KATIA SANTOS ESTEVES BARROS

INVESTIGAÇÃO DA GENERALIZAÇÃO DO PENSAMENTO ARITMÉTICO COMO FORMA DE ASCENSÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO

LAVRAS - MG
2022

KATIA SANTOS ESTEVES BARROS

INVESTIGAÇÃO DA GENERALIZAÇÃO DO PENSAMENTO ARITMÉTICO COMO FORMA DE ASCENSÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, área de concentração em Práticas Pedagógicas e Formação Docente, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Orientador

LAVRAS - MG
2022

Ficha Catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Barros, Katia Santos Esteves.
Investigação da Generalização do Pensamento Aritmético Como Forma de Ascensão ao Pensamento Algébrico / Katia Santos Esteves Barros. - 2025.
182 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Lavras, 2025.
Bibliografia.

1. Ensino de Matemática. 2. Pensamento Algébrico. 3. Generalização da Aritmética. 4. Teoria Histórico-Cultural. 5. Atividade Orientadora de Ensino. I. Andrade, Prof. Dr. José Antônio Araújo. II. Universidade Federal de Lavras. III. Título.

KATIA SANTOS ESTEVES BARROS

INVESTIGAÇÃO DA GENERALIZAÇÃO DO PENSAMENTO ARITMÉTICO COMO FORMA DE ASCENSÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO

INVESTIGATION OF THE GENERALIZATION OF ARITHMETIC THINKING AS A PATHWAY TO THE DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC THINKING

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do curso de Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, área de concentração em Práticas Pedagógicas e Formação Docente, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 21 / 03 /2025

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade	UFLA
Profa. Dra. Amanda Castro Oliveira	UFLA
Prof. Dr. Welington Cedro	UFG

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Orientador

LAVRAS - MG
2022

Ao meu amado marido Kleber e filhos Davi e Larissa por todo apoio, dedicação, compreensão e amor.

Aos meus pais pelo amparo e apoio incondicional.

Dedico

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me ajudar a persistir, ter serenidade para enfrentar todos os percalços que apareceram durante o caminho dessa pesquisa.

Agradeço aos professores do Mestrado PPGECEM da UFLA, pelos ensinamentos transmitidos e pela valiosa colaboração ao longo dos estudos.

Agradeço ao meu orientador José Antônio Araújo de Andrade, pela paciência e compreensão.

Agradeço aos meus amigos, Sabrina e Manoel, que tive o prazer de conviver e contar com apoio, cumplicidade e companheirismo em todos os momentos. Obrigada Sabrina, por tantas vezes me acolher em sua casa com tanta amizade e carinho.

Agradeço infinitamente ao meu marido Kleber, que me apoiou e apoia de forma incondicional em todos os momentos, principalmente minimizando minhas ausências em alguns momentos no cuidado com nossos filhos Davi e Larissa, a quem também agradeço por entenderem que a mamãe precisa estudar.

Agradeço a minha pequena Larissa, por vivenciar comigo todo esse percurso, inclusive ficando comportadinha, quando me acompanhava nas aulas presenciais só para ficar mais tempo comigo.

Agradeço a meus pais Maria do Carmo e José Ildeu, que tanto me apoiaram e me trouxeram palavras de força e por tanta ajuda no cuidado com meus filhos em todos os momentos que precisei.

Agradeço aos meus irmãos Elisabete e Ednei, pelo apoio e encorajamento nos momentos difíceis.

Agradeço a todos que de uma forma ou de outra me apoiaram para que essa etapa pudesse ser cumprida.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

RESUMO

O objeto dessa pesquisa foi investigar o processo de significação estabelecido pela Atividade dos estudantes em Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) que possibilitassem o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da generalização do pensamento aritmético. Enunciado o objeto da pesquisa, elaboramos a seguinte questão orientadora: **Que significações produzidas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, por meio de situações desencadeadoras de aprendizagem possibilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico?** Tivemos como hipótese, que as dificuldades dos estudantes no estudo da álgebra decorriam de problemas advindos da aritmética, para tanto formulamos como objetivo principal: analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de SDA que explorassem a generalização do pensamento aritmético. E como objetivos específicos elencamos: 1) analisar se a mobilização dos nexos conceituais da álgebra em SDA produzem significações que corroboram para o desenvolvimento do pensamento algébrico; 2) analisar se as SDA suscitam a Atividade de Estudos/Aprendizagem; 3) analisar se o papel da mediação pedagógica na produção das significações. O desenvolvimento dessa pesquisa foi calcado na teoria histórico-cultural, pois tem como base o desenvolvimento do homem através do contato com sua história e o meio cultural, no qual este está inserido, sem desconsiderar a subjetividade própria de cada indivíduo. A metodologia adotada para a realização da pesquisa foi fundamentada, a partir da análise de núcleos de significação, decorrentes dos diálogos dos envolvidos no ambiente da pesquisa, por efeito das tarefas e contextos propostos de aprendizagens durante o percurso da trajetória dessa pesquisa. Os núcleos de significação identificados evidenciaram três aspectos centrais do desenvolvimento do pensamento algébrico: (1) a transição da linguagem aritmética para a generalização, na qual os estudantes começaram a identificar padrões e regularidades; (2) a generalização da aritmética para a constituição do conceito de variável, demonstrando a relação entre números e símbolos; e (3) a integração entre linguagem algébrica, figura geométrica, fluência e interdependência, promovendo um entendimento mais amplo e teórico da álgebra. A metodologia de pesquisa adotada possui base lógico-histórica, constituída a partir do método materialista histórico-dialético. Para mais fizemos uso de categorias acerca da concepção de educação escolar pautada na práxis social, tais como: trabalho, contradição, mediação necessidade e motivo. Os resultados destacam como as SDA, fundamentadas na teoria histórico-cultural, contribuíram para a formação de significações matemáticas e para o desenvolvimento do pensamento teórico algébrico, permitindo aos estudantes identificarem padrões, compreender variáveis e interpretar situações matemáticas complexas.

Palavras-Chave: teoria histórico-cultural; generalização da aritmética; pensamento algébrico; ensino da álgebra; atividade.

ABSTRACT

The objective of this research was to investigate the process of meaning-making established through students' Activities in Learning Triggering Situations (LTS) that enabled the development of algebraic thinking based on the generalization of arithmetic thinking. With the research objective defined, we formulated the following guiding question: What meanings are produced by students in the final years of elementary school, through Learning Triggering Situations, that enable the development of algebraic thinking? We hypothesized that students' difficulties in studying algebra stemmed from issues related to arithmetic. Therefore, our main objective was to analyze the development of algebraic thinking through LTS that explored the generalization of arithmetic thinking. The specific objectives were: (1) to analyze whether the mobilization of algebraic conceptual nexuses in LTS produces meanings that contribute to the development of algebraic thinking; (2) to analyze whether the LTS foster Study/Learning Activities; and (3) to analyze the role of pedagogical organization in the production of meanings. The development of this research was grounded in the historical-cultural theory, which is based on the development of individuals through their engagement with history and the cultural environment in which they are embedded, while also considering the unique subjectivity of each individual. The methodology employed in this research was based on the analysis of meaning-making nuclei, derived from the dialogues of the participants in the research environment, as influenced by the proposed tasks and learning contexts throughout the research process. The identified meaning-making nuclei highlighted three central aspects of the development of algebraic thinking: (1) the transition from arithmetic language to generalization, where students began to identify patterns and regularities; (2) the generalization of arithmetic to the formation of the concept of variables, demonstrating the relationship between numbers and symbols; and (3) the integration of algebraic language, geometric figures, fluency, and interdependence, fostering a broader and more theoretical understanding of algebra. The research methodology adopted was based on a logical-historical framework and the materialist historical-dialectical method. Additionally, categories related to the concept of school education grounded in social praxis were employed, such as work, contradiction, mediation, necessity, and motive. The results emphasize how the LTS, grounded in the cultural-historical theory, contributed to the formation of mathematical meanings and the development of theoretical algebraic thinking, enabling students to identify patterns, understand variables, and interpret complex mathematical situations.

Keywords: cultural-historical theory; generalization of arithmetic; algebraic thinking; teaching of algebra; activity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE MAPA CONCEITUAL

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AOE - Atividade Orientadora de Ensino

BNCC - Base Comum Curricular

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

OCDE - Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico

PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

SDA - Situações Desencadeadoras de Aprendizagem

THC - Teoria Histórico-Cultural

ZDI - Zona de Desenvolvimento Iminente

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para introduzir este trabalho, pretende-se expor as razões que conduziram à escolha do objeto de pesquisa. Assim, parte-se da trajetória escolar da professora-pesquisadora, que cursou o ensino fundamental na rede municipal de ensino da cidade de São Paulo. A partir da 6ª série, atual 7º ano, não havia professores regulares de matemática na escola. Nessas circunstâncias, quando eram disponibilizados professores substitutos, estes apresentavam o conteúdo sempre em formato de revisão de algo, que na maioria das vezes não era conhecido pelos estudantes, o que terminava por produzir situações que não tinham sentido e tampouco possuíam significado para os estudantes desta disciplina.

Após concluir o ensino fundamental, a pesquisadora ingressou no ensino médio, em um curso técnico em contabilidade, oferecido pela rede estadual de ensino de São Paulo. As aulas de matemática ocorreram de forma contínua apenas no 1º e 2º anos, pois, no 3º ano, novamente não havia professor. Essa ausência comprometeu ainda mais a constituição do pensamento matemático, uma vez que os conhecimentos necessários desse componente curricular não foram devidamente desenvolvidos ao longo de sua trajetória escolar.

Diante do exposto acima, estabeleceu-se como meta estudar matemática de forma autônoma, buscando reconstruir as bases desse conhecimento, as quais foram constituídas com inúmeras lacunas. Ademais, durante esse processo de superação, começou também a se delinear a intenção de ingressar na carreira docente. Esse desejo foi impulsionado ao perceber que, ao orientar alguns estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e acompanhar sua evolução, fortalecia-se, progressivamente, o anseio de exercer a docência.

Assim, ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática no Centro Universitário Assunção, uma instituição privada de ensino, diante das disciplinas ofertadas para a formação docente, percebeu-se que muitas lacunas ainda permaneciam. Contudo, no ambiente da formação superior, foi possível contar com a dedicação e o compromisso dos docentes responsáveis pela licenciatura, que, por meio de suas práticas e do amor pela profissão, contribuíram significativamente para a recomposição das bases não consolidadas durante a educação básica.

Destaca-se, nesse percurso formativo, a disciplina de estágio supervisionado, momento em que se tornou evidente a grande dificuldade dos estudantes da educação básica no campo da álgebra. Essa constatação fomentou reflexões acerca dos processos de ensino e aprendizagem que estavam sendo proporcionados a esses estudantes.

Ao iniciar a prática docente, já carregava muitas inquietações e um grande anseio de promover um ensino significativo, considerando as subjetividades dos estudantes. Constatou-se que muitos traziam lacunas em sua formação, especialmente no campo algébrico, de modo que, para sanar essas defasagens, foram empregadas diversas alternativas didáticas. Entretanto, essas abordagens centravam-se majoritariamente nos aspectos externos dos conceitos, contribuindo, portanto, apenas para a formação de um pensamento de caráter empírico.

A busca pelo aprimoramento da prática docente, levou à necessidade de realizar uma especialização em psicopedagogia e do mesmo modo a segunda graduação em pedagogia, pautadas no interesse de entender os motivos pelo qual alguns estudantes traziam tantas dificuldades e tanto desinteresse em matemática.

Pouco tempo após a conclusão da segunda graduação, ingressou no Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Federal de Lavras (UFLA). As inquietações anteriormente apresentadas foram sendo ressignificadas, uma vez que a pesquisa passou a ser fundamentada na Teoria Histórico-Cultural, que tem como princípio orientador a lógica dialética. Tal perspectiva contrastava diretamente com a formação anterior da pesquisadora, fundamentada estritamente na lógica formal, o que gerou um intenso conflito intelectual no processo de compreensão do objeto de pesquisa e na superação das contradições oriundas de uma formação baseada exclusivamente nessa lógica.

Ainda que o tema da investigação já estivesse definido, os caminhos a serem percorrido sob a perspectiva histórico-cultural, quais seriam os impactos acerca do objeto a ser trabalhado e a delimitação da proposta dessa pesquisa demandavam aprofundamento. Assim, iniciaram-se os estudos a partir de leituras de autores como Vigotski, Leontiev e Davidov que discutem, respectivamente, a teoria histórico-cultural[1], a teoria da atividade[2] e a teoria do ensino desenvolvimental[3].

Paralelamente a essas leituras, realizou-se uma revisão bibliográfica no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

---

[1] Vigotski foi o precursor da teoria histórico-cultural do desenvolvimento mental do homem, que preconiza que as fontes e fatores determinantes deste desenvolvimento se encontram na cultura historicamente constituída. (Davidov, 1988, p. 245).

[2] Aleksei N. Leontiev foi o precursor da teoria da atividade, a qual advém da dialética materialista. “A essência do conceito filosófico-psicológico materialista dialético da atividade está em que ele reflete a relação entre o sujeito humano como ser social e a realidade externa - uma relação mediatizada pelo processo de transformação e modificação desta realidade externa” (DAVIDOV, 1988, p. 13).

[3] Vasili Davidov constituiu a teoria do ensino desenvolvimental, também fundamentada na dialética materialista, tem como base métodos de organização do ensino., de modo que sejam formadas nos estudantes atitudes criativas acerca da atividade de estudos.

(Capes), a fim de estabelecer quais caminhos já haviam sido percorridos acerca da álgebra e quais ainda careciam ser investigados.

Assim, tal levantamento foi realizado utilizando inicialmente o descritor *"Álgebra" and "Educação Matemática",* de modo que foram encontrados 555.396 trabalhos antes do refinamento e após refinar, encontramos 5.580 trabalhos. Como critério de refinamento foram utilizados: recorte temporal de 2017 a 2020, área de concentração — educação, área de conhecimento — educação, área de avaliação — educação, nome do programa — educação e grande área — multidisciplinar, onde encontramos a tese de doutorado de Pires (2018), cujo trabalho faz uma análise acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico no período de 1994 a 2014. Encontrar este trabalho foi importante para essa pesquisa, pois o autor faz uma análise muito interessante acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico na educação brasileira e identificou diante de indícios, que professores pesquisadores tinham uma concepção da matemática pronta e acabada, concebendo à ideia de que os conceitos, teoremas e estruturas matemáticas já existem de forma definitiva, onde os matemáticos simplesmente "descobrem" tais verdades, como se fossem algo imutável e intemporal. Verificou-se também que as tarefas e sequências didáticas desenvolvidas pelos professores pesquisadores, apresentam falta de movimento, de questionamento, entre outros. Assim, traziam uma certeza de que a utilização de tarefas que envolviam regularidades e padrões eram o princípio do pensamento algébrico. O autor, constata que as pesquisas observadas apresentavam remotas diferenciações ou apontamentos entre os conceitos de pensamento e linguagem. Esta relação, diante da Teoria Histórico-Cultural, enfatiza que o pensamento e a linguagem estão intrinsecamente conectados, e que a linguagem é uma ferramenta crucial para o desenvolvimento do pensamento. O autor, afirma que tais pesquisas investigadas foram concebidas e registradas pautadas nos casos particulares da álgebra, focando no aspecto empírico do raciocínio. No Quadro 1, trazemos a identificação do trabalho observado.

Quadro 1 - Tese de Pires (2018) identificada no levantamento realizado na Capes em 08/07/2021

Ano	Título	Autor(a)	Instituição
2018	Metanálise de pesquisas brasileiras que tratam do desenvolvimento do pensamento algébrico na escola básica (1994-2014)	Flávio de Souza Pires	Universidade Federal de São Carlos

Fonte: Catálogo de Teses e dissertações da Capes

Os estudos do autor concluem que o ensino da álgebra vem se caracterizado por um viés demasiadamente formal, com ênfase excessiva no desenvolvimento do processo técnico-procedimental e na linguagem formal da álgebra simbólica, dissociada de significados conceituais e desprovido de contextualização histórica. Ademais, o autor observa que, embora os professores e pesquisadores analisados expressem discordância em relação aos currículos oficiais e aos livros didáticos, suas propostas de ensino ainda permanecem enraizadas nesses referenciais.

Ao retomar as buscas na plataforma da Capes, agora com o descritor Pensamento Algébrico, encontramos 36.345 trabalhos antes do refinamento e 57 após o refinamento, cujos recortes utilizados foram os que tiveram suas publicações no período de 2017 a 2020, área de concentração — educação, área de avaliação — educação, área de conhecimento — educação, grande área — educação. Dessa forma, as pesquisas selecionadas sob este descritor são todas dissertações de mestrado, para mais os trabalhos de Ibrahim (2015) e Silva (2015), foram selecionados antes do refinamento, devido à sua estreita relação com o tema central desta pesquisa, pois abordam questões-chave que foram fundamentais para uma sólida reflexão e investigação teórica.

Quadro 2 - Levantamento de dissertações sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico realizado em 8 de julho de 2021

Ano	Título	Autor(a)	Instituição
2015	Potencialidades da atividade de estudo no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica dos alunos dos anos finais do ensino fundamental.	Maísa Gonçalves da Silva	Universidade de Uberaba
2015	A apropriação dos significados de polinômios: Um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural.	Soraia Abud Ibrahim	Universidade de Uberaba
2017	Introdução ao pensamento algébrico: a generalização	Flávia Christiane do Nascimento Regis	Universidade Federal de Minas Gerais - Faculdade de Educação.
2019	Divisão e multiplicação de polinômios com o auxílio de materiais manipuláveis e tecnologias sob o olhar da representação semiótica.	Dayane Moara Coutinho	Universidade Federal do Paraná.
2019	O desenvolvimento do pensamento algébrico: Significações produzidas por alunos do sétimo ano do ensino fundamental.	Jefferson Tadeu de Godoi Pereira	Universidade São Franscisco.

Fonte: Catálogo de Teses e Dissertações da Capes

Os estudos de Silva (2015), foram pautados na teoria histórico-cultural e buscaram compreender a relação entre o pensamento e a linguagem algébrica, bem como de que modo essa relação pode cooperar para a constituição do pensamento teórico dos estudantes, especialmente diante das funções e equações do segundo grau. Apesar da autora reconhecer a importância do desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica, tendo como finalidade a formação do pensamento teórico, o desenvolvimento das tarefas mantêm-se focadas no procedimento. A autora apresenta como resultado, a constatação da dificuldade dos estudantes nas questões aritméticas e que foi possível constituir de forma satisfatória o pensamento e a linguagem algébrica nos estudantes do último ano do ensino fundamental. Tal entendimento se deu, por meio de um experimento didático e estudos de materiais teóricos didáticos e documentos oficiais. Podemos constatar que a pesquisa de Silva (2015), apresenta uma relevante contribuição ao explorar a associação entre pensamento e linguagem algébrica e desenvolvimento teórico no ensino fundamental. Todavia, a ênfase nos procedimentos possivelmente limitou o alcance dos objetivos propostos.

Ibrahim (2015), investigou a produção de significações dos polinômios à luz da teoria histórico-cultural. A autora também atribui grande importância ao pensamento e a linguagem, no processo de desenvolvimento do pensamento teórico algébrico dos estudantes do 8º ano do ensino fundamental. Ressalta ainda, suas dificuldades em encontrar tarefas no contexto histórico-cultural e que deveria ter contemplado tarefas que envolvessem o conceito de variável. Como resultado, a autora identifica indícios de salto qualitativo no desenvolvimento do pensamento algébrico. Reflete, ainda que, diante de seu contexto investigado, os estudantes expandiram seu conhecimento sobre polinômios, ao passarem a associá-los em diversas concepções da álgebra.

A pesquisa de Coutinho (2019), envolve o desenvolvimento da aprendizagem da divisão e multiplicação de polinômios, utilizando materiais manipuláveis como estratégia de ensino. A autora, realizou um estudo relevante, porém pautado na execução de procedimentos e no simbolismo do cálculo, com foco nos nexos externos dos conceitos, o que termina por reforçar o desenvolvimento do pensamento empírico. Ainda, a autora destaca que observou indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes do 8º ano do ensino fundamental, na medida em que eles não ficaram restritos aos padrões ou às manipulações dos objetos, passando a compreender e elaborar as estruturas internas dos conceitos algébricos.

Coutinho (2019), dialoga com os estudos de Pires (2018), na medida em que também prioriza a utilização dos procedimentos em detrimento da apropriação dos conceitos. Além disso, observa-se que as autoras permanecem vinculadas aos materiais de apoio didático. É incontestável que a utilização de materiais manipuláveis e as tarefas on-line desempenharam um papel significativo no estudo, propiciando a compreensão dos conceitos de multiplicação e divisão de polinômios. No entanto, essa abordagem predominantemente focada em recursos didáticos específicos pode restringir o alcance das aprendizagens, especialmente no que se refere à abstração e à generalização dos conceitos matemáticos.

Tal constatação se pauta, em parte, nas próprias conclusões do estudo, que observaram as dificuldades dos estudantes para realizar representações algébricas e na transição para o uso da linguagem natural. Diante do exposto, podemos pressupor que, embora os materiais manipuláveis e representações figurais sejam úteis para facilitar a compreensão inicial e tornar as aulas mais dinâmicas, as estratégias didáticas precisam ser diversificadas para possibilitar uma compreensão mais ampla e profunda, especialmente no que se refere à abstração e generalização dos conceitos matemáticos.

Ademais, essa constatação ressalta a necessidade de equilibrar o uso de materiais manipuláveis com práticas que incentivem os estudantes a transitarem entre diferentes registros de representação (semiótica, algébrica e verbal) e a aplicar os conceitos aprendidos em contextos variados. Esta reflexão não desmerece a pesquisa da autora, mas sugere a possibilidade de expandir as abordagens propostas, a fim de atender a um espectro mais amplo de habilidades matemáticas.

Regis (2017), pautou seus estudos no âmbito da generalização de padrões para introduzir o pensamento algébrico. Entretanto, sua prática reforça o desenvolvimento do pensamento empírico, uma vez que seu foco não está nos nexos internos dos conceitos. Como resultado a autora relata uma mudança na postura e engajamento dos estudantes frente às tarefas propostas, nas quais pôde observar, por meio das falas e dos gestos dos sujeitos da pesquisa, indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes do 8º ano do ensino fundamental, os quais, segundo a autora se deram mediante ao engajamento dos estudantes nas tarefas propostas, onde observou que os estudantes assumiram uma postura investigativa no decorrer das interações entre a turma e os professores, onde observaram elementos que caracterizavam o pensamento algébrico.

Pereira (2019) realizou uma investigação acerca do currículo da cidade de São Paulo, com foco específico no componente curricular Álgebra. Sua pesquisa buscou investigar se as tarefas para a generalização de padrões, propostas pelo currículo da cidade, favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico. Este autor, assim como Regis (2019), destacam a importância de se considerar a fala e a escrita dos estudantes durante a realização de sua pesquisa e aponta como resultado indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes do 7º ano do ensino fundamental. Os indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico se tornam evidentes na evolução das estratégias dos estudantes, ao observar a capacidade de generalizar padrões, na articulação de diferentes registros semióticos e no protagonismo nas atividades. Tais avanços foram desenvolvidos por meio de um sequenciamento progressivo de tarefas, da mediação intencional do professor, de um ambiente interativo e afetivo e do uso de representações semióticas diversificadas. A abordagem histórico-cultural foi essencial para criar condições que favorecessem esses avanços, evidenciando a importância de um ensino intencional e reflexivo.

No decorrer da revisão de literatura, priorizou-se a análise de estudos que discutem o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de generalizações aritméticas, perspectiva que converge com os interesses desta pesquisa. Embora os trabalhos revisados se alinhem a essa temática, este estudo distingue-se por privilegiar a articulação entre o desenvolvimento do pensamento e da linguagem, com o intuito de fomentar o pensamento teórico no campo algébrico. Tal abordagem fundamenta-se na generalização do pensamento aritmético, concebida como um processo historicamente e culturalmente constituído na formação de conceitos matemáticos. Assim, delimitou-se como objeto desta investigação a análise da generalização do pensamento aritmético como um meio de transição para o pensamento algébrico no contexto dos anos finais do ensino fundamental.

Retomando as buscas, dessa vez com a finalidade de analisar os periódicos relacionados a educação matemática, com a intenção de observar as produções realizadas sob a perspectiva algébrica. Para mais, elegeu-se como fonte dessa pesquisa os periódicos da Capes, onde utilizamos para busca, os descritores jogos para ensino de polinômios e jogos algébricos, os quais se fundamentam na especificidade e pertinência desses temas para a investigação proposta. Esses descritores foram definidos por seu potencial em direcionar a análise para produções acadêmicas que exploram metodologias inovadoras e interativas, com enfoque no uso de jogos como ferramentas pedagógicas para o ensino de álgebra apesar de não aplicarmos recortes, por conta do pouquíssimo número de trabalhos produzidos acerca desses temas, priorizamos trabalhos a partir de 2019. O Quadro 3, traz os trabalhos selecionados para análise.

Quadro 3 - Levantamento de periódicos realizado em 08 de julho de 2021

(Continua)

Periódico	Ano	V.	N.	Título	Autor (es)
EMP - Educação Matemática e pesquisa (PUC-SP)	2019	21	3	O ensino de álgebra e a filosofia de Wittgenstein: sobre regras e Essência.	Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior e Marisa Rosâni Abreu da Silveira
EMP - Educação Matemática e pesquisa (PUC-SP)	2019			O Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA): mapeamento de algumas de suas produções	Barbara Lutaif Bianchini, Gabriel Loureiro de Lima e Silvia Dias Alcântara Machado.

Quadro 3 - Levantamento de periódicos realizado em 08 de julho de 2021

(Conclusão)

Periódico	Ano	V.	N.	Título	Autor (es)
EMP - Educação Matemática e pesquisa (PUC-SP)	2020	2		A linguagem simbólica e a resolução de problemas matemáticos no 8º ano do Ensino Fundamental	André Ricardo Lucas Vieira, Pedro Paulo Souza Rios e Carlos Alberto de Vasconcelos.

Fonte: Periódicos CAPES/MEC.

Junior e Silveira (2019), em seu artigo apresentam um estudo acerca da filosofia de Wittgenstein e suas contribuições para o ensino e a aprendizagem da álgebra. Estes autores partem das ideias da linguagem algébrica e sobre como pensar a aplicação da generalização, abstração e essência. Entretanto, consideram a álgebra como um conceito obscuro, compreendendo-a como um jogo de linguagem, que se aproxima da sensação, do fundamento, de perspectivas abstratas da realidade.

Os estudos de Bianchini, Lima e Machado (2019), envolve a análise de 62 produções, onde 54 são dissertações e 8 são teses acerca dos conteúdos de números e operações, generalização de padrões, função, álgebra linear e equações, dos quais são observados a grande gama de conteúdos matemáticos investigados. Tais autores fazem parte do (GEPEA) Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica e, a partir dessa pesquisa, constatam a abrangência da álgebra nos diferentes contextos da matemática. Este estudo, evidencia também, a necessidade de investigações no que concerne os processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos e a utilização de tecnologias digitais de informação e comunicação. Além disso, aponta a importância de ampliar as pesquisas sobre uma diversidade maior de materiais didáticos, visando oferecer aos estudantes um ensino mais dinâmico e atraente, especialmente frente aos desafios inerentes à abstração característica dessa área**.** Nesse sentido, essa constatação não é apenas um movimento técnico, mas uma necessidade pedagógica e teórica para tornar o ensino da álgebra mais acessível, dinâmico e significativo.

Tanto os estudos de Junior e Silveira (2019) quanto os de Bianchini, Lima e Machado (2019) se pautaram em investigações documentais, que sinalizam elementos importantes para ampliarmos nossa compreensão acerca da produção acadêmica já realizada no campo do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Por outro lado, os estudos de Vieira, Rios e Vasconcelos (2020) exploram os fatores que contribuem para as dificuldades enfrentadas pelos estudantes do oitavo ano no uso da simbologia matemática em situações-problema. Realizado em quatro aulas de cinquenta minutos com uma turma do oitavo ano do ensino fundamental de uma escola pública na Bahia, o estudo evidenciou não apenas as dificuldades dos estudantes na compreensão da simbologia matemática, mas também os desafios enfrentados pelos professores na condução do ensino. Tal estudo revelou-se relevante para esta pesquisa, na medida em que corrobora as percepções acerca das dificuldades dos estudantes, as quais vão além de questões individuais, sendo intrinsecamente associadas à ausência de mediações pedagógicas eficazes capazes de promover a transição do pensamento empírico para o teórico. Ademais, sua integração às demais obras analisadas nesta pesquisa forneceu fundamentação teórica sólida para a elaboração do produto educacional, composto por uma unidade didática voltada ao auxílio dos processos de ensino e aprendizagem.

Sob a perspectiva da Teoria Histórico-Cultural (THC), esta pesquisa visa contribuir teoricamente para a ampliação da compreensão sobre os processos de constituição do pensamento algébrico, destacando a relevância das relações sociais e das mediações pedagógicas como elementos fundamentais para a internalização dos conceitos matemáticos. Nesse sentido, ao relacionar a Zona de Desenvolvimento Iminente (ZDI) ao ensino da álgebra, a pesquisa demonstra como práticas pedagógicas planejadas podem mobilizar nexos conceituais, promovendo aprendizagens significativas. Além disso, busca oferecer uma contribuição prática ao propor um produto educacional inovador, composto por Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) fundamentadas na Teoria Histórico-Cultural, que atuam como mediadoras no desenvolvimento do pensamento algébrico. Esse produto foi aplicado com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental em uma organização não governamental (ONG) da cidade de São Paulo, tendo como princípio a generalização do pensamento aritmético como via para a ascensão ao pensamento teórico algébrico.

Diante do exposto até aqui, considerando os estudos explorados, a revisão bibliográfica apresentada e as situações cotidianas em que foram observadas as dificuldades enfrentadas pelos estudantes no contexto algébrico, formulou-se a seguinte questão norteadora desta pesquisa: **Que significações produzidas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, por meio de situações desencadeadoras de aprendizagem possibilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico.** Para responder a essa questão, foi definido como objetivo principal: *analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de SDA que explorem a generalização do pensamento aritmético.* Os objetivos específicos estabelecidos foram:

a) analisar se a mobilização dos nexos conceituais da álgebra em SDA produz significações que corroboram para o desenvolvimento do pensamento algébrico;

b) investigar em que medida as SDA suscitam a Atividade de Estudos/Aprendizagem;
c) analisar o papel da mediação pedagógica na produção das significações.

Após realizarmos a revisão bibliográfica para delinearmos o contexto a ser percorrido nesta pesquisa e estabelecermos os objetivos para nos conduzir nessa trajetória investigativa, fundamentando-nos na Teoria Histórico-Cultural, esta pesquisa visa contribuir tanto para o avanço teórico quanto para a prática pedagógica, ao propor Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do Ensino Fundamental. Com base nas questões norteadoras e nos objetivos estabelecidos, o presente trabalho está estruturado em seções que contemplam a fundamentação teórica, a metodologia utilizada, a análise dos resultados e a discussão, os quais poderão ser apreciados no decorrer desse trabalho, os quais detalha os referenciais teóricos e os estudos previamente realizados que sustentam esta investigação.

Assim, para a organização do presente trabalho, optou-se por estruturá-lo em seis seções:

Na *Seção 1 - Introdução,* apresentamos a problemática da pesquisa, a delimitação do objeto, a questão norteadora, os objetivos e as justificativas teóricas e práticas que fundamentaram este estudo, além da contextualização da trajetória formativa da pesquisadora, que sustenta o interesse pela investigação do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Na *Seção 2 - A Teoria Histórico-Cultural e o Desenvolvimento da Aprendizagem: Fundamentos e Perspectivas,* são discutidos os pressupostos teórico-filosóficos que fundamentam o trabalho, com ênfase nos conceitos de trabalho, atividade, mediação, desenvolvimento do pensamento teórico, lógico-histórico e zona de desenvolvimento iminente, os quais subsidiam a compreensão do processo de aprendizagem sob a ótica da Teoria Histórico-Cultural, ancorada no Materialismo Histórico-Dialético.

A *Seção 3 - O Desenvolvimento Lógico-Histórico da Álgebra e a Constituição do Pensamento Algébrico* é dedicada ao percurso histórico da constituição dos conceitos matemáticos, especialmente da aritmética e da álgebra. Nela, desenvolvemos uma análise sobre os nexos conceituais que articulam o pensamento aritmético e o pensamento algébrico, tomando como referência o movimento lógico-histórico da formação dos conceitos matemáticos, com vistas a compreender os fundamentos teóricos que sustentam a generalização no ensino da álgebra.

Na *Seção 4 - Fundamentos Teórico-Metodológicos da Pesquisa*, apresentamos os procedimentos metodológicos que sustentam esta investigação, fundamentados no método materialista histórico-dialético. Detalhamos os princípios que norteiam a produção e análise dos dados, com ênfase na utilização da análise por núcleos de significação, enquanto método de apreensão do sentido das falas dos participantes, bem como na organização da pesquisa de campo, na elaboração da unidade didática e nos instrumentos utilizados.

Na *Seção 5 - Desenvolvimento dos Dados da Pesquisa de Campo*, apresentamos a análise dos dados produzidos na pesquisa de campo, organizada a partir dos núcleos de significação identificados, os quais expressam os movimentos de generalização, abstração e formalização do pensamento dos estudantes, em direção à constituição do pensamento algébrico. Esta seção também contempla a análise Inter núcleos, que permite apreender a totalidade do processo de desenvolvimento dos participantes.

Por fim, na *Seção 6 - Considerações Finais,* sistematizamos as principais conclusões do trabalho, destacando as contribuições teóricas e práticas da pesquisa para o campo da Educação Matemática e para o desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como apontamos limitações e possibilidades para investigações futuras. Nos *anexos,* encontram-se os documentos referentes aos aspectos éticos da pesquisa e aos materiais utilizados durante o desenvolvimento da unidade didática.

2 A TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL E O DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM: FUNDAMENTOS E PERSPECTIVAS

A pretensão deste capítulo é aprofundar a compreensão acerca do desenvolvimento da aprendizagem, à luz da Teoria Histórico-Cultural, a qual recebeu grande influência do materialismo histórico-dialético de Marx e Engels**.** Os conceitos de pensamento e linguagem, bem como suas inter-relações, foram desenvolvidos com base nos pressupostos de Vigotski. A teoria da atividade e da atividade de estudo, por sua vez, foram fundamentadas nos estudos de Leontiev, enquanto a teoria do ensino desenvolvimental foi elaborada por Davidov. Esses referenciais teóricos, aliados às contribuições de outros pesquisadores que se alinham à Teoria Histórico-Cultural, têm como foco central a aprendizagem como objeto central de investigação. Assim, intenciona-se compreender primeiramente o homem e o processo de desenvolvimento de sua aprendizagem diante o contexto social em que está inserido.

2.1 A aprendizagem no desenvolvimento do pensamento na perspectiva histórico-cultural

A Teoria Histórico-Cultural da Atividade e a Teoria do Ensino Desenvolvimental possuem fundamentos filosóficos calcados no materialismo histórico-dialético, que busca compreender o ser humano em sua totalidade, como um ser social. Diante dessa concepção, compreende-se que a aprendizagem ocorre mediante as relações sociais historicamente constituídas na cultura, mediadas por instrumentos e signos, os quais possibilitam o desenvolvimento psíquico.

Para buscar evidência acerca de como se dá a internalização da fala social, para que a aprendizagem aconteça, a partir da atividade escolar, faz-se necessário compreender o indivíduo em sua totalidade, com suas subjetividades, pois "a universalidade das relações sociais reais pode ser representada na consciência do indivíduo (pensamento) graças à natureza ideal da consciência" (Davidov, 1988, p. 42).

Entretanto, para que ocorra o desenvolvimento psíquico dos estudantes, Davidov (1988) ressalta que os métodos tradicionalmente utilizados no ensino as habilidades de cálculo, leitura e escrita, desconsideram, em grande medida, a atividade de estudo dos estudantes e, por essa razão terminam por limitar o desenvolvimento psíquico dos estudantes.

> Assim, para explicar o homem em sua totalidade, unindo os aspectos sociais/individuais, seria necessário desenvolver uma nova psicologia, nascida numa sociedade que não operasse a divisão entre pensar/fazer e proprietários/operários, característica da sociedade burguesa amplamente analisada por Marx e Engels. (Tuleski, 2002, p. 123)

Ao refletir a respeito da aprendizagem, não se pode deixar de destacar as múltiplas necessidades presentes no interior de uma mesma sala de aula, o que exige atenção às subjetividades dos estudantes. Entender essas subjetividades, significa reconhecer o contexto nos quais estão, a fim de buscar caminhos de transformação no exercício da docência.

Conforme Davidov (1988), ao investigar os desafios teóricos associados à relação entre educação, ensino e desenvolvimento psíquico, requer a utilização, concomitante dos conceitos de educação e ensino, o conceito mais amplo de apropriação. Este último, enquanto conceito de maior abrangência, evidencia as relações fundamentais entre as experiências individuais e sociais, que são dialeticamente interdependentes. O processo de apropriação permite ao indivíduo incorporar, em suas ações, habilidades e competências historicamente constituídas.

Sob essa perspectiva compreende-se que a escola deve assumir, como princípio formativo, integrar questões culturais, históricas e científicas, reconhecendo que esses elementos estão em permanente transformação, determinados pelas condições históricas e pelas relações sociais. Essas mudanças são mediadas pela práxis, compreendida como a unidade dialética entre o pensar e o agir, representando a essência da atividade humana. Esse movimento dialético fundamenta-se na unidade de contrários, em que cada pensamento é concretizado em uma ação.

Nesse contexto, Bulhões e Martins (2018) destacam que, no materialismo dialético, as contradições não resultam de oposições externas, mas de tensões internas, que impulsionam o desenvolvimento e culminam na superação do núcleo racional.

Para Marx (2011), a contradição não é apenas subjetiva ou relativa, mas reflete determinações internas e objetivas da realidade. A dialética, segundo Kopnin (1978), abarca os aspectos do pensamento em uma concepção mais ampla, analisando "as leis de construção e desenvolvimento das teorias" (p. 195), diferentemente da lógica formal. De acordo com o autor, "a lógica formal contemporânea pode estudar apenas as relações lógico-formais entre os elementos da linguagem da teoria científica e não o conteúdo dessa mesma teoria" (Kopnin, 1978, p. 195). Nesse sentido, a lógica formal organiza os princípios do pensamento dedutivo, mas se limita à análise de aspectos externos, concentrando-se nas relações formais, sem acessar o conteúdo teórico ou as contradições internas que impulsionam o desenvolvimento do conhecimento.

A unidade dos contrários, princípio fundamental do Materialismo Histórico-Dialético, está presente tanto na materialidade quanto na imaterialidade, tanto na relação indivíduo-sociedade quanto na atividade humana. Essa contradição descrita por Marx, é que promove o desenvolvimento, a transformação. Dessa forma, uma das convicções centrais do materialismo dialético é a historicidade, segundo a qual as conexões não são perpétuas, ou seja, transformam e são transformadas continuamente, onde as próprias contradições da sociedade capitalista a colocam em constante mudança.

Diante disso, as contradições presentes no campo do psiquismo, no contexto do processo de ensino e aprendizagem, atuam como forças motrizes que impulsionam o desenvolvimento de ações, de habilidades e de conceitos científicos. Segundo Davidov (1988), tais contradições orientam a investigação psíquica, mobilizam o desejo de compreender a essência do desconhecido e fomentam o esforço consciente para a apropriação de novos conceitos e métodos de ação. Complementarmente, Vigotski (2001) argumenta que essa investigação visa compreender a formação das funções psicológicas superiores — como memória, atenção, imaginação, criatividade e personalidade —, as quais não se desenvolvem espontaneamente, mas são formadas por meio das interações sociais, especialmente na relação dialética entre professor e estudante, mediada pela atividade de estudo.

A incumbência do professor é organizar o ensino de forma que a sua atividade articule o conhecimento já constituídos pelos estudantes com os novos conceitos que são objeto da aprendizagem. Para Vigotski (2001), essa dinâmica, na qual o professor atua intencionalmente para promover avanços no desenvolvimento, ocorre nas chamadas Zonas de Desenvolvimento Iminente[4] (ZDI). O professor tem o papel de orientar os estudantes mobilizando instrumentos de mediação, durante a resolução de situações problema, com o objetivo de favorecer o desenvolvimento do pensamento teórico. Vale ressaltar que, segundo Vigotski (2001), essa mediação não necessariamente precisa vir de um professor, pois também pode ser promovida por um colega mais capaz. Durante esse processo, as hipóteses/conjecturas propostas e negociadas pelos estudantes no grupo, ocorre uma correlação interpsíquica, na qual o professor atua como mediador da constituição coletiva do conhecimento. Posteriormente, esse conhecimento é apropriado pelos sujeitos, passando ao plano intrapsíquico, caracterizando a internalização dos conceitos científicos.

Assim, nas Zonas de Desenvolvimento Iminente (ZDI), é fundamental destacar que a apropriação dos conceitos ocorre por meio das interações sociais. Nesse sentido, Prestes (2010) enfatiza que, embora o professor desempenhe um papel essencial ao orientar e mediar o processo de aprendizagem, sua atuação, por si só, não garante que o estudante alcance o

[4] A Zona de Desenvolvimento Iminente vem de uma tradução realizada diretamente do russo por Zoia Prestes em 2010. Aqui no Brasil é conhecida com ZDP (Zona de desenvolvimento Proximal). Ademais, no livro a construção do pensamento e linguagem (2001) é utilizado o termo Zona de Desenvolvimento Imediato.

desenvolvimento planejado. Essa perspectiva ressalta que o nível de desenvolvimento potencial do estudante não é fixo ou previamente determinado, mas depende de múltiplos fatores, incluindo a qualidade das interações e mediações realizadas. Dessa forma, ainda que o professor busque direcionar o estudante a um nível potencial idealizado, é importante compreender que esse nível não é concreto ou uniforme, o que torna inadequado o uso do termo "nível de desenvolvimento potencial" de forma rígida e pré-definida.

Ao refletir sobre o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, Vigotski (2001) argumenta que essas se constituem socialmente, por meio das interações culturais e linguísticas, as quais possibilitam a internalização de conceitos e habilidades historicamente acumulados. Nesse processo, a linguagem, enquanto sistema de signos socialmente construídos, ocupa papel primordial, funcionando como mediadora entre o sujeito e o mundo. Essa compreensão do papel central das interações sociais e culturais no desenvolvimento humano converge com a análise de Marx (2011), mencionada por Bulhões e Martins (2018). Esses autores enfatizam que o trabalho — entendido como a atividade pela qual o sujeito transforma sua realidade e cria produtos culturais — é também um processo mediado pela história e pela cultura, refletindo a adaptação e a transformação da natureza para a satisfação de necessidades humanas.

Portanto, evidenciando a atividade histórico-cultural para a formação das funções mentais superiores, os saberes e os instrumentos cognitivos — estes últimos compreendidos como elementos, materiais ou simbólicos, que mediam as interações do sujeito com o mundo — se constituem nas relações de comunicação entre os indivíduos. Sua apropriação, por sua vez, exige a interação com outros sujeitos que já sejam portadores desses saberes e instrumentos. Assim, o ensino e a educação possuem uma relação intrínseca, pois "o ensino não somente favorece o desenvolvimento, mas também depende deste desenvolvimento" (Davidov, 1988, p. 60). Entretanto, ainda que o desenvolvimento seja influenciado pelas realizações do ensino, "o ensino é o precursor do desenvolvimento. Os estudantes só aprendem o que estão prontos para aprender, e isso é consequência do seu desenvolvimento geral, no qual participam não só o ensino, mas também outras condições externas e internas" (Davidov, 1988, p. 60). Assim, é preciso ressaltar a importância da linguagem no processo de aprendizagem, pois a construção de conceitos, as generalizações, abstrações, interiorizações, dependem dos momentos de socialização entre sujeitos.

Portanto, evidenciando a atividade histórico-cultural na formação das funções psicológicas superiores, os saberes e os instrumentos cognitivos — estes últimos compreendidos como elementos materiais ou simbólicos que mediam as interações do sujeito com o mundo — se constituem nas relações de comunicação entre os indivíduos**.** A apropriação desses saberes, por sua vez, exige a interação com outros sujeitos que já sejam portadores desses conhecimentos e instrumentos culturais. Dessa forma, ensino e desenvolvimento mantêm uma relação dialética, pois "o ensino não somente favorece o desenvolvimento, mas também depende deste desenvolvimento" (Davidov,1988, p. 60), entretanto, ainda que o desenvolvimento seja pautado nas realizações deste, "o ensino é o precursor do desenvolvimento. Os alunos só aprendem o que estão prontos para aprender e esta é a consequência do seu desenvolvimento geral, no qual participam não só o ensino, mas outras condições externas e internas" (Davidov, 1988, p.60). Assim, é fundamental ressaltar a centralidade da linguagem no processo de aprendizagem, uma vez que a construção de conceitos, as generalizações, as abstrações e as interiorizações dependem dos processos de socialização entre sujeitos.

O psiquismo humano constitui-se como um sistema interfuncional, no qual nenhuma função opera de forma isolada. Portanto, não existe memória isolada, ou atenção isolada, ou percepção isolada; essas funções estão em constante relação de interdependência e contradição dialética, integrando-se mutuamente no desenvolvimento da consciência**.** Esse entendimento rompe com as concepções fragmentadas e naturalizadas da psicologia tradicional, situando o desenvolvimento das funções psíquicas na dinâmica das relações sociais e culturais.

No campo sensório-perceptual, torna-se necessário selecionar elementos da realidade por meio do foco da atenção, o que pressupõe condições cognitivas que permitam recuperar as informações às quais se dedicou atenção. Todo esse processo é permeado pela articulação entre pensamento e linguagem. Essa mediação possibilita uma nova forma de simbolizar a experiência, superando o imediatismo da percepção direta e permitindo que o sujeito, por meio das funções psicológicas superiores, passe a se autorregular. Isso traz uma nova possibilidade de simbolizar esse processo de articulação, que vai além da experiência imediata.

A periodização do desenvolvimento humano, segundo Davidov (1988, p. 75), Vigotski, Leontiev e Elkonin, destaca que cada período é caracterizado por uma atividade principal, denominada atividade guia. De acordo com Magalhães (2018, p. 279), Leontiev define a atividade guia como "a atividade responsável pelas principais mudanças no psiquismo e na personalidade da criança, proporcionando o surgimento de outras atividades que se tornarão guia no próximo período". Com base nessa concepção, diferentes fases de desenvolvimento podem ser identificadas, cada uma marcada por atividades específicas que refletem a interação entre a criança e o meio sociocultural.

O primeiro período é caracterizado pela *comunicação emocional direta*, na qual as interações afetivas iniciais com os cuidadores desempenham um papel central no desenvolvimento do vínculo e da socialização. Em seguida, ocorre a *atividade objetal manipulativa*, em que a criança passa a interagir com objetos culturais, explorando suas funções e atribuindo-lhes significados. Nesse estágio, ocorre o entrelaçamento inicial entre pensamento e linguagem, marcando um avanço significativo no desenvolvimento cognitivo. O terceiro período é a *atividade de jogos de papéis*, onde as crianças reproduzem relações interpessoais e simulam o mundo adulto do trabalho, experimentando papéis sociais e construindo um entendimento mais amplo das dinâmicas sociais e culturais.

Na sequência, Asbahr (2016) destaca a importância da *atividade de estudos*, momento em que a autorregulação das funções psíquicas começa a se desenvolver. Esse processo, longe de se limitar à simples docilização, envolve a integração das funções psíquicas interfuncionais, possibilitando a apropriação da cultura e a transformação da realidade. Posteriormente, surge a *atividade íntima e social*, marcada pela busca de aprovação do grupo e pela consolidação de habilidades sociais e responsabilidades que preparam o sujeito para a vida adulta. Esse período é essencial para a internalização das normas e valores sociais, favorecendo a construção de uma identidade mais autônoma e participativa.

Finalmente, a *atividade profissional* emerge como a fase culminante do desenvolvimento humano. Nessa etapa, o sujeito consolida os conhecimentos adquiridos ao longo das fases anteriores e os aplica à prática produtiva. A partir desse vínculo entre teoria e prática, o indivíduo constrói sua perspectiva de mundo, define sua conduta e assume um papel ativo na transformação da realidade. Como ressalta Pereira (2019),

> a adolescência, assim como todas as épocas da vida, é formada por dois períodos, cuja transição é marcada pela mudança na atividade-guia do sujeito. O autor não explicita marcos etários precisos para cada um destes períodos; quem o faz é Davidov (1988), que alerta que tais marcos são aproximados. Os períodos postulados são: adolescência inicial (próximo aos 10 anos) e adolescência (dos 14 aos 17 anos). (Pereira, 2019, p. 9).

Assim, compreende-se que o pensamento humano é constituído a partir dos processos psíquicos naturais, denominados Funções Psicológicas Elementares — como atenção involuntária, memória mecânica e percepção imediata —, as quais são de caráter biológico, instintivo e espontâneo. Com o desenvolvimento do sujeito, mediado pelas interações sociais e pela inserção na cultura, emergem as Funções Psicológicas Superiores, especificamente humanas, como a atenção voluntária, a memória lógica, o pensamento conceitual e a regulação consciente da conduta. Esses processos não surgem de maneira espontânea, mas se desenvolvem historicamente, por meio da apropriação dos instrumentos e signos culturais. Desse modo, a formação da consciência humana ocorre como resultado direto das constituições históricas e culturais, processadas nas relações sociais.

A subjetividade e a objetividade — ou, em outros termos, os âmbitos interno e externo da atividade psíquica — não podem ser compreendidas como esferas dicotômicas ou separadas. Ao contrário, são momentos de um mesmo processo dialético, no qual a mediação social possibilita que a objetividade (a realidade externa) seja interiorizada, constituindo a subjetividade, e, simultaneamente, que a subjetividade se objetive nas ações, nas transformações da realidade e na produção cultural. Dessa forma, qualquer análise que busque compreender o desenvolvimento humano não pode ser fragmentada ou reducionista, mas deve considerar que o conhecimento é produzido nas condições objetivas e subjetivas historicamente determinadas, resultantes da relação dialética entre o ser humano e a natureza.

Diante disso, retoma-se a atenção para a compreensão do conceito de atividade e de suas contribuições para o trabalho pedagógico, especialmente no que se refere à humanização dos sujeitos. Partindo inicialmente da concepção de atividade humana em sua totalidade, torna-se possível compreender não apenas os processos educativos de forma ampla, mas também, especificamente, a atividade de estudo como eixo estruturante do desenvolvimento. Nessa perspectiva, "as forças que mobilizam a mudança de uma atividade-guia à outra são as necessidades que são geradas a partir da realização da atividade-guia anterior e as demandas sociais que são postas aos sujeitos em cada período de seu desenvolvimento" (Bozhovich, 1981 apud Pereira, 2019, p.9).

Diante dessas conexões, a fala assume um papel de extrema importância, uma vez que, por meio dela, os sujeitos elaboram, externam e socializam suas conclusões, suas hipóteses e seus processos de pensamento. Dessa forma, a mediação pedagógica não pode ocorrer sem intencionalidade, pois, na ausência dela, dificilmente será possível suscitar a atividade de estudo. Assim, é fundamental que, no desenvolvimento da atividade de estudo, o estudante tenha clareza quanto aos objetivos da aprendizagem, de modo que possa organizar suas ações de forma consciente, construindo uma atividade orientada à autorregulação, à apropriação dos conceitos e, consequentemente, ao desenvolvimento de suas funções psicológicas superiores.

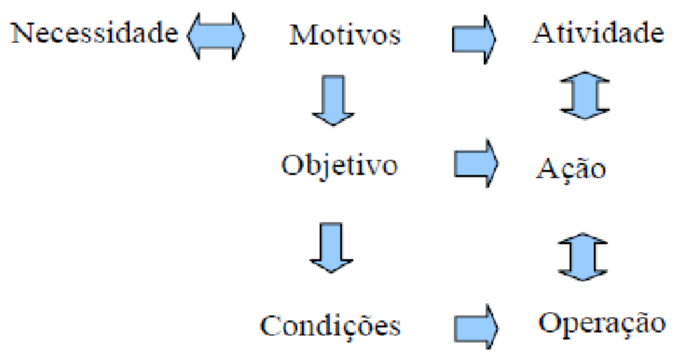
2.2 A função da atividade diante a práxis docente

Segundo Leontiev (2021, p. 103-104) “a atividade não é a reação ou um conjunto de reações, mas um sistema que tem estrutura, transições e transformações internas e desenvolvimento próprio”. Segundo Davidov (1988), Leontiev dedicou uma atenção singular à mudança e transformação da conformação própria da atividade como composição do todo no método da sua realização. Nesse sentido, a atividade pode deixar seu motivo e fazer-se ação; esta, se remodelada a sua finalidade, pode transformar-se em operação. O motivo de uma atividade pode converter-se a ser o objetivo da ação, como consequência desta, esta última se transforma em outra atividade. Assim ocorrem, frequentemente, as seguintes transformações recíprocas: “atividade ((ação ((operação e motivo ((finalidade ((condições)” (Davidov, 1988, p. 33), que constituem o indivíduo em sua atividade a partir de uma necessidade individual, que ao mesmo tempo é formada por meio de suas relações sociais.

Como complementa Kopnin (1978, p. 61), "o mundo objetivo e as suas leis interessam ao homem não por si mesmos, mas enquanto meio de satisfação de determinadas necessidades sociais". Dessa forma, o indivíduo em atividade transforma o meio no qual está inserido à medida que transforma a si mesmo.

Leontiev (2021, p. 123) afirma que “os principais componentes de uma atividade humana isolada são as ações que realizam”. Nesse sentido, o autor define a ação como um “processo que se vê subordinado a um objetivo consciente”. Assim, “como o conceito de motivo está correlacionado com o conceito de atividade, o conceito de objetivo está correlacionado com o de ação.” Essa relação é representada na imagem 1, a qual sintetiza os elementos da atividade, expressando que seus componentes não operam de forma independente, mas se organizam de acordo com as necessidades, os objetivos e as condições concretas nas quais o sujeito está inserido.

Imagem 1 - Estrutura da Teoria da Atividade



Fonte: Cedro (2008).

Diante dos desafios inerentes aos fenômenos que atravessam o contexto escolar, o conceito de atividade, conforme formulado por Leontiev (1978), "pode fundamentar o trabalho do professor na organização do ensino" (Moura *et al*, 2010, p. 207). Partindo da concepção de que o trabalho constitui a atividade pela qual o sujeito transforma a realidade, é fundamental compreender que tal transformação só é possível quando o sujeito estabelece uma relação consciente e intencional com o objeto de sua atividade. É, portanto, a apropriação do objeto — entendido não apenas como um fim externo, mas como aquilo que mobiliza, organiza e dá sentido à atividade — que possibilita ao sujeito intervir na realidade e, simultaneamente, transformar-se no processo.

Nessa perspectiva, o trabalho não se reduz a uma simples interação mecânica com a matéria, mas constitui uma atividade consciente, orientada por um objetivo previamente idealizado**.** Ele não transforma apenas o material sobre o qual opera; ele imprime ao material o projeto que tinha conscientemente em mira, o qual constitui a lei determinante do seu modo de operar e ao qual tem de subordinar sua vontade. E essa subordinação não é um ato fortuito. Além do esforço dos órgãos que trabalham, "é mister a vontade adequada que se manifesta através da atenção durante todo o curso do trabalho". (Marx, O Capital, 2006, p. 2012 apud Moura, 2022, p. 72).

Essa formulação evidencia que o trabalho, como atividade estruturante da humanidade, exige não apenas esforço físico, mas sobretudo um processo intencional e consciente, no qual o sujeito se orienta por um modelo ideal — previamente constituído — que guia e regula suas ações na transformação da realidade. Este princípio é fundamental para compreender também a organização do trabalho pedagógico, no qual a clareza do objeto, dos objetivos e das ações orienta tanto o professor quanto os estudantes no processo de ensino e aprendizagem.

Nas atividades práticas, os sujeitos se deparam com contradições e desafios objetivos que precisam ser enfrentados e superados para alcançar um determinado objetivo. Tais contradições, contudo, não se restringem às atividades produtivas no sentido estrito, uma vez que o conhecimento humano se constitui no interior de múltiplas formas de atividades sociais, culturais e relacionais**.** A superação desses desafios, movida pelas necessidades concretas, atua como força motriz do desenvolvimento humano, evidenciando a conexão dialética entre a elaboração teórica e sua materialização na prática social. Nesse movimento, as teorias não apenas orientam a prática, mas também são constantemente reelaboradas, enriquecidas e transformadas pela própria experiência prática, num processo de mediação recíproca. Como afirma Tse-Tung (2009, p. 13), "entre essas relações, as diversas formas de luta de classes exercem uma influência particularmente profunda sobre o desenvolvimento do conhecimento humano". Tal afirmação reforça que o conhecimento não é fruto de uma abstração isolada, mas emerge das tensões históricas e sociais, especialmente das contradições impostas pelas relações de produção na sociedade.

Nessa perspectiva, a aprendizagem é concebida como resultado das experiências acumuladas por outros sujeitos, sendo esses conhecimentos considerados confiáveis, uma vez que se originam de práticas concretas e verificadas ao longo do tempo. Contudo, observa-se em determinados contextos a predominância de abordagens que privilegiam a teoria em detrimento da prática, o que pode resultar em uma compreensão fragmentada dos fenômenos. Para alcançar uma compreensão integral de um fenômeno, é imprescindível que haja uma aproximação prática, pois é no enfrentamento concreto das situações que o sujeito verifica, amplia e aprofunda sua compreensão, apreendendo a essência do objeto de estudo. Nesse sentido, conforme destacado por Tse-Tung (2009, p. 13), a prática constitui o critério último para validar a verdade, reafirmando a indissociabilidade entre teoria e prática como princípio fundamental para o desenvolvimento do conhecimento humano. Para tanto,

> o sujeito individual, por meio da apropriação, reproduz em si mesmo as formas histórico-sociais da atividade. O tipo geneticamente inicial da apropriação é a participação do indivíduo na realização coletiva, socialmente significativa, da atividade, organizada de forma objetal externa. Graças ao processo de interiorização a realização desta atividade se converte em individual e os meios de sua organização, em internos. Uma particularidade importante da atividade humana externa e interna é seu caráter objetal, já que durante o processo de satisfazer suas necessidades, o sujeito coletivo e individual da atividade transforma a esfera objetal da sua vida. A atividade humana tem uma estrutura complexa que inclui componentes como: **necessidades, motivos, objetivos, tarefas, ações e operações**, que estão em permanente estado de interligação e transformação. (Davidov, 1988, p. 13, *grifo nosso*)

Desde os primórdios de sua existência, todo indivíduo é inserido em uma atividade social, mediada por diversos recursos materiais e semióticos, estando, portanto, imerso em processos interpsíquicos em constante relação com o ambiente. Para que ocorra a apropriação dos métodos necessários à concretização da atividade, bem como o controle da aplicação dos meios que orientam sua conduta, desenvolvem-se os processos intrapsíquicos, os quais, inicialmente mediados externamente, transformam-se, posteriormente, em "regulador interno do indivíduo" (Sforni, 2003, p. 6).

Para Davidov (1988), a apropriação dos aspectos culturais pelos indivíduos é o caminho já delineado de concepção de sua consciência. Porém, a apropriação não se constitui passivamente, mas sim decorre "da atividade ativamente reprodutiva de uma criança que está dominando os modos historicamente construídos de orientação no mundo de objetos", onde "controlando as instrumentalidades através das quais este mundo pode ser transfigurado, gradualmente se transformando em formas de sua autoatividade" (Davidov, 1988, p. 74). Como as funções mentais não são espontâneas, mas se concretizam à medida que o indivíduo interage com os modelos sociais, é no decurso do método de educação e ensino que o desenvolvimento cognitivo do indivíduo se constitui em apropriações desses modelos (Vigotski, 2001).

A causa interna que une estes aspectos do conhecimento reside nos processos de generalização e nas vias de formação dos conceitos, os quais constituem a forma principal da atividade do pensamento humano.

Para Davidov (1988), na generalização conceitual empírica não se separam as particularidades essenciais dos objetos nem as conexões internas entre seus aspectos. Essa forma de generalização não garante que, no processo de conhecimento, ocorra a separação entre os fenômenos e sua essência. Desse modo, as propriedades externas dos objetos, sua aparência, passam a ser tomadas como se fossem sua própria essência. Davidov (1988) salienta, ainda, que o entendimento, nesse nível, está orientado à separação e comparação das propriedades dos objetos, com a finalidade de abstrair uma generalidade formal — ou seja, atribuir-lhe a forma de conceito. Assim, essa forma de abstração permite ao sujeito dividir e diferenciar os objetos, mas não apreender seus nexos internos e essenciais.

Tal forma de pensamento representa o degrau inicial do processo de conhecimento, no qual o conteúdo da contemplação adquire uma universalidade abstrata e formal. Contudo, à medida que se busca ampliar essa generalidade, a abstração torna-se pobre e vazia, esvaziada de conteúdo concreto. Essa limitação, segundo Davidov (1988), pode ser superada mediante a conservação ativa das imagens da contemplação sensível e das representações que fundamentam a própria abstração.

A abstração, conforme Davidov (1988), está profundamente relacionada às conexões internas que estruturam o objeto. Esse conceito pode ser desdobrado em diferentes formas de abstração, destacando-se a **abstração inicial**, na qual emergem as noções fundamentais como "abstração concreta", "conexão concreto-universal" e "célula objetiva do todo investigado" ou, simplesmente, "célula" (Davidov, 1988, p. 144). Essas formas caracterizam, de modo simultâneo, a essência da abstração inicial, compreendida como "a conexão simples que está na base do concreto, este começo não desenvolvido do todo desenvolvido, … a fonte da qual se origina, se desenvolve todo o restante" (Davidov, 1988, p. 144).

Nesse contexto, a abstração substantiva da essência é concebida como teórica e se apresenta em duas formas distintas. A primeira, denominada abstração empírica ou inicial, caracteriza-se pela incapacidade de distinguir as particularidades essenciais dos objetos e de compreender suas conexões internas. Por isso, essa forma de abstração permanece restrita às propriedades externas e à aparência, resultando em uma generalização formal e subdesenvolvida, que não permite acessar a essência do objeto.

Em contrapartida, a segunda forma — a abstração teórica ou concreta — permite que o sujeito apreenda o objeto em sua totalidade, integrando suas múltiplas determinações e particularidades, não de forma fragmentada, mas como uma unidade dialética. Nesse contexto, as particularidades não são eliminadas, mas compreendidas como momentos constitutivos da totalidade, o que possibilita acessar a essência do fenômeno e compreender seu desenvolvimento.

A esse respeito, Iliénkov — conforme citado por Davidov (1988) — descreve a especificidade da abstração concreta nos seguintes termos:

> a "redução" da plenitude concreta da realidade à sua expressão abreviada (abstrata) na consciência não é só a "premissa", não só a condição pré-histórica da assimilação teórica do mundo, mas também um aspecto orgânico do processo mesmo de estruturação do sistema de determinações científicas, isto é, da atividade sintetizadora da mente… As determinações abstratas isoladas, cuja síntese fornece "o concreto no pensamento" formam-se no próprio curso da ascensão do abstrato ao concreto. Deste modo, o processo teórico que leva à obtenção do conhecimento concreto, em cada um de seus elos e no conjunto, é sempre ao mesmo tempo o processo de redução do concreto ao abstrato. (Davidov, 1988, p. 148-149)

Dessa forma, ao abstrair as particularidades que compõem um objeto e denominá-lo com base nessas distinções, configura-se a abstração substantiva inicial (empírica). Já no contexto da abstração substantiva (teórica), essas particularidades deixam de ser o foco central e passam a ser compreendidas como parte de uma unidade integrada, permitindo uma apreensão mais profunda da essência do objeto.

Para Davidov (1988), o abstrato e o concreto não são categorias fixas ou dicotômicas, mas momentos distintos do próprio processo de reflexão da realidade objetiva, mediado pela atividade mental. Nesse sentido, resultam da fragmentação metodológica do objeto de estudo, como etapas necessárias à apreensão teórica da totalidade.

Para que o conhecimento se torne significativo, é necessário que ele se converta em instrumento cognitivo do estudante, possibilitando a reorganização de seu sistema de conceitos e a constituição qualitativa de seu modo de pensar (Sforni, 2003). Essa compreensão está intrinsecamente alinhada à Teoria Histórico-Cultural. Segundo Vigotski (2001), é nas práticas sociais que se constituem os processos psíquicos humanos, sendo o ensino formal uma mediação fundamental da cultura, que, por sua vez, promove e orienta o desenvolvimento psíquico dos sujeitos.

Dessa forma, cabe reiterar que a atividade de ensino do professor não pode ocorrer sem uma intencionalidade clara e bem definida, pois, sem ela, torna-se praticamente inviável suscitar a atividade de estudo. É essa intencionalidade que organiza as mediações necessárias para que os estudantes atribuam sentido às tarefas propostas, orientando suas ações cognitivas. Nesse processo, a atividade de estudo adquire um caráter consciente, no qual a autorregulação se configura como elemento central para a apropriação dos conceitos científicos e, consequentemente, para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

O termo "atividade de estudo", segundo Asbahr (2016), refere-se principalmente à atividade de aprendizagem escolar, entendida como aquela que tem por objetivo a apropriação consciente dos conhecimentos sistematizados historicamente, condição fundamental para o desenvolvimento do pensamento teórico. Nesse contexto, "entende-se, na perspectiva teórica adotada, o estudante como sujeito, como personalidade integral e não como a soma de capacidades isoladas e fragmentadas" (Asbahr, 2016, p. 96). Para Elkonin a atividade de estudo é aquela

> em cujo processo transcorre a assimilação de novos conhecimentos e cuja direção constitui o objetivo fundamental do ensino é a atividade dominante nesse período. Durante este, tem lugar uma intensa formação das forças intelectuais e cognitivas da criança. A importância primordial da atividade de estudo está determinada, ademais, porque por meio dela se mediatiza todo o sistema de relações da criança com os adultos que a circundam, incluindo a comunicação pessoal na família. (Elkonin, 1987. p. 119 apud Asbahr, 2016, p. 97)

Para Davidov (1988, p. 158), "o conteúdo da atividade de estudo, em outras palavras, é o conhecimento teórico", uma vez que esse conteúdo está diretamente relacionado ao movimento de abstração substantiva, generalização e formação de conceitos teóricos**.** Desse modo, essa concepção formaliza a compreensão tanto do conteúdo quanto do sentido da atividade de estudo, que se configura como eixo estruturante do desenvolvimento psíquico. Nessa direção, "a finalidade da educação escolar é, portanto, a formação do pensamento teórico, tendo em vista a constituição da personalidade integral dos(as) estudantes" (Asbahr, 2016, p. 99).

Assim como Asbahr (2016), considera-se importante a busca por superar o verbalismo e o intelectualismo, pois é necessário que o estudante se aproprie do processo lógico-histórico que fomentou a necessidade e a elaboração do conceito que se pretende ensinar, e isto só se alcança se o estudante estiver em atividade de estudos. Vigotski (2001, p. 247), por sua vez, esclarece que ensinar os conceitos de forma direta "sempre se mostra impossível e pedagogicamente estéril".

O autor ainda ressalta que “o professor que envereda por esse caminho costuma não conseguir senão uma simples assimilação vazia de palavras, um verbalismo puro e simples” e assim “estimula a existência dos respectivos conceitos na criança, mas na prática, esconde o vazio” (Vigotski, 2001, p. 247).

Segundo Asbahr (2016), o papel do professor é central na formação da atividade de estudo, uma vez que lhe cabe planejar situações que orientem os estudantes na compreensão de como conduzir as ações de estudo, monitoramento e avaliação, fundamentais para que internalizem os processos que caracterizam o estudo consciente e autônomo. Por meio desse movimento orientado e mediado, o professor cria as condições para que, progressivamente, os estudantes desenvolvam autonomia na realização das tarefas de estudo, constituindo, assim, a capacidade de estudar de modo reflexivo.

Ainda de acordo com Asbahr (2016), compreender esses elementos é essencial para planejar e elaborar um ensino orientado para o desenvolvimento do pensamento teórico. Como reforça Davidov (1988, p. 168), “durante o cumprimento sistemático da atividade de estudo, desenvolve-se nos alunos, junto com a assimilação dos conhecimentos teóricos, a consciência e o pensamento teórico.”

Dessa forma, ao organizar o ensino sob a perspectiva da estrutura da atividade de estudo, o professor possibilita “o desenvolvimento da capacidade de estudar, no sentido da auto-organização do(a) estudante, o que envolve o desenvolvimento da autonomia e do controle voluntário da conduta” (Asbahr, 2016, p. 101). Esse processo configura-se como uma relação dialética, na qual o estudante, ao se engajar na atividade de estudo, simultaneamente desenvolve e aprimora sua capacidade de organização — compreendida como uma função psicológica superior. Esse aprimoramento, por sua vez, contribui para a estruturação e o enriquecimento da própria atividade de estudo. Então,

> a potencialidade dos conceitos científicos na promoção do desenvolvimento não pode ser considerada uma condição inerente ao ensino. Segundo Davydov, “*apropriação é o processo de desenvolvimento, mas somente sob certas condições, a saber, quando envolve o domínio de métodos e formas gerais de atividade mental”* (RENSHAW, 1992), identificar esses métodos e a atividade mental adequada é um passo fundamental na organização do ensino de qualquer área do conhecimento. (Sforni, 2003, p. 4)

No aspecto cognitivo, “a escola atua como formadora ao transmitir tanto sistemas organizados de conhecimento como modos de funcionamento intelectual” (Sforni, 2003, p. 4). Assim, refletir a respeito de um ensino que promova efetivamente o desenvolvimento, implica, necessariamente, “analisar a qualidade do conteúdo escolar e o modo de sua apropriação pelo aluno" (Sforni, 2003, p. 4). Ademais, constata-se que estas duas perspectivas — o conteúdo e o modo de apropriação —, quando consideradas em unidade dialética, constituem fundamentos essenciais para orientar a organização do ensino. Assim, esse enfoque permite compreender que diferentes modos de organização do conteúdo mobilizam diferentes níveis de generalização e distintos modos de atividade mental, o que é determinante para a formação do pensamento teórico e para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

É fundamental destacar que a atividade de estudo não se desenvolve de forma espontânea ou natural; ela exige condições objetivas e subjetivas que viabilizem sua constituição, sendo papel da escola estabelecer essas condições. Nesse sentido, a tarefa fundamental da instituição escolar, especialmente nos anos iniciais, consiste em promover a formação da postura de estudante, isto é, preparar as crianças para organizar e conduzir sua atividade intelectual de maneira consciente, sistemática e orientada. É nesse movimento — na medida em que os sujeitos se apropriam da atividade de estudo — que se criam as condições para a transição à próxima atividade-guia, denominada comunicação íntima social, que se caracteriza pelo desenvolvimento das relações interpessoais mais elaboradas, próprias da adolescência.

> Em síntese, há dois elementos centrais a serem destacados para que possamos dar continuidade à nossa discussão sobre esta atividade guia**: 1) um bom ensino, que promova o desenvolvimento de nossos(as) estudantes, deve ser organizado tendo a atividade de estudo como referência**, e **especialmente pautar-se na ideia de que esta atividade não se desenvolve naturalmente,** sendo preciso fomentar o desenvolvimento da capacidade de estudar; 2) uma característica fundamental da atividade de estudo diz respeito à sua configuração como atividade conjunta, coletiva, o que traz implicações importantes à organização do ensino. (Asbahr 2016, p. 105, grifo nosso)

Desse modo, segundo Magalhães (2018), a atividade guia é responsável por provocar as principais mudanças no psiquismo e na personalidade da criança, fazendo emergir outras atividades que se tornarão guia em seu próximo período. A partir dela, acontecem as periodizações do desenvolvimento psíquico, em que, segundo Vigotski (2001), cada período é definido por uma configuração da consciência em sua totalidade, por uma estrutura das conexões e associações interfuncionais que estabelecem entre as funções psicológicas.

Por fim, o professor que organiza a atividade de ensino de forma intencional, orientada à constituição da atividade de estudo como atividade-guia, estabelece as condições para uma aprendizagem que supera tanto o verbalismo quanto o intelectualismo, promovendo a apropriação dos conhecimentos em um nível que transcende o mero utilitarismo.

Dessa forma, com base nas discussões desenvolvidas até aqui — que compreendem a aprendizagem humana como um processo historicamente constituído, ancorado na cultura, nas relações sociais e mediado pelos instrumentos e signos produzidos pela atividade humana —, bem como na compreensão do trabalho como a atividade fundamental pela qual o sujeito transforma a realidade e, simultaneamente, a si próprio, passamos, a seguir, a discutir os fundamentos da formação do pensamento teórico.

2.3 O desenvolvimento do pensamento teórico

Partindo da grande importância da constituição do pensamento conceitual para o desenvolvimento psíquico dos indivíduos, Vigotski (2001) em seus estudos a respeito das relações entre pensamento e linguagem, explora as diversas concepções existentes nestes conceitos, onde observa que em todo o processo de aprendizagem e constituição de conceitos "como um sistema, que ele considera como ponto central em toda a história do desenvolvimento dos conceitos e no qual os conceitos espontâneos e científicos estão interligados por complexos vínculos internos" (Vigotski, 2001, p. XIV).

Em síntese, Asbahr (2020), define que a constituição dos conceitos espontâneos ocorre no cotidiano, de modo empírico, diante das relações diretas entre indivíduos. Enquanto, que os conceitos científicos são constituídos na escola, através de uma metodologia intencional, organizado e sistemático. "Sua apropriação começa com a conscientização das características essenciais presentes na definição do objeto, em uma atividade de caráter consciente e intencional". Assim, a constituição dos conceitos científicos é realizada de forma mediatizada e consciente tendo sua base nos conceitos espontâneos onde "há uma generalização e apropriação do significado do objeto (expresso na palavra)." (Asbahr, 2020, p. 88)

Compreender a relação dialética entre pensamento e linguagem implica reconhecê-los como funções como atividades humanas historicamente constituídas. Nesse sentido, Pereira e Francioli (2011, p. 96), afirmam que "a formação do conhecimento voltada para a história do homem, considerando as mudanças e transformações que ele passou", permite compreender que o desenvolvimento do psiquismo está intrinsecamente vinculado aos processos históricos, culturais e sociais.

As implicações desse entendimento se materializam no campo educacional, especialmente no processo de ensino e aprendizagem, no qual se constitui a formação de ações, de habilidades e de conceitos científicos. Nesse contexto, o desenvolvimento das funções psicológicas superiores — como memória, atenção, imaginação, criatividade e personalidade — não ocorre de maneira espontânea, mas é fruto da mediação social, especialmente da atividade pedagógica intencionalmente organizada no ambiente escolar. É nesse processo que se dá, de forma concreta, a formação da personalidade do indivíduo.

Corroborando essa compreensão, Lúria (2006) esclarece que, "foi nas bases teóricas da filosofia marxista que Vigotski concluiu que as formas superiores do comportamento consciente originam-se nas relações sociais do indivíduo com o mundo exterior". Como reforça Vigotski (2006, p. 115)

> […] a aprendizagem não é, em si mesma, desenvolvimento, mas uma correta organização da aprendizagem da criança conduz ao desenvolvimento mental, ativa todo um grupo de processos de desenvolvimento, e esta ativação não poderia produzir-se sem a aprendizagem. Por isso, a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolvam na criança essas características humanas não naturais, mas formadas historicamente.

Davidov (1988) ressalta que a organização dos conteúdos e métodos das disciplinas escolares, especialmente nos anos iniciais, deveria ter como princípio fundamental a constituição, nos estudantes, de um grau mais elevado de consciência e de pensamento, orientado para a formação do pensamento teórico. No entanto, observa que a conformação predominante no processo de ensino ainda se baseia, majoritariamente, na consolidação de formas de pensamento e consciência de caráter empírico. Tal abordagem, embora represente um caminho relevante, não se configura como o mais adequado, na atualidade, para promover o desenvolvimento psíquico das crianças, conforme afirma: "caminho importante, mas não o mais efetivo na atualidade, para o desenvolvimento psíquico das crianças" (Davidov, 1988, p. 103). Assim,

> é priorizada uma forma de ensino em que a introdução de novos conceitos segue sempre a mesma estrutura: um pequeno texto, às vezes, com apenas uma frase, acompanhado de vários exemplos. Após a apresentação do conceito, surgem os exercícios que, normalmente, exigem a reprodução das mesmas palavras e exemplos citados. Na sequência, um novo texto apresenta um novo conceito e a dinâmica se repete. Pode-se constatar que**, apesar do ensino centrar-se em conceitos, não há preocupação com a aquisição ou formação destes**, isto é, com a elaboração de novos significados. Os textos, exemplos, histórias levam, tão somente, à identificação de conceitos. **Solicita-se a classificação de objetos em determinadas categorias e não a formação de categorias**. Um exemplo disso está, inclusive, explícito nos objetivos propostos por muitos planejamentos: identificar, reconhecer, nomear, classificar, citar… **Ao aluno resta a tarefa de "fixar" ou reconhecer atributos dentro de um âmbito previamente definido** (Palangana; Galuch; Sforni, 2002, p.115-116, grifo nosso)

Para Asbahr (2016), o desenvolvimento do pensamento, quando limitado à verificação "de dados sensoriais, separação das características gerais, classificação e inclusão em classes, e, no máximo, aprende-se a reproduzir formalmente o que foi aprendido, mas não se aprende a operar, a pensar com os conceitos" (Asbahr, 2016, p. 108).

Nessa direção, Davidov (1988, p. 104), aponta que "há correlação de aspectos da atividade cognoscitiva do homem tais como o sensorial e o racional, em imagens e abstrato, concreto e abstrato". Segundo o autor, o princípio interno que conecta estas características cognitivas são "os processos de generalização e as vias, estreitamente unidas a eles, de formação dos conceitos como forma principal da atividade do pensamento humano" (Davidov, 1988, p. 104). Assim as características da generalização, em consonância "com os processos de abstração e formação de conceitos, caracterizam, a nosso juízo, o tipo geral de pensamento do homem" (Davidov, 1988, p. 104).

O Materialismo Histórico-Dialético fundamenta a distinção entre pensamento teórico e pensamento empírico, conceitos que foram aprofundados por Vigotski no âmbito de seus estudos sobre o desenvolvimento do pensamento humano. O pensamento empírico constitui-se por meio de observações diretas e superficiais, baseadas nas características aparentes dos fenômenos, sem acesso às determinações internas e essenciais. Por sua vez, o pensamento teórico emerge da mediação, da análise das conexões internas, dos nexos causais e das determinações que estruturam a essência dos objetos (Kopnin, 1978).

Diante dessa configuração, cabe ao professor partir de situações particulares de base empírica, para a partir daí dar um salto de qualidade para o geral (teórico). Portanto, cabe ao professor organizar situações de ensino que partam das generalizações empíricas, próprias da experiência imediata, para, a partir delas, possibilitar aos estudantes a ascensão ao nível teórico, isto é, à apreensão dos conceitos em sua essência e em suas determinações internas. Como enfatiza Libâneo (2004), essa ascensão do empírico ao teórico é condição indispensável para que se consolide o desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes.

Segundo Davidov (1988, p. 127), "o conteúdo específico do pensamento teórico é a existência mediatizada, refletida, essencial." Complementarmente, Vigotski (2001) destaca que, na adolescência, ocorre uma transformação qualitativa no desenvolvimento mental, marcada pela transição do pensamento baseado em generalizações empíricas para o pensamento por conceitos. Como afirma o autor, "o desenvolvimento mental do adolescente marca a transição para o pensamento por conceitos" (Vigotski, 2001, p. 155). Ademais,

> para Vigotski (1996), na adolescência é que se possibilitaria o desenvolvimento do pensamento por conceitos, em que com base nos conceitos científicos o sujeito opera não só sobre o objeto, mas sobre o ato de pensar sobre o objeto, podendo compreender os nexos que se ocultam por trás da aparência externa dos fenômenos, conhecendo as complexas interrelações que explicam sua gênese. É importante marcar que, ainda que se vejam estas mudanças nas necessidades dos estudantes e estas possibilidades de desenvolvimento do pensamento teórico [...] assim, esse traço de desenvolvimento do pensamento teórico que é tido como característico da adolescência é um traço de potencialidade que vinha sendo investigado a partir do que se vislumbrava intencionalmente possibilitar, e não como fenômeno natural, que ocorria de maneira predominante naquela realidade. (Pereira, 2019, p. 11)

Segundo Asbahr (2016, p. 106), "a pessoa que pensa teoricamente opera com conceitos e não apenas com representações imediatas da realidade". Esse tipo de operação implica compreender que os conceitos possuem natureza contraditória, pois expressam os nexos internos, as determinações e os movimentos que constituem o objeto em sua totalidade. Portanto, pensar por meio de conceitos significa operar dialeticamente, superando a apreensão imediata e aparente dos fenômenos.

Nesse sentido, Davidov (1988) esclarece que a formação do pensamento teórico ocorre por meio do processo de ascensão do abstrato ao concreto, movimento em que o sujeito parte da apreensão de uma conexão abstrata — que expressa o nexo essencial do fenômeno — para, progressivamente, reconstruir mentalmente a totalidade concreta, compreendida agora como uma síntese rica de múltiplas determinações. Assim, o concreto não é tomado como ponto de partida, como ocorre no pensamento empírico, mas como um ponto de chegada, resultante de um processo de mediação teórica, no qual se revela a essência do objeto, superando sua aparência externa.

A particularidade da contradição também merece atenção, uma vez que cada fenômeno se caracteriza por movimentos tanto externos quanto internos, os quais o distinguem qualitativamente dos demais. Como destaca Tse-Tung (2009, p. 39), "a contradição é a base das formas simples do movimento (por exemplo, o movimento mecânico) e, com ainda mais razão, das formas complexas do movimento". Nesse sentido, enquanto os movimentos externos expressam as relações do objeto com outros objetos e fenômenos, é o movimento interno — resultante das contradições imanentes ao próprio fenômeno — que fundamenta e explica seu desenvolvimento e transformação. Compreender o movimento interno, portanto, é apreender a lógica que estrutura o desenvolvimento dos fenômenos particulares, revelando os nexos essenciais que não são imediatamente acessíveis à percepção sensível. Assim,

> Se a simples mudança mecânica de lugar contém já em si mesma uma contradição, com maior razão ainda hão de contê-la as formas superiores de movimento da matéria e, muito particularmente, a vida orgânica o seu desenvolvimento… a vida, antes de tudo, consiste justamente no fato de um ser, em cada instante, ser o mesmo e, não obstante, um outro também. Assim, a vida é igualmente uma contradição que, existindo nas próprias coisas e processos, surge e se resolve constantemente. E desde que a contradição cessa a vida cessa, a morte intervém. Do mesmo modo, nós vimos que, no domínio do pensamento, não podemos igualmente escapar às contradições e que, por exemplo, a contradição entre a faculdade humana de conhecer, interiormente infinita, e a sua existência real nos homens, que são todos limitados externamente e no pensamento, se resolve na série de gerações humanas, série que, para nós, pelo menos praticamente, não tem fim no movimento do progresso sem fim". (Tse-Tung, 2009, p. 39)

O Materialismo Histórico-Dialético possibilita compreender que, embora os discursos dogmáticos frequentemente neguem a existência da contradição, esta constitui a essência dos fenômenos, sendo condição ontológica de seu desenvolvimento. Nesse sentido, Vigotski (2001, p. 195), observa que “no pseudoconceito, como na forma concreta mais difundida de pensamento por complexos na criança, existe uma contradição interna que já se esboça em sua própria denominação”. Tal contradição, embora se manifeste como um entrave para a transição ao pensamento conceitual, desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento da criança, uma vez que revela a dinâmica dialética presente na própria formação dos conceitos. Portanto, a contradição não é um obstáculo externo, mas um motor interno do desenvolvimento, expressando os movimentos de superação que caracterizam o processo de formação das funções psicológicas superiores.

Cabe destacar que, segundo Davidov (1988), o pensamento teórico se caracteriza pela utilização de símbolos como mediação para apreender a essência dos elementos sensoriais e suas determinações universais. Nesse processo, a particularidade é tomada como mediação para a atividade do sujeito, permitindo-lhe acessar e compreender as determinações gerais presentes no fenômeno. Ao estabelecer conexões entre as particularidades e suas determinações universais, o sujeito amplia sua compreensão da realidade, transcendendo a aparência imediata e reconstituindo mentalmente os nexos internos que fundamentam o objeto.

Assim, Davidov (1988, p. 131) define o pensamento teórico como “a área dos fenômenos objetivamente inter-relacionados, que conformam uma totalidade integral, sem a qual, e fora da qual, esses fenômenos só podem ser objeto de exame empírico”. Dessa maneira, a constituição do pensamento teórico permite que o indivíduo compreenda os fenômenos não como elementos isolados, mas como partes de uma totalidade orgânica, na qual as relações internas e os nexos essenciais são fundamentais para apreender sua essência, seu desenvolvimento e seu movimento.

Assim, a contradição assume um papel central, evidenciando a necessidade de transpor a ideia de que o movimento se origina exclusivamente de causas externas. Embora essas causas definam mudanças quantitativas e mecânicas, elas não são descartadas pela dialética materialista. Pelo contrário, elas "constituem as causas das modificações e operam por meio das causas internas" (Tse-Tung, 2009, p. 36).

Nesse sentido, o método de análise de Marx, que vai do simples ao complexo, permite compreender que a contradição interna constitui a base do desenvolvimento dos fenômenos, "em todos os fenómenos, a interdependência e a luta dos aspectos contrários que lhes são próprios determinam a sua vida e animam o seu desenvolvimento. Não há fenómeno que não contenha contradição. Sem contradições o mundo não existiria" (Tse-Tung, 2009, p. 39). Assim:

> a lógica dialética estuda e descreve as formas historicamente significativas e universais da atividade prática e de pensamento das pessoas, as quais estão na base do desenvolvimento de toda a cultura material e espiritual [e intelectual] da sociedade. A dialética aponta as fontes históricas da atividade mental do homem [significando pensamento] e as categorias lógicas responsáveis pelo funcionamento produtivo da atividade. É nesta área que podemos encontrar **os critérios para os conceitos de "prática" e "pensamento" e a caracterização precisa de conceitos psicológicos amplamente aplicáveis, tais como: "contemplação viva, idéia, "o geral e o singular", "o abstrato" e "o concreto"**, etc. (A pesquisa principal realizada atualmente vem pondo a descoberto (revelando) o conteúdo destes conceitos) (Davidov, 1988, p. 24 *grifo nosso*)

O desenvolvimento do conhecimento tem início na apreensão da aparência sensível dos fenômenos particulares, estágio que Tse-Tung (2009) denomina como grau da percepção sensível do conhecimento. Contudo, a resolução efetiva dos problemas práticos só se torna possível quando o sujeito ultrapassa esse nível inicial e aprofunda sua compreensão, apreendendo as determinações internas e a essência do fenômeno. Ademais,

> pode-se assinalar a seguinte função principal da generalização conceitual: no processo de estudo e de atividade prática, o homem utiliza diversas regras de ação. A condição para a aplicação da regra à situação concreta ou ao objeto único é sua referência prévia a uma determinada classe comum. Por isso é necessário saber "ver" este comum em cada caso concreto e único. O meio mais eficaz, que está na base de dita aptidão, são os sistemas de generalizações conceituais que possibilitam separar os traços identificadores precisos e unívocos de umas ou outras classes gerais de situações ou objetos. (Davidov, 1988, p. 106).

A partir da repetição dos fenômenos que ocorrem na prática social, emergem na consciência os conceitos. No desenvolvimento do pensamento, o conhecimento deixa de refletir as ligações externas, e começa a refletir as ligações internas, ou seja, forma-se o conceito na sua essência. Os conceitos possibilitam ao ser humano produzir deduções, formando o grau do conhecimento racional, assim há um salto qualitativo da sensação para o pensamento. O conhecimento adquirido, então é o conhecimento lógico que, por meio do conhecimento de suas relações internas, consegue reconhecer "a sua essência e a ligação interna dos fenómenos, eleva-se até ao ponto de evidenciar as contradições internas do mundo objetivo e, por isso mesmo, pode chegar a dominar o desenvolvimento desse mundo na sua integridade, com as suas ligações gerais internas" (Tse-Tung, 2009, p. 16).

Se todo movimento se compõe de contradições específicas, cuja essência distingue um fenômeno de outro e constitui a base da diversidade dos fenômenos, “o pensamento teórico e o conceito devem reunir as coisas dessemelhantes, multifacetadas, não coincidentes e identificar seu peso específico nesse todo” (Davidov, 1988, p. 132). Cada essência se determina por suas próprias contradições, que se expressam tanto na natureza quanto no desenvolvimento social e no pensamento. Nesse sentido, destaca-se a importância de compreender o movimento lógico-histórico do conceito, que reside na particularidade do fenômeno. É por meio do movimento dialético das contradições — na unidade dos contrários, na negação da negação e na transformação qualitativa — que se constitui a essência dos fenômenos, a qual está em permanente processo de mudança e desenvolvimento.

Então,

> o desenvolvimento do conhecimento humano representa sempre um movimento em espiral e (se se observa rigorosamente o método científico) cada ciclo pode elevar o conhecimento a um grau superior e incessantemente mais profundo. O erro de nossos dogmáticos a esse respeito consiste no seguinte: por um lado, não compreendem que só depois de se ter estudado o que há de específico na contradição e se ter tomado conhecimento da essência específica dos fenómenos individualizados, se pode atingir o pleno conhecimento da universalidade da contradição e da essência comum destes; por outro lado, não compreendem que, depois de se ter tomado conhecimento da essência comum dos fenómenos, há que ir mais adiante e estudar os fenómenos concretos que não foram profundamente estudados ou que aparecem pela primeira vez. (Tse-Tung, 2009, p. 44 - 45)

Portanto, cada contradição específica possui diferenças qualitativas que a distinguem das demais e, por isso, cada uma demanda formas particulares de superação. A compreensão de cada contradição se dá pela análise dos seus próprios aspectos contraditórios. Assim, os fenômenos particulares são constituídos por essências específicas, que, quando articuladas dialeticamente, conformam a essência geral de um fenômeno. Nesse processo, compreender a generalização exige apreender as determinações particulares e específicas, o que só é possível pela análise do movimento interno dos fenômenos, ou seja, pela apreensão dos nexos essenciais que estruturam sua totalidade. Nesse sentido,

> Para conhecer realmente um Objeto, é necessário abarcar e estudar todos os seus aspectos, todas as suas ligações e "mediações". Nós nunca o conseguiremos de maneira integral, mas a necessidade de considerar todos os aspectos prevenirá dos erros e da rigidez".
> […]
> Ser superficial é não levar em conta as características da contradição no seu conjunto, nem as características de cada um dos seus aspectos, negar a necessidade de ir ao fundo dos fenómenos e estudar minuciosamente as características das respectivas contradições, contentar-se em ver de longe e, após uma observação aproximativa de alguns traços superficiais dessas contradições.
> […]
> Devemos ter em vista não apenas as particularidades do movimento dos aspectos contraditórios considerados na sua ligação mútua e nas condições de cada um deles no decorrer do processo geral de desenvolvimento de um fenómeno, mas também as particularidades próprias a cada etapa do processo de desenvolvimento. Nem a contradição fundamental, no processo de desenvolvimento de um fenómeno, nem a essência desse processo, determinada por essa contradição, desaparecem antes da conclusão do processo. Contudo, as condições diferem geralmente umas das outras, em cada etapa do longo processo de desenvolvimento de um fenómeno. (Tse-Tung, 2009, p. 49-50)

Assim, à luz dos fundamentos marxistas sobre o desenvolvimento do pensamento, cabe ao professor, no contexto escolar, organizar o ensino de modo que realize o movimento dialético que parte da prática — direta ou indireta — para, a partir dela, compreender as necessidades concretas da sociedade e trazê-las para a escola. Esse movimento deve ser conduzido considerando os níveis de desenvolvimento dos estudantes, de modo a criar condições para que comecem a elaborar processos de significação, por meio de situações que os provoquem a refletir, estabelecer relações e captar a essência dos objetos de estudo, promovendo, assim, a formação do pensamento teórico. A recorrência desse movimento permite que os sujeitos, após inicialmente identificarem os aspectos externos e aparentes dos fenômenos, avancem na apreensão das contradições internas que os estruturam. A partir desse entendimento, torna-se necessário o retorno à prática, na qual os estudantes podem confrontar e validar a teoria elaborada, aplicando-a na resolução de problemas concretos e na transformação da realidade. Dessa forma, a lógica do materialismo histórico-dialético orienta o planejamento docente, fundamentando a formação dos conceitos científicos a partir da mediação prática, como instrumento para promover o desenvolvimento humano e a transformação social.

Por fim, com base nas discussões desenvolvidas até aqui acerca do desenvolvimento do pensamento humano, no capítulo seguinte, discutir-se-á a constituição da aritmética e o processo de sua generalização como via para a ascensão ao pensamento algébrico.

3 O DESENVOLVIMENTO LÓGICO HISTÓRICO DA ÁLGEBRA E A CONSTITUIÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Nesta seção, buscamos apresentar elementos que possibilitem refletir sobre a álgebra como uma das mais antigas e fundamentais áreas da matemática, cuja constituição expressa, dialeticamente, o desenvolvimento histórico do pensamento humano na busca por representar, simbolicamente, as relações e os processos presentes na realidade. A álgebra, ao operar com generalizações e abstrações, eleva o pensamento matemático a um patamar superior, uma vez que possibilita compreender as operações matemáticas de forma não restrita à manipulação de números, promovendo a libertação do pensamento das limitações do cálculo aritmético.

Desde os primeiros sistemas de contagem até a formalização do pensamento algébrico, a humanidade desenvolveu instrumentos conceituais e operacionais que possibilitaram não apenas a resolução de problemas concretos, mas, sobretudo, a generalização de princípios matemáticos. Assim, este estudo propõe uma análise do desenvolvimento histórico-lógico da álgebra e da constituição do pensamento algébrico, considerando as mediações culturais, os avanços teóricos e as transformações conceituais produzidas historicamente pelas diferentes civilizações ao longo dos séculos.

Desse modo, esta seção tem por objetivo discutir o desenvolvimento histórico dos números, incluindo a introdução do zero e suas relações com os processos de generalização da aritmética, bem como as contribuições culturais das civilizações antigas na constituição do pensamento matemático. Ademais, serão analisados os impactos das transformações histórico-sociais na constituição do pensamento algébrico, com ênfase na transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica, destacando, por fim, as implicações desse percurso histórico-lógico para a prática pedagógica na formação do pensamento teórico.

3.1 A Origem dos Números e a Transição para o Pensamento Algébrico

Dentre as necessidades que emergem no desenvolvimento histórico da humanidade, destaca-se a de quantificar os elementos presentes na vida social. À medida que a organização social se complexificava, novas demandas impulsionaram a criação de métodos de contagem. Esse processo, historicamente constituído, originou os números naturais, desenvolvidos como resposta às necessidades humanas em constante transformação.

Segundo Caraça (1984, p. 4), “o maior ou menor conhecimento dos números está ligado com as condições da vida econômica desses povos”. Inicialmente, a contagem se restringia a pequenos conjuntos de objetos, e o termo "dígito" reflete essa prática, já que deriva de "dedo", uma das primeiras ferramentas utilizadas para contar.

Ifrah (1985) ressalta que nem sempre o ser humano contou. O tempo histórico que marca o início da contagem permanece encoberto sob o véu da antiguidade. Naquele período, os indivíduos, por não compreenderem os números em sua forma abstrata, os percebiam apenas de maneira sensorial, como ocorre com a percepção de odores ou sons. Distinguiam apenas entre unidade, par e pluralidade, o que reflete uma capacidade elementar de percepção numérica. Caso o desenvolvimento humano tivesse permanecido nesse estágio, seríamos hoje semelhantes a determinados animais, que não são capazes de realizar abstrações conceituais sobre quantidades.

O desenvolvimento da capacidade humana de realizar abstrações, abriu precedentes não apenas para a criação de símbolos para representar agrupamentos de elementos, mas proporcionou também a ascensão de sistemas numéricos cada vez mais notáveis. No decorrer desse processo, “a criação de um símbolo para representar o nada constituiu um dos actos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão” (Caraça, 1984, p. 6).

3.1.1 A Origem dos Números e o Marco do Zero

Enquanto o homem pré-histórico iniciava sua contagem pelo número um, a concepção do zero só emergiria mais tarde. Caraça (1984) afirma que a representação numérica do zero surgiu no início da era cristã para atender às demandas sociais relacionadas à contagem, ao comércio e aos registros escritos. Historicamente, o zero não é considerado um número natural, mas um marco inicial para a sucessão dos números inteiros. Descrito como uma "invenção difícil e genial", o zero abriu caminho para o desenvolvimento da álgebra moderna e de outros ramos da matemática.

> O zero foi uma “invenção difícil e genial” **e abriu “caminho para o desenvolvimento da álgebra moderna e de todos os ramos da matemática a partir** do Renascimento europeu”. Porém, “a álgebra não teria conhecido um tal avanço se esta generalização do número não tivesse sido acompanhada por uma descoberta igualmente fundamental, realizada em 1591 por François Viete e aperfeiçoada em 1637 por René Descartes: a notação simbólica literal”. A invenção da notação simbólica literal “abriu uma era totalmente nova na história da matemática, assim como a descoberta do princípio de posição e do zero criou a aritmética moderna”. (Sousa, 2004, p. 105, grifo nosso)

Ifrah (1985), ressalta ainda que ao idealizar o zero, e ao utilizar estritamente o princípio de posição dos algarismos, cuja base seja independente de qualquer percepção direta, os estudiosos da Índia foram os precursores do aperfeiçoamento da escrita, pois "no século VI, ainda lhes restava um último avanço a fazer: o conceito eminentemente abstrato do zero e fazer dele um número como os outros" (Ifrah, 1985, p. 293).

Até então, conforme Ifrah (1985), as pessoas não tinham o conhecimento do "zero" como nada, pois até o momento o "zero" significava apenas um espaço vazio. Entretanto, os matemáticos da Índia em menos de meio século, elaboraram a concepção de "vazio" ou "nada", como hoje atribuímos o sentido de "quantidade nula" ou "número zero" (Ifrah, 1985, p. 293).

> Graças a isto, o matemático e astrónomo Brahmagupta pôde ensinar, numa obra do ano de 628, o modo de efetuar simplesmente as seis operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, elevação a potências e extração de raízes), em relação ao que foi denominado "os bens", "as dívidas" e "o nada", isto é, em termos modernos, os números positivos, negativos ou nulos. A álgebra moderna acabava de nascer, e o sábio descobrira uma de suas regras fundamentais: uma dívida subtraída do nada torna-se um bem, e um bem subtraído do nada torna-se uma dívida (o oposto de um número positivo é negativo, e inversamente). (Ifrah, 1985, p. 293).

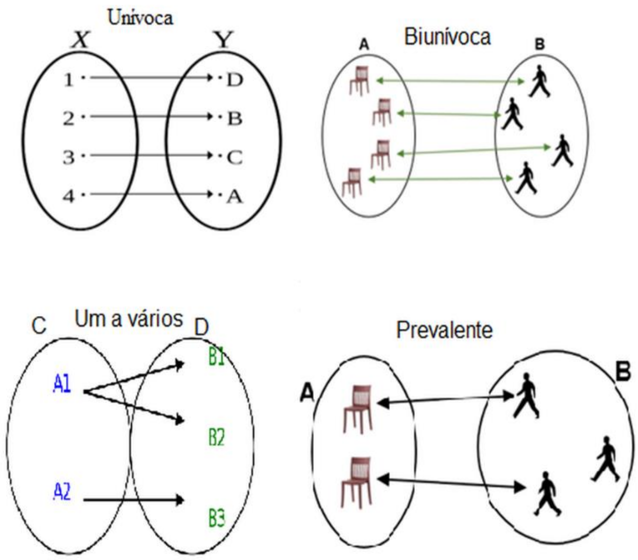
Dessa maneira, consolidava-se a constituição da ciência matemática, fortemente marcada pela invenção do zero e pelas singularidades do sistema de numeração, a palavra matemática, consequentemente, passou a remeter a ideia de número, onde "certamente a descoberta do número puro, como abstração do caso particular e firmado de um modo conceitual, é o primeiro feito da humanidade — o primeiro e, quem sabe, talvez o maior" (Kalrson, 1961, p. 6).

Ifrah (1985), explicita ainda que, a exposição após reunir duas percepções complexas, como a de ausência e a de nulidade, de natureza supostamente diferentes, obteve uma descoberta maravilhosa, pois sua influência não se limitou a aritmética facilitando o percurso para a ideia da generalização do número, mas também proporcionou o desenvolvimento da álgebra e de todos os ramos da matemática, inclusive as ciências e as técnicas atuais.

3.1.2 A Origem da Contagem e a Constituição do Pensamento Matemático

A constituição da contagem, como prática cultural, emerge da necessidade dos indivíduos de estabelecer relações entre os elementos do mundo concreto e suas representações mentais. Esse processo manifesta-se quando o sujeito associa sequencialmente cada objeto a um número, por exemplo, ao apontar para um elemento e dizer "um", para outro e dizer "dois" e assim sucessivamente. Esse mecanismo, que organiza uma correspondência ordenada entre elementos, é conhecido como *"lei da correspondência"*, na qual cada item do conjunto observado é emparelhado a um signo numérico. Esse princípio de correspondência é fundamental para a estruturação do pensamento matemático e pode se manifestar de diferentes formas: unívoca (um para um), biunívoca (relação dupla entre dois conjuntos), um para vários (um elemento associado a mais de um) ou prevalente (quando uma relação se impõe sobre as demais). Essas formas de correspondência refletem os modos como os sujeitos, historicamente, foram desenvolvendo sistemas de contagem e de representação numérica, mediados pelas necessidades práticas de suas atividades sociais., conforme os respectivos exemplos:

Imagem 2 - Classificação das correspondências



Fonte: A autora

Tal associação mental, historicamente desenvolvida, é conhecida como *"lei da correspondência"*, princípio pelo qual, para cada elemento de um conjunto (denominado antecedente), associa-se um e apenas um elemento de outro conjunto (consequente). Essa relação, quando ocorre de maneira que todos os elementos do conjunto inicial sejam emparelhados a elementos do conjunto correspondente, caracteriza-se como uma *correspondência completa*. Trata-se de um processo cognitivo fundamental para a constituição da contagem, no qual o sujeito organiza mentalmente as relações quantitativas presentes no meio, possibilitando a emergência do pensamento matemático. Esse princípio não surge de forma espontânea, mas como resultado da mediação cultural, no interior das atividades práticas humanas.

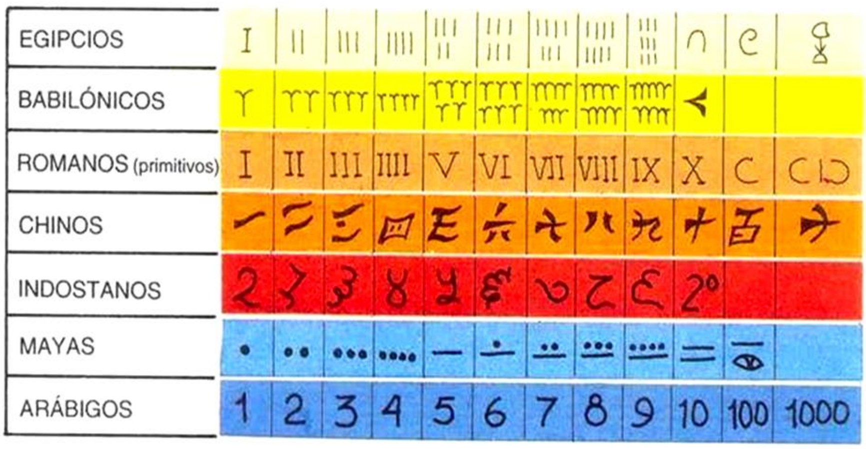
A correspondência *um a um*, também denominada *biunívoca*, estabelece que para cada elemento de um conjunto há exatamente um único elemento correspondente em outro conjunto, e vice-versa. Essa relação recíproca permite determinar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, sendo particularmente evidente e aplicável quando lidamos com conjuntos finitos.

No entanto, ao considerarmos conjuntos extensos ou infinitos, o conceito de “mesma quantidade” não pode ser entendido nos mesmos termos utilizados para os conjuntos finitos. Nesse contexto, a equivalência entre conjuntos infinitos é definida pela possibilidade de se estabelecer uma correspondência biunívoca entre eles — princípio que fundamenta a teoria dos conjuntos infinitos desenvolvida por Georg Cantor.

Por outro lado, quando um dos conjuntos não possui elementos suficientes para estabelecer essa correspondência completa — isto é, quando não é possível associar cada elemento de um conjunto a um elemento do outro —, considera-se que a relação entre eles é desigual. Nesses casos, o conjunto que apresenta maior quantidade de elementos é denominado *prevalente* em relação ao outro. Esse conceito se aplica com clareza aos conjuntos finitos, uma vez que, no contexto dos conjuntos infinitos, a noção de prevalência demanda outros referenciais teóricos e metodológicos da matemática, os quais não serão objeto de aprofundamento nesta pesquisa.

A constituição dos processos numéricos esteve diretamente vinculada às necessidades econômicas e sociais das primeiras organizações humanas. Antes da consolidação dos sistemas de numeração que utilizamos atualmente, as sociedades desenvolveram diferentes estratégias para sistematizar a contagem, como ilustrado na Imagem 3.

Imagem 3 - A evolução histórica das formas de escrita dos algarismos



Fonte: Matemática na web (2022).

De acordo com Caraça (1984, p. 10), "o homem tem a tendência de generalizar e estender todas as aquisições do pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações, pela exploração metódica de todas as suas consequências". Essa formulação está relacionada ao que se denomina princípio de extensão, que foi determinante para que a humanidade estabelecesse seus primeiros contatos com a noção de infinito. Esse princípio expressa, de forma objetiva, a capacidade humana de abstrair e generalizar regularidades presentes nos fenômenos, o que possibilitou compreender que, a qualquer número, sempre é possível adicionar uma unidade, originando outro imediatamente maior. Essa concepção histórica do infinito pode ser representada pela sucessão: 0, 1, 2, 3, …, n, n + 1, …, evidenciando sua natureza ilimitada. Nesse sentido, Caraça (1951, p. 11) sintetiza essa compreensão em três afirmações fundamentais: "a) a sucessão de números inteiros é ilimitada; b) dado um número inteiro, por maior que seja, existe sempre outro maior; c) há uma infinidade de números inteiros". Essa regularidade, historicamente construída, não apenas fundamenta o desenvolvimento da aritmética, mas também expressa um salto qualitativo no desenvolvimento do pensamento humano, ao permitir que este se mova da percepção concreta para a apreensão das relações abstratas que regem os fenômenos.

Dessa forma, à medida que o pensamento humano evoluiu, impulsionado pelas necessidades concretas da vida em sociedade, o desenvolvimento do princípio da correspondência possibilitou a constituição da capacidade de operar com quantidades. A sistematização dessas operações deu origem à aritmética, que se configura como um dos ramos mais antigos da matemática, voltado ao tratamento das quantidades e suas relações. As operações aritméticas, historicamente organizadas, são classificadas em três ordens — de primeiro, segundo e terceiro grau — e subdividem-se em operações diretas e inversas, conforme ilustrado na Imagem 4. Tal desenvolvimento não apenas responde às demandas práticas da organização social, mas também representa um salto qualitativo no desenvolvimento do pensamento, ao permitir ao sujeito abstrair, generalizar e operar simbolicamente com as relações numéricas.

Imagem 4 - Classificação das operações aritméticas

Graus	Diretas	Inversas
1º	Adição	Subtração
2º	Multiplicação	Divisão
3º	Potenciação	Radiciação Logaritmação

Fonte: Caraça (1984).

Diante das limitações impostas pelas operações inversas no desenvolvimento dos sistemas numéricos, torna-se necessário recorrer ao *princípio de extensão* como estratégia para superá-las. Esse princípio possibilita a criação de novos campos numéricos, tanto para atender às demandas práticas da vida social quanto para responder às exigências teóricas que emergem do desenvolvimento da ciência. Como afirma Caraça (1984, p. 28), tais extensões surgem para "pôr em evidência as necessidades de ordem prática ou teórica que, de cada vez, obrigaram a uma nova extensão". Trata-se, portanto, de um movimento histórico-dialético, no qual as contradições presentes na prática impulsionam a formulação de novas elaborações conceituais e operatórias, expandindo as fronteiras do pensamento matemático e favorecendo a generalização das operações.

De acordo com Sousa (2004), "o homem só conhece a realidade à medida que cria a realidade humana e se comporta, antes de tudo, como ser prático". Isso significa que a produção do conhecimento não decorre de uma contemplação passiva, mas da relação ativa e transformadora dos sujeitos com a realidade objetiva. Assim como ocorreu no desenvolvimento dos números, o pensamento algébrico emerge das necessidades práticas, das contradições da vida material e das demandas postas pelo processo de produção e reprodução social. "Tal pensamento também se apresenta na práxis humana. Enquanto busca a verdade, erra e acerta inúmeras vezes, ainda que, em determinados momentos, tenha uma certa aparência de permanência" (Sousa, 2004, p. 76). Isso evidencia que o desenvolvimento do conhecimento é um processo histórico, dinâmico e contraditório.

Lins e Gimenez (2001) destacam que os conceitos aritméticos estão restritos às relações quantitativas diretas, sem necessariamente abarcar referenciais conceituais que favoreçam a ampliação e a generalização do pensamento matemático. Esse limite da aritmética torna evidente a necessidade de transição para o pensamento algébrico, que, ao incorporar variáveis, operadores e relações estruturais, possibilita representar não apenas quantidades, mas também padrões, regularidades e leis gerais que regem os fenômenos matemáticos. Trata-se, portanto, de uma transformação na forma de generalização, que possibilita ao sujeito apreender as determinações essenciais dos conceitos e compreender os fenômenos para além de suas manifestações empíricas e imediatas.

Na reflexão de Sousa (2004), ao analisarmos o movimento da lógica, podemos compreendê-la sob uma perspectiva formal, isto é, centrada na relação entre os elementos isolados da linguagem e suas estruturas fixas. No entanto, ao adotarmos uma perspectiva histórico-dialética, a lógica não se limita às formas externas, mas passa a expressar os movimentos internos, as contradições e os nexos que fundamentam a transformação dos fenômenos. Nessa direção, Caraça (1984), ao tratar das propriedades das operações, recorre à linguagem algébrica como meio de explicitar a generalização das operações aritméticas.

As propriedades do primeiro grupo descrevem como os resultados se modificam de acordo com a alteração dos dados, refletindo relações diretas entre os elementos. Por sua vez, as propriedades do segundo grupo expressam regularidades mais gerais, válidas em qualquer situação, razão pela qual são denominadas propriedades formais. Essas propriedades constituem a base do cálculo algébrico, sendo aplicadas tanto às operações aritméticas quanto às algébricas, especialmente no que se refere às propriedades da adição e da multiplicação. Desse modo, as propriedades formais das sete operações estruturam o que se denomina conjunto das leis operatórias do cálculo. O Quadro 4 apresenta as operações diretas, segundo Caraça (1984),

Quadro 4 - Operações diretas

Adição	A operação da adição é a base para todas as outras, inclusive a noção de infinito.		Para somar **A + B**. A→ chama-se **adicionando** /age de forma **passiva** na operação. E B→ chama-se **adicionador** /tem papel **ativo**. A + B→ Parcelas.
1º Grupo:	1ª – unicidade	a = a', b = b' → a + b = a' + b'	
	2ª – monotónica	b > b' -> a + b → a + b'	
	3ª – modular	a + 0 = a	
	4ª – redução	a + c = b + c → a = b.	
2º Grupo:	5ª – comutativa	a + b = b + a	
	6ª – associativa	a + (b + c) = (a + b) + c [1].	
Multiplicação	A multiplicação é definida pela soma de parcelas iguais		**Multiplicando→** é o 1º número. É passivo. **multiplicador→**é o o 2º número. Age de forma ativa. Os dois termos, são chamados de fatores e o resultado é o produto. 2 → Fator x 5 → Fator 10 → Produto
1º Grupo:	1ª – unicidade a = a', b = b' → a . b = a' . b'		
	2ª – monotónica	b > b' -> a . b → a . b'	
	3ª – anulamento	a . 0 = 0; reciprocamente, se o produto é nulo, de anular-se, pelo menos, um dos fatores.	
	4ª – modular	a . 1 = a; a . b = a → b = 1.	
	5ª – redução	c ≠ 0, a . c = b . c → a = b.	
2º Grupo:	6ª – comutativa	a . b = b . a	
	7ª – associativa	a . (b . c) = (a . b) .c	
	8ª – distributiva	a . (b + c) = a . b + a . c [1].	
Potenciação	A potência é o produto de fatores iguais.		A potenciação é composta por: base/ papel passivo, o expoente/ papel ativo. Representa o número de vezes que cada fator da base irá se repetir. expoente $3^2 = 9$ base potência
1º Grupo:	1ª – unicidade a = b, n = m → $a^n = b^m$		
	2ª – monotónica	$\begin{cases} n > m, a > 1 \rightarrow a^n > a^m \\ a > b \rightarrow a^n > b^m \end{cases}$	
	3ª –	$1^n = 1, 0^n = 0$	
2º Grupo:	4ª – multiplicativa	$a^m . a^n = a^{m+n}$	
	5ª – distributiva	$(a .b)^n = a^n . b^n$	
	6ª –	$(a^m)^n = a^{m.n}$	

Fonte: Caraça (1984)

Segue também o quadro 5 contendo a demonstração das operações inversas.

Quadro 5 - Operações inversas

Subtração	É a propriedade inversa da adição	A subtração é definida pela operação que se determina um número c que, somado a **B**, dá **A**: ***a - b = c←c + b = a.*** Na Subtração, o diminuendo deve ser sempre maior que o subtrativo ou diminuidor.
1º Grupo:	1ª – unicidade a = a', b = b' → a - b = a' - b' 2ª - monotónica $\begin{cases} a > a' \rightarrow a - b > a' - b' \\ b > b' \rightarrow a - b < a' - b' \end{cases}$ 3ª – modular a - 0 = a; a - b = a → b = 0.	
2º Grupo:	4ª – .... a + (b - c) = (a + b) - c 5ª – .... a - (b + c) = (a - b) - c 6ª – .... a - (b - c) = (a + c) - b 7ª – .... (a + c) – (b + c) = a - b 8ª – .... (a - c) – (b - c) = a – b.	
Divisão	Para que a divisão com números inteiros seja possível, é preciso que o dividendo seja múltiplo do divisor e que o divisor seja diferente de zero.	Os termos da divisão são: O **divisor**, o **dividendo** e o **quociente**. Dessa forma, se formos realizar a divisão de números que não são múltiplos, como no exemplo dado 7 ÷ 3, aparecera um quarto termo que se chama resto. Assim é possível verificar a operação fazendo: ***a = b.c + r***, onde **a** é o *dividendo*, **b** o *divisor*, **c** o *quociente* e **r** o *resto*.
1º Grupo:	1ª – unicidade a = a', b = b' → a : b = a' : b' 2ª – monotónica $\begin{cases} a > a' \rightarrow a : b > a' : b' \\ b > b' \rightarrow a : b < a' : b' \end{cases}$ 3ª – modular a : 1 = a 4ª – ....b ≠ 0, → 0 : b = 0.	
2º Grupo:	5ª – distributiva $\begin{cases} (a + b) : c = a : b + b : c \\ (a - b) : c = a : c - b : c \end{cases}$ 6ª – $\begin{cases} (a : b).\ c = a : (b : c) + b : c = (c : b).a \\ (a : b) : c = a : (b\ .\ c) = (a : c) : b \end{cases}$ 7ª – ...$\begin{cases} (a : b) = (a\ .\ c) : (b\ .\ c) \\ (a : b) = (a : c) : (b : c) \end{cases}$ 8ª – ...(a . c) : (b . d) = (a : b) . (c : d) Conforme a 4ª propriedade, temos: $a^m : a^n = a^{m-n}$ Conforme a 5ª propriedade, temos: $(a : b)^n = a^n : b^n$	
Radiciação	Para que a radiciação seja possível no conjunto dos números inteiros é preciso que a seja uma potência do expoente n.	Definição: Caraça (1951, p. 23) "tem-se que a radiciação é a operação pela qual, dado um número a e um número n, se determina um novo número b = $\sqrt[n]{a}$, tal que seja a = b^n:
1º Grupo:	1ª – unicidade a = b, n = m → $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{b}$ 2ª – monotónica $\begin{cases} a > b \rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{b} \\ n > m \rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a} \end{cases}$ 3ª – .... $\sqrt[n]{1} = 1$, $\sqrt[n]{0} = 0$	
2º Grupo:	4ª – distributiva $\sqrt[n]{a\ .\ b} = \sqrt[n]{a}\ .\ mb$ 5ª – .... $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b}$ 6ª – .... $\begin{cases} (a : b) = (a\ .\ c) : (b\ .\ c) \\ (a : b) = (a : c) : (b : c) \end{cases}$	
Logaritmação	Caraça (1951, p. 24) "a logaritmação é a operação por meio da qual, dado um número a e um número b>1, se determina um terceiro número n = $\log_b a$ tal que seja a = b^{n}".	Essa operação só é possível quando a é uma potência de base b, ou seja, $\log_7 49$, daí como 49 = 7^2, mas não $\log_8 20$, gerando assim uma impossibilidade.
1º Grupo:	1ª – unicidade a = a', b = b' → = $\log_b a = \log_b a'$ 2ª – monotónica a >a' → $\log_b a > \log_b a'$ 3ª – .... $\log_b a = 1$.	
2º Grupo:	4ª – distributiva $\log_b(a\ .\ c) = \log_b a + \log_b c$ 5ª – .... $\log_b(a : c) = \log_b a - \log_b c$ 6ª – .... $\log_b(a^n) = n\ .\ \log_b a$	

Fonte: Caraça (1984).

As propriedades do primeiro grupo descrevem como os resultados se modificam em função das alterações nos dados, refletindo relações diretas, imediatas e concretas. Já as propriedades do segundo grupo expressam regularidades gerais e abstratas, aplicáveis a qualquer situação, razão pela qual são denominadas propriedades formais. Estas propriedades constituem a base do cálculo algébrico, pois operam como instrumentos de generalização das operações matemáticas, sendo aplicadas tanto na aritmética quanto na álgebra, com destaque para as propriedades da adição e da multiplicação. Desse modo, as propriedades formais estruturam o conjunto das leis operatórias do cálculo, as quais possibilitam o desenvolvimento do pensamento teórico, na medida em que permitem ao sujeito operar não apenas sobre objetos concretos, mas sobre relações e estruturas abstratas.

Ifrah (1985), ressalta que a humanidade se defrontou por milênios com sistemas numéricos improdutivos, "desprovidos de um símbolo que representasse o "nulo" ou o "nada". Durante muito tempo, ela viveu também na impossibilidade de conceber os números negativos" (Ifrah, 1985, p. 337).

Caraça (1984) explica que a busca por caminhos mais simples e eficientes para realizar as operações matemáticas, sem que se perca a validade das propriedades, fundamenta-se no *princípio da permanência das leis formais,* também conhecido como *Princípio de Hankel* ou *princípio da economia do pensamento*. Este princípio reflete a tendência humana, historicamente desenvolvida, de generalizar procedimentos operatórios, contribuindo para a constituição de sistemas conceituais cada vez mais abstratos, sistemáticos e economicamente organizados do ponto de vista cognitivo.

Diante das discussões realizadas até aqui, acerca da constituição dos números naturais e inteiros e de suas inter-relações com o desenvolvimento da álgebra, a próxima seção abordará o surgimento dos números racionais. Assim como os números naturais e inteiros, os racionais emergem como resposta às demandas concretas e históricas da atividade humana, refletindo a dialética entre as necessidades práticas e a elaboração teórica dos conceitos matemáticos.

3.2 A constituição dos números racionais – A necessidade de medir

A necessidade de medir, de acordo com Caraça (1984), emerge como um elemento fundamental, especialmente nas atividades ligadas às terras, às propriedades e ao controle da produção, uma vez que o cálculo das áreas estava diretamente relacionado à organização social, econômica e à cobrança de tributos. Karlson (1961) acrescenta que os povos da Antiguidade já praticavam a medição e a subdivisão, fracionando suas caças, medindo e comparando o comprimento de peles, além de fabricar utensílios como vasos, evidenciando, assim, que a prática de medir e subdividir precede a formalização da matemática.

Segundo Caraça (1984), a subdivisão de um todo em partes iguais pode ser expressa por meio de uma razão, ou seja, pela comparação entre duas grandezas sem recorrer a uma unidade externa. No entanto, essa representação enfrenta limitações quando o numerador e o denominador não possuem divisores comuns, o que impossibilita expressar a medida dentro do campo dos números inteiros. Esse impasse evidencia a necessidade histórica de criar um novo conjunto numérico — os números racionais —, que surge como uma mediação para superar essa contradição, permitindo representar quaisquer subdivisões, independentemente da divisibilidade entre as partes.

Para que essa ampliação do sistema numérico se efetivasse, foi necessário que os novos números — os racionais — atendessem plenamente às condições impostas pelas práticas de medição, sem, contudo, perderem a capacidade de se reduzirem aos números inteiros sempre que a situação exigisse. Assim, o conjunto dos números racionais é composto tanto pelos números inteiros quanto pelos números fracionários, permitindo representar qualquer medida que resulte da divisão entre dois inteiros, desde que o divisor seja diferente de zero. Desse modo, os números racionais constituem uma generalização dos números inteiros, expandindo as possibilidades operatórias e representacionais da matemática.

No entanto, apesar de fundamentais, os números racionais não são suficientes para expressar todas as magnitudes encontradas na prática, especialmente aquelas que emergem das relações geométricas, como o cálculo da diagonal de um quadrado ou a medida de uma circunferência. Essa limitação se configura como a negação da completude desse conjunto, dando origem a uma nova mediação na história do pensamento matemático: o surgimento dos números irracionais, os quais ampliam ainda mais a capacidade de representação da realidade objetiva e das contradições nela presentes. Assim,

> Desde o século VI a.C., os matemáticos gregos, a começar por um certo Pitágoras, já tinham descoberto que a diagonal de um quadrado "não tem nenhuma medida comum" com o seu lado. De fato, tanto pela medida quanto pelo raciocínio, o comprimento de sua diagonal não corresponde a um número inteiro de metros. Ou seja, uma vez que tal é o seu comprimento matemático, a $\sqrt{2}$ é um número "incomensurável". Foi a descoberta do que hoje denominamos números irracionais", os que não são nem inteiros nem frações. (Ifrah, 1985, p. 329)

As discussões levantadas a partir das limitações encontradas nos campos numéricos ampliaram significativamente a compreensão do conceito de infinito. Nesse contexto, o matemático Richard Dedekind (1831-1916), ao formular, em 1872, o conceito de continuidade, apresentou a reta numérica como uma expressão ideal desse princípio. Para Dedekind, a continuidade da reta não reside na justaposição de pontos, mas na “conexão ininterrupta nas suas partes mais pequenas" (Caraça, 1984, p. 59), evidenciando que essa conexão deveria ser formalizada matematicamente, superando os limites impostos pelos números racionais.

Com o objetivo de superar as limitações do conjunto dos números racionais frente à irracionalidade, aplica-se o mesmo método que historicamente conduziu à criação dos números racionais: a negação da negação. Esse princípio dialético possibilita a constituição do conjunto dos números reais, definido como aquele que inclui todos os elementos capazes de separar duas classes de números racionais em qualquer corte possível. Se existir um número racional capaz de realizar essa separação, ele será o próprio número real associado ao corte. Caso contrário, quando tal número racional não existir, o número real resultante corresponderá a um número irracional (Caraça, 1984, p. 62).

Portanto, a negação da negação, como princípio metodológico, fundamenta o processo de ampliação dos sistemas numéricos. Este movimento, regido pelo princípio de extensão, assegura que as limitações internas de um conjunto sejam superadas mediante sua própria contradição. No caso dos números reais, esse princípio permite atender às exigências de medição e representação de todas as magnitudes, tanto racionais quanto irracionais.

Nesse contexto, o conceito de *corte,* introduzido por Richard Dedekind e descrito por Caraça (1984, p. 59), estabelece que "sempre que, numa reta, se tem uma repartição dos seus pontos em duas classes A e B satisfazendo às duas condições: 1º nenhum ponto escapa à repartição; 2º todo o ponto da classe A está à esquerda de todo ponto da classe B, diz-se que se tem um corte". Por meio desse princípio, constitui-se a noção de número real: quando existe um número racional capaz de realizar essa separação, ele é identificado como o próprio número real associado ao corte; quando tal número não existe no conjunto dos racionais, esse corte define um número irracional, que se estabelece como a representação da separação entre as duas classes.

O conceito de corte propiciou a constituição do conjunto dos números reais ao separar os racionais em duas classes distintas. Ademais, ao determinarmos um ponto P entre essas classes, esse ponto P, delimitará a separação entre as classes A e B, configurando o próprio número real associado ao corte. Assim, cada número real pode ser representado como um elemento que garante a divisão rigorosa dessas classes.

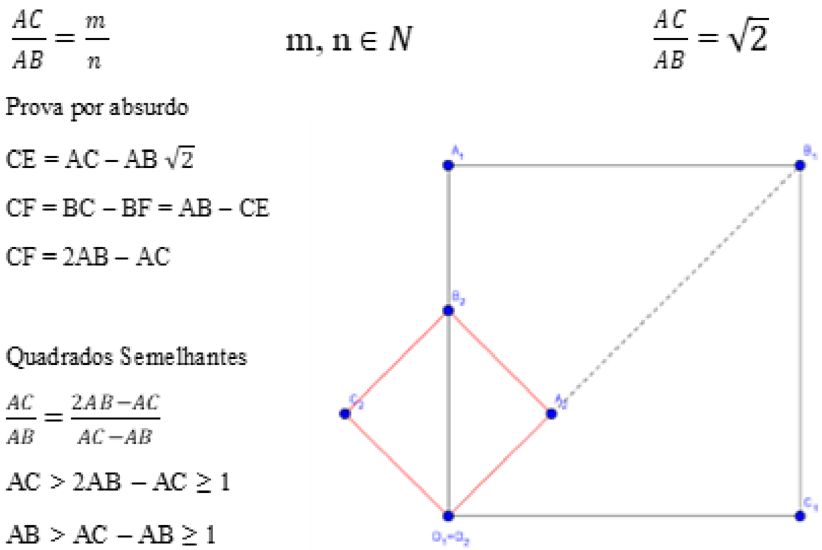
Dessa maneira, o conceito de corte possibilitou formalizar matematicamente a continuidade da reta, superando as limitações impostas pelos números racionais. Assim, o conjunto dos números reais se constitui pela integração dos racionais (naturais, inteiros e fracionários) e dos irracionais, formando um sistema numérico capaz de representar qualquer grandeza, seja ela mensurável ou resultante de relações matemáticas abstratas. Como destaca

Caraça (1984), cada ampliação do sistema numérico não surge de forma aleatória, mas é fruto da necessidade histórica de resolver contradições concretas impostas pela prática social, pelas demandas da produção material e pelos desafios intelectuais. Desse modo, o desenvolvimento dos números — naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais — reflete a trajetória da humanidade na busca por compreender, representar e transformar a realidade.

Segundo Ifrah (1985), a descoberta dos números irracionais gerou uma profunda perturbação na comunidade pitagórica, que atribuía aos números racionais a explicação e a regência da ordem universal. Esse achado abalou as bases da crença pitagórica de que toda a harmonia do cosmos poderia ser expressa exclusivamente por meio de proporções numéricas racionais. Desse modo, a aparente correspondência perfeita entre a aritmética e a geometria revelou-se insuficiente, evidenciando uma contradição até então encoberta, que desafiava as concepções matemáticas e filosóficas da época.

À luz da análise sobre o problema da medida desenvolvida por Caraça (1984), apresenta-se, a seguir, um exemplo clássico de incomensurabilidade: a tentativa de medir a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles, tomando como unidade de medida o comprimento de um de seus catetos.

Imagem 5 - Prova geométrica da incomensurabilidade do lado e a diagonal de um quadrado

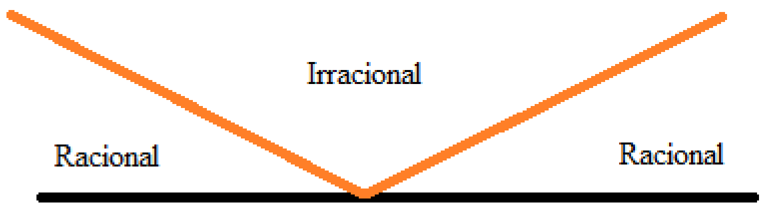


Fonte: Universidade de São Paulo: Portal de videoaulas.

Ríbnikov (1987, p. 111), observa que, com a aplicação recorrente de cálculos envolvendo números irracionais, a distinção entre os números racionais e irracionais torna-se cada vez menos evidente. Tal "barreira" inicial pode ser interpretada como a dificuldade histórica de integrar conceitos aparentemente contraditórios, como a racionalidade e a irracionalidade, em um sistema numérico coeso. Sob a perspectiva do materialismo histórico-dialético, essa relação contraditória entre racionais e irracionais reflete uma contradição interna que foi progressivamente superada com a formalização do conjunto dos números reais. A síntese dessa contradição é alcançada ao integrar os números racionais e irracionais em um sistema único e abrangente, permitindo uma representação unificada das magnitudes e consolidando uma correspondência entre a incomensurabilidade geométrica e a irracionalidade aritmética.

Para Dedekind, o conceito de corte consiste na partição da reta em duas classes, denominadas A e B, de modo que todo ponto da classe A esteja situado à esquerda de qualquer ponto da classe B. A partir desse conceito, Dedekind e Cantor formulam o axioma da continuidade, segundo o qual “todo o corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A, B), existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B)” (Caraça, 1984, p. 60). Esse princípio assegura que não há lacunas na reta real, pois qualquer divisão possível está sempre associada a um número real que estabelece a fronteira entre as duas classes.

Imagem 6 - Ideia do conceito de corte



Fonte: A autora

Ríbnikov (1987, p. 373-374) analisa o conceito de corte em Cantor sob dois aspectos principais. O primeiro refere-se à definição de número real como um corte no conjunto dos números racionais, atribuindo aos números reais uma interpretação geométrica, representada por uma linha contínua. Nesse contexto, Cantor associa ao conjunto dos números reais a propriedade de continuidade. O segundo aspecto diz respeito à abstração do infinito, na qual Cantor aborda a continuidade a partir de uma concepção distinta, ligada à constituição de conjuntos infinitos e sua cardinalidade. Dedekind, por outro lado, fundamenta sua definição de continuidade na estrutura de ordenação dos números racionais, estabelecendo uma conexão rigorosa entre cortes e pontos na reta.

Dessa forma, concluídas as reflexões sobre o desenvolvimento dos conjuntos numéricos — naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais —, a seção seguinte se dedicará à análise da generalização da aritmética. Cabe destacar que, embora os números complexos representem uma ampliação relevante no sistema numérico, sua origem, fundamentação e aplicações não serão aprofundadas nesta pesquisa, por não se inserirem diretamente no escopo deste trabalho, que se concentra na transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico teórico no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental. Reconhece-se, no entanto, a importância dos números complexos na formação conceitual matemática em etapas posteriores, especialmente no Ensino Médio e no Ensino Superior.

3.3 Uma perspectiva acerca da generalização da aritmética

Partindo da compreensão das grandezas como núcleo essencial do pensamento matemático, Davidov (1988) defende que as tarefas de estudo devem promover inter-relações entre significações aritméticas, algébricas e geométricas. Nesse contexto, o conceito de número, segundo o autor, emerge como um caso particular de uma relação mais geral entre grandezas, configurando-se como mediação histórica e cultural no desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

Para compreendermos o que significa pensar algebricamente, é necessário estabelecer uma relação dialética e histórica com a aritmética, considerando que esta pode ser compreendida como um caso particular da álgebra, por ter como foco o "estudo a divisibilidade de números inteiros" (Teles, 2004, p. 2). Nesse contexto, Teles (2004) destaca que o estudo da álgebra está estruturado a partir de sistemas matemáticos compostos por determinados objetos, tais como "anéis, corpos, espaços vetoriais", sendo que uma estrutura algébrica "consiste em leis de composição internas e externas". Cada uma dessas estruturas é definida por "propriedades particulares, tais como comutatividade, distributividade, associatividade, existência do elemento neutro, existência de um inverso" (Teles, 2004, p. 2). Assim, pensar algebricamente significa operar não apenas com números específicos, mas, sobretudo, com relações e estruturas gerais, mobilizando uma linguagem simbólica que permite expressar regularidades, padrões e propriedades que transcendem os casos particulares, constituindo, portanto, uma forma de pensamento abstrato, generalizador e teórico, constituído historicamente no processo de desenvolvimento da atividade humana.

A concepção da álgebra como uma generalização da aritmética emerge do movimento histórico de ampliação das operações e propriedades numéricas, que passam a ser aplicadas não apenas a números específicos, mas também a relações e padrões gerais. Nesse processo, a adoção da incógnita, da variável e das constantes como instrumentos simbólicos possibilita registrar e operar sobre essas relações.

Teles (2004), ao recorrer à *Encyclopedia of Mathematics*, organizada por Newman (1964), aponta que, segundo essa obra, a aritmética é dividida em dois domínios: aritmética comum — que se refere ao cálculo com números — e aritmética literal — associada ao cálculo algébrico.

A partir dessa definição, o autor argumenta que o uso da letra não constitui mais um critério distintivo entre aritmética e álgebra. A distinção reside, portanto, na natureza da atividade intelectual desenvolvida: enquanto a aritmética se ocupa de cálculos e propriedades dos números, a álgebra estrutura-se na busca pela generalização, pela abstração e pela compreensão das regularidades que ultrapassam os casos particulares, constituindo-se como uma forma de pensamento teórico, generalizador e abstrato.

> No que diz respeito ao saber do senso comum, o Novo Dicionário Aurélio define aritmética como "a arte dos números" e a álgebra como "ciência da reintegração e equiparação". Ainda num dicionário de língua portuguesa encontramos aritmética como a parte da matemática em que se investigam as propriedades elementares dos números inteiros e racionais. E álgebra como a parte da Matemática em que estudam as leis e processos formais de operações com entidades abstratas (Holanda, 1999). Etimologicamente, em árabe, al-ga-bãra, referia-se à ciência da equiparação ou da comparação. Percebemos que, nos dicionários de língua portuguesa, aritmética refere-se ao número, enquanto na designação do que significa álgebra focaliza-se a etimologia da palavra, fazendo referência à resolução de equações. (Teles, 2004, p. 2)

Para Souza e Diniz (1996), a álgebra constitui uma linguagem própria da Matemática, sendo utilizada para expressar fatos genéricos, regularidades e padrões. Assim como ocorre em outras linguagens simbólicas, a álgebra organiza-se por meio de um sistema de signos específicos — no caso, letras, símbolos operatórios e relações — e obedece a um conjunto de regras formais que regem sua manipulação. Nesse sentido, a álgebra não apenas representa relações numéricas, mas também funciona como instrumento teórico capaz de expressar generalizações e de formalizar processos matemáticos, o que caracteriza uma forma superior de atividade intelectual, desenvolvida historicamente no processo de desenvolvimento do pensamento matemático.

Souza e Diniz (1996) destacam que a distinção entre aritmética e álgebra reside, sobretudo, nos objetivos que orientam cada uma dessas atividades matemáticas. Na aritmética, operam-se números, suas propriedades e as operações fundamentais, mobilizando esses elementos para resolver problemas que demandam respostas numéricas específicas. A álgebra, por sua vez, permite expressar o que é genérico, ou seja, aquilo que vale para qualquer número, formalizando regularidades e relações gerais. Esse deslocamento do particular para o geral, próprio da álgebra, configura uma forma mais elevada de atividade intelectual, voltada à constituição do pensamento teórico. Nessa direção, Lins e Gimenez (1997, p. 113-114) ressaltam que “a própria atividade aritmética envolve, naturalmente, um certo nível de generalidade”. Contudo, é fundamental, segundo os autores, diferenciar os processos de generalização daqueles que tratam diretamente do que é genérico. “A situação ‘generalizada’ emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares… ao passo que a situação ‘genérica’ emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem intermediação dos casos particulares” (Lins; Gimenez, 1997, p. 114). Essa distinção é central para compreendermos que, no interior da atividade de ensino, o desenvolvimento do pensamento algébrico não depende unicamente da observação de padrões, mas de uma organização didática que direcione intencionalmente o estudante à apreensão daquilo que é estrutural e essencial no fenômeno matemático. Lins e Gimenez (1997), ainda analisaram a proposta de Davidov e concluíram que:

> é essencial estabelecer de forma clara, a distinção entre ‘genérico’ e ‘generalizado’. A situação ‘generalizada’ emerge quando os alunos passam a falar do que é comum há um conjunto de casos particulares… ao passo que a situação ‘genérica’ emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem intermediação dos casos particulares. Isso não quer dizer, é claro, que a situação genérica se constitua independentemente de qualquer caso particular (embora isso não seja nada improvável ou impossível!) e sim, que, no interior da atividade, a atenção é diretamente dirigida ao que é geral, e não ao processo de ‘generalização’. (Lins; Gimenez, 1997, p. 114)

Panossian (2014) evidencia que o conhecimento algébrico se constitui por meio de processos de generalização, estando diretamente relacionado à generalização das propriedades aritméticas. Frequentemente, a álgebra é concebida como uma extensão da aritmética, sendo enfatizada como uma linguagem capaz de expressar regularidades e relações.

A concepção sobre o termo *generalização* também aparece nos documentos curriculares oficiais da Prefeitura de São Paulo, sendo destacada na proposta atual do Currículo Paulista. O documento explicita que:

> as atividades envolvendo Álgebra devem retomar, aprofundar e ampliar o que foi estudado nos Anos Iniciais. Nessa etapa, os estudantes deverão compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão: estabelecer uma generalização de uma propriedade; investigar a regularidade de

> uma sequência numérica; indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica; estabelecer a variação entre duas grandezas. (São Paulo, 2019, p. 320)

O desenvolvimento histórico da álgebra, segundo Moretti et al. (2021), foi mediado, entre outros fatores, pela:

> organização dos currículos escolares, materiais didáticos e na formação de professores, culminando na hierarquização dos conteúdos matemáticos que pode ser resumida por uma organização que segue uma lógica de pré-requisitos ordenada pelos estudos de aritmética — álgebra — geometria, respectivamente (Rosa, 2012 apud Moretti; Virgens; Romeiro, 2021, p. 1461).

Nunomura, Silva e Vertuan (2019) evidenciam que o pensamento aritmético se estrutura, primordialmente, nas operações de cálculo. Considerando o desenvolvimento do sentido de número nos estudantes, os autores destacam que diferentes conexões entre números podem ser estabelecidas. Dessa forma, diversos contextos podem ser mobilizados com a finalidade de identificar e generalizar regularidades, o que, por sua vez, promove o desenvolvimento do pensamento algébrico.

De acordo com Nunomura; Silva; Vertuan, (2019), o pensamento algébrico corresponde ao "processo pelo qual os estudantes generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecendo essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressando-as de forma progressivamente mais formais e adequadas à sua idade". Nessa perspectiva, os autores destacam que o pensamento algébrico se subdivide em dois grandes eixos: **aritmética generalizada**, caracterizada pela generalização das operações e pelo desenvolvimento do pensamento relacional entre números; e **pensamento funcional**, relacionado à descrição da variação numérica em determinado domínio, conceito diretamente associado à noção de função. O pensamento funcional traz a possibilidade de desenvolver "a simbolização de quantidades, operações com elas, além da determinação de relações funcionais e representação gráfica que podem subsidiar a previsão de resultados" (Nunomura; Silva; Vertuan, 2019, p. 4).

Diante do exposto, e tomando como base o percurso teórico até aqui desenvolvido, este estudo propõe-se a compreender como ocorre a ascensão ao pensamento algébrico a partir da generalização da aritmética. Assim, no próximo tópico, aprofundaremos a análise sobre o desenvolvimento lógico-histórico da álgebra, analisando os processos formativos e as determinações teóricas que sustentam a constituição do pensamento algébrico.

3.4 A Evolução Histórico-Dialética da Álgebra: Da Origem Cultural à Formalização do Pensamento Matemático

Após as reflexões desenvolvidas até aqui, torna-se evidente que a história da álgebra, assim como a história da própria matemática, emerge do processo de apropriação da cultura humana. É possível constatar que a evolução da matemática se entrelaça, dialeticamente, com o desenvolvimento da humanidade. Caraça (1984) torna essa relação evidente ao destacar que a constituição dos conceitos matemáticos está intrinsecamente vinculada às necessidades humanas e às suas relações sociais, evidenciando o papel determinante dessas interações para o progresso da contagem e, consequentemente, para a formação dos conceitos matemáticos. Nesse sentido, Caraça (1984), Karlson (1961) e Sousa (2004) indicam que a natureza da álgebra reside no próprio movimento da vida, ou seja, no desenvolvimento histórico das relações sociais e culturais que configuram a atividade humana.

Ríbnikov (1987) destaca três dimensões fundamentais nas investigações histórico-matemáticas. A primeira dimensão refere-se à reconstituição do desenvolvimento histórico da matemática, com ênfase no surgimento de métodos, conceitos e ideias, bem como na forma como essas elaborações teóricas se consolidaram ao longo do tempo. A segunda dimensão aborda a relação entre a matemática e as demandas práticas da sociedade, considerando sua interconexão com o progresso de outras ciências e os impactos das condições socioeconômicas. Nesse sentido, Ríbnikov evidência como os contextos históricos, sociais e econômicos determinam dialeticamente a evolução da matemática. A terceira dimensão centra-se na análise da estrutura lógica e dialética do desenvolvimento da matemática, que culmina no desenvolvimento da matemática moderna, caracterizada pela crescente abstração, pela formalização conceitual e pela emergência de novos campos teóricos, como a teoria dos conjuntos e a álgebra abstrata.

Tais abordagens são fundamentais para compreender a natureza da matemática e seu papel no desenvolvimento do conhecimento humano. Sob essa perspectiva, a análise histórico-dialética da matemática permite reconhecer sua função como instrumento de mediação entre o homem e a realidade, expressando, de maneira objetiva, a consolidação das necessidades práticas e teóricas historicamente constituídas.

Os elementos mais significativos da atividade objetiva do sujeito, de acordo com Davidov (1988), estão na definição consciente dos objetivos, na seleção e utilização dos meios externos disponíveis, bem como na investigação da unidade dialética entre o subjetivo e o objetivo. Ao refletir sobre essas particularidades, o autor afirma que somente pela análise concreta da atividade humana é possível à lógica, por um lado, revelar as relações que se estabelecem entre sujeito e objeto e, por outro, compreender as condições históricas que deram origem à consciência, bem como às categorias, figuras e axiomas lógicos — fundamentos da própria atividade cognitiva, ou seja, do pensamento. Desse modo, o desenvolvimento da atividade prática social — expressão do ser genérico — está intrinsecamente vinculado ao desenvolvimento histórico do pensamento humano.

A história da matemática, para Ríbnikov (1987), pode ser compreendida por meio de períodos historicamente determinados, distintos uns dos outros pela sucessão de particularidades que expressam o desenvolvimento das práticas sociais e das necessidades concretas de cada época. Ademais, a periodização histórico-dialética torna-se necessária, não como um fim em si mesma, mas como recurso metodológico que permite orientar-se mais facilmente diante da complexidade e da riqueza dos fatos que constituem o desenvolvimento histórico da matemática. O autor também reflete acerca da periodização do desenvolvimento histórico da matemática, conforme destaca:

> A periodização se efetua por países, por formações socioeconômicas, por descobrimentos relevantes, os quais determinaram até certo ponto o caráter do desenvolvimento da matemática etc. As discussões sobre as periodizações são intermináveis. Porém, de acordo com nossos critérios, o papel das periodizações é puramente auxiliar e se determina pelas necessidades do objetivo fundamental: o descobrimento das leis do desenvolvimento objetivo da matemática. (Ribinikov, 1987, p. 16, tradução nossa).

Os babilônios desenvolveram procedimentos algébricos notavelmente flexíveis para seu tempo, dominando, inclusive, artifícios elementares de fatoração. No entanto, não realizavam a representação de quantidades desconhecidas por meio de símbolos alfabéticos — recurso que, à época, ainda não existia. Em vez disso, utilizavam palavras como “comprimento”, “largura”, “área” e “volume” para designar as incógnitas presentes em seus problemas matemáticos. Segundo Boyer (2012, p. 44), esses termos assumiam, muitas vezes, um sentido abstrato, na medida em que os babilônios operavam com expressões como “um comprimento mais uma área” sem qualquer restrição lógica, o que evidencia uma concepção operatória que, embora não formalizada nos moldes simbólicos atuais, cumpria a função de generalização no interior de suas práticas matemáticas.

A álgebra desenvolvida pelos babilônios manifestava-se nas operações realizadas por meio de um sistema de numeração sexagesimal — isto é, de base 60 — no qual aplicavam procedimentos que hoje reconhecemos como resolução de equações lineares, quadráticas e cúbicas, frequentemente associados a problemas de natureza geométrica. Essa álgebra, segundo a classificação histórica, caracteriza-se como álgebra retórica, uma vez que não empregava símbolos nem abreviações para representar quantidades desconhecidas. Em seu lugar, eram utilizadas palavras que designavam medidas ou grandezas, como comprimento, largura e volume, revelando que, embora sem uma formalização simbólica, já operavam no plano da generalização matemática.

> A retórica ou verbal corresponderia à fase em que não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o pensamento algébrico. Todos os passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e equações eram descritos em linguagem corrente. Esta teria sido a álgebra dos egípcios, dos babilônios e dos gregos pré-diofantinos. (Fiorentini; Miorim; Miguel*,* 1993, p. 79-80)

A álgebra retórica caracteriza-se pela ausência de notação simbólica, utilizando exclusivamente a linguagem verbal para expressar relações, representar grandezas e resolver problemas matemáticos. Essa forma de álgebra predominou nas práticas matemáticas de civilizações como os babilônios e egípcios, refletindo um momento do desenvolvimento histórico em que a atividade matemática ainda estava vinculada diretamente à resolução de problemas práticos da vida social, sem recorrer a sistemas formais de representação simbólica. Nesse sentido, a álgebra retórica constitui uma mediação histórica fundamental na construção do pensamento algébrico, antecedendo a formalização simbólica que caracteriza etapas posteriores desse desenvolvimento (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993).

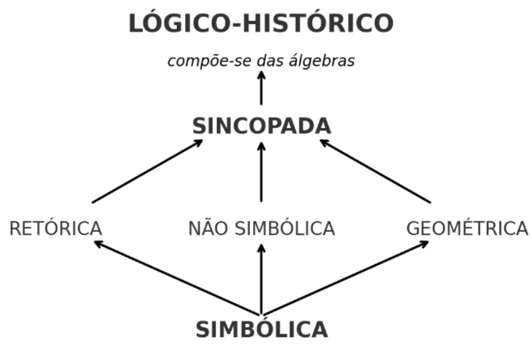
Um exemplo representativo da álgebra retórica, que expressa relações matemáticas por meio da linguagem verbal, é a sentença: *Radix Quadratum 16 Aequalis 4*. Traduzida para a linguagem algébrica moderna, essa expressão significa: **"A raiz quadrada de 16 é igual a 4"**. Tal operação corresponde à radiciação e reflete a busca por determinar o comprimento do lado de um quadrado cuja área é igual a 16 unidades quadradas. Em termos geométricos — como era recorrente na antiguidade —, esse problema pode ser enunciado da seguinte forma: **"Qual é o comprimento do lado de um quadrado que possui área de 16 unidades quadradas?"**. Isso evidencia que, nesse período, os procedimentos algébricos estavam intrinsecamente articulados às representações geométricas, funcionando como mediações objetivas, permitindo ao sujeito abstrair, generalizar e operar sobre relações quantitativas presentes na prática social.

A álgebra em sua etapa sincopada da representação do pensamento algébrico teria nascido com Diofanto de Alexandria (século III), visto que ele foi o precursor a representar a incógnita por um símbolo, adotando a letra σ (sigma), a décima oitava letra do alfabeto grego, ao apresentar uma forma mais suscinta para expressar suas equações. "O estilo sincopado foi utilizado também pelos algebristas italianos do século XVI. Por exemplo, a expressão "cubus

p. 6 rebus aequalis 20", de Cardano (1545), seria uma forma sincopada de exprimir uma equação, que, na linguagem simbólica posterior, corresponderia a "$x^3 + 6x = 20$". (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993, p. 80)

Sousa (2004) apresenta uma representação do desenvolvimento da linguagem algébrica, sintetizada da seguinte maneira:

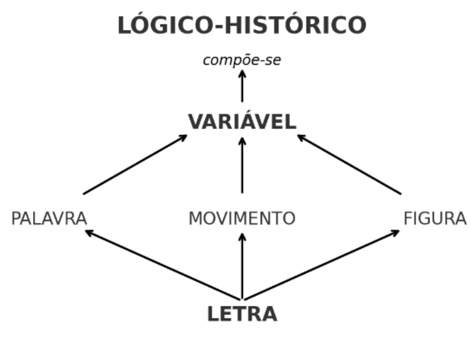
Imagem 7 - Estágios do desenvolvimento da linguagem algébrica



Fonte: Sousa (2004, p. 115)

À luz da concepção discutida, é possível compreender os dados representados na imagem anterior da seguinte forma:

Imagem 8 - Síntese de desenvolvimento da linguagem algébrica



Fonte: Sousa (2004, p. 116)

O conceito de variável, conforme discutido por Caraça (1984) e Sousa (2004), reflete uma evolução histórica que não se desenvolve de forma linear, mas sim marcada por contradições, mediações e superações decorrentes das necessidades concretas da vida social. Trata-se de uma abstração fundamental, que possibilita representar e generalizar relações matemáticas em diferentes contextos. Sousa (2004) destaca que a álgebra simbólica, ao utilizar letras para expressar tanto elementos conhecidos quanto incógnitas, formaliza fórmulas que traduzem os movimentos e as exigências das práticas sociais. Nesse processo, a linguagem simbólica assume papel central, pois garante maior precisão, generalidade e universalidade no tratamento dos conceitos matemáticos.

Cedro; Sousa; Panossian, (2014) argumentam que os exemplos provenientes do século XVIII evidenciam a potencialidade da álgebra para definir incógnitas por meio da utilização de signos e símbolos, articulados a métodos sistematizados de manipulação desses elementos. Essa abordagem se estrutura como uma forma de "aritmética generalizada", o que representa um marco relevante para a consolidação do pensamento algébrico e para o desenvolvimento das investigações acadêmicas nesse campo. Os autores destacam, ainda, que "o conhecimento algébrico é essencialmente um conhecimento científico e, portanto, possibilita o trabalho prioritário com o pensamento teórico, sendo indispensável a consideração de situações pedagógicas que promovam o desenvolvimento dessa forma de pensamento nos estudantes" (Cedro; Sousa; Panossian, 2014, p. 82).

Segundo Ríbnikov (1970), a evolução dos conhecimentos matemáticos está intrinsecamente conectada ao desenvolvimento do simbolismo matemático. Este simbolismo, quando reflete com precisão a essência das operações matemáticas, não apenas descreve os conceitos, mas também exerce um papel ativo no avanço da própria matemática, adquirindo propriedades operativas. A evolução dos símbolos matemáticos pode ser comparada ao desenvolvimento de ferramentas, na medida em que possibilita ao sujeito reconstituir, expressar e compreender os conceitos matemáticos ao longo da história. No Quadro 6, Sousa (2004) apresenta um compêndio das conjecturas lógico-históricas, tanto no desenvolvimento geral da matemática quanto, especificamente, no campo da álgebra.

Quadro 6 - Pressupostos teóricos lógico-histórico.

(Continua)

Pressupostos teóricos do conceito de lógico-histórico	**Pressupostos teóricos do lógico-histórico da álgebra**
O conceito mais geral de lógico-histórico considera: - Formas de pensamento: juízo, conceito e dedução; - Concretividade e abstratividade dos conceitos. - Interdependência e fluência; movimentos do pensamento empírico-discursivo; do pensamento flexíve1 e do pensamento teórico;	O conceito mais geral de álgebra considera: - Formas de pensamento: juízo, conceito e dedução da álgebra não simbólica; - Formas de pensamento: juízo, conceito e dedução da álgebra simbólica; - Concretividade e abstratividade dos conceitos de movimento, fluência, campo de variação, variável, número e aspectos da geometria;

Quadro 6 - Pressupostos teóricos lógico-histórico.

(Conclusão)

- Nexos internos e externos do conceito; conteúdo do pensamento: as abstrações; - Realidade e realidade objetiva; - Totalidade da vida; - O vir a ser; - Isolados	- Nexos conceituais do número, da figura e da palavra; - Concretividade e abstratividade da variável-palavra; variável-figura; variável-numeral; variável-letra; - O vir a ser da álgebra: necessidade de se criar subálgebras; - Conceito de função; - Estudo dos movimentos da vida: - Realidade e realidade objetiva; - Lógica "espiciosa", - Mudança conceitual; movimentos do pensamento no sentido de conhecer e descrever as verdades matemáticas; - Premissas; - Isolados; - Concretividade e abstratividade da matemática.

Fonte: Sousa (2004, p. 129).

Sousa (2004) apresenta um compêndio das conjecturas lógico-históricas associadas à álgebra, destacando como as diferentes formas de pensamento — retórica, sincopada e simbólica — se articulam dialeticamente no processo histórico de desenvolvimento dos conceitos algébricos. Esse desenvolvimento não ocorre de forma linear, mas por meio da superação das limitações impostas pelas formas anteriores de representação. A consolidação da álgebra simbólica, por exemplo, exigiu que os matemáticos superassem as restrições das abordagens retórica e sincopada, organizando uma linguagem formal, precisa e universal, capaz de expressar, generalizar e operar sobre relações matemáticas complexas. Tal movimento representou não apenas um avanço técnico, mas, sobretudo, um salto qualitativo no desenvolvimento do pensamento teórico no campo da matemática, historicamente constituído pela atividade humana.

Nesse contexto, ao longo do desenvolvimento histórico, os elementos que orientam os estudos da Álgebra foram progressivamente ressignificados. Deixou de ser concebida como uma simples manipulação de símbolos desprovidos de sentido para se constituir como um sistema de representação capaz de expressar, generalizar e operar sobre relações matemáticas. Nessa perspectiva, o significado dos símbolos algébricos não reside nos próprios signos de forma isolada, mas se objetiva no modo como esses elementos se articulam na atividade, na mediação das relações quantitativas, nas regularidades e nos processos de generalização próprios do pensamento algébrico.

Lins e Gimenez (2001) defendem que número é todo elemento pertencente ao conjunto-base de uma estrutura algébrica. Assim, além de números, naturais, inteiros, racionais, reais ou complexos podem representar vetores, matrizes, polinômios, permutações ou conjuntos, desde que estejam definidos no interior de uma estrutura algébrica.

Hogben (1970) expõe que, na realidade, a matemática moderna — assim como qualquer desenvolvimento produtivo da ciência — se fundamenta nas bases históricas de campos anteriores, cujos conhecimentos foram elaborados a partir das necessidades concretas da humanidade. Conforme o autor, cada nova elaboração supera limitações anteriores, ampliando e ressignificando os instrumentos teóricos que a precederam. Embora "a álgebra, a geometria, a trigonometria, o uso de gráficos e o cálculo dependam todos das regras da geometria grega, pouco mais de uma dúzia dos duzentos postulados dos *Elementos* de Euclides são essenciais para a compreensão da maneira de utilizá-los" (Hogben, 1970, p. 32).

Assim, conforme Panossian (2014), a linguagem algébrica está intrinsecamente vinculada à experiência histórico-social da humanidade. Além disso, essa linguagem não pode ser dissociada do desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo imprescindível que seu ensino esteja articulado a esse processo, considerando os sistemas de generalização, abstração e apropriação dos conceitos próprios da álgebra.

No âmbito da educação, Cedro; Sousa; Panossian, (2014) explicam que a álgebra, concebida como aritmética generalizada, utiliza as variáveis como instrumento de generalização de padrões e de regularidades. Nessa perspectiva, o símbolo literal deixa de assumir apenas o papel de incógnita e passa a constituir-se como elemento fundamental na representação, na generalização e na análise das relações matemáticas, assumindo um papel central no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Para fundamentar as reflexões apresentadas, Sousa (2004), com base nos estudos de Usiskin (1995) e Robayna et al. (1996), elaborou a tabela a seguir, na qual sistematiza distintas concepções acerca do uso das variáveis no contexto dos currículos escolares.

Quadro 7 - Concepções da álgebra nos currículos

(Continua)

Interpretações da álgebra	**Análise dessas interpretações**
Como aritmética generalizada	Fazendo uma análise histórica, se observa que este sentido generalizador da álgebra teve uma repercussão imediata, posto que desde a invenção da notação algébrica (Viéte) até o nascimento do cálculo passaram escassamente cento e cinquenta anos. A geometria analítica se inventou entre essas duas etapas.
Como estudo dos métodos para resolver certos problemas concretos: as equações	Neste caso, as letras se consideram como incógnitas específicas a determinar.

Quadro 7 - Concepções da álgebra nos currículos

(Conclusão)

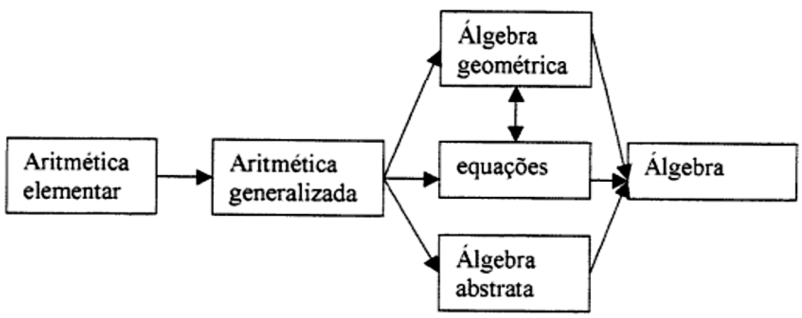
Como estudo de relações entre quantidades (funcional)	Neste caso se considera a variável em seu sentido completo de variabilidade.
Como estrutura (interpretação estrutural)	As letras constituem entes pertencentes às estruturas algébricas tais como grupos, anéis, Domínios de integridade ou corpos, pode-se lhe aplicar as propriedades satisfeitas por cada um dos conjuntos nos que se atue.

Fonte: Sousa (2004, p. 137)

Dessa forma, Panossian (2014) evidencia que as situações-problema materializam as determinações da álgebra como aritmética generalizada, como meio para a resolução de problemas e para o estudo das relações entre grandezas. A autora enfatiza que a representação simbólica literal se configura como o estágio mais desenvolvido da linguagem algébrica. Tais concepções ressaltam a necessidade de que o ensino da álgebra esteja vinculado à sua fundamentação lógico-histórica, de modo a favorecer uma compreensão crítica, teórica e contextualizada dos conceitos.

Sousa (2004) explicita que o processo de inserção da álgebra no contexto escolar, conforme indicado por Robayna et al. (1996), na busca por superar as dificuldades de aprendizagem, deve considerar as características lógico-históricas e formais presentes no desenvolvimento da própria álgebra enquanto construção histórica do pensamento matemático.

Imagem 9 - Características lógico-formais na história da álgebra.



Fonte: Sousa (2004, p. 139).

Para Davidov (1988), a compreensão está orientando, primeiramente, à separação e a comparação das propriedades dos objetos com o intuito de abstrair a generalização formal, ou seja, delinear sob a forma de conceito. Para mais, o autor afirma que diante de uma hipótese de ampliação exagerada de uma referida generalidade, a abstração perde a riqueza e sua essência.

A nosso juízo, essas características podem ser atribuídas ao tipo de pensamento que denominamos pensamento empírico. Seu princípio orientador é a constituição de uma generalidade formal dos objetos, com todas as limitações que dela decorrem. Por essa razão, esse modo de operar pode ser caracterizado como pensamento discursivo empírico. Sua principal função consiste na classificação dos objetos e na elaboração de um esquema fixo de "determinantes". Esse tipo de pensamento se desenvolve a partir de dois movimentos, já discutidos anteriormente: o movimento "de baixo para cima" e o movimento "de cima para baixo". No primeiro, constrói-se uma abstração — ou conceito — de caráter formal, que, por sua própria natureza, não é capaz de expressar mentalmente o conteúdo concreto e específico do objeto. No segundo movimento, essa abstração formal é preenchida por imagens sensoriais e descrições concretas associadas ao objeto, tornando-se, assim, "rica" e "cheia de conteúdo"; contudo, essa riqueza não decorre de uma construção mental que acesse a essência do objeto, mas sim de uma mera combinação de exemplos e descrições empíricas que servem para ilustrá-la. (Davidov, 1988, p. 111)

Assim, a partir das perspectivas acerca da álgebra desenvolvidas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) — que compreendem a álgebra como uma linguagem —, Cedro, Sousa e Panossian (2014) sistematizam esse movimento de constituição dessa concepção, como apresentado no quadro a seguir.

Quadro 8 - Interpretações e concepções da álgebra e da variável

(Continua)

Concepção	**Características Principais**	**Descrição**
Processológica	Conjunto de métodos, técnicas para resolver certos tipos de problemas.	▪ Não exige a existência de uma linguagem para expressá-la. ▪ Os procedimentos se constituem em técnicas algorítmicas são baseadas numa sequência padronizada de passos.
Linguístico-Estilística	É uma linguagem especifica criada para expressar os procedimentos.	▪ Cria urna distinção entre forma pensamento e forma de expressão. ▪ Defende a insuficiência da existência de um pensamento algébrico para que a álgebra constitua em campo autônomo do conhecimento matemático.

Quadro 8 - Interpretações e concepções da álgebra e da variável

(Conclusão)

Linguístico-Sintética-Semântica	É uma linguagem que exige uma compreensão dos signos e dos símbolos.	▪ É uma linguagem específica e concisa. ▪ Exige a consciência que a linguagem algébrica, para adquirir a dimensão e revelar o seu poder transformacional e instrumental, deve ser verdadeiramente simbólica.
Linguístico-postulacional	Signos com significados mais abrangentes do que os anteriores.	▪ Os signos linguísticos representam não apenas uma quantidade geral, discreta ou contínua, mas entidades Matemáticas que não estão sujeitas ao tratamento quantitativo.

Fonte: Cedro, Sousa, Panossian (2014, p. 28)

Entendemos que a compreensão lógico-histórica da álgebra e suas determinações conceituais devem orientar a práxis pedagógica, compreendida como unidade entre teoria e prática no processo formativo dos sujeitos. Nesse sentido, Moura et al. (2010, p. 213) afirmam que a atividade de ensino do professor deve organizar e conduzir a atividade de aprendizagem dos estudantes, de modo a suscitar neles "um motivo especial para sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade". No entanto, ao considerarmos a constituição do pensamento teórico — no caso, do pensamento teórico algébrico —, compreendemos que "a formação desse modo de pensamento e da conduta cultural só é possível como resultado da própria atividade do homem", de modo que "tão importante quanto a atividade de ensino do professor é a atividade de aprendizagem que o estudante desenvolve" (Moura et al., 2010, p. 213).

Nesse sentido, Cedro, Panossian e Sousa (2014) apontam ser necessário que os professores do Ensino Fundamental, ao iniciarem o trabalho com o conhecimento algébrico, organizem situações didáticas que favoreçam o desenvolvimento da atividade de estudo, permitindo aos estudantes expandirem e exercitarem sua capacidade de abstração e generalização. De acordo com os autores, essa é uma condição essencial para que a álgebra se constitua como "uma poderosa ferramenta para resolver problema" (Brasil, 1998, p. 115, apud Cedro; Sousa; Panossian, 2014, 74).

Essas noções, necessariamente, são aprendidas, pois não são percebidas de forma "natural" no decorrer das atividades formalizadas que visam ao estudo da álgebra simbólica. O que fundamenta a álgebra simbólica são as espécies, ou seja, a generalização do número para além da contagem, incorporando suas propriedades e permitindo a sistematização de movimentos matemáticos por meio de fórmulas. Nesse processo, o número deixa de ser concebido apenas como um ente relacionado à aritmética e passa a representar relações, regularidades e estruturas algébricas. (Cedro; Sousa; Panossian, 2014, p. 75)

De acordo com Moura et al. (2010), o professor, no desenvolvimento da atividade de ensino, também se apropria da cognição teórica, que lhe permite organizar ações pedagógicas intencionais. Essas ações devem criar condições para que os estudantes se apropriem dos conceitos científicos e avancem no desenvolvimento do pensamento teórico, por meio da realização da atividade de aprendizagem.

A Atividade Orientadora de Ensino (AOE) assume uma função central na transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, configurando-se como uma forma de organização da atividade de ensino que cria condições para que os estudantes se apropriem dos conceitos matemáticos de maneira consciente, ativa e culturalmente mediada. Essa transição exige que o professor organize tarefas que favoreçam processos de generalização e abstração, elementos fundamentais para a formação do pensamento algébrico.

No contexto da generalização da aritmética, o conceito de número assume um papel central, constituindo-se historicamente no desenvolvimento da atividade humana e no avanço do pensamento matemático. Esse conceito se amplia dialeticamente, partindo dos números naturais para os inteiros, racionais, reais e, posteriormente, para os complexos. Tal ampliação não apenas supera as limitações na representação e no tratamento de determinados fenômenos matemáticos e práticos, como também reflete o desenvolvimento do pensamento humano na apreensão de relações cada vez mais complexas. Nesse movimento, a generalização permite que propriedades particulares de um determinado conjunto numérico sejam abstraídas, sintetizadas e sistematizadas, possibilitando a constituição de conceitos como variáveis, funções e estruturas algébricas, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento teórico no campo da matemática.

Assim, quando os estudantes são levados a operar com generalizações formais, frequentemente limitadas à manipulação simbólica, concentram-se apenas nos aspectos formais presentes nessas representações, buscando identificar semelhanças superficiais entre as expressões algébricas. No entanto, em muitos casos, não dispõem dos fundamentos conceituais que estruturam o objeto da álgebra simbólica — tais como a compreensão da variável, das relações funcionais e das operações sobre os símbolos —, ou seja, não se apropriaram dos nexos conceituais que dão sentido às operações algébricas. Essa limitação compromete a possibilidade de que a atividade de estudo propicie o desenvolvimento do pensamento teórico, uma vez que a apreensão das relações formais se realiza desvinculada da compreensão dos fundamentos lógico-históricos que sustentam tais representações.

Nessa perspectiva, quando o pensamento algébrico é estruturado exclusivamente com base nas características externas e formais, frequentemente representadas por símbolos literais, evidencia-se uma lacuna na constituição efetiva do pensamento teórico algébrico. Isso ocorre porque a simples manipulação simbólica, desvinculada da compreensão dos nexos conceituais que fundamentam a álgebra, não assegura a formação de um pensamento verdadeiramente teórico, capaz de apreender as relações internas, essenciais e universais que caracterizam este campo do conhecimento.

A Atividade Orientadora de Ensino (AOE) organiza o processo educativo de modo a mobilizar os estudantes como sujeitos ativos na apropriação dos conceitos matemáticos. Nesse contexto, a mediação não se restringe à ação do professor, mas se concretiza nas interações entre os estudantes, os objetos de estudo e os instrumentos culturais historicamente produzidos — no caso, os conceitos e as ferramentas matemáticas. Tais mediações possibilitam que os estudantes estabeleçam, de forma consciente, as conexões entre os conceitos aritméticos e algébricos, favorecendo a internalização dos nexos que os constituem. Desse modo, os estudantes assumem um papel ativo no processo de aprendizagem, mobilizando práticas investigativas, dialógicas e colaborativas, o que permite a ascensão do pensamento empírico ao pensamento teórico. Essa dinâmica, orientada pela atividade de estudo, é fundamental para a formação de conceitos científicos e para a consolidação do pensamento algébrico como forma superior de desenvolvimento psíquico.

Desse modo, a transição do pensamento aritmético para o algébrico não ocorre de forma imediata nem mecânica. Ela exige práticas pedagógicas intencionais, que explicitem os nexos conceituais entre números, variáveis e funções, favorecendo a abstração e a generalização. Nessa perspectiva, o pensamento algébrico configura-se como uma forma superior de pensamento, que possibilita aos estudantes não apenas operar com conceitos matemáticos, mas, sobretudo, compreender suas bases teóricas e aplicá-las de maneira crítica e criativa.

3.4.1 Nexos Conceituais – O percurso lógico-histórico na constituição do conceito algébrico

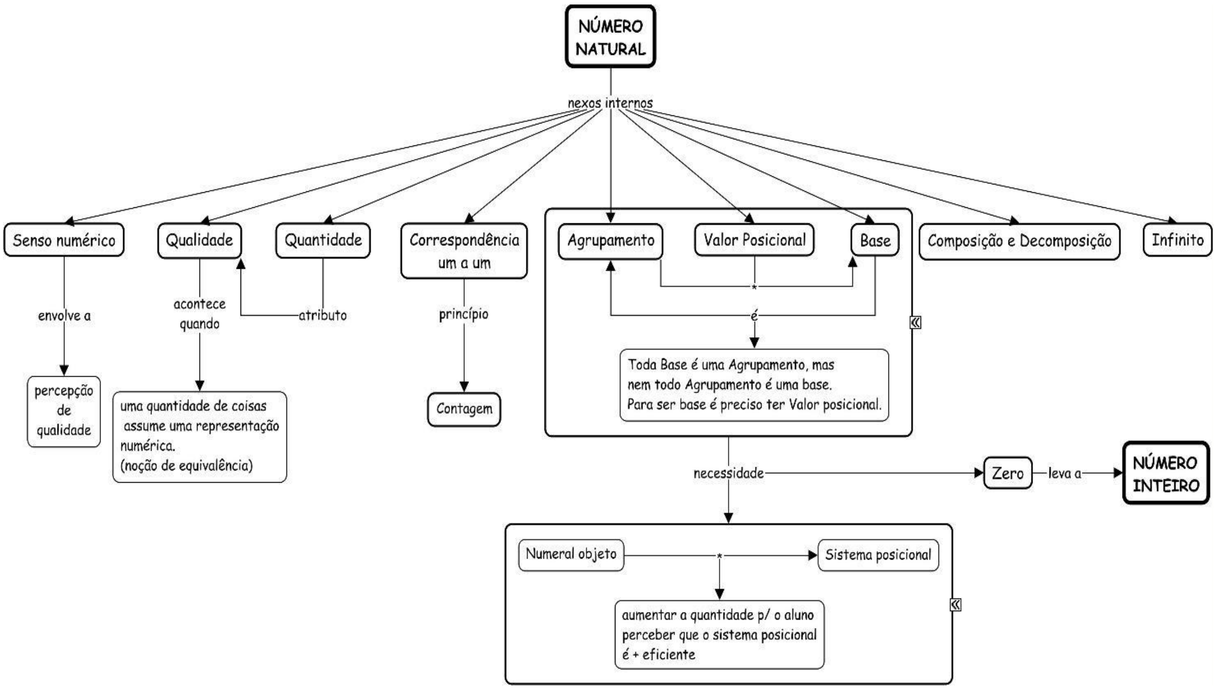
A constituição do conhecimento advém da história, mediante a busca da humanidade em satisfazer suas necessidades. A realidade em que estamos inseridos, embora marcada por diversas subjetividades, está impregnada de saberes matemáticos, ainda que hoje nos pareçam corriqueiros, já foram, em outros tempos, motivo de grandes inquietações. Para Sousa (2004, p. 72), "[...] entender o lógico-histórico do pensamento e dos objetos por ele apreendidos envolve entender o porquê nós, seres humanos, não nos habituamos a viver sob o jugo do imutável".

Compreendemos os nexos conceituais como as conexões que se estabelecem entre as diferentes formas históricas de apreensão de um conceito. Tais elos mobilizam a dinâmica do pensamento, na medida em que "contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento" (Sousa, 2004, p. 61).

Para Ribnikov (1987), a história evidencia que os acervos de relações quantitativas e de formas espaciais, objeto de estudo da matemática, frequentemente se ampliam em função das demandas concretas oriundas da tecnologia e das ciências naturais. Esses movimentos, por sua vez, inserem-se progressivamente no desenvolvimento da matemática, enriquecendo o conteúdo de sua definição geral. Nessa perspectiva, compreender a matemática a partir de uma concepção materialista — fundada em sua historicidade e nas determinações sociais — revela-se uma condição necessária para que se possa apreender, de forma rigorosa, as contribuições dessa ciência às atividades produtivas e sociais humanas. Esse entendimento permite, ainda, que os sujeitos compreendam seu lugar no trabalho coletivo, bem como a relação entre o conteúdo de sua atividade e as tarefas coletivas que dela derivam.

Assim, para que o pensamento algébrico se constitua, é indispensável compreender o desenvolvimento histórico do conceito de número, bem como seus nexos internos e externos. Segundo Sousa (2004), é fundamental considerar os nexos internos desse conceito, uma vez que o pensamento algébrico se sustenta na apropriação consciente de sua essência, o que implica compreender as determinações que o constituem. É nesse movimento dialético — entre o particular e o geral, entre o empírico e o teórico — que se estrutura o pensamento algébrico. Nesse contexto, apresentamos, a seguir, os nexos conceituais dos números inteiros, conforme representado na figura.

Mapa Conceitual 1 - Nexos dos números naturais e inteiros



Fonte: Grupo de Pesquisa Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural (2021).

Para que seja possível estabelecer conexões necessárias ao desenvolvimento do pensamento algébrico, em sua dimensão lógico-histórica, torna-se indispensável compreender os nexos internos e externos que estruturam esse campo da matemática. Desse modo, cabe ao professor, no exercício da atividade de ensino, orientar sua atuação para favorecer a apropriação dos nexos internos dos conceitos, condição essencial para a formação do pensamento teórico dos estudantes.

Historicamente, diante da necessidade de representar o nada e superar as limitações operatórias, especialmente nas subtrações, a humanidade, amparada no princípio da extensão, elaborou a ampliação do sistema numérico. Assim, surge o conjunto dos números inteiros, que inclui os números naturais e amplia as possibilidades operatórias. Contudo, as contradições não se esgotam nesse conjunto. Diante das impossibilidades que emergem na divisão e na mensuração, torna-se necessária a constituição de um novo conjunto: os números racionais, que mediam as relações quantitativas envolvendo partes de um todo e consolidam novas formas de operação.

Os conceitos apresentados no Mapa Conceitual 1 sintetizam as relações fundamentais entre os conjuntos dos números naturais e inteiros. O primeiro nexo destacado — o senso numérico — refere-se à capacidade de reconhecer que a contagem expressa, dialeticamente, a relação entre qualidade e quantidade. Assim, ao atribuir uma qualidade a um conjunto, estabelece-se simultaneamente uma quantidade, tornando-se possível identificar e numerar os elementos a partir dessa determinação qualitativa.

Nesse sentido, os nexos entre qualidade e quantidade configuram-se como um par dialético, no qual a quantidade expressa numericamente uma determinada qualidade. Sempre que se atribui uma qualidade a um conjunto — como cor, forma ou tipo —, simultaneamente se estabelece uma quantidade, ou seja, quantifica-se aquilo que foi qualitativamente determinado. Dessa forma, a quantidade manifesta-se como uma determinação da qualidade, pois só há sentido em contar aquilo que, antes, foi qualificado no pensamento e na prática social.

Para que fosse possível contar, tornou-se essencial estabelecer uma correspondência biunívoca entre cada elemento de um conjunto e uma representação externa. Esse princípio, conhecido como correspondência um a um, foi fundamental no desenvolvimento do conceito de número. Povos da Antiguidade, por exemplo, ao cuidar de seus rebanhos, utilizavam estratégias como fazer marcas em pedaços de madeira ou separar uma pedra para cada animal que saía pela cerca, estabelecendo assim uma equivalência entre os objetos e os elementos contados. Posteriormente, com o avanço da atividade humana e das necessidades sociais, surgiram os primeiros sistemas de representação simbólica para quantidades, permitindo superar a contagem concreta e facilitando o registro e a comunicação dos números.

A partir do desenvolvimento da noção de correspondência, o ser humano superou as limitações impostas por seu próprio corpo, elaborando a noção de equivalência, bem como a necessidade de registro e de simplificação do processo de contagem. Nesse movimento, a correspondência, ao possibilitar a organização dos elementos contados, tornou-se a base para o surgimento da adição como uma estratégia de simplificação da contagem, representando um avanço na generalização das operações matemáticas.

Quando realizamos a contagem, buscamos agrupar os elementos, estabelecendo uma base de referência. No entanto, é importante destacar que nem todo agrupamento constitui uma base. A contagem baseada apenas em agrupamentos pode tornar-se excessivamente trabalhosa, o que levou à introdução das ideias de juntar e separar, originando operações em sistemas de base e gerando os conceitos de composição e decomposição. O conceito de base ocupa um papel central na matemática, pois envolve um conjunto de relações entre ideias, especialmente o conceito de valor posicional.

A noção de quantidade encontra-se intrinsecamente relacionada à ideia de agrupamentos, sendo essa relação fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico. No contexto algébrico, o agrupamento de variáveis refere-se à organização e manipulação de elementos simbólicos de forma sistemática, visando à identificação de relações e à simplificação de expressões matemáticas. Por exemplo, ao reunir termos semelhantes, como em $2x + 3x = 5x$, observa-se um processo análogo ao agrupamento de quantidades físicas, porém em um nível abstrato, que transcende a manipulação de números concretos. Esse procedimento promove a generalização de conceitos e a elaboração de estruturas simbólicas que sustentam o raciocínio matemático. Assim, conceber a quantidade desvinculada de seu aspecto físico evidencia um dos pilares do pensamento algébrico, que permite explorar relações abstratas e estabelecer generalizações fundamentais para a resolução de problemas matemáticos.

Aqui, já compreendemos que a constituição dos números naturais ocorreu mediante a necessidade de contar. Para Caraça (1984), os números naturais são caracterizados pela representação a partir do número 1 em diante. Entretanto, ainda segundo o autor, o número zero emerge tanto como uma necessidade teórica quanto como exigência prática, especialmente vinculada à consolidação do princípio do valor posicional. Esse avanço, por sua vez, promove a ascensão do conceito de base. Nesse contexto, o conjunto dos números naturais passa a ser denominado, por Caraça (1984), como conjunto dos números inteiros.

Para Vigotski (2001), o desenvolvimento dos conceitos define, essencialmente, a estrutura característica da atividade de pensar, bem como a forma pela qual os objetos são apreendidos no conceito, articulando dialeticamente os elementos do abstrato e do concreto. A extensão do conceito refere-se ao número de objetos ou fenômenos que ele abrange, enquanto sua profundidade corresponde ao grau de abstração, isto é, ao nível de interiorização das determinações essenciais desse conceito. Essa relação dialética implica que o conceito não apenas representa o objeto, mas também integra suas generalizações e especificações em relação a outros conceitos, possibilitando uma compreensão mais ampla, profunda e sistemática da realidade.

Sob a perspectiva da formação dos conceitos, os nexos internos do conjunto dos números naturais, a partir da constituição do zero, fazem emergir o conjunto dos números inteiros. Este, por sua vez, diante da impossibilidade de realizar a divisão exata entre todos os números inteiros, dá origem ao conjunto dos números racionais. Nesse campo, estabelece-se o conceito de medida, entendido como uma unidade dialética do pensamento, configurada pela relação entre grandeza e unidade. Nessa relação, a escolha da grandeza a ser medida determina a natureza da unidade que a mede, e, dialeticamente, a definição da unidade implica a qualificação da grandeza. Assim, essa unidade expressa não apenas uma correspondência quantitativa, mas também uma mediação teórica que integra as características essenciais do objeto e sua representação numérica.

De acordo com Cunha (2008, p. 29), na divisão entre grandezas da mesma natureza, obtém-se um número puro — sem dimensão e sem unidade — que expressa a quantidade de vezes que uma grandeza contém a outra. A autora esclarece que, “quando ‘pensamos’ sobre a medida, estamos pensando nas qualidades e nas relações desta com o objeto a ser medido”.

Diante dos constructos referentes aos nexos conceituais internos do conceito de medida, o axioma de Richard Dedekind nos conduz a uma nova impossibilidade: ao escolhermos um número arbitrário sobre a reta — por exemplo, o número 2 —, não existe um número racional que, elevado ao quadrado, tenha como resultado exatamente o número 2, de modo que $x^2 < 2$, mas nunca exatamente igual a 2 no conjunto dos racionais. Tal impossibilidade revela que, “do ponto de vista teórico, nem sempre é possível comparar a unidade a uma grandeza e, nesse caso, considera-se que os segmentos são incomensuráveis” (Cunha, 2008, p. 88).

Com efeito, verifica-se que o conjunto dos números racionais não possui a propriedade de continuidade, embora seja um conjunto infinito. Apesar de apresentar uma sequência ilimitada de elementos, a correspondência entre os números racionais e os pontos da reta real não é biunívoca, uma vez que os racionais não são capazes de preencher integralmente todos os pontos da reta. Tal característica decorre do fato de que, embora o conjunto dos números racionais seja denso — isto é, entre quaisquer dois números racionais sempre existe outro número racional —, ele não é contínuo. Isso significa que há lacunas na reta real que não podem ser preenchidas pelos números racionais, correspondendo aos números irracionais. A existência dessas lacunas evidencia a incomensurabilidade de determinados segmentos, como no caso do número raiz de 2 ($\sqrt{2}$), que não pode ser representado por nenhum número racional. Assim, a necessidade de ampliar o conjunto numérico, incluindo os números irracionais, surge como uma exigência teórico-histórica para garantir a continuidade da reta real, assegurando a superação dessa contradição.

Considerando as características inerentes ao ato de medir, compreende-se que as descrições desse processo resultam das significações atribuídas à própria atividade de medir. Nesse sentido, “entendemos que a validade destas enquanto símbolo-representação-mediação está em constituir-se num conceito cotidiano que cresce no sentido do conceito científico” (Lanner, 1995, p. 21).

Na realidade material, o ato de medir emerge das múltiplas necessidades relacionadas ao domínio das transformações dos aspectos dos objetos — especialmente nas construções, nas produções artísticas e na definição de distâncias. Esse ato, que decorre da necessidade de determinar valores e grandezas, manifesta-se em diversas situações cotidianas, como, por exemplo, ao estipular a quantidade de ingredientes para uma receita.

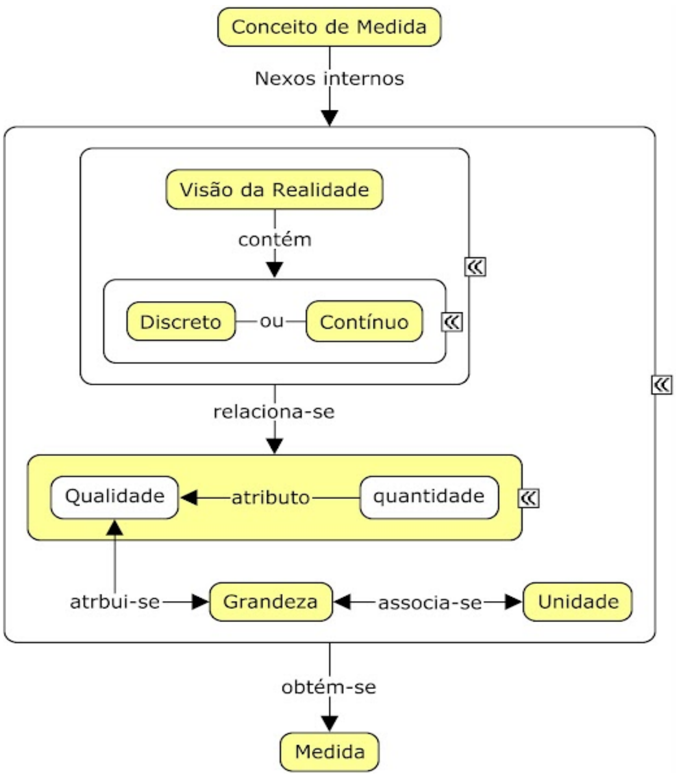
> A medida é a forma de expressar quantitativamente acontecimentos, fenômenos, objetos da nossa vida diária. Diz Frankestein (1989) que a medida é a descrição numérica de alguma coisa. Goblot (1927) afirma que toda a medida consiste em apropriar-se da qualidade sob forma de quantidade. (Lanner, 1995, p. 44)

De acordo com Cunha (2008), os nexos conceituais internos da medida — que estabelecem os elos necessários para a compreensão teórica do conceito — são: qualidade, quantidade, grandeza, unidade, discreto, contínuo e as diferentes linguagens de medir. Por sua vez, os nexos externos da medida estão relacionados à prática da mensuração, ou seja, às características operacionais e às ações concretas que materializam o conceito na atividade social.

> Pensamos nos nexos conceituais da medida e isso significa entender tanto as relações internas, como relações externas do conceito de Medida e estabelecer relações entre elas. De acordo com Kopnin (1978), Davidov (1988) estabelecer essas relações é elaborar o pensamento teórico da medida, o saber pensar e o saber fazer a medida. Nesta tese, portanto, entendemos que a medida é uma forma do pensamento de ver e modelar uma quantidade que faz parte da realidade. (Cunha, 2008, p. 29)

Vejamos, no mapa conceitual a seguir, a sistematização das relações conceituais discutidas até aqui.

Mapa Conceitual 2 - Nexos conceituais da medida



Fonte: Grupo de Pesquisa Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural (2021).

O ato de medir é uma atividade intencional e idealizada, que envolve a seleção da unidade, a correspondência entre a unidade e a grandeza, bem como a comparação da grandeza com essa unidade, seguida da expressão do resultado dessa comparação por meio de um número" (Caraça, 1984, p. 30).

As características de uma grandeza são o que definem a seleção da unidade de medida. Constata-se, portanto, que essa relação se configura como uma unidade dialética, composta por um par de conceitos que, embora possuam significados distintos, apresentam uma relação de interdependência, na qual um pressupõe e suscita o outro.

A própria constituição da realidade, segundo Caraça (1984), se organiza a partir de duas qualidades fundamentais: a interdependência e a fluência. A interdependência expressa-se na compreensão da qualidade como sendo o resultado da inter-relação de todos os elementos que constituem a natureza. Para o autor, "toda esta Realidade em que estamos mergulhados é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros" (Caraça, 1984, p. 109).

Além disso, Caraça (1984) define a noção de fluência com base no conceito de devir, ao afirmar que "o Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo flui, tudo devém" (Caraça, 1984, p. 110). Essa concepção dialética evidencia que a realidade não é estática, mas dinâmica, contraditória e em constante movimento, o que impõe, também, que os conceitos matemáticos — como grandeza, medida e quantidade — sejam compreendidos como constituições histórico-sociais, desenvolvidas no processo de transformação da própria atividade humana.

Portanto, a escolha da unidade de medida fundamenta-se no princípio da economia do pensamento que, conforme definido por Caraça (1984), corresponde à racionalização e à simplificação dos processos cognitivos envolvidos na medição. Esse princípio tem como finalidade otimizar a clareza e a eficiência das medições, minimizando complexidades desnecessárias e favorecendo a precisão dos resultados. Segundo o autor, a seleção da unidade deve considerar a natureza da grandeza a ser medida e as exigências práticas do contexto, pois "o número que há de vir a obter-se como resultado da medição condiciona a escolha da unidade" (Caraça, 1984, p. 31). Dessa forma, a unidade escolhida não apenas facilita os cálculos, mas também influencia diretamente a interpretação e a aplicação dos resultados. Além disso, Caraça (1984) ressalta que uma grandeza pode ser expressa por várias medidas, dependendo da unidade adotada, o que evidencia a importância de critérios bem fundamentados na seleção da unidade, assegurando a coerência e a eficácia na representação quantitativa da realidade.

O ato de medir constitui uma prática essencial da linguagem técnica, conforme Moura *et al* (2016). Para os autores, transformar uma unidade de medida pressupõe que o instrumento constituído pelo homem no trabalho cotidiano seja submetido a processos de abstração, os quais permitem sua aplicação a diferentes contextos e situações.

Para Kopnin (1978), juízo, dedução e conceito representam formas do movimento do pensamento, entendidas como processos mediante os quais o indivíduo apreende a realidade.

Kopnin (1978, p. 191) define o conceito como um “sistema de deduções”. Na constituição do conceito, admite-se uma atribuição fundamental à análise, entendida como o movimento que parte do concreto, dado nas sensações, em direção ao abstrato. A ela se articula a síntese, que corresponde ao movimento do abstrato para um novo concreto — não mais empírico, mas teórico, enriquecido pelas definições abstratas sistematizadas. O método analítico, segundo o autor, é inconcebível sem indução e dedução. Ao elaborar um conceito, considera-se, inicialmente, os juízos e as deduções que o compõem; articulados, esses elementos permitem a formação de um sistema coerente de ideias. Assim, “o conceito é a confluência, a síntese das mais diversas ideias, o resultado de um longo processo de conhecimento” (Kopnin, 1978, p. 191).

Por juízo, o autor entende a afirmação que expressa as características, as conexões e as relações que um objeto mantém com a realidade**.** O juízo constitui, portanto, um mecanismo fundamental do pensamento, que expressa a apreensão dos objetos e de seus vínculos com o mundo material. Segundo Kopnin (1978, p. 198), “juízo é um processo de apreensão do objeto pelo pensamento”.

Segundo Kopnin (1978), a dedução consiste na abreviação e sistematização do conhecimento, condensando informações adquiridas em momentos distintos para gerar um saber novo e mais elaborado. A dedução, afirma o autor, “é elemento indispensável do caráter criativo do trabalho humano” (Kopnin, 1978, p. 213). Dessa forma, as formas do movimento do pensamento — juízo, dedução e conceito — desenvolvem-se historicamente no processo de apropriação da realidade, e, no âmbito deste trabalho, são reconhecidas como traços fundamentais no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Diante desse contexto, a apropriação do conceito consiste na capacidade de utilizá-lo de forma consciente, compreendendo seus fundamentos, suas determinações internas e suas articulações com outros conceitos. Assim, ao apropriar-se do saber socialmente produzido — fruto da atividade humana histórica e cultural — o sujeito passa a reconhecer que as qualidades atribuídas a um determinado objeto não são intrínsecas a ele, mas derivam de relações e comparações estabelecidas no processo de interação social e na prática produtiva.

> Dessa forma, a quantidade, atributo da qualidade, é também um nexo conceitual da medida. Ao medirmos a quantidade de certa qualidade de um determinado objeto, estamos na verdade, medindo as variações quantitativas dessa qualidade em outros objetos. Concluímos, do que foi até agora, que para o entendimento do conceito de grandeza é importante a noção da relação qualidade-quantidade nos objetos. (Cunha, 2008, p. 30)

Devemos ressaltar também que, dentre os conceitos fundamentais associados à medida, destaca-se um par dialético essencial para sua compreensão: os conceitos de discreto e contínuo. Nesse sentido, consideramos como grandezas discretas aquelas associadas a elementos que podem ser contados, enquanto as grandezas contínuas se referem às que podem ser medidas. Assim, “as grandezas discretas são relacionadas a objetos contáveis, por exemplo, o número de carros no estacionamento ou o número de maçãs numa caixa; já as grandezas contínuas são aquelas possíveis de serem medidas, como a altura, o peso, o ângulo e o tempo” (Cunha, 2008, p. 31).

> Desde o século VI a.C., os matemáticos gregos, a começar por um certo Pitágoras, já tinham descoberto que a diagonal de um quadrado "não tem nenhuma medida comum" com o seu lado. De fato, tanto pela medida quanto pelo raciocínio, o comprimento de sua diagonal não corresponde a um número inteiro de metros. Ou seja, uma vez que tal é 0 seu comprimento matemático. a $\sqrt{2}$ é um número "incomensurável". Foi a descoberta do que hoje denominamos números irracionais", os que não são nem inteiros nem frações. (Ifrah, 1985, p. 329)

Caraça (1984) apresenta diversas impossibilidades que surgiram historicamente no campo da matemática, demonstrando que os conjuntos numéricos existentes até então não eram suficientes para atender às demandas operatórias. Essas limitações impulsionaram a criação de novos campos numéricos, culminando na formulação dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

Avançando na análise, recorremos a Vigotski (2001), que nos ajuda a compreender o elemento central e final de nossa investigação: todo conceito é, por essência, uma generalização. Um conceito isolado representa apenas uma fração da totalidade e sua constituição não se dá de forma aleatória, pois os conceitos não emergem no pensamento — seja da criança ou do adulto — como elementos dispersos ou desconectados. Caso contrário, seria impossível realizar qualquer operação intelectual que exigisse a articulação ou a analogia entre conceitos. Mais ainda, se não existisse conexão entre eles, cada conceito isolado também careceria de unidade interna, visto que sua constituição pressupõe necessariamente um sistema conceitual previamente estruturado. A formação de conceitos e sua generalização, portanto, decorrem não de uma lógica formal abstrata, mas do próprio movimento da realidade objetiva, cujas determinações se expressam no pensamento, em analogia ao desenvolvimento da percepção sensorial, mediada e historicamente constituída.

No plano prático, conforme destaca Caraça (1984), é, em geral, possível estabelecer uma relação entre uma unidade e a grandeza que se deseja medir. Esse processo se fundamenta no conceito de qualidade, que representa o recorte que fazemos da totalidade da realidade, isolando determinados aspectos. Esse isolado, no entanto, não é arbitrário, mas determinado por princípios qualitativos e quantitativos. Segundo o autor, ao compreendermos um fragmento da realidade, imediatamente somos capazes de constituir novas qualidades, isto é, novos isolados. Contudo, é importante compreender que o isolado não se confunde com a realidade total, uma vez que ele é, por definição, uma abstração subjetiva — uma mediação do real — e, portanto, não pode ser tomado como a própria realidade objetiva.

Nesse sentido, alinhamos nossa compreensão à reflexão de Sousa (2004) sobre a relação entre o inesperado e o conceito de isolado, conforme discutido por Caraça (1984). O autor argumenta que, quando ocorre um elemento inesperado no processo de análise, ele pode ou não estar diretamente relacionado com o isolado previamente estabelecido. No entanto, isso não significa que o isolado escolhido seja incorreto. Ao contrário, o inesperado pode atuar como um elemento propulsor, despertando a necessidade de reformular ou ampliar o isolado, inserindo-o como parte constitutiva de um isolado maior e mais abrangente. Como afirma Caraça (1984, p. 113), "a reorganização de uma certa seção da realidade pode exigir a constituição frequente de cadeias, e a cada elo da cadeia corresponde um nível de isolado".

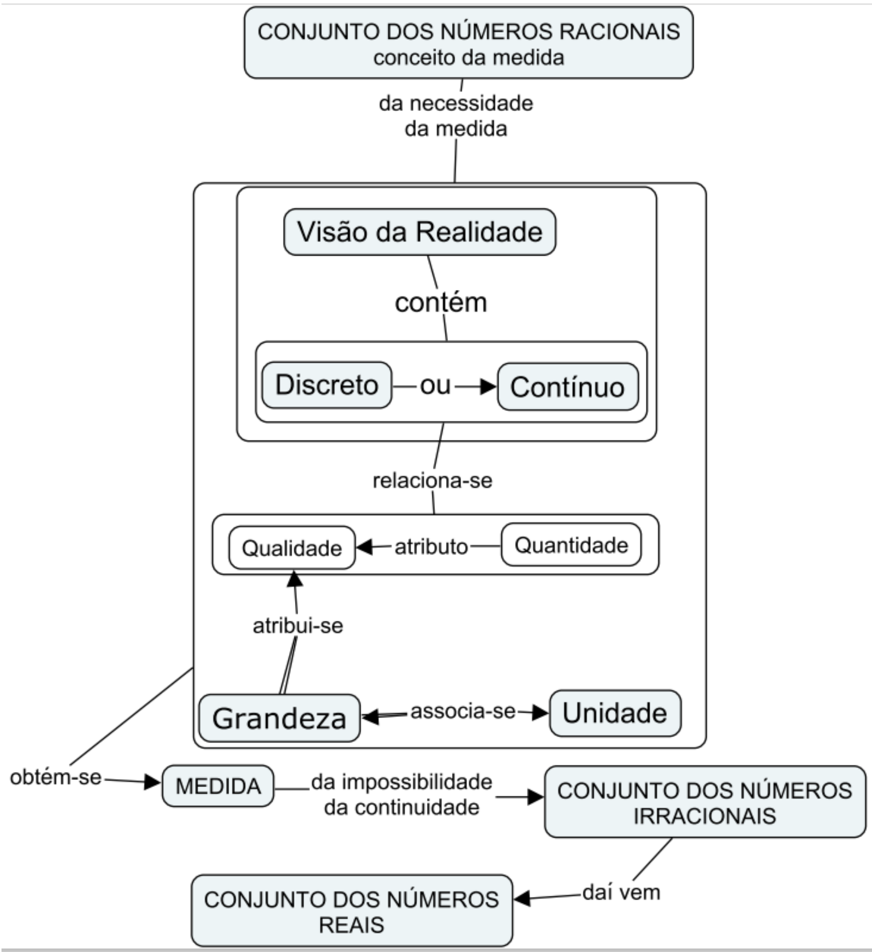
Por outro lado, no campo teórico, nem sempre é possível estabelecer uma relação direta entre a unidade e a grandeza, o que leva à noção de incomensurabilidade. Nesses casos, declara-se que certos segmentos são incomensuráveis, exatamente porque não existe uma unidade comum capaz de medi-los. Conforme ressalta Sousa (2004), pensar algebricamente é também pensar cientificamente, uma vez que a álgebra não opera apenas sobre números absolutos, mas sobre grandezas que necessitam ser medidas. Essas grandezas podem ser quaisquer elementos conhecidos e nomeados, justamente porque são abstrações produzidas no processo histórico de desenvolvimento do conhecimento humano.

> Não basta elaborarmos uma série de tarefas que contenham o "número manual" (Lima *et al*, 1998), ou seja, o numeral, representação da ideia de quantidades, para que o estudante possa elaborar generalizações em doses homeopáticas, substituindo a presença física do número, o numeral, pela presença física e ao mesmo tempo abstrata das diversas letras do alfabeto que representam, simbolicamente, a ideia de variável, em seus diversos aspectos. Há de se considerar no pensamento algébrico os "nexos internos e externos"

> (Davydov, 1982) do pensar aritmeticamente: a ideia de número e o conceito fundamental do pensar algebricamente: o movimento. (Sousa, 2004, p. 17)

Sousa (2004) argumenta que o pensamento algébrico se fundamenta na integração dos nexos internos e externos dos conceitos matemáticos, os quais abrangem, de forma dialética e interdependente, a noção de número — elemento central no pensamento aritmético — e o conceito de movimento. Este último assume papel fundamental na constituição do pensamento algébrico, pois possibilita a transição entre diferentes níveis de abstração e a formulação de generalizações que sustentam a estrutura conceitual da álgebra. Desse modo, o movimento não se expressa apenas na dinâmica das operações, mas, sobretudo, na superação das limitações do pensamento empírico, permitindo aos sujeitos compreenderem as relações estruturais que caracterizam o raciocínio algébrico. Vejamos, a seguir, como essas relações se articulam no mapa conceitual:

Mapa Conceitual 3 - Nexos conceituais do conjunto dos números irracionais / Constituição dos números reais



Fonte: A autora

Ademais, Caraça (1984) entende a incomensurabilidade de segmentos como uma insuficiência estrutural do conjunto dos números racionais para expressar determinadas relações geométricas. Assim, o autor destaca outros atributos fundamentais dos números racionais, os quais são: *infinidade*, *ordenação*, *densidade* e *continuidade*:

a) na infinidade, observa-se que o conjunto dos números inteiros possui uma sequência infinita de elementos. Basta acrescentar uma unidade a qualquer número para obter outro maior, o que evidencia a infinitude desse conjunto. Consequentemente, o conjunto dos números racionais também é infinito, uma vez que contém o conjunto dos inteiros como subconjunto:
    — adicionalmente, o conjunto de pontos de uma reta, assim como o conjunto dos números inteiros, possui uma infinidade de elementos. Essa constatação pode ser formalizada por meio da correspondência biunívoca entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos pontos da reta, demonstrando, assim, sua infinitude;
b) a ordenação, embora a noção de ordenação já esteja presente nos conjuntos dos números naturais e inteiros, é necessário ressignificar essa relação no contexto dos números racionais e sua correspondência com os pontos da reta. Para Caraça (1984), a ordenação é estabelecida a partir da seguinte relação: "dados dois pontos *A e B*, diz-se que *A* precede *B* se estiver à sua esquerda" (Caraça, 1984, p. 55). Essa relação é transitiva, isto é, "se *A* precede *B e B* precede *P,* então *A* precede *P"* (Caraça, 1984, p. 56):
    — portanto, "todo conjunto em que haja um critério de ordenação transitivo diz-se um conjunto ordenado. O conjunto dos pontos da reta, portanto, é ordenado" (Caraça, 1984, p. 56);
c) a densidade, de acordo com Caraça (1984), um conjunto é considerado *denso* quando, entre quaisquer dois de seus elementos, existe sempre um terceiro elemento do mesmo conjunto. Isso se verifica claramente no conjunto dos números racionais, já que entre quaisquer dois racionais é sempre possível encontrar outro número racional. Esse atributo expressa uma característica essencial da estrutura desse conjunto, distinguindo-o dos conjuntos que não possuem essa propriedade;
d) a continuidade, segundo Caraça (1984), o problema da continuidade é um dos mais relevantes, profundos e debatidos da história da Ciência. Para o autor, a linha reta constitui a imagem ideal da continuidade, pois nela "há mais do que simples variação por gradações insensíveis" (Caraça, 1984, p. 57). A reta representa uma totalidade em

que a variação ocorre de maneira contínua, sem rupturas ou saltos, garantindo a coesão do espaço geométrico.

Nesse sentido, o problema da incomensurabilidade permite uma análise mais profunda sobre os limites dos números racionais, conduzindo ao desenvolvimento do conceito de negação da negação — movimento teórico que possibilita a superação das contradições internas desse sistema numérico — e, assim, à generalização que resulta na constituição do conjunto dos números irracionais e, consequentemente, dos números reais.

Dessa forma, a incomensurabilidade configura-se como um nexo conceitual fundamental tanto dos números racionais quanto dos números reais. Esse entendimento não apenas aprofunda a análise teórica dos racionais, mas também fornece os elementos necessários para o desenvolvimento de um raciocínio teórico robusto, que pressupõe a mobilização e a apropriação dos nexos internos e externos dos conceitos matemáticos.

Para Caraça (1984), "pode afirmar-se que o estado propriamente científico de cada ramo só começa quando nele se introduz a medida e o estudo da variação quantitativa como explicação da evolução quantitativa" (Caraça, 1984, p. 125).

Ademais, o autor destaca que a matemática representa uma forma de compreender a realidade e sua transformação, por meio do estudo das relações entre as grandezas e suas variações.

Ainda segundo Caraça (1984), o desenvolvimento da ciência moderna, sobretudo a partir do Renascimento, inauguraram uma nova abordagem metodológica, baseada na observação, na experimentação e na mensuração. A partir desse paradigma, o esclarecimento dos fenômenos se passou a dar pelas variações quantitativas, o que possibilitou a elaboração de leis matemáticas e modelos explicativos baseados em estruturas quantitativas.

O autor também afirma que "o surgimento dos conceitos matemáticos acontece à medida que problemas relevantes de cunho capital, prático ou teórico: é o número natural, surgindo da necessidade da contagem; o número racional, da medida; o número real, para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentes" (Caraça, 1984, p. 125).

De acordo com Ríbnikov (1970), a concepção de número real, como síntese dos números racionais e das relações que deles decorrem, já emergia entre os matemáticos da Antiguidade avançada, tendo alcançado certo grau de desenvolvimento no Oriente Médio.

Ríbnikov (1970) acrescenta que uma concepção análoga surgiu na Europa muitos séculos depois. Foi somente a partir do século XVI, impulsionada pelo acelerado desenvolvimento dos métodos de cálculo, que essa ideia passou a ser efetivamente reconhecida e sistematizada. Contudo, foi com Newton, na década de 1670, que essa concepção ganhou maior precisão teórica, sendo formalizada e publicada mais tardiamente, em 1707, em sua obra *Aritmética Universal*, na qual o autor estabelece os fundamentos dessa concepção.

> "Por número entenderemos, não tanto o conjunto de unidades como a relação abstrata qualquer magnitude com outra magnitude do mesmo gênero, tomado por nós como uma unidade. Há três tipos de números: inteiro, fracionário e irracional. O número inteiro é aquele que se mede com unidades, o fracionário com partes múltiplas da unidade, os números irracional não são comensuráveis com a unidade". (Ribnikov, 1970, p. 112, tradução nossa)

O autor reflete, ainda, que a influência da propensão algorítmica presente na matemática árabe exerceu papel determinante na configuração da álgebra. Nesse contexto histórico, pela primeira vez, a matemática passou a ser tratada de maneira sistemática, desmembrando-se qualitativamente e adquirindo autonomia em relação às demais áreas do saber matemático. Tal movimento se fundamenta na síntese histórica de elementos provenientes das práticas matemáticas de diferentes povos. Dentre eles, destacam-se: a álgebra geométrica dos gregos, o agrupamento de problemas do mesmo gênero, associado à busca por algoritmos generalizados na Babilônia, bem como os problemas de cálculo desenvolvidos pelos hindus, que conduziram à formulação de equações de primeiro e segundo graus.

Sousa (2004) destaca que, embora Diofanto tivesse como foco central o número, sua compreensão permanecia restrita a concepções menos generalizadas. As conjecturas elaboradas por Viète, por sua vez, introduzem um avanço qualitativo ao possibilitar que a variável passe a ser concebida sob a perspectiva do movimento e da fluidez, rompendo, assim, com a rigidez das representações puramente numéricas. Nesse sentido, como apontam Lima e Moisés (1997; 2000), a criação da variável-numeral por Diofanto e, posteriormente, da variável-letra por Viète reflete uma transformação significativa no desenvolvimento do pensamento algébrico, ao consolidar o uso das letras como representação de quantidades desconhecidas e generalizações matemáticas (Sousa, 2004, p. 120). Assim:

> na correspondência de dois conjuntos de números", desse modo, para facilitar o manuseio dos números de um determinado conjunto e evitar a obrigação de precisar revisitar sempre um quadro "de resultados particulares" e não alcançar a generalidade do caso investigado, por consequência desse fato, torna-se indispensável encontrar uma "representação simbólica". A essa concepção simbólica, estabelece-se constituindo "o conceito de variável". (Caraça, 1984, p. 127).

Para Caraça (1951), o conceito de variável se define por:

> Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos variável.
> Que o símbolo x, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de os representar a todos; afinal é o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que nutre da vida individual de cada um de seus membros, mas não se reduz a ela. (Caraça, 1984, p. 127)

O movimento do pensamento, de acordo com Kopnin (1978, p. 197), é constituído por "juízo", dedução e conceito, formas que se desenvolvem ao longo de todo o processo de aquisição do conhecimento. No caso específico da formação do pensamento algébrico, Sousa (2004, p. 26) reconhece essas três formas como fundamentais para sua constituição.

Foi nesse movimento que o conhecimento produzido por Diofanto, ao se desvincular dos processos geométricos, passa a se equiparar, em vários aspectos, à álgebra babilônica. Contudo, diferentemente dos babilônios, "a Arithmetica de Diofante (tal como a temos) é quase toda dedicada à resolução exata de equações tanto determinadas quanto indeterminadas" (Boyer, 2012, p. 134).

Diofanto já dominava conhecimentos que se assemelham às atuais regras de manipulação de expoentes. A principal divergência "entre a sincopação de Diofante e a notação algébrica moderna está na falta de símbolos especiais para operações e relações, bem como de notação exponencial" (Boyer, 2012, p. 134).

Lins e Gimenez (2001) sintetizam de forma precisa o percurso histórico do desenvolvimento algébrico. Os autores destacam que esse desenvolvimento remonta aos babilônios e aos egípcios (por volta de 1700 a.C.), os quais formularam leis eficazes para cálculos diversos e para a resolução de problemas, sistematizando regras de aplicação geral. A partir desse ponto, há um salto de quase dois mil anos até a obra do grego Diofanto (cerca de 250 d.C.), cuja principal contribuição foi a introdução de um sinal específico para representar a incógnita em uma equação, aproximando-se da notação que utilizamos atualmente.

No período seguinte, observa-se um intervalo de aproximadamente 1400 anos — inferior ao salto anterior, porém com desdobramentos ainda mais significativos — até os avanços promovidos por François Viète (por volta de 1500). Viète foi o precursor na formalização e sistematização do uso de letras tanto para representar valores conhecidos quanto para incógnitas em expressões algébricas. Essas letras podiam representar quantidades ou grandezas geométricas, cujos cálculos obedeciam a leis próprias, análogas às concepções tanto aritméticas quanto geométricas.

> Essa visão, a de que a introdução de notação especial (no caso, letras) corresponde diretamente a determinadas mudanças conceituais, e, mais do que isso, que essas mudanças sinalizam claramente um estágio de "desenvolvimento" da atividade algébrica, continua a ter implicações nas idéias de pesquisadores em Educação Matemática. Notações são mais ou menos adequadas en1 uma certa atividade, mas isso depende fundamentalmente dos significados em jogo; mais adiante, voltaremos a esse tema. (Lins; Gimenez, 2001, p. 92)

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apontam que, para Felix Klein, existe uma diferença essencial entre as perspectivas das representações algébricas antes e após Viète. Até Viète, as representações se restringiam à simbolização de quantidades desconhecidas em uma equação, ou seja, tratavam-se de representações pontuais, destinadas a expressar uma quantidade específica a ser determinada. A originalidade instituída por Viète, contudo, não reside apenas na possibilidade de representar tanto quantidades conhecidas quanto desconhecidas, mas, sobretudo, na atribuição de funções diversas às representações dessas quantidades no interior de um sistema algébrico.

Nesse contexto, Ifrah (1985, p. 337) explica que "a algebrização representou, de início, uma generalização da aritmética: 'x', 'y' ou qualquer outra letra constituem uma espécie de novo algarismo e representam um número, ainda desconhecido".

A constituição da notação algébrica — que passa a fazer uso das letras para representar incógnitas, parâmetros e constantes — representou um avanço significativo no desenvolvimento do pensamento matemático. Essa inovação tornou possível expressar ideias gerais e abstratas, permitindo à álgebra se emancipar da dependência da linguagem verbal para a explicitação dos conceitos matemáticos.

Em razão disso, o uso da letra como signo algébrico não apenas simplificou a escrita dos procedimentos matemáticos, mas também favoreceu a sistematização dos raciocínios, conferindo à álgebra uma maior economia cognitiva e uma aproximação mais direta com o pensamento abstrato. Nesse sentido, conforme destaca Leibniz, "poupa o espírito e a imaginação, cujo uso é preciso economizar. Ele nos permite raciocinar sem muito esforço, ao colocar os caracteres no lugar das coisas para desimpedir a imaginação" (Ifrah, 1985, p. 338).

> Modificação conceitual: esta é a definição que podemos dar à linguagem simbólica proposta por Viéte. Tal linguagem, a partir de convenções, tem por objetivo auxiliar o pensamento na realização de suas tarefas. Propicia à matemática ser ferramenta para outras ciências (Fraile, 1998). É na álgebra simbólica "que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos, que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam (Sousa, 2004, p. 113).

Sousa (2004) reflete, ainda, que a humanidade está constantemente em busca de desvendar maneiras de compreender o simbolismo algébrico, uma vez que este favorece a comunicabilidade entre especialistas de diferentes áreas do saber. Na prática, fundamentado na busca pela simplicidade, o pensamento algébrico orienta-se, na perspectiva de pensar o inexplorado — a incógnita —, a partir do uso da letra como representação simbólica.

Segundo Ríbnikov (1970), nos trabalhos dos matemáticos do Oriente Médio, esses elementos algébricos foram, pela primeira vez, selecionados e sistematizados em uma nova área específica da matemática, na qual se formulou o objeto dessa nova parte da ciência e se construiu uma teoria própria, fundamentada e estruturada.

A forma como buscamos retratar o pensamento algébrico nos conduz à reflexão de que se trata de uma forma superior de pensamento, que se manifesta não apenas nos diversos ramos da matemática, mas, igualmente, nas mais variadas áreas do conhecimento, conforme apontam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

A aritmética, de acordo com Panossian (2014), expande-se a partir do uso de símbolos numéricos, enquanto a álgebra se estrutura por meio de instrumentos simbólicos válidos para operar com números em geral e, principalmente, com grandezas abstratas, generalizando padrões, regularidades e relações.

> No movimento histórico da álgebra, é possível reconhecer os movimentos da realidade objetiva sendo expressos na Antiguidade pela álgebra retórica, por meio das palavras, quando os símbolos ainda não haviam sido criados, pela álgebra geométrica, (variável figura); pela álgebra sincopada (variável numeral) em que se usam as abreviaturas; e posteriormente pela álgebra simbólica (variável letra). (Panossian, 2014, p. 50)

Conforme Sousa (2004), os algarismos, na atualidade, possuem o mesmo significado de algoritmo, cuja finalidade é facilitar o cálculo. Ademais, os algoritmos operam sobre as "sete operações: adição, subtração, duplicação, diminuição, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada", possibilitando o "abandono do ábaco", o desenvolvimento da escola mercantil — responsável pela origem das leis do cálculo —, bem como a constituição dos princípios da aritmética que dão suporte à formulação de "novas propriedades numéricas para a solução de problemas práticos" e, ainda, aos fundamentos das "álgebras retórica, sincopada e simbólica" (Sousa, 2004, p. 95).

Ao voltarmos nosso olhar para o contexto histórico da evolução e da consolidação dos algarismos, podemos perceber que, após a introdução do zero no conjunto, não apenas se promoveu o avanço da economia, como também se ampliaram as possibilidades de cálculo, abrindo caminho para o desenvolvimento da álgebra.

Segundo Míbnikov (1970), a álgebra é concebida como uma arte científica cujo objeto de estudo abrange os números absolutos e as grandezas mensuráveis, frequentemente apresentadas como incógnitas. Esses elementos estão associados a dados previamente conhecidos, definidos como quantidades ou relações específicas. Assim, o objetivo central da álgebra é investigar as condições que vinculam as grandezas conhecidas às incógnitas, estabelecendo relações que permitam sua determinação.

A perfeição dessa arte reside no domínio dos métodos matemáticos que possibilitam a determinação das incógnitas, sejam elas numéricas ou geométricas. Conforme Ríbnikov (1970), a resolução algébrica ocorre exclusivamente por meio de equações, que expressam a igualdade entre atributos relacionados. Dessa forma, a álgebra não apenas busca determinar as incógnitas, mas também sistematizar as relações matemáticas que fundamentam sua resolução.

Para Panossian (2014), há um movimento no pensamento algébrico que, ao se associar ao modo como se organiza e representa a linguagem, dissocia-se das conexões objetivas com as adversidades do cotidiano. No século XIX, a busca pela formalização, as transformações internas na matemática e as exigências de outros ramos científicos conduzem a uma perspectiva cada vez mais abstrata e formal dessa ciência. “Com a matemática das grandezas variáveis, tomam forma os conceitos de variável, como generalização abstrata de variáveis concretas — como tempo, distância, velocidade etc. — e função, como imagem abstrata da relação de dependência entre grandezas” (Aleksandrov, 1988 apud Panossian, 2014, p. 49).

Caraça (1984) explica que, se tomarmos um símbolo x como variável no conjunto dos números reais — sendo que este não coincide especificamente com nenhum elemento desse conjunto —, ele torna-se capaz de caracterizar todos. Assim, em síntese, trata-se do “símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela” (Caraça, 1984, p. 127).

Caraça (1984) caracteriza a variável como um conceito que transcende o domínio estrito dos números, assumindo um nível de abstração superior. Segundo o autor, a variável representa um conjunto que sintetiza os elementos individuais, mas que, por sua própria natureza, os transcende, sendo “de uma natureza superior” (Caraça, 1984, p. 127).

Dessa forma, Caraça (1984) evidencia a contradição dialética presente no conceito de variável, pois ela representa e, ao mesmo tempo, não representa cada um dos componentes do conjunto. Essa particularidade ultrapassa qualquer concepção que queira ver na realidade uma permanência estática, associada a correntes de pensamento que não reconhecem a fluidez e o movimento como atributos essenciais da realidade.

As variáveis apresentam uma amplitude de representação que vai além da noção de incógnita. Enquanto as incógnitas, para os matemáticos árabes e europeus, tinham o intuito de expressar qualquer coisa desconhecida — retomando as elaborações de Viète sobre a álgebra simbólica —, as variáveis expressam o cerne da Física, ao investigar o movimento. Assim, conforme a autora, "os conceitos de grandezas variáveis e de função aparecem na matemática como reflexos das propriedades gerais do conceito de mudança. Determinam uma nova etapa para a matemática, a matemática das grandezas variáveis" (Aleksandrov *et al.,* 1988, p. 65 apud Sousa, 2004, p. 125).

SegundoRíbnikov (1970), o surgimento do cálculo algébrico literal institui um dos aspectos mais profundos no desenvolvimento histórico da matemática: o advento da álgebra como uma ciência geral das equações algébricas. As obras e o pensamento de Viète refletem com clareza esse momento decisivo.

A partir do momento em que os pesquisadores passaram a se debruçar sobre as elaborações de Kepler e Galileu Galilei — conforme apontam Karlson (1961) e Sousa (2004) —, cujas investigações estavam pautadas na compreensão do movimento, tornou-se mais acessível a apropriação dos conceitos de incógnita e de variável. Nessa direção, Sousa (2004) destaca que:

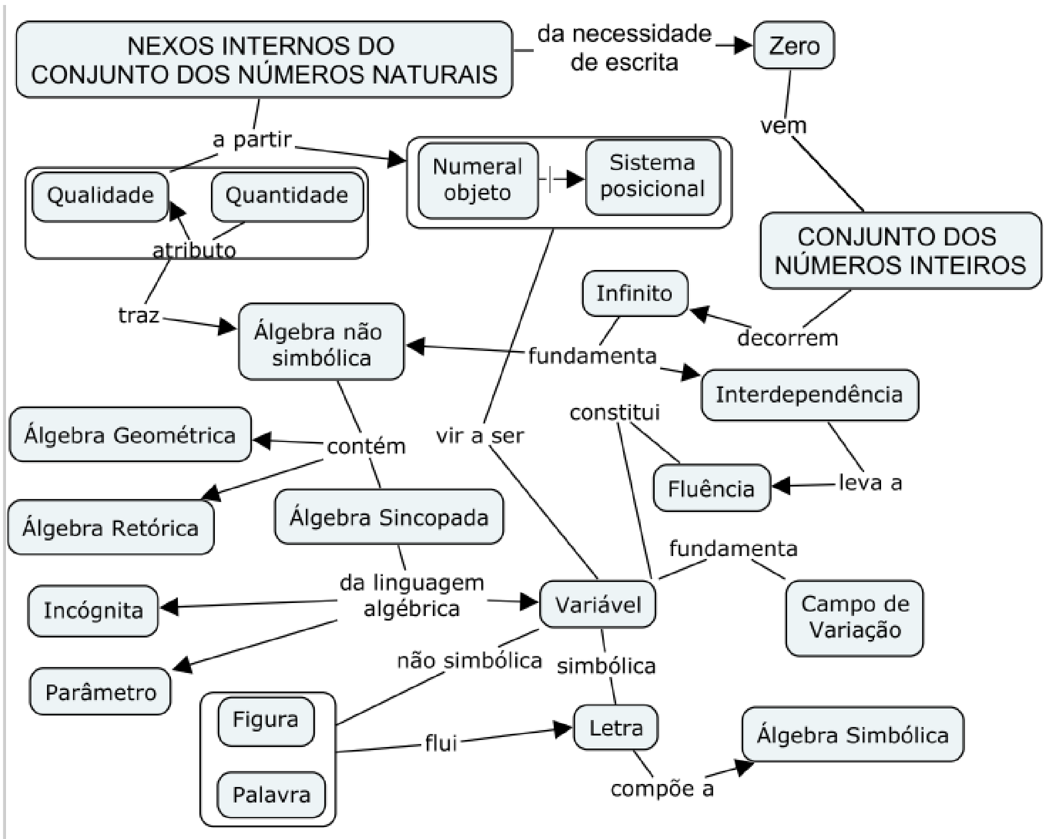
> há, nesse período, a partir da resolução de problemas do cotidiano da física, quase que, obrigatoriamente, a necessidade de se pensar em um instrumento que seja possível descrever movimentos da vida, quer esses movimentos sejam irregulares, quer sejam irregulares. Referir-se apenas à incógnita, ao desconhecido, até aquele momento era fazer referência a um tipo de movimento, o regular, à equação.
> No século XVIII, Euler definiu que 'uma função de quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira por essa quantidade variável e números ou quantidades constantes" Classificou as funções em algébricas e transcendentes. (Sousa, 2004, p. 126)

De acordo com Sousa (2004), as funções algébricas se organizavam em "irracionais e racionais, e as transcendentes se subdividiam em trigonométricas e logarítmicas. Por sua vez, os racionais se subdividiam em inteiras e fracionárias. A classificação proposta por Euler considerava algumas propriedades por ele definidas" (Sousa, 2004, p. 126).

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), no século XVIII, as elaborações de Euler, Lagrange e Gauss, constituídas a partir dos recursos proporcionados pelo cálculo infinitesimal, representaram um salto qualitativo na evolução da teoria das equações. Esse avanço permitiu investigar as relações que permanecem invariantes nas transformações de funções contínuas. Tal investigação conduziu à compreensão de que as propriedades das funções polinomiais — e, consequentemente, das equações algébricas — não estavam condicionadas ao fato de os coeficientes e as variáveis dessas equações pertencerem ao conjunto dos números. Por essa razão, “a interferência do cálculo infinitesimal no domínio da álgebra possibilitou o salto qualitativo no que se refere à natureza do objeto de investigação desse campo de conhecimento, fazendo-o atingir o período transoperacional” (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993, p. 81).

O conceito algébrico se desenvolve historicamente por meio de movimentos lógicos que conformam e estabelecem relações sob a forma de nexos conceituais. Sousa (2004) compartilha da compreensão apresentada por Caraça (1984), que discute a transformação do conceito de variável na ciência moderna. Nesse contexto, observa-se que “seu desenvolvimento não é linear, surgindo à medida que os movimentos numéricos se refinam, através do pensamento humano” (Sousa, 2004, p. 128). Tais afirmações podem ser observadas no mapa conceitual que segue:

Mapa Conceitual 4 - Nexos conceituais da álgebra.



Fonte: a autora.

Caraça (1984) ressalta que tudo no Universo está relacionado de alguma forma e que tudo está em constante transformação. Assim, diante dessas duas características, o autor declara a impossibilidade de captarmos a totalidade do Universo de uma só vez. Essa realidade contém duas características principais: “a interdependência e a fluência” (Caraça, 1984, p. 111).

O conceito de interdependência estabelece que tudo está relacionado, em permanente conexão e comunicação; já o conceito de fluência evidencia que tudo está em movimento, em constante transformação (Caraça, 1984).

Segundo Sousa (2004), “a realidade objetiva contém os reflexos dos resultados do conhecimento do objeto”, que derivam da mobilização da “[…] fluência, da interdependência, do pensamento humano”. A práxis humana constitui um meio repleto de sensações, “[…] abstraído e logicamente formalizado pelo pensamento em conceitos” (Sousa, 2004, p. 55).

Assim, conforme Sousa (2004), as conceituações algébricas compreendem a fluência e a permanência dos números e dos conceitos geométricos, tendo a variação como um dos nexos conceituais, cujo campo de manifestação é numérico.

Desse modo, “tais discussões consideram as relações que o pensamento faz com os conceitos de álgebra não simbólica e álgebra simbólica, bem como os conceitos de fluência, campo de variação e variável, nexos conceituais do pensar algebricamente” (Sousa, 2004, p. 18).

Segundo Tse Tung (2009, p. 34), “a causa fundamental dos fenômenos não é externa, mas interna; ela reside no contraditório do interior dos próprios fenômenos”. A partir dessa compreensão, o autor afirma que é nesse movimento de contradição que ocorre o desenvolvimento. Dessa forma, a dialética materialista se opõe às teorias das causas externas, nas quais reside o mecanicismo e o evolucionismo vulgar dos metafísicos. Contudo, a dialética materialista não descarta as causas externas, pois estas “[…] constituem as causas das modificações e operam por meio das causas internas” (Tse Tung, 2009, p. 36).

O percurso lógico-histórico analisado neste capítulo evidencia que a constituição do campo conceitual da álgebra é indissociável das necessidades históricas e sociais que impulsionaram a evolução do pensamento humano. Desde os primórdios da ideia de número até a elaboração dos conceitos mais complexos, como variável e movimento, a álgebra emerge como produto da capacidade humana de abstração, generalização e síntese conceitual.

Os nexos conceituais discutidos — tais como qualidade, quantidade, medida e continuidade — constituem a base estrutural que sustenta o pensamento algébrico, conectando elementos que transcendem o domínio puramente matemático para abarcar a dinâmica do raciocínio lógico, teórico e abstrato. Essa rede conceitual oferece não apenas uma fundamentação teórica para a matemática, mas também um suporte essencial para o desenvolvimento do pensamento crítico, criativo e científico, favorecendo uma compreensão aprofundada das relações entre fenômenos abstratos e concretos.

Ademais, a compreensão desses nexos no ensino da álgebra é fundamental para que os processos de ensino e aprendizagem sejam significativos, favorecendo a formação do pensamento teórico nos estudantes. Ao se considerar as dimensões lógico-históricas e epistemológicas no ensino da álgebra, é possível superar a mera mecanização de procedimentos, promovendo uma abordagem reflexiva e crítica, capaz de contribuir para a modelagem, a análise e a interpretação de fenômenos complexos.

Portanto, a análise apresentada neste capítulo reforça a relevância do estudo da álgebra sob a perspectiva lógico-histórica, tanto para a formação docente quanto para a prática educativa. Essa abordagem consolida a álgebra como um campo dinâmico e imprescindível no desenvolvimento do conhecimento matemático, ao mesmo tempo que oferece subsídios teóricos e metodológicos para práticas pedagógicas que potencializem o ensino como meio de acesso ao pensamento abstrato, à compreensão das transformações da realidade e ao desenvolvimento do psiquismo superior.

3.5 O desenvolvimento do pensamento algébrico

A álgebra, como parte integrante do conhecimento matemático, reflete um longo processo histórico e cultural, que transcende sua função instrumental como ferramenta de cálculo. Desde os primórdios da civilização, sua evolução está intimamente relacionada às necessidades humanas de generalização e abstração, estabelecendo as bases para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse contexto, a generalização da aritmética emerge como um alicerce fundamental, pois permite a ascensão a níveis superiores de abstração, possibilitando a compreensão de relações matemáticas mais complexas.

Este estudo tem como objetivo analisar a generalização da aritmética como mediação fundamental na ascensão ao pensamento algébrico, destacando sua constituição histórico-dialética e suas implicações para o ensino da matemática. A investigação parte da compreensão de que o pensamento algébrico não é um produto espontâneo, mas um processo mediado pelas interações sociais, culturais e teóricas e que, conforme Davidov (1988, p. 143) articula o movimento do pensamento que “no processo do conhecimento conduzem à universalidade”. Ao examinar as perspectivas históricas, filosóficas e pedagógicas, busca-se evidenciar que a álgebra não se reduz à manipulação de símbolos, mas constitui um marco essencial na formação do pensamento matemático teórico e na compreensão consciente das relações e regularidades presentes na realidade.

De acordo com Sousa (2004), a atividade de pensar está intrinsecamente vinculada à capacidade de refletir sobre a natureza e os aspectos lógico-históricos que estruturam o conhecimento matemático. Nesse movimento, segundo o autor, “há a fluência do pensamento algébrico" e a oportunidade de compreender os "nexos internos e externos" (Sousa, 2004, p. 11). Esses nexos revelam a complexidade do pensamento matemático, situando a álgebra como um campo que articula o particular ao geral, favorecendo a formação de abstrações indispensáveis para a compreensão das relações matemáticas.

Para Almeida, Santos (2017, p. 44), o pensamento algébrico "caracteriza-se pela generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, além de perceber as relações de variações e (co)variações".

De acordo com Sousa (2004, p. 87), o pensamento algébrico está intrinsecamente relacionado aos conceitos de número, movimento e fluência. Nesse sentido, inspirados pela concepção de Heráclito sobre o devir "para explicar a realidade. A compreensão dos conceitos algébricos considerou os elementos históricos desenvolvidos pelo pensamento humano desde as mais remotas civilizações. Nunca esteve dissociado da cultura e do trabalho humano".

Quando priorizamos as técnicas operatórias da aritmética em detrimento da reflexão, perdemos uma oportunidade fundamental de favorecer que os estudantes desenvolvam sua capacidade de pensar sobre os aspectos genéricos das situações. A reflexão sobre a lógica das operações "se refere a uma maior capacidade de articular os recursos postos em jogo na solução de um problema ou na condução de uma investigação" (Sousa, 2004, p. 15).

A essência do conceito de número reside na compreensão dos nexos que ele contém, como, por exemplo, "os conceitos de senso numérico e correspondência, bem como admite diversos campos que historicamente foram ampliados a partir das necessidades do dia a dia e da própria matemática, apresentando naturezas bem distintas" (Sousa, 2004, p. 16).

O ensino de Matemática, especialmente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, demanda que os professores compreendam a relação entre os conteúdos concretos da álgebra e sua constituição histórico-dialética. Sousa (2004), dialogando com Kosík (2002), enfatiza que esse processo se realiza pela "ascensão do abstrato ao concreto", movimento que caracteriza o desenvolvimento do pensamento teórico. Trata-se de uma dinâmica em que os conceitos abstratos se objetivam na prática, tanto no processo de ensino quanto na própria atividade de estudo. Dessa forma, o ensino da álgebra não se limita à transmissão de regras e procedimentos, mas visa à formação de um pensamento teórico, reflexivo e crítico, que possibilite a apropriação consciente dos conceitos matemáticos.

Assim, observa-se que o desenvolvimento do pensamento algébrico não é um processo natural ou espontâneo. Essa forma específica de pensamento requer um grau de desenvolvimento que se constitui pela formação dos conceitos científicos e pelas interações sociais mediadas. Como afirma Radford (2021, p. 182), "um passo importante no desenvolvimento ontogenético do pensamento algébrico do estudante será esta passagem da denotação como índice para a denotação como símbolo sem amarras contextuais”.

Kopnin (1978, p. 191) define o conceito como um “sistema de deduções”. Na constituição do conceito, admite-se uma atribuição central “à análise, enquanto movimento que parte do concreto, dado nas sensações, ao abstrato, cabendo também à síntese, enquanto movimento do abstrato a um novo concreto, que é o conjunto das definições abstratas”. O método analítico não se sustenta sem “indução e dedução”. A elaboração conceitual articula “juízos e deduções” que, organizados, viabilizam a formação de um sistema coerente de ideias. Assim, “o conceito é a confluência, a síntese das mais diversas ideias, o resultado de um longo processo de conhecimento” (Kopnin, 1978, p. 191).

De acordo com Sousa (2004), é imprescindível elaborar o conceito de álgebra no processo de ensino, na medida em que os estudantes constroem juízos sobre os nexos conceituais que a fundamentam. Isso ocorre quando compreendem a articulação entre o desenvolvimento lógico-histórico da álgebra e a formação de sua linguagem simbólica, no movimento do pensamento algébrico. Embora existam definições formais sobre álgebra, “entendemos que o caminho mais adequado deve considerar a relação lógico-histórica entre *o* número, a figura e a letra. Esse percurso abarca a fluência dos nexos conceituais internos e externos que estruturam o conceito de variável” (Sousa, 2004, p. 64).

Como por exemplo:

> O leitor não deveria se espantar ao concluir que essa nossa caracterização de pensamento algébrico corresponde bastante de perto ao que poderíamos chamar de "manipulação formal"; é evidente que uma caracterização que deixasse de fora esse aspecto não seria de interesse. Por outro lado, é preciso ver que nossa caracterização não se esgota como "cálculo formal". Ela nos permite distinguir variedades de atividade algébrica-algébrica (isto é, aquela em que os significados são produzidos por pensamento algébrico): se "número" se refere aos reais, temos uma variedade, refere-se aos complexos, temos outra, e assim por diante. Com isso, queremos dizer que não estamos interessados em reduzir "pensamento algébrico" a uma noção abstrata e extremamente genérica, como seria o caso se disséssemos que pensar algebricamente é "operar sintaticamente", como alguns autores parecem sugerir; para que fique caracterizada uma atividade algébrica-algébrica, é preciso que conheçamos as propriedades dos "números" e das "operações aritméticas"/ termos genéricos, é verdade, mas que só ganham vida "concreta" na medida em que são especificados em sua particularidade, no interior da atividade em questão. (Lins; Gimenez, 1997, 151-152)

Para Sousa (2004), o concreto do pensamento se interliga com a realidade objetiva, que é resultado do conhecimento, pois o concreto do pensamento algébrico considera aspectos conhecidos e desconhecidos da realidade. O lógico-histórico no pensamento algébrico nos possibilita dizer que “o concreto do conteúdo algébrico é o conceito de movimento, de fluência, que se materializa no conceito de função. Tanto o conceito de movimento como o de função são lógico-históricos no pensamento do homem” (Sousa, 2004, p. 54).

Na análise de Sousa (2004), a atividade do pensamento algébrico se configura como movimento, cuja totalidade se expressa na fluência e na interdependência dos campos numéricos, articulados às características da geometria. Essa concepção possibilita situar a álgebra em dois momentos históricos fundamentais: o primeiro, relacionado à generalização da aritmética; o segundo, à constituição das relações de interdependência entre os campos numéricos (ou conjuntos), o que permite matematizar a fluência, ou seja, formalizar as variações e os movimentos da realidade. Diante disso, Sousa (2004, p. 58) afirma que “é o lógico-histórico dos conceitos de fluência, campo de variação e variável que conecta o singular da álgebra não simbólica — a retórica, a sincopada e a geométrica — à álgebra simbólica, conduzindo à emergência do conceito mais geral de álgebra, que está por vir a ser”.

Nessa perspectiva, Nunomura, Silva e Vertuan (2019) evidenciam que diversos autores, como Blanton e Kaput (2005), atribuem ao pensamento algébrico as seguintes características:

> a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); b) a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); c) a modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações; d) a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações. (Blanton; Kaput, 2005, p. 413)

Enquanto Lins e Gimenez (1997), destacam que o pensamento algébrico é um modo de constituir significado para a álgebra, sendo que este pensamento se apresenta por meio:

> 1) produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso aritmeticismo); 2) considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos ' 1 físicos" ou geométricos (chamamos a isso internalismo); e, 3) operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso analiticidade). (Lins; Gimenez, 1997, p. 150)

Assim, tem-se investigado a generalização algébrica a partir da generalização aritmética, compreendendo-a como mediação fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico. Nessa direção, Moretti, Virgens e Romeiro (2021) analisam as ideias necessárias à constituição da generalização algébrica, estabelecendo uma distinção essencial entre a generalização aritmética e a generalização algébrica. Para os autores, “a generalização algébrica é equivalente à generalização distante, ou seja, aquela que ocorre quando há o registro de uma expressão algébrica que remete à lei geral de uma função e permite o cálculo de quaisquer outros termos, o que caracterizaria o pensamento algébrico" (Moretti; Virgens; Romeiro, 2021, p. 1467).

Portanto, reafirma-se que o desenvolvimento do pensamento algébrico não é um processo linear, acumulativo ou espontâneo, mas um movimento de natureza histórico-dialética, que emerge das relações entre cultura, trabalho humano, abstração e mediação teórica. A generalização da aritmética, enquanto mediação inicial, constitui-se como fundamento para a apropriação dos nexos conceituais que estruturam a álgebra, permitindo que o sujeito realize o movimento do pensamento — do concreto ao abstrato e, posteriormente, do abstrato a um novo concreto — na direção da formação do pensamento teórico. Dessa forma, superar os limites da generalização aritmética significa adentrar na generalização algébrica, na qual, como afirma Davidov (1988, p. 156), "o pensamento é a principal força organizadora e racionalizadora da consciência humana". Esse movimento possibilita ao sujeito estabelecer relações cada vez mais complexas, articulando o particular ao geral, o empírico ao teórico e a análise à síntese, elementos que sustentam a constituição do pensamento algébrico como forma superior de desenvolvimento psíquico.

Compreender, portanto, a evolução histórico-dialética da álgebra implica reconhecer que os conceitos algébricos, desde os procedimentos retóricos das civilizações antigas até sua formalização simbólica na modernidade, não respondem apenas às necessidades práticas de resolução de problemas, mas expressam o desenvolvimento do pensamento teórico. Essa compreensão dialética revela que o ensino da álgebra deve transcender a mera manipulação de símbolos e procedimentos formais, de modo a favorecer a apropriação dos nexos internos e externos dos conceitos, permitindo que os estudantes se constituam como sujeitos capazes de mobilizar um pensamento teórico, generalizador e reflexivo, tanto no campo matemático quanto na compreensão crítica dos fenômenos da realidade.

4 FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICO DA PESQUISA – O MÉTODO MATERIALISTA

O desenvolvimento da trajetória metodológica desta pesquisa fundamenta-se na Teoria Histórico-Cultural (THC), orientada pelos princípios do Materialismo Histórico-Dialético (MHD). Diferentemente das abordagens qualitativas e quantitativas tradicionais, o método materialista histórico-dialético não se limita à descrição de dados empíricos nem à interpretação subjetiva dos fenômenos. Ao contrário, busca apreender a totalidade concreta, analisando os fenômenos em suas relações internas e externas, historicamente determinadas, considerando as contradições, os processos de transformação e as determinações sociais e materiais que os constituem.

Nesse sentido, a pesquisa não se enquadra no paradigma qualitativo, pois não se concentra exclusivamente na análise interpretativa de subjetividades, mas no estudo das contradições e das dinâmicas históricas que permeiam os fenômenos sociais. Nessa perspectiva, prática e teoria são compreendidas como momentos dialéticos, que se articulam na constituição e na transformação do conhecimento. Segundo Davidov (1988), é fundamental que se promovam, nos estudantes, concepções materialistas sólidas, capazes de desenvolver neles o pensamento independente e de aprimorar significativamente sua formação artística e estética, além de elevar o nível ideológico e teórico do processo de ensino e aprendizagem.

O Materialismo Histórico-Dialético representa, portanto, uma inflexão decisiva nas concepções de produção do conhecimento, ao romper com visões empiristas, idealistas e subjetivistas. Nesse método, a opção por uma lógica específica — fundamentada na análise das contradições, na historicidade dos fenômenos e na mediação pela atividade humana — conduz à constituição dos conceitos como expressão da realidade objetiva, historicamente determinada. Assim, o conhecimento não é uma representação estática do mundo, mas um reflexo dinâmico, processual, produzido na e pela prática social.

Na perspectiva materialista dialética, o conhecimento é, antes de tudo, expressão da práxis social. A atividade produtiva, enquanto base das relações sociais, constitui o fundamento ontológico do desenvolvimento humano e da produção do conhecimento. O movimento do pensamento é, portanto, dialético, pois parte da prática social, eleva-se à elaboração teórica — mediada pelos processos de abstração, análise e síntese — e retorna à prática, orientando sua transformação. É nesse movimento dialético da práxis que se consolidam os critérios da verdade e validade da teoria, uma vez que ela se verifica na transformação da própria realidade. Assim:

> A prática social dos homens não se limita à atividade de produção. Ela apresenta ainda muitas outras formas: luta de classes, vida política, atividade desenvolvida no domínio da ciência e da arte; em resumo, o homem social participa em todos os domínios da vida prática da sociedade. É por essa razão que o homem, na sua atividade cognitiva, apreende em graus diversos as relações distintas que existem entre os homens, não somente na vida material, mas igualmente na vida política e cultural (que está estreitamente ligada à vida material). (Tse-Tung,2009, p. 13)

Os problemas práticos surgem, principalmente, nas atividades de produção, onde os sujeitos se apoiam mutuamente para alcançar um objetivo comum. Contudo, não é apenas na atividade de produção que os sujeitos encontram apoio, pois estes têm a oportunidade de aprender em diversos tipos de atividades nas quais se relacionam. A busca por resolver problemas práticos é o que impulsiona o desenvolvimento humano. Independentemente de se tratar de uma sociedade de classes ou não, essa busca está intrinsecamente ligada à necessidade do ser humano de devolver teorias e aplicá-las na prática.

Entre essas relações, as diversas formas de luta de classes exercem uma influência particularmente profunda sobre o desenvolvimento do conhecimento humano" (Tse-Tung, 2009, p. 13).

Para os marxistas, o desenvolvimento da atividade de produção e do conhecimento é progressivo, pois se dá "do simples ao complexo, do unilateral ao multilateral" (Tse-Tung, 2009, p. 13). As contradições presentes nas relações sociais possibilitaram o aprofundamento no estudo das interações humanas, potencializando uma compreensão mais ampla sobre os processos de desenvolvimento do sujeito e das dinâmicas sociais. A prática social permite compreender o mundo exterior objetivo e, a partir disso, desenvolver o conhecimento teórico. Assim, na perspectiva da filosofia marxista, considera-se a prática como princípio e finalidade central do conhecimento, constituindo-se como categoria primária para a dialética materialista. Pois:

> O materialismo dialético da filosofia marxista tem duas particularidades mais evidentes. Uma é o seu caráter de classe: afirma abertamente que **o materialismo dialético serve ao proletariado**; a outra é o seu caráter prático: sublinha o fato de a teoria depender da prática, de a teoria basear-se na prática e, por sua vez, servir à prática. A verdade de um conhecimento ou de uma teoria é determinada não por uma apreciação subjetiva, mas sim pelos resultados da prática social. (Tse-Tung, 2009, p. 14, grifo nosso).

Dessa forma, o conhecimento se desenvolve, primeiramente, a partir das propriedades externas do fenômeno particular, que o autor denomina como grau da percepção sensível do conhecimento. Esses fenômenos são apreendidos pelos sentidos e refletidos na consciência, estabelecendo uma conexão entre os fenômenos e suas propriedades externas. Portanto, a resolução dos problemas práticos só se torna possível após a apropriação profunda do fenômeno, superando a aparência e alcançando sua essência.

A repetição dos fenômenos observados na prática social gera, na consciência, a emergência dos conceitos. Nesse processo, o desenvolvimento do conhecimento ultrapassa a apreensão das ligações externas e passa a refletir as relações internas dos objetos, constituindo, assim, sua essência — o conceito. A elaboração conceitual permite ao sujeito realizar deduções, o que caracteriza a transição qualitativa do nível sensível para o pensamento teórico. O conhecimento, então, se torna lógico, pois, ao compreender as determinações internas do fenômeno, permite reconhecer "a sua essência e a ligação interna dos fenómenos, eleva-se até o ponto de evidenciar as contradições internas do mundo objetivo e, por isso mesmo, pode pegar a dominar o desenvolvimento desse mundo na sua integridade, com as suas ligações gerais internas" (Tse-Tung, 2009, p. 16).

Assim, os conhecimentos apreendidos são produtos das experiências de outros sujeitos — produtos esses resultantes de experiências indiretas. Por essa razão, são considerados conhecimentos seguros, uma vez que se constituem como abstrações derivadas de práticas concretas, diretas e anteriores, o que lhes confere legitimidade e credibilidade. No entanto, observa-se que, de modo recorrente, prevalece uma lógica inversa, na qual se parte da teoria, desprezando-se a prática. Contudo, para conhecer verdadeiramente um fenômeno, é indispensável vivenciá-lo na prática, pois é essa relação concreta que possibilita uma compreensão aprofundada de sua essência.

> Foi o materialismo marxista que, pela primeira vez, resolveu corretamente esse problema, pôs em evidência, de uma maneira materialista e dialética, o movimento do conhecimento segundo a linha do seu aprofundar contínuo, o movimento progressivo do conhecimento dos homens, como seres sociais, na prática complexa e constantemente repetida da produção e da luta de classes; o movimento do conhecimento sensível ao conhecimento lógico. Lenin dizia: "As abstrações de matéria e de lei natural, a abstração de valor etc., numa palavra, todas as abstrações científicas (justas, sérias, não arbitrárias) refletem a natureza mais profundamente, mais fielmente, mais completamente". O marxismo-leninismo considera que os traços distintivos dos dois graus do processo do conhecimento consistem no fato de o conhecimento intervir, no grau inferior, enquanto conhecimento sensível, ao passo que intervém, no grau superior, como conhecimento lógico. (Tse-Tung, 2009, p. 16 - 17)

A concepção de que o conhecimento racional não depende do conhecimento sensível reflete uma convicção idealista, típica da escola filosófica racionalista. Por outro lado, o materialismo defende que o conhecimento tem origem na experiência concreta. No entanto, para a dialética materialista, o desenvolvimento do conhecimento exige necessariamente a superação do plano sensível, avançando para o conhecimento racional. A ideia de um conhecimento restrito ao grau sensível traduz-se numa concepção empirista, na qual o sujeito permanece limitado ao reflexo superficial da realidade. Em contrapartida, a elevação do conhecimento ao nível da apreensão da essência do fenômeno permite, conforme Tse-Tung (2009, p. 23), “eliminar o falso para conservar o verdadeiro, em passar de um aspecto dos fenômenos a outro, do externo ao interno”.

Nesse sentido, o materialismo considera fundamental conhecer a essência dos fenômenos objetivos como condição para transformar conscientemente a realidade. Contudo, nem todo conhecimento que atinge o grau racional é, por si só, verdadeiro; é necessário validá-lo na prática social e verificar sua correspondência com a realidade objetiva. Assim, quando o sujeito, em sua prática social, alcança o grau de conhecimento racional e é capaz de aplicá-lo conscientemente na transformação da realidade, considera-se que o processo de conhecimento se completa, atingindo sua finalidade objetiva.

> Contudo, de um modo geral, tanto na prática da modificação da natureza quanto na da modificação da sociedade, é extremamente raro que as ideias, teorias, planos e projetos previamente elaborados pelos homens se realizem sem sofrer a mínima alteração. Isso se produz porque as pessoas que modificam a realidade se encontram geralmente condicionadas por múltiplas limitações: elas se encontram limitadas não somente pelas condições científicas e técnicas, mas ainda pelo desenvolvimento do próprio processo objetivo e pelo grau em que ele se manifesta (por ainda não terem sido completamente esclarecidos os diferentes aspectos e a essência do próprio processo objetivo). (Tse-Tung, 2009, p. 26).

Assim, é necessário destacar que as condições objetivas de cada sujeito são distintas, o que faz com que o fenômeno se manifeste de forma particular em cada contexto e momento histórico. Isso demonstra que a essência inicialmente apreendida não corresponde, de imediato, à generalidade. Segundo Tse-Tung (2009), é justamente a partir de sucessivas falhas que se torna possível retificar os erros, processo que caracteriza o desenvolvimento do conhecimento.

Para o autor, o desenvolvimento do conhecimento está diretamente relacionado às condições sociais concretas. Quando esse conhecimento se dissocia da prática social, torna-se obsoleto em relação às demandas do desenvolvimento histórico e social, o que impede seu papel na orientação para o progresso. Do mesmo modo, tanto as posições que se deslocam para um idealismo de direita — desvinculado das contradições sociais — quanto os esquerdismos dogmáticos, igualmente desconectados da prática, revelam o mesmo equívoco metodológico: o afastamento da realidade objetiva e concreta.

O marxismo, portanto, afirma que o desenvolvimento das verdades universais se dá por meio da transformação dialética das contradições — produto das lutas entre verdades relativas que emergem da prática social. Essas verdades são sempre provisórias e historicamente condicionadas, uma vez que a própria realidade está em constante transformação.

Desse modo, a história se constitui como resultado das contradições e dos conflitos entre essas verdades relativas, dos erros e das retificações que conformam o desenvolvimento do conhecimento. Esse movimento dialético — fundamentado nas contradições internas, nas lutas e nas mediações entre prática e teoria — não apenas impulsiona a evolução dos processos sociais, mas também promove o desenvolvimento do próprio conhecimento, cuja finalidade é a transformação consciente da realidade.

4.1 O contexto da pesquisa – os sujeitos

O desenvolvimento do percurso metodológico desta pesquisa fundamenta-se na Teoria Histórico-Cultural, ancorada no Materialismo Histórico-Dialético. Com base nesses referenciais, utilizamos instrumentos como diário de campo, videogravações e gravações de áudio, os quais forneceram suporte para a produção e transcrição dos dados, permitindo a análise das relações sociais dos estudantes em sala de aula e das contradições inerentes às condições sociais, econômicas e culturais que constituem cada indivíduo.

Para analisar a realidade investigada, captada por meio dos instrumentos mencionados, recorremos ao método de análise por núcleos de significação, que permite apreender as situações, as relações e as significações produzidas por esses sujeitos. Embora esses sujeitos estejam inseridos em um contexto social semelhante, cada um deles expressa sua singularidade e subjetividade, formadas nas relações sociais concretas. Nesse sentido, buscamos responder à questão que norteou esta pesquisa: Que significações produzidas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, por meio de situações desencadeadoras de aprendizagem possibilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico?

Com esse objetivo, elaborou-se uma Unidade Didática, destinada a compreender as significações produzidas pelos estudantes no decorrer das situações desencadeadoras de aprendizagem. Assim, fundamentada na perspectiva materialista histórico-dialética, esta investigação buscou ultrapassar a apreensão das características superficiais da realidade observada, direcionando-se à análise dos nexos internos que estruturam os fenômenos educacionais. Nesse movimento, assumimos uma postura teórico-metodológica que não desconsidera a subjetividade dos sujeitos envolvidos, compreendida aqui como resultado das relações sociais concretas. Dessa forma, o foco da análise esteve centrado não apenas nas relações sociais estabelecidas no contexto da sala de aula e nas contradições inerentes às condições sociais e econômicas dos estudantes, mas também nas significações produzidas em torno da temática central deste estudo, cuja proposta tinha como prerrogativa analisar a generalização da aritmética como forma de ascensão ao pensamento algébrico.

Segundo Bulhões e Martins (2018), a contradição no materialismo dialético não se refere a oposições externas, mas a contradições internas, que superam o núcleo racional. Por essa razão, Marx e Engels superam a dialética hegeliana, ao compreenderem que, em Hegel, a dialética estava restrita ao campo das ideias. Dessa forma, no materialismo dialético, a contradição não é subjetiva nem relativa; reflete os aspectos internos da realidade concreta, diferentemente da contradição formal proposta pela lógica metafísica. A unidade dos contrários, que se vinculam e se complementam, está presente tanto na construção material quanto na imaterial, no indivíduo e na sociedade. É essa contradição, tal como identificada por Marx, que promove o desenvolvimento e a transformação. Um dos princípios fundamentais do materialismo dialético, portanto, é a historicidade.

As contradições presentes na sociedade capitalista, conforme analisado por Marx, repercutem diretamente nos processos de ensino e aprendizagem, uma vez que a escola, como instituição social, não se constitui à margem das relações de produção. Ao investigar as determinações da sociedade capitalista, Marx identifica, na mercadoria, a categoria primária para a análise das relações sociais. O trabalho, por sua vez, constitui a atividade pela qual o ser humano transforma a realidade, produz cultura e, nesse processo, humaniza-se. No entanto, na lógica da sociedade burguesa, as relações sociais de produção assumem uma configuração invertida, na qual os produtos do trabalho passam a exercer domínio sobre os próprios trabalhadores, desumanizando-os.

Esse processo, no qual o homem, ao transformar a natureza, satisfaz suas necessidades e, dialeticamente, gera novas necessidades, é também o que impulsiona a produção cultural e a constituição dos sujeitos. Entretanto, é importante destacar que a apropriação dos conhecimentos culturais não é um processo natural nem espontâneo. A biologia, isoladamente, não é suficiente para garantir a formação humana; é pela mediação da cultura, na relação com o outro, que o sujeito se constitui como ser histórico, social e, portanto, humano.

Nesse sentido, percebe-se que esse desenvolvimento cultural é profundamente precarizado pela lógica da sociedade capitalista, que, ao priorizar seus interesses econômicos, restringe o acesso da classe trabalhadora aos bens culturais e, consequentemente, impede, em larga medida, a plena humanização dos sujeitos. Contudo, é fundamental ressaltar que o acesso à cultura, por si só, não é suficiente para garantir o desenvolvimento. É indispensável a mediação de um outro mais experiente, que oriente o processo de apropriação dos conceitos culturais, uma vez que a personalidade do sujeito, que nasce homem, mas não nasce humano, só se desenvolve à medida que se apropria dos instrumentos culturais historicamente produzidos.

Nessa direção, as contribuições de Vigotski para a educação são incontestáveis, uma vez que oferecem fundamentos teóricos essenciais para compreender os processos de aprendizagem e desenvolvimento humano. Ao evidenciar que o desenvolvimento das funções psicológicas superiores não é resultado de processos biológicos, mas da atividade social mediada, Vigotski demonstra que os saberes e os instrumentos culturais são produzidos historicamente, nas relações sociais, e que sua apropriação ocorre por meio da interação com sujeitos mais experientes, que já dominam esses conhecimentos.

Assim, a atividade social é a base para a formação das funções mentais superiores, pois os saberes, os signos e os instrumentos cognitivos se constituem nas relações de comunicação entre as consciências individuais. A apropriação desses instrumentos implica, necessariamente, a interação com outros sujeitos, sendo o ensino e a educação processos responsáveis pela mediação que articula os fatores socioculturais às condições internas do indivíduo, promovendo, assim, o desenvolvimento psíquico.

O pensamento não pode ser idealizado como atividade especificamente individual, pois, dessa forma, a psicologia cognitiva não poderia definir a abstração do intrapsíquico, ponderando que o desenvolvimento do intrapsíquico tem relação dialética com o interpsíquico, que acontece na relação entre sujeitos. Desse modo, é preciso ressaltar a importância da linguagem no processo de aprendizagem, pois a constituição de conceitos, as generalizações, abstrações e interiorizações dependem dos momentos de socialização entre sujeitos.

Na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, o psiquismo constitui-se como um sistema interfuncional, no qual nenhuma função psicológica atua de maneira isolada, mas sim em permanente articulação e interdependência com as demais.

Dessa forma, a periodização do desenvolvimento, proposta por Vigotski, Leontiev e Elkonin, nos mostra que cada período possui uma atividade principal, ou seja, a atividade-guia. De acordo com Magalhães (2018, p. 279), Leontiev configura as atividades-guia como "a atividade responsável pelas principais mudanças no psiquismo e na personalidade da criança, além de proporcionar o surgimento de outras atividades que tornar-se-ão guia no próximo período". A autora aborda os seguintes períodos: **comunicação emocional direta**, que, de acordo com Davidov (1988), ocorre desde as primeiras semanas até seu primeiro ano de vida.

Nesse período, a comunicação com os adultos é algo inerente ao lactente. Essa interação é crucial para o desenvolvimento do bebê, que percebe a necessidade de se comunicar com os membros mais experientes da cultura ao seu redor.

Na **atividade objetal manipulatória**, a criança interage com os objetos culturais, tentando entender sua função. Nesse momento, pensamento e linguagem se entrecruzam e promovem a **atividade de jogos de papéis**, que reproduz relações interpessoais, nas quais mimetizam o mundo adulto do trabalho.

A **atividade de estudos** é abordada por Asbahr (2016), a qual relata que, nesse período, a autorregulação se desenvolve. Esse não é um processo de docilização, mas de autorregulação das funções psíquicas (que são interfuncionais), para favorecer a apropriação da cultura e, consequentemente, a transformação da realidade.

A **atividade íntima e social** é um estágio marcado pela necessidade de aprovação do grupo. Essa socialização e participação preparam o sujeito para a realização da atividade profissional, fazendo com que ele se aproprie das normas e responsabilidades sociais da vida adulta. Nesse momento, é possível que o sujeito seja capaz de pensar teoricamente.

A **atividade profissional** ocorre quando o sujeito, por meio do vínculo entre os conhecimentos e a prática profissional consolidados, fundamenta sua perspectiva de mundo e sua conduta, possibilitando, assim, sua inserção na atividade produtiva, como são abordadas por Pereira (2019).

A periodização do desenvolvimento psicológico na infância contribuiu diretamente para esta pesquisa, que tem como público-alvo sujeitos entre 11 e 14 anos. Dessa forma, o estudo desse tema proporcionou um olhar mais amplo sobre os processos de desenvolvimento psíquico e os desafios vivenciados pelos adolescentes.

> para Elkonin (1987) a adolescência, assim como todas as épocas da vida, é formada por dois períodos, cuja transição é marcada pela mudança na atividade-guia do sujeito. O autor não explicita marcos etários precisos para cada um destes períodos; quem o faz é Davidov (1988), que alerta que tais marcos são aproximados. Os períodos postulados são: adolescência inicial (próximo aos 10 anos) e adolescência (dos 14 aos 17 anos). (Pereira, 2019, p. 9)

Assim, é possível compreender que o pensamento do ser humano é constituído pelos processos psíquicos naturais, compreendidos como funções psicológicas elementares, que são instintivas e espontâneas. Com o decorrer do desenvolvimento, inserido em um mundo de relações, surgem as funções psicológicas superiores, consideradas especificamente humanas, tais como sensação, percepção, memória, atenção, linguagem e pensamento. Essas funções se desenvolvem a partir da interação social de cada indivíduo, sendo, portanto, a formação da consciência um processo que se dá por meio das construções históricas e culturais.

> a Psicologia Histórico-Cultural compreende o desenvolvimento humano em geral. Não tendo a pretensão de esgotar a rica formulação desta teoria, destacamos aqui duas de suas leis sobre desenvolvimento humano que entendemos serem centrais para o objetivo deste artigo. Primeira, o desenvolvimento do sujeito é entendido como constituído a partir da combinação das influências filogenéticas (aparato orgânico constituído ao longo do desenvolvimento da espécie), ontogenéticas (específicas do processo de desenvolvimento ao longo da vida dos sujeitos) e culturais (constituídas ao longo da história humana e que se cristalizam em objetos materiais ou imateriais), as quais não exercem influência em um sujeito passivo, moldado pelas mesmas, mas sim, servem de fundamento e são transformadas a partir da atividade que o sujeito exerce no mundo, transformando-o e transformando a si mesmo (Leontiev, 1983). Segunda, no processo de desenvolvimento a atividade é primeiramente social, interpsicológica, realizada em um contexto de colaboração e comunicação humana, e ao realizá-la o sujeito se apropria da atividade social e passa a utilizá-la para si, transformando-a em intrapsicológica (Vygotsky, 2000). Assim, a partir da sua atividade, o sujeito se apropria das formas de pensar e das significações compartilhadas socialmente e em uma síntese criativa constitui suas formas de pensar, sentir e agir no mundo. (Pereira, 2019, p. 5-6)

A subjetividade e a objetividade — ou o interno e o externo — não podem ser compreendidas como elementos em uma relação dicotômica e imediata, mas, sim, como dimensões que, apesar de distintas, se constituem mutuamente por meio da mediação. Assim, tal análise não pode ser realizada de forma fragmentada. É necessário compreender que o conhecimento é produzido a partir das condições objetivas e subjetivas, historicamente construídas, que resultam da relação do homem com a natureza.

Na busca por encontrar a resposta para nossas inquietações, nas bases históricas, nos voltamos para entender também o que é a atividade e seus benefícios, para o trabalho em sala de aula e para a humanização do homem. Partindo primeiramente ao entendimento da atividade humana de forma mais ampla, torna-se possível entender as questões educacionais e a atividade de estudo. "As forças que mobilizam a mudança de uma atividade-guia à outra são as necessidades que são geradas a partir da realização da atividade-guia anterior e as demandas sociais que são postas aos sujeitos em cada período de seu desenvolvimento". (Bozhovich (1981) apud Pereira (2019).

Por fim, nas conexões produzidas durante a pesquisa, atribuiu-se à fala um papel de extrema importância, pois é por meio dela que os sujeitos externam suas conclusões e elaboram suas significações. Dessa forma, a mediação do professor não pode ocorrer sem intencionalidade, uma vez que, se assim for, ele não conseguirá promover a atividade nos alunos. Nesse sentido, é fundamental que, durante a atividade de estudo, o aluno tenha clareza sobre quais são os objetivos da aprendizagem, para que possa determinar suas ações de forma a conduzir uma atividade consciente, na qual esteja presente a autorregulação da aprendizagem.

Assim, o entendimento da atividade-guia, da atividade de estudo e da atividade principal foi de extrema relevância para a elaboração da unidade didática desenvolvida para esta pesquisa de campo, uma vez que tais categorias estão diretamente relacionadas ao meu objeto de pesquisa. O estudo da atividade, bem como dos demais conceitos que fundamentam a Teoria Histórico-Cultural, foi essencial para orientar tanto a elaboração da proposta pedagógica quanto a análise das significações produzidas pelos estudantes.

4.2 O contexto da pesquisa – Os sujeitos no ambiente e os problemas enfrentados

Para compreender melhor o sentido que esse grupo atribui às suas próprias experiências com atividades investigativas e jogos, consideramos o contexto no qual os estudantes estavam inseridos, bem como suas subjetividades, que, em atividade, produzissem significações capazes de conduzi-los à ascensão do pensamento teórico.

Diante do exposto, definimos, inicialmente, que nossa investigação seria realizada em uma escola pública do estado de São Paulo, cujos sujeitos da pesquisa seriam estudantes de uma turma de 8º ano, com faixa etária entre 13 e 14 anos.

Entretanto, em razão da tramitação do processo no Comitê de Ética, que demandou um tempo superior ao previsto, tornou-se inviável realizar a pesquisa de campo naquele contexto em tempo hábil. Diante dessa situação, optou-se por desenvolver a investigação em uma Organização Não Governamental (ONG), localizada na cidade de São Paulo, na qual a pesquisadora já atuava como voluntária, oferecendo aulas de reforço de matemática para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Esses estudantes, em sua maioria, são provenientes de escolas públicas e apresentam dificuldades na disciplina de matemática.

A turma era composta por oito estudantes, com faixa etária entre 11 e 14 anos. No entanto, apenas quatro aceitaram participar da pesquisa. Esse número, entretanto, não comprometeu a produção dos dados, uma vez que, de acordo com os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, que fundamenta esta pesquisa, cada sujeito individual é também um ser social, histórico e, portanto, portador de significações relevantes para a análise.

A Organização Não Governamental (ONG), na qual foi realizada a pesquisa caracteriza-se como um ambiente acolhedor e propício ao desenvolvimento dos estudantes. Trata-se de um espaço amplo, bem iluminado e organizado, que oferece, além das aulas de reforço em diversas disciplinas, atividades complementares, como dança, artes marciais, aulas de instrumentos musicais e de línguas estrangeiras.

Entretanto, em razão da variedade de aulas oferecidas na instituição, incluindo aulas de instrumentos musicais, houve dificuldades na transcrição de alguns áudios das aulas. Isso ocorreu porque parte dos encontros coincidiu com as aulas de bateria, o que gerou ruídos e comprometeu a qualidade de algumas gravações, demandando mais tempo para a realização das transcrições.

Com o objetivo de preservar a identidade dos estudantes participantes da pesquisa, bem como dos membros da comunidade da ONG — incluindo a diretora e os professores que aparecem nas transcrições dos áudios —, orientamos todos os envolvidos a escolherem um pseudônimo, que foi utilizado na produção dos dados.

Além disso, a realização da pesquisa exigiu a autorização de todos os órgãos competentes vinculados ao seu desenvolvimento, incluindo a Pró-Reitoria de Pesquisa e o Comitê de Ética da Universidade Federal de Lavras (UFLA), sob o parecer número 5.661.867. Da mesma forma, foram obtidas as anuências da direção da ONG, dos responsáveis legais dos estudantes — por meio da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) — e dos próprios alunos, mediante assinatura do Termo de Assentimento, autorizando sua participação na pesquisa.

4.3 O contexto da pesquisa – a unidade didática

O desenvolvimento desta unidade didática fundamenta-se na Teoria Histórico-Cultural (THC), que compreende o desenvolvimento do pensamento como um processo que ocorre por meio da atividade, mediado pela apropriação dos conhecimentos historicamente produzidos. Assim, entendemos que os sujeitos desenvolvem seu pensamento à medida que se apropriam e transformam os conhecimentos, num movimento interno que se realiza na atividade social.

A partir dessa perspectiva, elaboramos uma sequência de aulas com o objetivo de favorecer o desenvolvimento do pensamento teórico algébrico, a partir da generalização do pensamento aritmético, de modo que estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental atribuam sentido e significado aos conceitos que fundamentam a álgebra. Pois:

> A transição entre pensamento aritmético e pensamento algébrico também têm sido estudada por Radford (2014) ao investigar a generalização de padrões por meio de tarefas escolares. Para esse autor, assim como para Kaput (2008), a generalização pode ser representada por gestos, linguagem escrita, falada ou outras representações semióticas que, durante o desenvolvimento do trabalho

> conjunto em sala de aula entre estudantes e professor, podem seguir para a representação simbólica, o que ressignificaria todas as operações numéricas (Radford, 2018 *apud* Moretti; Virgens; Romeiro, 2021, p. 1463)

Assim, de acordo com o estudo lógico histórico dos conceitos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir da aritmética identificamos os seguintes conceitos fundamentais: soma, correspondência um a um, equivalência quantidade, qualidade, composição, decomposição, nulidade, agrupamento, base, grandeza, unidade, medida, incógnita, variável, campo de variação, fluência, interdependência, relação, representação analítica e representação geométrica.

Segundo Cedro, Sousa e Panossian (2014, p. 98), "enquanto os nexos externos se restringem aos elementos perceptíveis do conceito, os nexos internos compõem o lógico-histórico do conceito. Os nexos ficam por conta da linguagem".

Nesse sentido, compreende-se que os nexos externos estão vinculados aos aspectos mais imediatos e perceptíveis dos conceitos, enquanto os nexos internos dizem respeito às relações essenciais, mediadas historicamente pela linguagem, que estruturam o conceito e permitem sua generalização no desenvolvimento do pensamento teórico.

Nesse contexto, esta unidade didática foi elaborada tomando como referência a atividade-guia correspondente a essa faixa etária, definida como Atividade Socialmente Útil. Assim, selecionamos situações de aprendizagem que envolvem tarefas realizadas em grupo, de modo que os estudantes, a partir da generalização da aritmética, possam avançar na formação do pensamento algébrico.

Compreendemos que esse movimento se concretiza à medida que os estudantes elaboram juízos sobre os conceitos da álgebra, compreendendo a confluência entre o lógico histórico que os constitui e a formação de uma linguagem formal. Dessa forma, o caminho formativo proposto considera a articulação entre número, figura e letra como elementos estruturantes do pensamento algébrico.

Partindo desse pressuposto, buscamos definir o papel do professor na sala de aula, de modo que os objetivos da aprendizagem fossem efetivamente alcançados. Assim, compreendemos que a atividade principal do professor é o ensino, entendido como um trabalho cuja finalidade é a transformação da realidade. Nesse contexto, Moura et al. (2010) delineiam a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como:

> a Atividade Orientadora de Ensino é a mediação na atividade do professor que tem como necessidade o ensino de um conteúdo ao sujeito em atividade cujo objetivo é a apropriação desse conteúdo entendido como um objetivo social. Nessa perspectiva, a AOE constitui-se em um modo geral de organização do

> ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento. (Moura *et al,* 2010, p. 221)

Ademais, para que a atividade de ensino seja intencional e eficaz enquanto mediação, é fundamental que o professor compreenda a essência do conceito em questão. Isso implica organizar sua abordagem de acordo com o contexto lógico-histórico do conceito, de modo a favorecer o desencadeamento da atividade de estudo. Durante o processo de ensino, o professor pode elaborar unidades didáticas (UD) voltadas ao desenvolvimento dos conceitos. Essa organização visa proporcionar ao estudante a necessidade de se apropriar do conhecimento por meio de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA), na qual são criadas condições que estimulam a atividade de estudo e possibilitam a apropriação dos conceitos.

> A situação desencadeadora de aprendizagem se forma por meio da objetivação da atividade de ensino, a qual contempla a elaboração da solução coletiva e a gênese do conceito. Para que a aprendizagem se torne significativa, a atividade de ensino deve desencadear a aprendizagem. Pressupõe-se que o professor crie a necessidade, no estudante, de se apropriar dos conhecimentos teóricos. Essa ação do professor na organização da atividade de ensino está de acordo com a defesa de Davydov (1999, p. 4) sobre a elaboração das tarefas de estudos pelos docentes. Ele defende que "ninguém pode forçar o estudante a entrar em atividade de aprendizagem se ele não tem necessidade de fazer isto". Para nós, a situação desencadeadora de aprendizagem equivale às tarefas de estudos propostas por esse pesquisador, visto que ela é organizada de modo a possibilitar condições para que o objetivo da atividade de ensino seja alcançado. (Cedro; Moraes; Rosa, 2010, p. 438)

Ainda, as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA), segundo Cedro et al. (2010), devem abranger o desenvolvimento do conceito. Assim, elas não podem se restringir a problemas práticos que envolvam apenas os nexos externos do conceito, mas precisam configurar-se como situações que mobilizem a essência do conceito a ser aprendido.

Os mesmos autores destacam, com base em Rubtsov (1996), a diferença entre esses dois tipos de problemas: o problema prático, que busca soluções específicas para situações concretas, e o problema de aprendizagem, que está relacionado à apropriação dos conhecimentos e ao desenvolvimento de habilidades. Sendo assim, uma situação de aprendizagem não deve se limitar à resolução de problemas, mas constituir um contexto que favoreça a compreensão profunda do conceito.

Assim, de acordo com Sousa (2004), ao iniciar o estudo da álgebra, é fundamental compreender que o pensamento aritmético se distingue do pensamento algébrico. Isso se evidencia, por exemplo, no fato de que, no pensamento aritmético, o conceito de número está diretamente associado à contagem de quantidades. No pensamento algébrico, entretanto, essa relação deixa de ser central, o que reforça a importância da organização do ensino como mediação para a transição entre esses dois modos de pensamento.

Segundo Cedro, Panossian e Sousa (2014), as diferentes perspectivas sobre a álgebra têm impacto significativo na maneira como organizamos o ensino. É inegável que o conhecimento algébrico está intrinsecamente ligado ao seu sistema simbólico. No entanto, é preciso reconhecer que a forma como esse conhecimento é frequentemente apresentado acaba por mascarar sua essência. Embora o sistema simbólico da álgebra tenha suas vantagens, é fundamental não perder de vista os processos de pensamento, generalização, abstração e formação de conceitos, que são essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Do mesmo modo, em consonância com Cedro, Panossian e Sousa (2014), embora a álgebra desempenhe um papel fundamental na formação dos estudantes, observa-se que seu ensino, frequentemente, não consegue torná-la efetivamente significativa para o desenvolvimento desses sujeitos. Ao contrário, a álgebra, quando reduzida à mera manipulação simbólica, frequentemente se converte em uma das principais fontes de alienação dos estudantes em relação à aprendizagem dos conhecimentos matemáticos. Nessa perspectiva, quando a álgebra é tratada apenas como um conjunto de regras operatórias e de manipulações formais, ela perde sua função formativa, desconectando-se das experiências sociais e do desenvolvimento do pensamento teórico.

Nesse sentido, a elaboração da unidade didática foi pautada nos interesses dos estudantes, em consonância com a atividade-guia própria dessa faixa etária. Assim, desenvolvemos tarefas que continham desafios progressivos, os quais culminavam na resolução de um crime fictício — o roubo de um "tesouro" da sala de aula. Por essa razão, a unidade recebeu o nome C.S.I. (Crime Scene Investigation), que, traduzido para o português, significa "Investigação de Cena de Crime".

A proposta foi inspirada no trabalho de investigadores forenses e peritos criminais, especialmente nos procedimentos utilizados pelos Crime Scene Investigators (CSI), profissionais responsáveis pela coleta, análise e interpretação de evidências em cenas de crime. Essa abordagem buscou criar uma situação envolvente, que mobilizasse os estudantes para a resolução de problemas por meio da generalização dos conceitos matemáticos, especialmente aqueles relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quadro 9 - Organização das aulas

Tarefas	Objetivo Geral	Conteúdo	Metodologia	Recursos Didáticos
I. Elaborar uma lei de formação para a sequência geométrica.	Desenvolver a ideia da lei de formação.	Sequência.	Através de uma olimpíada de matemática, os estudantes serão divididos em grupos para desvendar um mistério envolvendo as sequências.	- Cartões - Caderno - Lápis - Borracha.
II. Encontrar a lei de formação e encontrar e descrever semelhança com a atividade anterior.	Relacionar a formação do triângulo de sierpinski e o triângulo de Pascal.	Sequência.	Após levantar as questões, solicitar aos estudantes que socializem as conclusões sobre as semelhanças do triângulo de sierpinski e o triângulo de Pascal.	- Caderno - Lápis - Borracha.
III. Elaborar uma lei de formação para a sequência numérica.	Desenvolver a lei de formação.	Sequência.	Desenvolver a ideia da lei de formação, dentro do contexto da olimpíada e promover a ideia da generalização aritmética. Aplicação de tarefas complementares e sistematização dos conceitos.	- Caderno - Lápis - Borracha.
IV. Jogo de dardos.	Entender o conceito de variável.	Expressões algébricas	Levar os estudantes para a quadra, para uma atividade de jogo.	- Cartões - Jogo de dardos.
V. Contar e escrever os cartões ganhos no jogo de dardos.	Entender o conceito de variável.	Expressões algébricas	Anotações das quantidades de cartões.	- Caderno - Lápis - Borracha
VI. Tarefas complementares	Sintetizar os conceitos	Expressões algébricas	Levar os estudantes a compreenderem a utilização matemática das variáveis, a partir do questionamento dos estudantes.	- Caderno - Lápis - Borracha
VII. Simulação CSI.	Entender o conceito de incógnita, através de uma situação problema.	Equação	Através de uma situação fictícia inspirada na série CSI, os estudantes serão divididos em grupos para tentar desvendar um mistério.	- Pó de grafite. - Luva, - Fita adesiva e papel.
VIII. Elaborar um jogo sobre o conceito de incógnita.	Relacionar o conceito de incógnita com a linguagem matemática.	Equação	Após levantar as questões, solicitar aos estudantes que socializem as conclusões que chegaram e a partir daí construam um jogo ou um aplicativo onde a incógnita é utilizada.	- Caderno - Lápis - Borracha
IX. Utilizar os jogos construídos para mobilizar o conceito de incógnita.	Aplicar o conceito de incógnita.	Equação.	Depois da socialização, aproveitar as construções dos estudantes para sistematizar o conceito de incógnita.	Construções elaboradas pelos estudantes.
X. Tarefas complementares	Sintetizar os conteúdos	Equação	Levar os estudantes a compreenderem a utilização matemática da incógnita, a partir do questionamento dos estudantes.	- Caderno - Lápis - Borracha

Fonte: Dados da pesquisa.

A cada tarefa proposta, foi necessário que os estudantes mobilizassem os nexos conceituais da aritmética, de modo a generalizá-los para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esse pensamento, entendido no contexto desta pesquisa como pensamento teórico, "é elaborado pela humanidade enquanto se permite conhecer, a partir do conhecimento científico. Nesse sentido, a história deixa de ser factual e passa a ser compreendida enquanto 'possibilidade' (Freire, 1992) de entendimento do nosso próprio movimento de vir a ser, a partir da criação de conceitos" (Sousa, 2004, p. 152).

Assim, elaboramos o seguinte contexto: ao entrar na sala, a professora informou aos estudantes que eles participariam de uma olimpíada de matemática. Os estudantes foram organizados em grupos, e cada grupo representou um continente. Para isso, os integrantes utilizaram ou confeccionaram, conforme decisão coletiva tomada por meio de votação, um adereço com a cor correspondente ao continente que representaram. Além disso, foi proposto que cada grupo elaborasse um grito de guerra e escolhesse um mascote que representaria sua equipe na olimpíada.

Entretanto, devido à necessidade de realizar a pesquisa em outro local e à adesão reduzida de participantes, optamos por organizar os estudantes em duplas. Por decisão coletiva, tomada por meio de votação, definiu-se que as características associadas à olimpíada não seriam mantidas. No entanto, foram preservadas as dinâmicas relacionadas ao "tesouro" e ao contexto da investigação forense, representado pelo C.S.I. (Crime Scene Investigation).

4.4 Instrumentos de produção dos dados e documentação da pesquisa

Considerando a formulação do problema e dos objetivos da investigação, bem como a análise da revisão bibliográfica, optamos por utilizar como instrumentos de produção dos dados o diário de campo, a videogravação, a gravação de áudio e a transcrição dos registros elaborados pelos estudantes e pela pesquisadora durante as observações. Esses instrumentos possibilitaram o registro da realidade investigada, servindo de suporte para a realização do procedimento de análise por núcleos de significação.

O diário de campo constitui um instrumento que permite o registro das percepções do pesquisador durante o desenvolvimento da pesquisa. Segundo Vianna (2003, apud Martins, 2015, p. 34), esse instrumento deve contemplar cinco elementos imprescindíveis: breves descrições de ocorrências; elementos inicialmente esquecidos e posteriormente rememorados;

ideias analíticas e inferências; impressões e sentimentos; e, por fim, anotações que sirvam de referência para o levantamento de informações futuras.

Os registros escritos e pictóricos produzidos pelos estudantes possibilitaram uma compreensão mais ampla das significações que eles produziam durante o desenvolvimento das atividades.

Dessa forma, conforme indica Loizos (2022, p. 194), é possível "realizar a edição das imagens obtidas e selecionar aquelas que melhor seguem os critérios pré-estabelecidos". Além disso, discutir as imagens, descrever as análises e formular perguntas e respostas pertinentes ao material registrado e aos objetivos da pesquisa torna-se uma etapa fundamental no processo analítico. Portanto, para que se alcance uma apreensão mais adequada da realidade investigada, além das ferramentas de anotação, recorre-se também ao uso de instrumentos de registro, como a captura de áudio, vídeo e imagens fotográficas.

Os instrumentos utilizados para a captação e gravação de áudio e vídeo têm a finalidade de auxiliar a pesquisadora na observação e no registro de situações que, por vezes, poderiam passar despercebidas durante a observação direta. Ademais, esses recursos de registro da realidade, como a filmagem, "permitem a ampliação, a transformação das qualidades, das características e particularidades do objeto observado" (Belei et al., 2008, p. 193). Além disso, esse material fornece ao pesquisador uma base sólida para a elaboração do texto de análise, possibilitando revisitar os episódios registrados com maior precisão. Assim:

> Questiona-se se a presença da filmadora pode interferir no comportamento dos participantes. Autores como Heacock, Souder e Chastain (1996) esclarecem que o comportamento pode se modificar, mas apenas por um curto período de tempo, apontando que após poucos minutos os participantes irão se acostumar com o equipamento e voltarão a apresentar seu comportamento usual. (Belei *et al*, 2008, p. 194)

Assim, a utilização de diferentes recursos para a produção dos dados torna esse processo mais abrangente e favorece a compreensão dos fenômenos investigados, proporcionando um amplo conjunto de elementos para a análise.

4.5 Núcleos de significação como metodologia de análise de dados

De acordo com os pressupostos expostos até aqui, compreende-se que, ao não se considerar o encadeamento dos enunciados que compõem a fala dos sujeitos participantes da pesquisa, corre-se o risco de produzir uma abstração desconectada da realidade constituída no diálogo com a pesquisadora. Tal procedimento comprometeria a apreensão dos sentidos elaborados nesse processo. Por outro lado, a análise adotada neste trabalho busca ampliar os contextos enunciativos, explorando de forma mais aprofundada as necessidades, motivações e determinações que sustentam os sentidos produzidos pelos sujeitos, possibilitando uma compreensão mais concreta e dialética das significações atribuídas à experiência vivida no processo investigativo.

Para que seja possível compreender a individualidade e a subjetividade como expressões de sujeitos históricos inseridos em seu grupo social, a análise dos núcleos de significação busca apreender como os sentidos pessoais emergem no diálogo com a pesquisadora. Nesse processo, torna-se essencial considerar as mediações e os contextos subjacentes às palavras carregadas de significado, que conferem nuances aos discursos. Parte-se, portanto, da superfície dos relatos para investigar o processo histórico que os conforma, com o objetivo de transcender a descrição empírica e alcançar uma compreensão mais profunda dos significados sociais e de suas contradições. A tensão dialética entre indivíduo e sociedade constitui, assim, o fundamento da abordagem teórico-metodológica adotada nesta pesquisa.

> A apreensão do homem, como nos lembra Vigotski (2001), dar-se-á pela compreensão da gênese social do individual, “pela compreensão de como a singularidade se constrói na universalidade e, ao mesmo tempo e do mesmo modo, como a universalidade se concretiza na singularidade, tendo a particularidade como mediação” (Oliveira, 2001, p.1). Entendemos, desse modo, que o homem, ser social e singular, síntese de múltiplas determinações, nas relações com o social (universal), constitui sua singularidade através das mediações sociais (particularidades/ circunstâncias específicas). (Aguiar; Ozella, 2006, p. 225)

O Materialismo Histórico-Dialético e a Psicologia Histórico-Cultural constituem os fundamentos essenciais que sustentam a análise por núcleos de significação, uma vez que é a partir desses referenciais teórico-metodológicos que se torna possível compreender os processos de produção de sentidos, em sua dimensão histórica, social e dialética. Sem essa fundamentação, a análise careceria dos pressupostos ontológicos e epistemológicos que permitem apreender as contradições, as mediações e os movimentos que constituem a realidade concreta.

De acordo com Aguiar e Ozella (2006, p. 225), a “apreensão do homem […] dar-se-á pela compreensão da gênese social do individual”. Nesse sentido, as autoras, apoiando-se em Oliveira (2001), afirmam que “é pela compreensão de como a singularidade se constrói na universalidade e, ao mesmo tempo e do mesmo modo, como a universalidade se concretiza na singularidade, tendo a particularidade como mediação” (Aguiar; Ozella, 2006, p. 225; Oliveira, 2001, p. 1). Dessa forma, compreende-se que o sujeito se constitui por meio das interações e mediações sociais, sendo uma "síntese de múltiplas determinações, nas relações com o social (universal)," onde "se constitui sua singularidade através das mediações sociais (particularidades/circunstâncias específicas)" (Aguiar; Ozella, 2006, p. 225).

A subjetividade e a objetividade — o interno e o externo — não podem ser concebidas como elementos em uma relação dicotômica e imediata, mas sim como dimensões que, apesar das diferenças, se constituem mutuamente, uma vez que a existência de uma implica e pressupõe a existência da outra, em uma relação mediada historicamente. Por essa razão, a análise não pode ser realizada de forma fragmentada ou isolada, sendo possível apenas por meio da compreensão dialética da realidade, que considera a unidade contraditória entre o subjetivo e o objetivo.

Aguiar e Ozella (2006, p. 224) destacam que, "como decorrência da adoção dessa perspectiva metodológica, há uma crítica radical às visões reducionistas, objetivistas e subjetivistas". Tal compreensão evidencia a necessidade de aprofundar a análise para alcançar a essência dos fenômenos, evitando permanecer nas aparências imediatas. As autoras também ressaltam "a importância da noção de historicidade, de processo e da noção de mediação" (Aguiar; Ozella, 2006, p. 224), elementos fundamentais para apreender a constituição da subjetividade na perspectiva histórico-cultural. Dessa forma, as autoras frisam que:

> que nossa reflexão metodológica sobre a apreensão dos sentidos estará pautada numa visão que tem no empírico seu ponto de partida, mas a clareza de que é necessário irmos além das aparências, não nos contentarmos com a descrição dos fatos, mas buscarmos a explicação do processo de constituição do objeto estudado, ou seja, estudá-lo no seu processo histórico. No entanto, ao nos referirmos aos pontos essenciais a serem considerados sobre o método, não podemos deixar de mencionar a impossibilidade de se construir um método alheio a uma concepção de homem.

Desse modo, compreende-se que o conhecimento é produzido a partir das condições objetivas e subjetivas, historicamente constituídas na relação do homem com a natureza. Nesse processo, a mediação assume um papel central, não apenas no âmbito das relações sociais externas, mas também na constituição interna do pensamento. Como afirma Vigotski (2001, p. 479), "o pensamento não é só externamente mediado por signos, como internamente mediado por significados", destacando, assim, a indissociabilidade entre os processos de mediação social e os processos psíquicos no desenvolvimento humano.

De acordo com Aguiar e Ozella (2006), os signos constituem-se no pensamento não apenas como instrumentos de comunicação, mas também como mediadores da atividade psíquica interna. Nesse processo, a palavra, compreendida como o signo por excelência, representa o objeto na consciência, desempenhando um papel central na formação e no desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Assim, os signos assumem uma importância fundamental na constituição da subjetividade, uma vez que possibilitam a mediação entre o sujeito e o mundo, promovendo a internalização dos processos culturais e, consequentemente, a formação do sujeito.

Segundo Vigotski (2001, p. 409), "o pensamento não se exprime na palavra, mas nela se realiza". Isso significa que o pensamento só se concretiza plenamente quando se materializa na linguagem, sendo, portanto, inseparável do processo de mediação semiótica. Contudo, nem todo pensamento atinge essa materialização, pois, como afirma o autor, "o pensamento que é sempre emocionado não se expressa na palavra, mas nela se realiza", podendo, em algumas situações, "fracassar", isto é, não se efetivar como palavra. Desse modo, a palavra não é mero veículo externo do pensamento, mas o espaço em que ele se constitui, se organiza e adquire significado. Ainda, para as autoras:

> O pensamento passa, portanto, por muitas transformações para ser expresso em palavras, de modo a concluir-se que a transição do pensamento para a palavra passa pelo significado e o sentido. Dessa forma, podemos afirmar que a compreensão da relação pensamento/ linguagem passa pela necessária compreensão das categorias significado e sentido.
> Os significados são, portanto, produções históricas e sociais. São eles que permitem a comunicação, a socialização de nossas experiências. Muito embora sejam mais estáveis, "dicionarizados", eles também se transformam no movimento histórico, momento em que sua natureza interior se modifica, alterando, em consequência, a relação que mantêm com o pensamento, entendido como um processo. Os significados referem-se, assim, aos conteúdos instituídos, mais fixos, compartilhados, que são apropriados pelos sujeitos, configurados a partir de suas próprias subjetividades. (Aguiar; Ozella, 2006, p. 226)

Considerando que o pensamento emocionado, não é linear, mas em constante estado de movimento, captá-lo não é tarefa fácil. Vigotski (2001) afirma que o pensamento muitas vezes termina em fracasso, não se converte em palavras. As relações sociais são muito complexas, para que haja uma adequada produção de dados dentro da proposta dessa pesquisa. Faremos uso dos pressupostos do materialismo histórico-dialético, para realizar a construção dos núcleos de significação, tendo como apoios, para realizar a apreensão de tais significações, serão analisados todos os instrumentos (diário de campo, vídeo gravação e áudio gravação) utilizados para captar a realidade. De acordo com Aguiar e Machado (2015, p. 71-72),

> como movimento de síntese, os núcleos de significação não se reduzem ao caminho inverso da análise, procurando “juntar” as palavras que foram antes “quebradas”, esmiuçadas, no intuito de apreender sua estrutura semântica, isto é, o contexto em que foram enunciadas, a fim de apreender seus significados. Isso ocorre porque o movimento de síntese não é formado pela soma das partes, mas pela articulação dessas partes, no caso, as palavras (pensamento e fala), entendidas como elementos históricos e contraditórios que constituem “esse” caminho inverso, isto é, palavras que, uma vez produzidas pelo sujeito, são mediadas por sentidos e significados sobre a realidade na qual atua. Por isso, é nessa terceira etapa do procedimento que o pesquisador, mediado pela sistematização dos indicadores (abstração das categorias simples), tende a passar de uma visão empírica para uma visão concreta da realidade, isto é, avançar da compreensão do significado para a compreensão do sentido da palavra enunciada pelo sujeito.

Considerando que o pensamento emocionado não é linear, mas se encontra em constante movimento, captá-lo não é uma tarefa simples. Vigotski (2001) afirma que, muitas vezes, o pensamento termina em fracasso, não se convertendo em palavras. Essa característica, associada à complexidade das relações sociais, impõe desafios significativos à produção de dados, especialmente no âmbito metodológico desta pesquisa. Diante disso, a análise será conduzida com base nos pressupostos do Materialismo Histórico-Dialético, utilizando o método de análise por núcleos de significação. Para apreender as significações produzidas pelos sujeitos, serão considerados todos os instrumentos metodológicos empregados — diário de campo, videogravações e gravações de áudio —, os quais possibilitam acessar os sentidos construídos no decorrer das interações. Como destacam Aguiar e Machado:

> Ao se apreender o processo por meio do qual os motivos se configuram, avança-se na apropriação do processo de constituição dos sentidos, definidos como a melhor síntese do racional e do emocional. Aproximamo-nos, dessa forma, do processo gerador da atividade, ao mesmo tempo gerado por ela. Apreendemos o que é a atividade para o sujeito, e, assim, algumas zonas de sentidos da atividade, claro que atravessadas pelos significados, mas, no caso, revelando uma forma singular de vivê-las e articulá-las. (Aguiar; Ozella, 2006, p. 228)

Nesse sentido, o objetivo desta análise é compreender como os sentidos emergem nos relatos compartilhados pelos participantes durante as interações com a pesquisadora. Para isso, recorre-se à base lógico-histórica fornecida pelas categorias da dialética materialista, que orientam a análise das relações entre os enunciados e a dinâmica das interações. Na sequência, são apresentadas as etapas inter-relacionadas que compõem o processo de constituição dos núcleos de significação.

4.6 A elaboração dos núcleos de significação

Fundamentada na compreensão histórico-dialética dos processos de significação presentes nas interações ocorridas no contexto da pesquisa — nas quais os sentidos pessoais e os significados sociais se entrelaçam durante a relação dialógica com a pesquisadora —, a elaboração dos núcleos de significação ocorre em três etapas interdependentes. A primeira etapa consiste no levantamento dos pré-indicadores, que se refere à identificação de palavras, expressões ou fragmentos de fala que apresentam significado relevante no contexto analisado. Na segunda etapa, realiza-se a sistematização dos indicadores, que envolve a exploração das relações entre os pré-indicadores, considerando suas similaridades, complementaridades ou contradições, de modo a agrupá-los em conjuntos coerentes. Por fim, a terceira etapa corresponde à sistematização dos núcleos de significação, momento em que os indicadores são sintetizados em unidades categóricas que expressam, de forma articulada, os sentidos produzidos pelos sujeitos, possibilitando uma compreensão mais profunda da realidade investigada e das contradições presentes no processo.

Segundo Vigotski (2001, p. 182), "quando diversas palavras se fundem numa única, a nova palavra não expressa apenas uma ideia de certa complexidade, mas designa todos os elementos isolados contidos nessa ideia". De maneira análoga, o processo de elaboração dos núcleos de significação busca recompor o movimento do real, sintetizando, dialeticamente, os elementos que emergem das falas dos sujeitos. Tal movimento não é arbitrário, mas resultado da atividade do sujeito em sua totalidade, historicamente situado e inserido nas relações sociais que constituem um todo maior. Para mais:

> A partir dos pré-indicadores identificados, podemos avançar para indicadores do tipo: violência, drogas, gravidez, sexualidade, família, escola, consumismo, religiosidade, medo, alegria, tristeza, prazer etc. Entretanto, tais indicadores podem ter significados diferentes dentro de condições específicas (lembrem-se dos critérios de aglutinação citados acima: semelhança, complementaridade, contraposição). Um indicador como a violência pode ter potências e coloridos diferentes em condições diversas, tais como: fases ou etapas de sua trajetória na vida, nas relações com "outros" (família, trabalho, autoridades, namorada), em experiências de vida etc. Estes seriam os conteúdos temáticos junto aos quais os indicadores adquirem algum significado. De posse desse conjunto (os indicadores e seus conteúdos), devemos, nesse momento, voltar ao material das entrevistas e iniciar uma primeira seleção dos trechos que ilustram e esclarecem os indicadores. (Aguiar; Ozella, 2006, p. 230).

Portanto, compreender as significações exige considerá-las no movimento dialético em que são constituídas, partindo das mediações mais imediatas até aquelas que se inserem na totalidade social. Nesse processo, os pré-indicadores correspondem às falas ou expressões dos sujeitos que se destacam por revelar sentidos e significados relevantes no contexto da pesquisa. A partir da análise desses pré-indicadores, estabelece-se a etapa dos indicadores, que consiste na articulação entre eles, considerando suas semelhanças, contradições e complementaridades, de modo que um elemento potencializa e ressignifica o outro. Por fim, os núcleos de significação resultam da síntese dos indicadores entre si e de sua articulação com o contexto concreto em que foram produzidos e com os fundamentos teóricos que orientam a análise. Ademais:

> nesse movimento de articulação dos núcleos entre si, e com as condições sociais, históricas, ideológicas, condição de classe, gênero, e, sem dúvida, com os conhecimentos cientificamente produzidos sobre a área em questão, uma nova realidade surge, mais complexa, integrada, reveladora das contradições, movimento esse fundamental para a apreensão da constituição dos sentidos. Aguiar; Ozella, 2006, p. 243)

Esse movimento é fundamental para a apreensão da constituição dos sentidos e significados, pois permite identificar caminhos metodológicos mais eficazes na produção e no desenvolvimento de significações pelos estudantes. Desse modo, retornar aos relatos configura-se como um exercício indispensável de aprimoramento dos dados, uma vez que, à medida que a pesquisadora avança nas leituras subsequentes às etapas metodológicas, seu olhar se torna progressivamente mais sensível e refinado. Isso ocorre porque, neste estágio, ela já dispõe de instrumentos teóricos que operam como lentes de ampliação, permitindo-lhe apreender com maior precisão os elementos que antes poderiam passar despercebidos. A qualidade dos núcleos de significação produzidos ao final do processo está diretamente vinculada a essa interpretação não linear, que rejeita a análise pautada em tópicos rígidos e fragmentados. Em vez de se distanciar dos relatos, a pesquisadora aprofunda sua compreensão, ampliando os contextos, as mediações e as contradições implicadas no material empírico.

A organização dos núcleos de significação ocorre em duas etapas inter-relacionadas. Na primeira, os núcleos são deduzidos e estruturados a partir da interligação dos indicadores, previamente sistematizados, por meio de um processo de síntese que busca apreender as necessidades, os sentidos e as motivações que mobilizam a atividade dos sujeitos. Na segunda etapa, realizada após a definição dos núcleos, a análise se volta para a articulação entre os próprios núcleos, aprofundando a compreensão das zonas de sentido que emergem nas interações com os participantes. Nesse processo, a pesquisadora amplia sua apreensão das múltiplas determinações histórico-culturais implicadas, deslocando o foco da análise de uma compreensão isolada de cada núcleo para uma leitura totalizante, que considera suas inter-relações. Importa ressaltar que o objetivo desse movimento analítico não é produzir um conhecimento fechado ou fragmentado da realidade, mas sim formular uma compreensão mais concreta, profunda e historicamente situada dos sentidos desenvolvidos pelos sujeitos no contexto investigado.

5 DESENVOLVIMENTO DOS DADOS DA PESQUISA DE CAMPO

Os dados apresentados não foram simplesmente coletados, uma vez que não estavam prontos ou acabados na realidade investigada, disponíveis de forma imediata para serem registrados. Na perspectiva do Materialismo Histórico-Dialético, o desenvolvimento do conhecimento envolve a apreensão da dinâmica das relações sociais, das contradições cotidianas e dos acontecimentos singulares, que estão em constante movimento. Esse caráter dinâmico da realidade faz com que os resultados das percepções imediatas estejam longe de serem plenamente constituídos ou definitivos. Além disso, é importante destacar que, devido ao curto período destinado à realização desta pesquisa e às limitações objetivas que restringiram um aprofundamento mais amplo das contradições sociais presentes, os resultados aqui apresentados não podem ser compreendidos como conclusões fechadas, mas sim como uma análise em processo, situada historicamente. Essa condição reflete, em parte, as determinações impostas pela lógica do modo de produção capitalista, que impõe pressa e aceleração na constituição do conhecimento, tensionando o tempo necessário para a apreensão rigorosa da totalidade.

Ainda assim, é possível alcançar conclusões provisórias e viáveis, especialmente quando se observa a recorrência de padrões gerais do objeto de estudo em diferentes situações analisadas. Tal processo exige a análise das particularidades e a generalização desses padrões, com base em categorias teóricas que reflitam a realidade concreta e impulsionem o desenvolvimento do pensamento no seu movimento lógico-histórico. Essas categorias, ancoradas na perspectiva histórico-dialética, operam como instrumentos teórico-metodológicos que permitem a ampliação do olhar investigativo, possibilitando, mesmo em estudos realizados em períodos curtos, a elaboração de análises rigorosas e historicamente situadas.

Assim, pode-se afirmar que tais categorias funcionam como lentes que tornam possível uma apreensão mais clara e aprofundada da realidade. Contudo, é fundamental reconhecer que cada pesquisador mobiliza seus próprios instrumentos culturais, formados ao longo de sua trajetória, para analisar e interpretar os fenômenos investigados. Nesse sentido, os conceitos que emergem no processo de análise não são produtos mecânicos da pesquisa, mas expressões teóricas das interações humanas, socialmente constituídas no ambiente escolar, e que, portanto, devem ser apreendidas em sua historicidade, pois é a partir delas que se orienta o próprio movimento da investigação.

À luz da intencionalidade que orienta esta pesquisa, pautada na análise das interações do grupo, torna-se imprescindível esclarecer, antes da apresentação dos resultados obtidos por meio dos núcleos de significação, que este procedimento metodológico não se restringe à transcrição literal dos discursos. A análise das falas parte da compreensão de que os sentidos nelas expressos não estão dados de forma imediata, exigindo um movimento interpretativo orientado pela apreensão das categorias teóricas que revelam a substancialidade do fenômeno, sempre articulada à sua dimensão histórica e à totalidade social em que se insere (Aguiar; Aranha; Soares, 2021).

Dessa forma, a análise foi realizada a partir das elaborações produzidas pelos estudantes nas tarefas propostas e dos registros obtidos por meio dos instrumentos metodológicos — gravações de áudio, vídeo e diário de campo —, os quais possibilitaram compreender também o contexto emocional em que os sujeitos estavam inseridos. Para orientar esse processo, foram adotadas categorias teóricas fundamentais, alinhadas à Teoria Histórico-Cultural, a saber: mediação, contradição, sentido, significado, pensamento, linguagem e generalização.

Esta análise tem como objetivo geral compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) que mobilizem a generalização do pensamento aritmético. Como objetivos específicos, foram definidos:

a) analisar se a mobilização dos nexos conceituais da álgebra, nas SDA, produz significações que favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico;
b) verificar se as SDA suscitam a atividade de estudo, orientando os estudantes na apropriação dos conceitos;
c) compreender o papel da mediação pedagógica na produção de significações pelos estudantes.

Cabe destacar que a análise prioriza o desenvolvimento do pensamento teórico dos sujeitos, em consonância com os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, e não simplesmente os resultados imediatos das tarefas. A partir desse percurso, emergiram três núcleos de significação, que sintetizam os sentidos produzidos pelos sujeitos no decorrer da atividade:

a) núcleo 1: O movimento da linguagem aritmética para alcançar a ideia de generalização;
b) núcleo 2: A generalização da aritmética na constituição da ideia de variável;
c) núcleo 3: A linguagem algébrica articulada à figura, à ideia de fluência e de interdependência.

A seguir, será apresentada a análise referente ao Núcleo 1.

5.1 Núcleo de significação 1: O movimento da linguagem aritmética para alcançar a ideia de generalização.

Ao tomar como ponto de partida o movimento da linguagem aritmética em direção à generalização, este núcleo busca compreender como os elementos próprios da aritmética se transformam, progressivamente, em fundamentos para a formação de conceitos mais abstratos e generalizados, próprios do pensamento algébrico. Essa análise centra-se na mobilização dos princípios e operações da aritmética — como relações de equivalência, composição, decomposição, conservação e regularidades — que, ao serem apropriados pelos sujeitos, passam a operar como instrumentos para a resolução de situações que exigem a superação do raciocínio puramente empírico, favorecendo, assim, o desenvolvimento do pensamento teórico.

O percurso que caracteriza esse movimento envolve a apreensão de padrões, regularidades e relações matemáticas mais amplas, superando o tratamento restrito de números específicos em situações concretas. Nesse contexto, destaca-se o papel fundamental da instrumentalização, entendida como o uso de ferramentas culturais — particularmente a linguagem matemática — na mediação da atividade cognitiva. À medida que os estudantes se apropriam dos conceitos e operações aritméticas, esses passam a operar como instrumentos psicológicos, possibilitando sua mobilização em diferentes situações e favorecendo o desenvolvimento de processos de generalização. Esse movimento permite aos sujeitos reconhecer padrões, regularidades e relações numéricas, o que constitui um passo decisivo na transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. As reflexões que fundamentam este núcleo emergem das falas, interações e elaborações produzidas pelos estudantes e pela professora-pesquisadora no contexto da sala de aula em que se desenvolveu essa pesquisa.

Nesse sentido, o Núcleo 1 é caracterizado pelos seguintes indicadores: 1) a utilização de padrões e regularidades geométricas para mobilizar conceitos aritméticos essenciais à promoção da generalização; 2) a generalização como ponto de partida para a ascensão à álgebra retórica.

Assim, iniciamos a análise pelos indicadores contidos no Núcleo 1, mediante as falas que o compõem, apresentadas por meio de recortes. Destaca-se, ainda, que as situações são complementares, inseridas no mesmo contexto escolar, e não são abordadas em uma sequência cronológica das aulas. Dessa forma, a análise tem como ponto de partida a relevância dos dados, alinhados aos objetivos da pesquisa, os quais deram origem aos núcleos de significação.

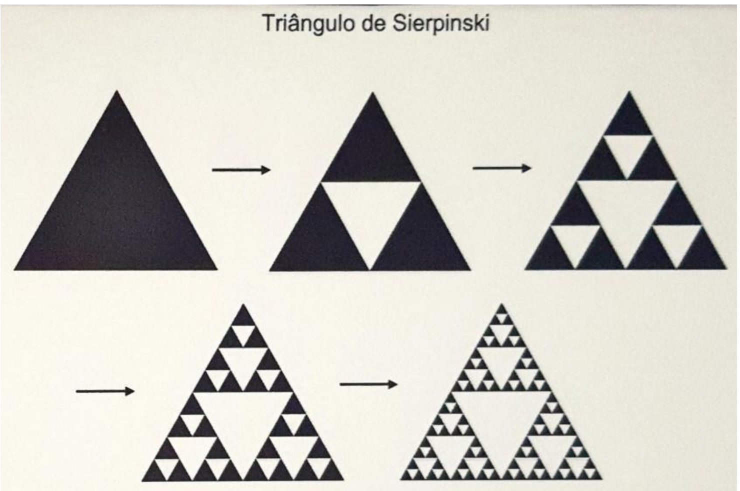
Quadro 10 - Recorte 1 - Indicador: A utilização de padrões e regularidades geométricas para mobilizar conceitos aritméticos essenciais para promover a generalização.

Professora: Quero que vocês, juntos, analisem e conversem a respeito dessas imagens (**Sierpinski)** e discutam sobre: **o que você consegue observar** nelas? **Será que tem algum padrão**? Marcellinho: Todos são **triângulo**. Professora: Todos **são triângulos** e o que mais? Danflamengo: **Eles (triângulos)** sempre se dividem em três Gabriel: **Multiplicando** três vezes. Professora: Mais como **assim eles sempre se dividem em três ou se multiplicam por três**? Danflamengo: Assim oh! Na segunda **ele** se divide em três, na terceira já tem três, três e três e assim por diante. Gabriel: Tá, mas **esse** (**triângulo**)aqui não tem nenhum…pera…me perdi? Coloco como uma? Professora: Não Gabriel, você não se perdeu! Isso, Dan. e Marcellinho! E **como que tá acontecendo essa divisão**? Vocês **conseguem observar como ela acontece dentro desse triângulo** aqui por exemplo, **quando saí dessa primeira figura pra essa segunda na primeira interação**? Danflamengo: **Ele pega os pontos médios?** Professora: E o que é o ponto médio? Danflamengo: **É quando pega a metade do lado** Professora: E **nas demais interações**, será que ele **repete o encontro dos pontos médios** de novo? Danflamengo**: Sim, mais daí vai encontrar mais**, porque daí você vai achar esse…esse e esse e nas outras duas partes também! Darla: Um **padrão**.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse primeiro contexto, podemos observar que a introdução do tema foi apresentada aos estudantes por meio de imagens que continham as iterações do triângulo de Sierpinski, nas quais os estudantes foram provocados a observar e discutir os padrões presentes nessas figuras. Esse contexto constituiu o ponto inicial para a exploração dos conceitos matemáticos, em que a geometria dos triângulos se configurou como elemento essencial para favorecer a compreensão dos conceitos aritméticos fundamentais.

Imagem 10 - Iterações dos Triângulos de Sierpinski



Fonte: Dados da pesquisa.

Os estudantes, então, foram encorajados a identificar padrões geométricos, como a maneira pela qual os triângulos se dividem e se multiplicam em cada etapa do processo. Por meio dessa observação, eles começaram a relacionar esses padrões com conceitos aritméticos, como a multiplicação por três e a formação de sequências numéricas.

Imagem 11 - Estudantes elaborando tarefas

Fonte: Dados da pesquisa.

A mediação, nessa etapa, buscou conduzir a discussão para que os estudantes, por meio dos conhecimentos prévios acerca dessa situação, pudessem, a partir da socialização, compreender os conceitos matemáticos envolvidos. Ademais, os estudantes foram incentivados a generalizar seus aprendizados, aplicando os padrões identificados em outras situações matemáticas. Na fala: "*Na segunda **ele** se divide em três, na terceira já tem três, três e três e assim por diante"!*, outra estudante responde: "*Um **padrão**."* Essas falas indicam um processo de internalização do conceito, o qual é descrito por Davidov (1988) como a transformação da forma externa da atividade em uma imagem subjetiva da realidade, pois os estudantes estão reconhecendo um padrão específico presente nas figuras de Sierpinski e relacionando esse padrão ao processo de divisão iterativa. Esse processo, de acordo com Davidov (1988), possui função essencial no estudo das regularidades que regem o princípio das operações internas, pois "o processo de internalização não consiste na transferência da realidade externa para um "plano de consciência" e reflexões internas antecedentes, mas sim na produção e formação deste plano" (Davidov, 1988, p. 259).

Ainda, conforme Davidov (1988), esse movimento reflete o que o autor define como a transição da imagem interna para propriedades ideais do objeto, demonstrando como a compreensão profunda possibilita a materialização do conceito na prática. Nesse sentido, os estudantes foram desafiados a pensar além da aparência das figuras específicas apresentadas, buscando regularidades em diferentes contextos e reconhecendo a aplicabilidade desses conceitos em diversas situações.

Assim, conforme Vigotski (2001), a interação social e a mediação cultural promovem o desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Essa abordagem permitiu não apenas que os estudantes explorassem padrões geométricos e aritméticos, mas também possibilitou que os estudantes avançassem em sua Zona de Desenvolvimento Iminente, desenvolvendo não apenas habilidades específicas, mas também um pensamento matemático mais abstrato, como a capacidade de generalizar seu entendimento e aplicá-lo em diferentes situações, promovendo uma compreensão mais profunda e abrangente dos conceitos matemáticos, como é possível observar no recorte 2 a seguir.

Quadro 11 - Recorte 2 - Indicador: A generalização como ponto de partida para a ascensão a álgebra retórica.

(Continua)

Professora: Quero que vocês, juntos analisem e conversem a respeito dessas imagens (**Sierpinski)** e discutam sobre: **o que você consegue observar** nelas? **Será que tem algum padrão**?
Gabriel: A **operação** da conta é **multiplicação**! Mais a **operação** das contas é a **redução das multiplicações.**
Danflamengo: A **potência é a redução das multiplicações**.
Darla: **É uma multiplicação.**
Darla: Tá pulando.
Professora: Mais se ela tá pulando, **como nós podemos escrever?**
Darla: **Potência!**

Quadro 11 - Recorte 2 - Indicador: A generalização como ponto de partida para a ascensão a álgebra retórica.

(Conclusão)

Professora: Isso…e assim por diante. Então **esse expoente tá representando o que?** Marcellinho: **A posição da figura.** Danflamengo: Então, aí **sempre vai ter um número a menos da posição**!

Fonte: Dados da pesquisa.

No diálogo apresentado, os estudantes estão discutindo sobre duas figuras geométricas: o Triângulo de Pascal e as imagens de Sierpinski. Segundo Davidov (1988), a formação de representações gerais, conectadas à atividade prática, é crucial para o desenvolvimento do pensamento. Esse processo, que transforma a experiência sensorial em uma universalidade abstrata, torna-se evidente quando os estudantes reconhecem padrões e atribuem significado ao conceito de potência. Ainda, "o diálogo sempre pressupõe a percepção visual do interlocutor, de sua mímica e seus gestos, bem como a percepção acústica de todo o aspecto entonacional da fala" (Vigotski, 2001, p. 454).

Nessa fala, um estudante explica que "*A **potência é a redução das multiplicações**",* nesse contexto, a professora o questiona: "*Então, **esse expoente tá representando o que?***" e outro estudante responde: "***A posição da figura***", ao que outro estudante complementa, dizendo: "*Então, aí **sempre vai ter um número a menos da posição**!*" Assim, os elementos presentes nesse diálogo indicam um processo em que os estudantes estão atribuindo sentido aos conceitos matemáticos, conferindo-lhes significado dentro do contexto da figura geométrica em discussão e buscando generalizar esses conceitos para além do exemplo específico apresentado.

De acordo com Davidov (1988), a formação das representações gerais, diretamente conectadas à atividade prática, é fundamental para o desenvolvimento do pensamento. Esse pensamento, caracterizado pela formação e utilização de palavras-denominações, permite transformar a experiência sensorial em uma universalidade abstrata. A partir dessa generalização, torna-se possível organizar os juízos e utilizá-los em raciocínios mais complexos.

Diante do exposto, a professora, por meio da mediação, incentivou os estudantes a observarem e identificarem padrões nessas figuras. Ademais, a mediação semiótica do processo, através do qual uma ação é executada (ou planejada), ocorre quando a pessoa conhece (ou compreende) o significado do signo. Esse conhecimento propicia que o indivíduo "aproprie-se do singular como algo universal" (Davidov, 1988, p. 248).

Em síntese, essa interação entre os estudantes evidencia como eles utilizaram padrões geométricos e aritméticos para promover a generalização e aprofundar a compreensão de conceitos matemáticos fundamentais. Nesse sentido, como destaca Davidov (1988, p. 163), *"a* atividade de estudo produz melhores resultados quando as crianças interagem intensamente entre si no processo de assimilação de conhecimentos e habilidades". Assim, a mediação pedagógica e a interação social foram determinantes para o desenvolvimento do pensamento matemático teórico e significativo.

5.2 Núcleo 2: A generalização da aritmética para constituição da ideia de variável.

Nesse núcleo, percebemos que a transição da aritmética para a álgebra acontece à medida que os estudantes começaram a perceber e a generalizar padrões em problemas matemáticos. Assim, ao reconhecerem que as quantidades podem variar e ser representadas por símbolos ou letras, isso lhes possibilitou expressar relações e regularidades matemáticas de forma mais ampla e abstrata.

Nesse sentido, o Núcleo 2 é caracterizado pelos seguintes indicadores: 1) reconhecimento de padrões e regularidades; 2) a generalização, a abstração e a compreensão de infinitude.

Quadro 12 - Recorte 3 - Reconhecimento de padrões e regularidades

(Continua)

Danflamengo: Então, aí sempre **vai ter um número a menos da posição**! Professora: Pensando nesse contexto sim. Então, **uma forma de reduzir toda essa multiplicação é utilizando a potência**. E podemos concluir, ainda, que sempre que conseguimos obter ou observar um padrão nós teremos uma sequência e nesse primeiro caso uma sequência geométrica, porque estamos com uma forma de um triângulo para observar. Agora, nessa segunda tarefa, como podemos escrever os padrões? Marcelinho: Coloco **aqui na primeira posição 3 elevado a zero e o resultado e depois vai multiplicando de 3 em 3.** Professora: Isso! Marcelinho: Que foi? Não é assim não? Danflamengo: Esse **aqui é multiplicação e esse aqui é potência**. Professora: Esse triângulo feito de números é chamado de triângulo de Pascal e ele é bem interessante! [...] Será que tem algum padrão? Será que é possível perceber algum padrão na formação desses números? Marcellinho: **O 2 e o 20 não se repete! Tudo se repete menos eles dois!**

Quadro 12 - Recorte 3 - Reconhecimento de padrões e regularidades

(Conclusão)

Danflamengo: Ele **vai sempre dobrando! 2, 4, 8**
Professora: O que você está pensando?
Danflamengo: Aqui, ó! **No nível zero tem 1, no nível 1 tem 1 e 1, 1 + 1 = 2, no nível 2 tem 1, 2 e 1, 1+ 2 = 3 e 3+ 1 dá 4, que é o dobro de 2. Aqui tem 3 + 3 = 6 + 1 + 1 = 8, que é o dobro de 4. Aqui tem 4, 8 é 9, 10, 16, 16 é o dobro de 8. E assim por diante!**
Danflamengo: A **cada nível sempre dobra o valor da soma dos números da linha**!
Marcellinho: [...] **essas linhas aqui da diagonal estão em sequência**!

Fonte: Dados da pesquisa.

O recorte apresentado evidencia que os estudantes estão mobilizando relações internas — adição, multiplicação e potência — para explanar a regularidade observada, contida nas tarefas. Tal movimento indica a emergência de um salto qualitativo no desenvolvimento do pensamento algébrico, promovido pela mediação da professora, que orienta a transição do pensamento empírico para formas superiores de generalização conceitual. Na fala de Danflamengo, "*sempre **vai ter um número a menos da posição***!", observa-se que o estudante identificou um padrão regular atrelado à posição dos elementos. Sendo assim, torna-se inegável que o estudante deixa de ver os elementos de forma isolada e particular, pois "a análise revela-se na capacidade de generalizar, de encontrar o princípio geral, as condições essenciais, em meio às particularidades." (Sforni, 2003, p.9). Esse mesmo movimento é reforçado na fala de Marcelinho, ao afirmar que *"essas linhas aqui da diagonal estão em sequência"*, o que demonstra que o estudante não está apenas observando dados isolados, mas reconhecendo uma regularidade em uma estrutura espacial (diagonal) e numérica, indício claro da percepção de uma lei de formação. Esse tipo de análise, que busca relações internas, é a base para a construção de modelos generalizáveis. Ainda, Davidov (1988) afirma que o desenvolvimento do pensamento teórico se dá quando os estudantes são levados a operar com os nexos essenciais das relações, e não mais com propriedades externas. Para o autor, "o conceito atua, simultaneamente, como forma de reflexo do objeto material e como meio de sua reprodução mental, de sua estruturação, isto é, como ação mental especial." (Davidov, 1988, p. 128)

A fala de Danflamengo, *"A cada nível sempre dobra o valor da soma dos números da linha"*, mostra que ele não está apenas somando números, mas identificando uma lei de formação, ou seja, a regularidade interna da estrutura, na situação apresentada, configura-se como uma regra de crescimento exponencial no triângulo.

Tal evidência, contida na fala de Danflamengo, caracteriza exatamente o que Davidov chama de análise teórica, na qual o estudante não mais opera apenas sobre dados aparentes, mas apreende relações internas, capazes de gerar modelos generalizados. Ademais, o movimento observado nas falas dos estudantes permite afirmar que a atividade orientada de ensino, mediada pela professora, desencadeou processos de análise que contribuíram para a formação de significações matemáticas ancoradas no desenvolvimento do pensamento algébrico. Esse processo não é linear, mas dialético, na medida em que se constitui na relação entre as contradições presentes na própria atividade dos sujeitos e nas condições objetivas do ensino, conforme os fundamentos do Materialismo Histórico-Dialético.

Por fim, o reconhecimento de padrões e regularidades se acentua no recorte seguinte, quando, por meio da mediação, os estudantes avançam na constituição de generalizações mais amplas.

Recorte 3 - Indicador: A Generalização, a abstração e a compreensão de infinitude.

Professora: Esse **triângulo feito de números é chamado de triângulo de Pascal** […]

Professora: […] **será que tem algum padrão?** […]

Danflamengo: **A cada nível sempre dobra o valor da soma dos números da linha!**

Marcellinho: Essas linhas aqui da **diagonal estão em sequência**!

Professora: Mas será que **existe uma lógica** assim **pra formação desses números do meio?**

Danflamengo: **Dá 122 o total**

Professora: Será que **esse triângulo é finito?** […]

Danflamengo: ah**hh…é infinito!** Então não dá pra somar tudo!

Professora: Será que tem uma **forma mais simples de escrever essa ideia?**

Danflamengo: **Potência!** Como é o dobro e, dobro é uma multiplicação pode usar a potência!

Professora: **E como seria essa potência? Qual seria a base dela?**
Danflamengo: Base 2
Professora: […] agora será que esses dois triângulos aí **(Sierpinski e Pascal) tem alguma coisa em comum?**
Danflamengo: **Ele (Pascal) é igual o fractal**, então tem que dar o número daqui!
Darla: É a mesma coisa!
Gabriel: É só pintar os pares!

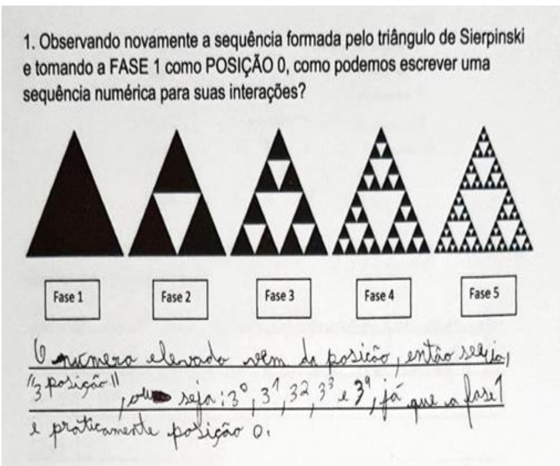
Fonte: Dados da pesquisa (2022)

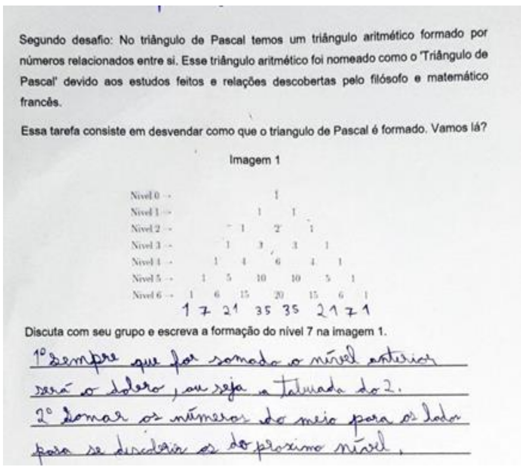
O recorte denota o papel principal da professora durante a interação social dos estudantes, por meio da qual é possível observar a promoção da generalização, da abstração e da concepção de conceitos matemáticos fundamentais. A intervenção da professora, ao incitar os estudantes a observar os padrões do Triângulo de Pascal, evidencia o papel central da mediação no processo de internalização. Ademais, Vigotski (2001) considera que a aprendizagem se constitui em um contexto social, mediada por ferramentas culturais, como a fala, o que permite aos estudantes "as melhores condições para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores que se encontram na zona de desenvolvimento imediato" (Vigotski, 2001, p. 337).

Davidov (1988) reforça que a atividade de estudo deve partir de situações práticas que possibilitem a formação de representações gerais e abstrações. Durante a discussão, os estudantes reconhecem que a operação subjacente aos padrões é a multiplicação e discutem sobre o comportamento dos números em relação às potências. Por exemplo, Danflamengo e Darla mencionam que a potência é uma forma de resumir as multiplicações. Eles também observam padrões de duplicação nos números, percebendo que os valores estão dobrando a cada nível. Essa observação os leva a fazer conexões com a base 2 para representar os padrões encontrados.

Ainda, Davidov (1988) caracteriza esse processo como a transição do empírico para o teórico, no qual os estudantes superam as características superficiais dos números e iniciam o processo de abstração de suas propriedades subjacentes, articulando-as com conceitos mais amplos. Leontiev (2021), em sua concepção da Teoria da Atividade, destaca que o desenvolvimento do pensamento está enraizado na relação entre a atividade prática e a apropriação de significados, que se dá pela mediação da prática social e pela fala.

Imagem 12 - Elaborações dos Estudantes

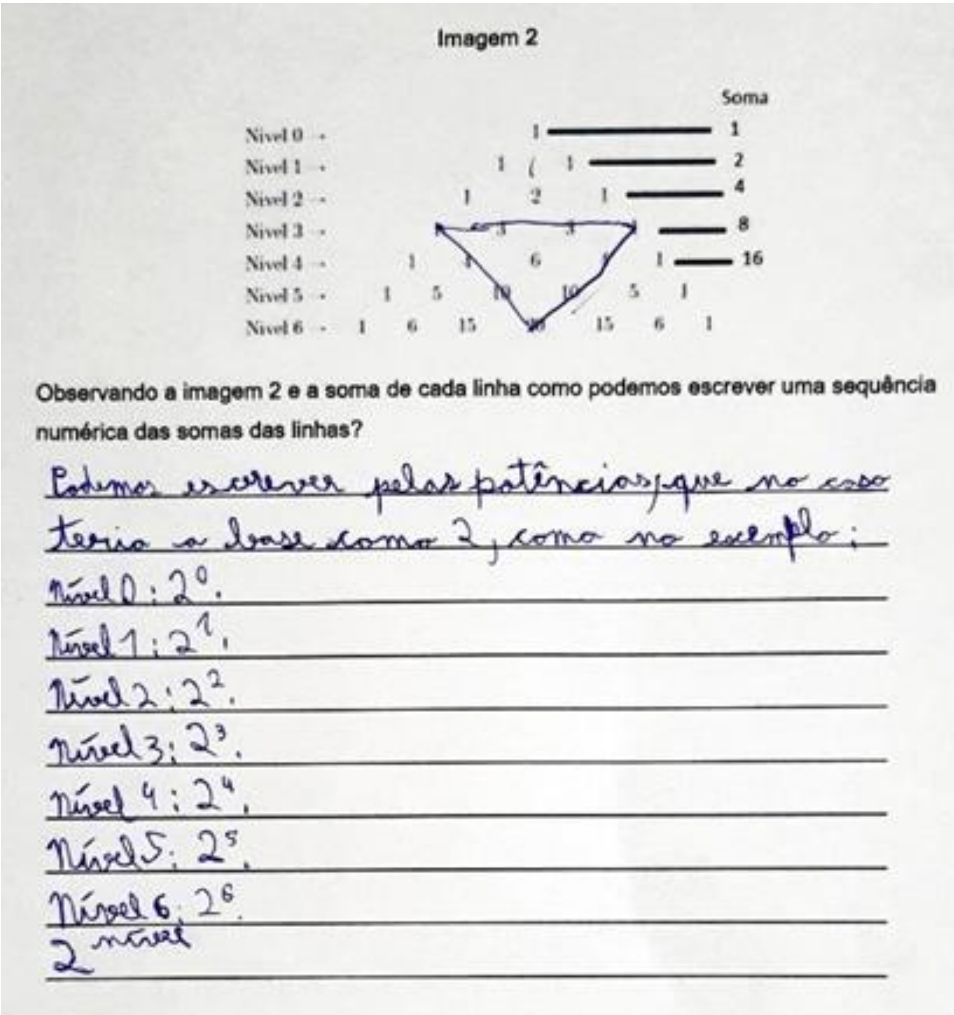




Fonte: Dados da Pesquisa.

Além disso, eles questionaram se os padrões continuam infinitamente, sugerindo a natureza infinita do Triângulo de Pascal. Ademais, relacionaram os padrões encontrados nos dois triângulos, destacando as semelhanças entre eles. Assim, o reconhecimento de padrões, a generalização de conceitos e a abstração constituem os princípios teóricos de Davidov (1988), Leontiev (2021) e Vigotski (2001), pois denotam que o aprendizado matemático está profundamente consolidado na interação entre atividade prática, mediação social e apropriação cultural.

Imagem 13 - Elaborações dos Estudantes

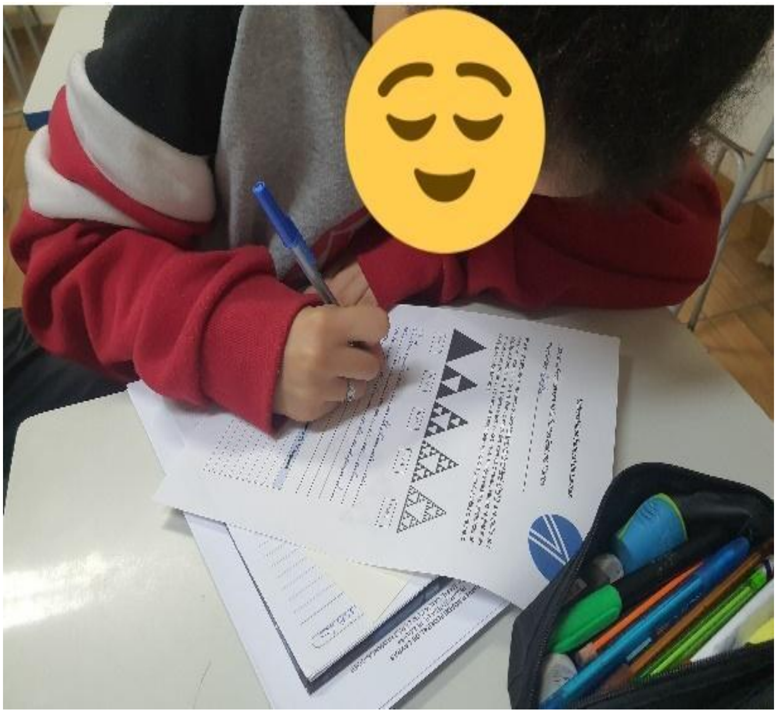


Fonte: Dados da Pesquisa.

Tais resultados indicam que a interdependência e a fluência dos conceitos matemáticos foram promovidas no decorrer das situações de aprendizagem, sendo contextualizadas e interligadas com a experiência social e cultural dos estudantes. As estratégias utilizadas pela professora para possibilitar a compreensão e a aplicação dos conceitos matemáticos — como a simplificação e a representação matemática — evidenciam a importância da mediação social no processo de aprendizagem.

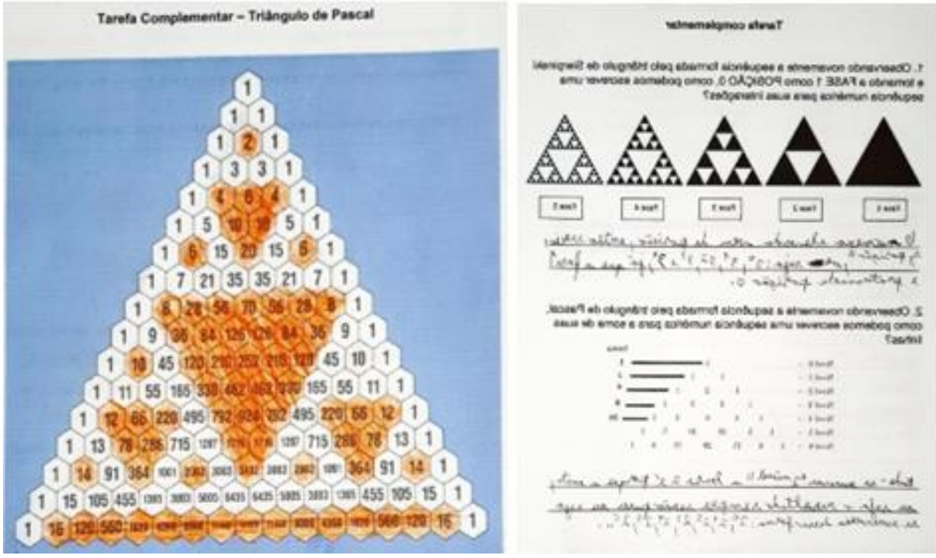
Em síntese, essa troca entre os estudantes evidencia como eles estão utilizando padrões geométricos e aritméticos para promover a generalização e aprofundar sua compreensão dos conceitos matemáticos fundamentais. Dessa forma, "a atividade de estudo produz melhores resultados quando as crianças interagem intensamente entre si no processo de assimilação de conhecimentos e habilidades" (Davidov, 1988, p. 163).

Imagem 14 - Estudante elaborando as tarefas da pesquisa



Fonte: Dados da pesquisa.

Imagem 15 - Elaborações dos Estudantes



Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, a comparação que os estudantes fizeram entre os triângulos de Sierpinski e Pascal evidencia a percepção de semelhanças — como a igualdade dos números nos lados do Triângulo de Pascal e nos triângulos de Sierpinski — e de diferenças em suas estruturas matemáticas, o que explicita a compreensão de diferentes conceitos matemáticos, essenciais para o desenvolvimento do pensamento abstrato.

Esse núcleo evidencia que a generalização, a abstração e a compreensão de infinitude foram alcançadas por meio da interação social e da mediação. Conforme Vigotski (2001), Davidov (1988) e Leontiev (2021), o aprendizado matemático emerge da integração entre a prática, a mediação e a apropriação de ferramentas culturais. Assim, o desenvolvimento do pensamento algébrico, observado nesse núcleo, demonstra a importância da mediação no processo de internalização e generalização de conceitos matemáticos.

5.3 Núcleo 3: A linguagem algébrica, a figura, a ideia de fluência e interdependência

Esse núcleo de significação traz evidências acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico e geométrico dos estudantes, estimulando-os a analisar padrões, identificar regularidades e expressar suas observações por meio da linguagem matemática.

Assim, esse núcleo é caracterizado pelos seguintes indicadores: 1) a utilização de jogos para promover a significação do conceito de variável e suas compreensões; 2) a utilização do movimento da álgebra retórica para a simbólica na resolução de situações-problema.

Quadro 13 - Recorte 4 - Indicador: A utilização de jogos para promover a significação do conceito de variável e suas compreensões

Professora: Vamos brincar? Hoje é dia de jogo! […] todo mundo vai jogar! Quero só ver quem vai ter a melhor pontaria, risos. Professora: […] você acertou quantos vermelhos? Marcellinho: […] **Três vermelhos e um amarelo**! Professora: Você ganha um cartãozinho pra cada cor que você acertou! Agora, vocês vão jogar mais uma vez, tá! Danflamengo: Eu ganhei **2 vermelhos, 6 amarelos e 1 preto**! Gabriel: **2 amarelos e 2 vermelhos**. Darla: **3 pretos e 1 vermelho**. Professora: Mas, aqui **como que eu posso escrever isso aqui na linguagem matemática?** Marcellinho: **Como assim, na linguagem matemática?** Professora: Vocês não acham que está muito grande essa frase: três vermelhos mais um amarelo? Marcellinho: **3v mais 1 amarelo! 3V mais 1A**! Professora: **Assim, 3V mais 1A**? Danflamengo: **Porque 3V mais 1A**? Marcellinho: **É a inicial do vermelho e do amarelo!** Danflamengo: **Então, pode tirar a palavra mais e colocar o sinal**! Professora: **Assim, 3V + 1A?** Danflamengo: É Professora: **Pode ser outra letra**? Marcellinho: **Pode**! Professora: Posso **juntar as duas letrinhas diferentes**? Marcellinho: Não tem como! Marcellinho: **Porque são diferentes um do outro**! Professora: Essas expressões aqui, elas têm alguns nomes diferentes. Então, olha só, **o nome dessas continhas são expressões algébricas**. **Por que** que ela é chamada de algébrica? Marcellinho: **Por que ela tem letra?** Danflamengo: É **variável**, né? Professora: […] a **variável** contém o nosso pensamento e porque ela simboliza **qualquer número**! Gabriel: Eu achava certo, então. Porque eu achava que **simbolizava a palavra e que a palavra continha o número em si.**

Fonte: Dados da pesquisa.

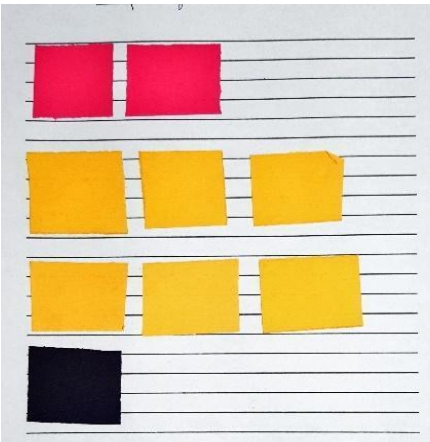
A professora pesquisadora introduziu esses jogos pautada na atividade principal, ou atividade guia, dos estudantes envolvidos, pois “cada atividade principal se constituem e se desenvolvem as correspondentes neoformações psicológicas, cuja seqüência cria a unidade do desenvolvimento mental” (Davidov, 1988, p. 75). A proposta do jogo caracterizou a intencionalidade de criar um ambiente propício para a constituição da abstração, possibilitando que os estudantes internalizassem os conceitos matemáticos em situações práticas e contextualizadas.

Durante a aprendizagem de conceitos matemáticos, na qual “o conceito da teoria é um sinônimo de consciência social na sua forma organizacional mais superior e desenvolvida” (Davidov, 1988, p. 84), a professora realizou a mediação entre a teoria e a prática, incentivando a participação de todos. Durante o jogo, no qual os estudantes, ao participar de um desafio de tiro ao alvo, deveriam contar e identificar as cores das peças, transformaram um problema concreto em uma oportunidade de generalização matemática. Dessa forma, “o produto superior do raciocínio organizado, ele media cada uma das atitudes humanas em relação à realidade e é uma condição para a transfiguração genuinamente consciente deste pensamento organizado” (Davidov, 1988, p. 84).

Imagem 16 - Estudantes no jogo de tiro ao alvo

Fonte: Dados da pesquisa.

Imagem 17 - Elaborações dos Estudantes



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao perceber que as frases usadas para expressar a contagem são longas, a professora incentiva os estudantes a simplificarem a linguagem: *"Vocês não acham que está muito grande essa frase: três vermelhos mais um amarelo?"* Esse movimento demonstra a aplicação prática da álgebra retórica, que antecede o desenvolvimento de representações simbólicas.

Conforme Vigotski (2001), a linguagem serve como uma ferramenta mediadora essencial para a internalização e organização do pensamento. Nesse contexto, o objetivo é contextualizar, de forma lúdica, a álgebra retórica, para que a abreviação das palavras fizesse sentido e trouxesse significado para os estudantes, o que pode ser observado nas falas: *"3V mais 1 amarelo! 3V mais 1A!"* A professora então questiona: *"Assim, 3V mais 1A?"* Outro estudante, que parece ainda não ter compreendido, pergunta: *"Por que 3V mais 1A?"*, sendo rapidamente auxiliado por seu colega de dupla, que explica: *"É a inicial do vermelho e do amarelo!"*

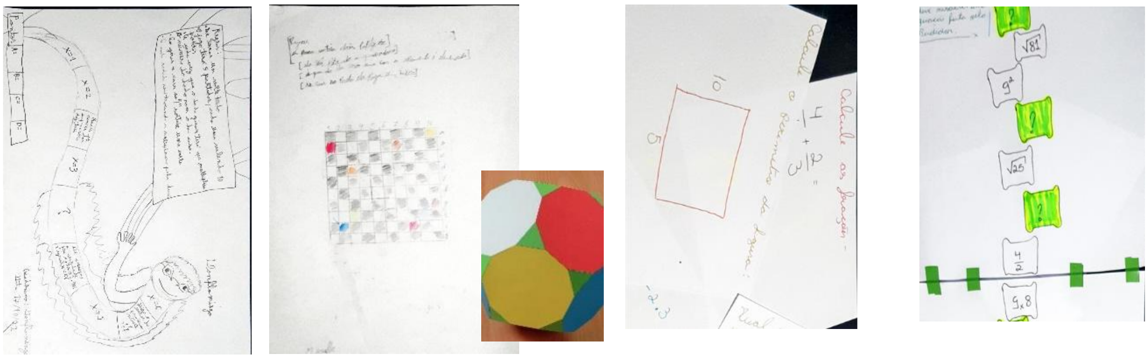
A partir disso, esse mesmo estudante já consegue contribuir com a formalização da redução da linguagem, ao afirmar: *"Então, pode tirar a palavra mais e colocar o sinal!"* A professora confirma a síntese do que foi constituído pelos estudantes, perguntando: *"Assim, 3V + 1A?"*, e o estudante assente, dizendo: *"É."*

Quando os estudantes começam a usar abreviações como *"3V + 1A"* para representar *"três vermelhos mais um amarelo"*, adotam uma forma mais compacta e sintetizada de expressar as quantidades, característica da álgebra sincopada. Essa abordagem permite uma representação mais eficiente das relações matemáticas, utilizando tanto palavras quanto símbolos. Essa transição reflete uma mediação eficaz, que conecta a prática com a abstração teórica, promovendo a passagem gradual para uma linguagem simbólica mais avançada.

Embora a transição observada no texto seja mais evidente da álgebra retórica para a álgebra simbólica, podemos inferir que os estudantes se aproximaram gradualmente de uma representação mais simbólica e formalizada, à medida que adotaram abreviações e símbolos para expressar conceitos matemáticos. Portanto, embora a álgebra sincopada não tenha sido mencionada explicitamente, sua influência pode ser percebida no processo de transição dos estudantes para uma linguagem matemática mais concisa e simbólica.

Outro aspecto relevante é a aplicação desses conceitos em situações práticas, como na resolução de problemas envolvendo a contagem de elementos coloridos durante o jogo proposto pela professora. Nesse contexto, os estudantes utilizam expressões algébricas para representar as quantidades de cada cor, demonstrando uma conexão entre o campo de variação matemático e situações do cotidiano.

Imagem 18 - Jogos produzidos pelos estudantes



Fonte: Dados da pesquisa.

Ademais, essa experiência evidencia a manifestação da fluência e da interdependência, integradas no processo de desenvolvimento da aprendizagem matemática, dinamizando o ambiente e possibilitando que os estudantes explorassem os conceitos, desenvolvessem habilidades e constituíssem os significados de forma coletiva. A utilização de jogos e a introdução de conceitos matemáticos em um contexto prático reforçam o vínculo entre pensamento teórico e atividade prática, conforme enfatizado por Davidov (1988, p. 247), ao afirmar que “é em toda a diversidade das formas coletivas de atividade que o indivíduo adquire a forma subjetiva, a forma da regulação consciente de sua própria atividade individual.”

Além disso, a professora aproveita a oportunidade para explicar o conceito de variável, mostrando como as letras podem representar números desconhecidos. Esse processo de elaboração conceitual está alinhado à ideia de Davidov (1988), de que a generalização de conceitos matemáticos emerge da atividade prática, permitindo que os estudantes internalizem significados e os articulem em novas situações. Assim, podemos verificar que os estudantes compreenderam sua essência por meio da fala: *"Eu achava certo, então. Porque eu achava que simbolizava a palavra e que a palavra continha o número em si."*

Desse modo, a professora ressalta ainda que as variáveis permitem que expressemos pensamentos que simbolizam qualquer número, sem ser o número em si, conforme sua fala: *"A variável contém o nosso pensamento e porque ela simboliza qualquer número!"* — estimulando os alunos a pensarem criticamente sobre os conceitos abordados. Assim, "o processo de formação de conceitos, desencadeado por via experimental, nunca reflete em forma especular o processo genético real de desenvolvimento na maneira como este ocorre na realidade". Ademais, "o método lógico de investigação é o mesmo método histórico", cujo "processo histórico de pensamento começa onde começa a história, e o seu ulterior desenvolvimento não é senão um reflexo, em forma abstrata e teoricamente coerente, do processo histórico, um reflexo realizado" (Vigotski, 2001, p. 200).

Portanto, essa tarefa propôs não apenas envolver os estudantes em uma atividade divertida, mas também incentivá-los a pensar de forma abstrata, promovendo o desenvolvimento de habilidades matemáticas e do raciocínio lógico. Essa abordagem demonstra que a interação entre prática social, mediação e apropriação cultural é essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme discutido por Davidov (1988), Leontiev (2021) e Vigotski (2001).

Com o objetivo de ampliar os elementos analíticos deste contexto, apresentamos mais um recorte, que corrobora e aprofunda a compreensão dos processos em análise.

Quadro 14 - Recorte 5 - Indicador: A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas

Professora: Agora, […] vocês vão participar de uma investigação! Aquele vidro que estava aqui com o tesouro de vocês! Danflamengo: **Quem será que roubou nosso tesouro**? […] Marcellinho: […] vamos procurar! **Olha, tá escrito ali 24 + G**
Professora: Pra mim parece um **A e não um 4**!
Marcellinho: **É mesmo 2A + G**! Acho que a pessoa pegou no canetão!
Marcellinho: **Se a pessoa pegou o tesouro do vidro, pode ter deixado digitais! Agora como que a gente coleta a digital daqui? Bom 2A+G…**
Marcellinho: É uma **variável!** Pode ser qualquer coisa!
Darla: O que é isso na lousa, prô? **Pode ser o nome de alguém? (2A+G)**
Danflamengo: **Dois armário mais uma gaveta?**
Darla: **A digital do pote tá mais pra da Sirlei!**

Quadro 14 - Recorte 5 - Indicador: A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas

(Conclusão)

Marcellinho: **É da Sirlei**. Mais, vamos dar uma olhada nas pistas da investigação de ontem e nos depoimentos das testemunhas. Professora: Vocês conseguiram perceber **algum padrão**? Darla: Eu achei!!! Hahaha…Vocês me devem uma! Professora: Então isso aqui **(2A + G) é igual a quem?** Ao tesouro! Na primeira parte nós vimos que quando temos só essa parte aqui oh 2A + G, nós temos uma expressão algébrica. E o que significam essas letrinhas aí? Darla: **São variáveis**! Professora: E **o que significa** esse termo "**variáveis**"? Danflamengo: Significa que **podem representar qualquer coisa**! Professora: Porém, no caso do tesouro perdido **a expressão 2A + G = tesouro**, não temos mais uma expressão algébrica, porque agora temos uma **igualdade e uma pergunta a ser respondida**, que no caso era descobrir onde estava o tesouro. Então, quando temos essas condições dizemos que temos uma **equação**! Professora: Então, diferentemente da operação algébrica que a gente tem situações **variáveis**, aqui aparece uma **incógnita**! Darla: A gente **tem que descobrir o "xis".** Professora: **Qual é a diferença entre a variável e a incógnita**? Marcellinho: **A variável muda, pode representar qualquer coisa. E a incógnita é a pergunta. Ela não muda e eu consigo achar um valor!** […] Marcellinho: Eu tô com uma ideia na minha cabeça, mas não sei como fazer. Quero colocar **incógnita** e expressão algébrica. Professora: Em que você tá usando as **variáveis** e as **incógnitas** aí? Marcellinho: A **incógnita** é a dúvida aqui. Professora: E você acha que dá para inserir a **variável** aí? Marcellinho: Tipo, sortear as cores. […] Danflamengo: Nas perguntas que você vai sortear, aqui eu utilizo a **sequência**, as **incógnitas nos desafio**s sorteados e **as variáveis aparece na pontuação**. Darla: quem tirar ímpar começa o jogo. […] Professora: Onde estão as **variáveis** ou as **incógnitas** no seu jogo? Darla: Esse jogo é feito basicamente por **incógnitas!** Professora: Ah é, por quê? Darla: Porque, aqui **no jogo as variáveis vai ser a pontuação e as incógnitas os desafios** e as **equações** que a pessoa tem que resolver.

Fonte: Dados da pesquisa.

No recorte apresentado, os estudantes participam de uma proposta desafiadora elaborada pela professora, envolvendo uma investigação fictícia para encontrar um *"tesouro perdido"*. Esse contexto lúdico foi essencial para introduzir conceitos algébricos de forma significativa e estimular a mobilização dos estudantes. Ao associar a resolução do problema ao uso de expressões matemáticas, como *"2A + G"*, os estudantes foram guiados a atribuir significados às variáveis e incógnitas, promovendo a compreensão e a aplicação de conceitos matemáticos em um cenário prático.

Durante a interação, é possível observar a constituição de sentido, significado e generalização por parte dos estudantes. Inicialmente, a professora introduz o contexto da atividade, incentivando-os a participarem de uma investigação para encontrar um *"tesouro perdido"*. Isso se evidencia quando a professora anuncia: *"Agora [...] vocês vão participar de uma investigação! Aquele vidro que estava aqui com o tesouro de vocês!"* Imediatamente, Danflamengo responde, demonstrando seu envolvimento com a situação: *"Quem será que roubou nosso tesouro?"* Essa introdução estabelece um propósito claro, mobilizando os estudantes e despertando seu interesse para o desenvolvimento da tarefa.

Conforme explica Moura et al. (2010, p. 210), "são as ações de estudo que permitem ao estudante ter condições de individualizar relações gerais, identificar ideias-chave da área de conhecimento, modelar relações, dominar procedimentos de passagem das relações gerais à sua concretização e vice-versa." Essa compreensão revela que as situações vivenciadas pelos estudantes nesta tarefa não se restringem à resolução de uma situação isolada, mas, ao contrário, constituem-se como parte de um processo que favorece a formação de conceitos e o desenvolvimento do pensamento teórico.

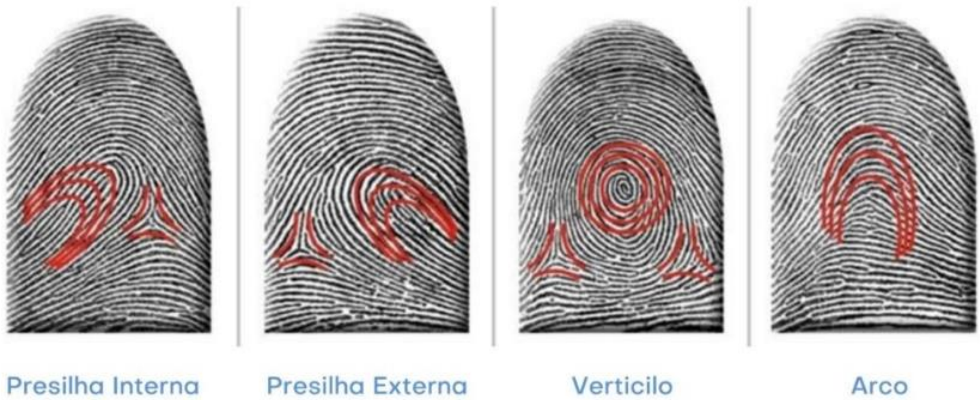
É relevante destacar que, quando Marcellinho observa a inscrição *"24 + G"* — posteriormente interpretada corretamente como *"2A + G"* — ao afirmar: *"Acho que a pessoa pegou no canetão"*, ele não está apenas analisando os símbolos na lousa, mas também levanta uma hipótese fundamentada na mediação anterior realizada pela professora, que, antes do início desta tarefa, havia orientado os estudantes sobre como identificar padrões nas impressões digitais, como parte dos procedimentos da investigação. Esse movimento evidencia que o estudante aciona conhecimentos previamente apropriados, articulando-os à situação-problema que se apresenta no momento.

Nesse sentido, conforme Moura *et al.* (2010, p. 211), "não se entende um conceito como uma abstração, ele é, na verdade, o concreto gerado a partir da associação de abstrações". Tal afirmação reforça que, ao fazer essa conexão, o estudante revela compreender a lógica do processo investigativo, mobilizando saberes tanto do campo da prática quanto do campo da matemática, e transita do plano concreto da investigação para o plano da abstração simbólica, que se constitui, nesse contexto, por meio da linguagem algébrica.

Imagem 19 - Impressões digitais coletadas pelos estudantes e seus tipos

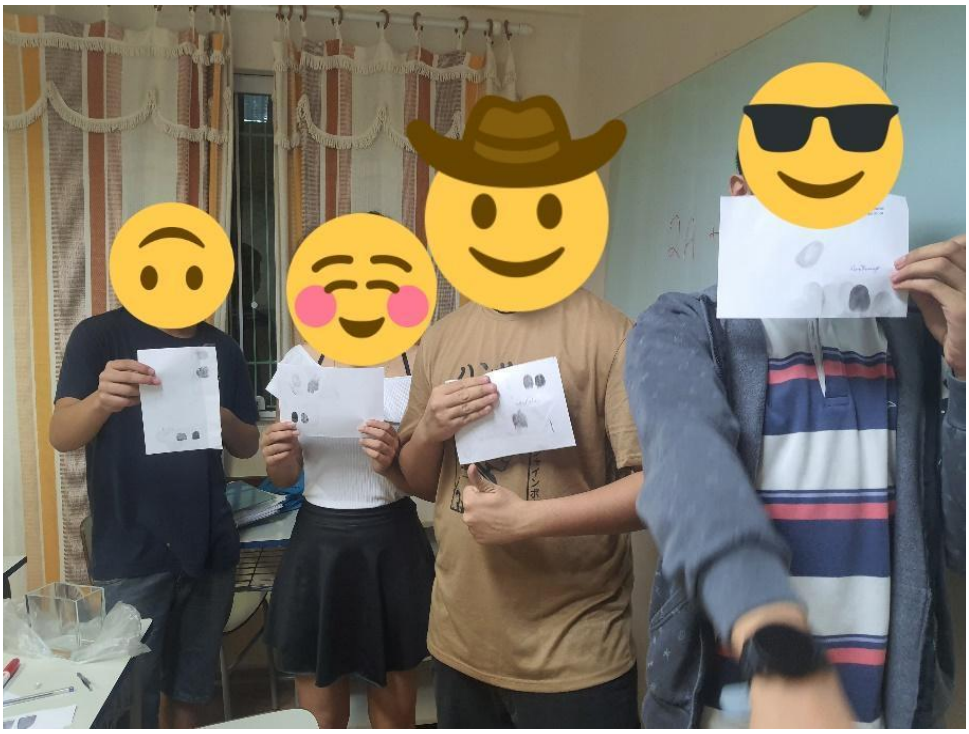
Fonte: Dados da pesquisa.

Imagem 20 - Tipos de impressões digitais



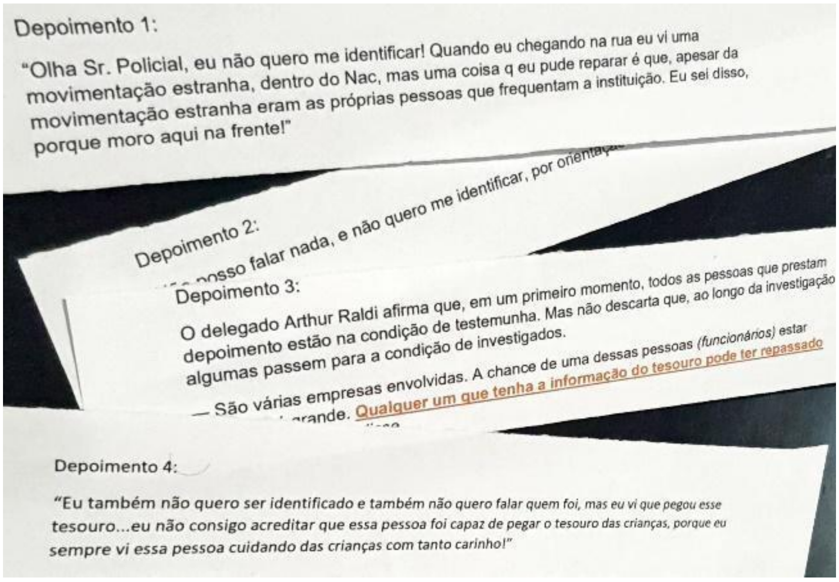
Fonte: Infant.ID

Imagem 21 - Estudantes exibindo as digitais coletadas por eles



Fonte: Dados da pesquisa.

Imagem 22 – Depoimentos simulados para a situação problema.



Fonte: Dados da pesquisa.

À medida que a investigação avança, a mediação da professora se intensifica, orientando os estudantes para a compreensão da expressão *"2A + G"* como uma expressão algébrica, cujos elementos — letras e números — representam uma organização simbólica das relações presentes na situação. Esse movimento emerge claramente quando a professora questiona: *"E o que significa esse termo 'variáveis?"* conduzindo os estudantes à reflexão sobre a função dos elementos da expressão. A resposta de Danflamengo — *"Significa que podem representar qualquer coisa"* — revela que os estudantes começam a operar com o conceito de variável, compreendendo que as letras podem assumir diferentes valores em função da situação analisada. Esse avanço indica um salto qualitativo no desenvolvimento do pensamento, pois, como destaca Davidov (1988), é na identificação da relação geral, e não mais na manipulação de dados isolados, que se constitui o pensamento teórico.

Na sequência, a professora introduz uma nova mediação, explicitando que, ao inserir uma igualdade — *"2A + G = Tesouro"* —, a expressão deixa de ser uma simples operação algébrica e passa a configurar-se como uma equação, na qual surge uma incógnita, representando a pergunta que precisa ser respondida. Isso fica evidente quando Darla afirma: *"A gente tem que descobrir o 'xis'"*, e quando Marcellinho completa: *"A variável muda, pode representar qualquer coisa. E a incógnita é a pergunta. Ela não muda e eu consigo achar um valor"*. Essas falas demonstram que os estudantes estão não apenas reproduzindo nomenclaturas, mas internalizando as relações lógicas subjacentes aos conceitos de variável e incógnita, mobilizando-os para interpretar e resolver problemas.

Imagem 23 - Estudantes discutindo as evidências da investigação

Fonte: Dados da Pesquisa.

Esse processo reflete, conforme Vigotski (2001) e Davidov (1988), o desenvolvimento de funções psicológicas superiores, uma vez que os estudantes passam a utilizar os signos matemáticos — no caso, a linguagem algébrica — não apenas como representação externa, mas como ferramentas internas de organização do pensamento. A mediação didática, ancorada na contradição presente no enigma, possibilitou que os estudantes transitassem da análise empírica — manifestada nas primeiras interpretações do tipo *"Dois armário mais uma gaveta"* — para uma análise teórica, em que os conceitos de variável, incógnita e equação passam a fazer sentido como instrumentos para a resolução de problemas. Trata-se de um movimento genuíno de apropriação conceitual, no qual o pensamento dos estudantes se reorganiza em um nível superior de abstração, coerente com o desenvolvimento do pensamento algébrico na perspectiva histórico-cultural.

Na etapa final da tarefa, os estudantes, mobilizando as pistas e informações coletadas, foram conduzidos a realizar a análise das impressões digitais de todas as pessoas presentes na ONG naquele dia, conforme haviam aprendido previamente com a professora. Esse momento exigiu deles a observação de padrões, a comparação de traços e a busca por regularidades nas digitais coletadas, processo que espelha, no campo da investigação, os mesmos movimentos cognitivos fundamentais à generalização no campo matemático. Durante a análise, surgem comentários como *"A digital do pote tá mais pra da Sirlei"*, e *"É da Sirlei"*, o que evidencia que os estudantes estabeleceram uma correspondência entre os dados disponíveis e a conclusão da investigação. Assim, ao identificar que a digital presente no pote pertencia à Sirlei, os estudantes solucionaram o enigma e encontraram o tesouro. Mais do que uma simples resolução lúdica, esse desfecho revela a culminância de um processo de apropriação de ferramentas culturais — tanto no campo da linguagem algébrica quanto na lógica investigativa — em que a mediação da professora foi determinante para que os estudantes organizassem seus pensamentos, operassem com abstrações e relacionassem os conceitos matemáticos à resolução concreta do problema proposto. Trata-se, portanto, de um momento em que a atividade socialmente orientada promove a consolidação de significados e sentidos, permitindo que os estudantes avancem no desenvolvimento do pensamento teórico.

Imagem 24 - Estudantes elaborando seus jogos

Fonte: Dados da pesquisa.

Imagem 25 - Estudante elaborando jogo

Fonte: Dados da pesquisa.

Essa capacidade de generalização demonstra que os estudantes estão consolidando sua compreensão dos conceitos matemáticos e aplicando-os de forma flexível em diferentes contextos. Por fim, a tarefa permitiu que os estudantes experimentassem a matemática como uma ferramenta para a resolução de problemas tanto práticos quanto abstratos, reforçando o papel da mediação social e da prática cultural no desenvolvimento do pensamento teórico. Vigotski (2001, p. 200) salienta que "o processo histórico de pensamento começa onde começa a história", e essa atividade promoveu um aprendizado significativo ao conectar a história pessoal e cultural dos estudantes com os conceitos matemáticos abordados.

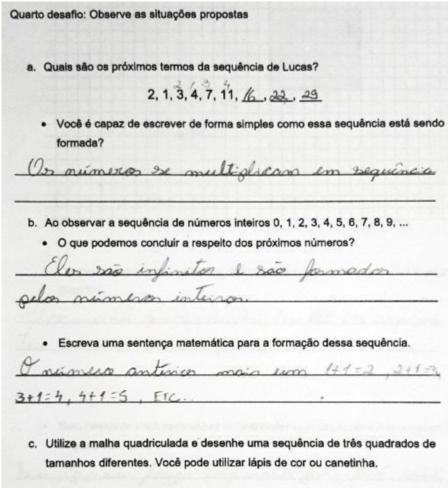
Quadro 15 - Recorte 6 - A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas

Professora: Escreva uma sentença matemática para formação dessa sequência! (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …)
Marcellinho: Ela vai continuar na **sequência**!
Marcellinho: De 1 em 1!
Professora: E como que acontece essa **sequência** de 1 em 1?
Marcellinho: Um, dois, três, quatro, cinco, seis
Professora: Certo! Então, eu tenho 1, 2, 3, 4… e **o que que tem que acontecer com o 1 para ele chegar no 2?**
Marcellinho: **Vai somar 1!**
Professora: […] como é que a gente consegue **escrever essa sequência** […] na forma de uma **sentença matemática**?
Gabriel: Então aí é uma conta de **números infinitos**?
Professora: Sim, não dizemos uma conta de números infinitos, falamos que podemos representar uma **infinidade de números**. […]
Marcellinho: É só **acrescentar um no número anterior**!
Danflamengo: É a forma **padrão!**

Fonte: Dados da pesquisa.

No contexto das falas representadas no diálogo, referente ao recorte 6, é possível identificar o uso do movimento da álgebra retórica para a álgebra simbólica na resolução de uma situação-problema elementar relacionada à formação de uma sequência numérica. A professora solicita aos estudantes que escrevessem uma sentença matemática para representar a sequência numérica (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …). Inicialmente, os estudantes recorrem à linguagem natural para descrever a regularidade da sequência, utilizando expressões como “vai aumentando de um em um” e “é só ir somando um número ao outro”. Essas falas revelam o uso da álgebra retórica, em que a linguagem verbal é o principal recurso para expressar relações matemáticas.

Imagem 26 - Elaborações dos estudantes



Quarto desafio: Observe as situações propostas

a. Quais são os próximos termos da sequência de Lucas?

2, 1, 3, 4, 7, 11, 16, 22, 29

- Você é capaz de escrever de forma simples como essa sequência está sendo formada?

Os números se multiplicam em sequência

b. Ao observar a sequência de números inteiros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

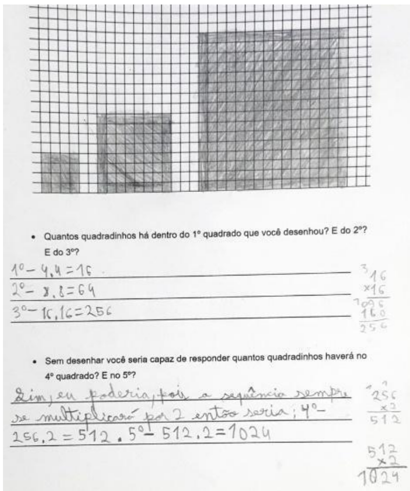
- O que podemos concluir a respeito dos próximos números?

Eles são infinitos e são formados pelos números inteiros.

- Escreva uma sentença matemática para a formação dessa sequência.

O número anterior mais um 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4, 4+1=5, ETC.

c. Utilize a malha quadriculada e desenhe uma sequência de três quadrados de tamanhos diferentes. Você pode utilizar lápis de cor ou canetinha.



- Quantos quadradinhos há dentro do 1º quadrado que você desenhou? E do 2º? E do 3º?

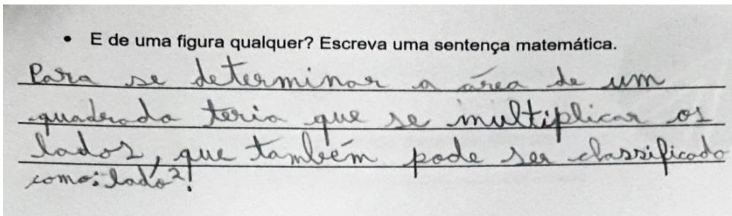
1º - 4.4=16

2º - 8.8=64

3º - 16.16=256

- Sem desenhar você seria capaz de responder quantos quadradinhos haverá no 4º quadrado? E no 5º?

Sim, eu poderia, pois a sequência sempre se multiplicará por 2 então seria; 4º - 256.2=512. 5º - 512.2=1024



- E de uma figura qualquer? Escreva uma sentença matemática.

Para se determinar a área de um quadrado teria que se multiplicar os lados, que também pode ser classificado como: lado²!

Fonte: Dados da pesquisa.

Além disso, como salienta Davidov (1988), o conceito não emerge da memorização de definições, mas da atividade orientada em que o estudante é colocado diante de uma contradição, sendo desafiado a superar o empírico por meio da generalização. A proposta da professora, ao instigar os estudantes a descreverem uma lei de formação por meio de símbolos, possibilita justamente essa superação: ao invés de lidarem apenas com a sequência visível, os estudantes passam a operar com o princípio gerador da sequência, articulando o particular (números apresentados) ao geral (regra de formação expressa simbolicamente).

Esse processo demonstra a mediação pedagógica como condição para a internalização dos conceitos algébricos, transformando uma ação inicialmente prática e descritiva em uma operação abstrata e teórica. Como evidencia Leontiev (2021), a atividade orientada por um motivo significativo permite ao sujeito apropriar-se da estrutura lógica da ação, reorganizando-a internamente como forma superior de pensamento.

Davidov (1988) destaca que o desenvolvimento do pensamento teórico ocorre quando os estudantes são desafiados a compreender as relações internas de um objeto ou fenômeno. Nesse sentido, o movimento da álgebra retórica para a álgebra simbólica, evidenciado neste recorte, reflete justamente essa transição teórica. O autor enfatiza ainda que “o desenvolvimento do pensamento teórico não é espontâneo; ele requer atividades intencionais que conectem a prática ao conceito" (DAVIDOV, 1988, p. 72). No caso analisado, a solicitação da professora para que os estudantes representassem uma sequência numérica crescente promoveu esse deslocamento conceitual. A resposta dos estudantes revela que compreenderam que a sequência cresce de um em um, como indica a fala*: "É só acrescentar um no número anterior*!", imediatamente complementada pelo colega*: "É a forma padrão!"* Essa formulação verbal revela um processo de generalização, no qual os estudantes passam da descrição empírica ao desenvolvimento de uma expressão simbólica, constituindo um exemplo claro da transição da álgebra retórica para a simbólica, e evidenciando a mediação da professora como central nesse processo de abstração.

Quadro 16 - Recorte 7 - A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas

Marcellinho: Aqui também tenho que **descobrir a forma padrão**, só que aquele era de somar 1 e esse daqui é o **quadrado**! Professora: Isso! Atrás da folha tem uma malha quadriculada pra ajudar você a desenvolver o pensamento! Você pode escolher qualquer 3 medidas para **formar os quadrados** e desenhar! […] Danflamengo: Fazer **os quatro lados de lado 2**, por exemplo? Marcellinho: Contando com os do canto? Professora: Todos que pertencem a parte interna dos quadrados. Marcellinho: Nossa! 1, 2, 3, 4, 5, 6… 6 vezes 6 é 38, né? Professora: Quanto é 6 vezes 5? Marcellinho: É 30! Professora: 30 mais 6 dá quanto? Marcellinho: Nossa! É 36! Darla: Porque eu mesmo sabendo a tabuada eu preciso fazer os quadradinhos pra ter certeza; **eu nunca confio na minha conta**! Professora: Não precisa ter **medo de errar**, não! Professora: […] o que vocês conseguiram **observar do quadrado**? Danflamengo: Ficou com **todos os lados iguais**! Professora: Isso! E o que que aconteceu, quando ele ficou com **todos os lados iguais**? É possível observar de maneira prática, qual é a **quantidade quadradinho** que tem ali **dentro do quadrado**? Danflamengo: Se trocar aqui não vai ter 2! 2 vezes 2 vezes 2, depois 3, depois 4, depois 5. Daí vai aumentando, né? Só como tem **todos os lados iguais**, seria o número que tem, por exemplo, eh

Quadro 16 - Recorte 7 - A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas

(Colclusão)

quatro por quatro, seria quatro vezes quatro, **porque sempre que vai ter quatro partes** quatro fileiras, né? Tem quatro fileiras e como tem quatro pra facilitar seria 4 + 4 + 4 + 4, que é 4 vezes 4! Darla: **Base vezes altura**! Darla: Eles vão determinar **a área**! Professora: Sim, é pra determinar **a área**! Mas, **qual é a característica dos dois**? Danflamengo: Os dois **tem a mesma quantidade**! Professora: Como é que eu consigo determinar essa área num quadrado de tamanho qualquer, se eu tenho um quadrado que eu não sei, o tamanho da altura, e não sei o tamanho da largura ou da base? Danflamengo: É só você **fazer base vezes altura**! Professora: Tá, mais aqui **eu não tenho valor**, aqui eu **tenho lado e lado**, então como que eu posso escrever? Gabriel: Você **multiplica os lados**! Professora: Multiplica os lados? Gabriel: Faz **lado vezes lado**! Danflamengo: Sim, **fica lado ao quadrado**! **Lado potenciado de 2**! Professora: Assim **(lado^2)?** Danflamengo: **É**!

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao abordarem o problema da determinação da área de um quadrado, os estudantes exploram conceitos geométricos fundamentais, como a igualdade dos lados e sua relação direta com a área. Por meio da discussão colaborativa, chegam à conclusão de que a área pode ser representada como *“lado ao quadrado”* ou *“lado potenciado de 2” (lado^2),* estabelecendo, assim, uma conexão significativa entre a linguagem verbal e a simbólica na matemática. Esse movimento reflete o que Davidov (1988) descreve como a transição da atividade empírica para a atividade teórica, na qual os estudantes internalizam os conceitos matemáticos e desenvolvem capacidades de abstração e generalização.

Nesse contexto, a progressão do diálogo, em que Darla diz: *"eles vão determinar a área",* demonstra a conexão entre os conceitos geométricos e suas aplicações práticas, enquanto Danflamengo contribui para formalizar a ideia ao dizer: *"lado ao quadrado".* Esses momentos evidenciam a consolidação de conceitos fundamentais por meio da interação social e do uso de ferramentas culturais, como a linguagem matemática, revelando não apenas a compreensão dos conceitos, mas também a aplicação do movimento da álgebra retórica em direção à álgebra simbólica. Por meio dessa abordagem, os estudantes são guiados, pela mediação, à internalização de conceitos matemáticos de maneira mais profunda e significativa.

Nesse processo, os estudantes também demonstram o movimento da álgebra retórica para a simbólica. No início, utilizam expressões mais descritivas, como *"multiplica os lados"* ou *"faz lado vezes lado",* mas rapidamente progridem para uma linguagem mais compacta e formalizada, como *"lado²"*. Leontiev (2021) destaca que a apropriação dos conceitos ocorre por meio da prática social, que organiza e orienta o pensamento para alcançar níveis superiores de abstração.

Quadro 17 - Recorte 8 - A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas.

Professora: […] qual é o ponto de interrogação aí Marcellinho?
Professora: E qual é o consecutivo Marcellinho?
Marcellinho: O depois. Mais **quem vai ser o depois do Y**?
Danflamengo: é Z?
Professora: Como que eu faço **o consecutivo de 3**?
Marcellinho: **4**
Professora: Como que você fez **para chegar no 4**?
Marcellinho: **3 + 1 = 4**!
Professora: **Quem é o consecutivo de y**?
Danflamengo: **Y + 1**
Professora: Isso, Y + 1! Então, **quem é o consecutivo de y**?
Marcellinho: **Z**!
Gabriel: Então **seria Y elevado a 1**?
Darla: **1Y**?
Professora: Porque 1Y ou Y elevado a 1? Eu quero saber **qual é o consecutivo**?
Darla**: 2, porque o Y vale 1**! Quando **a letra tá sozinha ela não vale 1**?
Professora: O número que está na frente dela, pode ser 1**, o coeficiente numérico dela é 1**.
Darla: **Entendi!**
Darla: **É Y + 1**!
Darla: Porque **o Y vai ser tratado como coeficiente**, mais como **ele pode representar qualquer número** a gente **não pode dizer com certeza qual número**, por isso que dá isso!
Gabriel: 3! Ah, então **o y vai poder ser qualquer número**!
Gabriel: **É como se ele fosse uma variável**! Para representar ele é só colocar letra normal! Porque a pessoa já vai conseguir reconhecer isso, né?
Professora: **Então o consecutivo de Y é**?
Gabriel: **Y mais 1**!

Fonte: Dados da pesquisa.

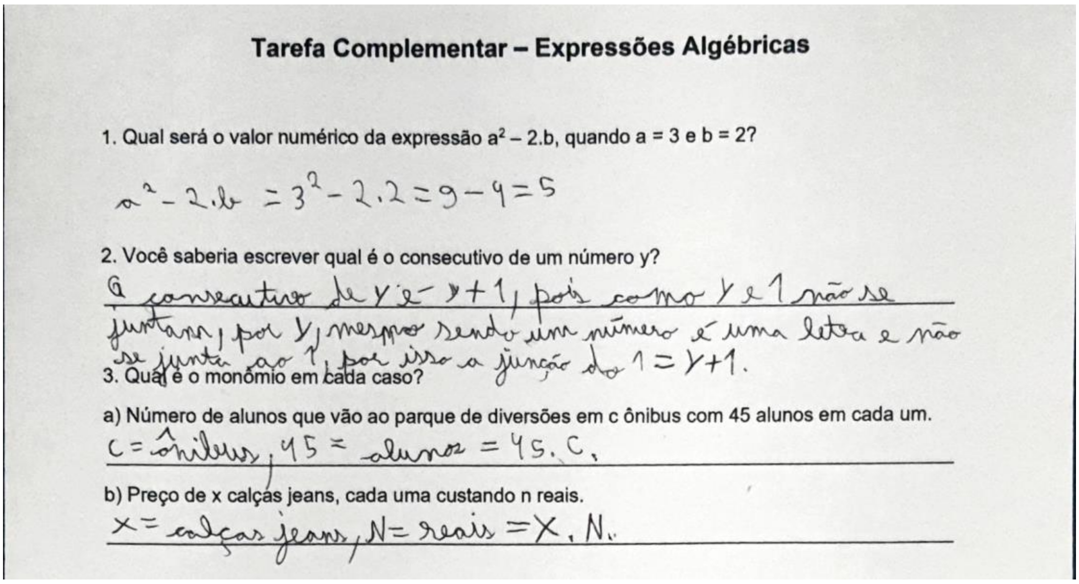
No recorte 8 apresentado, a professora observa a expressão de dúvida no rosto de Marcellinho e o questiona sobre sua hesitação, o que incita a discussão sobre o elemento sucessor de "Y". O estudante questiona: *"Mas quem vai ser o depois do Y?",* sugerindo que seja "Z". Aqui, há uma transição da linguagem verbal para a simbólica, em que "Z" representa o próximo elemento na sequência após "Y".

Ainda nesse contexto inicial, após a professora retomar o questionamento — *"Como que eu faço o consecutivo de 3?"* — o estudante prontamente responde *"4",* aplicando um conceito aritmético básico: *"3 + 1 = 4!".* A professora aproveita essa resposta para explorar o conceito de sucessor e o método de adição para determinar o próximo número em uma sequência, demonstrando a transição da abordagem aritmética para a algébrica.

Quando os estudantes são novamente questionados sobre o sucessor de "Y", Danflamengo responde corretamente que é *"Y + 1",* aplicando conceitos de álgebra para representar a continuidade da sequência. Essa resposta ilustra a transição da linguagem verbal para a linguagem simbólica na resolução de problemas.

A discussão continua, pois, outros estudantes ainda não demonstram clareza sobre essa ideia, como evidenciado nas falas "Então seria Y elevado a 1?" e "1Y?". A professora retoma o questionamento: *"Por que 1Y ou Y elevado a 1? Eu quero saber qual é o consecutivo?".* Darla responde*: "2, porque o Y vale 1! Quando a letra tá sozinha ela não vale 1?",* demonstrando, assim, que ainda não se apropriou do conceito. Conforme Vigotski (2001, p. 244), "o amadurecimento precoce dos conceitos científicos e o fato de que o nível de desenvolvimento desses conceitos entra na zona das possibilidades imediatas em relação aos conceitos espontâneos, abrindo-lhes caminho e sendo uma espécie de propedêutica do seu desenvolvimento".

Imagem 27 - Elaborações dos Estudantes



Tarefa Complementar – Expressões Algébricas

1. Qual será o valor numérico da expressão $a^2 - 2.b$, quando a = 3 e b = 2?

$a^2 - 2.b = 3^2 - 2.2 = 9 - 4 = 5$

2. Você saberia escrever qual é o consecutivo de um número y?

O consecutivo de Y é Y+1, pois como Y e 1 não se juntam, por Y, mesmo sendo um número é uma letra e não se junta ao 1, por isso a junção do 1 = Y+1.

3. Qual é o monômio em cada caso?

a) Número de alunos que vão ao parque de diversões em c ônibus com 45 alunos em cada um.

c = ônibus, 45 = alunos = 45.C.

b) Preço de x calças jeans, cada uma custando n reais.

x = calças jeans, N = reais = X.N.

Fonte: Dados da pesquisa.

A Zona de Desenvolvimento Iminente (ZDI) torna-se evidente quando a professora responde à pergunta da estudante: *"O número que está na frente dela pode ser 1, o coeficiente numérico dela é 1"*. Imediatamente, a aluna expressa compreensão: *"Entendi!"* e completa com: *"É Y + 1!"*, explicando o que compreendeu: *"Porque o Y vai ser tratado como coeficiente, mas como ele pode representar qualquer número, a gente não pode dizer com certeza qual número, por isso que dá isso!"*, o que corrobora com o entendimento de seu colega, que afirma: *"Ah, então o Y vai poder ser qualquer número!"*.

A compreensão de que "Y" pode representar qualquer número é fundamental para a transição da álgebra verbal para a simbólica, pois evidencia a apropriação da linguagem algébrica como forma de generalização e abstração. Conforme afirma Kopnin (1978), a síntese, no processo dialético, é o momento em que as contradições são superadas, resultando em um entendimento mais completo e integrado do fenômeno.

Quadro 18 - Recorte 9 - A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas

(Continua)

Professora: […] O número de alunos que vão ao parque de diversões em c ônibus com 45 alunos.
Marcellinho: Então, o **45.C é o nosso monômio**, né?
Danflamengo: É como se fosse **45 vezes 2, 45 vezes 3 e assim por diante**!
Gabriel:[…], então **eu preciso saber o C**, porque, **ah o C é uma variável**, então!
Darla: **45C**

Quadro 18 - Recorte 9 - A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas

(Conclusão)

Marcellinho: Agora o outro: Preço de x calças jeans, **cada uma custando n reais. X é qualquer número** e n qualquer preço. Danflamengo: **XN** Marcellinho: Então é **X vezes N! Pronto!** Gabriel: Como não tem resultado aqui **vai ser n.x**! Danflamengo: Nesse da estrela tá pedindo escreva o monômio que representa o perímetro dos **seguintes polígonos com lados de medidas x**. E se tem dois risquinhos em cada um **tem 10 lados**. Professora: E quanto dá o perímetro da estrela? Darla: **10X** Gabriel: **10X.** Professora: **Gabriel, como ela chegou nos 10X?** Darla: **Somei todos os lados!**

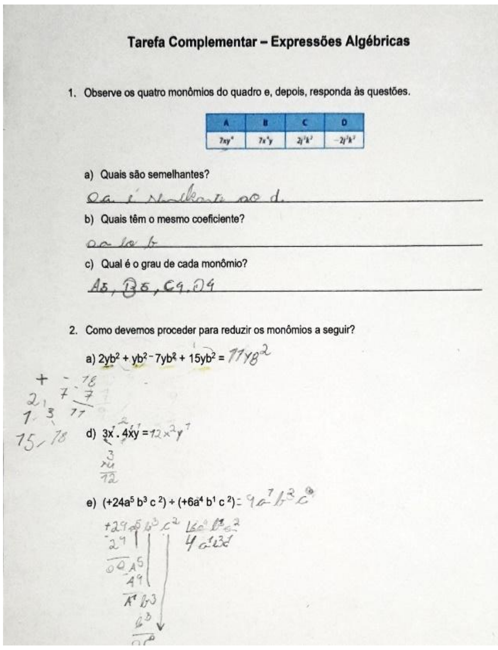
Fonte: Dados da pesquisa.

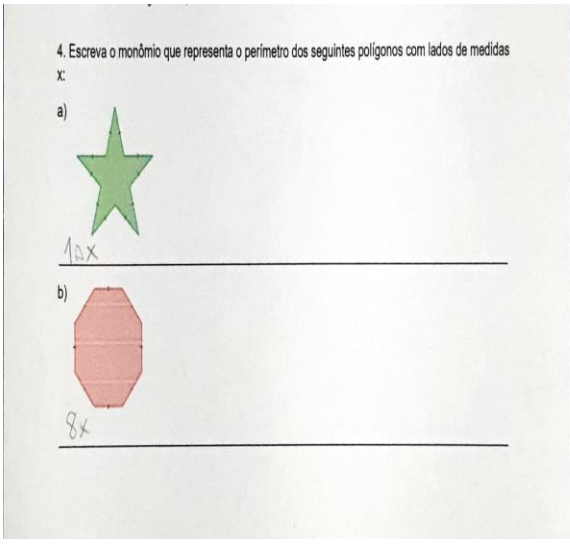
O recorte 9 ilustra o avanço dos estudantes na utilização da álgebra simbólica, mediada pelo movimento da álgebra retórica, para resolver problemas matemáticos contextualizados. A discussão proposta pela professora e a participação ativa dos estudantes evidenciam a compreensão progressiva dos conceitos de variável, expressão algébrica e operações matemáticas, sinalizando a transição do pensamento concreto para o abstrato. De acordo com Vigotski (2001), a mediação social é essencial para a aprendizagem, pois permite ao estudante apropriar-se de ferramentas culturais — como a linguagem algébrica — a fim de internalizar conceitos e operá-los de maneira consciente e intencional.

As falas dos estudantes, após o questionamento da professora — Marcellinho: *"Então, o 45.C é o nosso monômio, né?"* e Gabriel: *"Ah, o C é uma variável, então!"* — demonstram a internalização progressiva dos conceitos algébricos. Eles não apenas identificam as variáveis e os monômios, mas também conseguem aplicá-los em diferentes situações, como ao calcular o perímetro de polígonos e interpretar a multiplicação como uma operação simbólica de generalização, como se observa na fala de Darla: *"Somei todos os lados!"*. Kopnin (1978) destaca que o desenvolvimento do pensamento teórico requer a síntese de experiências concretas em formas mais abstratas e generalizadas. Nesse caso, a transição para a álgebra simbólica reflete esse movimento dialético da concretude para a abstração.

Para mais, os estudantes demonstram habilidades em reconhecer e aplicar conceitos algébricos, como podemos observar nas falas: Marcellinho: *"Então, o 45.C é o nosso monômio"* e Danflamengo: *"o monômio que representa o perímetro dos seguintes polígonos com lados de medidas x. E se tem dois risquinhos em cada um, tem 10 lados."* Darla: *"10x"*, *"Somei todos os lados!"*. Essas ações evidenciam que os estudantes estão constituindo significados consistentes para conceitos algébricos e aplicando-os em problemas matemáticos contextualizados. Nesse sentido, Leontiev (2021) explicita que a *prática* é um elemento central no desenvolvimento do pensamento teórico. Assim, a aplicação prática de conceitos, como nos cálculos de perímetros e na formação de monômios, permite que os estudantes consolidem a relação entre a atividade prática e a apropriação de significados.

Imagem 28 - Elaborações dos Estudantes





Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 19 - Recorte 10 - A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas

(Continua)

Professora: Então isso aqui **(2A + G) é igual a quem? Ao tesouro!** Na primeira parte nós vimos que quando temos só essa parte aqui oh 2A + G, nós temos uma expressão algébrica. E o que significam essas letrinhas aí?
Darla: **São variáveis**!
Professora: E **o que significa esse termo "variáveis"**?
Danflamengo: Significa que **podem representar qualquer coisa**!
Professora: Porém, no caso do tesouro perdido a expressão **2A + G = tesouro**, não temos mais uma expressão algébrica, porque agora temos uma **igualdade** e uma pergunta a ser respondida, que no caso era descobrir **onde estava o tesouro**. Então, quando temos essas condições dizemos que temos uma equação!
Darla: A gente tem que **descobrir o "xis".**

Quadro 19 - Recorte 10 - A utilização do movimento da álgebra retórica a simbólica na resolução de situações problemas

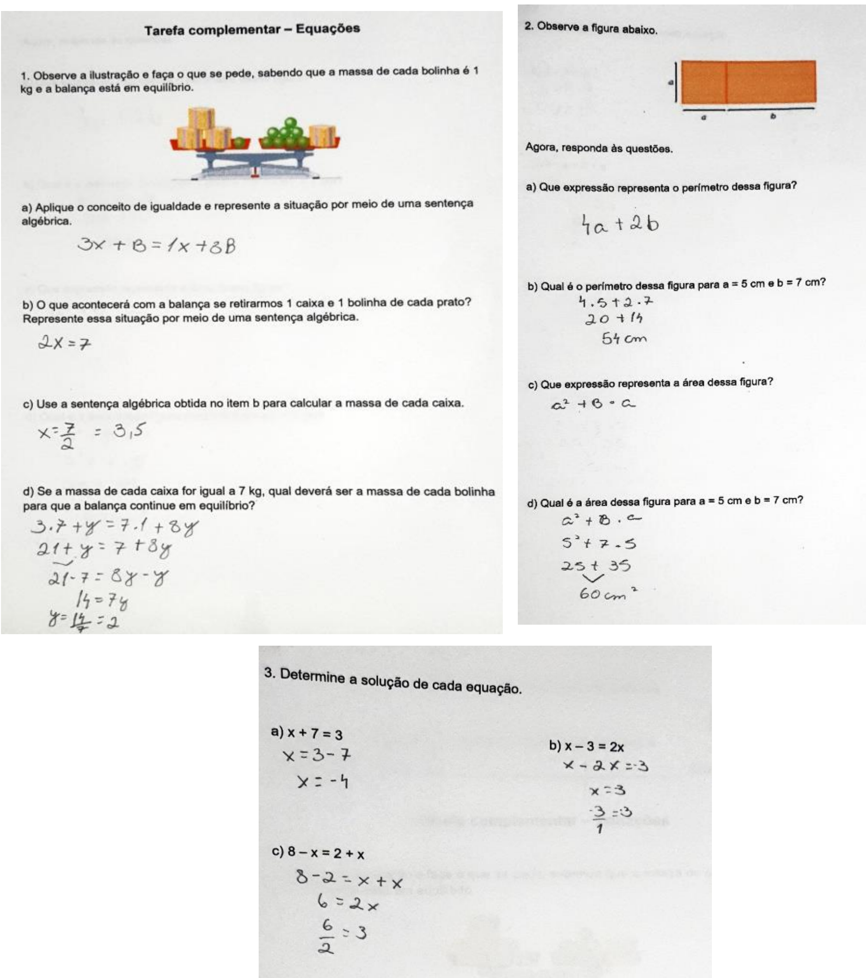
(Conclusão)

Darla: Eu errava muito por causa da regra de sinal! Danflamengo: Então **sempre vai trocar a operação**? Professora: Sempre que você for **trocar de membro**! [...], **qual é a diferença entre as expressões algébricas e as incógnitas. [...]** Marcellinho: A **variável muda**, pode representar **qualquer coisa**. E a **incógnita é a pergunta**. Ela **não muda** e eu consigo **achar um valor**! [...] Marcellinho: Pra descobrir quem era o suspeito! E como a gente não sabia quem era, aí tinha uma **incógnita**, uma dúvida! Marcellinho: Porque nós descobrimos que **2 a + g representava o lugar** onde estava o tesouro, então **era igual**, quando tava só o 2 a + g. Professora: E **2A + G representava o que**? Nós tínhamos quem? Marcellinho: **Só as variáveis**, né! Professora: A **variável** muda, mais e a **incógnita**? Quais são as características dela? Marcellinho: **Porque a gente não sabia o que era, podia ser qualquer coisa e podia mudar a qualquer tempo!** Danflamengo: **Ela não muda e tá sempre ligada a uma pergunta**. Aí é por isso que **a letra** que a gente chama **na equação** vem **junto com o igual**, que é a resposta da pergunta! Marcellinho: Professora eu gostei muito, eu achava muito difícil agora eu tô achando fácil.

Fonte: Dados da pesquisa.

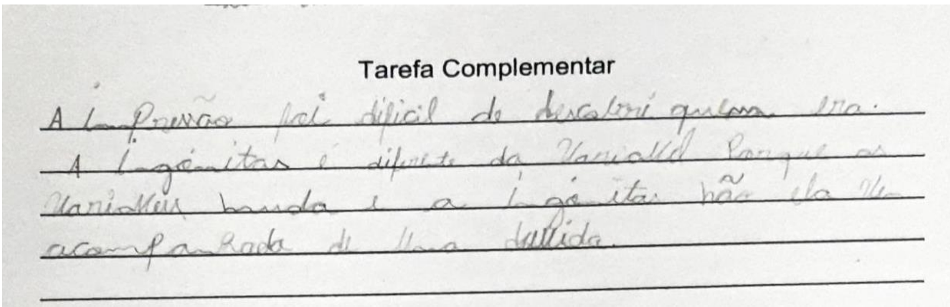
Os estudantes ao investigar sobre o contexto de expressões algébricas e as equações, onde emerge o conceito incógnitas e igualdade, eles entendem que as variáveis podem mudar, mas as incógnitas permanecem constantes, conforme as falas "*A **variável muda**, pode representar **qualquer coisa**. E a **incógnita é a pergunta**. Ela **não muda** e eu consigo **achar um valor***!" e "***Ela não muda e tá sempre ligada a uma pergunta**. Aí é por isso que **a letra** que a gente chama **na equação** vem **junto com o igual**, que é a resposta da pergunta!*"

Imagem 29 - Elaborações dos Estudantes



Fonte: Dados da pesquisa.

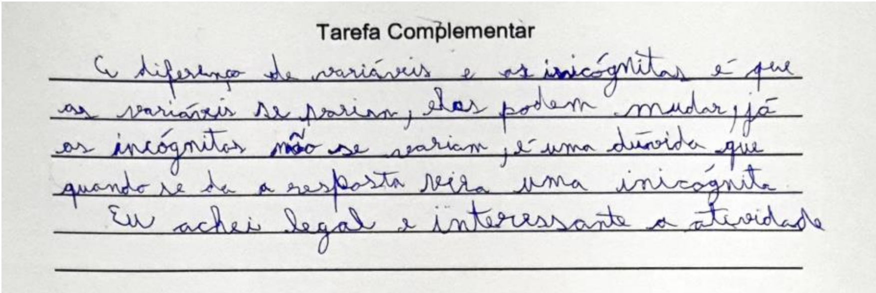
Imagem 30 - Feedback dos Estudantes[5]



Fonte: Dados da pesquisa.

5 "A diferença de variáveis e as incógnitas é que as variáveis se variam, elas podem mudar, já as incógnitas não se variam, é uma dúvida que quando se dá a resposta vira uma incógnita. Eu achei legal e interessante a atividade" (Danflengo, 2022).

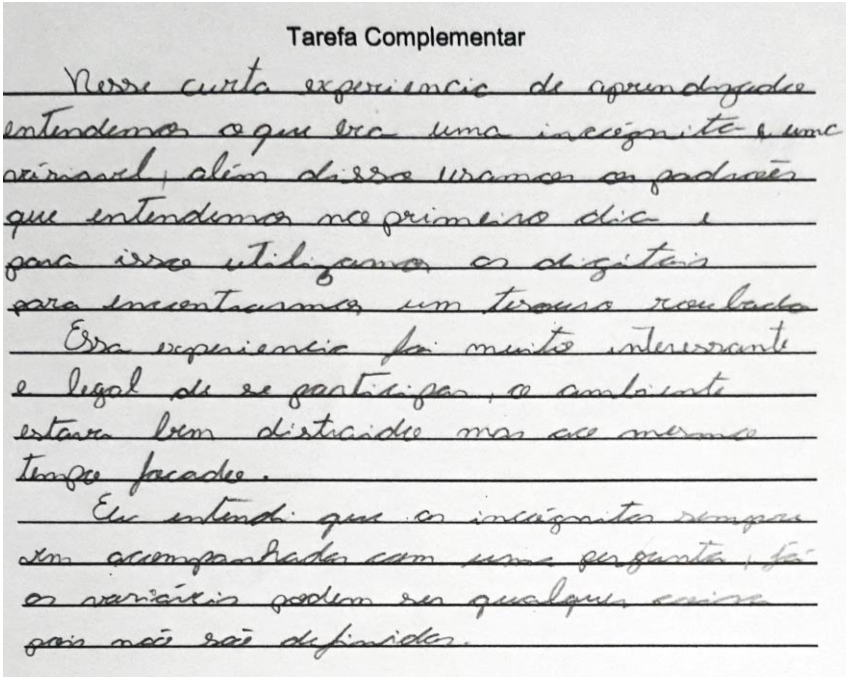
Imagem 31 - Feedback dos Estudantes[6]


Tarefa Complementar

A diferença de variáveis e as incógnitas é que as variáveis se variam, elas podem mudar, já as incógnitas não se variam, é uma dúvida que quando se dá a resposta vira uma incógnita
Eu achei legal e interessante a atividade

Fonte: Dados da pesquisa

Imagem 32 - Feedback dos Estudantes[7]


Tarefa Complementar

Nesse curta experiencia de aprendizado entendemos o que era uma incógnita e uma variável, além disso usamos os padrões que entendemos no primeiro dia e para isso utilizamos os digitais para encontrarmos um tesouro roubado
Essa experiencia foi muito interessante e legal de se participar, o ambiente estava bem distraido mas ao mesmo tempo focado.
Eu entendi que as incógnitas sempre vem acompanhados com uma pergunta, já as variáveis podem ser qualquer coisa pois não são definidas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nos recortes apresentados, observa-se que os estudantes se mobilizam ativamente em um processo de constituição do conhecimento matemático, demonstrando competências cognitivas que refletem "a estrutura significativa (vinculada ao emprego ativo de signos), sendo uma lei

[6] "A impressão foi difícil de descobrir quem era. A incógnita é diferente da variável porque as variáveis muda e a incógnita não ela vem acompanhada de uma dúvida." (Marcellinho, 2022)

[7] "Nessa curta experiência de aprendizado entendemos o que era uma incógnita e uma variável, além disso usamos os padrões que entendemos no primeiro dia e para isso utilizamos as digitais para encontrarmos um tesouro roubado. Essa experiência foi muito interessante e legal de se participar, o ambiente estava bem distraído, mas ao mesmo tempo focado. Eu entendi que as incógnitas sempre vem acompanhados com uma pergunta, já as variáveis podem ser qualquer coisa pois não são definidas." (Darla, 2022)

geral de construção das formas superiores de comportamento" (Vigotski, 2001, p. 173). Eles revelam uma compreensão sólida dos conceitos matemáticos ao identificarem corretamente *variáveis* e *monômios* em diferentes contextos, como o número de alunos em ônibus e o preço total de itens. Esse reconhecimento de padrões e das relações entre os elementos contribui para a consolidação de estruturas cognitivas significativas.

Ademais, é possível observar que os estudantes aplicam estratégias de resolução de problemas, como a utilização da operação de multiplicação para calcular o perímetro de polígonos. Suas interações com a professora e a forma como justificam suas respostas e explicam os passos necessários para resolver os problemas propostos evidenciam uma abordagem reflexiva, que culmina na promoção da internalização do conhecimento, permitindo que construam conexões substanciais entre os novos conceitos e seus saberes prévios.

5.4 Análise Internúcleos

Com base nas prerrogativas elencadas, nos núcleos acima e com o objetivo de responder à questão que norteou esta pesquisa, realizamos a análise dos núcleos de significação, decorrentes das falas dos estudantes/sujeitos da pesquisa no ambiente de aprendizagem, provocadas pelas Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA).

A partir dos núcleos de significação constituídos a partir dessas falas e das situações vivenciadas, propomos, a seguir, uma análise que visa responder à questão central desta investigação: **Que significações produzidas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, por meio de situações desencadeadoras de aprendizagem possibilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico?** Para isso, retomamos os três núcleos identificados: (1) o movimento da linguagem aritmética para alcançar a ideia de generalização; (2) a generalização da aritmética para constituição da ideia de variável; e (3) a linguagem algébrica, a figura, a ideia de fluência e interdependência.

Com base nesses núcleos, foi possível observar que os estudantes se deslocaram da descrição empírica para formas mais elaboradas de representação simbólica, demonstrando capacidade de mobilizar signos e significados no processo de constituição de conceitos algébricos. Esse movimento reflete a transição do conhecimento cotidiano para o conhecimento científico, conforme formulado por Vigotski (2001), que destaca que os conceitos científicos não se desenvolvem de maneira isolada, mas se integram aos conceitos espontâneos, promovendo um salto qualitativo no modo de pensar. Nesse processo, a atividade orientadora da professora foi fundamental para provocar rupturas no cotidiano dos estudantes e dar direção à formação conceitual. Como enfatiza Davidov (1988, p. 121), "o ideal se revela no processo da formação, orientada a uma finalidade, do objeto necessário e realizada na atividade."

Inicialmente, os estudantes resolveram tarefas com base em procedimentos empíricos, próprios do pensamento aritmético escolarizado. Contudo, as situações planejadas pela professora continham, intencionalmente, os nexos conceituais necessários para impulsionar o movimento de ascensão a formas superiores de generalização. À medida que a unidade didática avançava, as tarefas passaram a exigir inferências baseadas em relações estruturais e o uso da linguagem simbólica, como se evidencia nas falas em que os estudantes passam a reconhecer padrões, nomear variáveis, identificar monômios e elaborar equações. Conforme Vigotski (2001, p. 326), "todas as funções psíquicas de tipo superior, o desenvolvimento da atenção arbitrária e da memória lógica, do pensamento abstrato e da imaginação, transcorre como um processo complexo", o qual requer mediação, intencionalidade e engajamento ativo dos sujeitos.

Ao articular teoria e prática, os núcleos analisados revelam o papel decisivo da organização da atividade de ensino. A professora elaborou condições para que os estudantes fossem provocados a refletir sobre seus próprios modos de resolver os problemas, refletindo estratégias e desenvolvendo novas formas de representação. Leontiev (2021) esclarece que a prática é o fundamento da atividade humana e condição para o desenvolvimento do pensamento teórico. Assim, ao transitar do empírico ao abstrato, os estudantes passam a constituir internamente os significados, por meio da mediação, apropriando-se dos critérios de verdade próprios da álgebra.

Em diversos momentos, foi possível observar a apropriação dos conceitos e sua internalização, seja pela formulação de generalizações, pela distinção entre variáveis e incógnitas, ou pelo desenvolvimento de jogos e desafios que continham, em sua estrutura, elementos simbólicos da linguagem algébrica. Como aponta Davidov (1988, p. 262), a internalização e a externalização formam um par dialético: "a internalização de sua forma externa origina a imagem subjetiva da realidade, e a externalização de sua forma interna é a incorporação da imagem, sua transição em propriedades ideais do objeto."

Portanto, os dados analisados indicam que os estudantes demonstraram um movimento progressivo de aproximação ao pensamento algébrico teórico, à medida que passaram a reconhecer e discutir regularidades, representar situações-problema por meio de expressões algébricas e mobilizar conceitos como variável, incógnita e equação. Além disso, evidenciaram crescente confiança e uso voluntário dos instrumentos culturais da matemática em diferentes contextos. Tais evidências apontam que os estudantes evidenciaram a apropriação inicial de modos de ação próprios do pensamento algébrico, por meio do reconhecimento de regularidades, da representação simbólica de situações-problema e da mobilização de conceitos como variável, incógnita e equação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo desenvolvido, fundamentado na Teoria Histórico-Cultural e no Materialismo Histórico-Dialético, teve como objetivo compreender de que maneira as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) poderiam mobilizar significações e favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Desde as inquietações da professora-pesquisadora, expressas na introdução, até a análise dos núcleos de significação, evidenciou-se a busca por superar desafios da prática docente por meio de propostas pedagógicas alinhadas às necessidades e subjetividades dos estudantes.

O percurso investigativo permitiu responder à questão norteadora da pesquisa: **Que significações produzidas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, por meio de SDA, possibilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico?** Desse modo, evidenciou-se como significações produzidas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, por meio de situações desencadeadoras de aprendizagem que possibilitaram o desenvolvimento do pensamento algébrico, foram: Reconhecimento de padrões, generalização e abstração de relações, a representação de variáveis, a compreensão de interdependências entre grandezas manipulação de expressões algébricas, a resolução e a compreensão de conceitos.

A hipótese da pesquisa partiu da suposição de que as dificuldades enfrentadas pelos estudantes em álgebra estão profundamente associadas à ausência de generalizações no campo da aritmética. Considerou-se que, sem compreenderem conceitos fundamentais em sua dimensão teórica, os estudantes enfrentavam obstáculos para apreender os princípios estruturantes da linguagem algébrica. A investigação buscou verificar se, por meio de SDA intencionalmente organizadas com base na Atividade Orientadora de Ensino, seria possível mediar essa transição e superar tais dificuldades. Essa hipótese foi confirmada durante a análise dos núcleos de significação, pois as SDA promoveram indícios claros de avanços qualitativos ao possibilitar que os estudantes superassem as lacunas do pensamento aritmético para alcançar o pensamento algébrico.

Entre as contribuições mais relevantes, destaca-se a articulação entre a didática da matemática e a perspectiva histórico-cultural, que permitiu integrar o desenvolvimento do pensamento teórico à internalização de conceitos algébricos. Ao contrário de abordagens centradas em procedimentos mecânicos, esta investigação reafirma que o ensino da álgebra, quando mediado teoricamente, tem potencial formativo e contribui para a constituição do pensamento abstrato.

A pesquisa também provocou impactos significativos na atuação da professora-pesquisadora, que passou a compreender o ensino como prática social intencional e formadora da consciência. A imersão no referencial teórico permitiu reelaborar a própria atividade docente, compreendida agora como mediação essencial para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores.

O desenvolvimento e a aplicação das SDA mostraram-se eficazes ao integrarem múltiplas representações matemáticas e mobilizarem nexos conceituais, proporcionando aos estudantes experiências de aprendizagem com sentido, sustentadas por mediações intencionalmente organizadas. A prática pedagógica passou a articular ação e reflexão, teoria e experiência, consolidando a formação de conceitos e a generalização.

A contribuição desta pesquisa reside na proposição de um caminho metodológico que compreende o ensino de matemática como mediação formadora da consciência. Ao integrar as categorias de mediação, internalização e generalização, a investigação se distancia de práticas fragmentadas e reafirma o papel da matemática na formação do pensamento teórico.

Apesar dos resultados expressivos, reconhece-se a limitação imposta pelo tempo e pelas condições do trabalho de campo. Investigações futuras poderão ampliar este escopo, acompanhando os efeitos das SDA em diferentes etapas de ensino e por períodos mais prolongados.

As significações produzidas pelos estudantes — como o reconhecimento de padrões, a abstração, a manipulação de expressões algébricas e a compreensão conceitual — evidenciam a potência das SDA como instrumento pedagógico orientado à formação omnilateral. Conforme aponta Davidov (1988, p. 168), “as bases da consciência, o pensamento teórico e as capacidades psíquicas a eles vinculadas (reflexão, análise, planejamento)” são desenvolvidas por meio de processos de ensino intencionalmente organizados e orientados à formação de conceitos.

Conclui-se, portanto, que o desenvolvimento do pensamento algébrico, quando conduzido por atividades orientadoras de ensino fundamentadas na Teoria Histórico-Cultural, promove não apenas a apropriação de conteúdos matemáticos, mas, sobretudo, a formação de funções psíquicas superiores, essenciais à constituição da consciência e do pensamento teórico.

REFERÊNCIAS

ABAD, F.; DÍAZ, N. M.; DOMENECH, E.; ROBAYNA, M.; RICO, J. **Oral sweet solution reduces pain-related behaviour in preterm infant**s. Acta Paediatrica, v. 85, n. 7, p. 854-858, jul. 1996. Disponível em: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1651-2227.1996.tb14167.x.

AGUIAR, W. M. J.; OZELLA, S. **Núcleos de significação como instrumento para a apreensão da constituição dos sentidos.** Psicologia: Ciência e Profissão, Brasília, v. 26, n. 2, p. 222-245, jun. 2006. Disponível em: https://www.scielo.br/j/pcp/a/QtcRbxZmsy7mDrqtSjKTYHp/abstract/?lang=pt

AGUIAR, W. M. J.; OZELLA, S. **Núcleos de significação como instrumento para a apreensão da constituição dos sentidos**. Psicol Cienc Prof [online], Brasília, 26(2):222-45, jun. 2006.

AGUIAR, W. M. J.; SOARES, J. R.; MACHADO, V. C**. Núcleos de significação: uma proposta histórico-dialética de apreensão das significações.** Cadernos de Pesquisa, v. 45, n. 155, p. 56-75, jan./mar. 2015. Disponível em: https://publicacoes.fcc.org.br/cp/article/view/2818.

AGUIAR, W. M. J; ARANHA, E. M. G.; SOARES, J. R. **Núcleos de significação: Análise Dialética das significações Produzidas em Grupo.** TEORIAS, MÉTODOS, PESQUISA EDUCACIONAL. Caderno de Pesquisa, 51. 2021. https://doi.org/10.1590/198053147305.

ALMEIDA, J. R. de; SANTOS, M. C. dos. **Pensamento Algébrico: Em Busca de Uma Definição.** RPEM, Campo Mourão, Pr, v.6, n.10, p.34-60, jan.-jun. 2017.

ASBAHR, F. S. F. **A pesquisa sobre formação de pensamento teórico.** Revista Simbio-Logias*,* v. 12, n. 17, p. 85-99, 2020. Disponível em: https://revistas.unesp.br/simbio-logias/article/view/34959.

ASBAHR, F. S. F. **Atividade de estudo como guia do desenvolvimento da criança em idade escolar: contribuições ao currículo de ensino fundamental**. In.: Currículo Comum para o Ensino Fundamental Municipal [recurso eletrônico] / Organizadores: Afonso Mancuso de Mesquita, Fernanda Carneiro Bechara Fantin, Flávia Ferreira da Silva Asbhar. Bauru: Prefeitura Municipal de Bauru, 2016.

ASBAHR, F. S. F. da. **A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade**. Revista Brasileira de Educação. n. 29, p. 108-118, 2004.

BELEI, R. A. *et al*. **O uso de entrevista, observação e videogravação em pesquisa qualitativa**. Cadernos de Educação, FaE/PPGE/UFPel, Pelotas, [30]: 187-199, janeiro/junho 2008

BIANCHINI, B. L; LIMA, G. L. de., MACHADO, S. D. A. **O Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA): mapeamento de algumas de suas produções**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.21, n.3, pp. 01-28, 2019.

BLANTON, M.; KAPUT, J **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning**. Jornal for Researt in Mathematics Education 2005, Vol 36, No. 5, 412-446.

BOYER, C. **HISTÓRIA DA MATEMÁRICA**. Uta C. Merzbach, [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

BULHÕES, L. F. S. S.; MARTINS, L. M. **A relação intrínseca entre a psicologia histórico-cultural e a epistemologia marxiana**. *Psicologia em Estudo*, v. 23, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.4025/psicolestud.v23.39177.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984. 336p.

CEDRO, W. L, SOUSA, D. F.; PANOSSIAN, A. J**. Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos.** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014. 184 p.

CEDRO, W. L; MORAES, S. P. G.; ROSA, J. E. **A Atividade de Ensino e o Desenvolvimento do Pensamento Teórico em Matemática.** Ciência e Educação, v. 16, n.2, p. 427-445, 2010.

COUTINHO, D. M. **Divisão e multiplicação de polinômios com auxílio de materiais manipuláveis e tecnologia sob o olhar da representação semiótica**. Dissertação (Mestrado.) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de pós-graduação em ensino de matemática. Londrina [s.n.], 2019.

CUNHA, M. R. K**. Estudo das elaborações dos professores sobre o conceito de medida em atividades de ensino**. 2008. 135 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2008. Disponível em: https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=459416.

DAVIDOV, V. V. **Problemas do Ensino Desenvolvimental: A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia**. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M da Madeira Freitas. Textos publicados na Revista Soviet Education, August, v. 30, n. 8, 1988.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â.; M. Ângela; MIGUEL, A. C**ontribuição para repensar… a Educação Algébrica Elementar. Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 78-91, 2016. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384. Acesso em: 25 nov. 2021.

GIL, A. C. **Como elaborar projeto de pesquisa**. 4a Edição - São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 4a Edição - São Paulo: Atlas, 1994.

GOLDENBERG, M. **A Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8a Edição - Rio de Janeiro: Record, 2004.

GOUVEIA, M. A. C., PEREIRA, M. M. T., FERREIRA, S. L**., Pandemia e Ensino Remoto: A defasagem na aprendizagem de matemática no ensino médio.** Congresso Internacional de educação e tecnologia. Encontro de pesquisadores em educação e tecnologia. Congresso de ensino superior à distância. Congresso Internacional de ensino superior à distância. 2022.

GROSSI, M. G. R.; MINODA, D. S.; FONSECA, R. G. P.; Impactos da pandemia da COVID-19 na Educação: com a palavra os professores. Revista Thema, v. 21, n. 2, 2022.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática: Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos**. Porto Alegre: Globo, 1970.

IBRAHIM, S. A. **A apropriação dos significados de polinômios: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural.** Dissertação (mestrado) - Universidade de Uberaba. Programa de Mestrado em Educação, 2015.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. 3ª ed. São Paulo: Globo, 1985.

JUNIOR, V. P. T., SILVEIRA, M. R. A. **O ensino de álgebra e a filosofia de Wittgenstein: sobre regras e essência.** Educação matemática, pesquisa. São Paulo, v. 21, n. 3, pp. 29-49, 2019.

KARLSON, P. **A magia dos números: a matemática ao alcance de todos**. Porto Alegre: Globo, 1961.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Trad. por Paulo Bezerra. Ed. Civilização Brasileira S.A., coleção Perspectivas do Homem, vol. 123, 1978.

LEFEBVRE, H. **Marxismo Uma Breve Introdução**; tradução William Lagos - Porto Alegre, RS: Coleção L&PM POKET, vol.784, fev. 2019, 128p.

LEONTIEV, A. N**. Atividade, consciência, personalidade**. Tradução de João Batista Martins. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2021.

LIBÂNEO, J. C. **A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov**. Revista Brasileira de Educação, n. 27, p. 31-50, jan./abr. 2004.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. da M. Vigotski, Leontiev, **Davidov - três aportes teóricos para a Teoria Histórico-Cultural e suas contribuições para a didática**. IV Congresso Brasileiro de História da Educação-SBHE. vol. 1, p. 1-10. Goiânia: Vieira, 2006.

LINS, R. C., GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para O Século XXI**. 4ª edição - PAPIRUS EDITORA - Campinas, SP, 1997

LOIZOS P**. Vídeo, filme e fotografias como documentos de pesquisa**. In: Bauer MW. Gaskell G, editores. Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático. Petrópolis (RJ):Vozes; 2002. p.137-55.

MAGALHÃES, G. M. **Atividade-guia e neoformações psíquicas: contribuições da psicologia histórico-cultural para o ensino desenvolvente na educação infantil**. Critica Educativa Sorocaba - São Paulo, v. 4, n. 2, p. 275-286, jul./dez. 2018.

MARTINS, R. V. **Metodologia de Pesquisa Científica: reflexões e experiências investigativas na Educação.** Lavras: UFLA/FAEPE, 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/362405445_Metodologia_de_Pesquisa_Cientifica_reflexoes_e_experiencias_investigativas_na_Educacao.

MARX, K. (2011). **Grundrisse: manuscritos econômicos de 1857-1858: esboços da crítica da economia política**. São Paulo: Boitempo. (Trabalho original publicado em 1941).

MORETTI, V. D., VIRGENS, W. P. das, ROMEIRO, I. de O. **Generalização teórica e o desenvolvimento do pensamento algébrico: contribuições para a formação de professores dos anos iniciais**, artigo Bolema, Bolema, Rio Claro (SP), v. 35, n. 71, p. 1457-1477, dez. 2021.

MOURA, A. R. L. de. **A medida e a criança pré-escolar**. 1995. 210f Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: 20.500.12733/1582081. Acesso em: 14 jun. 2025.

MOURA, M. O. de. **Formar e formar-se em espaços de significação da atividade pedagógica.** In: LIBÂNEO, José Carlos; ROSA, Sandra Valéria Limonta; ECHALAR, Adda Daniela Lima Figueiredo; SUANNO, Marilza Vanessa Rosa (Orgs.). Didática e formação de professores: embates com as políticas curriculares neoliberais. Goiânia: Cegraf UFG, 2022, p. 38-46. Disponível em:https://publica.ciar.ufg.br/ebooks/edipe2_ebook/artigo_07.html

MOURA, M. O.; ARAÚJO, E. S.; MORETTI, V. D.; PANOSSIAN, M.L.; RIBEIRO, F.D.; **Atividade Orientadora De Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem.** Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

NUNOMURA, A. R. T., SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Pensamento aritmético e pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: O relato de uma experiência**. Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática - EPREM, Londrina - 10 a 12 de outubro de 2019.

OLIVEIRA, B. **A Dialética do Singular-Particular-Universal**. Anais do V Encontro de Psicologia Social e Comunitária. Abrapso: Bauru, agosto 2001, 1-24.

PALANGANA, I. C.; GALUCH, M. T. B.; SFORNI, M. S. F. **Acerca da relação entre ensino, aprendizagem e desenvolvimento**. Revista Portuguesa de Educação, v. 15, n. 1, p. 111-128, 2002. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/374/37415106.pdf.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. doi:10.11606/T.48.2014.tde-14052014-153038. Acesso em: 2022-07-21.

PEREIRA, A. P. **Adolescência e juventude: contribuições e desafios de escritos soviéticos para a análise da realidade brasileira**. *Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica*, Uberlândia, v. 3, n. 3, p. 1-25, set./dez. 2019. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/51706. Acesso em: 7 jun. 2025.

PEREIRA, J. J. B. J.; FRANCIOLI, F. A. de S. **Materialismo histórico-dialético: contribuições para a teoria histórico-cultural e a pedagogia histórico-crítica**. **Germinal: Marxismo e Educação em Debate**, Londrina, v. 3, n. 2, p. 93-101, dez. 2011.

PEREIRA, J. T. G. **O desenvolvimento do pensamento algébrico: Significações produzidas por alunos do sétimo ano do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco. Itatiba, 2019.

PIRES, F. S.; **Metanálise de pesquisas brasileiras que tratam do desenvolvimento do pensamento algébrico na escola básica (1994-2014)**. Universidade Federal de São Carlos centro de educação e ciências humanas, programa de pós-graduação em educação. 2018.

PIRES, M. F. C. **Education and the historical and dialectical materialism**. Interface — Comunicação, Saúde, Educação, v.1, n.1, 1997.

PRESTES, Z. R**. Quando não é a mesma coisa: análise de traduções de Lev Semionovitch Vigotski no Brasil: repercussões no campo educacional.** 2010. 295 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2010. Disponível em: Acesso em: 15 jan. 2018.

RADFORD, L. (2021). **O ensino-aprendizagem da álgebra na teoria da objetivação**. In V. Moretti & L. Radford (Eds.), **Pensamento algébrico nos anos iniciais**: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural (pp. 171-195). Livraria da Física.

REGIS, F. C. N. do, **Introdução do pensamento algébrico: a generalização de padrões -** Belo Horizonte, 2017. Dissertação - (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

REZENDE, J. P. **Sentidos e significados manifestos por licenciandos e pós-graduandos ao produzirem atividades de ensino de matemática na perspectiva lógico-histórica.** 214 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, 2015.

RÍBNIKOV, K**. Historia de las matemáticas.** Traducción del ruso por Concepción Valdés Castro. Moscú: Editorial Mir, 1987.

SÃO PAULO (Cidade). Secretaria Municipal de Educação. **Currículo da Cidade: Ensino Fundamental: Matemática**. São Paulo: SME, 2019.

SFORNI, M. S. F. de. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino**: contribuições da teoria da atividade. 2003. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SFORNI, M. S.F de. **Aprendizagem e desenvolvimento: o papel da mediação**. In: CAPELLINI, V. L. F.; MANZONI, R. M. (Org.). Políticas públicas, práticas pedagógicas e ensino-aprendizagem: diferentes olhares sobre o processo educacional. Bauru: UNESP/FC; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2008.

SILVA, M. G. da. **Potencialidades da atividade de estudo no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica dos alunos dos anos finais do ensino fundamental.**

Dissertação (mestrado) - Universidade de Uberaba. Programa de Mestrado em Educação, 2015.

SOUSA, M. C. de. **O ensino de álgebra numa perspectiva logico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental.** 2004. 285 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252372>.

SOUSA, M. C. de; PANOSSIAN, M. L., CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos.** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014. 1ª edição — (Série Educação Matemática).

SOUZA, E. R. de; DINIZ, M. I. S. V**. Álgebra: das variáveis às equações e funções**. 2. ed. São Paulo: IME/USP, 1996.

TELES, R. A. M. **A aritmética e a álgebra na matemática escolar**. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, v. 16, p. 15–32, 2004.

TULESKI, S. C. **Psicologia histórico-cultural, marxismo e educação. *Teoria e Práxis Educacional***, v. 5, n. 1, p. 117-127, jan./jun. 2002.

TUNG, M. T. **Sobre a Prática & Sobre a Contradição**.1ª edição - EDIÇÃO POPULAR - SÃO PAULO - 1999.

USISKIN, Z. **O que é álgebra da escola média**? In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. As ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

VIEIRA, A. R. L.; RIOS, P.P.S.; VASCONCELOS, C.A. **A linguagem simbólica e a resolução de problemas matemáticos no 8º ano do Ensino Fundamental.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.22, n.1, pp. 043-067, 2020.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

VIGOTSKI, L. S. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2001, 520p.

NUNES, J. P. M. **Núcleos de significação como procedimento de análise nas pesquisas em educação.** [Webinário]. YouTube, 14 set. 2021. Disponível em: https://youtu.be/aTwUHcKecpA. Acesso em: 3 jul. 2025.

ANEXOS

ANEXO A – Termo de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE)

Prezado(a) Senhor(a), você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa de forma totalmente voluntária da Universidade Federal de Lavras. Antes de concordar, é importante que você compreenda as informações e instruções contidas neste documento. Será garantida, durante todas as fases da pesquisa: sigilo; privacidade; e acesso aos resultados.

I - Título do trabalho experimental: INVESTIGAÇÃO DA GENERALIZAÇÃO DO PENSAMENTO ARITMÉTICO COMO FORMA DE ASCENSÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Pesquisador(es) responsável(is): José Antônio Araújo Andrade / Katia Santos Esteves Barros

Cargo/Função:
Professor Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Instituição/Departamento: Universidade Federal de Lavras/Departamento de Ciências Exatas
Telefone para contato: (035) 3829 1151
Local da coleta de dados: ____________________________________

II - OBJETIVOS:
Analisar o desenvolvimento de pensamento algébrico, por meio de SDA que explorem a generalização do pensamento aritmético, se a mobilização dos nexos conceituais da álgebra em SDA produzem significações que corroboram para o desenvolvimento do pensamento algébrico; se as SDA suscitam a Atividade de Estudos; o papel da mediação pedagógica na produção das significações.

III - JUSTIFICATIVA
O estudo dessa pesquisa, justifica-se pelo baixo desempenho dos estudantes em avaliações externas, pois de acordo com o INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais 68,1% dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em matemática e apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes do Pisa apresentou nível máximo de proficiência na área e em termos de escolarização, os estudantes brasileiros estão três anos e meio atrás dos países da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico OCDE (489), quando o assunto é proficiência em matemática, onde nossa pesquisa prevê a minimização desse problema.

IV - PROCEDIMENTOS DO EXPERIMENTO

AMOSTRA: Estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental

EXAMES: Esta pesquisa será realizada, neste espaço educacional, localizada no estado de São Paulo. Pretendemos selecionar como sujeitos da pesquisa estudantes dos anos finais do ensino fundamental. Foram elaboradas tarefas com situações desencadeadoras de aprendizagem, a fim de estimular o processo de construção do pensamento teórico. Serão utilizados como instrumento de coleta de dados o diário de campo do pesquisador, gravador de áudio e vídeo (que será utilizada durante a realização das tarefas realizadas pelos alunos), e os registros elaborados pelos estudantes. As fotos serão editadas para que não haja identificação dos sujeitos.

V - RISCOS ESPERADOS

A avaliação do risco da pesquisa é **MÍNIMO**. Embora não haja riscos previsíveis, os sujeitos de pesquisa podem apresentar alteração de comportamento, desconforto, ou até mesmo vergonha tanto perante os instrumentos de coleta de dados, quanto na socialização de suas percepções do conteúdo discutido em sala de aula. Além disso, pode haver ainda o medo de divulgação dos dados e sigilo do estudante. Para reduzir tais constrangimentos e desconfortos, o professor deve realizar uma intervenção garantindo o clima de respeito e de coletividade em sala de aula. Quanto ao desconforto frente aos instrumentos de coleta de dados, os estudantes normalmente se acostumam e acabam se esquecendo da gravação. A respeito das medidas para reduzir o medo relativo à divulgação e exposição de imagem, garantimos a limitação do acesso aos dados à equipe de pesquisa (professor responsável e pesquisador principal), além da identificação dos estudantes por meio de um pseudônimo, bem como não apresentaremos indícios quanto à escola e turma pesquisada, a fim de assegurar seu anonimato e privacidade. Os registros de imagem, também serão editados para que não haja a identificação do estudante. Ressaltamos que os participantes podem desistir da colaboração com a pesquisa quando desejarem.

VI - BENEFÍCIOS

Considerando os objetivos da presente pesquisa, podemos elencar como benefícios aos sujeitos: a possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico; possibilidade de ampliação e desenvolvimento da criticidade e autonomia em suas relações sociais; possibilidade de desenvolver novas contribuições para a ciência e para a tecnologia; aumento da autoestima, uma vez valorizados por sua participação; oportunização de momentos de interação e colaboração com o grupo.

VII - CRITÉRIOS PARA SUSPENDER OU ENCERRAR A PESQUISA

A pesquisa será encerrada de forma antecipada se nenhum dos convidados concordar em participar ou se todos os participantes se negarem a participar das entrevistas.

VIII - CONSENTIMENTO PÓS-INFORMAÇÃO

Eu____, responsável pelo menor ____, certifico que, tendo lido as informações acima e suficientemente esclarecido (a) de todos os itens, estou plenamente de acordo com a realização do experimento. Assim, eu autorizo a execução do trabalho de pesquisa exposto acima.

São Paulo, _____ de __________________ de 20___.

____________________________________	______________________________________
Nome (legível) / RG	Assinatura

ATENÇÃO! Por sua participação, você: não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira; será ressarcido de despesas que eventualmente ocorrerem; será indenizado em caso de eventuais danos decorrentes da pesquisa; e terá o direito de desistir a

qualquer momento, retirando o consentimento sem nenhuma penalidade e sem perder quaisquer benefícios. Em caso de dúvida quanto aos seus direitos, escreva para o Comitê de Ética em Pesquisa em seres humanos da UFLA. Endereço - Campus Universitário da UFLA, Pró-reitoria de pesquisa, COEP, caixa postal 3037. Telefone: (35)3829-5182.
Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada com o pesquisador responsável e a outra será fornecida a você.

No caso de qualquer emergência entrar em contato com o pesquisador responsável no Departamento de Ciências Exatas. Telefone de contato: (035) 3829-1151.

ANEXO B – Termo de Assentimento

TERMO DE ASSENTIMENTO

I - IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO
Título do trabalho experimental: INVESTIGAÇÃO DA GENERALIZAÇÃO DO PENSAMENTO ARITMÉTICO COMO FORMA DE ASCENSÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Pesquisador(es) responsável(is): José Antônio Araújo Andrade
Katia Santos Esteves Barros

Telefone para contato: (035) 3829 1151
II - PROCEDIMENTOS DO EXPERIMENTO
Amostra: Estudantes dos anos finais de uma escola do estado de São Paulo.
Exames: Esta pesquisa será realizada, em uma escola do estado de São Paulo. Pretendemos selecionar como sujeitos da pesquisa estudantes dos anos finais do ensino fundamental. Foram elaboradas tarefas com situações desencadeadoras de aprendizagem, a fim de estimular o processo de construção do pensamento teórico. Serão utilizados como instrumento de coleta de dados o diário de campo do pesquisador, gravador de áudio e vídeo (que será utilizada durante a realização das tarefas realizadas pelos alunos), e os registros elaborados pelos estudantes. As fotos serão editadas para que não haja identificação dos sujeitos.

III - PARTICIPAÇÃO VONLUNTÁRIA
A sua participação em qualquer tipo de pesquisa é voluntária. Em caso de dúvida quanto aos seus direitos, escreva ou ligue para o Comitê de Ética em Pesquisa em seres humanos da UFLA. Endereço – Campus Universitário da UFLA, Pró-reitoria de pesquisa, COEP, caixa postal 3037, Telefone: (35)3829-5182.
Eu____, declaro que li e entendi todos os procedimentos que serão realizados neste trabalho. Declaro também que, fui informado que posso desistir a qualquer momento. Assim, após consentimento dos meus pais ou responsáveis, aceito participar como voluntário do projeto de pesquisa descrito acima.
São Paulo, _____ de __________________ de 20__.
NOME
(legível)____RG_________________
ASSINATURA____

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada com o pesquisador responsável e a outra será fornecida a você.

No caso de qualquer emergência entrar em contato com o pesquisador responsável no Departamento de Ciências Exatas. Telefones de contato: **(035) 3829 1151**

ANEXO C – REQUERIMENTO

REQUERIMENTO

Eu,____,

RG________________________________ nº ___________________________________, CPF nº ______________________________________, autorizo Katia Santos Esteves Barros RG: 33.019. 982, CPF: 221.028.808-85, mestranda do curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Federal de Lavras – UFLA, matrícula 2021160335, a realizar atividades teóricas e práticas, na Escola ____,

para a realização do projeto de pesquisa **INVESTIGAÇÃO DA GENERALIZAÇÃO DO PENSAMENTO ARITMÉTICO COMO FORMA DE ASCENSÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO**, que tem por objetivo primário analisar o desenvolvimento de pensamento algébrico (pensamento teórico), por meio de situações desencadeadoras de aprendizagem que explorem a generalização do pensamento aritmético.

A pesquisadora acima qualificado se compromete a:

- Iniciar a coleta de dados somente após o projeto de pesquisa ser aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos.
- Obedecer às disposições éticas de proteger os participantes da pesquisa, garantindo-lhes o máximo de benefícios e o mínimo de riscos.
- Assegurar a privacidade das pessoas citadas nos documentos institucionais e/ou contatadas diretamente, de modo a proteger suas imagens, bem como garante que não utilizará as informações coletadas em prejuízo dessas pessoas e/ou da instituição, respeitando deste modo as Diretrizes éticas da pesquisa envolvendo seres humanos, nos termos estabelecidos na Resolução CNS Nº 466/2012, e obedecendo as disposições legais estabelecidas na Constituição Federal Brasileira, artigo 5º, e incisos X e XIV e no Novo Código Civil, artigo 20.

São Paulo, __ de junho de ________.

ASSINATURA DO(A) GESTOR(A) ESCOLAR	**ASSINATURA DA SOLICITANTE (Responsável pela pesquisa)**
______________________________________	______________________________

O (a) **ge**stor(a) autorizo a utilização das dependências da Escola____ para coleta de dados do projeto de pesquisa supracitado.

Assinatura e carimbo: _____________________________________

Gestor(a) Escolar

Obs.: A assinatura deste termo não implica em autorização para coleta de dados. Este deverá ser encaminhada ao Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos-COEP como parte dos documentos a serem avaliados. O início da coleta de dados depende da aprovação do COEP/UFLA.