariâncias desconhecida, em casos reais e complexos.

John (1971) propôs um teste que foi considerado por Sugiura (1972) e por Nagao (1973) como o melhor teste localmente invariante (*LBIT*), e foi construído sob a suposição de que $p/n \rightarrow 0$ para testar a hipótese de identidade da matriz de covariâncias. Destaca-se que o *LBIT* pode ser computado para todos os tamanhos amostrais, incluindo os casos em que $n < p$, porém, isto não pode ser justificado teoricamente.

Nagarsenker e Pillai (1973) desenvolveram métodos similares aos de Box (1949), de Nair (1938) e de Nair (1940) para obtenção da distribuição nula exata para a estatística de teste proposta por Mauchly (1940) sob distribuição normal p -variada. Nagarsenker e Pillai (1973) simularam alguns pontos da distribuição exata da estatística de teste proposta por Mauchly (1940), da aproximação de Mauchly (1940), da série de Box (1949) e de aproximações de Willks e Tukey. Concluíram que as aproximações de Mauchly (1940) são ruins para $p = 3$, mesmo considerando tamanhos moderados para n , e que as aproximações de Box (1949) têm desempenho razoavelmente bom se n moderado e p pequeno.

Nagarsenker e Nagarsenker (1981) testaram a estrutura de esfericidade de uma matriz Hermitiana, ou seja, testaram se todos os elementos da diagonal de Σ são iguais na forma de conjuntos e se todos os elementos fora da diagonal são 0. Os autores observaram que para n grande, a hipótese de esfericidade foi verificada usando a expansão assintótica de Box (1949) da estatística de teste.

Nagar, Jain e Gupta (1985) obtiveram a distribuição nula exata do *LRT* para testar a esfericidade em uma matriz de covariâncias de uma população normal. Utilizaram para isto o método da transformação inversa de Mellin e a integração de contornos.

Gupta e Nagar (1988) estudaram a estatística assintótica não nula do critério de esfericidade de Mauchly (1940) para duas alternativas diferentes. Os autores utilizaram momentos não nulos da estatística da razão de verossimilhanças para o teste de esfericidade de várias amostras.

Butler, Huzurbazar e Booth (1993) mostraram como a aproximação do ponto de sela pode ser usada para aproximar a distribuição nula da estatística da razão de verossimilhanças para testar, entre várias outras hipóteses estudadas pelos autores, a esfericidade. Ressaltaram ainda que essas aproximações são inconsistentes com o aumento de n , porém essa inconsistência tem pouca importância.

Ledoit e Wolf (2002) examinaram os testes convencionais de John (1971) e de Nagao (1973) para as hipóteses de esfericidade e de identidade, respectivamente, sob a distribuição normal assintótica. Concluíram que o teste de John (1971) é robusto quando $p/n \rightarrow c$, em que c é uma constante finita, tal que $c \neq 0$, com $(p, n) \rightarrow \infty$, e que o teste de Nagao (1973) não é robusto quanto à alta dimensionalidade, modificando-o para tal. Wei, Dharmawansa e Tirkkonen (2013) mostraram haver uma imprecisão na distribuição nula causada por um erro de cálculo em Nagao (1973). Então, Ledoit e Wolf (2002) propuseram um teste de identidade robusto quanto à alta dimensionalidade, o qual é obtido ao realizarem uma modificação do então teste de Nagao (1973) e descobriram que o teste de John (1971) é robusto quanto à alta dimensionalidade dos dados, considerando o esquema proporcional.

Segundo Marden e Gao (2002), os procedimentos de sinais e de posto são muito utilizados na estatística univariada por fornecerem testes robustos e fáceis de usar. No caso multivariado, os procedimentos de sinais e de posto espaciais são utilizados para testar hipóteses estruturais em matrizes de covariâncias. Nestes casos, Marden e Gao (2002) concluíram que os procedimentos de posto são competitivos aos procedimentos usuais da teoria sob normalidade da distribuição dos dados, as chamadas estatísticas de teste paramétricas convencionais, e são melhores sob distribuições de caudas pesadas. Já em relação aos procedimentos de sinais, Marden e Gao (2002) ressaltaram que são um pouco menos eficientes sob a distribuição normal, e, em contrapartida, são melhores quando sob distribuições com caudas mais pesadas.

Srivastava (2005) propôs alguns testes para a matriz de covariâncias, dentre eles testes de esfericidade e testes de identidade baseados em estimadores consistentes de uma função paramétrica da matriz de covariâncias populacional sob a distribuição normal p -variada.

Brcich e Iskander (2006) desenvolveram um teste de esfericidade para verificar a estacionariedade de séries temporais. O teste proposto pode substituir o teste clássico até então

utilizado, o *KPSS*, e apresenta ainda uma melhoria significativa no seu desempenho em casos de processos autorregressivos (*AR*) com variações temporais.

Marques e Coelho (2008) estudaram três distribuições quase exatas para a estatística do teste de esfericidade. As distribuições quase exatas se aproximam mais da distribuição exata do que as distribuições assintóticas. Comparadas às distribuições assintóticas de Box (1949) e de Butler, Huzurbazar e Booth (1993), as distribuições exatas obtidas tiveram desempenho muito melhor, além de ser mais fácil determinar os parâmetros nas mesmas. Coelho e Marques (2010) obtiveram distribuições quase exatas para a estatística do teste de esfericidade mais precisas do que as desenvolvidas por Marques e Coelho (2008) para valores maiores de dimensionalidade ($p \geq 10$). Para tal, Coelho e Marques (2010) utilizaram a decomposição da hipótese nula em duas hipóteses independentes, decompondo, então a estatística geral do teste de esfericidade *LRT* em dois testes independentes e, assim, encontraram as distribuições quase exatas muito precisas para a estatística do teste de esfericidade.

Fisher, Sun e Gallagher (2010) propuseram um teste de esfericidade baseado na desigualdade de Cauchy-Schwarz, assim como o teste proposto por Srivastava (2005). O teste de Fisher, Sun e Gallagher (2010) é comparável assintoticamente aos testes de Srivastava (2005) e de Ledoit e Wolf (2002), sendo que cada um deles apresentaram um desempenho superior sob certas hipóteses alternativas. Recomenda-se o uso do teste então proposto por Fisher, Sun e Gallagher (2010) quando apenas alguns elementos da matriz de covariâncias forem diferentes entre si, sob distribuição normal dos dados.

Motivados pelo trabalho desenvolvido por Ledoit e Wolf (2002), Chen, Zhang e Zhong (2010) propuseram testes de esfericidade e de identidade não paramétricos, ou seja, que não assumem uma distribuição paramétrica específica aos dados, não supondo, assim, a normalidade dos dados. Os autores também consideraram situações de "*p* grande, *n* pequeno", sendo a dimensão dos dados maior ou muito maior que o tamanho amostral, ou seja, $p > n$ ou $p \gg n$. Realizaram estudos teóricos, empíricos e de simulações e observaram que os testes propostos tiveram bom desempenho para uma vasta configuração de *p* e de *n*, sendo o teste de esfericidade invariante sob transformações lineares de rotação e o teste de identidade invariante sob rotação e deslocamento.

Chen, Zhang e Zhong (2010) destacaram que a covariância amostral não converge para a covariância populacional e que os testes propostos para as hipóteses de esfericidade e de independência são baseados na matriz de covariâncias amostral. Porém, afirmam que procedimentos de teste consistentes podem ser construídos para a covariância de alta dimensionalidade.

Srivastava, Kollo e Rosen (2011) provaram que os testes propostos por Srivastava (2005) são robustos também sob a suposição de não normalidade dos dados e também quando $p > n$, com $(p, n) \rightarrow \infty$ e $n/p \rightarrow 0$ ou $n/p \rightarrow \infty$, por meio de resultados assintóticos. Os autores destacaram que tais testes podem não ser aplicáveis a valores finitos de (p, n) .

Marques e Coelho (2011) desenvolveram uma distribuição quase exata e muito precisa para a estatística do *LRT* para o teste de esfericidade de bloco e descobriram ainda que a fatoração do logaritmo da estatística de teste pode ser usada para obter distribuições quase exatas muito precisas. Os estudos das simulações realizadas mostraram que as aproximações quase exatas têm também boas propriedades assintóticas, tanto para o aumento de n , quanto para o aumento de p .

Ramirez et al. (2013) propuseram o teste invariante localmente mais poderoso para a esfericidade de vetores gaussianos, o qual foi considerado ideal para hipóteses próximas, além de ter melhor desempenho do que o teste da razão de verossimilhanças generalizado. Os autores mencionaram que a teoria referente ao seu trabalho foi desenvolvida por John (1971).

O teste de Ramirez et al. (2013) teve o limiar de decisão de teste não preciso, e, por isto, Xiao et al. (2018) derivaram as distribuições da estatística de teste proposta por pelos primeiros autores sob as hipóteses nula e alternativas, permitindo encontrar o limiar de decisão teórica e avaliar com precisão o desempenho do teste na detecção de alvos no radar MIMO (*Multiple Input Multiple Output*). Além disso, o teste proposto por Xiao et al. (2018) mostrou-se superior na detecção de alvos de radar MIMO em relação aos métodos já existentes e também teve redução do custo computacional.

Onatski et al. (2013) propuseram um teste de esfericidade baseado no maior autovalor da matriz de covariâncias amostral considerando que os dados sejam independentes e identicamente distribuídos oriundos de uma distribuição normal p -variada $N_p(0, \Sigma)$ considerando as hipóteses de teste dadas por $H_0: \Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ versus $H_1: \sigma^2(\mathbf{I} + \theta v v')$, em que $v'v = 1$. No entanto,

Berthet e Rigollet (2013) mostraram que o maior autovalor não pode discriminar entre as hipóteses H_0 e H_1 . Para haver a discriminação entre as hipóteses nula e alternativa, θ deveria ser muito grande.

Wang e Yao (2013) propuseram correções no *LRT* e no teste de John (1971) para casos com alta dimensionalidade dos dados e sem a restrição de normalidade. Os autores concluíram que ambos os testes corrigidos são robustos quanto à alta dimensionalidade dos dados e também quanto à não normalidade da distribuição, pois apresentaram melhor controle das taxas de erro do tipo I e poder mais alto com o aumento de p ou de n e, que, fixado n , o aumento de p ocasiona um melhor desempenho das estatísticas de teste corrigidas.

No teste de identidade, a suposição de que o vetor de médias é nulo não faz diferença sob distribuição normal no uso da estatística de teste proposta por Cai, Ma et al. (2013). Já nos casos de distribuições não normais com vetores de médias não nulos, a estatística de teste de Cai, Ma et al. (2013) não pode ser utilizada e, para tal, Srivastava, Yanagihara e Kubokawa (2014) recomendam o uso da estatística de teste apresentada por Chen, Zhang e Zhong (2010) para testar a hipótese de independência, porém com um gasto de tempo computacional maior.

Font-Segura et al. (2013) introduziram o teste de esfericidade quadrática (*QST*) para detecção cega de sinais estacionários de sentido amplo em canais de desbotamento na seleção de frequência com variação temporal. O *QST* é uma medida de dispersão dos autovalores no espaço p -dimensional e teve um bom desempenho se comparado ao autovalor máximo normalizado, sendo invariante em relação ao poder do ruído e ao ganho de canal.

Zou et al. (2014) desenvolveram uma correção de viés da estatística de teste baseada em sinais proposta por Hallin e Paindaveine (2006) e obtiveram sucesso com o teste resultante, o qual apresentou controle das taxas de erro do tipo I e poder elevado para todas as configurações de n e de p , ou seja, com $n \geq p$ e com $p > n$.

Srivastava, Yanagihara e Kubokawa (2014) propuseram um novo estimador da norma de Forbenius ao quadrado de $\Sigma_1 - \Sigma_2$, dado por $p^{-1}tr[\Sigma^2]$ não viesado e consistente e modificaram os testes propostos por Srivastava (2005) para testar a esfericidade e também a independência da matriz de covariâncias. Os testes propostos modificados controlaram bem as taxas de erro do tipo I e são robustos quanto às distribuições sob não normalidade, sem perda de poder.

Caro-Lopera, González-Farías e Balakrishnan (2014) usaram a distribuição do traço de uma matriz Wishart generalizada para estudarem o teste de esfericidade em modelos elípticos, derivando sua distribuição exata.

Tian, Lu e Li (2015) estudaram o teste de esfericidade em casos de alta dimensionalidade, propondo um novo teste baseado no máximo das estatísticas de Srivastava (2005) e de Fisher, Sun e Gallagher (2010) corrigidas para distribuições não normais. Com o uso de simulações, os autores mostraram que o teste proposto é mais robusto em relação ao poder que os testes originais sob várias distribuições e configurações entre n e p .

Mestre e Vallet (2015) afirmaram que, quando $n > p$ o *LRT* pode ser generalizado, obtendo, assim, o teste da razão de verossimilhanças generalizado (*GLRT*), o qual pode ser estendido a subamostras, selecionando apenas os autovalores positivos da amostra. Os autores mencionados investigaram o comportamento assintótico tanto para n quanto para p do *GLRT* para a esfericidade e concluíram que seguem distribuição assintótica normal com média e variância específica, dependendo, assim, das verdadeiras matrizes de covariâncias. Ressaltaram, ainda, que as simulações dos dados revelam a validade da descrição assintótica mesmo nas situações de n e de p pequenos.

Li e Yao (2016) observaram que o teste de John (1971) apresenta poder maior se comparado ao teste de Chen, Zhang e Zhong (2010), além de ter uma implementação mais fácil e ser computacionalmente mais rápido.

Mao (2016) analisou os estudos de Chen, Zhang e Zhong (2010) e de Srivastava, Yanagihara e Kubokawa (2014), os quais propuseram, em cada artigo, uma estatística de teste para a esfericidade e uma estatística de teste para a identidade da matriz de covariâncias sob distribuições não normais. Mao (2016) concluiu que as estatísticas de teste propostas em ambos os trabalhos são as mesmas, exceto por um fator de escala.

Li e Yao (2016) propuseram a estatística de teste quasi razão de verossimilhanças (*QLRT*), uma extensão do *LRT* para os casos em que $p \gg n$. Observaram que o *QLRT* é o procedimento mais indicado em situações de alta dimensão, dado o seu poder máximo para o teste de esfericidade. Os autores concluíram que o teste de John (1971) e o teste *QLRT* apresentam um

bom desempenho em relação aos tamanhos e aos valores de poder dos testes mesmo quando $p > n$.

Feng e Liu (2017) propuseram duas estatísticas para o teste de esfericidade robustas e eficientes sob alta dimensionalidade dos dados baseados nos argumentos de Spearman e de Kendall.

Liu, Tamura e Taniguchi (2018) estudaram a hipótese de esfericidade da matriz de covariâncias baseada em séries temporais de alta dimensão sob suposição de que $\lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{p}{n} = c \in (0, \infty)$. A distribuição nula assintótica é a normal padrão quando as observações são provenientes de processos estacionários gaussianos. Os autores desenvolveram, então, a teoria do teste de esfericidade de John (1971) no campo de séries temporais e propuseram um teste quando as observações são não dependentes.

Campos (2019) propôs alguns testes de identidade e verificou que a versão Monte Carlo do *LRT* é robusta quanto à presença de *outliers*, mas é aplicável apenas quando $n > p$. Já a versão Monte Carlo da estatística *W* proposta por Ledoit e Wolf (2002) é robusta tanto na presença de *outliers* quanto nos casos de alta dimensionalidade dos dados. Nenhum dos testes estudados pela autora foi robusto quanto a assimetria da distribuição dos dados.

Chen et al. (2020) propuseram uma estatística para o teste de identidade baseada no máximo dos valores absolutos da estatística do *LRT* e de uma estatística baseada na norma de Frobenius, sendo aplicável em situações em que $n > p$ com p grande se comparado ao n , mas não maior ou igual a n . Concluíram que o teste proposto superou o desempenho (ao apresentar valores de poder mais altos nos casos em que os tamanhos amostrais eram semelhantes) dos testes já existentes na literatura aos quais foi comparado, sendo eles os propostos por Bai e Silverstein (2008), Chen, Zhang e Zhong (2010), Fisher (2012), Ledoit e Wolf (2002), Wang, Yao et al. (2013), Cai, Ma et al. (2013) e Srivastava, Yanagihara e Kubokawa (2014). Mais detalhes do estudo de Chen et al. (2020) se encontram em (2.6.1.1).

3 MATERIAL E MÉTODO

Neste trabalho foram propostos e avaliados testes de esfericidade robustos assintóticos e computacionalmente intensivos cuja a hipótese nula é

$$H_0 : \mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{\Sigma}$ é a matriz de covariâncias populacional de ordem $p \times p$ positiva definida, σ^2 é a variância comum a todas as variáveis e \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem $p \times p$.

Por meio da simulação Monte Carlo, os desempenhos dos testes foram avaliados, simulando amostras sob a hipótese nula para avaliar as taxas reais do erro do tipo I e também simulando amostras sob diferentes hipóteses alternativas, tal que $\mathbf{\Sigma} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$ e as taxas de rejeição da hipótese nula estimam o poder dos testes.

A proporção de vezes que H_0 é falsamente rejeitada é a taxa de erro do tipo I para cada teste. Essa proporção, também chamada de tamanho real (α_{real}), foi então comparada ao nível de significância nominal pré-determinado (α). Porém, como as taxas de erro do tipo I são estimadas via simulações, não estão, assim, isentas de erros, e, por este motivo foi aplicado o teste binomial exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010). Por fim, os testes de hipóteses são classificados em liberais ($\alpha_{real} > \alpha$), conservativos ($\alpha_{real} < \alpha$) ou exatos ($\alpha_{real} = \alpha$).

Foram considerados os tamanhos amostrais $n = 8, 16, 32, 64, 128, 256$ e os números de variáveis $p = 8, 16, 32, 64, 128, 256$ e obtidas todas as combinações possíveis entre n e p . Os níveis de significância nominais estudados foram $\alpha = 1\%, 5\%$ e 10% .

Os testes propostos foram adaptados do teste de identidade de Chen et al. (2020) e de Campos (2019) para o teste de esfericidade. No caso do teste de esfericidade, a estatística de teste (2.3) foi modificada, trocando a estatística do LRT da identidade pela estatística do LRT para a esfericidade com a correção de Box (1949), sendo esta última dada por:

$$T_{E1} = - \left[(n-1) - \frac{2p^2 + p + 2}{6p} \right] (\ln |\mathbf{S}| - p \ln [tr(\mathbf{S})/p]), \quad (3.2)$$

que, sob H_0 , possui distribuição assintótica qui-quadrado com $f = p(p + 1)/2 - 1$ graus de liberdade.

A estatística, apresentada na expressão (2.4), para o teste de identidade da matriz de covariâncias populacional, proposta por Chen et al. (2020), foi substituída pela estatística do teste de esfericidade de John (1971) para a hipótese (3.1), sendo dada por:

$$T_{E2} = \frac{n}{2} \text{tr} \left[\left(\frac{\mathbf{S}}{\text{tr}(\mathbf{S})/p} - \mathbf{I} \right)^2 \right], \quad (3.3)$$

que, sob H_0 , possui distribuição assintótica qui-quadrado com $f = p(p + 1)/2 - 1$ graus de liberdade.

O presente estudo também considerou o mesmo padrão de modificação usado nas estatísticas de testes por Campos (2019), em que substituiu o estimador \mathbf{S} da matriz de covariâncias $\mathbf{\Sigma}$ pelo seu estimador robusto *comedian* (\mathbf{C}), o qual foi computado utilizando a função *covComed* da biblioteca *robustbase* do software R (R Core Team, 2020). As estatísticas (3.2) e (3.3) modificadas foram:

$$T_{ER1} = - \left[(n - 1) - \frac{2p^2 + p + 2}{6p} \right] (\log |\mathbf{C}| - p \log [\text{tr}(\mathbf{C})/p]) \quad (3.4)$$

e

$$T_{ER2} = \frac{n}{2} \text{tr} \left[\left(\frac{\mathbf{C}}{\text{tr}(\mathbf{C})/p} - \mathbf{I} \right)^2 \right], \quad (3.5)$$

respectivamente.

Pelo fato de existir uma modificação nas estatísticas (3.2) e (3.3), gerando as estatísticas (3.4) e (3.5), respectivamente, e de haver violações nas pressuposições do teste de esfericidade, como a presença de *outliers*, foram obtidas as versões *bootstrap* paramétrico para cada uma dessas estatísticas de teste, e também para a estatística de teste de máximo, adaptando a estatística de teste de identidade proposta por Chen et al. (2020) para o teste de esfericidade, gerando a distribuição nula para cada uma das estatísticas. Deste modo, esperou-se que houvesse um ganho no desempenho dos testes.

Para isso, dada uma amostra aleatória para a qual se quer testar a hipótese (3.1), os valores das estatísticas de (3.2) e (3.3) foram computados a partir das estimativas robusta e

tradicional de Σ , dadas pelos estimadores \mathbf{C} e \mathbf{S} , respectivamente. Para se obter os valores- p considerou-se a distribuição nula *bootstrap*. Foram simuladas amostras de tamanho n de uma normal com média $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e a matriz de covariâncias Σ dada por

$$\Sigma = S_p^2 \mathbf{I},$$

em que S_p^2 é um estimador da variância comum estimado sempre (em qualquer caso) a partir do estimador \mathbf{C} , sendo dado por

$$S_p^2 = \frac{\text{tr}(\mathbf{C})}{p}.$$

Para cada amostra *bootstrap* de tamanho n foram computados os valores das estatísticas de (3.2) e (3.3). Os valores respectivos destas estatísticas na m -ésima amostra da distribuição nula *bootstrap* foram denotados por $T_{i,m}$, $i = 7, 8, \dots, 10$, $m = 1, 2, \dots, N$, com $N = 999$. Neste caso, o índice i igual a 5, corresponde à estatística (3.2) na versão *bootstrap* até o índice $i = 10$, que corresponde à estatística de máximo entre (3.2) e (3.3) na versão *bootstrap*. A nomenclatura foi a mesma para as versões assintóticas, com o índice i variando de 1 a 4, respectivamente, para as estatísticas de (3.2) e (3.5).

Em seguida, foram formados os conjuntos $T_{i,m}$; $m = 1, 2, \dots, N + 1$, em que $T_{i,N+1}$ corresponde ao valor da i -ésima estatística computada na amostra original. Assim, os valores- p foram computados por

$$\text{valor-}p_i = \frac{\sum_{m=1}^{N+1} I(T_{i,m} \geq T_{i,N+1})}{N+1}, \quad (3.6)$$

em que $i = 7, \dots, 10$ e I é a função indicadora que retorna 1 se a desigualdade for verdadeira e 0, caso contrário. Para as versões assintóticas, $i = 1, 2, \dots, 4$, o valor- p_i , foi obtido com a correspondente distribuição assintótica qui-quadrado.

Se o valor- $p_i \leq \alpha$, H_0 é rejeitada. Caso contrário, H_0 não deve ser rejeitada, ao nível nominal de significância α pré-estabelecido.

Avaliação do desempenho dos testes

Para avaliar os desempenhos dos testes, foram utilizadas simulações Monte Carlo sob $H_0: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$ e sob $H_1: \mathbf{\Sigma} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$. Se as simulações foram aplicadas sob H_0 , R_i é um estimador do tamanho do i -ésimo teste e se elas forem aplicadas sob H_1 , R_i é um estimador do poder do i -ésimo teste, $i = 1, \dots, 10$.

A taxa de rejeição R_i para o i -ésimo teste de H_0 foi computada por

$$R_i = \frac{\sum_{k=1}^M I(\text{valor-}p_i \leq \alpha)}{M}, \quad (3.7)$$

para $i = 1, 2, \dots, 10$, em que α é o nível nominal de significância e M , o número de simulações Monte Carlo adotado.

Simulações

Como o parâmetro de posição ($\boldsymbol{\mu}$) não interfere no parâmetro de escala ($\mathbf{\Sigma}$), amostras *bootstrap* de tamanho n foram geradas a partir da distribuição normal multivariada com $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{\Sigma}$. Sob H_0 , foram geradas M amostras de tamanho n de uma $N_p(\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I})$, sem perda de generalidade, considerando ainda $\sigma^2 = 10$. Neste caso, fixar $\mathbf{\Sigma}$ como $\sigma^2 \mathbf{I}$ tem a intenção de simular sob H_0 para se realizar a avaliação das taxas de erro tipo I dos testes. Sob H_1 , foram simuladas também amostras normais p -variadas de tamanho n com $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, sem perda de generalidade, mas com $\mathbf{\Sigma} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$. Foram consideradas matrizes $\mathbf{\Sigma}$ de ordem $p \times p$ do tipo:

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{kk}), \quad (3.8)$$

para $k = 1, 2, \dots, p$, e

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}], \quad (3.9)$$

em que $-1 < \rho < 1$ e \mathbf{J} é uma matriz $p \times p$ de uns. Foi considerado um total de simulações Monte Carlo $M = 1000$. Para o primeiro caso, foram considerados valores de σ_{kk} gerados por uma distribuição uniforme contínua $(1, 2)$, sem perda de generalidade, $k = 1, 2, \dots, p$. Para o

segundo caso, foram fixados $\sigma^2 = 10$, sem perda de generalidade, e $\rho = 0,9$, para se afastar o máximo possível de uma matriz diagonal, que se assemelharia às configurações sob H_0 .

Nas simulações sob modelos normais com presença de *outliers* foram usados os mesmos procedimentos descritos anteriormente, exceto pela distribuição considerada. Para avaliar a robustez quanto a presença de *outliers*, foram simulados dados de uma distribuição normal contaminada. A função de densidade conjunta da distribuição normal contaminada é

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (1 - \delta)(2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} + \\ + (\delta)(2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}^*|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}^*)' \boldsymbol{\Sigma}^{*-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}^*) \right\}, \quad (3.10)$$

sendo δ a proporção de contaminação de *outliers*, com $0 < \delta < 1$. Os parâmetros $\boldsymbol{\mu}^*$ e $\boldsymbol{\Sigma}^*$ correspondem, portanto, aos parâmetros da distribuição geradora de *outliers*. A constante de contaminação considerada foi $\delta = 0,30$, devido a uma sugestão anterior feita por uma revista ao submeter um artigo, de simular considerando vários valores de δ . Neste estudo foi considerado o maior valor para δ sugerido pela revista, afim de verificar se os testes propostos foram robustos quando à presença de *outliers*. Ressalta-se que, quando se tratam de dados reais, essa proporção de *outliers* pode ser maior, como na área financeira e , com $\delta = 0,40$, chegando ao máximo de $\delta = 0,50$.

Os parâmetros da distribuição normal contaminada foram fixados da seguinte forma: $\boldsymbol{\Sigma}^* = \boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\mu}^* = k\mathbf{1}_p$, $k = 0,25; 0,5; 1$. A variância da distribuição de mistura é dada por

$$V(\mathbf{X}) = \delta(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma}) + (1 - \delta)(\boldsymbol{\mu}^*\boldsymbol{\mu}^{*T} + \boldsymbol{\Sigma}^*) - \boldsymbol{\mu}_X\boldsymbol{\mu}_X^T \quad (3.11)$$

em que $\boldsymbol{\mu}_X = E(\mathbf{X}) = \delta\boldsymbol{\mu} + (1 - \delta)\boldsymbol{\mu}^*$. Portanto, a variância resultante foi

$$V(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma} + k^2\delta(1 - \delta)\mathbf{J} \quad (3.12)$$

em que \mathbf{J} é uma matriz unitária de ordem $p \times p$.

3.1 Nomenclaturas utilizadas

No Quadro 3.1 foram definidas as nomenclaturas utilizadas neste trabalho, em que os 10 testes utilizados foram renomeados.

Quadro 3.1 – Nomenclaturas, estatística de teste e descrição dos testes em estudo.

Nome	Estatística	Descrição
<i>LRTAs</i>	(3.2)	Teste da razão de verossimilhanças assintótico com a covariância clássica (S).
<i>LRTAsR</i>	(3.4)	Teste da razão de verossimilhanças assintótico com o estimador robusto da covariância (C).
<i>JAs</i>	(3.3)	Teste assintótico que utilizou a estatística <i>J</i> de John (1971) com S .
<i>JAsR</i>	(3.5)	Teste assintótico que utilizou a estatística <i>J</i> de John (1971) com o estimador C .
<i>LRTB</i>	Versão <i>bootstrap</i> de (3.2)	Teste da razão de verossimilhanças versão <i>bootstrap</i> com S .
<i>LRTBR</i>	Versão <i>bootstrap</i> de (3.4)	Teste da razão de verossimilhanças versão <i>bootstrap</i> com o estimador C .
<i>JB</i>	Versão <i>bootstrap</i> de (3.3)	Teste da versão <i>bootstrap</i> da estatística <i>J</i> de John (1971) com S .
<i>JBR</i>	Versão <i>bootstrap</i> de (3.5)	Teste da versão <i>bootstrap</i> da estatística <i>J</i> de John (1971) com o estimador C .
<i>TB</i>	Máximo entre as estatísticas <i>LRTB</i> e <i>JB</i>	Teste do máximo entre as versões <i>bootstrap</i> das estatísticas (3.2) e (3.3).
<i>TBR</i>	Máximo entre as estatísticas <i>LRTBR</i> e <i>JBR</i>	Teste do máximo entre as versões <i>bootstrap</i> das estatísticas (3.4) e (3.5).

Fonte: Do autor (2023).

4 RESULTADOS

Quando os resultados das simulações para os níveis de significância iguais a $\alpha = 1\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 10\%$ foram comparados, várias semelhanças foram observadas se consideradas as mesmas configurações, ou seja, a mesma dimensionalidade (p), o mesmo tamanho amostral (n), a mesma distribuição e a mesma hipótese, assim como foi observado no trabalho de Campos (2019). Desta maneira, foram apresentados e comentados os resultados apenas ao nível de 5% de significância. Os resultados para os níveis de $\alpha = 1\%$ e $\alpha = 10\%$ de significância foram inseridos nos Apêndices B e A, respectivamente, podendo os comentários e as conclusões feitos para o nível de $\alpha = 5\%$ de significância serem estendidos a ambos.

Os testes da razão de verossimilhanças e as modificações do mesmo se degeneram quando $n \leq p$, por isto, os testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *LRTB* e *LRTBR* só se aplicam para os casos em que $n > p$. Já os testes que utilizam a estatística de teste de John (1971) ou suas modificações existem para quaisquer valores e combinações de n e de p .

As distribuições utilizadas no presente estudo foram a distribuição normal e a distribuição normal contaminada com 30% de contaminação, a fim de avaliar a robustez dos testes quanto à presença de *outliers*. Os testes baseados na estatística de teste de John (1971), o *JAs*, o *JAsR*, o *JB* e o *JBR*, foram utilizadas para avaliar a robustez dos testes também em relação à alta dimensionalidade dos dados.

4.1 Desempenho em relação ao controle das taxas do erro do tipo I

Foi utilizado o teste binomial exato para a classificação dos testes em liberais, exatos ou conservativos. A classificação é feita de acordo com os tamanhos reais dos testes e, para os níveis nominais de 1%, 5% e 10% as hipóteses são: $H_0 : \alpha = 0,01$ versus $H_1 : \alpha \neq 0,01$, $H_0 : \alpha = 0,05$ versus $H_1 : \alpha \neq 0,05$ e $H_0 : \alpha = 0,10$ versus $H_1 : \alpha \neq 0,10$, respectivamente (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010).

Na Tabela 4.1, foram mostrados os resultados das simulações dos tamanhos reais dos testes assintóticos sob a hipótese nula dada por $H_0: \Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$, obtidos por meio de 1000 repetições

da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância. Para $n = 8$ e para $n = 16$, JAs e $JAsR$ foram liberais para p assumindo qualquer um dos valores 8, 16, 32, 64, 128 e 256. Para $n = 16$ e $p = 8$, todos os testes assintóticos ($LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$) foram liberais. O $LRTAs$ foi exato quando $n = 32$ e $p = 8$, $n = 64$ e $p = 8$, $n = 64$ e $p = 16$, $n = 128$ e $p = 8$, $n = 128$ e $p = 16$, $n = 128$ e $p = 32$, $n = 256$ e $p = 16$, $n = 256$ e $p = 32$ e $n = 256$ e $p = 64$. O $LRTAsR$ foi exato para as situações em que $n = 128$ e $p = 8$, $n = 128$ e $p = 32$, $n = 256$ e $p = 16$, $n = 256$ e $p = 32$ e $n = 256$ e $p = 64$. Já o JAs foi exato quando $n = 32$ e $p = 8$, $n = 64$ e $p = 8$, $n = 64$ e $p = 16$, $n = 128$ e $p = 8$, $n = 256$ e $p = 16$, $n = 256$ e $p = 32$ e $n = 256$ e $p = 64$.

De forma geral, foi possível constatar que os testes assintóticos sob normalidade tiveram um desempenho muito insatisfatório no controle do erro tipo I , pois foram, na maioria dos casos, liberais. As versões assintóticas robustas na maioria das situações apresentaram pior controle do erro tipo I , foram mais liberais que as versões assintóticas correspondentes não robustas. O $LRTAs$ e o $LRTAsR$ tiveram desempenho melhores que os outros quatro testes aplicados. Estes testes, quando as amostras eram pequenas foram liberais ($n = 16$) e à medida que a amostra aumentava os desempenhos tenderam a melhorar. Porém, somente com menores valores de p que houve controle do erro tipo I na maioria dos casos. Quando p era relativamente grande em relação ao tamanho da amostra n , estes dois testes tenderam a ficar liberais.

Sob baixa dimensão, os testes JAs e $JAsR$ apresentaram controle do erro tipo I também para os casos de maiores valores de n . Estes dois testes, sob alta dimensão, tiveram resultados extremamente insatisfatórios, quando os tamanhos amostrais eram pequenos.

Na Tabela 4.2 foram apresentadas as versões *bootstrap* dos testes. Foram verificadas, de forma nítida, que as versões *bootstrap* controlaram de forma expressivamente melhor as taxas de erro do tipo I , se comparadas às versões assintóticas. Tal fato também foi observado nas versões Monte Carlo dos testes de identidade no trabalho de Campos e Ferreira (2022), as quais apresentaram melhor controle das taxas de erro do tipo I se comparadas às versões assintóticas dos testes.

Os testes foram exatos para a maioria das configurações de n e p , e as exceções foram listadas a seguir. O $LRTB$ e o $LRTBR$ foram liberais apenas quando $n = 256$ e $p = 8$. O JB

Tabela 4.1 – Tamanhos reais dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,09 ⁺	0,36 ⁺
	16			0,22 ⁺	0,63 ⁺
	32			0,61 ⁺	0,86 ⁺
	64			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
16	8	0,08 ⁺	0,23 ⁺	0,08 ⁺	0,19 ⁺
	16			0,12 ⁺	0,27 ⁺
	32			0,24 ⁺	0,49 ⁺
	64			0,65 ⁺	0,79 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
32	8	0,04	0,09 ⁺	0,06	0,10 ⁺
	16	0,09 ⁺	0,13 ⁺	0,09 ⁺	0,14 ⁺
	32			0,15 ⁺	0,22 ⁺
	64			0,27 ⁺	0,35 ⁺
	128			0,68 ⁺	0,69 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
64	8	0,05	0,08 ⁺	0,05	0,08 ⁺
	16	0,06	0,08 ⁺	0,07	0,09 ⁺
	32	0,09 ⁺	0,11 ⁺	0,09 ⁺	0,10 ⁺
	64			0,15 ⁺	0,17 ⁺
	128			0,18 ⁺	0,19 ⁺
	256			0,61 ⁺	0,61 ⁺
128	8	0,03	0,06	0,03	0,07
	16	0,06	0,07	0,08 ⁺	0,10 ⁺
	32	0,03	0,04	0,09 ⁺	0,09 ⁺
	64	0,22 ⁺	0,22 ⁺	0,17 ⁺	0,17 ⁺
	128			0,15 ⁺	0,15 ⁺
	256			0,24 ⁺	0,24 ⁺
256	8	0,09 ⁺	0,10 ⁺	0,09 ⁺	0,08 ⁺
	16	0,05	0,06	0,06	0,07
	32	0,04	0,04	0,04	0,04
	64	0,07	0,07	0,06	0,06
	128	0,45 ⁺	0,45 ⁺	0,10 ⁺	0,10 ⁺
	256			0,14 ⁺	0,14 ⁺

⁺ foram os testes liberais e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

foi liberal quando $n = 8$ e $p = 256$, $n = 64$ e $p = 256$, $n = 128$ e $p = 16$, $n = 256$ e $p = 8$, $n = 256$ e $p = 16$ e $n = 256$ e $p = 128$. O JBR foi conservativo se $n = 64$ e $p = 128$ e foi liberal

quando $n = 64$ e $p = 256$, $n = 256$ e $p = 8$ e $n = 256$ e $p = 128$. O *TB* foi liberal quando $n = 256$ e $p = 8$. Já o *TBR* foi exato em todas as situações, exceto quando $n = 256$ e $p = 8$, em que foi conservativo. Foi possível observar que os testes *TB* e *TBR* tiveram desempenhos idênticos na maioria dos casos de baixa dimensionalidade aos dos demais quatro testes e, em algumas situações particulares, apresentaram controle do erro tipo *I*, onde ao menos um dos testes concorrentes foram liberais.

Nas Tabelas 4.3 e 4.4 foram mostrados os resultados das simulações dos testes assintóticos e das versões *bootstrap*, respectivamente, sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, considerada a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância. Assim como observado nos resultados das simulações sob a distribuição normal (Tabelas 4.1 e 4.2), sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$ também houve um controle melhor das taxas de erro do tipo *I* pelos testes que utilizaram a versão *bootstrap*, se comparados às versões assintóticas, o que foi de acordo com os resultados obtidos por Campos e Ferreira (2022) a respeito das versões Monte Carlo dos testes de razão de verossimilhanças para a hipótese de identidade.

As versões assintóticas apresentaram o mesmo baixo desempenho que foi mostrado para o caso normal, sem *outliers*, pelo menos para a maioria das configurações. Em alta dimensionalidade e pequenas amostras os testes *JAs* e *JAsR* tiveram os piores desempenhos em relação ao controle do erro tipo *I*, atingindo 100% de taxas quando era esperado 5%. O efeito dos *outliers*, que, no caso, correspondiam a 30% da amostra, foi no sentido de piorar o desempenho dos testes, embora observou-se que a magnitude das perdas nas taxas de erro tipo *I* empíricas foram inexpressivas.

Na Tabela 4.3, foram observados que o *LRTAs*, o *LRTAsR*, o *JAs* e o *JAsR* foram exatos em apenas algumas configurações de n e p , os testes foram, na maioria dos casos, liberais. O *LRTAs* foi exato quando $n = 16$ e $p = 8$, $n = 32$ e $p = 8$, $n = 64$ e $p = 8$, $n = 64$ e $p = 16$, $n = 128$ e $p = 16$, $n = 128$ e $p = 32$ e $n = 256$ e $p = 16$. O *LRTAsR* foi exato se $n = 128$ e $p = 8$, $n = 128$ e $p = 16$, $n = 128$ e $p = 32$ e $n = 256$ e $p = 16$. O *JAs* foi exato quando $n = 16$ e $p = 8$, $n = 32$ e $p = 8$, $n = 64$ e $p = 8$, $n = 64$ e $p = 16$, $n = 128$ e $p = 16$, $n = 128$ e $p = 32$, $n = 256$ e $p = 16$ e $n = 256$ e $p = 64$ e foi conservativo quando $n = 128$ e $p = 8$. O *JAsR* foi

Tabela 4.2 – Tamanhos reais dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,04	0,05		
	16			0,05	0,05		
	32			0,05	0,06		
	64			0,04	0,05		
	128			0,05	0,03		
	256			0,09 ⁺	0,07		
16	8	0,05	0,05	0,05	0,05	0,04	0,05
	16			0,05	0,06		
	32			0,05	0,04		
	64			0,06	0,05		
	128			0,03	0,03		
	256			0,03	0,05		
32	8	0,03	0,03	0,05	0,05	0,04	0,04
	16	0,06	0,05	0,06	0,05	0,06	0,05
	32			0,05	0,05		
	64			0,05	0,06		
	128			0,06	0,04		
	256			0,04	0,05		
64	8	0,05	0,05	0,04	0,04	0,05	0,05
	16	0,05	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05
	32	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,04
	64			0,06	0,05		
	128			0,02 ⁻	0,02 ⁻		
	256			0,08 ⁺	0,08 ⁺		
128	8	0,04	0,04	0,04	0,07	0,03	0,06
	16	0,06	0,05	0,08 ⁺	0,06	0,04	0,04
	32	0,04	0,04	0,07	0,07	0,07	0,07
	64	0,04	0,04	0,06	0,06	0,04	0,04
	128			0,06	0,06		
	256			0,03	0,03		
256	8	0,09 ⁺	0,09 ⁺	0,09 ⁺	0,09 ⁺	0,08 ⁺	0,09 ⁺
	16	0,06	0,06	0,08 ⁺	0,07	0,05	0,06
	32	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05
	64	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06	0,06
	128	0,06	0,06	0,09 ⁺	0,09 ⁺	0,06	0,06
	256			0,03	0,03		

⁺ foram os testes liberais, ⁻ foram os testes conservativos e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

exato as situações em que $n = 128$ e $p = 32$ e $n = 256$ e $p = 64$ e foi conservativo se $n = 128$

e $p = 8$. Para as demais combinações de n e de p , as versões assintóticas dos testes em estudo foram liberais.

Tabela 4.3 – Tamanhos reais dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ sob a hipótese $H_0 : \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,12 ⁺	0,37 ⁺
	16			0,22 ⁺	0,65 ⁺
	32			0,65 ⁺	0,85 ⁺
	64			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
16	8	0,07	0,22 ⁺	0,06	0,19 ⁺
	16			0,09 ⁺	0,28 ⁺
	32			0,26 ⁺	0,52 ⁺
	64			0,63 ⁺	0,77 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
32	8	0,05	0,11 ⁺	0,06	0,10 ⁺
	16	0,09 ⁺	0,15 ⁺	0,08 ⁺	0,13 ⁺
	32			0,15 ⁺	0,25 ⁺
	64			0,28 ⁺	0,34 ⁺
	128			0,63 ⁺	0,64 ⁺
	256			0,99 ⁺	0,99 ⁺
64	8	0,05	0,08 ⁺	0,05	0,08 ⁺
	16	0,05	0,11 ⁺	0,06	0,10 ⁺
	32	0,11 ⁺	0,13 ⁺	0,08 ⁺	0,10 ⁺
	64			0,14 ⁺	0,16 ⁺
	128			0,24 ⁺	0,25 ⁺
	256			0,67 ⁺	0,67 ⁺
128	8	0,02 ⁻	0,04	0,02 ⁻	0,04 ⁻
	16	0,07	0,07	0,07	0,08 ⁺
	32	0,05	0,05	0,04	0,04
	64	0,17 ⁺	0,18 ⁺	0,10 ⁺	0,11 ⁺
	128			0,17 ⁺	0,17 ⁺
	256			0,25 ⁺	0,25 ⁺
256	8	0,11 ⁺	0,11 ⁺	0,08 ⁺	0,09 ⁺
	16	0,07	0,07	0,07	0,08 ⁺
	32	0,10 ⁺	0,10 ⁺	0,09 ⁺	0,09 ⁺
	64	0,08 ⁺	0,08 ⁺	0,06	0,06
	128	0,52 ⁺	0,52 ⁺	0,09 ⁺	0,09 ⁺
	256			0,13 ⁺	0,13 ⁺

⁺ foram os testes liberais, ⁻ foram os testes conservativos e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

Na Tabela 4.4 foram escritos os resultados das simulações dos dados sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$ e consideradas as versões *bootstrap* dos testes, ao nível de 5% de significância. O *LRTB* foi conservativo quando $n = 128$ e $p = 8$ e foi liberal se $n = 128$ e $p = 16$, $n = 256$ e $p = 8$, $n = 256$ e $p = 16$ e $n = 256$ e $p = 32$. Para os demais valores de n e de p , o *LRTB* foi exato. O *LRTBR* foi liberal para $n = 128$ e $p = 16$, $n = 256$ e $p = 8$ e $n = 256$ e $p = 16$. O *JB* foi conservativo quando $n = 32$ e $p = 128$, $n = 32$ e $p = 256$, $n = 64$ e $p = 256$, $n = 128$ e $p = 8$, $n = 128$ e $p = 32$ e $n = 256$ e $p = 256$ e foi liberal se $n = 64$ e $p = 128$. O *JBR* foi conservativo quando $n = 32$ e $p = 256$, $n = 64$ e $p = 256$, $n = 128$ e $p = 32$ e $n = 256$ e $p = 256$ e foi liberal quando $n = 64$ e $p = 128$, $n = 128$ e $p = 16$ e $n = 256$ e $p = 16$. O *TB* foi conservativo se $n = 128$ e $p = 8$ e $n = 128$ e $p = 32$ e foi liberal quando $n = 256$ e $p = 8$, $n = 256$ e $p = 32$. O *TBR* foi conservativo quando $n = 128$ e $p = 32$ e foi liberal quando $n = 128$ e $p = 16$, $n = 256$ e $p = 8$ e $n = 256$ e $p = 16$. Para as demais combinações entre n e p , as versões *bootstrap* dos testes foram exatas.

Tabela 4.4 – Tamanhos reais dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,05	0,06		
	16			0,04	0,06		
	32			0,05	0,06		
	64			0,05	0,04		
	128			0,04	0,05		
	256			0,06	0,06		
16	8	0,05	0,05	0,04	0,04	0,05	0,05
	16			0,04	0,04		
	32			0,05	0,04		
	64			0,04	0,03		
	128			0,09	0,06		
	256			0,04	0,03		
32	8	0,05	0,04	0,06	0,05	0,05	0,05
	16	0,07	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05
	32			0,07	0,06		
	64			0,05	0,04		
	128			0,02 ⁻	0,05		
	256			0,02 ⁻	0,02 ⁻		
64	8	0,05	0,05	0,04	0,04	0,05	0,04
	16	0,05	0,04	0,06	0,05	0,05	0,05
	32	0,05	0,05	0,04	0,04	0,05	0,05
	64			0,06	0,06		
	128			0,08 ⁺	0,09 ⁺		
	256			0,02 ⁻	0,02 ⁻		
128	8	0,02 ⁻	0,03	0,01 ⁻	0,03	0,01 ⁻	0,03
	16	0,08 ⁺	0,08 ⁺	0,07	0,08 ⁺	0,07	0,08 ⁺
	32	0,04	0,03	0,01 ⁻	0,01 ⁻	0,02 ⁻	0,01 ⁻
	64	0,06	0,06	0,05	0,06	0,06	0,05
	128			0,06	0,06		
	256			0,07	0,07		
256	8	0,09 ⁺	0,08 ⁺	0,07	0,07	0,08 ⁺	0,08 ⁺
	16	0,08 ⁺	0,08 ⁺	0,07	0,08 ⁺	0,07	0,08 ⁺
	32	0,08 ⁺	0,07	0,06	0,05	0,08 ⁺	0,06
	64	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	128	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	256			0,02 ⁻	0,02 ⁻		

⁺ foram os testes liberais, ⁻ foram os testes conservativos e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

4.2 Desempenho dos testes em relação ao poder

Nas Tabelas 4.5 e 4.6 foram alocados os valores dos poder dos testes assintóticos e das versões *bootstrap* dos testes, respectivamente, consideradas as simulações sob a hipótese alternativa dada por $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.

Na Tabela 4.5 foram mostrados os valores de poder dos testes assintóticos. O *LRTAs* e o *LRTAsR* apresentaram valores de poder baixos, abaixo de 0,50, para todas as configurações de n e p até $n = 64$ e $p = 256$. Para $n \geq 128$ e quaisquer valores para p , os valores de poder aumentaram com o aumento de n e de p . Quando $n \geq 128$ e $p > 64$ e também quando $n = 256$ e qualquer valor de p , o poder foi alto (acima de 0,80), convergindo para 1 quando $n = 256$ e $p \geq 32$. O *JAs* e o *JAsR* apresentaram valores de poder baixos para pequenos valores de p , e aumentaram à medida que aumentou o valor de p para cada n , convergindo para 1 na maioria das situações quando n foi grande e $p = 128$ ou $p = 256$. Para $n = 256$, o valor do poder foi alto e próximo de 1 independente de p , convergindo para 1 quando $p = 32$, $p = 128$ e $p = 256$, em ambos os testes.

Vale realçar que os valores de poder em alta dimensionalidade, quando $p \geq n$, devem ser vistos com ressalvas. Isto se deve ao fato de que os valores de taxas de erro tipo I dos testes assintóticos foram quase sempre superiores expressivamente aos valores nominais do nível de significância α .

Na Tabela 4.6 ficou nítido que as versões *bootstrap* dos testes apresentaram uma maior quantidade de valores de poder baixos e abaixo de 0,50 que as versões assintóticas dos testes. Isso era esperado, haja vista que foram os testes que, de maneira geral, em relação às configurações adotadas, apresentaram controle adequado das taxas de erro tipo I , considerados, assim, testes exatos. Os valores de poder do *LRTB*, do *LRTBR*, do *JB*, do *JBR*, do *TB* e do *TBR* foram baixos para todas as combinações de n e p , em que $n \leq 64$. Para $n = 128$, os valores de poder estavam entre 0,50 e 0,79 em muitos casos, com exceção de quando $p = 16$, para *LRTBR*, *JB* e *JBR* e de quando $p = 64$ para *LRTBR*, os quais apresentaram valores de poder inferiores que 0,50. Para $n = 256$, todos os testes que utilizaram a versão *bootstrap* foram altos, o *JB* e o *JBR*

Tabela 4.5 – Valores de poder dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,14	0,40
	16			0,25	0,66
	32			0,66	0,89
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	0,11	0,27	0,12	0,24
	16			0,21	0,38
	32			0,36	0,58
	64			0,71	0,81
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	0,11	0,17	0,13	0,19
	16	0,17	0,25	0,18	0,26
	32			0,33	0,41
	64			0,38	0,44
	128			0,82	0,83
	256			1,00	1,00
64	8	0,27	0,32	0,27	0,31
	16	0,29	0,33	0,34	0,37
	32	0,29	0,31	0,28	0,31
	64			0,50	0,51
	128			0,62	0,62
	256			0,90	0,90
128	8	0,76	0,75	0,76	0,78
	16	0,54	0,54	0,54	0,55
	32	0,75	0,75	0,77	0,77
	64	0,82	0,82	0,73	0,73
	128			0,86	0,86
	256			0,96	0,96
256	8	0,95	0,95	0,94	0,95
	16	0,98	0,98	0,98	0,98
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	0,99	0,99
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

convergiram para 1 quando $n = 256$ e $p = 128$ e $n = 256$ e $p = 256$ e o TB convergiu para 1 quando $n = 256$ e $p = 256$.

É interessante considerar que os tamanhos amostrais têm relação direta com o poder. Grandes amostras tendem a apresentar maiores valores de poder dos testes. Neste caso, amostras de tamanhos $n \geq 128$ puderam ser consideradas satisfatórias para se obter testes com melhores desempenhos em termos do poder apresentado.

Também houve um efeito interessante em relação ao aumento de p , mantendo-se fixo o valor de n . Nestes casos houve uma tendência, em geral, de incremento do poder à medida que p aumentava até atingir o valor de n , quando começava a sofrer um efeito negativo da alta dimensionalidade. Este comportamento foi observado nas duas partes de crescimento e decréscimo dos valores do poder apenas para os testes JB e JBR , e nos demais verificou-se apenas o crescimento do poder com o aumento de p , uma vez que os demais testes não podem ser aplicados em alta dimensionalidade. Obviamente existiram algumas exceções para este comportamento (Tabela 4.6). Esperava-se que os testes TB e TBR tivessem valores de poder melhores que o melhor dos dois testes que compõem sua estatística de máximo em cada um dos casos, respectivamente, o que concordaria com o resultado obtido por Chen et al. (2020). Porém, isso não aconteceu em todos os casos, embora que em algumas configurações isso tenha sido observado.

Na Tabela 4.7 foram mostrados os valores de poder dos testes assintóticos considerada a $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância. O $LRTAs$ e o $LRTAsR$ tiveram o comportamento bem semelhante ao relatado para o caso normal anterior. Em geral, apresentaram valores de poder baixos para $n \leq 64$ e qualquer valor de p e para $n = 128$ e $p = 8$. Os valores de poder foram altos para $n = 128$ e $p \geq 64$ e para $n = 256$ e qualquer valor de p , convergindo para 1 quando $n = 256$ e $p \geq 64$, para o $LRTAs$ e o $LRTAsR$.

Na Tabela 4.8 foram observados os valores de poder das versões *bootstrap* dos testes considerada $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância. O $LRTB$, o $LRTBR$, o JB , o JBR , o TB e o TBR mostraram um comportamento similar entre eles em relação ao poder dos testes. O poder dos testes foi alto

Tabela 4.6 – Valores de poder dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,07	0,05		
	16			0,05	0,05		
	32			0,08	0,05		
	64			0,08	0,05		
	128			0,09	0,09		
	256			0,07	0,05		
16	8	0,08	0,06	0,09	0,08	0,09	0,07
	16			0,11	0,09		
	32			0,08	0,07		
	64			0,08	0,06		
	128			0,09	0,01		
	256			0,07	0,03		
32	8	0,10	0,10	0,11	0,10	0,11	0,10
	16	0,10	0,08	0,13	0,12	0,11	0,09
	32			0,18	0,14		
	64			0,14	0,09		
	128			0,13	0,08		
	256			0,12	0,11		
64	8	0,27	0,24	0,25	0,23	0,27	0,24
	16	0,28	0,26	0,30	0,28	0,30	0,27
	32	0,17	0,17	0,22	0,22	0,21	0,19
	64			0,29	0,28		
	128			0,33	0,33		
	256			0,25	0,25		
128	8	0,73	0,72	0,73	0,73	0,72	0,72
	16	0,51	0,48	0,46	0,47	0,51	0,52
	32	0,72	0,69	0,73	0,74	0,74	0,73
	64	0,52	0,49	0,65	0,64	0,58	0,57
	128			0,74	0,74		
	256			0,69	0,69		
256	8	0,94	0,94	0,93	0,93	0,93	0,94
	16	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
	32	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
	64	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98
	128	0,96	0,96	1,00	1,00	0,97	0,97
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

apenas para $n = 256$ e $p \geq 8$ para o *LRTB*, o *LTBR* e o *TBR*. Para o *JB* e o *JBR*, o poder foi alto para $n = 128$ e $p \geq 128$ e para $n = 256$ e qualquer valor de p . O poder convergiu para 1

Tabela 4.7 – Valores de poder dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,20	0,43
	16			0,26	0,70
	32			0,26	0,70
	64			0,64	0,86
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	0,09	0,25	0,12	0,25
	16			0,28	0,44
	32			0,32	0,52
	64			0,76	0,84
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	0,16	0,17	0,10	0,17
	16	0,11	0,18	0,16	0,25
	32			0,15	0,24
	64			0,61	0,62
	128			0,86	0,86
	256			1,00	1,00
64	8	0,43	0,48	0,44	0,47
	16	0,27	0,30	0,32	0,37
	32	0,49	0,55	0,59	0,61
	64			0,53	0,55
	128			0,72	0,77
	256			0,96	0,96
128	8	0,40	0,39	0,41	0,40
	16	0,52	0,51	0,58	0,59
	32	0,61	0,61	0,61	0,60
	64	0,94	0,94	0,86	0,87
	128			0,92	0,98
	256			1,00	1,00
256	8	0,86	0,85	0,84	0,83
	16	0,99	0,99	0,99	0,99
	32	0,99	0,99	0,99	0,99
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

quando $n = 256$ e $p = 8$ e quando $n = 256$ e $p \geq 128$, o poder foi alto para $n = 128$ e $p \geq 128$ e para $n = 256$ e qualquer valor de p . Para o TB , o poder foi alto para $n = 256$ e qualquer valor

de p . Para o JB , o JBR e o TB , além destes valores, o poder convergiu para 1 também quando $n = 256$ e $p = 64$.

As versões *bootstrap* dos testes tiveram, na maioria das configurações estudadas, controle do erro tipo I e os valores de poder foram grandes com tamanhos amostrais superiores ou iguais a 128. Assim, elas apresentaram sucesso em suas criações, mesmo em situações com elevado percentual de *outliers* presentes na amostra. Isso confirmou que os testes foram robustos.

Vale ressaltar que em pequenas amostras os valores de poder foram muito próximos ou estatisticamente idênticos aos valores nominais. Isso, porém, era esperado, haja vista que os testes para as estruturas de covariâncias exigem, em geral, amostras maiores que os testes para os vetores de médias, conforme salientou Ferreira (2018). Vale também ressaltar que se a estrutura sob a hipótese alternativa para a matriz de covariâncias for muito próxima da estrutura sob a hipótese nula que se está testando, este fato obviamente acarreta potencialmente menores valores de poder do que uma outra situação em que a estrutura for bem distinta da estrutura esférica.

Nas Tabelas 4.9 e 4.10 são apresentados os valores de poder dos testes sob a $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, considerada a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância. Notaram-se que os valores de poder de todos os testes foram bem próximos a 1 ou convergiram para 1 para todas as combinações de n e p .

Na Tabela 4.9 observou-se que o JAs teve o poder igual a 1 em todas as combinações estudadas de n e de p . O $LRTAs$ e o $LRTAsR$ também apresentaram o poder igual a 1 para todas as configurações estudadas as quais os testes se aplicam, ou seja, quando $n > p$. O $JAsR$ teve o poder próximo de 1 quando $n = 8$ e $p \geq 16$ e $n \geq 16$ e qualquer valor de p . Os testes assintóticos, embora extremamente poderosos, não foram considerados uma boa opção por não controlarem a taxa de erro do tipo I , principalmente em alta dimensionalidade e/ou em amostras pequenas ($n \leq 64$).

Os resultados apresentados na Tabela 4.10 permitiram verificar que as observações apontadas nas versões assintóticas dos testes foram as mesmas para as versões *bootstrap* dos testes. O JBR apresentou valores de poder altos e bem próximos a 1 para $n = 8$ e $p = 8$, $n = 8$ e $p = 16$

Tabela 4.8 – Valores de poder dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,14	0,07		
	16			0,06	0,05		
	32			0,05	0,05		
	64			0,05	0,06		
	128			0,05	0,07		
	256			0,08	0,03		
16	8	0,06	0,05	0,09	0,10	0,06	0,07
	16			0,11	0,10		
	32			0,09	0,06		
	64			0,07	0,07		
	128			0,06	0,03		
	256			0,06	0,06		
32	8	0,17	0,08	0,10	0,11	0,13	0,13
	16	0,06	0,09	0,08	0,11	0,08	0,10
	32			0,07	0,06		
	64			0,21	0,14		
	128			0,22	0,15		
	256			0,21	0,17		
64	8	0,42	0,39	0,41	0,37	0,46	0,39
	16	0,26	0,28	0,30	0,29	0,29	0,30
	32	0,26	0,25	0,47	0,46	0,42	0,37
	64			0,30	0,27		
	128			0,36	0,42		
	256			0,48	0,48		
128	8	0,36	0,38	0,41	0,38	0,41	0,37
	16	0,48	0,46	0,53	0,53	0,52	0,49
	32	0,55	0,53	0,55	0,54	0,58	0,57
	64	0,67	0,67	0,77	0,78	0,75	0,75
	128			0,80	0,83		
	256			0,91	0,91		
256	8	0,85	0,84	0,85	0,81	0,86	0,83
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
	64	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

e $n = 8$ e $p = 32$ e o poder convergiu para 1 com $n = 8$ e $p \geq 64$ e para $n \geq 16$, independente do valor de p . Claramente, houve uma situação em que a estrutura de covariação sob H_1 se

Tabela 4.9 – Valores de poder dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			1,00	0,99
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

afastou consideravelmente em termos da estrutura sob H_0 . Com isso os valores de poder foram elevadíssimos, quase sempre iguais a 100% para todos os tamanhos amostrais n e dimensões p

adotados. Os três testes, nas versões robusta ou não robusta, tiveram desempenhos iguais nas configurações que as comparações foram possíveis de serem realizadas. Não houve melhoria expressiva em se usar o estimador robusto da covariância na formulação dos testes. Isso se deu também em todos os casos anteriormente estudados e discutidos aqui.

Nas Tabelas 4.11 e 4.12 foram apresentados os valores de poder dos testes assintóticos e das versões *bootstrap*, respectivamente, considerada $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância. Os resultados das simulações sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$ foram bem semelhantes aos resultados das simulações sob a distribuição normal.

Na Tabela 4.11 foram mostrados os resultados dos valores de poder dos testes assintóticos. Os testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *JAs* e *JAsR* tiveram valores de poder iguais a 1 para todas as combinações de n e de p consideradas no presente estudo para as quais os testes se aplicam, ou seja, para $n > p$. Para o caso de alta dimensionalidade o comportamento foi semelhante para os testes *JAs* e *JAsR*, a única exceção ocorreu para o *JAsR* com $n = 8$ e $p = 8$. Novamente, os valores de poder destes casos, principalmente em alta dimensionalidade ($p \geq n$) e pequenas amostras ($n \leq 64$), foram olhados com cautela, pois não houve controle adequado do erro tipo I.

Na Tabela 4.12 foram apresentados os valores de poder para as versões *bootstrap* dos testes. Os resultados das simulações sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$ foram bem semelhantes aos resultados sob a distribuição normal. Os testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB* e *TBR* tiveram os valores de poder iguais a 1 para quaisquer configurações de n e de p considerados no presente estudo. O *JBR* apresentou valores de poder altos e próximos de 1 para $n = 8$ e $p \geq 64$. Para $n = 8$ e $p \geq 128$ e para $n = 16$ e qualquer valor de p , o poder do *JBR* foi igual a 1. O *TB* apresentou poder igual a 1 em todas as configurações que foram possíveis simular. Novamente, foi verificado que houve uma robustez em relação à presença de *outliers* dos testes *bootstrap* para a estrutura de esfericidade da matriz de covariância, uma vez que praticamente não houve efeito negativo causado pela presença de *outliers*.

Tabela 4.10 – Valores de poder dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando H_1 : $\Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			1,00	0,93		
	16			1,00	0,99		
	32			1,00	0,98		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00		
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 4.11 – Valores de poder dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando H_1 : $\Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			1,00	0,99
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

4.3 Considerações finais

Os valores de poder sob a hipótese alternativa H_1 : $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$ diferiram dos valores de poder simulados sob a hipótese H_1 : $\Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, com

Tabela 4.12 – Valores de poder dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, obtidos por meio de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 5% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			1,00	0,94		
	16			1,00	0,98		
	32			1,00	0,99		
	64			1,00	0,99		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00		
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

$\rho = 0,90$, pois convergiram para 1 com um valor de p maior quando n foi fixado ou para um valor de n maior, concordando com os resultados apresentados por Campos (2019).

Como afirmado anteriormente, sob H_0 tem-se uma estrutura de covariância esférica, o que significa que as covariâncias são nulas e as variâncias das p variáveis são todas iguais. Portanto, no caso de cenários sob a hipótese alternativa $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$ se assemelham mais à estrutura de esfericidade sob a hipótese nula do que uma situação sob a hipótese alternativa com simetria composta $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, com $\rho = 0,90$ (valor grande), em que há um afastamento muito grande da estrutura sob H_0 .

Assim, sob estrutura de simetria composta e com correlação mais alta, era esperado um maior poder, como realmente foi observado. Apesar de não terem sido simulados casos em que a hipótese alternativa com simetria composta $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$ assumia valores de ρ pequenos, já era sabido que se assemelham mais à estrutura de esfericidade sob a hipótese nula do que quando a hipótese alternativa com simetria composta $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$ assumia valores de ρ grandes, como $\rho = 0,90$. Dessa maneira, os valores de poder sob $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$ têm relação com os valores de ρ .

As versões *bootstrap* dos testes ($LRTB$, $LTBR$, JB , JBR , TB e TBR) tiveram um desempenho melhor que as versões assintóticas ($LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$), controlando melhor as taxas de erro do tipo I , sob a distribuição normal e ao nível de 5% de significância. No trabalho de Campos e Ferreira (2022) foram obtidas conclusões semelhantes em relação às versões Monte Carlo dos testes de identidade, se comparadas aos testes assintóticos. O $LRTB$, o $LTBR$, o JB , o JBR , o TB e o TBR apresentaram, ainda, valores de poder altos (acima de 0,80) para $n = 256$ e qualquer valor de p sob $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$ e também para todos os valores de n e p considerados, sob $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que $\rho = 0,90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns.

Os testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ apresentaram valores de poder altos para algumas situações em que as versões *bootstrap* dos testes apresentaram valores muito baixos (abaixo de 0,50) sob $H_1: \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$. Sob $H_1: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, com $\rho = 0,90$, o poder dos testes assintóticos foi alto para todos os valores de n e p considerados, assim como ocorreu nas versões *bootstrap* dos testes. O ganho em poder dos testes assintóticos foi visto com muita ressalva, pois não houve controle dos erros tipo I destes testes na maioria dos cenários estudados, eles foram liberais, em geral, concordando que os testes mais poderosos

geralmente não controlam adequadamente as taxas de erro tipo I , como afirmado por Campos e Ferreira (2022).

Ao contrário do que foi concluído por Chen et al. (2020), no presente estudo os testes que utilizaram as estatísticas de máximo TB e TBR não apresentaram desempenhos superiores aos demais testes. Em relação ao controle das taxas de erro do tipo I , em algumas situações o $LRTB$ e/ou o JB foram/foi exato(s) mas o TB foi liberal ou o $LRTBR$ e/ou o JBR foram/foi exato(s) mas o TBR foi liberal. Já quanto ao poder dos testes, o TB e o TBR obtiveram comportamentos semelhantes aos demais testes.

Não houve ganho em relação ao uso dos estimadores robustos, nem nas versões assintóticas, nem nas versões *bootstrap* dos testes, mesmo considerando uma constante de contaminação de 30% no presente estudo. Tal fato contraria a indicação de Sabino, Lage e Almeida (2014) de utilizar as técnicas estatísticas robustas em casos de presença de *outliers* como uma medida de intervenção para que a análise dos dados não fosse prejudicada. O uso do *comedian*, no presente estudo, não valeu a pena, se comparado às estatísticas originais, pelo tempo computacional gasto ser maior e os resultados serem bem semelhantes à estatística correspondente não modificada.

Os testes sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$ se comportaram de maneira semelhante aos testes sob a distribuição normal, ao nível de 5% de significância. Portanto, as versões *bootstrap* dos testes sob a distribuição normal e sob a distribuição normal contaminada controlaram as taxas de erro do tipo I e possuíram valores de poder altos considerando as hipóteses alternativas utilizadas no presente estudo, já ressaltadas. Os testes $LRTB$, $LRTBR$, TB e TBR foram robustos quanto à presença de *outliers* e os testes JB e JBR foram robustos quanto à presença de *outliers* e também quanto à alta dimensionalidade dos dados ($p \geq n$).

Foi nítida a semelhança entre as conclusões sobre as vantagens do uso da versão *bootstrap* do teste de John (1971) e também de sua versão modificada, para o caso da hipótese de esfericidade, como observado no presente estudo, e do uso da versão Monte Carlo do teste de Ledoit e Wolf (2002) e de sua versão modificada para a hipótese de identidade, observado por Campos (2019). Assim, cumpriu-se o que motivou o estudo.

Algumas sugestões para estudos posteriores são dadas a seguir. A primeira delas é verificar a existência de um teste e/ou propor um teste de esfericidade robusto em relação à assimetria dos dados (o que não foi avaliado no presente estudo). A segunda é utilizar constantes de contaminação maior, como $\delta = 0,40$, e avaliar o desempenho dos testes propostos no presente estudo afim de verificar se os testes robustos quando à presença de *outliers* permanecem sendo robustos com esta nova imposição, além de verificar se os testes que utilizam os estimadores robustos apresentam uma vantagem em seus usos diante desta situação. A terceira é usar diferentes valores para ρ na hipótese alternativa de simetria composta, para verificar se eles influenciam nos valores dos poderes dos testes.

Em geral, os resultados das simulações obtidos considerando 1%, 5% e 10% de significância seguiram um mesmo padrão. Então, não foram discutidos os resultados para 10% e para 1%, os quais foram mostrados nos Apêndices A e B, respectivamente. As conclusões e discussões apresentadas para $\alpha = 5\%$ também foram válidas para $\alpha = 1\%$ e $\alpha = 10\%$.

Por último, mas não menos importante é a necessidade de apontar que embora o teste da hipótese nula de esfericidade, $H_0: \mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$, pareça restritivo, na verdade não é. Por exemplo, se um pesquisador almeja testar a hipótese $H_0: \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_0$, em que $\mathbf{\Sigma}_0$ é uma matriz de covariâncias de interesse $p \times p$ positiva definida, então se \mathbf{X}_j , para $j = 1, 2, \dots, n$, é a amostra aleatória, então se for realizada a transformação $\mathbf{Y}_j = \sigma \mathbf{\Sigma}_0^{-1/2} \mathbf{X}_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$, da amostra original, a covariância do novo conjunto de dados sob H_0 é $Cov(\mathbf{Y}_j) = \sigma \mathbf{\Sigma}_0^{-1/2} Cov(\mathbf{X}_j) \mathbf{\Sigma}_0 \sigma = \sigma^2 \mathbf{\Sigma}_0^{-1/2} \mathbf{\Sigma}_0^{-1/2} \mathbf{\Sigma}_0 = \sigma^2 \mathbf{I}$. Ou seja, testar que os dados originais tem covariância $\mathbf{\Sigma}_0$, equivale a testar que os dados transformados tem covariância $\sigma^2 \mathbf{I}$. Portanto, se a amostra transformada, $\mathbf{Y}_j = \sigma \mathbf{\Sigma}_0^{-1/2} \mathbf{X}_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$, for submetida a qualquer um dos testes, teremos ampla utilidade para os testes propostos, além do teste de esfericidade original, com todas as vantagens que os melhores testes encontrados apresentaram.

No Quadro 4.1 foi feito um resumo dos melhores desempenhos dos testes em estudo em relação ao controle das taxas de erro do tipo I e ao poder dos testes em cada combinação de n e p .

Quadro 4.1 – Resumo dos desempenhos dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs , $JAsR$, $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando o controle das taxas do erro do tipo I e os valores de poder dos testes sob as distribuições normal e normal contaminada, ao nível nominal de 5% de significância.

Distribuição	Hipótese	Recomendações
Normal	H_0	* $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR
	H_1	* $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs , $JAsR$, $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR , se $n = 256$ * JAs e $JAsR$ quando $p = 256$, $p = 128$ e $n = 8, 16, 32$, $p = 64$ e $n = 8$ * $JAsR$ em $n = 8$ e $p = 32$ e $n = 16$ e $p = 64$ * $LRTAs$ e $LRTAsR$ quando $n = 128$ e $p = 64$
	H_1^*	* $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs , $JAsR$, $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR
Normal contaminada	H_0	* $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR
	H_1	* $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR , se $n = 256$
	H_1^*	* $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs , $JAsR$, $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR

Fonte: Do autor (2023).

Avaliação sob $H_0 : \Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ referiu-se ao controle das taxas de erro tipo I .

Avaliação sob $H_1 : \Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$ para $i = 1, 2, \dots, p$, referiu-se ao o poder dos testes ser igual ou superior a 0,80.

Avaliação sob $H_1^* : \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$ em que $\rho = 0, 90$ e \mathbf{J} é uma matriz de uns, referiu-se ao o poder dos testes ser igual ou superior a 0,80.

5 CONCLUSÕES

Os testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* controlam adequadamente as taxas de erro do tipo *I* na maioria das situações, o que não ocorre em relação aos testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *JAs* e *JAsR*, tanto se considerada a distribuição normal quanto a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, aos níveis de 1%, 5% e 10% de significância. Assim, as versões *bootstrap* dos testes apresentam um desempenho melhor que os testes assintóticos.

Não é notada uma vantagem do uso dos testes que utilizam a estatística do máximo, *TB* e *TBR*, se comparados aos demais testes considerados. Portanto, o presente estudo contribui com a proposta de seis testes de esfericidade robustos quanto à presença de *outliers*, sendo que dois destes testes, o *JB* e o *JBR* são, ainda, robustos em relação à alta dimensionalidade dos dados. Não há ganho em relação ao uso dos estimadores robustos, tanto no caso assintótico quanto no caso *bootstrap*, nas condições realizadas no presente estudo.

Para um estudo posterior, sugere-se encontrar e/ou propor um teste de esfericidade que seja robusto em relação à assimetria da distribuição dos dados. No presente estudo a robustez quanto à assimetria da distribuição não foi verificada. Sugere-se também avaliar o desempenho dos testes propostos no presente estudo utilizando uma constante de contaminação maior, como $\delta = 0,40$, afim de verificar se os testes robustos quando à presença de *outliers* permanecem não sendo afetados com esta nova imposição, além de verificar se os testes que utilizam os estimadores robustos apresentam uma vantagem em seus usos diante da nova situação. Também é sugerido o uso de diferentes valores para ρ na hipótese alternativa de simetria composta.

REFERÊNCIAS

- BAI, Z. et al. Corrections to lrt on large-dimensional covariance matrix by rmt. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 37, n. 6B, p. 3822–3840, 2009.
- BAI, Z. D.; SILVERSTEIN, J. W. Clt for linear spectral statistics of large-dimensional sample covariance matrices. Institute of Mathematical Statistics, v. 32, p. 281–333, 2008.
- BARBOSA, J. J.; PEREIRA, T. M.; OLIVEIRA, F. L. P. de. Uma proposta para identificação de outliers multivariados. **Ciência e Natura**, v. 40, 2018.
- BENJAMINI, Y.; HOCHBERG, Y. Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing. **Journal of the Royal statistical society: series B (Methodological)**, Wiley Online Library, v. 57, n. 1, p. 289–300, 1995.
- BERTHET, Q.; RIGOLLET, P. Optimal detection of sparse principal components in high dimension. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 41, n. 4, p. 1780–1815, 2013.
- BOX, G. E. P. A general distribution theory for a class of likelihood criteria. **Biometrika**, JSTOR, v. 36, n. 3/4, p. 317–346, 1949.
- BRCICH, R. F.; ISKANDER, D. R. Testing for stationarity in the frequency domain using a sphericity statistic. In: IEEE. **2006 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings**. Toulouse, 2006. v. 3, p. III–III.
- BUTLER, R. W.; HUZURBAZAR, S.; BOOTH, J. G. Saddlepoint approximations for tests of block independence, sphericity and equal variances and covariances. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, Wiley Online Library, v. 55, n. 1, p. 171–183, 1993.
- CAI, T. T.; MA, Z. et al. Optimal hypothesis testing for high dimensional covariance matrices. **Bernoulli**, Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability, v. 19, n. 5B, p. 2359–2388, 2013.
- CAMPOS, L. L. **Proposta de um teste de esfericidade usando estimadores robustos do parâmetro de dispersão multivariado**. 130 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras, Departamento de Estatística, Programa de Pós-Graduação em Estatística, Lavras, MG, 2019.
- CAMPOS, L. L.; FERREIRA, D. F. Robust modified classical spherical tests in the presence of outliers. **Statistical Papers**, Springer, v. 63, n. 5, p. 1561–1576, 2022.
- CARO-LOPERA, F. J.; GONZÁLEZ-FARÍAS, G.; BALAKRISHNAN, N. On generalized wishart distributions-ii: Sphericity test. **Sankhya A**, Springer, v. 76, n. 2, p. 195–218, 2014.
- CARTER, E.; SRIVASTAVA, M. Monotonicity of the power functions of modified likelihood ratio criterion for the homogeneity of variances and of the sphericity test. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 229–233, 1977.
- CHEN et al. Tests for high-dimensional covariance matrices. **Random Matrices: Theory and Applications**, World Scientific Publishing Company, v. 8, p. 2050009–1 – 2050009–25, 2020.

CHEN, S. X.; ZHANG, L.-X.; ZHONG, P.-S. Tests for high-dimensional covariance matrices. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 105, n. 490, p. 810–819, 2010.

COELHO, C. A.; MARQUES, F. J. Near-exact distributions for the independence and sphericity likelihood ratio test statistics. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 101, n. 3, p. 583–593, 2010.

CRIBARI-NETO, F.; GOIS, M. C. d. A. Uma análise de Monte Carlo do desempenho de estimadores de matrizes de covariância sob heterocedasticidade de forma desconhecida. **Revista Brasileira de Economia**, SciELO Brasil, v. 56, n. 2, p. 309–334, 2002.

EL-SALLAM, A. A.; LEUNG, Y. H.; ZOUBIR, A. M. A frequency domain sphericity test based approach for parsimonious rake receivers in cdma systems. In: IEEE. **Proceedings of the Eighth International Symposium on Signal Processing and Its Applications, 2005**. Sydney, 2005. v. 1, p. 355–358.

FALK, M. On mad and comedians. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, Springer, v. 49, n. 4, p. 615–644, 1997.

FENG, L.; LIU, B. High-dimensional rank tests for sphericity. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 155, p. 217–233, 2017.

FERREIRA, D. F. **Estatística computacional em Java**. 1. ed. Lavras: Editora UFLA, 2013.

FERREIRA, D. F. **Estatística multivariada**. 3. ed. Lavras: Editora UFLA, 2018.

FISHER, T. J. On testing for an identity covariance matrix when the dimensionality equals or exceeds the sample size. **Journal of statistical planning and inference**, Elsevier, v. 142, n. 1, p. 312–326, 2012.

FISHER, T. J.; SUN, X.; GALLAGHER, C. M. A new test for sphericity of the covariance matrix for high dimensional data. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 101, n. 10, p. 2554–2570, 2010.

FONT-SEGURA, J. et al. Quadratic sphericity test for blind detection over time-varying frequency-selective fading channels. In: IEEE. **2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing**. Vancouver, 2013. p. 4708–4712.

GUPTA, A.; NAGAR, D. Nonnull distribution of likelihood ratio criterion for testing multisample sphericity in the complex case. **Australian Journal of Statistics**, Wiley Online Library, v. 30, n. 3, p. 307–318, 1988.

HALLIN, M.; PAINDAVEINE, D. Semiparametrically efficient rank-based inference for shape. i. optimal rank-based tests for sphericity. **The annals of statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 34, n. 6, p. 2707–2756, 2006.

JOHN, S. Some optimal multivariate tests. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 58, n. 1, p. 123–127, 1971.

KHATRI, C.; SRIVASTAVA, M. On exact non-null distributions of likelihood ratio criteria for sphericity test and equality of two covariance matrices. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A**, JSTOR, p. 201–206, 1971.

- KLAUSNER, N.; AZIMI-SADJADI, M. R. Multi-sonar adaptive target detection using the sphericity test. In: IEEE. **2013 OCEANS-San Diego**. San Diego, 2013. p. 1–5.
- KORIN, B. P. On the distribution of a statistic used for testing a covariance matrix. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 55, n. 1, p. 171–178, 1968.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. Some hypothesis tests for the covariance matrix when the dimension is large compared to the sample size. **Annals of statistics**, JSTOR, p. 1081–1102, 2002.
- LI, Z.; YAO, J. Testing the sphericity of a covariance matrix when the dimension is much larger than the sample size. **Electronic Journal of Statistics**, The Institute of Mathematical Statistics and the Bernoulli Society, v. 10, n. 2, p. 2973–3010, 2016.
- LIU, Y.; SUN, X.; ZHAO, S. Source enumeration via gbic with a statistic for sphericity test in white gaussian and non-gaussian noise. **IET Radar, Sonar & Navigation**, IET, v. 11, n. 9, p. 1333–1339, 2017.
- LIU, Y.; TAMURA, Y.; TANIGUCHI, M. Asymptotic theory of test statistic for sphericity of high-dimensional time series. **Journal of Time Series Analysis**, Wiley Online Library, v. 39, n. 3, p. 402–416, 2018.
- MANTAJ, A.; PATER, R.; WAGNER, W. Aspects of linear and median correlation coefficients matrix. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 2010.
- MAO, G. A note on tests for high-dimensional covariance matrices. **Statistics & Probability Letters**, Elsevier, v. 117, p. 89–92, 2016.
- MARDEN, J.; GAO, Y. Rank-based procedures for structural hypotheses on covariance matrices. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A**, JSTOR, p. 653–677, 2002.
- MARQUES, F. J.; COELHO, C. A. Near-exact distributions for the sphericity likelihood ratio test statistic. **Journal of Statistical Planning and Inference**, Elsevier, v. 138, n. 3, p. 726–741, 2008.
- MARQUES, F. J.; COELHO, C. A. The block sphericity test—exact and near-exact distributions for the likelihood ratio statistic. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, Wiley Online Library, v. 35, n. 4, p. 373–383, 2011.
- MAUCHLY, J. W. Significance test for sphericity of a normal n-variate distribution. **The Annals of Mathematical Statistics**, JSTOR, v. 11, n. 2, p. 204–209, 1940.
- MESTRE, X.; VALLET, P. Extended glrt detectors of correlation and sphericity: The undersampled regime. In: IEEE. **2015 23rd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)**. Nice, 2015. p. 504–508.
- NAGAO, H. On some test criteria for covariance matrix. **The Annals of Statistics**, JSTOR, p. 700–709, 1973.
- NAGAR, D.; JAIN, S.; GUPTA, A. Distribution of lrc for testing sphericity of a complex multivariate gaussian model. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, Hindawi, v. 8, n. 3, p. 555–562, 1985.

- NAGARSENKER, B.; NAGARSENKER, P. Distribution of the likelihood ratio statistic for testing sphericity structure for a complex normal covariance matrix. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B**, JSTOR, p. 352–359, 1981.
- NAGARSENKER, B.; PILLAI, K. The distribution of the sphericity test criterion. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 3, n. 2, p. 226–235, 1973.
- NAIR, U. The application of the moment function in the study of distribution laws in statistics. **Biometrika**, JSTOR, v. 30, n. 3/4, p. 274–294, 1938.
- NAIR, U. Application of factorial series in the study of distribution laws in statistics. **Sankhya**, v. 5, n. 17.5, 1940.
- NEYMAN, J.; PEARSON, E. S. IX. on the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character**, The Royal Society London, v. 231, n. 694-706, p. 289–337, 1933.
- OLIVEIRA, I. Cardoso de; FERREIRA, D. Multivariate extension of chi-squared univariate normality test. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 80, n. 5, p. 513–526, 2010.
- ONATSKI, A. et al. Asymptotic power of sphericity tests for high-dimensional data. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 41, n. 3, p. 1204–1231, 2013.
- PALMA, M. D.; SRINIVASAN, M.; SAJESH, T. Detecting compositional outliers using comedian method. In: CITESEER. **Advances in Latent Variables-Methods, Models and Applications**. Brescia, 2013.
- PEREIRA, É. A. **Proposição de testes de normalidade multivariada baseados em distâncias robustas**. 105 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras, Departamento de Estatística, Programa de Pós-Graduação em Estatística, Lavras, MG, 2017.
- PILLAI, K.; NAGARSENKER, B. et al. On the distribution of the sphericity test criterion in classical and complex normal populations having unknown covariance matrices. **The Annals of Mathematical Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 42, n. 2, p. 764–767, 1971.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RAMIREZ, D. et al. Locally most powerful invariant tests for correlation and sphericity of gaussian vectors. **IEEE Transactions on Information Theory**, IEEE, v. 59, n. 4, p. 2128–2141, 2013.
- RODRÍGUEZ, R. E. L. et al. **Multivariate outlier detection based on a robust Mahalanobis distance with shrinkage estimators**. Madrid, 2017.
- RONCHETTI, E. **The historical development of robust statistics**. Geneva: Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-7), 2006. 2–7 p.
- ROUSSEEUW, P. J.; MOLENBERGHS, G. Transformation of non positive semidefinite correlation matrices. **Communications in Statistics—Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 22, n. 4, p. 965–984, 1993.

- SABINO, C. V. S.; LAGE, L. V.; ALMEIDA, K. Uso de métodos estatísticos robustos na análise ambiental. **Engenharia Sanitária e Ambiental**, p. 87–94, 2014.
- SAJESH, T.; SRINIVASAN, M. An overview of multiple outliers in multidimensional data. **Sri Lankan Journal of Applied Statistics**, The Institute of Applied Statistics, Sri Lanka, v. 14, n. 2, 2013.
- SAJESH, T. A.; SRINIVASAN, M. R. Outlier detection for high dimensional data using comedian approach. **Sri Lankan The Institute of Applied Statistics**, 2012.
- SATHE, S.; AGGARWAL, C. C. Subspace histograms for outlier detection in linear time. **Knowledge and Information Systems**, Springer, v. 56, n. 3, p. 691–715, 2018.
- SMITH, P. J. et al. Distributed spectrum sensing for cognitive radio networks based on the sphericity test. **IEEE Transactions on Communications**, IEEE, v. 67, n. 3, p. 1831–1844, 2018.
- SRIVASTAVA, M. S. Some tests concerning the covariance matrix in high dimensional data. **Journal of the Japan Statistical Society**, THE JAPAN STATISTICAL SOCIETY, v. 35, n. 2, p. 251–272, 2005.
- SRIVASTAVA, M. S. Controlling the average false discovery in large-scale multiple testing. **Journal of Statistical Research**, v. 44, n. 1, p. 85, 2010.
- SRIVASTAVA, M. S.; KOLLO, T.; ROSEN, D. von. Some tests for the covariance matrix with fewer observations than the dimension under non-normality. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 102, n. 6, p. 1090–1103, 2011.
- SRIVASTAVA, M. S.; YANAGIHARA, H.; KUBOKAWA, T. Tests for covariance matrices in high dimension with less sample size. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 130, p. 289–309, 2014.
- SUGIURA, N. Asymptotic expansions of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix. **The Annals of Mathematical Statistics**, JSTOR, v. 40, n. 6, p. 2051–2063, 1969.
- SUGIURA, N. Locally best invariant test for sphericity and the limiting distributions. **The Annals of Mathematical Statistics**, JSTOR, p. 1312–1316, 1972.
- SUGIURA, N.; NAGAO, H. Unbiasedness of some test criteria for the equality of one or two covariance matrices. **The Annals of Mathematical Statistics**, JSTOR, v. 39, n. 5, p. 1686–1692, 1968.
- TIAN, X.; LU, Y.; LI, W. A robust test for sphericity of high-dimensional covariance matrices. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 141, p. 217–227, 2015.
- WANG; YAO. On the sphericity test with large-dimensional observations. **Electronic Journal of Statistics**, The Institute of Mathematical Statistics and the Bernoulli Society, v. 7, p. 2164–2192, 2013.
- WANG, Q.; YAO, J. et al. On the sphericity test with large-dimensional observations. **Electronic Journal of Statistics**, The Institute of Mathematical Statistics and the Bernoulli Society, v. 7, p. 2164–2192, 2013.

WEI, L.; DHARMAWANSA, P.; TIRKKONEN, O. Multiple primary user spectrum sensing in the low snr regime. **IEEE transactions on communications**, IEEE, v. 61, n. 5, p. 1720–1731, 2013.

WILLIAMS, D. B.; JOHNSON, D. H. Using the sphericity test for source detection with narrow-band passive arrays. **IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing**, IEEE, v. 38, n. 11, p. 2008–2014, 1990.

XIAO, Y.-H. et al. Performance analysis of locally most powerful invariant test for sphericity of gaussian vectors in coherent mimo radar. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, IEEE, v. 67, n. 7, p. 5868–5882, 2018.

ZOU, C. et al. Multivariate sign-based high-dimensional tests for sphericity. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 101, n. 1, p. 229–236, 2014.

APÊNDICE A – Resultados ao nível de 10% de significância

Tabela 1 – Tamanhos reais dos testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *JAs* e *JAsR* sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,15 ⁺	0,30 ⁺
	16			0,33 ⁺	0,70 ⁺
	32			0,75 ⁺	0,90 ⁺
	64			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
16	8	0,13 ⁺	0,32 ⁺	0,15 ⁺	0,30 ⁺
	16			0,20 ⁺	0,38 ⁺
	32			0,37 ⁺	0,59 ⁺
	64			0,78 ⁺	0,87 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
32	8	0,09	0,16 ⁺	0,10	0,16 ⁺
	16	0,14 ⁺	0,22 ⁺	0,15 ⁺	0,23 ⁺
	32			0,23 ⁺	0,30 ⁺
	64			0,40 ⁺	0,48 ⁺
	128			0,83 ⁺	0,83 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
64	8	0,09	0,14 ⁺	0,10	0,14 ⁺
	16	0,11	0,13 ⁺	0,12	0,15 ⁺
	32	0,18 ⁺	0,21 ⁺	0,15 ⁺	0,17 ⁺
	64			0,25 ⁺	0,26 ⁺
	128			0,32 ⁺	0,33 ⁺
	256			0,76 ⁺	0,76 ⁺
128	8	0,08	0,12	0,09	0,12
	16	0,13 ⁺	0,14 ⁺	0,15 ⁺	0,18 ⁺
	32	0,08	0,08	0,09	0,09
	64	0,34 ⁺	0,34 ⁺	0,21 ⁺	0,21 ⁺
	128			0,24 ⁺	0,24 ⁺
	256			0,40 ⁺	0,40 ⁺
256	8	0,13 ⁺	0,14 ⁺	0,13 ⁺	0,14 ⁺
	16	0,11	0,12	0,11	0,12
	32	0,08	0,08	0,12	0,11
	64	0,14 ⁺	0,15 ⁺	0,11	0,11
	128	0,64 ⁺	0,64 ⁺	0,21 ⁺	0,21 ⁺
	256			0,21 ⁺	0,21 ⁺

⁺ foram os testes liberais e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 2 – Tamanhos reais dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,09	0,09		
	16			0,10	0,09		
	32			0,10	0,10		
	64			0,10	0,10		
	128			0,11	0,10		
	256			0,12	0,12		
16	8	0,10	0,11	0,11	0,10	0,11	0,11
	16			0,10	0,11		
	32			0,09	0,09		
	64			0,11	0,10		
	128			0,06 ⁻	0,05 ⁻		
	256			0,06 ⁻	0,08		
32	8	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,08
	16	0,10	0,09	0,11	0,11	0,11	0,09
	32			0,12	0,11		
	64			0,10	0,11		
	128			0,11	0,17 ⁺		
	256			0,11	0,10		
64	8	0,09	0,10	0,09	0,10	0,09	0,10
	16	0,10	0,11	0,10	0,11	0,10	0,10
	32	0,09	0,08	0,11	0,10	0,09	0,09
	64			0,12	0,11		
	128			0,06 ⁻	0,07 ⁻		
	256			0,13 ⁺	0,13 ⁺		
128	8	0,09	0,09	0,10	0,11	0,10	0,10
	16	0,12	0,11	0,16 ⁺	0,15 ⁺	0,14 ⁺	0,15 ⁺
	32	0,07 ⁻	0,07 ⁻	0,09	0,09	0,08	0,08
	64	0,12	0,12	0,15 ⁺	0,16 ⁺	0,12	0,12
	128			0,12	0,12		
	256			0,11	0,11		
256	8	0,12	0,13 ⁺	0,13 ⁺	0,13 ⁺	0,12	0,13 ⁺
	16	0,09	0,09	0,10	0,10	0,10	0,10
	32	0,08	0,08	0,10	0,10	0,10	0,09
	64	0,11	0,11	0,10	0,11	0,10	0,10
	128	0,12	0,12	0,15 ⁺	0,15 ⁺	0,12	0,12
	256			0,08	0,08		

⁺ foram os testes liberais, ⁻ foram os testes conservativos e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 3 – Tamanhos reais dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,20 ⁺	0,47 ⁺
	16			0,34 ⁺	0,72 ⁺
	32			0,77 ⁺	0,90 ⁺
	64			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
16	8	0,13 ⁺	0,30 ⁺	0,12	0,27 ⁺
	16			0,18 ⁺	0,40 ⁺
	32			0,37 ⁺	0,60 ⁺
	64			0,76 ⁺	0,85 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
32	8	0,11	0,20 ⁺	0,12	0,19 ⁺
	16	0,15 ⁺	0,23 ⁺	0,15 ⁺	0,22 ⁺
	32			0,22 ⁺	0,33 ⁺
	64			0,40 ⁺	0,46 ⁺
	128			0,75 ⁺	0,76 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
64	8	0,09	0,12	0,10	0,13 ⁺
	16	0,11	0,20 ⁺	0,12	0,19 ⁺
	32	0,20 ⁺	0,22 ⁺	0,15 ⁺	0,17 ⁺
	64			0,25 ⁺	0,26 ⁺
	128			0,39 ⁺	0,39 ⁺
	256			0,81 ⁺	0,81 ⁺
128	8	0,04 ⁻	0,06 ⁻	0,07 ⁻	0,10
	16	0,12	0,13 ⁺	0,11	0,11
	32	0,11	0,10	0,11	0,11
	64	0,24 ⁺	0,25 ⁺	0,17 ⁺	0,18 ⁺
	128			0,24 ⁺	0,24 ⁺
	256			0,39 ⁺	0,39 ⁺
256	8	0,14 ⁺	0,19 ⁺	0,12	0,16 ⁺
	16	0,12	0,13 ⁺	0,11	0,11
	32	0,13 ⁺	0,13 ⁺	0,13 ⁺	0,13 ⁺
	64	0,13 ⁺	0,13 ⁺	0,10	0,10
	128	0,62 ⁺	0,62 ⁺	0,19 ⁺	0,19 ⁺
	256			0,26 ⁺	0,26 ⁺

⁺ foram os testes liberais, ⁻ foram os testes conservativos e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 4 – Tamanhos reais dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR sob a hipótese H_0 : $\Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,11	0,10		
	16			0,09	0,11		
	32			0,09	0,09		
	64			0,10	0,09		
	128			0,11	0,05 ⁻		
	256			0,12	0,09		
16	8	0,10	0,10	0,09	0,09	0,09	0,10
	16			0,07 ⁻	0,09		
	32			0,10	0,10		
	64			0,08	0,09		
	128			0,10	0,11		
	256			0,09	0,08		
32	8	0,11	0,10	0,10	0,09	0,10	0,09
	16	0,11	0,11	0,10	0,10	0,10	0,10
	32			0,12	0,13 ⁺		
	64			0,09	0,08		
	128			0,06 ⁻	0,07 ⁻		
	256			0,08	0,09		
64	8	0,09	0,09	0,09	0,10	0,09	0,10
	16	0,11	0,10	0,10	0,09	0,10	0,09
	32	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
	64			0,11	0,11		
	128			0,12	0,13 ⁺		
	256			0,06 ⁻	0,06 ⁻		
128	8	0,05 ⁻	0,06 ⁻	0,08	0,09	0,09	0,07 ⁻
	16	0,12	0,12	0,11	0,10	0,12	0,12
	32	0,09	0,08	0,06 ⁻	0,06 ⁻	0,07 ⁻	0,07 ⁻
	64	0,09	0,10	0,11	0,12	0,09	0,10
	128			0,11	0,11		
	256			0,12	0,12		
256	8	0,13 ⁺	0,15 ⁺	0,14 ⁺	0,15 ⁺	0,13 ⁺	0,15 ⁺
	16	0,12	0,12	0,11	0,10	0,12	0,12
	32	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13 ⁺	0,12
	64	0,10	0,10	0,08	0,08	0,11	0,11
	128	0,11	0,11	0,11	0,11	0,10	0,10
	256			0,12	0,12		

⁺ foram os testes liberais, ⁻ foram os testes conservativos e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 5 – Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,23	0,51
	16			0,37	0,73
	32			0,78	0,93
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	0,19	0,37	0,19	0,35
	16			0,31	0,50
	32			0,50	0,67
	64			0,83	0,87
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	0,18	0,26	0,23	0,29
	16	0,26	0,36	0,29	0,36
	32			0,46	0,54
	64			0,53	0,57
	128			0,92	0,93
	256			1,00	1,00
64	8	0,40	0,45	0,38	0,44
	16	0,41	0,43	0,48	0,51
	32	0,43	0,46	0,42	0,45
	64			0,66	0,66
	128			0,73	0,73
	256			0,96	0,96
128	8	0,87	0,88	0,87	0,86
	16	0,88	0,88	0,86	0,86
	32	0,89	0,89	0,86	0,88
	64	0,88	0,88	0,84	0,84
	128			0,95	0,95
	256			0,97	0,97
256	8	0,98	0,98	0,98	0,98
	16	0,98	0,98	0,99	0,99
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 6 – Poderes dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR considerando $H_1: \Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,13	0,11		
	16			0,09	0,08		
	32			0,15	0,12		
	64			0,14	0,10		
	128			0,15	0,16		
	256			0,11	0,09		
16	8	0,16	0,11	0,15	0,15	0,15	0,13
	16			0,18	0,15		
	32			0,16	0,12		
	64			0,16	0,12		
	128			0,19	0,11		
	256			0,13	0,10		
32	8	0,18	0,16	0,21	0,17	0,20	0,18
	16	0,20	0,17	0,22	0,21	0,21	0,18
	32			0,29	0,25		
	64			0,17	0,18		
	128			0,26	0,22		
	256			0,20	0,21		
64	8	0,40	0,37	0,37	0,36	0,38	0,37
	16	0,39	0,37	0,44	0,42	0,42	0,41
	32	0,27	0,27	0,32	0,32	0,31	0,30
	64			0,42	0,40		
	128			0,36	0,36		
	256			0,38	0,38		
128	8	0,86	0,82	0,86	0,81	0,86	0,82
	16	0,86	0,87	0,85	0,84	0,86	0,87
	32	0,84	0,85	0,85	0,84	0,83	0,82
	64	0,64	0,64	0,77	0,75	0,69	0,69
	128			0,85	0,85		
	256			0,83	0,83		
256	8	0,97	0,97	0,96	0,95	0,96	0,96
	16	0,98	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	0,99	0,99	1,00	1,00	0,99	0,99
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 7 – Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,26	0,54
	16			0,35	0,74
	32			0,76	0,90
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	0,13	0,37	0,23	0,35
	16			0,37	0,53
	32			0,48	0,65
	64			0,87	0,91
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	0,21	0,24	0,16	0,23
	16	0,21	0,26	0,29	0,34
	32			0,26	0,36
	64			0,71	0,72
	128			0,90	0,90
	256			1,00	1,00
64	8	0,60	0,59	0,56	0,58
	16	0,38	0,45	0,54	0,60
	32	0,65	0,67	0,71	0,72
	64			0,68	0,70
	128			0,82	0,88
	256			0,98	0,98
128	8	0,51	0,51	0,53	0,53
	16	0,68	0,68	0,74	0,75
	32	0,73	0,73	0,75	0,75
	64	0,97	0,97	0,92	0,92
	128			0,97	0,99
	256			1,00	1,00
256	8	0,87	0,88	0,87	0,86
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	0,99	0,99	0,99	0,99
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 8 – Poderes dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,16	0,11		
	16			0,14	0,07		
	32			0,08	0,09		
	64			0,08	0,07		
	128			0,12	0,11		
	256			0,15	0,10		
16	8	0,14	0,11	0,14	0,14	0,14	0,12
	16			0,23	0,20		
	32			0,18	0,11		
	64			0,14	0,10		
	128			0,09	0,07		
	256			0,15	0,12		
32	8	0,20	0,17	0,15	0,15	0,20	0,18
	16	0,13	0,13	0,19	0,18	0,18	0,18
	32			0,11	0,12		
	64			0,32	0,28		
	128			0,33	0,28		
	256			0,34	0,29		
64	8	0,59	0,55	0,54	0,49	0,55	0,54
	16	0,37	0,35	0,45	0,43	0,42	0,45
	32	0,44	0,43	0,60	0,59	0,58	0,57
	64			0,47	0,45		
	128			0,52	0,57		
	256			0,65	0,65		
128	8	0,54	0,48	0,49	0,48	0,53	0,47
	16	0,66	0,65	0,69	0,67	0,67	0,65
	32	0,70	0,67	0,67	0,67	0,71	0,71
	64	0,78	0,77	0,86	0,86	0,86	0,86
	128			0,92	0,95		
	256			0,97	0,97		
256	8	0,90	0,88	0,87	0,87	0,88	0,88
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	0,99	0,99	0,99	1,00	0,99	0,99
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 9 – Poderes dos testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *JAs* e *JAsR* considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0, 90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			1,00	1,00
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 10 – Poderes dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			1,00	0,97		
	16			1,00	0,99		
	32			1,00	0,99		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00		
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 11 – Poderes dos testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *JAs* e *JAsR* considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			1,00	0,99
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 12 – Poderes dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 10% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			1,00	0,98		
	16			1,00	1,00		
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00		
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

APÊNDICE B – Resultados ao nível de 1% de significância

Tabela 13 – Tamanhos reais dos testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *JAs* e *JAsR* sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,03 ⁺	0,19 ⁺
	16			0,10 ⁺	0,47 ⁺
	32			0,36 ⁺	0,75 ⁺
	64			0,98 ⁺	0,99 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	16	8	0,01	0,11 ⁺	0,02
16				0,04 ⁺	0,16 ⁺
32				0,09 ⁺	0,33 ⁺
64				0,40 ⁺	0,62 ⁺
128				0,99 ⁺	0,99 ⁺
256				1,00 ⁺	1,00 ⁺
32		8	0,01	0,02	0,02
	16	0,03 ⁺	0,06 ⁺	0,03 ⁺	0,05 ⁺
	32			0,04 ⁺	0,08 ⁺
	64			0,10 ⁺	0,16 ⁺
	128			0,40 ⁺	0,45 ⁺
	256			0,98 ⁺	0,98 ⁺
	64	8	0,01	0,02	0,01
16		0,01	0,02	0,02	0,03 ⁺
32		0,02	0,03 ⁺	0,03 ⁺	0,03 ⁺
64				0,04 ⁺	0,05 ⁺
128				0,05 ⁺	0,07 ⁺
256				0,41 ⁺	0,41 ⁺
128		8	0,01	0,01	0,02
	16	0,01	0,01	0,01	0,01
	32	0,01	0,01	0,04 ⁺	0,04 ⁺
	64	0,06 ⁺	0,06 ⁺	0,01	0,01
	128			0,05	0,05
	256			0,09 ⁺	0,09 ⁺
	256	8	0,01	0,03 ⁺	0,02
16		0,01	0,01	0,01	0,01
32		0,01	0,01	0,00	0,01
64		0,02	0,02	0,01	0,01
128		0,26 ⁺	0,26 ⁺	0,07 ⁺	0,07 ⁺
256				0,02	0,02

⁺ foram os testes liberais e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 14 – Tamanhos reais dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,01	0,01		
	16			0,01	0,01		
	32			0,01	0,01		
	64			0,02	0,01		
	128			0,01	0,00		
	256			0,01	0,02		
16	8	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,00
	16			0,01	0,01		
	32			0,01	0,01		
	64			0,02	0,01		
	128			0,00	0,01		
	256			0,00	0,01		
32	8	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	16	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,02
	32			0,01	0,01		
	64			0,01	0,01		
	128			0,00	0,00		
	256			0,02	0,02		
64	8	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01
	16	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01
	32	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	64			0,01	0,01		
	128			0,00	0,00		
	256			0,01	0,01		
128	8	0,00	1,00 ⁺	0,01	0,00	0,01	0,00
	16	0,03 ⁺	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
	32	0,01	0,01	0,03 ⁺	0,03 ⁺	0,03 ⁺	0,02
	64	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	128			0,01	0,01		
	256			0,00	0,00		
256	8	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
	16	0,02	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
	32	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01
	64	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00
	128	0,02	0,02	0,03 ⁺	0,03 ⁺	0,02	0,02
	256			0,01	0,01		

⁺ foram os testes liberais e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 15 – Tamanhos reais dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,04 ⁺	0,21 ⁺
	16			0,09 ⁺	0,49 ⁺
	32			0,39 ⁺	0,77 ⁺
	64			0,98 ⁺	0,99 ⁺
	128			1,00 ⁺	1,00 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
16	8	0,02	0,12 ⁺	0,02	0,07 ⁺
	16			0,03 ⁺	0,16 ⁺
	32			0,11 ⁺	0,35 ⁺
	64			0,40 ⁺	0,62 ⁺
	128			0,98 ⁺	0,98 ⁺
	256			1,00 ⁺	1,00 ⁺
32	8	0,01	0,03 ⁺	0,01	0,04 ⁺
	16	0,02	0,06 ⁺	0,03 ⁺	0,05 ⁺
	32			0,05 ⁺	0,11 ⁺
	64			0,09 ⁺	0,14 ⁺
	128			0,38 ⁺	0,42 ⁺
	256			0,96 ⁺	0,96 ⁺
64	8	0,01	0,02	0,01	0,02
	16	0,01	0,03 ⁺	0,01	0,04 ⁺
	32	0,03 ⁺	0,04 ⁺	0,02	0,02
	64			0,04 ⁺	0,04 ⁺
	128			0,11 ⁺	0,12 ⁺
	256			0,38 ⁺	0,38 ⁺
128	8	0,01	0,02	0,01	0,02
	16	0,02	0,02	0,01	0,01
	32	0,00	0,00	0,01	0,01
	64	0,05 ⁺	0,05 ⁺	0,03 ⁺	0,03 ⁺
	128			0,04 ⁺	0,04 ⁺
	256			0,10 ⁺	0,10 ⁺
256	8	0,01	0,01	0,02	0,02
	16	0,02	0,02	0,01	0,01
	32	0,00	0,00	0,00	0,00
	64	0,02	0,02	0,02	0,02
	128	0,22 ⁺	0,22 ⁺	0,03 ⁺	0,03 ⁺
	256			0,02	0,02

⁺ foram os testes liberais e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 16 – Tamanhos reais dos testes $LRTB$, $LRTBR$, JB , JBR , TB e TBR sob a hipótese $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,01	0,01	0,01	
	16			0,01	0,01		
	32			0,01	0,01		
	64			0,01	0,01		
	128			0,01	0,00		
	256			0,04 ⁺	0,02		
16	8	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	16			0,01	0,01		
	32			0,01	0,01		
	64			0,01	0,00		
	128			0,04 ⁺	0,01		
	256			0,00	0,01		
32	8	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	32			0,01	0,01		
	64			0,01	0,00		
	128			0,00	0,00		
	256			0,00	0,00		
64	8	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	32	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	64			0,01	0,00		
	128			0,01	0,00		
	256			0,01	0,01		
128	8	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01	0,02
	16	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01
	32	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	64	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00
	128			0,00	0,00		
	256			0,01	0,01		
256	8	0,03 ⁺	0,01	0,03 ⁺	0,02	0,03 ⁺	0,02
	16	0,03 ⁺	0,01	0,03 ⁺	0,02	0,03 ⁺	0,02
	32	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00
	64	0,02	0,02	0,04 ⁺	0,04 ⁺	0,04 ⁺	0,04 ⁺
	128	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01
	256			0,00	0,00		

⁺ foram os testes liberais e, em negrito, os testes exatos.

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 17 – Poderes dos testes $LRTAs$, $LRTAsR$, JAs e $JAsR$ considerando $H_1: \Sigma = diag(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,05	0,22
	16			0,09	0,49
	32			0,41	0,79
	64			0,98	0,99
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	0,03	0,13	0,04	0,12
	16			0,09	0,23
	32			0,17	0,40
	64			0,47	0,67
	128			0,99	0,99
	256			1,00	1,00
32	8	0,03	0,07	0,04	0,07
	16	0,04	0,09	0,07	0,11
	32			0,15	0,21
	64			0,17	0,24
	128			0,58	0,61
	256			0,98	0,98
64	8	0,10	0,13	0,11	0,13
	16	0,11	0,14	0,15	0,17
	32	0,12	0,14	0,13	0,14
	64			0,25	0,26
	128			0,37	0,37
	256			0,80	0,80
128	8	0,51	0,58	0,57	0,56
	16	0,32	0,32	0,27	0,31
	32	0,53	0,54	0,62	0,64
	64	0,59	0,59	0,55	0,55
	128			0,73	0,73
	256			0,83	0,83
256	8	0,85	0,86	0,857	0,87
	16	0,97	0,97	0,967	0,96
	32	0,93	0,93	0,957	0,95
	64	0,94	0,94	0,967	0,96
	128	1,00	1,00	0,997	0,99
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 18 – Poderes dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,02	0,01		
	16			0,01	0,01		
	32			0,02	0,01		
	64			0,02	0,01		
	128			0,02	0,02		
	256			0,03	0,01		
16	8	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,02
	16			0,03	0,02		
	32			0,02	0,01		
	64			0,02	0,01		
	128			0,00	0,00		
	256			0,00	0,00		
32	8	0,03	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02
	16	0,02	0,02	0,04	0,03	0,03	0,02
	32			0,06	0,05		
	64			0,03	0,01		
	128			0,02	0,00		
	256			0,05	0,04		
64	8	0,10	0,08	0,09	0,07	0,10	0,08
	16	0,09	0,09	0,11	0,10	0,12	0,10
	32	0,06	0,05	0,08	0,07	0,07	0,07
	64			0,11	0,10		
	128			0,14	0,13		
	256			0,09	0,09		
128	8	0,45	0,40	0,48	0,43	0,51	0,44
	16	0,22	0,22	0,20	0,21	0,23	0,24
	32	0,37	0,37	0,49	0,47	0,46	0,45
	64	0,28	0,28	0,37	0,37	0,31	0,31
	128			0,37	0,37		
	256			0,47	0,47		
256	8	0,78	0,75	0,75	0,71	0,76	0,76
	16	0,93	0,92	0,92	0,93	0,92	0,92
	32	0,91	0,90	0,89	0,88	0,92	0,91
	64	0,92	0,91	0,92	0,92	0,94	0,94
	128	0,84	0,84	0,91	0,91	0,84	0,84
	256			0,97	0,97		

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 19 – Poderes dos testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *JAs* e *JAsR* considerando $H_1: \Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			0,06	0,24
	16			0,11	0,54
	32			0,41	0,78
	64			0,96	0,97
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	0,02	0,13	0,03	0,12
	16			0,08	0,25
	32			0,17	0,39
	64			0,47	0,62
	128			0,97	0,97
	256			1,00	1,00
32	8	0,02	0,06	0,06	0,08
	16	0,04	0,10	0,03	0,10
	32			0,06	0,10
	64			0,32	0,40
	128			0,61	0,63
	256			1,00	1,00
64	8	0,20	0,27	0,23	0,28
	16	0,11	0,12	0,15	0,18
	32	0,20	0,20	0,37	0,37
	64			0,29	0,29
	128			0,63	0,68
	256			0,91	0,91
128	8	0,12	0,17	0,15	0,20
	16	0,32	0,32	0,33	0,33
	32	0,35	0,35	0,38	0,38
	64	0,69	0,69	0,66	0,66
	128			0,78	0,83
	256			0,98	0,98
256	8	0,73	0,74	0,71	0,71
	16	0,92	0,93	0,92	0,93
	32	0,97	0,97	0,97	0,97
	64	0,97	0,97	0,99	0,99
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 20 – Poderes dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			0,05	0,00		
	16			0,01	0,00		
	32			0,00	0,00		
	64			0,01	0,01		
	128			0,01	0,00		
	256			0,02	0,02		
16	8	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01
	16			0,03	0,02		
	32			0,02	0,00		
	64			0,03	0,02		
	128			0,03	0,01		
	256			0,03	0,03		
32	8	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04
	16	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01
	32			0,03	0,01		
	64			0,07	0,04		
	128			0,03	0,06		
	256			0,08	0,03		
64	8	0,22	0,18	0,18	0,19	0,20	0,20
	16	0,08	0,06	0,11	0,10	0,09	0,07
	32	0,08	0,07	0,26	0,24	0,17	0,15
	64			0,14	0,12		
	128			0,17	0,15		
	256			0,19	0,19		
128	8	0,15	0,15	0,16	0,15	0,16	0,18
	16	0,31	0,30	0,28	0,28	0,29	0,28
	32	0,26	0,27	0,31	0,30	0,33	0,31
	64	0,33	0,33	0,48	0,48	0,37	0,38
	128			0,52	0,67		
	256			0,73	0,73		
256	8	0,63	0,60	0,58	0,53	0,60	0,56
	16	0,88	0,91	0,91	0,90	0,88	0,88
	32	0,96	0,96	0,95	0,95	0,96	0,96
	64	0,95	0,95	0,95	0,95	0,96	0,96
	128	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 21 – Poderes dos testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *JAs* e *JAsR* considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			1,00	0,98
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 22 – Poderes dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8			1,00	0,85		
	16			1,00	0,94		
	32			1,00	0,95		
	64			1,00	0,97		
	128			1,00	0,99		
	256			1,00	0,99		
16	8	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00		
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 23 – Poderes dos testes *LRTAs*, *LRTAsR*, *JAs* e *JAsR* considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTAs	LRTAsR	JAs	JAsR
8	8			1,00	1,00
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
16	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00
	256			1,00	1,00
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 24 – Poderes dos testes *LRTB*, *LRTBR*, *JB*, *JBR*, *TB* e *TBR* considerando $H_1: \Sigma = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{I}]$, em que $\rho = 0,90$, obtidos através de 1000 repetições da simulação Monte Carlo, sob a distribuição normal contaminada com $\delta = 0,30$, ao nível nominal de 1% de significância.

n	p	LRTB	LRTBR	JB	JBR	TB	TBR
8	8	1,00	0,88	0,98	1,00	0,88	0,98
	16			1,00	0,95		
	32			1,00	0,96		
	64			1,00	0,96		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
16	8	1,00	0,97	1,00	1,00	1,00	1,00
	16			1,00	1,00		
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
32	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32			1,00	1,00		
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
64	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64			1,00	1,00		
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
128	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128			1,00	1,00		
	256			1,00	1,00		
256	8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	32	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	128	1,00	0,97	1,00	1,00	1,00	1,00
	256			1,00	1,00		

Fonte: Do autor (2023).

APÊNDICE C – Comandos usados no R

```

# Programa para obter as matrizes de covariâncias
# estimador clássico (S) e comedian (C)
# recebe a matriz de dados n x p
# dependência: pacote robustbase

library(robustbase)

EstCov <- function(X)
{
  C <- covComed(X)$cov
  S <- var(X)
  return(list(C = C, S = S))
}

# Função para LRT H0: Sigma = sigma^2 * I (Correção de Box (1949))
# recebe n e S ou C e retorna chi e p-valor

LRTAs <- function(n, Ca1)
{
  p <- nrow(Ca1)
  chi1 <- - ((n - 1) - (2 * p^2 + p + 2) / (6 * p))
  chi1 <- chi1 * (log(det(Ca1)) - p * log(sum(diag(Ca1)) / p))
  p.valor <- 1 - pchisq(chi1, p * (p + 1) / 2 - 1)
  return(list(chi1 = chi1, valor.p = p.valor))
}

# Função para J H0: Sigma = sigma^2 * I (John (1971))
# recebe n e S ou C e retorna chi e p-valor

```

```

JAs <- function(n, Ca1)
{
  p <- nrow(Ca1)
  Ker <- Ca1/(sum(diag(Ca1))/p) - diag(p)
  chi2 <- n/2 * sum(diag(Ker %**% Ker))
  p.valor <- 1 - pchisq(chi2, p * (p + 1) / 2 - 1)
  return(list(chi2 = chi2, valor.p = p.valor))
}

# Função para obter a distribuição nula Bootstrap LRT e J com S e com C
# recebe B, (S, C) Ca, n e retorna chi^2 das 4 opções e valor.p
# Além disso o máximo de cada caso será computado
# dependência MASS

LRTBJB <- function(B, n, Ca)
{
  jb2C <- JAs(n, Ca$C)$chi2
  jb2S <- JAs(n, Ca$S)$chi2
  LRT2C <- LRTAs(n, Ca$C)$chi1
  LRT2S <- LRTAs(n, Ca$S)$chi1
  p <- nrow(Ca$C)
  mu <- rep(0, times = p)
  s2 <- sum(diag(Ca$C))/p
  Sigma <- s2 * diag(p)
  TEBMC <- max(jb2C, LRT2C)
  TEBMS <- max(jb2S, LRT2S)
  for (i in 1:B)
  {

```

```

X <- mvrnorm(n, mu, Sigma)
Ca <- EstCov(X)
jb2C <- c(jb2C, JAs(n, Ca$C)$chi2)
jb2S <- c(jb2S, JAs(n, Ca$S)$chi2)
LRT2C <- c(LRT2C, LRTAs(n, Ca$C)$chi1)
LRT2S <- c(LRT2S, LRTAs(n, Ca$S)$chi1)
TEBMC <- c(TEBMC, max(jb2C[i+1],LRT2C[i+1]))
TEBMS <- c(TEBMS, max(jb2S[i+1],LRT2S[i+1]))
}
vp.jb2C <- sum(jb2C >= jb2C[1]) / (B + 1)
vp.jb2S <- sum(jb2S >= jb2S[1]) / (B + 1)
vp.LRT2C <- sum(LRT2C >= LRT2C[1]) / (B + 1)
vp.LRT2S <- sum(LRT2S >= LRT2S[1]) / (B + 1)
vp.TEBMC <- sum(TEBMC >= TEBMC[1]) / (B + 1)
vp.TEBMS <- sum(TEBMS >= TEBMS[1]) / (B + 1)
return(list(jb2C = jb2C[1], vp.jb2C = vp.jb2C,
            jb2S = jb2S[1], vp.jb2S = vp.jb2S,
            LRT2C = LRT2C[1], vp.LRT2C = vp.LRT2C,
            LRT2S = LRT2S[1], vp.LRT2S = vp.LRT2S,
            TEBMC = TEBMC[1], vp.TEBMC = vp.TEBMC,
            TEBMS = TEBMS[1], vp.TEBMS = vp.TEBMS))
}

# Função para obter a distribuição nula Bootstrap do LRT com S e com C
# recebe B, (S, C) Ca, n e retorna chi^2 das 2 opções e valor.p
# dependência MASS - com Correção de Box (1949)

LRTB <- function(B, n, Ca)
{

```

```

chi2C <- LRTAs(n, Ca$C)$chi1
chi2S <- LRTAs(n, Ca$S)$chi1
s2 <- sum(diag(Ca$C))/p
p <- nrow(Ca$C)
mu <- rep(0, times = p)
Sigma <- s2 * diag(p)
TEAs <- max(chi2C,chi2S)
  for (i in 1:B)
{
  X <- mvrnorm(n, mu, Sigma)
  Ca <- EstCov(X)
  chi2C <- c(chi2C, LRTAs(n, Ca$C)$chi1)
  chi2S <- c(chi2S, LRTAs(n, Ca$S)$chi1)
  TEAs <- c(TEAs, max(chi2C[i+1],chi2S[i+1]))
}
valorC.p <- sum(chi2C >= chi2C[1]) / (B + 1)
valorS.p <- sum(chi2S >= chi2S[1]) / (B + 1)
valorT.p <- sum(TEAs >= TEAs[1]) / (B + 1)
return(list(Chi2C = chi2C[1], valorC.p = valorC.p,
           Chi2S = chi2S[1], valorS.p = valorS.p,
           Ts = TEAs[1], valorT.p = valorT.p))
}

# Função para obter a distribuição nula Bootstrap de J com S e com C
# recebe B, (S, C) Ca, n e retorna chi^2 das 2 opções e valor.p
# dependência MASS

JB <- function(B, n, Ca)
{

```

```

chi2C <- JAs(n, Ca$C)$chi2
chi2S <- JAs(n, Ca$S)$chi2
p <- nrow(Ca$C)
mu <- rep(0, times = p)
s2 <- sum(diag(Ca$C))/p
Sigma <- s2 * diag(p)
TEAsR <- max(chi2C, chi2S)
for (i in 1:B)
{
  X <- mvrnorm(n, mu, Sigma)
  Ca <- EstCov(X)
  chi2C <- c(chi2C, JAs(n, Ca$C)$chi2)
  chi2S <- c(chi2S, JAs(n, Ca$S)$chi2)
  TEAsR <- c(TEAsR, max(chi2C[i+1],chi2S[i+1]))
}
valorC.p <- sum(chi2C >= chi2C[1]) / (B + 1)
valorS.p <- sum(chi2S >= chi2S[1]) / (B + 1)
valorTR.p <- sum(TEAsR >= TEAsR[1]) / (B + 1)
return(list(Chi2C = chi2C[1], valorC.p = valorC.p,
           Chi2S = chi2S[1], valorS.p = valorS.p,
           TsR = TEAsR[1], valorTR.p = valorTR.p))
}

#Simular amostras normal multivariada contaminada:

rNCM <- function(n, delta, mu, mu2, Sigma, Sigma2)
{
  u <- runif(n)
  p <- nrow(Sigma)

```

```

n1 <- length(u[u <= delta])
if (n1 < 1) n1 <- 1
n2 <- n - n1
X <- matrix(0, n, p)
X[u <= delta, ] <- mvrnorm(n1, mu, Sigma)
if (n2 > 0) X[u > delta, ] <- mvrnorm(n2, mu2, Sigma2)
return(X)
}

# Função para simular e avaliar o erro tipo I e poder dos testes
# op=1: normal, op=2: normal contaminada
# B: N. Sim Bootstrap dos testes, N: Sim. MC de validação dos testes
# opH0: 0 (para H0) (para Sig^2I), 1 (para diag(sig_{ii})), 2: Sim.Comp.
# k: para definir a média* da normal contaminada multivariada

## Se p < n,

simMC <- function(op, opH0, n, p, rho, delta, N, B, k)
{
  rej <- matrix(0, 10, 3)
  rownames(rej) <- c("LRTAs", "LRTAsR", "JAs", "JAsR",
                    "LRTB", "LRTBR", "JB", "JBR",
                    "TB", "TBR")
  colnames(rej) <- c("0,10", "0,05", "0,01")
  N1R <- 1.0 / N
  mu <- rep(0, times = p)
  sig2 <- 10
  if (opH0 == 0) Sigma <- sig2 * diag(p) else
    if (opH0 == 1) Sigma <- diag(runif(p, 1, 2)) else

```

```

    if (opH0 == 2) Sigma <- sig2 * ((1-rho)*diag(p)+rho*matrix(1,p,p))
if (op == 2)
{
  Sigma2 <- Sigma
  mu2 <- k * rep(1, times = p)
}
for (i in 1:N)
{
  if (op == 1) X <- mvrnorm(n, mu, Sigma) else
    if (op == 2) X <- rNCM(n, delta, mu, mu2, Sigma, Sigma2)
  Ca <- EstCov(X)
  C1 <- Ca$C
  S1 <- Ca$S
  res1 <- LRTAs(n, S1)
  res2 <- LRTAs(n, C1)
  res3 <- JAs(n, S1)
  res4 <- JAs(n, C1)
  res5 <- LRTBJB(B, n, Ca)
  if (res1$valor.p <= 0.10) rej[1,1] <- rej[1,1] + N1R
  if (res1$valor.p <= 0.05) rej[1,2] <- rej[1,2] + N1R
  if (res1$valor.p <= 0.01) rej[1,3] <- rej[1,3] + N1R
  if (res2$valor.p <= 0.10) rej[2,1] <- rej[2,1] + N1R
  if (res2$valor.p <= 0.05) rej[2,2] <- rej[2,2] + N1R
  if (res2$valor.p <= 0.01) rej[2,3] <- rej[2,3] + N1R
  if (res3$valor.p <= 0.10) rej[3,1] <- rej[3,1] + N1R
  if (res3$valor.p <= 0.05) rej[3,2] <- rej[3,2] + N1R
  if (res3$valor.p <= 0.01) rej[3,3] <- rej[3,3] + N1R
  if (res4$valor.p <= 0.10) rej[4,1] <- rej[4,1] + N1R
  if (res4$valor.p <= 0.05) rej[4,2] <- rej[4,2] + N1R

```

```

if (res4$valor.p <= 0.01) rej[4,3] <- rej[4,3] + N1R
if (res5$vp.LRT2S <= 0.10) rej[7,1] <- rej[7,1] + N1R
if (res5$vp.LRT2S <= 0.05) rej[7,2] <- rej[7,2] + N1R
if (res5$vp.LRT2S <= 0.01) rej[7,3] <- rej[7,3] + N1R
if (res5$vp.LRT2C <= 0.10) rej[8,1] <- rej[8,1] + N1R
if (res5$vp.LRT2C <= 0.05) rej[8,2] <- rej[8,2] + N1R
if (res5$vp.LRT2C <= 0.01) rej[8,3] <- rej[8,3] + N1R
if (res5$vp.jb2S <= 0.10) rej[9,1] <- rej[9,1] + N1R
if (res5$vp.jb2S <= 0.05) rej[9,2] <- rej[9,2] + N1R
if (res5$vp.jb2S <= 0.01) rej[9,3] <- rej[9,3] + N1R
if (res5$vp.jb2C <= 0.10) rej[10,1] <- rej[10,1] + N1R
if (res5$vp.jb2C <= 0.05) rej[10,2] <- rej[10,2] + N1R
if (res5$vp.jb2C <= 0.01) rej[10,3] <- rej[10,3] + N1R
if (res5$vp.TEBMS <= 0.10) rej[11,1] <- rej[11,1] + N1R
if (res5$vp.TEBMS <= 0.05) rej[11,2] <- rej[11,2] + N1R
if (res5$vp.TEBMS <= 0.01) rej[11,3] <- rej[11,3] + N1R
if (res5$vp.TEBMC <= 0.10) rej[12,1] <- rej[12,1] + N1R
if (res5$vp.TEBMC <= 0.05) rej[12,2] <- rej[12,2] + N1R
if (res5$vp.TEBMC <= 0.01) rej[12,3] <- rej[12,3] + N1R
}

return(rej)
}

## Se p >= n:

library(MASS)
library(mvtnorm)

simMCPgen <- function(op, opH0, n, p, rho, delta, N, B, k)

```

```

{
  rej <- matrix(0, 4, 3)
  rownames(rej) <- c("JAs", "JAsR", "JB", "JBR")
  colnames(rej) <- c("0,10", "0,05", "0,01")
  N1R <- 1.0 / N
  mu <- rep(0, times = p)
  sig2 <- 10
  if (opH0 == 0) Sigma <- sig2 * diag(p) else
    if (opH0 == 1) Sigma <- diag(runif(p,1, 2)) else
      if (opH0 == 2) Sigma <- sig2 * ((1-rho)*diag(p)+rho*matrix(1,p,p))
  if (op == 2)
  {
    Sigma2 <- Sigma
    mu2 <- k * rep(1, times = p)
  }
  for (i in 1:N)
  {
    if (op == 1) X <- mvrnorm(n, mu, Sigma) else
      if (op == 2) X <- rNCM(n, delta, mu, mu2, Sigma, Sigma2)
    Ca <- EstCov(X)
    C1 <- Ca$C
    S1 <- Ca$S
    res3 <- JAs(n, S1)
    res4 <- JAs(n, C1)
    res6 <- JB(B, n, Ca)
    if (res3$valor.p <= 0.10) rej[1,1] <- rej[1,1] + N1R
    if (res3$valor.p <= 0.05) rej[1,2] <- rej[1,2] + N1R
    if (res3$valor.p <= 0.01) rej[1,3] <- rej[1,3] + N1R
    if (res4$valor.p <= 0.10) rej[2,1] <- rej[2,1] + N1R
  }
}

```

```

    if (res4$valor.p <= 0.05) rej[2,2] <- rej[2,2] + N1R
    if (res4$valor.p <= 0.01) rej[2,3] <- rej[2,3] + N1R
    if (res6$valorS.p <= 0.10) rej[3,1] <- rej[3,1] + N1R
    if (res6$valorS.p <= 0.05) rej[3,2] <- rej[3,2] + N1R
    if (res6$valorS.p <= 0.01) rej[3,3] <- rej[3,3] + N1R
    if (res6$valorC.p <= 0.10) rej[4,1] <- rej[4,1] + N1R
    if (res6$valorC.p <= 0.05) rej[4,2] <- rej[4,2] + N1R
    if (res6$valorC.p <= 0.01) rej[4,3] <- rej[4,3] + N1R
  }
  return(rej)
}

# Simulações

op <- 2 # 1 ou 2
opH0 <- 1 # 0, 1 ou 2
n <- 64
p <- 128
k <- 0.25 # 0.25, 0.5 ou 1
rho <- 0.9
delta <- 0.7 # 30% contaminação
N <- 999
B <- 1000

if ( p < n ) res <- simMC(op, opH0, n, p, rho, delta, N, B, k) else
  res <- simMCpgen(op, opH0, n, p, rho, delta, N, B, k)
res

```