



NICÁSIO GOUVEIA

**MODELOS NÃO LINEARES PARA DESCRIÇÃO DO
ACÚMULO DE MACRONUTRIENTES FÓSFORO E
POTÁSSIO NO CULTIVAR FEIJOEIRO JALO**

LAVRAS – MG

2021

NICÁSIO GOUVEIA

**MODELOS NÃO LINEARES PARA DESCRIÇÃO DO ACÚMULO DE
MACRONUTRIENTES FÓSFORO E POTÁSSIO NO CULTIVAR FEIJOEIRO JALO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes
Orientador

Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima
Coorientador

LAVRAS – MG

2021

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Gouveia, Nicásio.

Modelos não Lineares para Descrição do Acúmulo de
Macronutrientes Fósforo e Potássio no Cultivar Feijoeiro Jalo /
Nicásio Gouveia. - 2021.

50 p.

Orientador(a): Augusto Ramalho de Moraes.

Coorientador(a): Renato Ribeiro de Lima.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Lavras, 2021.

Bibliografia.

1. Curva de crescimento. 2. Transformação ART. 3. Phaseolus
vulgaris L. I. de Moraes, Augusto Ramalho. II. de Lima, Renato
Ribeiro. III. Título.

NICÁSIO GOUVEIA

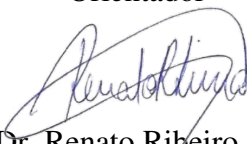
**MODELOS NÃO LINEARES PARA DESCRIÇÃO DO ACÚMULO DE
MACRONUTRIENTES FÓSFORO E POTÁSSIO NO CULTIVAR FEIJOEIRO JALO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 08 de Fevereiro de 2021.

Dr. Joel Augusto Muniz UFLA
Dr. Elias Silva de Medeiros UFGD
Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães UFLA

Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes
Orientador



Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2021**

*Aos meus pais Valentim e Maria Isabel.
Aos meus irmãos: Florentino, Narciso, Fabiano e Mirela que sempre se fizeram presentes.
À minha namorada Paula, agradeço muito pelo amor e por todos os momentos de carinhos
vividos juntos.
Dedico*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela vida e saúde, pois sem ele não sou ninguém e nem seria capaz de concretizar esse sonho.

Aos meus queridos e amados pais, Valentim Gouveia e Maria Isabel Mandau por tudo que dedicaram a mim.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes, pela orientação, atenção e ensinamentos transmitidos durante a realização desse trabalho, a você professor, serei eternamente grato.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima por toda ajuda dispensada a mim e para realização desse trabalho, um muito obrigado.

Aos demais professores do Departamento de Estatística desta Universidade que fizeram toda diferença na minha formação acadêmica e pessoal, em especial Devanil Jaques de Souza, Izabela Regina Cardoso de Oliveira, João Domingos Scalon e Tales Jesus Fernandes.

Ao Departamento de Estatística pela oportunidade durante toda minha trajetória do mestrado.

Aos funcionários do Departamento de Estatística em especial aos secretários Nádia e Fernando, agradeço a cordialidade.

Ao Núcleo de Estudos em Regressão Não Linear Aplicada (NLIN), em especial ao Prof. Joel Augusto Muniz e Prof. Tales Jesus Fernandes.

Aos colegas do NLIN: Felipe, Kelly, Edilson, Édipo, Waleff, Maylon, Victor e Mírian pelo encorajamento e por terem dedicado seu precioso tempo para ajudar sempre que precisasse.

À Universidade Federal de Lavras, da qual tenho orgulho de fazer parte.

Aos amigos que estiveram presentes ao longo desta trajetória, em especial Cristian e Roger que foram suporte em todos os momentos, tornando a vida mais leve.

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ).

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

*A função da educação é ensinar a pessoa a pensar intensamente e a pensar criticamente.
Inteligência mais caráter - esse é o objetivo da verdadeira educação.
(Martin Luther King Jr.)*

RESUMO

O feijão comum possui importância socioeconômica e constitui uma das mais importantes fontes de proteína da dieta brasileira. A modelagem dos padrões de crescimento do feijoeiro, envolve ajuste de modelos de regressão não lineares para estimar as causas que contribuí no processo do seu desenvolvimento. O objetivo deste trabalho foi analisar curvas de crescimento dos acúmulos de matéria seca dos macronutrientes potássio (K) e fósforo (P) em cinco diferentes densidades de semeadura, para o feijoeiro cultivar Jalo, por meio da utilização de ajuste dos modelos não lineares Logístico e Gompertz em função das idades de avaliação das plantas, no sistema de plantio direto. Os dados analisados foram retirados de Vieira (2006), provenientes de um experimento realizado na Universidade Federal de Lavras, no período da safra das águas nos anos 2006/2007 no sistema de plantio direto. Foi utilizado o delineamento em blocos casualizados, contendo três repetições; sendo que os tratamentos foram dispostos em esquema fatorial 5x7, contendo cinco densidades de semeadura (75, 145, 215, 285 e 355 mil planta por hectares) e sete épocas de avaliação (10, 20, 30, 40, 50, 60 e 70 dias após emergência). Foi analisado o acúmulo de Fósforo e Potássio no feijoeiro cv Jalo. A utilização de transformação por postos alinhados (ART) assegura a presença de normalidade, homogeneidade e independência dos erros. Os modelos não lineares Logístico e Gompertz são adequados para a descrição do acúmulo de Fósforo e Potássio no feijoeiro cv Jalo, sendo que o modelo Logístico apresentou melhores propriedades de ajuste.

Palavras-chave: Curva de crescimento. Transformação ART. *Phaseolus vulgaris* L..

ABSTRACT

Common beans have socioeconomic importance and are one of the most important sources of protein in the Brazilian diet. The modeling of bean growth patterns involves adjusting nonlinear regression models to estimate the causes that contribute to the development process. The objective of this work was to analyze growth curves of dry matter accumulations of macronutrients potassium (K) and phosphorus (P) in five different sowing densities, for common bean cultivar Jalo, through the use of adjustment of the non-linear Logistic and Gompertz as a function of plant evaluation ages in the no-tillage system. The analyzed data were taken from Vieira (2006), from an experiment carried out at the Federal University of Lavras, during the water harvest period in the years 2006/2007 in the no-tillage system. A completely randomized block design was used, containing three replications ; the treatments were arranged in a 5x7 factorial scheme, containing five sowing densities (75, 145, 215, 285 and 355 thousand plants per hectare) and seven evaluation periods (10, 20, 30, 40, 50, 60 and 70 days after emergency). The accumulation of phosphorus and potassium in common bean cv Jalo was analyzed. The use of transformation by aligned posts (ART) ensures the presence of normality, homogeneity and independence of errors. The non-linear Logistic and Gompertz models are suitable for describing the accumulation of phosphorus and potassium in common bean cv Jalo, with the Logistic model showing better fit properties.

Keywords: Growth curve. ART transformation. *Phaseolus vulgaris* L.

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 – Histograma para o acúmulo do P no total do feijoeiro.	28
Figura 4.2 – Representação gráfica dos valores médios do acúmulo de Fósforo Total do feijoeiro.	29
Figura 4.3 – Representação gráfica do acúmulo de fósforo e ajuste do modelo Logístico e Gompertz ao longo do ciclo de vida em função da densidade de semeadura 75 (a), 145 (b), 215 (c), 285 (d), 355 (e).	34
Figura 4.4 – Histograma para o acúmulo do K no total do feijoeiro	35
Figura 4.5 – Representação gráfica dos valores médios do acúmulo de Potássio Total do feijoeiro.	36
Figura 4.6 – Representação gráfica do acúmulo de Potássio e ajuste do modelo Logístico e Gompertz ao longo do ciclo de vida em função da densidade de semeadura 75 (a), 145 (b), 215 (c), 285 (d) e 355 (e).	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Estatística descritiva para o acúmulo do Fósforo.	28
Tabela 4.2 – Análise de variância para acúmulo de Fósforo.	30
Tabela 4.3 – Estatísticas e respectivos valores-p dos testes de normalidade (Shapiro - Wilk - SP), homogeneidade de variância (Bartlett - BART) e independência (Durbin - Watson - DW) para acúmulo de Fósforo.	30
Tabela 4.4 – Análise de variância do acúmulo de Fósforo após a transformação por postos alinhados.	30
Tabela 4.5 – Estatísticas e respectivos valores-p dos testes de normalidade (SW), de homoscedasticidade(BP) e independência (DW) para os modelos Logístico (L) e Gompertz (G).	31
Tabela 4.6 – Estimativas e critérios de seleção para o modelo Logístico e Gompertz ajustados para o acúmulo de fósforo do feijoeiro nas densidades de semeadura.	32
Tabela 4.7 – Estatística descritiva para o acúmulo do Potássio.	35
Tabela 4.8 – Análise de variância do acúmulo de Potássio total.	37
Tabela 4.9 – Estatísticas e respectivos valores-p dos testes de normalidade (Shapiro - Wilk - SP), homogeneidade de variância (Bartlett - BART) e independência (Durbin-Watson - DW) para o acúmulo de potássio.	37
Tabela 4.10 – Análise de variância do acúmulo de Potássio após a transformação por postos alinhados.	37
Tabela 4.11 – Estatísticas e respectivos valores-p dos testes de normalidade (SW), de homoscedasticidade(BP) e independência (DW) para os modelos Logístico e Gompertz.	38
Tabela 4.12 – Estimativas e critérios de seleção para o modelo Logístico e Gompertz ajustados para o acúmulo de potássio do feijoeiro nas densidades de semeadura.	39

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	REFERENCIAL TEÓRICO	12
2.1	Feijoeiro	12
2.2	O macronutriente potássio (K)	14
2.3	O macronutriente fósforo (P)	14
2.4	Modelos de regressão não lineares	15
2.4.1	Modelo não linear aplicado à cultura do feijão	17
2.4.2	Modelo Logístico	18
2.4.3	Modelo Gompertz	19
2.5	Métodos de estimação	20
2.5.1	Método iterativo Gauss-Newton	20
2.6	Seleção de Modelos	22
2.6.1	Coefficiente de determinação	22
2.6.2	Crítério de informação de Akaike	22
3	MATERIAL E MÉTODO	24
3.1	Caracterização do experimento	24
3.2	Análise da variância - ANOVA	25
3.3	Modelos não lineares	26
3.4	Procedimentos computacionais	27
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	28
4.1	Fósforo (P)	28
4.1.1	Análise de variância	29
4.1.2	Ajuste dos modelos não lineares	31
4.2	Potássio (K)	35
4.2.1	Análise de variância	36
4.2.2	Ajuste dos modelos não lineares	38
5	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIA	43

1 INTRODUÇÃO

O feijão (*Phaseolus vulgaris L.*) é produzido e comercializado no Brasil, sendo considerado um dos pilares da alimentação brasileira e conseqüentemente, é uma importante fonte de proteína, ferro, sais minerais e carboidrato. Segundo a Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB), a perspectiva da temporada 2020/21 é ter uma meta de 914,2 mil hectares, nesse primeiro ciclo para o plantio de feijão, com uma projeção de produção na ordem de 1.041,7 mil toneladas, somando os feijões do tipo comum cores, comum preto e caupi. Ainda, em relação a produção total, incluindo as estimativas da segunda e terceira safra, a previsão pode chegar a 2.927 milhões de hectares para o cultivo da cultura (considerando o feijão-comum cores, o feijão-comum preto e o feijão caupi), com uma produção esperada de 3.103,4 milhões de toneladas.

A cultura de feijão tem relevância no contexto produtivo nacional em virtude de sua adaptação edafoclimática, proporcionando a produção de grãos em todo o território brasileiro. Sendo parte da alimentação típica da culinária brasileira e, principalmente, por ter oferta do produto no mercado interno durante todo o ano, essa atividade destaca-se por ser cultivada, principalmente por agricultores familiares, bem como de sua importância econômica e social nas regiões produtoras, quanto a geração de emprego e renda (OLIVEIRA et al., 2018).

No âmbito de fatores que limitam a produtividade do feijoeiro em solos brasileiros, pode-se frisar o baixo teor de fósforo (P), obtendo-se resposta positiva da cultura à aplicação desse nutriente no solo (PASTORINI et al., 2000). As limitações na disponibilidade de fósforo (P) no início do ciclo vegetativo, podem resultar em restrições no desenvolvimento, sendo que a planta não se recupera futuramente, mesmo com aumento do suprimento desse nutriente a níveis adequados (GRANT et al., 2001; SOUTO et al., 2009).

Os nutrientes minerais são imprescindíveis para o crescimento e desenvolvimento da planta. De acordo com Galvão et al., (2013), nos solos tropicais, o potássio (K) é um dos nutrientes que mais limita a produção e normalmente aparece como nutriente obrigatório nas formulações de fertilizantes, respaldado pelo paradigma de que os teores trocáveis no solo são baixos. Diante disso, é necessário o fornecimento do potássio (K) com adubações, para garantir o desenvolvimento das plantas (KAMINSKI et al., 2007).

Para entender como as plantas se desenvolvem e se dá o processo de absorção dos nutrientes, uma alternativa é por meio da curva de crescimento. A curva de crescimento representa um processo de aumento natural de massa ou tamanho durante o ciclo vegetativo. De acordo

com Mesquita, Oliveira e Freitas (2002), a análise de crescimento consiste no acúmulo de matéria seca pelas plantas ao longo do seu crescimento e este fato acontece devido às atividades fotossintética.

O estudo de crescimento vegetal é uma ferramenta importante para análise da curva de crescimento, visto que, o mesmo utiliza os modelos lineares e não lineares para descrever o comportamento de como se processa o fenômeno de desenvolvimento das plantas. Porém, na utilização desses modelos, os não lineares se destacam pelo quesito de serem mais parcimoniosos (apresenta menor número de parâmetros) e, geralmente, os seus parâmetros possuem interpretações práticas, o que facilita na tomada de decisão pelo pesquisador (SORATO et al., 2014).

Dentre vários tipos de modelos aplicáveis para esse fim, o presente trabalho justifica-se pela importância da modelagem do crescimento do feijoeiro na produção, auxiliando na gestão, na tomada de decisão do produtor, comparação e aperfeiçoamento de metodologias que possibilitem o estudo de forma prática e eficiente, na análise de curva de crescimento na qual envolve o ajuste de modelos de regressão e serve ao propósito, estimar as causas do crescimento, inferindo sobre as contribuições dos diversos processos presentes no desenvolvimento vegetal. Santos et al. (2015), usaram a análise de crescimento a fim de avaliar diferentes taxas de fertilização na safra de feijoeiro comum e constataram um aumento na matéria seca e área foliar com taxas crescentes de fertilização, no qual, provavelmente afetou positivamente a produtividade de grãos.

Diante disso, têm sido utilizados vários tipos de modelos aplicáveis ao crescimento vegetal. Pode-se destacar os modelos de regressão não-lineares, que podem contribuir ou, até mesmo, auxiliar na interpretação das metodologias envolvidos no crescimento das plantas. Lima et al. (2019), apresentaram estudo sobre modelagem não linear da biomassa seca do feijoeiro cv. Jalo, utilizando os modelos não lineares Logístico e von Bertalanffy. Os autores verificaram que o modelo Logístico foi selecionado como o mais eficiente na descrição do crescimento em acúmulo de biomassa seca do feijoeiro.

Dessa forma, o presente trabalho foi realizado com objetivo de analisar curvas de crescimento dos acúmulos em matéria seca dos macronutrientes potássio (K) e fósforo (P) em cinco diferentes densidades de semeadura, para o feijoeiro cultivar Jalo, por meio da utilização de ajuste dos modelos não lineares Logístico e Gompertz, no sistema de plantio direto.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste tópico apresenta-se uma revisão bibliográfica, apresentando as principais características do feijoeiro e dos macronutrientes potássio e fósforo, além de alguns dos modelos mais utilizados na descrição do crescimento de plantas.

2.1 Feijoeiro

O feijão comum (*Phaseolus vulgaris L.*), além de ser uma cultura de subsistência em várias regiões brasileiras, exerce uma função de destaque na agricultura empresarial de alta produtividade, assim como no rendimento econômico (MEIRELES et al., 2000; RAMOS JÚNIOR et al., 2005).

O feijão-comum é um dos mais tradicionais pratos da culinária brasileira e por consequência disso, um componente cultural que merece a atenção de pesquisadores das diversas áreas do conhecimento. Sendo assim, o feijão comum, que é uma leguminosa de origem asiática, em virtude de sua adaptabilidade com relação ao clima proliferou-se de forma natural mundialmente (VIEIRA et al., 2015).

O feijão-comum apresenta características técnicas, agronômicas e culturais que o qualifica como uma cultura familiar dos pequenos produtores. De modo geral, o feijão é um dos pilares da dieta brasileira. Por conseguinte, a importância do feijão se dá em razão de sua segurança alimentar e nutricional, possibilitando fonte de proteína vegetal, vitaminas do complexo B, sais minerais, ferro, cálcio, potássio e fósforo (VIEIRA et al., 2015). Assim, tem-se que o consumo de feijão é bem variante, pois muda de acordo com a região do país. Essa mudança vai desde ambiente de moradia, poder econômico do consumidor, variação de cor dos grãos, etc.

A produção do feijoeiro pode ocorrer em três safras distintas ao longo do ano. A primeira é conhecida como safra das águas, uma vez que a mesma depende dos bons índices pluviométricos e o plantio ocorre no período de agosto a dezembro na região Centro Sul, e no período de outubro a fevereiro no Nordeste. A segunda é nomeada de safra das secas, ao contrário da primeira safra, essa ocorre no período com menor índice de chuva no país. O plantio dessa cultura decorre de dezembro a março, abrange todos os estados brasileiros, com concentração na região Nordeste. A terceira é conhecida como safra irrigada, dado que a colheita do feijão irrigado acontece no período de abril a junho na Região Centro Sul (MAPA, 2015).

O feijão é uma cultura muito sensível às variações das condições climáticas, como a temperatura e as chuvas. Alguns fatores ambientais que influenciam o crescimento e a pro-

dução das culturas são: radiação solar, temperatura do ar, umidade relativa do ar e velocidade dos ventos (LACERDA et al., 2010). Desse modo, temperaturas muito elevadas prejudicam drasticamente o florescimento e a frutificação do feijoeiro, assim como as baixas temperaturas provocam a perda das flores ocasionando queda de rendimento. Sendo assim, essas variações climáticas influenciam no desenvolvimento do feijão, além do mais, pode afetar no crescimento da vagem.

O feijoeiro é considerado uma planta com raiz delicada, sendo que grande parte da mesma se encontra até 20 cm de profundidade do solo. Assim, são recomendados solos com boa aeração, de textura areno argilosa, ricos em matéria orgânica e elementos nutritivos (MAPA, 2015). Segundo Martins et al. (2017), o feijoeiro é uma planta exigente em nutrientes, o que se deve ao fato do sistema radicular ser pequeno e pouco profundo ou melhor, devido ao ciclo curto.

Os tipos de feijão mais produzidos no Brasil são o carioca, o Jalo, o Preto, o Rajado e o Roxo, variando entre regiões produtoras. O tipo Jalo tem como característica grão amarelo e grande, sendo mais produzido e comercializado em determinadas regiões de Minas Gerais. Sendo assim, esse tipo apresenta resistência a duas doenças comuns causadas por fungos, a murcha-de-fusarium e a mancha-angular (RAMALHO et al., 2011).

O feijoeiro possui um ciclo vegetativo curto, não ultrapassando os 90 dias após o plantio e, devido ao pequeno volume de solo explorado pelas raízes e pela baixa disponibilidade de nutrientes no solo, muito cuidado deve-se ter no tratamento, durante o desenvolvimento da cultura. Segundo Vieira et al. (2009), estudos com relação aos conteúdos de nutrientes no feijoeiro são recentes e escassos, existindo grande interesse em pesquisar a absorção desses nutrientes. A absorção de nutrientes pelas plantas está relacionada a fatores de desenvolvimento da planta e da atividade metabólica (EPSTEIN, 1972). Diante disso, a definição do acúmulo de nutrientes no decorrer do ciclo vegetativo é fundamental para estabelecer o manejo nutricional (DA CUNHA et al. 2020).

Os nutrientes podem ser classificados de acordo com sua concentração na planta, sendo que quando existe uma grande quantidade, são chamados macronutrientes e, caso contrário, são denominados de micronutrientes. Além da sua classificação por concentração, existe uma escala para absorção dos nutrientes. De acordo com Vieira et al. (2015), a escala decrescente para os macronutrientes é dada por: nitrogênio (N), potássio (K), cálcio (Ca), magnésio (Mg),

enxofre (S), fósforo (P) e para os micronutrientes é cloro (Cl), ferro (Fe), manganês (Mn), zinco (Zn), boro (B), cobre (Cu) e molibdênio (Mo).

2.2 O macronutriente potássio (K)

O potássio é um elemento químico do símbolo K (do latim Kalium), abundante na natureza, podendo ser encontrado principalmente nas águas salgadas e outros minerais (AGROLINK, 2020). Sendo assim, a sua ação biológica se dá nas diferentes hortaliças como a beterraba e couve-flor. Também, se encontra nas frutas como banana, ameixa, cereja, damasco e pêsego, que são alimentos ricos em potássio.

A absorção de potássio pelas plantas é atribuída na forma de íon K^+ . A função de K nas plantas contribui em várias atividades bioquímicas, sendo um ativador de grande número de enzimas, regulador da pressão osmótica (entrada e saída de água da célula), abertura e fechamento dos estômatos (células localizadas na epiderme inferior das folhas) (AGROLINK, 2020). Prazeres et al. (2015), estudaram crescimento e trocas gasosas de plantas de feijão-caupi sob irrigação salina e doses de potássio. Os autores verificaram que há existência de interações entre salinidade e potássio, e que esta é um indicativo de que a dose ótima desse nutriente depende da salinidade na zona radicular das plantas, sendo uma informação importante para o manejo de cultivos em ambientes salinos.

2.3 O macronutriente fósforo (P)

O fósforo é um elemento químico de símbolo P, sendo que no Brasil, as principais reservas são a de Araxá, em Minas Gerais, as de Olinda, em Pernambuco e Jacupiranga, em São Paulo. Encontra-se na fase sólida nas formas orgânicas e inorgânicas e na fase líquida, em forma inorgânica na solução do solo, na forma de Ácido fosfórico (H_3PO_4) (AGROLINK, 2020).

Em geral, dos macronutrientes primários, o fósforo (P) é absorvido em menores quantidades que os demais. Ainda assim, a sua presença no solo é indispensável para o crescimento e produção vegetal (AGROLINK, 2020). Além disso, interfere no processo de fotossíntese, respiração, armazenamento e transferência de energia, divisão celular e crescimento das células.

O fósforo tem como finalidade contribuir para o crescimento prematuro das raízes, qualidade de frutas, verduras, grãos e formação das sementes. Segundo Zucareli et al. (2011),

citam que o fósforo é um elemento exigido em quantidade 10 vezes menor que a do nitrogênio (N) e está envolvido diretamente na formação da semente e do fruto. Assim, por ter uma possível interferência em diversos processos vitais das plantas, deve-se ter certa cautela no seu fornecimento às plantas, com suprimento adequado do fósforo desde a sua germinação e, principalmente, nas plantas consideradas com ciclo curto.

Coutinho et al. (2014) apresentaram um estudo sobre doses de fósforo na cultura do feijão-caupi na região nordeste do Estado do Pará. Os autores verificaram que as variáveis de produtividade de grãos, diâmetro de caule e número de vagens por planta de feijão-caupi tiveram um melhor ajuste da equação linear, o que demonstra potencial de resposta pela cultura à adubação fosfatada superior ao limite pesquisado.

Geralmente, o fósforo apresenta uma grande variabilidade nas plantas, sendo que, as plantas quando jovens absorvem maiores quantidades de fósforo, ocorrendo um rápido e intenso crescimento das raízes em ambientes com níveis adequados do nutriente (AGROLINK, 2020).

2.4 Modelos de regressão não lineares

Os modelos de regressão não lineares, segundo Gallant (1987), Souza (1998) e Montgomery, Peck e Vining (2012) podem ser escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.1)$$

em que \mathbf{Y} representa vetor dos valores observados ou dependentes; $f(.)$ indica a função ou relação matemática existente entre as variáveis; \mathbf{X} é o vetor contendo as variáveis independentes; $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de parâmetros p dimensional desconhecido ($\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$) e $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2)$ representa o vetor dos erros aleatórios atribuídos ao modelo.

De acordo com Draper e Smith (1998), os modelos de regressão são classificados como modelos não lineares, quando estes são considerados não lineares em relação aos seus parâmetros. Nestes as derivadas parciais em relação aos parâmetros do modelo dependem de pelo menos um dos demais parâmetros do modelo.

Os modelos não lineares vêm sendo utilizados para descrever as variáveis físicas e sistemas biológicos nas mais diversas áreas da pesquisa. Além disso, uma das vantagens e característica desses modelos é que os seus parâmetros possuem interpretações práticas (DRAPER e

SMITH, 1998), facilitando, assim, a sua utilização e o conhecimento do fenômeno em estudo. Quando se pretende modelar dados de crescimento, tem-se como interesse a obtenção de informações desse comportamento, as quais podem ser obtidas por meio da interpretação prática dos parâmetros do modelo, além de obter um modelo que seja o mais parcimonioso possível.

Vários modelos podem ser utilizados para descrever o crescimento de plantas. Dentre eles, os mais utilizados e conhecidos são os modelos não lineares, como o Logístico, o de Gompertz, o de Von Bertalanfy, o de Brody e o de Richards (FERNANDES et al., 2015; MISCHAN; PINHO, 2014). Todos esses modelos possuem uma curva cujo comportamento é do tipo sigmoidal ou crescente, o qual caracteriza uma curva de crescimento da massa seca ou da altura de plantas como ocorre com o feijoeiro, o cafeeiro, entre outras culturas.

Na obtenção das estimativas dos parâmetros de um modelo de regressão não linear, assim como nos modelos de regressão linear, pode-se utilizar o método dos mínimos quadrados ordinários que consiste em minimizar a soma de quadrados dos resíduos.

Matricialmente, a soma de quadrados dos resíduos, $SQR(\boldsymbol{\beta})$, do modelo (2.1) pode ser escrita como:

$$SQR(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n [Y_i - f(X_i; \boldsymbol{\beta})]^2.$$

Na expressão de $SQR(\boldsymbol{\beta})$ para achar o estimador de mínimos quadrados, é necessário derivar $SQR(\boldsymbol{\beta})$ com relação a cada um dos parâmetros e igualar essa equação a zero, ou seja,

$$\frac{\partial SQR(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_r} \Big|_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots, p),$$

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - f(X_i; \boldsymbol{\beta})] \frac{\partial f(X_i; \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_r} \Big|_{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}} = 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots, p).$$

Com isso, obtém-se um sistema de p equações normais não lineares. Normalmente o sistema de equações normais (SEN), no caso de modelos de regressão não linear não possui solução analítica, assim, a obtenção das estimativas dos parâmetros é realizada utilizando métodos numéricos iterativos.

A análise dos dados de crescimento está presente nas diversas áreas de pesquisa. Na biologia, o interesse está na descrição do crescimento de animais e plantas, na tentativa de compreender seus mecanismos fisiológicos. Na química, é a formulação do produto de uma reação química ao longo do tempo, e na agricultura, em conhecer como as plantas crescem e

como reagem ao serem submetidas a fatores externos, como adubação, cultivar, densidade de semeadura e outros fatores ambientais (SEBER e WILD, 2003).

Uma curva do tipo sigmoidal possui como característica um crescimento monotônico crescente, sendo que no início do desenvolvimento tem um crescimento mais lento, passando a um crescimento mais rápido até passar por um ponto de inflexão, e a partir deste vai reduzindo a taxa de aumento, até atingir um máximo em uma assíntota. Esse tipo de curva de crescimento, segundo Mattos (2013), é muito comum nas áreas biológicas e engenharias, pois vários fenômenos podem ser descritos por meio de curva em formato de S puxado para a direita, o que caracteriza um sigmoide.

2.4.1 Modelo não linear aplicado à cultura do feijão

Ao longo do tempo, os modelos não lineares vêm sendo utilizados em estudos de curvas de crescimento vegetal. Neste contexto, alguns dos autores estão aplicando os modelos não lineares para estudos ligados ao cultivo de feijão. Rosse e Vencovsky (2000) utilizando um modelo não linear para analisar a estabilidade fenotípica da produtividade de grãos de feijão (*Phaseolus vulgaris L.*), verificaram que o modelo adotado foi útil para classificar os materiais genéticos segundo suas produtividades e seus padrões de resposta, auxiliando na escolha de materiais mais promissores.

Urchei, Rodrigues e Stone (2000), comparando a taxa de crescimento da cultura do feijoeiro verificaram maior acúmulo e produção de matéria seca no plantio direto, do que no sistema convencional. Nos dois sistemas, verificaram que as curvas de crescimento apresentaram comportamentos semelhantes, e que a maior taxa de produção de matéria seca se manifestou, aos 58 dias após emergência, durante o período reprodutivo, decrescendo a partir dessa data.

Na avaliação de quatro cultivares de feijoeiro irrigado e sequeiro, Gomes et al. (2000), observaram maior acúmulo de biomassa aos 56 dias após a semeadura, para cultivo de sequeiro e, aos 63 dias após a semeadura, para o irrigado.

Visando avaliar o comportamento de algumas características fisiológicas no feijoeiro comum, cultivar tipo III (Pérola), na safrinha, em quatro populações de plantas, utilizando-se da análise de crescimento, Jauer et al. (2004) verificaram aumentos na matéria seca em todas as quatro densidades de semeadura. Visando a comparação de duas cultivares de feijoeiro, Andrade et al. (2005), constataram que a cultivar Ouro Negro apresentou maiores valores de acúmulo de massa seca total e da taxa de crescimento do que a cultivar Talismã; mas maior taxa

de crescimento relativo ocorreu no cultivar Talismã. Analisando o crescimento em altura das plantas do feijoeiro, nas cultivares Talismã e Ouro Negro, Vieira et al. (2008), constataram que, em plantio direto, menores alturas foram observadas na cultivar Talismã, e que, a cultivar Ouro Negro teve uma estabilização de crescimento aos 50 dias após emergência.

O comportamento dos modelos de crescimento expolinear, Gompertz e logístico foi avaliado por Moura et al. (2011), no ajuste aos dados de acúmulo de fitomassa seca das culturas do feijão-caupi e do milho, submetidos a dois tipos de sistemas de plantio, exclusivo e consorciado, nas condições climáticas do semiárido nordestino. Esses autores verificaram que os modelos apresentaram bom desempenho de ajuste e que as estimativas dos parâmetros obtidas pelo modelo expolinear sugeriram que o sistema de plantio exclusivo é mais adequado para o cultivo do feijão caupi e milho.

Lima et al. (2017) apresentaram um estudo sobre descrição do acúmulo de boro (B) em matéria seca, em diferentes densidades de semeadura para o feijoeiro, cultivar Jalo, utilizando os modelos não lineares logístico, von Bertalanffy e exponencial. Esses autores verificaram que os modelos logístico e von Bertalanffy são adequados para descrever o acúmulo de boro, em função das épocas de avaliação: 13, 23, 33, 43, 53, 63 e 73 dias após a emergência (DAE) das plantas nos sistemas de plantio convencional e em plantio direto e também, nas densidades de semeadura de 75, 215 e 355 mil plantas por hectare.

Na literatura, existem vários trabalhos que tratam de aplicações dos modelos não lineares. A seguir são descritos alguns dos modelos não lineares mais citados, ressaltando suas propriedades e aplicações.

2.4.2 Modelo Logístico

O modelo Logístico foi apresentado por Verhulst em 1838, com a finalidade de analisar o crescimento populacional humano. Posteriormente, a sua utilização foi se diversificando nas mais diversas áreas e destacando-se no estudo de crescimento animal e vegetal (BACAËR, 2011).

De acordo com Fernandes et al. (2015), esse modelo apresenta diferentes reparametrizações utilizadas para descrever curvas de crescimento. Porém, a que apresentou o melhor desempenho, devido à interpretação prática dos seus parâmetros é dada por:

$$Y_i = \frac{a}{1 + e^{-k(x_i - b)}} + \varepsilon_i \quad (2.2)$$

em que Y_i é a i -ésima observação da variável repostada, o parâmetro a definido como peso assintótico, representa a estimativa do peso máximo da planta na idade adulta ou quando atingir sua maturidade, independente de flutuações devido a efeitos genéticos e ambientais. O parâmetro k corresponde ao índice de crescimento e relaciona-se com a taxa de crescimento, indicando a eficiência do crescimento da planta ou indivíduo, de forma que quanto maior for o valor desse parâmetro, menos tempo as plantas levam para atingir a e mais precoce é a planta, x_i são as variáveis independentes. O parâmetro b está relacionado ao ponto de inflexão da curva de crescimento, sendo a idade da planta em que ela apresenta sua maior taxa de crescimento e, quando ocorre a mudança de concavidade da curva, o ε_i é o erro aleatório associado à i -ésima observação, em que $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

Esse modelo apresenta como característica uma forma sigmoideal, sendo a trajetória da curva simétrica em relação ao ponto de inflexão, o qual ocorre na idade estimada por $\hat{x}_{pi} = \hat{b}$. Neste ponto ou idade, é que ocorre a mudança de concavidade da curva e que a taxa de crescimento atinge o seu valor máximo. Além disso, tem-se que a estimativa do valor da função logística no ponto de inflexão é a metade do seu valor máximo assintótico, sendo seu estimador $\hat{y}_{pi} = \frac{\hat{a}}{2}$. No acúmulo de matéria seca de um nutriente, na idade \hat{x}_{pi} dias após à emergência das plantas, o acúmulo estimado será de $\frac{\hat{a}}{2}$.

2.4.3 Modelo Gompertz

O modelo Gompertz foi proposto por Benjamin Gompertz, em 1825, com a finalidade de estudar tábuas de vida e foi por muito tempo utilizado apenas na área atuarial. Posteriormente, passou a ser utilizado na estimação de curvas de crescimento para fenômenos biológicos e econômicos (SEBER; WILD, 2003; WINSOR, 1932).

De acordo com Fernandes et al. (2015), o modelo possui diferentes parametrizações, das quais uma que apresenta bom desempenho de ajuste e, principalmente devido à interpretação prática de todos os seus parâmetros, é dado por:

$$Y_i = ae^{-e^{-k(x_i - b)}} + \varepsilon_i \quad (2.3)$$

A interpretação dos parâmetros é a mesma definida anteriormente para o modelo logístico. O modelo Gompertz também apresenta uma curva com formato sigmoidal. Entretanto não possui simetria em relação ao ponto de inflexão, o qual possui como estimador a expressão $\hat{x}_{pi} = \hat{b}$. No ponto de inflexão, a função apresenta como estimador a expressão $\hat{y}_{pi} = \frac{\hat{a}}{e}$, onde e é base dos logaritmos neperianos, cujo o valor é menor que $\frac{\hat{a}}{2}$ do modelo Logístico.

2.5 Métodos de estimação

Existem várias métodos iterativos que são utilizados na estimação dos parâmetros de modelos não lineares, dentre mais citados na literatura de acordo com Betes e Watts (1988) e Mazucheli Achcar (2002) são os método de gradiente ou Steepest Descent, Marquardt e Gauss-Newton ou da linearização. Esses métodos consistem em procurar a convergência a partir da escolha sucessiva de valores iniciais para os parâmetros, até encontrar a convergência para os valores reais.

Segundo Souza (1998) e Mazucheli e Achcar (2002), o método Gauss-Newton é o mais utilizado devido ao seu custo computacional que é inferior aos demais, uma vez que não utiliza a hessiana da função.

2.5.1 Método iterativo Gauss-Newton

O método de Gauss-Newton, também conhecido como método da linearização, usa a expansão em série de Taylor de primeira ordem para aproximar o modelo de regressão não linear com termos lineares e, então, aplicar o método dos mínimos quadrados ordinários para estimar os parâmetros.

Para a utilização desse método, considere que $\boldsymbol{\beta}$ é uma aproximação da estimativa de mínimos quadrados $\boldsymbol{\beta}^0$ de um modelo não linear. Considerando $\boldsymbol{\beta}$ próximo de $\boldsymbol{\beta}^0$, tem-se que a expressão da série de Taylor de primeira ordem é:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) \approx f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}^0) + \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)$$

na qual $\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)$ é a matriz das derivadas parciais de primeira ordem em relação a cada parâmetro $\boldsymbol{\beta}$ do modelo. Se definir $\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta})$ como sendo um vetor de erros, tem-se que a primeira aproximação da solução para $\boldsymbol{\beta}$ pode ser obtida pela expressão:

$$\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y} - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) \approx \mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0) - \mathbf{F}^0(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0),$$

onde $\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)$. Substituindo $\mathbf{t}'(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{t}(\boldsymbol{\beta})$ em $SQR(\boldsymbol{\beta})$, temos

$$\begin{aligned} SQR(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{t}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0) \\ &\approx \left[\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) \right]' \left[\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) \right] \\ &= \left[\mathbf{t}'(\boldsymbol{\beta}^0) - (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)' \mathbf{F}'(\boldsymbol{\beta}^0) \right] \left[\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) \right] \\ &= \mathbf{t}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0) - \mathbf{t}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) - (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)' \mathbf{F}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0) \\ &\quad + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)' \mathbf{F}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0), \end{aligned}$$

como $\left(\mathbf{t}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) \right)' = (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)' \mathbf{F}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0)$, temos que

$$\begin{aligned} SQR(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{t}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0) - 2\mathbf{t}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) \\ &\quad + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)' \mathbf{F}'(\boldsymbol{\beta}^0)\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0). \end{aligned} \quad (2.4)$$

No qual, essa expressão pode ser vista como expressão matricial para a soma de quadrados de uma regressão linear simples com $(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) = \boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^0) = X$ e $\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0) = Y$.

Portanto, o $SQR(\boldsymbol{\beta})$ será minimizado quando,

$$(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) = [\mathbf{F}'^0 \mathbf{F}^0]^{-1} \mathbf{F}'^0 \mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0).$$

Assim, devido à aproximação $(\boldsymbol{\beta}^0)$, a próxima aproximação é dada por:

$$\boldsymbol{\beta}^{(0+1)} = \boldsymbol{\beta}^0 + [\mathbf{F}'^0 \mathbf{F}^0]^{-1} \mathbf{F}'^0 \mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}^0).$$

Posto isso, o processo é repetido até obtenção da convergência, ficando a critério do pesquisador pela parada estipulada por meio de algum critério, como o número máximo de iterações ou por um erro mínimo. Nem sempre a convergência é garantida, pois a escolha de valores iniciais não adequados pode acarretar problemas de convergência.

Segundo Silveira et al. (1992), os valores iniciais podem ser obtidos através de estudos anteriores, conhecimento prévio do fenômeno ou por um conjunto de valores que minimize a soma de quadrados dos resíduos, repetindo-se o processo até que o vetor de estimativas não se altere dentro da precisão pré-estabelecida.

Em Gallant (1987) e Draper e Smith (1998), pode ser visto algumas técnicas sugeridas para a obtenção de valores iniciais que podem viabilizar o processo de convergência.

2.6 Seleção de Modelos

Após a obtenção das estimativas para os parâmetros dos modelos, é necessária a escolha de critérios para selecionar os melhores ajustes, o que permite ao pesquisador comparar e selecionar o modelo que melhor descreve os dados. Dentre esses critérios, pode-se mencionar o coeficiente de determinação, coeficiente de determinação e critério de informação de Akaike (AIC).

2.6.1 Coeficiente de determinação

O coeficiente de determinação, denotado por R^2 , mensura o quanto da variabilidade total da variável resposta que é explicada pelas variáveis explicativas do modelo utilizado. Desse modo, o R^2 mede a capacidade explicativa do modelo e sua estatística (DRAPER e SMITH, 1998) é dada por:

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT}. \quad (2.5)$$

em que SQR é a soma de quadrados dos resíduos e SQT é soma de quadrados total. O R^2 assume valores que variam entre zero e um, de modo que, quanto mais próximo o valor de R^2 estiver de um 1, melhor a qualidade de ajuste do modelo, tendo-se evidências de que o modelo está bem ajustado.

2.6.2 Critério de informação de Akaike

O critério de informação de Akaike (AIC) é uma medida relativa da qualidade de ajuste de um modelo estatístico e pode ser utilizado para a comparação de modelos. Esse critério foi proposto por Akaike (1974) e é baseado na penalização dos modelos com relação ao seu número de parâmetros. Esse critério é definido como:

$$AIC = -2\ln(L(\hat{\theta})) + 2p, \quad (2.6)$$

sendo que $L(\hat{\theta})$ é a função de máxima verossimilhança do modelo, p é o número de parâmetros e \ln é operador logaritmo natural. Na comparação entre modelos, quanto menor o valor de AIC, melhor será o modelo.

3 MATERIAL E MÉTODO

3.1 Caracterização do experimento

Os dados a serem utilizados neste trabalho são provenientes de experimento realizado por Vieira (2006), na área experimental do Departamento de Agricultura (DAG), no Setor de Grandes Culturas da Universidade Federal de Lavras (UFLA), Lavras, MG, de Latossolo vermelho distrófico, originalmente sob cerrado, em duas áreas contíguas, uma em sistema de plantio direto.

O município de Lavras está situado na região Sul de Minas Gerais, a uma altitude média de 918 metros, nas coordenadas 21°14' de latitude Sul (S) e 45°00' de longitude Oeste (W). Os experimentos ocorreram na safra das águas (primavera-verão) nos anos 2006/2007 e uma das características dessa safra foi possivelmente a alta precipitação pluvial.

Segundo Vieira (2006), o experimento foi realizado em sistema de plantio convencional (PC) e em sistema de plantio direto (PD). A semeadura do sistema de plantio convencional, o preparo do solo constou de uma aração e duas gradagens. O sistema de plantio direto foi sobre palha de capim braquiária.

Na instalação do experimento, em cada sistema de plantio, foi utilizado o delineamento em blocos casualizados, com três repetições, sendo que os tratamentos foram dispostos em esquema fatorial 5x7, contendo cinco densidades de semeadura (75, 145, 215, 285 e 355 mil plantas por hectare) e sete épocas de avaliação, compreendidas entre 10, 20, 30, 40, 50, 60 e 70 dias após emergência (DAE) das plantas. Foi utilizado o cultivar de feijoeiro Jalo, o qual é de porte semiprostado, do tipo III, com crescimento indeterminado, pertencente ao grupo comercial manteigão, com peso de 100 grãos variando de 30 a 40g e, ainda, de ciclo médio (RAMALHO; ABREU, 2006).

A parcela da unidade experimental foi constituída por quatro linhas de cinco metros de comprimento, espaçadas entre si por 0,5m, com área total de 10m², sendo a área útil da parcela composta pelas duas linhas centrais, possuindo 5m².

Para se obter o acúmulo de massa seca da parte aérea ao longo do ciclo da cultura, foram realizadas medições a cada 10 dias a partir do 10° DAE. Em cada coleta foram amostradas cinco plantas da área útil da parcela, por meio de corte a um (1) centímetro do solo, sendo o material levado para secagem em estufa de circulação forçada de ar a 65-70°C, até peso constante. Em

seguida, esses materiais foram pesados em balança de precisão, determinando-se o peso de matéria seca, e transformado em acúmulo de massa por hectare em kg.ha¹.

O progresso do acúmulo de nutrientes na parte aérea ao longo do ciclo da cultura foi obtido utilizando amostras da matéria seca, trituradas e encaminhadas ao laboratório de Análise Foliar no Departamento de Ciência do Solo da UFLA, no qual foi medida a porcentagem de cada nutriente nas parcelas, as quais, foram multiplicadas pelas suas respectivas matérias secas, obtendo, assim, a quantidade de nutriente em cada parcela. Posteriormente, foram obtidos os valores observados de acúmulo de matéria seca nas diversas partes da planta, pela soma de cada parte, obtendo-se o peso de matéria seca e dos nutrientes.

Para se obter o acúmulo da evolução dos macronutrientes na parte aérea ao longo do ciclo da cultura foram utilizadas amostras da matéria seca, trituradas e encaminhadas ao laboratório de análises foliar, no Departamento de Ciência do Solo, da Universidade Federal de Lavras (DCS/UFLA), no qual foram obtidos os teores dos macronutrientes fósforo (P) e potássio (K).

3.2 Análise da variância - ANOVA

Como o maior interesse era estudar o efeito das épocas de avaliação sobre o acúmulo de potássio e fósforo no total, e descrever como esse acúmulo ocorre, em cada densidade de semeadura, realizou-se o desdobramento da interação analisando as épocas dentro de cada densidade de semeadura, sendo as análises realizadas conforme sugestão de Pimentel-Gomes (2009) e Steel, Torrie e Dickey (1997).

Os dados de acúmulo de potássio e fosforo no total foram submetidos à análise de variância para um esquema fatorial, usando-se o seguinte modelo linear:

$$y_{ijk} = \mu + b_j + dae_i + pop_k + (dae * pop)_{ik} + \epsilon_{ijk}$$

no qual,

y_{ijk} é o valor observado de acúmulo de potássio ou fósforo no j -ésimo bloco, k -ésima densidade de semeadura e i -ésima época de avaliação;

μ é uma constante inerente as observações;

b_j é o efeito do j -ésimo bloco ($j = 1, 2, 3$);

pop_k é o efeito da k -ésima densidade de semeadura ($k = 1, 2, 3, 4, 5$);

dae_i é o efeito da i -ésima época de avaliação $i = 1, 2, \dots, 7$;

$(dae * pop)_{ik}$ é o efeito de interação entre k -ésima densidade de semeadura e i -ésima época de avaliação;

ε_{ijk} é o erro experimental associado às observações y_{ijk} , com $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

Após a realização da análise da variância e para verificar sua validade, foi realizada uma análise de resíduos, com a finalidade de verificar as pressuposições de normalidade, homocedasticidade e independência dos erros. Para testar a homogeneidade de variâncias dos resíduos foi usado o teste de Bartlett (BARTLETT, 1937); para testar a normalidade dos resíduos foi utilizado o teste de Shapiro–Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965), e, para testar a independência dos resíduos, foi utilizado o teste de Durbin-Watson (DURBIN; WATSON, 1950).

Com relação análise residual da ANOVA tradicional em que os pressupostos não foram atendidos optou-se por utilizar o método não paramétrico, transformação por postos alinhados (ART). De acordo com Dos Santos et al. (2020), a ART é uma técnica de transformação por postos alinhados para a realização de análises não paramétricas para experimentos fatoriais. A transformação por postos alinhados (ART), foi proposto por Higgins e Tashtoush (1994), e fornece resultado confiável para os efeitos principais e interação.

3.3 Modelos não lineares

A modelagem do acúmulo de macronutrientes no decorrer do ciclo da cultura do feijoeiro, cv. Jalo foi realizada conforme Draper e Smith (1990) e Schambenberger e Pierce (2002), considerando modelos não lineares. Os modelos foram ajustados aos dados de acúmulos dos macronutrientes fósforo e potássio em relação à idade da planta, dada em dias após a emergência, para cada combinação de densidade de semeadura e sistema de plantio.

Os modelos não lineares Logístico (3.1) e Gompertz (3.2) utilizados na descrição de acúmulo dos macronutrientes fósforo e potássio do feijoeiro foram, respectivamente:

$$Y_i = \frac{a}{1 + e^{k(b-x_i)}} + \varepsilon_i \quad (3.1)$$

$$Y_i = ae^{-e^{k(b-x_i)}} + \varepsilon_i \quad (3.2)$$

em que Y_i é o acúmulo de potássio ou fósforo, a é acúmulo máximo; b é abscissa do ponto de inflexão; k está relacionado com crescimento ou indica o índice de maturidade, x_i é o número

de dias após a emergência, em que i representa as épocas de avaliação (10, 20, 30, 40, 50, 60 e 70 DAE) e o ε_i é o erro aleatório associado ao modelo, com $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

A análise residual é importante na modelagem dos dados caso alguma pressuposição não seja atendida. Então, a verificação dos pressuposições de normalidade, independência e homocedasticidade dos resíduos foi realizada por meio dos testes de Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagam respectivamente.

A seleção e comparação dos modelos foram realizadas utilizando os critérios AIC e R^2 . Sendo assim, o modelo que apresentou a menor estimativa para os critérios e maiores valores de coeficiente de determinação, foi considerado o mais adequado para este estudo.

3.4 Procedimentos computacionais

Inicialmente, para se ter uma ideia do comportamento de crescimento em acúmulo de matéria seca dos macronutrientes P e K foi realizada uma análise exploratória dos dados com análise gráfica e estatística descritiva. As análises da variância e seus desdobramentos, assim como os ajustes dos modelos não lineares, a estimação dos parâmetros e das pressuposições das análises estatísticas dos modelos foram realizadas usando os procedimentos específicos desenvolvidos com a utilização dos pacotes *nls*, *car*, *nlme*, *nlsmsn* (PRATES, LACHOS, GARAY, 2021), *lmtest*, *Rfit* (HLOKE; MCKEAN, 2012), *lattice*, *Rmisc* (HOPE; RYAN, 2013) e *ARTool* (KAY; WOBBROCK, 2020), do *software* livre R (R CORE TEAM, 2020).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Primeiramente, foi realizado o levantamento/verificação das informações necessárias sobre os dados, isto é, uma análise gráfica para verificar o comportamento dos dados e uma análise de variância para os efeitos e interações no estudo.

4.1 Fósforo (P)

Com relação ao acúmulo do fósforo (P) foi realizada uma análise exploratória dos dados para verificar o comportamento da distribuição. Com isso, tem-se análise descritiva e gráfica para visualizar o comportamento da variável em estudo, ao longo dos dias após à emergência (DAE) nas cinco densidade de semeadura (pop).

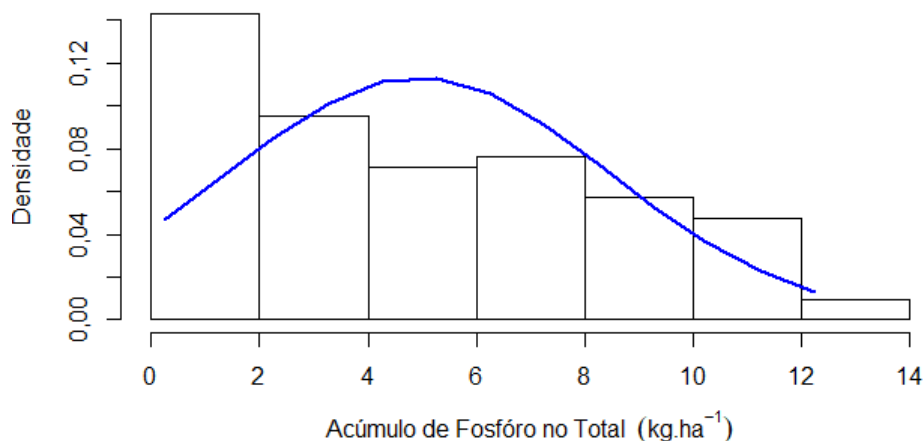
Sabe-se que a assimetria é um valor adimensional que está relacionado ao grau de afastamento da simetria de uma distribuição, assim, conseqüentemente associada a distribuição normal. Assim, é importante avaliar essa informação sobre a distribuição dos dados para determinação do grau e a intensidade de assimetria. Na Tabela 4.1 pode-se observar uma leve assimetria dos dados e um certo grau de achatamento da distribuição dos dados.

Tabela 4.1 – Estatística descritiva para o acúmulo do Fósforo.

Mínimo	Q1	Q2	Média	Q3	Máximo	Assimetria	Curtose
0,25	1,75	4,13	4,92	7,60	13,21	0,48	2,03

Para uma melhor visualização dos dados usou-se um recurso gráfico. No caso, esse recurso foi o histograma com a curva normal para o acúmulo de P no total do feijoeiro, o qual está apresentado na Figura 4.1.

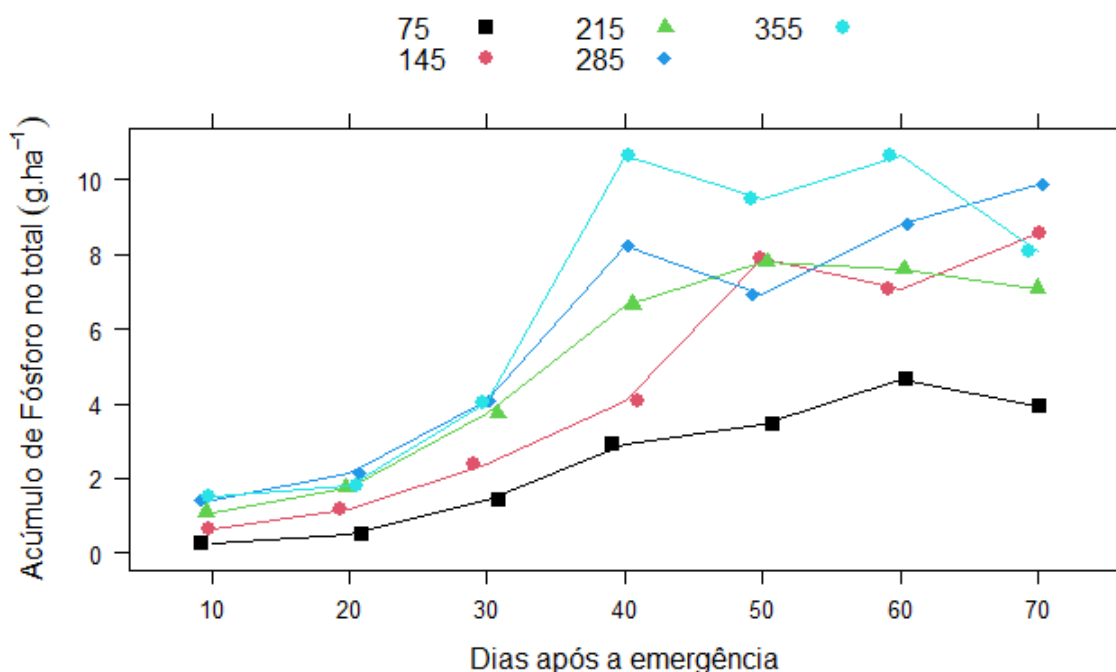
Figura 4.1 – Histograma para o acúmulo do P no total do feijoeiro.



Por meio da Figura 4.1, observou-se que a distribuição dos dados tem uma assimetria positiva. No entanto, pode-se perceber que na assimetria positiva, os valores mais baixos são os mais frequentes e a longa cauda à direita puxa a média em sua direção.

Os valores médios do acúmulo de P, mostrados na Figura 4.2, sugerem um comportamento sigmoidal do acúmulo Fósforo em relação aos dias após à emergência em cada densidade de semeadura, dando indicativo para o uso de modelos não lineares, como o Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e outros, com a finalidade de estimar, por exemplo, o acúmulo máximo ou peso máximo.

Figura 4.2 – Representação gráfica dos valores médios do acúmulo de Fósforo Total do feijoeiro.



A visualização gráfica de tal comportamento (Figura 4.2) corrobora com Lima et al. (2019) que também observaram um comportamento em forma de sigmoide para biomassa seca do feijoeiro cv. Jalo. De acordo com Pegoraro (2014), o comportamento não linear para absorção de P demonstra a necessidade de suprimento contínuo desse elemento à planta.

4.1.1 Análise de variância

A análise de variância (ANAVA) do total de acúmulo de fósforo está apresentada na Tabela 4.2. Por meio dessa ANOVA verificou-se efeito significativo para a interação entre densidade populacional (pop) e dias após a emergência (DAE). Porém, para tal afirmação existe a necessidade da verificação dos pressupostos da ANAVA.

Tabela 4.2 – Análise de variância para acúmulo de Fósforo.

	Gl	SQ	QM	F	valor-p
bloco	2	7,69	3,84	1,54	0,2226
pop	4	213,79	53,45	21,36	< 0,001
dae	6	788,92	131,49	52,54	< 0,001
pop*dae	24	108,81	4,53	1,81	0,0295
resíduo	68	170,16	2,50		

Os resultados dos testes aplicados na verificação dos pressupostos da análise de variância relativos à normalidade, homogeneidade podem ser vistos na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Estatísticas e respectivos valores-p dos testes de normalidade (Shapiro - Wilk - SP), homogeneidade de variância (Bartlett - BART) e independência (Durbin - Watson - DW) para acúmulo de Fósforo.

	SP	BART	DW
Estatística	0,98	43,56	0,84
valor-p	0,09	< 0,001	< 0,001

Pela Tabela 4.3 tem-se a violação dos pressupostos de homogeneidade de variância e independência residual. A rejeição da hipótese de independência residual, provavelmente, deve estar ligada ao método de amostragem realizado durante o experimento, pois de uma avaliação para outra, a amostragem é feita em parcelas distintas e além disso, em experimentos desse tipo as amostras são destrutivas.

Portanto os pressuposto da ANAVA de homogeneidade de variância e independência residual não foram atendidos. Dessa forma, optou-se por utilizar método não paramétrico, transformação por postos alinhados (ART) como pode ser visto na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Análise de variância do acúmulo de Fósforo após a transformação por postos alinhados.

	SQ	Gl	F	valor-p
bloco	1378,13	2	0,51	0,60
pop	55044,67	4,00	23,25	< 0,001
dae	75818,40	6,00	42,62	< 0,001
pop*dae	40302,46	24,00	2,05	0,01

Como pode ser visto na Tabela 4.4 foi usada alternativa não paramétrica com a transformação por posto alinhados. Assim, verificou-se que a interação entre densidade e dias após emergência é significativa, bem como outras fontes de variação estudada. Isto significa que, existe um efeito de dependência entre densidade de semeadura e dias após a emergência, ou seja, esses efeitos não ocorrem de forma independente no acúmulo de P.

4.1.2 Ajuste dos modelos não lineares

Com a finalidade de avaliar o crescimento do feijoeiro em acúmulo de fósforo, procedeu-se o desdobramento da interação entre *dae* x *pop*, analisando-se o efeito de *dae* em cada *pop* ajustando os modelos Logístico e Gompertz. Diversos autores usaram esses modelos como Muianga et al. (2016), ajustaram modelos Gompertz e Logístico para avaliar os dados do crescimento em comprimento e largura do fruto do cajueiro, considerando erros independentes e com estrutura autoregressiva e concluíram que os modelos Logístico e gompertz apresentaram erros dependentes para os dados de comprimento (cm) e largura (cm) e ainda o modelo Logístico com uma estrutura autoregressiva da primeira ordem descreveu o crescimento dos frutos de cajueiro com bons indicadores de qualidade de ajuste. Ribeiro et al. (2018), ajustaram modelos Logístico e Gompertz para avaliar o crescimento e no desenvolvimento de frutos de pequi e os autores concluíram que os modelos Gompertz e Logístico foram os que melhor descreveram as variáveis, sendo o Gompertz o mais indicado para descrever os dados de diâmetro e de massa. Lima et al. (2019), ajustaram os modelos Logístico, Von Bertalanffy e exponencial para avaliar o acúmulo de boro(B) em matéria seca no feijoeiro e esses autores concluíram que os modelos Logístico e von Bertalanffy são adequados para descrever o acúmulo de boro.

Os pressupostos dos modelos foram verificados para cada densidade de semeadura, ou seja, foram avaliadas a normalidade residual utilizando o teste de Shapiro-Wilk (SW), homogeneidade de variância com o teste de Breusch-Pagan (BP) e independência residual com o teste de Durbin-Watson (DW). Na Tabela 4.5 tem-se as estimativas e os respectivos valores-p para os testes.

Tabela 4.5 – Estatísticas e respectivos valores-p dos testes de normalidade (SW), de homoscedasticidade (BP) e independência (DW) para os modelos Logístico (L) e Gompertz (G).

Densidade	Modelo	SW	valor-p	BP	valor-p	DW	valor-p
75	L	0,915	0,434	4,392	0,111	3,238	0,851
75	G	0,980	0,933	3,931	0,140	2,792	0,618
145	L	0,940	0,640	5,713	0,058	3,297	0,873
145	G	0,910	0,620	4,061	0,132	2,918	0,650
215	L	0,933	0,579	0,367	0,835	1,403	0,080
215	G	0,931	0,561	0,346	0,842	0,845	0,060
285	L	0,991	0,980	4,871	0,088	2,970	0,649
285	G	0,961	0,780	3,760	0,153	3,020	0,677
355	L	0,928	0,535	2,564	0,277	1,370	0,197
355	G	-	-	-	-	-	-

Verifica-se na Tabela 4.5, que os pressupostos de normalidade residual, homogeneidade e independência foram atendidas. Além disso, pode-se observar que não ocorreu convergência do algoritmo para o modelo Gompertz na densidade 355, pois uma possibilidade de não convergência é que o comportamento do P está mais para o modelo logístico e outro fato é que o algoritmo não conseguiu encontrar um máximo local. Com isso, ajustou-se os modelos Logístico e Gompertz para cada densidade de semeadura que ocorreu a convergência. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Estimativas e critérios de seleção para o modelo Logístico e Gompertz ajustados para o acúmulo de fósforo do feijoeiro nas densidades de semeadura.

Densidade	Modelo	a	b	k	R^2	AIC
75	L	4,280	35,120	0,129	0,973	9,038
75	G	4,451	30,639	0,083	0,967	10,449
145	L	8,562	38,320	0,115	0,962	20,540
145	G	9,527	34,186	0,061	0,952	22,287
215	L	7,657	28,777	0,141	0,976	15,298
215	G	7,841	24,274	0,092	0,954	19,847
285	L	9,492	30,748	0,098	0,930	25,180
285	G	10,492	26,149	0,054	0,928	25,349
355	L	9,732	30,585	0,546	0,900	30,318
355	G	-	-	-	-	-

Pelos valores obtidos para o parâmetro a apresentado na Tabela 4.6 é plausível analisar que a ocorrência de uma aumento da densidade existe um possível aumento do acúmulo gradativo do componente fósforo ao longo do ciclo de vida do feijoeiro e, assim, corroborando o resultado obtido na pesquisa de Vieira et al. (2008).

Pela Tabela 4.6 observou-se que não ocorreu de uma superestimação na estimativa do acúmulo máximo de fósforo (a) e na abscissa associada ao ponto de inflexão (b) para ambos os modelos. Além disso, pode-se observar que a estimativa do parâmetro b ocorre mais precoce para o modelo Gompertz.

De acordo com Amaro et al (2014), a densidade de semeadura da planta é influenciada por vários fatores, dentre esses fatores pode-se destacar a arquitetura e o hábito de crescimento da planta. Outro fator importante que os autores ressaltam é o nível de competição e o período do desenvolvimento que isso se intensifica entre as plantas. Assim a competição por nutrientes pode influenciar diretamente no acúmulo de micronutriente e macronutriente.

Com relação ao acúmulo máximo (a), pode-se analisar que o acúmulo máximo de fósforo variou entre 4 a 10,50 $kg.ha^{-1}$. Pode-se observar que as densidade 145, 285 e 355 apre-

sentam os maiores acúmulos. Segundo Fageria, Barbosa Filho e Stone (2004), o acúmulo de nutrientes pode ser usado como parâmetro de extração de nutrientes no solo em futuros sistemas de recomendação de adubação. De acordo Pegararo (2014), as fases de maior demanda e acúmulo de nutrientes no feijoeiro podem ser indicado pela marcha de absorção de nutrientes.

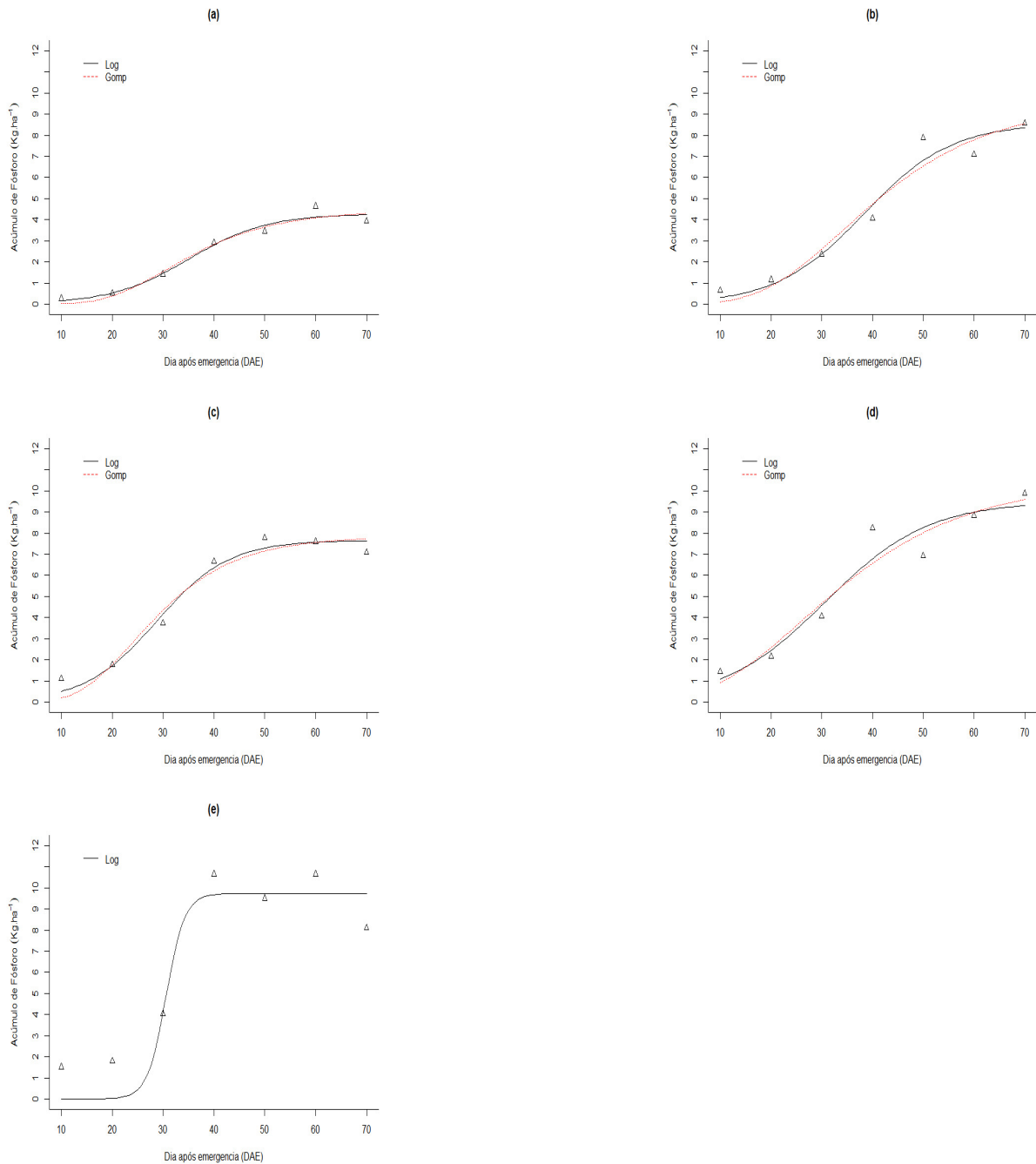
Já com relação à abscissa associado ao ponto de inflexão (b), pode-se analisar uma variação entre 24 a 38,5 dias após a emergência para o modelo Logístico. Além disso, observa-se que no modelo Gompertz esse ponto ocorre na idade inferior em comparação com o modelo Logístico, pelo fato de não ser simétrico em torno desse ponto.

A taxa de maturidade k teve alta variação considerando as diferentes densidades de semeadura entre 0,10 a 0,55 para o modelo Logístico. Já para o Gompertz, essa variação foi menor relativamente a metade e teve uma variação entre 0,05 a 0,09.

Inicialmente pode-se comparar e discutir rapidamente sobre as diferenças entre os dois modelos. Para a escolha entre os modelos Logístico e Gompertz, observou-se os maiores valores de R^2 e o menores valores de AIC que estão apresentados na Tabela 4.6. Ademais, retirou-se da seleção o modelo Gompertz da densidade de semeadura 355, pois apresentou problema com a convergência do algoritmo. O modelo Logístico apresentou os menores valores de AIC e maiores valores de R^2 para todas as densidades de semeadura. Assim, foi o modelo selecionado para o estudo do acúmulo de fósforo.

Os valores de acúmulo de fósforo e as curvas ajustadas desse acúmulo em função dos dias após a emergência para cada densidade de semeadura podem ser visualizado na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Representação gráfica do acúmulo de fósforo e ajuste do modelo Logístico e Gompertz ao longo do ciclo de vida em função da densidade de semeadura 75 (a), 145 (b), 215 (c), 285 (d), 355 (e).



Como pode ser observado nas Figura 4.3, o acúmulo do macronutriente P do feijoeiro apresentou um comportamento sigmoide, dando um indicativo que os acúmulos máximo de macronutriente no feijoeiro ocorreram na fase de maturidade fisiológica, caracterizando o feijoeiro como uma planta que absorve nutriente até o final do seu ciclo de cultivo.

De acordo com Zucareli et al (2006), apesar da importância do suprimento de P nas fases iniciais é necessário também que o elemento esteja disponível à plantas nas fases posteriores.

Conforme Vieira et al (2009), que avaliaram o acúmulo e o desempenho agrônômico de cultivares de feijoeiro comum em diferentes densidades populacionais e sistema de cultivo, observaram que o máximo do acúmulo do macronutriente ocorreu ao final do ciclo de cultivo, como pode ser visto na Figura 4.3.

4.2 Potássio (K)

Uma análise exploratória dos dados foi realizada para verificar o comportamento da distribuição dos dados do acúmulo de potássio. Com isso, tem-se análise descritiva e gráfica para uma visualização do comportamento da variável em estudo.

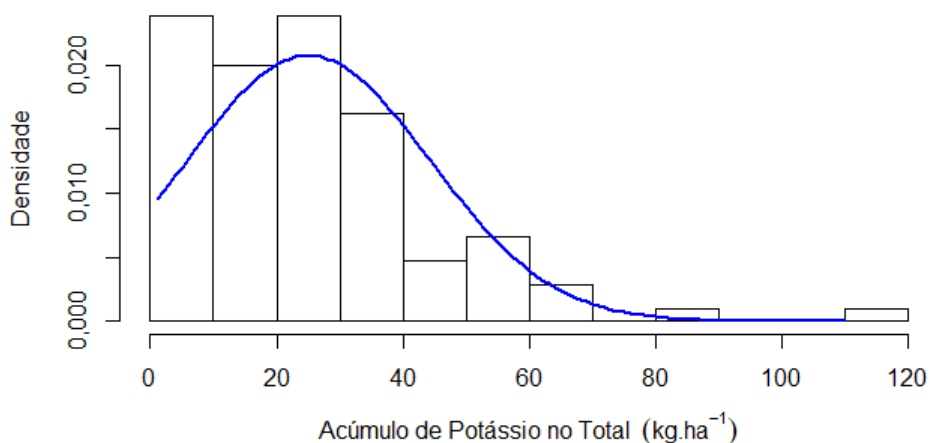
Pela Tabela 4.7 pode-se observar que o valor de assimetria indica uma leve assimetria positiva. Assim, tem-se um certo distanciamento da distribuição normal. Além disso, comparado com fósforo, tem-se que o acúmulo máximo de potássio foi bem superior.

Tabela 4.7 – Estatística descritiva para o acúmulo do Potássio.

Mínimo	Q1	Q2	Média	Q3	Máximo	Assimetria	Curtose
1,05	10,20	22,29	25,07	35,38	110,07	1,42	6,15

Para uma melhor visualização dos dados usou-se um recurso gráfico. O histograma com a curva normal para o acúmulo de K no total do feijoeiro está apresentado na Figura 4.5.

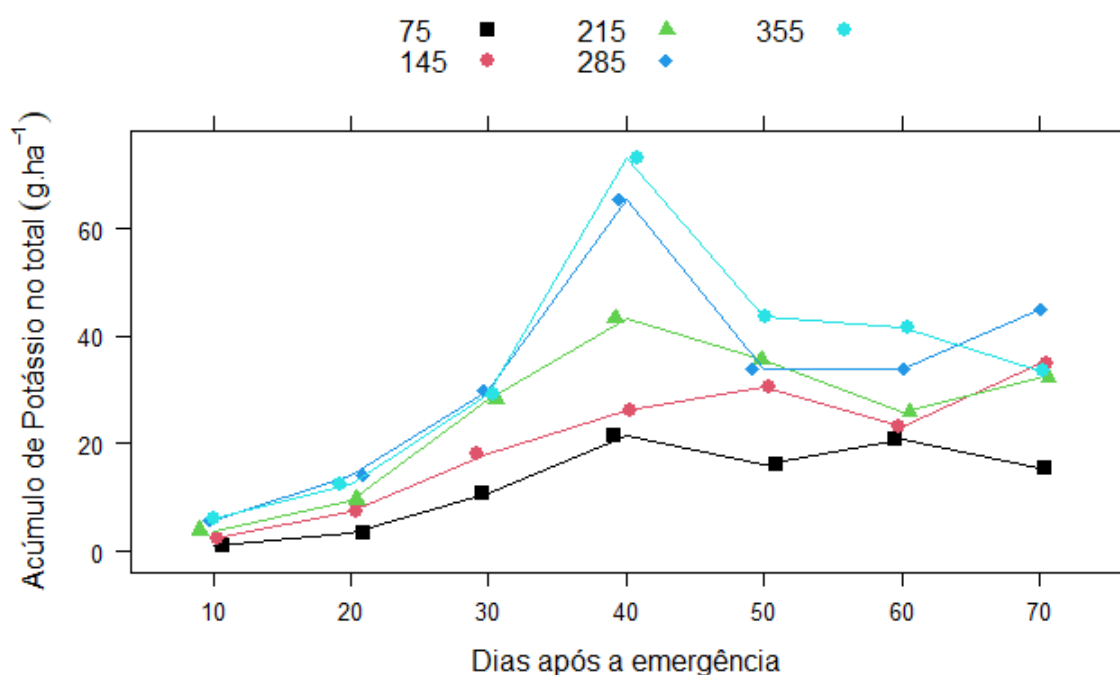
Figura 4.4 – Histograma para o acúmulo do K no total do feijoeiro



Na Figura 4.4 observa que a distribuição dos dados tem uma assimetria, dando indicativo para a distribuição não normal. Assim, nota-se que a existência de um agrupamento dos dados nos valores mais baixos deixando a distribuição dos dados assimétrica.

Os valores médios do acúmulo de K, mostrados na Figura 4.5, sugerem um comportamento sigmoidal do acúmulo potássio em relação aos dias após à emergência em cada densidade de semeadura, dando indicativo para o uso de modelos não lineares. Ainda com relação à abscissa associado ao ponto de inflexão (b), pode-se analisar uma variação entre 20 a 28 dias após a emergência. Além disso, observa-se no modelo Gompertz esse ponto ocorre um pouco antes do que no Logístico, pelo fato de não ser simétrico em torno desse ponto.

Figura 4.5 – Representação gráfica dos valores médios do acúmulo de Potássio Total do feijoeiro.



Na Figura 4.5 pode-se observar um comportamento não linear para a variável em estudo, assim como aconteceu para a variável acúmulo de fósforo, corroborando os resultados apresentados por Lima et al. (2019).

4.2.1 Análise de variância

A análise de variância (ANAVA) do acúmulo total de potássio está apresentada na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Análise de variância do acúmulo de Potássio total.

	Gl	SQ	QM	F	valor-p
bloco	2	302,45	151,23	1,21	0,3055
pop	4	6606,85	1651,71	13,18	< 0,001
dae	6	18715,11	3119,18	24,89	< 0,001
pop*dae	24	4324,81	180,20	1,44	0,1235
resíduos	68	8522,85	125,34		

Pela Tabela 4.8 verificou-se que não existe efeito de interação entre densidade populacional de semeadura (pop) e os dias após emergência, ou seja, os efeitos possivelmente atuam de forma independentes. Assim, como os efeitos principais foram significativos, estes foram estudados de forma independente e por serem de natureza quantitativo utiliza-se a regressão. Neste estudo foram usado os modelos não lineares. Porém, para tal afirmação existe a necessidade da verificação dos pressuposto da ANOVA.

Os resultados dos testes utilizados na verificação dos pressupostos da análise de variância relativos à normalidade, homogeneidade estão apresentados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Estatísticas e respectivos valores-p dos testes de normalidade (Shapiro -Wilk - SP), homogeneidade de variância (Bartlett - BART) e independência (Durbin-Watson - DW) para o acúmulo de potássio.

	SP	BART	DW
Estatística	0,88	83,18	1,47
valor-p	< 0,001	< 0,001	< 0,001

A partir dos resultados da Tabela 4.9 observou-se a violação dos pressupostos de normalidade, homogeneidade de variância e independência residual. A rejeição da hipótese de independência residual, provavelmente, deve está ligada ao método de amostragem realizado durante o experimento, pois de uma avaliação para outra, a amostragem é feita em parcelas distintas e além disso, em experimentos desse tipo as amostras são destrutivas.

Os pressupostos da ANOVA não foram atendidos. Dessa forma, optou-se por utilizar método não paramétrico, transformação por posto alinhados (ART) como pode ser visto na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Análise de variância do acúmulo de Potássio após a transformação por postos alinhados.

	SQ	Gl	F	valor-p
bloco	1438,46	2	0,54	0,59
pop	53873,52	4	22,57	< 0,001
dae	69969,47	6	32,16	< 0,001
pop*dae	38041,28	24	1,92	0,02

Como pode ser visto na Tabela 4.10 foi usada uma alternativa não paramétrica com a transformação por posto alinhados. Assim, verificou-se que a interação entre densidade e dias após emergência é significativa, bem como outras fontes de variação estudada. Isso significa que, existe um efeito de dependência entre densidade de semeadura e dias após a emergência, ou seja, esses efeitos não ocorrem de forma independente no acúmulo de K.

4.2.2 Ajuste dos modelos não lineares

Com a finalidade de avaliar o crescimento do feijoeiro em acúmulo de Fósforo, procedeu-se o desdobramento da interação entre dae x pop, analisando-se o efeito de dae em cada pop e ajustando os modelos Logístico e Gompertz.

Os pressupostos dos modelos foram verificados para cada densidade de semeadura, ou seja, foram avaliados a normalidade residual utilizando o teste de Shapiro-Wilk (SW), homogeneidade de variância com o teste de Breusch-Pagan (BP) e independência residual com o teste de Durbin-Watson (DW). Na Tabela 4.11 tem-se as estatísticas e os respectivos valores-p dos testes.

Tabela 4.11 – Estatísticas e respectivos valores-p dos testes de normalidade (SW), de homoscedasticidade (BP) e independência (DW) para os modelos Logístico e Gompertz.

Densidade	Modelo	SW	valor-p	BP	valor-p	DW	valor-p
75	L	0,951	0,738	4,112	0,128	3,152	0,932
75	G	0,935	0,592	2,566	0,277	3,197	0,937
145	L	0,855	0,137	3,715	0,156	2,883	0,671
145	G	0,878	0,219	3,514	0,173	2,899	0,669
215	L	0,959	0,813	1,512	,469	1,850	0,315
215	G	0,975	0,932	1,247	0,536	1,925	0,466
285	L	0,858	0,146	1,341	0,511	2,666	0,734
285	G	0,867	0,175	0,893	0,639	2,700	0,819
355	L	0,873	0,198	1,209	0,546	2,150	0,482
355	G	0,880	0,226	0,818	0,664	2,263	0,607

Pode-se analisar pela Tabela 4.11, que as densidades não apresentaram problema com os pressupostos. Além disso, pode-se observar que ocorreu convergência do algoritmo para os modelos em todas as densidades de semeadura. Com isso, ajustou-se os modelos Logístico e Gompertz para cada densidade de semeadura, os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 – Estimativas e critérios de seleção para o modelo Logístico e Gompertz ajustados para o acúmulo de potássio do feijoeiro nas densidades de semeadura.

Densidade	Modelo	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>k</i>	R^2	AIC
75	L	18,468	27,585	0,257	0,901	39,802
75	G	18,471	24,127	0,169	0,887	40,753
145	L	29,934	27,145	0,149	0,919	43,885
145	G	30,976	23,073	0,093	0,917	44,075
215	L	34,003	23,349	0,272	0,852	50,436
215	G	33,812	21,077	0,241	0,844	50,788
285	L	43,680	23,643	0,226	0,672	60,617
285	G	43,359	21,004	0,197	0,656	60,940
355	L	47,071	25,340	0,250	0,647	62,898
355	G	46,533	22,040	0,200	0,629	63,234

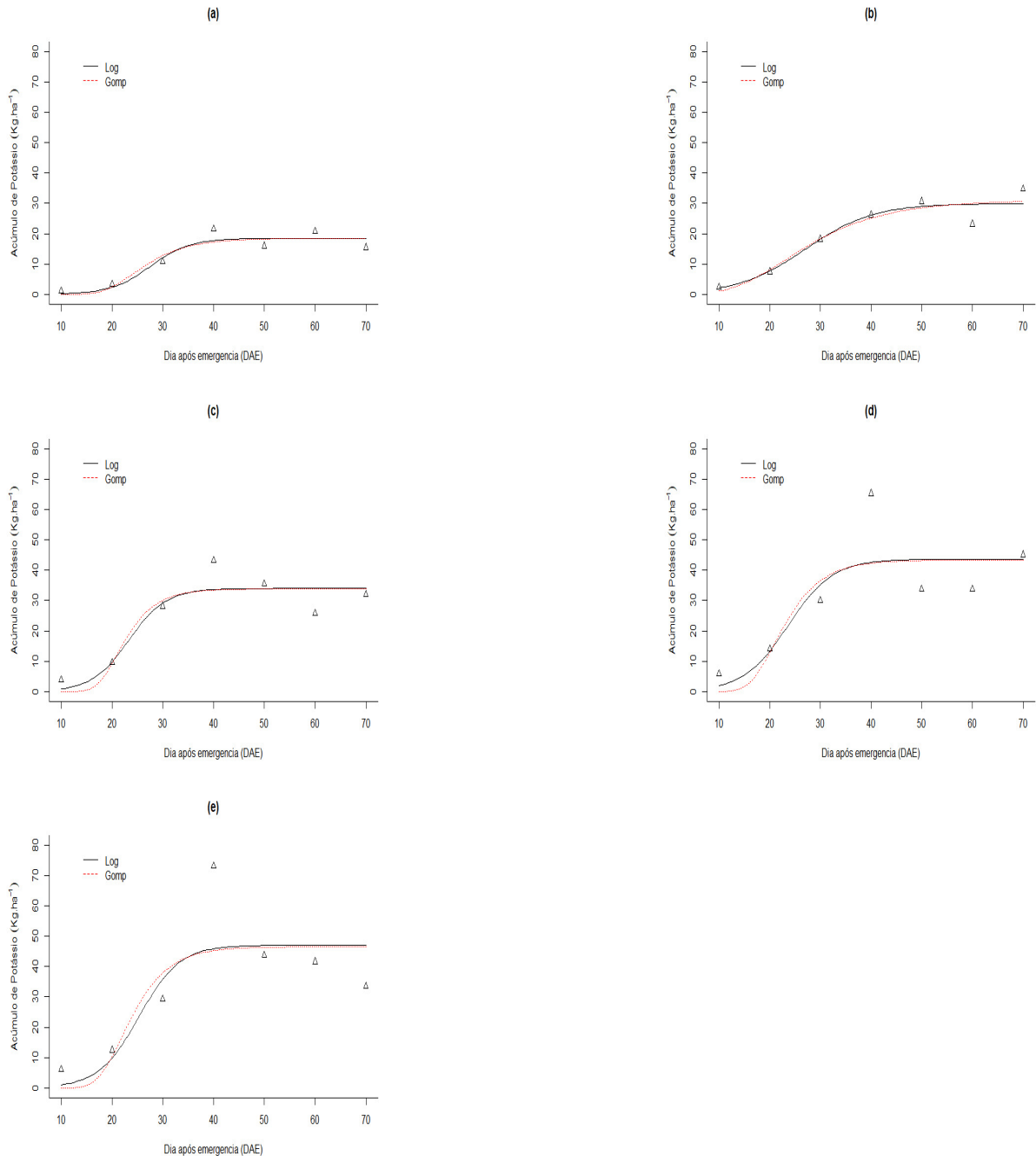
Na Tabela 4.12 pode-se observar que o acúmulo máximo de potássio variou entre 18 a 47 $kg.ha^{-1}$. Pode-se observar também que as densidade 285 e 355 apresentam os maiores acúmulos. Além disso, tem-se que o acúmulo teve uma ganho gradativo ao longo da densidade de semeadura, ou seja, quanto maior a densidade de semeadura, maior o acúmulo de K. Assim possivelmente existem pouca competição entre as plantas.

Esse resultado difere do encontrado em Gomes et al. (2000), que encontrou um período que varia entre 63 a 70 dias após emergência (DAE), em que ocorrem os maiores acúmulo de nutrientes no feijoeiro.

A taxa de maturidade ou taxa de crescimento *k* teve alta variação considerando as diferentes densidades de semeadura entre 0,09 a 0,28.

Os valores de acúmulo de Potássio e as curvas ajustadas desse acúmulo em função dos dias após a emergência para cada densidade de semeadura podem ser visualizado nas Figuras 4.6. Pela análise visual dos gráficos observa-se que os dois modelos ajustaram-se bem aos dados, sendo o modelo Logístico o mais adequado para descrever o acúmulo de Potássio.

Figura 4.6 – Representação gráfica do acúmulo de Potássio e ajuste do modelo Logístico e Gompertz ao longo do ciclo de vida em função da densidade de semeadura 75 (a), 145 (b), 215 (c), 285 (d) e 355 (e).



Ainda na Figuras 4.6 pela visualização gráfica, a densidade 75 (a) teve menor incremento de acúmulo de Potássio entre 10 e 20 $kg.ha^{-1}$ e teve um crescimento lento entre 10 a 20 dias após emergência (DAE). Ainda, a medida que aumenta as densidades de semeadura, o acúmulo de potássio aumenta ao longo dos dias após a emergência. Na densidade 355 (e)

pode-se perceber que teve maior incremento de acúmulo de potássio entre 10 a 40 $kg.ha^{-1}$ e teve crescimento rápido entre 10 a 30 (DAE).

5 CONCLUSÃO

Os modelos Logístico e Gompertz são adequados para descrever o acúmulo de potássio e fósforo em sistema de plantio direto e nas cinco densidades de semeadura (75, 145, 215, 285 e 355 mil plantas por hectares). Entretanto, o modelo Logístico apresentou melhores propriedades de ajuste que o modelo Gompertz. Além disso, no modelo Gompertz para a densidade 355 no fósforo não houve convergência do algoritmo, na estimação dos parâmetros, ou seja, não se ajustou aos dados de acúmulo de Fósforo.

O acúmulo máximo de fósforo estimado pelo modelo Logístico foram 4,28, 8,56, 7,66, 9,49 e 9,73 $kg.ha^{-1}$, nas densidade de semeadura 75, 145, 215, 285 e 355 mil plantas por hectare, respectivamente. Já para o máximo de Potássio os valores foram 18,468, 29,934, 34,003, 43,680 e 47,071 $kg.ha^{-1}$, para as densidades 75, 145, 215, 285 e 355 mil plantas por hectare, respectivamente.

REFERÊNCIAS

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**., Boston, v.19, n.6, p.716-723, Dec. 1974.

ACHIM ZEILEIS; TORSTEN HOTHORN. **lmtest**: Diagnostic Checking in Regression Relationships.[S.l.: s.n.], 2002. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/>>. Acesso em: 17 set. 2020.

AMARO, H. T. R. et al. Qualidade fisiológica de sementes de cultivares de feijão em função de densidades populacionais. **Semina: Ciências Agrárias**, v. 35, n. 3, p. 1241–1248, 2014.

ANDRADE, C. A. B. et al. Produção de matéria seca total, taxa de crescimento absoluto e taxa de crescimento relativo de duas cultivares de feijão. In: CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA DE FEIJÃO, 8., 2005, Goiânia. **Anais**. Goiânia: Embrapa Arroz e Feijão, v. 2, p. 835-838, 2005.

AGROLINK - Disponível em: <<http://www.agrolink.com.br>>. Acesso em: 02 jun. 2020.

BARTLETT, M. S. Properties of sufficiency and statistical tests. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A**, London, v. 160, n. 901, p. 268-282, May 1937.

BACAËR, N. Verhulst and the logistic equation (1838). **A short history of mathematical population dynamics**. Bondy: Springer, 2011. p. 35-39.

BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John Wiley, 1988. 365 p.

COUTINHO, P. W. R. et al. Doses de fósforo na cultura do feijão-caupi na região nordeste do Estado do Pará. **Revista Agro@ mbiente On-line**, v. 8, n. 1, p. 66-73, 2014.

CONAB – Companhia Nacional de Abastecimento. Acompanhamento da safra brasileira de grãos 2020/2021. 2020. Disponível em: <https://www.conab.gov.br/> Acesso em: 25 nov. 2020.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied Regression Analysis**. 3 ed. New York: John Wiley. 706 p, 1998.

DA CUNHA, A. L. B. et al. Nutrient uptake rate for yard long bean. **Horticultura Brasileira**, v. 38, n. 2, p. 175-184, 2020.

DOS SANTOS, C. X. et al. Transformação dos dados por postos alinhados em experimento de avaliação da qualidade do extrato de tomate. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 11, p. 92137-92148, 2020.

DURBIN, J.; WATSON G. S. Testing for serial correlation in least squares regression I. **Biometrika**, London, v.37, n.3-4, p.409-428, Dec. 1950.

EPSTEIN, Emanuel et al. **Mineral nutrition of plants: principles and perspectives**.1972.

FAGERIA, N. K.; BARBOSA FILHO, M. P.; STONE, L. F. Nutrição de fósforo na produção de feijoeiro. In: YAMADA, T.; ABDALLA, S.R.S. (Ed.). **Fósforo na agricultura Brasileira**. Piracicaba: Associação Brasileira para Pesquisa da Potassa e Fosfato, Cap. 17, p. 435-455, 2004.

FERNANDES, T. J. et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, Lavras, v. 9, n. 2, p. 207–215, 2014.

FERNANDES, T. J. et al. Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum Technology**, Maringá, v. 37, n. 4, p. 397–402, 2015.

FREITAS, A. R. Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira Zootecnia**, v. 34, n. 3, p. 786–795, 2005.

GALLANT, A. R. **Nonlinear statistical models**. New York: John Wiley & Sons, 1987. v. 610.

GRANT, C. A. et al. The importance of early season phosphorus nutrition. **Canadian Journal of Plant Science**, v. 81, p. 211-224, 2001.

GALVÃO, J. R., et al. Sistemas de manejo e efeito residual do potássio na produtividade e nutrição do feijão-caupi. **Revista Caatinga**, 2013, 26.2: 41-49.

GOMES, A. A. et al. Acumulação de biomassa, características fisiológicas e rendimento de grãos em cultivares de feijoeiro irrigado e sob sequeiro. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 35, n. 10, p. 1927-1937, 2000.

HIGGINS, JAMES J.; TASHTOUSH, SULEIMAN. An aligned rank transform test for interaction. **Nonlinear World**, v. 1, n. 2, p. 201-211, 1994.

JAUER, A. et al. Análise de crescimento do cultivar de feijão Iraí em quatro densidades de semeadura. **Pesquisa Agropecuária Gaúcha**, Porto Alegre, v.10, n.1-2, p.23-33, 2004.

KAMINSKI, J. et al. Depleção de formas de potássio do solo afetada por cultivos sucessivos. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Viçosa, MG, v. 31, p. 1003-1010, 2007.

KAY M.; Wobbrock J. **ARTool**: Aligned Rank Transform for Nonparametric Factorial ANOVAs. [S.l.: s.n.], 2020. Disponível em: <<https://github.com/mjskay/ARTool>>. Acesso em: 18 jan. 2021.

KLOKE, J. D.; MCKEAN, J. W. **Rfit**: Rank-based estimation for linear models. [S.l.: s.n.], 2012. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=Rfit>>. Acesso em: 20 jan. 2021.

LACERDA, C. F., et al. Análise de crescimento de milho e feijão sob diferentes condições de sombreamento. **Revista Brasileira de Ciências Agrárias**, Recife, 5.1: 18-24, PB, 2010.

LIMA, K. P. et al. Uso de modelos não lineares na descrição do acúmulo de boro em diferentes partes do feijoeiro cultivar jalo. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 35, n. 4, p. 834-861, 2017.

LIMA, K. P. et al. Modelagem não linear da biomassa seca do feijoeiro cv. Jalo. **Sigmae**, v. 8, n. 2, p. 359-369, 2019.

MARTINS, P. H. M, et al. Análise de Crescimento do feijoeiro a diferentes manejos de adubação nitrogenada na região do cerrado. **Revista Agrotecnologia**, Ipameri, v. 8, n. 1, p. 63-70, 2017.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não linear. **Acta Scientiarum**, v. 24, n. 6, p. 1761–1770, 2002.

MESQUITA, A. C.; OLIVEIRA, LEM de; FREITAS, RB de. **Análise de crescimento de plantas**. Lavras, MG: Universidade Federal de Lavras. Departamento de Biologia. Setor de Fisiologia Vegetal, p. 1-9, 2002.

MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. **Introduction to linear regression analysis (Wiley Series in Probability and Statistics)**. 5. ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2012.

MOURA, M. S. B. de; SOUZA, L. S. B. de; SILVA, T. G. F. da; SOARES, J. M.; CARMO, J. F. A. do; BRANDÃO, E. O. Modelos de crescimento para o feijão-caupi e o milho, sob sistemas de plantio exclusivo e consorciado, no Semiárido brasileiro. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, v.16, n. 3, p.275-284, abr. 2011.

MINISTÉRIO DA AGRICULTURA, PECUÁRIA E ABASTECIMENTO. **Feijão**. Brasília: MAPA, 2015. Disponível em: <[http:// www.agricultura.gov.br/vegetal/culturas/feijao/saiba-mais](http://www.agricultura.gov.br/vegetal/culturas/feijao/saiba-mais)>. Acesso em: 12 nov. 2019.

MISCHAN, M.; PINHO, S. **Modelos não lineares: funções assintóticas de crescimento**. 1.ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014. 184 p.

MUIANGA, C. A. et al. Descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro por modelos não lineares. **Revista Brasileira de Fruticultura**, v. 38, n. 1, p. 22–32, 2016.

MATTOS, T. B. **Modelos Não Lineares e suas Aplicações**. 2013. 58 f. Monografia (Especialização) - Curso de Estatística, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

MEIRELES, E.J.L.; VIEIRA, E.H.N.; SILVA, S. C. **Clima e produção de sementes**. Sementes de feijão: produção e tecnologia. Santo Antônio de Goiás: EMBRAPA, 53-63, 2000.

OLIVEIRA, L. F. C. et al. Conhecendo a fenologia do feijoeiro e seus aspectos fitotécnicos. **Embrapa Arroz e Feijão-Livro técnico (INFOTECA-E)**, Brasília, DF; p.59, 2018.

PRAZERES, S. S. et al. Crescimento e trocas gasosas de plantas de feijão-caupi sob irrigação salina e doses de potássio. **Revista Agro@ mbiente On-line**, v. 9, n. 2, p. 111-118, 2015.

PIMENTEL-GOMES, F. **Curso de estatística experimental**. 15. ed. Piracicaba: FEALQ, 2009. 451 p.

PRATES, M.; LACHOS, V.; GARAY, A. **nlsmsn: Fitting Nonlinear Models with Scale Mixture of Skew-Normal Distributions**. [S.l.: s.n.], 2021. Disponível em:<<https://CRAN.R-project.org/package=nlsmsn>>. Acesso em: 14 out. 2020.

PEGORARO, R. F. et al. Partição de biomassa e absorção de nutrientes pelo feijoeiro comum. **Revista Caatinga**, v. 27, n. 3, p. 41-52, 2014.

PASTORINI, L. H.; BACARIN, M. A.; LOPES, N. F.; LIMA, M. G. S. Crescimento inicial de feijoeiro submetido a diferentes doses de fósforo em solução nutritiva. **Revista Ceres**, v. 47, n. 270, p. 219-228, 2000.

RAMALHO, M. A. P.; ABREU, A. F. B. Cultivares. In: VIEIRA, C.; PAULA JÚNIOR, T. J.; BORÉM, A. **Feijão**. 2. ed. Viçosa: Editora da UFV, p. 415-436, 2006.

RAMALHO, M. A. P.; ABREU, A. de F. B.; SANTOS, J. B. dos; CARNEIRO, J. E. de S.; MELO, L. C.; PAULA JÚNIOR, T. J. de; PEREIRA, H. S.; MARTINS, M.; PEREIRA FILHO, I. A.; MOREIRA, J. A. A.; DEL GIÚDICE, M. P.; VIEIRA, R. F.; DEL PELOSO, M. J.; FARIA, L. C. de; TEIXEIRA, H.; CARNEIRO, P. C. S. BRSMG União: cultivar de feijão comum de grãos tipo jalo para o estado de Minas Gerais. In: CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA DE FEIJÃO, 10., 2011, Goiânia. **Anais**. Goiânia: Embrapa Arroz e Feijão, 2011. 1 CD-ROM.

R CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2021. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. Acesso em: 10 fev. 2021.

HOPE, R. M.; HOPE, M. R. M. **Rmisc**: R package version 1.5. [S.l.: s.n.], 2013. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=Rmisc>>. Acesso em: 17 jan. 2021.

ROSSE, L. N.; VENCOSKY, R. Modelo de regressão não-linear aplicado ao estudo da estabilidade fenotípica de genótipos de feijão no Estado do Paraná, **Bragantia**, v. 59, n. 1, p. 99-107, 2000.

RAMOS JÚNIOR, E. U.; LEMOS, L. B.; SILVA, T. R. B. Componentes da produção, produtividade de grãos e características tecnológicas de cultivares de feijão. **Revista Bragantia**, v. 64, n. 01, p. 75-82, 2005.

RIBEIRO, T. D. et al. Description of the growth of pequi fruits by nonlinear models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, v. 40, n. 4, 2018.

SANTOS, LETÍCIA ANDRIANI dos et al. Crescimento, índices fisiológicos e produtividade de cultivares de feijoeiro sob diferentes níveis de adubação. **Revista Ceres**, v. 62, n. 1, p.

107-116, 2015.

SOUZA, G. S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear**. 1. ed. Brasília: EMBRAPA-SPI/EMBRAPA-SEA, 1998. 489 p.

SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2003.

SILVEIRA JUNIOR, P. et al. Metodo de Obtencao de Estimativas Preliminares de Parametros de Modelos de Crescimento Sazonais. **Área de Informação da Sede-Artigo em periódico indexado (ALICE)**, Pesq. agropec. bras., Brasília, 27(12): 1607-1613, dez. 1992.

SOUTO, J. S. et al. Efeito da aplicação de fósforo no desenvolvimento de plantas de feijão guandu (*Cajanus cajan* (L) Millsp). **Revista Verde de Agroecologia e Desenvolvimento Sustentável**, v. 4, n. 1, p. 135-140, 2009.

SHAPIRO, S.S.; WILK, M.B. An analysis of variance test for normality. **Biometrika**, Cambridge, v. 52, n. 3/4, p. 591-611, 1965.

SCHABENBERGER, O.; PIERCE, F. J. **Contemporary statistical models for the plant and soil sciences**. Boca Raton: CRC Press, 2002. 753 p

STEEL, R. G. D.; TORRIE, J. H.; DICKEY, D. A. **Principles and procedures of statistics: a biometrical approach**. New York: McGraw-Hill, 1997. 666 p.

URCHEI, MÁRIO ARTEMIO; RODRIGUES, JOÃO DOMINGOS; STONE, LUIS FERNANDO. Análise de crescimento de duas cultivares de feijoeiro sob irrigação, em plantio direto e preparo convencional. **Pesquisa agropecuária brasileira**, v. 35, n. 3, p. 497-506, 2000.

VIEIRA, R.F.; LIMA, M.S; NEVES, J.C.L; ANDRADE, M. J. B. Adubação. In: José Carneiro, Trazilbo José de Paula Júnior, Aluízio Boré, editores. **Feijão: do plantio à colheita**. Viçosa:

Ed. UFV, p.145-172, 2015.

VIEIRA, N.M.B.; ANDRADE, M.J.B.; CARVALHO, J.G.; ALVES JUNIOR, J.; MORAIS, A.R. Altura de planta e acúmulo de matéria seca do feijoeiro cvs. BRS MG Talismã e Ouro negro em plantio direto e convencional. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v.32, n.6, p.1687-1693, 2008.

VIEIRA, N. M. B, et al. Accumulation of macronutrients by different common bean cultivars grown in different plant densities in no-tillage crop system. **Bean Improvement Cooperative**. Annual Report, v. 52, p.132-133, 2009.

VIEIRA, N. M. B. **Crescimento e marcha da absorção de nutrientes no feijoeiro cvs. BRS-MG Talismã e Ouro Negro, em plantio direto e convencional**. 2006. 145 p. Dissertação (Mestrado em Agronomia) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2006.

WINSOR, C. P. The gompertz curve as a growth curve. **Proceedings of the national academy of sciences**, National Acad Sciences, v. 18, n. 1, p. 1-8, 1932.

ZUCARELI, CLAUDEMIR et al. Fósforo na produtividade e qualidade de sementes de feijão Carioca Precoce cultivado no período das águas. **Revista Ciência Agronômica**, v. 42, n. 1, p. 32-38, 2011.