



VINÍCIUS TINANO PIEVE

**IMPACTO DO EFEITO SAGNAC NAS PROPRIEDADES
TERMODINÂMICAS E MAGNETOCALÓRICAS DE UM GÁS
ELETRÔNICO BIDIMENSIONAL EM ROTAÇÃO**

LAVRAS – MG

2025

VINÍCIUS TINANO PIEVE

**IMPACTO DO EFEITO SAGNAC NAS PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS E
MAGNETOCALÓRICAS DE UM GÁS ELETRÔNICO BIDIMENSIONAL EM
ROTAÇÃO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dsc. Cleverson Filgueiras
Orientador

Prof. DSc. Moisés Porfírio Rojas Leyva
Coorientador

**LAVRAS – MG
2025**

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Pieve, Vinícius Tinano

Impacto do Efeito Sagnac nas Propriedades Termodinâmicas e Magnetocalóricas de um Gás Eletrônico Bidimensional em Rotação / Vinícius Tinano Pieve. 6^a ed. rev., atual. e ampl. – Lavras : UFLA, 2025.

59p. : il.

Dissertação(mestrado)–Universidade Federal de Lavras, 2025.

Orientador: Prof. Dsc. Cleverson Filgueiras.

Coorientador: Prof. DSc. Moisés Porfírio Rojas Leyva .

Bibliografia.

1. TCC. 2. Monografia. 3. Dissertação. 4. Tese. 5. Trabalho Científico – Normas. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD 808.066

VINÍCIUS TINANO PIEVE

**IMPACTO DO EFEITO SAGNAC NAS PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS E
MAGNETOCALÓRICAS DE UM GÁS ELETRÔNICO BIDIMENSIONAL EM
ROTAÇÃO**

**IMPACT OF THE SAGNAC EFFECT ON THE THERMODYNAMIC AND
MAGNETOCALORIC PROPERTIES OF A ROTATING TWO-DIMENSIONAL
ELECTRONIC GAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 23 de abril de 2025.

Prof Dsc Luiz Henrique de Campos Borges UFLA

Prof Dsca Desnise Costa Assafrão de Lima UFES

Prof. Dsc. Cleverson Filgueiras
Orientador

Prof. DSc. Moisés Porfírio Rojas Leyva
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

AGRADECIMENTOS

Aos professores Cleverson Filgueiras e Moisés Porfírio Rojas Leyva, pela oportunidade de realizar este trabalho, à Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Física, pelo suporte e estrutura, e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pelo apoio financeiro e financiamento durante o desenvolvimento do projeto.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo investigar o impacto do efeito de Sagnac nas propriedades termodinâmicas de um gás de elétrons bidimensional (2DEG) não interagente, confinado em uma amostra rotativa sob a influência de um campo magnético uniforme. O estudo visa compreender como a rotação e a distinção entre a massa efetiva (m^*) e a massa gravitacional (m_G) afetam os níveis de energia e as propriedades termodinâmicas resultantes. Para alcançar esse objetivo, relacionamos as forças inerciais aos efeitos de Sagnac e Aharonov-Bohm, a partir dos quais derivamos o hamiltoniano do sistema e, conseqüentemente, a função de partição. Esse formalismo permitiu extrair as propriedades termodinâmicas do sistema, estudar o efeito magnetocalórico e representá-las graficamente em função da temperatura. Nossos resultados demonstram que os efeitos rotacionais e as propriedades da massa efetiva são determinantes para a compreensão da termodinâmica de sistemas eletrônicos sob campos magnéticos, com implicações diretas para a modulação térmica em materiais semicondutores.

Palavras-chave: forças inerciais; efeito Sagnac; massa efetiva; termodinâmica; efeito magnetocalórico.

ABSTRACT

This dissertation investigates the influence of the Sagnac effect on the thermodynamic properties of a non-interacting two-dimensional electron gas (2DEG) confined in a rotating sample under a uniform magnetic field. The study aims to understand how rotation and the distinction between effective mass (m^*) and gravitational mass (m_G) affect the energy levels and resulting thermodynamic properties. To achieve this, we relate inertial forces to the Sagnac and Aharonov-Bohm effects, from which we derive the system's Hamiltonian and, consequently, the partition function. This formalism allowed us to extract the system's thermodynamic properties, study the magnetocaloric effect, and graphically represent them as functions of temperature. Our results demonstrate that rotational effects and effective mass properties are crucial for understanding the thermodynamics of electronic systems under magnetic fields, with direct implications for thermal modulation in semiconductor materials.

Keywords: inertial forces; sagnac effect; effective mass; thermodynamics; magnetocaloric effect.

INDICADORES DE IMPACTO

O presente trabalho avança de modo relevante a compreensão de fenômenos inerciais e magnetocalóricos em sistemas eletrônicos bidimensionais sob rotação, contribuindo para a Física da Matéria Condensada e para o estudo de efeitos quânticos em 2DEG. A análise teórica desenvolvida esclarece como o Efeito Sagnac e a distinção entre massa efetiva e massa gravitacional influenciam propriedades termodinâmicas e magnéticas, oferecendo uma base consistente para a descrição de sistemas eletrônicos em ambientes rotacionais. Essa estrutura conceitual abre caminho para o desenvolvimento de materiais e dispositivos sensíveis à rotação, com potencial aplicação em sensores de altíssima precisão, giroscópios quânticos e dispositivos magnetocalóricos miniaturizados voltados à refrigeração eficiente.

O impacto tecnológico e econômico potencial está associado ao aprimoramento de tecnologias emergentes em spintrônica, semicondutores avançados e refrigeração magnética em microescala, áreas que demandam controle fino de efeitos quânticos, estabilidade térmica e baixo consumo energético. Ainda que os resultados tenham caráter predominantemente teórico, eles estabelecem fundamentos importantes para o desenho de materiais e dispositivos com respostas magnetocalóricas ou rotacionais ajustáveis, favorecendo futuras parcerias com laboratórios e empresas interessados em tecnologias baseadas em controle quântico.

No âmbito social e educacional, a pesquisa fortalece a formação de recursos humanos em física teórica e computacional, promovendo a integração entre ensino e pesquisa no Programa de Pós-Graduação em Física da UFLA. O ambiente colaborativo contribuiu para a criação de atividades didáticas e de divulgação científica associadas ao tema, ampliando o alcance do conhecimento produzido e estimulando a participação de estudantes em problemas de fronteira da física contemporânea.

O impacto institucional também se reflete no fortalecimento da UFLA como polo regional de pesquisa em física teórica, consolidando a atuação da universidade no Sul de Minas Gerais e ampliando sua inserção no cenário nacional da ciência de materiais e da termodinâmica quântica. A abrangência dos resultados conecta a pesquisa às diretrizes da Política Nacional de Extensão, sobretudo na área de Tecnologia e Produção, com interfaces relevantes com Educação e Meio Ambiente, dado o potencial de desenvolver soluções energeticamente mais limpas e sustentáveis baseadas em controle térmico e magnético.

Além disso, o estudo dialoga com objetivos estratégicos de desenvolvimento, articulando-se aos compromissos internacionais relacionados à educação de qualidade, à inovação tecnoló-

gica, ao uso eficiente de energia e à mitigação de impactos ambientais. Em síntese, o trabalho se destaca pela contribuição científica ao entendimento de fenômenos físicos de fronteira e pelo potencial de inspirar aplicações em tecnologias emergentes, reforçando o papel da UFLA na produção de conhecimento inovador, sustentável e socialmente relevante.

IMPACT INDICATORS

The present work makes a relevant contribution to the understanding of inertial and magnetocaloric phenomena in two-dimensional electronic systems under rotation, advancing research in Condensed Matter Physics and in the study of quantum effects in 2DEG systems. The theoretical framework developed here clarifies how the Sagnac effect and the distinction between effective mass and gravitational mass influence thermodynamic and magnetic properties, providing a solid basis for describing electronic systems in rotational environments. This approach opens avenues for the development of materials and devices sensitive to rotation, with potential applications in high-precision sensors, quantum gyroscopes, and miniaturized magnetocaloric devices aimed at efficient cooling.

The potential technological and economic impact lies in the improvement of emerging technologies in spintronics, advanced semiconductors, and microscale magnetic refrigeration—fields that demand fine control of quantum effects, thermal stability, and low energy consumption. Although the results are predominantly theoretical, they establish important foundations for designing materials and devices with tunable magnetocaloric or rotational responses, fostering future collaborations with laboratories and companies interested in quantum-based control technologies.

From a social and educational perspective, the research strengthens the training of human resources in theoretical and computational physics, promoting the integration of teaching and research within the Graduate Program in Physics at UFLA. The collaborative environment contributed to the creation of didactic and outreach activities derived from the work, expanding the dissemination of the produced knowledge and encouraging student engagement with frontier problems in contemporary physics.

The institutional impact is reflected in the consolidation of UFLA as a regional research hub in theoretical physics, reinforcing the university's role in southern Minas Gerais and expanding its presence in the national landscape of materials science and quantum thermodynamics. The broad relevance of the results aligns the project with the National Extension Policy, particularly within the area of Technology and Production, with connections to Education and Environment, given the potential for developing cleaner and more sustainable energy solutions based on thermal and magnetic control in quantum systems.

Furthermore, the study aligns with strategic development goals, engaging with international commitments related to quality education, technological innovation, efficient energy use,

and the mitigation of environmental impacts. In summary, the work stands out for its scientific contribution to understanding frontier physical phenomena and for its potential to inspire applications in emerging technologies, reinforcing UFLA's commitment to producing innovative, sustainable, and socially relevant science.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Referencial acelerado	16
Figura 2.2 – Observadores O e O' analisam o movimento de uma certa partícula, a partir dos referenciais S e S'	18
Figura 2.3 – Vetor de módulo constante girando em torno de um eixo.	19
Figura 5.1 – Energia interna para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \neq m_G$	40
Figura 5.2 – Energia interna para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \equiv m_G$	41
Figura 5.3 – Calor específico para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \neq m_G$	42
Figura 5.4 – Calor específico para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \equiv m_G$	43
Figura 5.5 – Energia livre para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \neq m_G$	44

- Figura 5.6 – Energia livre para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \equiv m_G$ 45
- Figura 5.7 – Entropia para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \neq m_G$ 47
- Figura 5.8 – Entropia para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \equiv m_G$ 48
- Figura 5.9 – Magnetização $M(T, B)$ para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = 50$ GHz. A figura principal mostra $M(T, B)$ para alguns valores de campos magnéticos externos em Teslas, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$. 48
- Figura 5.10 – Magnetização $M(T, B)$ para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = 100$ GHz. A figura principal mostra $M(T, B)$ para alguns valores de campos magnéticos externos em Teslas, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$. 49
- Figura 5.11 – Magnetização $M(T, B)$ para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = -50$ GHz. A figura principal mostra $M(T, B)$ para alguns valores de campos magnéticos externos em Teslas, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$. 49
- Figura 5.12 – Magnetização $M(T, B)$ para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = -100$ GHz. A figura principal mostra $M(T, B)$ para alguns valores de campos magnéticos externos em Teslas, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$. 49

- Figura 5.13 – Efeito magnetocalórico (MCE) para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = 50$ GHz. A figura principal mostra ΔT_B para campos magnéticos externos $B_{\max}$ com um valor fixo de $B_i = 0.01$ T, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$ 50
- Figura 5.14 – Efeito magnetocalórico (MCE) para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = 100$ GHz. A figura principal mostra ΔT_B para campos magnéticos externos $B_{\max}$ com um valor fixo de $B_i = 0.01$ T, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$ 50
- Figura 5.15 – Efeito magnetocalórico (MCE) para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = -100$ GHz. A figura principal mostra ΔT_B para campos magnéticos externos $B_{\max}$ com um valor fixo de $B_i = 0.01$ T, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$ 51
- Figura 5.16 – Efeito magnetocalórico (MCE) para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = -50$ GHz. A figura principal mostra ΔT_B para campos magnéticos externos $B_{\max}$ com um valor fixo de $B_i = 0.01$ T, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$ 51

SUMÁRIO

1	Introdução	14
2	Forças Inerciais	16
2.1	Forças de inércia num referencial acelerado	16
2.2	Forças de inérica num referêncial girante	18
3	Efeitos Sagnac e Aharonov-Bohm	23
3.1	Efeito Sagnac na abordagem não relativística	23
3.2	Efeito Sagnac na abordagem relativística	24
3.3	O efeito Aharonov-Bohm	25
3.4	Relação entre as Forças inerciais e os Efeitos Sagnac e Aharonov Bohm . .	27
4	O efeito Sagnac sobre as propriedades termodinâmicas de um gás de elétrons	31
4.1	Solução da equação de Schorodinger para um sistema girante	31
4.2	Função de Partição para um sistema girante	34
4.2.1	Propriedades Termodinâmicas	36
4.2.1.1	Energia Média:	36
4.2.1.2	Calor específico:	36
4.2.1.3	Energia Livre:	36
4.2.1.4	Entropia:	37
4.2.1.5	Magnetização:	37
4.2.1.6	Efeito Magnetocalórico	37
5	Resultados e Discussões	39
5.0.1	Energia Interna	39
5.0.2	Calor específico	41
5.0.3	Energia Livre	44
5.0.4	Entropia	45
5.0.5	Magnetização	46
5.0.6	Efeito Magnetocalórico	50
	APÊNDICES	54
A	CONCLUSÃO e Perspectivas Futura	55
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

O Efeito Sagnac (Hakimi, 2024) é um fenômeno físico fundamental com implicações profundas tanto para a física teórica (Ramezani-Aval, 2025) quanto para aplicações tecnológicas (Culshaw, 2005). Sua sensibilidade à rotação, gravidade e às propriedades da matéria o torna uma ferramenta valiosa para investigar questões cruciais na física fundamental, como a natureza da matéria escura (Souza *et al.*, 2025) e efeitos gravitomagnéticos (Ruggiero; Tartaglia, 2018), além de servir como base para sensores rotacionais de alta precisão utilizados em diversas áreas (Zhang *et al.*, 2024). O desenvolvimento contínuo de interferômetros de Sagnac, tanto ópticos (Shaddock, 2004) quanto baseados em ondas de matéria (Gautier *et al.*, 2022), promete avanços significativos em nossa compreensão do universo e em tecnologias de sensoriamento.

Neste trabalho, investigamos as propriedades termodinâmicas e o efeito magnetocalórico (MCE) em um gás de elétrons bidimensional (2DEG) sujeito a efeitos inerciais associados ao efeito de Sagnac (Paiva; Lenny; Cohen, 2022). Forças inerciais (Nussenzveig, 2013), como as forças de Coriolis e centrífuga, manifestam-se em referenciais rotacionais e desempenham um papel crucial na mecânica quântica (Neto *et al.*, 2024). A conhecida analogia entre forças inerciais em partículas massivas e forças eletromagnéticas em partículas carregadas oferece uma perspectiva relevante (Johnson, 2000): a força de Coriolis atua sobre uma partícula de massa m de modo análogo à força magnética sobre uma partícula carregada, enquanto a força centrífuga afeta a partícula dentro de um referencial rotativo (Medeiros, 2012).

Para elétrons em materiais, surge uma questão fundamental: a distinção entre massa inercial, massa gravitacional (m_G) e massa efetiva (m^*) (Semon; Schmieg, 1981). Segundo Zhong-Yue (Wang, 2023), ambas (m^* e m_G) devem ser incluídas na equação de Schrödinger para o problema de Landau em referenciais rotativos (Kittel, 2005). Em semicondutores, essas massas podem diferir, causando deslocamentos significativos nos níveis de energia e, consequentemente, nas propriedades físicas do sistema (Filgueiras *et al.*, 2025). Vale ressaltar que o princípio da equivalência não estabelece uma relação direta entre m_G e m^* , exigindo abordagens distintas para sua análise. Em nossa compreensão, embora os argumentos apresentados por Zhong-Yue (Wang, 2023) sejam fortes, ainda acreditamos que a teoria para o caso $m^* \neq m_G$ deve ser investigada por meio de cálculos de primeiros princípios. No entanto, experimentos e/ou simulações envolvendo propriedades termodinâmicas poderiam lançar luz sobre essa

questão. Seguiremos o modelo geral, para o qual $m^* \neq m_G$, obtendo os resultados equivalentes simplesmente considerando essas massas iguais.

Nesta dissertação, dada a relevância do tema, o debate atual e o potencial futuro desses dispositivos quânticos, estudamos o problema de Landau em referenciais rotativos, estruturado da seguinte forma: Os capítulos 2 e 3 relacionam forças inerciais aos efeitos de Sagnac e Aharonov-Bohm (Dirac, 1931). Já no capítulo 4 aplicamos o formalismo de (Wang, 2023) para construir um hamiltoniano que incorpora m_G e m^* . A partir da equação de Schrödinger, calculamos os níveis de energia (Brandão *et al.*, 2015) e a função de partição, gerando gráficos das propriedades termodinâmicas (energia interna, calor específico, energia livre, entropia, magnetização e efeito magnetocalórico) em função da temperatura, variando o campo magnético B e a frequência de rotação Ω . Esses resultados permitem avaliar a influência de B e Ω no sistema e comparar as teorias $m^* \neq m_G$ e $m^* = m_G$. Finalmente nossas conclusões e perspectivas futuras são resumidas no capítulo A.

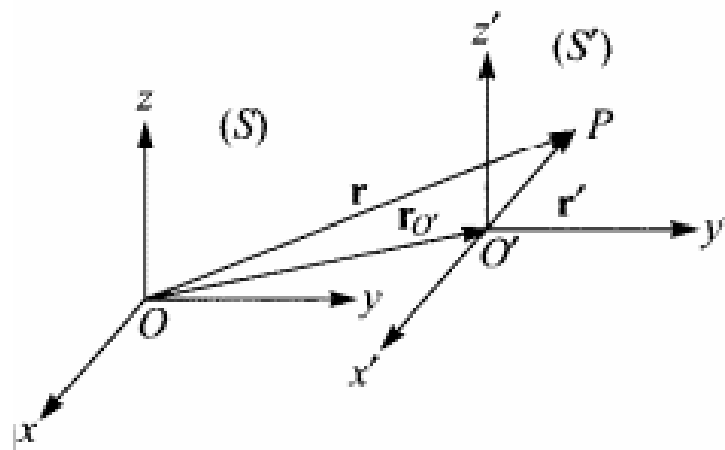
2 FORÇAS INERCIAIS

Um referencial é denominado referencial inercial se, nele, a primeira lei de Newton é válida. Reiteradamente, temos de lidar com referenciais não inerciais, nos quais as leis de Newton não se aplicam. A própria Terra só pode ser considerada um referencial inercial na aproximação em que os efeitos de sua rotação em torno do eixo são desprezíveis. Vamos apresentar o que acontece com as leis da mecânica em referenciais não inerciais. Nessas situações, aparecem outras forças atuando sobre o corpo, além daquelas existentes para os observadores inerciais. Essas forças são chamadas de forças inerciais. A descrição teórica desta seção é baseada nas referências (Nussenzveig, 2013) e (Neto, 2004).

2.1 Forças de inércia num referencial acelerado

O problema a ser tratado é o da passagem de um referencial inercial, que designaremos sempre por S , para outro referencial S' , em movimento em relação a S . Vejamos a situação mostrada na figura (2.1), em que o observador O' se afaste de O com uma velocidade não constante (movimento retilíneo uniformemente acelerado). Sendo O , por hipótese, um observador inercial, O' não o será (referencial não inercial).

Figura 2.1 – Referencial acelerado



Fonte: (NUSENZVEIG, 2013).

Consideremos, então, o que ocorre no referencial do observador O' . Do triângulo OPO' , temos:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{OO}'; \quad (2.1)$$

chamando $\vec{OO}'$ o vetor de posição da origem O' de S' em relação a O de S . Se $\vec{A}$ é a aceleração do movimento retilíneo uniformemente acelerado de S' em relação a S e V_0 a velocidade inicial (supondo $r'_0 = 0$ para $t = 0$), da equação horária podemos escrever:

$$\vec{OO}' = \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{A} t^2; \quad (2.2)$$

de modo que a (2.1) fica:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_0 t - \frac{1}{2} \vec{A} t^2; \quad (2.3)$$

e, admitindo sempre que $t' = t$, derivamos a expressão a cima em relação a t , obtendo:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_0 - \vec{A} t; \quad (2.4)$$

derivando novamente em relação a t , ficamos com a seguinte expressão :

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}. \quad (2.5)$$

Assim, a aceleração de uma partícula em relação a S' difere de sua aceleração em relação a S pelo termo constante $-\vec{A}$, onde $\vec{A}$ é a aceleração de S' em relação a S . Agora, através da (2.5), chegamos nas seguintes equações:

$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{A}; \quad (2.6)$$

$$\vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{A}. \quad (2.7)$$

Logo, como foi dito, a segunda Lei de Newton não é válida num referencial não inercial S' . Aparece um termo novo $m\vec{A}$, proporcional à massa inercial da partícula e com dimensão de força, mas que não corresponde a nenhuma força resultante da interação entre partículas. Porém, estamos acostumados a interpretar acelerações em termos de forças:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A} = \vec{F} + \vec{F}_{in}; \quad (2.8)$$

em que,

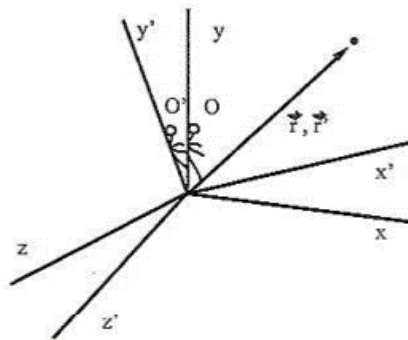
$$\vec{F}_{in} = -m\vec{A}; \quad (2.9)$$

é chamado de força de inércia, em contraste à força newtoniana $\vec{F}$. Se calcularmos as forças pelas acelerações que originam, não há diferenças entre o efeito de uma força inercial e o de uma força newtoniana. As forças que sentimos quando um carro freia bruscamente não se diferenciam para nós das que seriam provocadas por um empurrão. A diferença principal é que as forças de inércia não resultam da interação com outros sistemas físicos, ao contrário das forças newtonianas.

2.2 Forças de inércia num referencial girante

A análise das forças de inércia em um sistema girante ocorre tomando um referencial S' em rotação com velocidade angular $\vec{\omega}$ com respeito a um referencial S , onde $\vec{\omega}$ (ou seja o eixo de rotação) aponta numa direção arbitrária. Tomemos um sistema de coordenadas cartesianas com vetores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ nas direções dos eixos (x, y, z) em S e outro sistema cartesiano de mesma origem e vetores unitários $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ em S' , como mostrado na figura (2.2).

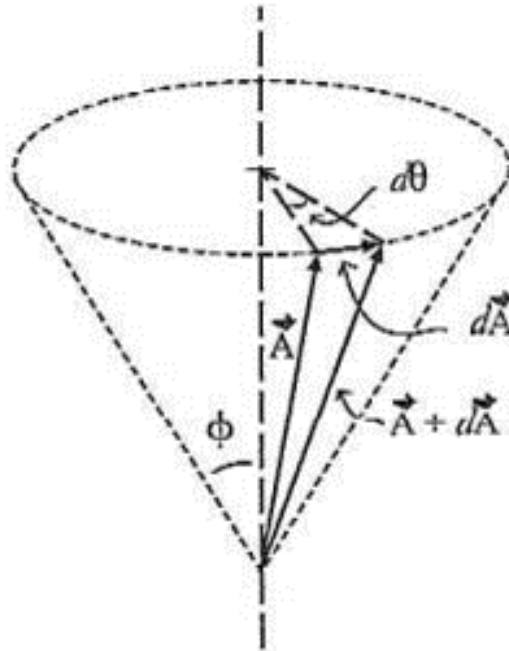
Figura 2.2 – Observadores O e O' analisam o movimento de uma certa partícula, a partir dos referenciais S e S' .



Fonte: (NETO, 2004).

Para facilitar os desenvolvimentos algébricos, consideremos um certo vetor $\vec{A}$ de módulo constante, girando em torno de um eixo com velocidade angular $\vec{\omega}$, como mostra a figura (2.3). A superfície de revolução descrita é uma superfície cônica, onde ϕ é o ângulo da geratriz com

Figura 2.3 – Vetor de módulo constante girando em torno de um eixo.



Fonte: (NETO, 2004).

o eixo de simetria. Usando coordenadas polares, temos:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \hat{\rho} + \rho \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}. \quad (2.10)$$

Como ρ não varia com o tempo, o primeiro termo será anulado, e ficamos com:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}. \quad (2.11)$$

Substituindo $\rho = A \sin \phi$ e $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, teremos:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = A \sin \phi \omega \hat{\theta}. \quad (2.12)$$

A equação (2.12) corresponde ao módulo da seguinte equação vetorial:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}. \quad (2.13)$$

Com essa relação estabelecida, voltamos ao nosso sistema da figura (2.2), onde os vetores r e r' correspondem aos vetores posição da partícula para os observadores O e O' respectivamente. Escrevendo em termos de suas componentes, temos:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}; \quad (2.14)$$

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'. \quad (2.15)$$

Como $r = r'$, por causa de terem a mesma origem $O=O'$, temos:

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'. \quad (2.16)$$

Agora vamos derivar ambos os lados desta equação com respeito ao tempo. Para tal, tomemos o referencial do observador S (inercial), assim:

$$\vec{v} = \vec{v}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}. \quad (2.17)$$

Nota-se que os unitários $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ descrevem movimentos em torno do eixo de rotação semelhantes ao do vetor $\vec{A}$, mostrado na figura (2.3). Assim, pela relação (2.13) podemos escrever:

$$\vec{v} = \vec{v}' + x'\vec{\omega} \times \hat{i}' + y'\vec{\omega} \times \hat{j}' + z'\vec{\omega} \times \hat{k}'; \quad (2.18)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'; \quad (2.19)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.20)$$

A última passagem se deve ao fato de $r = r'$. Fazendo a derivada da (2.20) com respeito ao tempo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.21)$$

O termo dado antes do sinal de igualdade da relação (2.21) é a aceleração da partícula para o observador S . Entretanto, não podemos afirmar que $d\vec{v}'/dt$ seja a aceleração da partícula para S' , porque estamos tomando as derivadas sob o ponto de vista do observador S (onde os unitários $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ não são constantes), assim:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(v'_x\hat{i}' + v'_y\hat{j}' + v'_z\hat{k}'); \quad (2.22)$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + v'_x \frac{d\hat{i}}{dt} + v'_y \frac{d\hat{j}}{dt} + v'_z \frac{d\hat{k}}{dt}; \quad (2.23)$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'. \quad (2.24)$$

Substituindo (2.24) em (2.21), encontramos:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}; \quad (2.25)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}. \quad (2.26)$$

A última passagem usou-se a expressão (2.20). Desenvolvendo o mesmo raciocínio da subseção anterior, para o observador S' , a aceleração da partícula é dada por (substituindo novamente r por r') :

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}. \quad (2.27)$$

Como vimos na subseção anterior, a segunda Lei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ em S transforma-se em $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}$ em S' , obtemos então:

$$\vec{F}_{in} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}. \quad (2.28)$$

Assim, para uma partícula de massa m vista de um referencial girante S' (não inercial), podem existir três forças inerciais atuando sobre ela: uma é $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$, que é conhecida como força centrífuga. A outra força inercial, $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$, é chamada de força de Coriolis. Quanto a última, $-m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$, chamada força de Euler, não chegaremos a usá-la, pois só consideraremos o caso particular com ω constante. Assim, a expressão geral da força de inercia é dada por:

$$\vec{F}_{in} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.29)$$

A força centrífuga é sempre perpendicular ao eixo de rotação (direção de $\vec{\omega}$) e dirigida radialmente para fora:

$$\vec{F}_{centr} = m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}. \quad (2.30)$$

Já a expressão da força de Coriolis, que é sempre perpendicular à direção do eixo de rotação e à velocidade da partícula, é dada da seguinte maneira :

$$\vec{F}_{Coriolis} = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}. \quad (2.31)$$

3 EFEITOS SAGNAC E AHARONOV-BOHM

3.1 Efeito Sagnac na abordagem não relativística

Em 1913, Sagnac mostrou que a rotação angular podia ser detectada usando interferômetros em um arranjo clássico. A configuração introduzida por ele é agora conhecida como o interferômetro de Sagnac. Este interferômetro consiste em uma fonte de luz emitindo em ambas as direções de um ponto no anel girando com velocidade $\vec{\omega}$. A luz que viaja no mesmo sentido de rotação do anel precisa percorrer uma distância ΔL a mais do que o comprimento da circunferência do anel, antes de alcançar a fonte de luz que está percorrendo o anel em sentido contrário (Paiva; Lenny; Cohen, 2022). O tempo t_1 que leva para alcançar a fonte de luz de sentido oposto é dado por:

$$t_1 = \frac{2\pi R + \Delta L}{c}. \quad (3.1)$$

De maneira análoga, a luz viajando no sentido oposto de rotação do anel irá percorrer uma distância ΔL a menos que o comprimento da circunferência antes de atingir a outra fonte de luz. Assim, o tempo t_2 será dado por:

$$t_2 = \frac{2\pi R - \Delta L}{c}. \quad (3.2)$$

Em que, ΔL é a distância que o anel se moveu nesse mesmo tempo; ou seja:

$$\Delta L = \omega R t_1; \quad (3.3)$$

$$\Delta L = \omega R t_2. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.3) em (3.1) e (3.4) em (3.2), temos:

$$t_1 = \frac{2\pi R}{c - \omega R}; \quad (3.5)$$

$$t_2 = \frac{2\pi R}{c + \omega R}. \quad (3.6)$$

A diferença de tempo será dada por:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2 - \omega^2 R^2}; \quad (3.7)$$

e para $R\omega = v \ll c$:

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2} = \frac{4S\omega}{c^2}. \quad (3.8)$$

Em que S é a área do anel. A diferença de fase pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\Delta\phi = \omega\Delta t; \quad (3.9)$$

que podemos escrever como:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi c\Delta t}{\lambda}. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.8) em (3.10), temos:

$$\Delta\phi = \frac{8\pi S\omega}{c\lambda}. \quad (3.11)$$

Conhecida como a fase de Sagnac, onde λ é o comprimento de onda inicial do fóton (Paiva; Lenny; Cohen, 2022).

3.2 Efeito Sagnac na abordagem relativística

Hermam Minkowsk (1864-1909), matemático alemão de origem russa, realizou a primeira interpretação geométrica da relatividade einsteniana propondo que o universo é visto como um contínuo espaço-tempo de quatro dimensões, que combina com um campo vetorial tetradimensional, concepção esta que passou a ser chamada de espaço de Minkowski (Medeiros, 2012). Para calcular o intervalo ds em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z, t) no espaço de Minkowski (Landau; Lifshitz, 1971), usamos :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (3.12)$$

Agora realizamos a transformação de um sistema em repouso (sistema inercial) para o sistema rotacionando uniformemente (sistema não inercial). Se as coordenadas cilíndricas no sistema rotacionando forem $\hat{r}', \hat{\phi}', \hat{z}'$, e o eixo de rotação coincidir com os eixos Z e Z' , então temos $r' = r, z' = z, \phi' = \phi + \Omega t$, onde Ω é a velocidade angular de rotação. Substituindo em (3.12), obtemos a expressão requerida para ds'^2 no sistema rotacional de referência:

$$ds'^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt'^2 - 2\Omega r^2 d\phi' dt' - dz'^2 - r^2 d\phi'^2 - dr'^2. \quad (3.13)$$

Importante observar que o sistema de referência rotacionando só pode ser usado até distâncias iguais a $\frac{c}{\Omega}$. De fato, da (3.13), vemos que para $r > \frac{c}{\Omega}$, o componente $g_{00} = c^2 - \Omega^2 r^2$ se torna negativo, o que não é aceitável. A nulidade do sistema de referência rotacionando em grandes distâncias está relacionada ao fato de que lá a velocidade se tornaria maior que a velocidade da luz (Landau; Lifshitz, 1971).

Como em qualquer campo estacionário, os relógios no corpo rotacionante não podem ser sincronizado de forma única em todos os pontos. Seguindo a sincronização ao longo de qualquer curva fechada, encontramos, ao retornar ao ponto de partida, um tempo diferente do valor inicial por uma quantidade (Landau; Lifshitz, 1971):

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \int \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2} \int \frac{\Omega r^2 d\phi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}. \quad (3.14)$$

Assumindo que $\frac{\Omega r}{c} \ll 1$ (ou seja, que a velocidade da rotação é pequena em comparação com a velocidade da luz), teremos:

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 d\phi = \frac{2\Omega S}{c^2}. \quad (3.15)$$

Nota-se um resultado diferente ao que foi encontrado em uma análise não relativística, usaremos esse resultado mais adiante para encontrar as forças inerciais a partir do Efeito Sagnac.

3.3 O efeito Aharonov-Bohm

Na física clássica, a dinâmica de uma partícula com carga q é afetada apenas por um campo magnético que interage diretamente com ela, ou seja, se a partícula viajar por uma região onde o campo magnético é diferente de zero. Já na mecânica quântica, isso nem sempre

é o caso, suponha que uma carga circunscreva uma região no espaço que contenha um campo magnético, mas que ao longo do caminho realizado pela carga o campo magnético seja nulo, ao contrário do potencial vetor, que pode assumir ao longo do caminho, diferentes formas de acordo com a escolha do calibre (Paiva; Lenny; Cohen, 2022).

Esse efeito é geralmente apresentado considerando uma carga circunscrevendo um solenóide cujo eixo está, por exemplo, no eixo z . Para simplificar, o solenóide é considerado infinitamente fino e às vezes referido como uma linha de fluxo (Paiva; Lenny; Cohen, 2022). Além disso, por simplicidade, a partícula é assumida como viajando no plano xy , com o estado de superposição, onde a função de onda pode ser escrita como:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_L\rangle + |\psi_R\rangle); \quad (3.16)$$

em que $|\psi_L\rangle$ é um pacote de onda que passa à esquerda e $|\psi_R\rangle$ é um pacote de onda que passa à direita da linha de fluxo. O Hamiltoniano da partícula, nesse caso, pode ser escrito como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[\vec{P} - q\vec{A}]^2. \quad (3.17)$$

Em que $\vec{A}$ é o potencial vetor associado ao solenóide e diferente de zero ao longo do caminho realizado pela carga.

Para obter a solução desse Hamiltoniano, consideremos os estados $|\psi_{0L}\rangle$ e $|\psi_{0R}\rangle$ como as soluções no caso onde não há campo magnético, ou seja, $H_0 = \frac{p^2}{2m}$. Então, com base em um procedimento introduzido por Dirac, pode-se obter que, após os pacotes de onda esquerdo e direito viajarem, respectivamente, pelas trajetórias γ_L e γ_R (Dirac, 1931):

$$|\psi_L\rangle = e^{iq\int_{\gamma_L} \vec{A}\cdot d\ell/\hbar} |\psi_{0L}\rangle; \quad (3.18)$$

$$|\psi_R\rangle = e^{iq\int_{\gamma_R} \vec{A}\cdot d\ell/\hbar} |\psi_{0R}\rangle. \quad (3.19)$$

Os estados quânticos são equivalentes até uma fase global, assim temos:

$$\int_{\gamma_R} \vec{A}\cdot d\ell - \int_{\gamma_L} \vec{A}\cdot d\ell = \oint \vec{A}\cdot d\ell; \quad (3.20)$$

que é independente do caminho $\gamma_R - \gamma_L$ e tem significado físico, pois corresponde ao fluxo magnético Φ_B dentro da região circunscrita pela carga (Dirac, 1931). Então, o estado do sistema após ele contornar a linha de fluxo é:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_{0L}\rangle + e^{i\Delta\phi_{AB}} |\psi_{0R}\rangle \right), \quad (3.21)$$

onde:

$$\Delta\phi_{AB} = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{\hbar} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}; \quad (3.22)$$

em que $d\vec{S}$ é o valor infinitesimal da área por onde atravessa o campo magnético, reescrevendo:

$$\Delta\phi_{AB} \equiv \frac{q}{\hbar} \Phi_B. \quad (3.23)$$

Nesse caso, a partícula acumula uma fase quântica proporcional ao fluxo magnético dentro da região delimitada pela sua trajetória.

3.4 Relação entre as Forças inerciais e os Efeitos Sagnac e Aharonov Bohm

Existe uma distinção entre massa inercial, massa gravitacional e massa efetiva (Wang, 2023). A massa inercial, está relacionada à resistência de um objeto a mudanças em seu movimento, diferente da massa gravitacional, que está associada à atração gravitacional. A massa efetiva está relacionada à forma como os elétrons respondem às forças eletromagnéticas em materiais (Wang, 2023). Para semicondutores, a massa efetiva m^* é derivada da estrutura da banda de energia do material, influenciada pelo meio e não pelas forças gravitacionais (??). A equação

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1}; \quad (3.24)$$

captura essa dependência, onde E é a energia, k é o vetor de onda, e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida. Apesar das variações em m^* , a massa gravitacional m_G permanece constante, independentemente do meio. Portanto, $m_G \neq m^*$ em geral, exceto em casos como metais simples, onde todas as massas coincidem. Para semicondutores, isso significa que a massa efetiva m^* do elétron no material será diferente da massa gravitacional, ou seja, $m_G \neq m^*$ (Kittel, 2005). Agora, aplicando o princípio da equivalência envolvendo as forças inerciais, junto ao efeito

Sagnac, vamos mostrar que a massa gravitacional deve ser igual à massa do elétron no vácuo, ou seja, $m_G \equiv m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ e que tanto a massa efetiva m^* quanto a massa gravitacional m_G devem ser consideradas na equação de Schrodinger (Wang, 2023).

Utilizando o resultado da (3.15) para uma partícula quântica, a diferença de tempo para ondas de matéria que se propagam em direções opostas é dado por:

$$\Delta t = \frac{2\Omega S}{c^2}. \quad (3.25)$$

O deslocamento de fase deve ser:

$$\Delta\phi = \omega\Delta t = \frac{2\omega\Omega S}{c^2}. \quad (3.26)$$

Na mecânica quântica, a frequência angular ω é proporcional a E , assim:

$$\Delta\phi = \frac{2\omega\Omega S}{c^2} = \frac{2E\Omega S}{\hbar c^2}. \quad (3.27)$$

A energia total de um transportador é $E \approx m_0 c^2$ e a fase Sagnac da (3.27) é aproximadamente $\frac{2m_0\vec{\Omega}\vec{S}}{\hbar}$ (Wang, 2023). Isso é consistente com o resultado experimental em um supercondutor convencional (Zimmerman; Mercereau, 1965).

Existem forças elétricas e magnéticas cujo efeito sobre partículas carregadas imita exatamente os efeitos das forças centrífuga e de Coriolis para referenciais em rotação (Semon; Schmieg, 1981). Para medir a aceleração dessas partículas usamos a equação da força de Lorentz.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.28)$$

Podemos atribuir um vetor de campo elétrico e magnético a cada ponto, definindo assim um campo eletromagnético. Um procedimento correspondente pode ser usado para um referencial girando com uma velocidade angular constante Ω em torno do eixo z . Medindo a aceleração para massas de teste em várias circunstâncias e usando as equações de força (2.30) e (2.31), um observador em rotação pode atribuir um vetor $\vec{\Omega}$ a cada ponto, definindo assim um campo $\vec{\Omega}$. Este "campo inercial" é tão real quanto o campo eletromagnético, já que ambos são definidos da mesma maneira (Semon; Schmieg, 1981). Assim o transportador no material em rotação se comporta como se tivesse sendo influenciado por um campo eletromagnético e podemos escrever as seguintes relações:

$$2m^*\vec{v} \times \vec{\Omega} = q\vec{v} \times \vec{B}; \quad (3.29)$$

$$q\vec{E} = m^*(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}; \quad (3.30)$$

$$\vec{E} = \frac{m^*(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}}{q}; \quad (3.31)$$

$$\vec{B} = \frac{2m^*\vec{\Omega}}{q}. \quad (3.32)$$

O fluxo magnético Φ_B que atravessa a área transversal S de um solenóide é dado por:

$$\Phi = \vec{B}S = \frac{2m^*\Omega S}{q}. \quad (3.33)$$

Usando a fase Aharonov-Bohm encontrada na (3.23), temos:

$$\frac{q}{\hbar}\Phi_B = \frac{2m^*\vec{\Omega}\vec{S}}{\hbar}. \quad (3.34)$$

O resultado experimental em um supercondutor convencional para a fase Sagnac é $\frac{2m_o\vec{\Omega}\vec{S}}{\hbar}$ (Zimmerman; Mercereau, 1965), portanto ($m^* \approx m_0$):

$$\frac{2m^*\vec{\Omega}\vec{S}}{\hbar} \approx \frac{2m_o\vec{\Omega}\vec{S}}{\hbar} = \frac{2E\Omega S}{\hbar c^2}. \quad (3.35)$$

A equação (3.37) recupera a fase Sagnac encontrada anteriormente, mostrando a relação matemática entre as fases Aharonov-Bohm e Sagnac para uma partícula quântica, além da eficácia da relação entre forças inerciais para um sistema em rotação e forças eletromagnéticas para uma partícula carregada (Wang, 2023).

De acordo com a nova teoria (Wang, 2023), $\frac{E}{c^2}$ desempenha o papel da chamada massa gravitacional m_G . Essa nova teoria afirma que o conceito m_G é redundante, e o significado físico do princípio de equivalência $m_i = m_G$ é apenas $m = \frac{E}{c^2}$. A partir da nova teoria e da

relação ($m^* \approx m_0$) encontrada a partir do efeito Sagnac, podemos reescrever a fase de Sagnac e os campos eletromagnéticos relacionados as forças inerciais da seguinte maneira:

$$\Delta\phi = \frac{2m_G\Omega S}{\hbar}; \quad (3.36)$$

$$\vec{E} = \frac{m_G(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}}{q}; \quad (3.37)$$

$$\vec{B} = \frac{2m_G\vec{\Omega}}{q}. \quad (3.38)$$

Agora podemos fazer uma relação entre os Hamiltonianos de uma carga carregada em um campo eletromagnético e o de uma partícula em um referencial em rotação (Wang, 2023); em que

$$\hat{H} = \frac{[\vec{P} - q\vec{A}]^2}{2m^*} + qV; \quad (3.39)$$

é o Hamiltoniano de uma carga carregada em um campo eletromagnético, em que $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ e $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Substituindo (3.37) e (3.38) em (3.39), podemos escrever o Hamiltoniano para uma partícula quântica em um referencial girante na forma:

$$\hat{H} = \frac{[\vec{P} - m_G(\vec{\Omega} \times \vec{r})]^2}{2m^*} - \frac{m_G(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2}; \quad (3.40)$$

com $m_G(\vec{\Omega} \times \vec{r})$ e $\frac{m_G}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2$ sendo devido à força de Coriolis e à força centrífuga, respectivamente (Wang, 2023). Como mencionado, isso é uma consequência do efeito Sagnac, juntamente com o princípio da equivalência para a nova teoria e tanto a massa efetiva quanto a massa gravitacional, aparecem na equação de Schrodinger o que pode levar a alterações notáveis nos níveis de energia e, consequentemente, nas propriedades físicas do sistema em estudo.

4 O EFEITO SAGNAC SOBRE AS PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DE UM GÁS DE ELÉTRONS

4.1 Solução da equação de Schrodinger para um sistema girante

Agora o modelo apresentado será uma junção daquilo que foi discutido nos capítulos anteriores. Vamos considerar uma amostra plana de um gás de elétrons livres não interagentes em um disco giratório, sob a influência de um campo magnético perpendicular, com o elemento de linha para esse sistema dado em coordenadas polares:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2; \quad (4.1)$$

onde $r \geq 0$ and $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Na presença de um campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$, o hamiltoniano é dado pela unificação de (3.38) e (3.39), ficando da seguinte maneira:

$$\hat{H} = \frac{[\vec{P} - q\vec{A} - m_G(\vec{\Omega} \times \vec{r})]^2}{2m^*} - \frac{m_G(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2} + qV; \quad (4.2)$$

em que $V = -\frac{\Omega Br^2}{2}$ é o potencial elétrico escalar e $\vec{A} = (0, \frac{Br}{2}, 0)$ é o potencial vetor. O campo elétrico associado ao potencial escalar aparece da transformação do campo magnético aplicado para o referencial rotativo. Como foi dito, $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$ é a velocidade angular de rotação do sistema, m^* é a massa efetiva dos elétrons em um semiconductor e m_G é a massa inercial do elétron devido às forças inerciais em sistemas rotativos. Desta forma, o hamiltoniano do sistema será escrito em coordenadas cilíndricas como :

$$\hat{H} = \frac{p_r^2}{2m^*} + \frac{(p_\phi - \frac{qBr}{2} - m_G r \Omega)^2}{2m^*} - \frac{m_G r^2 \Omega^2}{2} - \frac{qBr^2 \Omega}{2}. \quad (4.3)$$

Substituindo $\psi = R(r)e^{-i\ell\phi}$ na equação de Schrodinger $H\Psi(r, \theta) = E\Psi(r, \theta)$, em coordenadas cilíndricas, com $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, chegamos a

$$r^2 R'' + rR' + (-\sigma^2 r^4 + \eta^2 r^2 - \ell^2)R = 0, \quad (4.4)$$

onde:

$$\sigma^2 = \frac{m^{*2}\omega_c^2}{4\hbar^2} + \frac{m_G(m_G - m^*)\Omega^2}{\hbar^2} + \frac{m^*(m_G - m^*)\omega_c\Omega}{\hbar^2},$$

$$\eta^2 = \frac{2m}{\hbar} \left(\frac{E}{\hbar} - \frac{\omega_c\ell}{2} - \frac{m^*\Omega\ell}{m_G} \right).$$

Escrevendo $\xi = \sigma r^2$ e considerando o limite assintótico $\xi \rightarrow \infty$, a solução geral é dada em termos da função hipergeométrica confluyente de primeira espécie $M(a, b, \xi)$:

$$R_\ell(\xi) = a_\ell e^{-\xi/2} \xi^{|\ell|/2} M\left(-\frac{\eta^2}{4\sigma} + \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2}, 1 + |\ell|, \xi\right) +$$

$$b_\ell e^{-\xi/2} \xi^{-\ell/2} M\left(-\frac{\eta^2}{4\sigma} - \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2}, 1 - |\ell|, \xi\right). \quad (4.5)$$

Na Equação (4.5), a_ℓ e b_ℓ são, respectivamente, os coeficientes das soluções regular e irregular. Observe que o termo irregular se deve ao fato de que ele diverge quando $\xi \rightarrow 0$. Então, tomamos $b_\ell \equiv 0$. Para obter uma função polinomial finita (a série hipergeométrica deve ser convergente para termos uma solução física), a condição $a = -n$, onde n é um número inteiro positivo, deve ser satisfeita (Brandão *et al.*, 2015). A partir dessa condição, os valores possíveis para a energia são dados por:

$$E_n = \hbar\ell \left(\frac{\omega_c}{2} + \frac{m_G\Omega}{m^*} \right) +$$

$$\hbar\sqrt{\omega_c^2 + 4m_G\Omega^2 \frac{(m_G - m^*)}{m^{*2}} + 4\omega_c\Omega \frac{(m_G - m^*)}{m^*}} \left[n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2} \right] \quad (4.6)$$

onde $\omega_c \equiv \frac{qB}{m^*}$ é a frequência de ciclotron. Observamos que $\vec{B}$ e $\vec{\Omega}$ são parâmetros ajustáveis externamente. A presença de rotação, por si só, quebra a degeneração entre estados com momento angular oposto e introduz deslocamentos de energia dependendo da rotação Ω (Brandão *et al.*, 2015), os quais foram analisados na pesquisa (Brandão *et al.*, 2015), com $m_G \equiv m^*$. No entanto, aqui consideraremos uma forma mais apropriada para os níveis de energia. Reescrevemos os níveis de energia na (4.6) da seguinte forma:

$$E_{n+, \ell} = \hbar\sqrt{\omega_c^2 + 4m_G\Omega^2 \frac{(m_G - m^*)}{m^{*2}} + 4\omega_c\Omega \frac{(m_G - m^*)}{m^*}} \left(n_+ + \frac{1}{2} \right) -$$

$$\hbar \left[\frac{\sqrt{\omega_c^2 + 4m_G\Omega^2 \frac{(m_G - m^*)}{m^{*2}} + 4\omega_c\Omega \frac{(m_G - m^*)}{m^*}}}{2} - \frac{\omega_c}{2} - \frac{m_G\Omega}{m^*} \right] \ell, \quad (4.7)$$

onde $2n + |l| = n_+ + n_-$ e $\ell = n_+ - n_-$, com $n_{\pm} = 0, 1, 2, 3, \dots$ (ver apêndice A). Podemos reescrever a expressão acima, da seguinte maneira:

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega(n_+ + \frac{1}{2}) - \hbar\varpi\ell; \quad (4.8)$$

com $\omega \equiv \sqrt{\omega_c^2 + 4m_G\Omega^2 \frac{(m_G - m^*)}{m^{*2}} + 4\omega_c\Omega \frac{(m_G - m^*)}{m^*}}$ e $\varpi \equiv \frac{\sqrt{\omega_c^2 + 4m_G\Omega^2 \frac{(m_G - m^*)}{m^{*2}} + 4\omega_c\Omega \frac{(m_G - m^*)}{m^*}}}{2} - \frac{\omega_c}{2} - \frac{m_G\Omega}{m^*}$. Para garantir que os autovalores de energia adquiram valores positivos é necessário que, $\varpi\ell < 0$, assim devemos ter ou $\varpi < 0$ com $\ell > 0$ ou $\varpi > 0$ com $\ell < 0$. A primeira opção ocorre para $\Omega > 0$, enquanto que a segunda vale para $\Omega < 0$, portanto $\varpi = \pm|\varpi|$ e $\ell = \mp|\ell|$, assim a (4.8) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega(n_+ + \frac{1}{2}) + \hbar|\varpi||\ell|; \quad (4.9)$$

Substituindo $|\varpi| = \Gamma$ e $|\ell| = l$, teremos:

$$E_{n_+, \ell} = \hbar\omega(n_+ + \frac{1}{2}) + \hbar\Gamma l; \quad (4.10)$$

Vamos agora fazer um procedimento semelhante ao que acabamos de desenvolver, mas assumindo que $m_G \equiv m^*$ na equação (4.6), temos:

$$E_n = \hbar\ell \left(\Omega + \frac{\omega_c}{2} \right) + \hbar\omega_c \left[n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2} \right]; \quad (4.11)$$

substituindo novamente $2n + |\ell| = n_+ + n_-$ e $\ell = n_+ - n_-$, com $n_{\pm} = 0, 1, 2, 3, \dots$, obtemos:

$$E_{n_+ \ell} = \hbar(n_+ - n_-) \left(\Omega + \frac{\omega_c}{2} \right) + \hbar\omega_c \left[\frac{n_+ + n_-}{2} + \frac{1}{2} \right]; \quad (4.12)$$

desenvolvendo a expressão, chegamos em:

$$E_{n_+ \ell} = \hbar\omega_c \left(n_+ + \frac{1}{2} \right) + \hbar\Omega\ell. \quad (4.13)$$

Note que novamente para garantir valores positivos para os níveis de energia precisamos da seguinte relação, para $\ell > 0$ temos $\Omega > 0$ e para $\ell < 0$ temos $\Omega < 0$. Assim chegamos em um espectro de energia muito parecido matematicamente com o encontrado na (4.10) e esses níveis de energia muito parecidos com o obtido para um oscilador harmônico quântico (Sakurai; Napolitano, 2013).

Para efeito de comparação de acordo com (Peña *et al.*, 2017) o problema de Landau sem rotação ($\Omega = 0$) apresenta os seguintes níveis de energia:

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \text{ (Níveis de Landau)}. \quad (4.14)$$

4.2 Função de Partição para um sistema girante

De acordo com a definição, a função de partição é dada pela seguinte soma:

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}; \quad (4.15)$$

que está associada a normalização da probabilidade P_n de encontrar o sistema num particular estado microscópico n , portanto a soma é efetuada sobre os estados microscópicos (Salinas, 2005). Usando o resultado da equação (4.10), assim como a definição feita anteriormente para Ω e Γ , podemos calcular a função de partição da seguinte maneira:

$$Z = \sum_{n_+, l} e^{-\beta E_{n_+, l}} = \left(\sum_{n_+=0}^{\infty} e^{-\beta E_{n_+}} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\beta E_l} \right); \quad (4.16)$$

$$Z = \left(\sum_{n_+=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n_+ + \frac{1}{2})} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \Gamma l} \right). \quad (4.17)$$

Reescrevendo a expressão acima, ficamos com:

$$Z = e^{-\frac{\beta \hbar \omega}{2}} \left[\sum_{n_+=0}^{\infty} (e^{-\beta \hbar \omega})^{n_+} \right] \left[\sum_{l=0}^{\infty} (e^{-\beta \hbar \Gamma})^l \right]. \quad (4.18)$$

Usando a seguinte definição matemática $\frac{1}{1-x} = \sum_n x^n, x < 1$, teremos:

$$Z = e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\Gamma}} \right); \quad (4.19)$$

$$Z = \left(\frac{1}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\Gamma}} \right). \quad (4.20)$$

De acordo com a definição de seno hiperbólico $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, podemos reescrever a equação (4.20) da seguinte maneira:

$$Z = \frac{1}{2 \sinh(\frac{\hbar\beta\omega}{2})} \left(\frac{e^{\frac{\beta\hbar\Gamma}{2}}}{e^{\frac{\beta\hbar\Gamma}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\Gamma}{2}}} \right). \quad (4.21)$$

Por fim chegamos a seguinte equação para a função de partição:

$$Z = \frac{e^{\frac{\beta\hbar\Gamma}{2}}}{4 \sinh(\frac{\beta\hbar\omega}{2}) \sinh(\frac{\beta\hbar\Gamma}{2})}. \quad (4.22)$$

De modo análogo vamos usar a equação (4.13) para os níveis de energia quando $m_G \equiv m^*$, assim obtemos a seguinte função de partição:

$$Z = \frac{e^{\frac{\beta\hbar|\Omega|}{2}}}{4 \sinh(\frac{\beta\hbar\omega_c}{2}) \sinh(\frac{\beta\hbar|\Omega|}{2})}. \quad (4.23)$$

Como foi feito para os níveis de energia, usamos a função de partição calculada em (??) para comparação:

$$Z_L = \frac{m^* \omega_c A}{4\pi\hbar} \left(\frac{\hbar\omega_c}{2k_B T} \right); \quad (4.24)$$

em que m^* é a massa efetiva do elétron, ω_c é a frequência associada ao campo magnético, e $A = 1,0\text{mm}^2$ é a área do sistema. Consideramos $m^* \approx 0,067m_e$ (GaAs), em que $m_e \approx 9,109 \times 10^{-31}\text{ kg}$. T é a temperatura absoluta, esses dados foram utilizados para a construção dos gráficos que vamos apresentar a seguir.

4.2.1 Propriedades Termodinâmicas

Utilizando a função de partição, várias quantidades termodinâmicas podem ser determinadas através das seguintes relações:

4.2.1.1 Energia Média:

$$U = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{B, \Omega} . \quad (4.25)$$

A energia média (ou energia interna) U do sistema é derivada do logaritmo da função de partição Z . Ela representa a energia média dos microestados do sistema ponderada pela probabilidade de Boltzmann. Aqui, $\beta = \frac{1}{k_B T}$, onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta.

4.2.1.2 Calor específico:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{B, \Omega} = k_B \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \right)_{B, \Omega} . \quad (4.26)$$

O calor específico a volume constante, C_V , mede a quantidade de energia necessária para aumentar a temperatura do sistema. Ela é a derivada da energia média em relação à temperatura, mostrando como a energia interna varia com a temperatura do sistema.

4.2.1.3 Energia Livre:

$$F = -k_B T \ln Z . \quad (4.27)$$

A energia livre F representa o trabalho que pode ser extraído do sistema a uma dada temperatura. Ela combina a energia interna e a entropia, fornecendo informações sobre a estabilidade e as propriedades de equilíbrio do sistema. É obtida diretamente da função de partição.

4.2.1.4 Entropia:

$$S(T, B) = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_{B, \Omega}. \quad (4.28)$$

A entropia S mede a desordem ou aleatoriedade do sistema. Ela é derivada da função de partição e está relacionada ao número de microestados acessíveis. A entropia é fundamental para a compreensão do fluxo de energia e da distribuição das partículas no sistema.

4.2.1.5 Magnetização:

A magnetização de um gás eletrônico bidimensional (2DEG) leva em consideração a quantização dos níveis de energia em um campo magnético e a influência dos efeitos térmicos. Ela é definida como

$$M(T, B) = T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial B} \right)_{B, \Omega}, \quad (4.29)$$

onde Z é a função de partição.

4.2.1.6 Efeito Magnetocalórico

O efeito magnetocalórico em um 2DEG é obtido a partir da entropia $S(T, B, \Omega)$, onde T é a temperatura, B é o campo magnético e Ω é a rotação do sistema. Para analisar o efeito sob rotação *constante* ($d\Omega \equiv 0$), considera-se a condição isoentrópica, $dS = 0$, o que implica:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B dT + \left(\frac{\partial S}{\partial B} \right)_T dB = 0. \quad (4.30)$$

Isolando $\frac{dT}{dB}$, obtemos:

$$\frac{dT}{dB} = - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial B} \right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B}, \quad (4.31)$$

o que descreve a variação da temperatura com o campo magnético sob condições isoentrópicas.

A partir disso, temos

$$\Delta T_B = - \int_{B_1}^{B_2} \left[\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial B} \right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B} \right] dB, \quad (4.32)$$

que representa a variação adiabática da temperatura do sistema magnético em torno de uma temperatura T . Considerando

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_B = - \left(\frac{\partial S}{\partial B} \right)_T \quad (4.33)$$

e

$$C_B = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B, \quad (4.34)$$

o efeito magnetocalórico pode ser reescrito como

$$\Delta T_B = - \int_{B_i}^{B_f} \frac{T}{C_B} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_B dB. \quad (4.35)$$

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em todas as análises subsequentes, consideramos as quantidades termodinâmicas mencionadas acima como funções da temperatura (T) para campos magnéticos $B = 0$, $B = 0.01$ T, $B = 0.1$ T e $B = 0.5$ T. Para cada um desses casos, são apresentadas curvas correspondentes a diferentes valores da frequência de rotação Ω (± 50 GHz e ± 100 GHz), juntamente com o caso sem rotação ($\Omega = 0$). Inicialmente, analisaremos o cenário em que $m^* \neq m_G$, seguido pelo caso em que $m^* \equiv m_G$. Note que, para este último cenário, o caso $B = 0$ T não é exibido, pois não apresenta uma estrutura de níveis de Landau, conforme demonstrado na equação (4.13).

5.0.1 Energia Interna

A figura (5.1) mostra a energia interna, no caso de $B = 0$ figura (5.1.a)), não há curva para o caso sem rotação porque, na ausência de um campo magnético, o sistema não apresenta níveis de Landau para comparação. As curvas mostram que a energia interna aumenta com a temperatura de maneira quase linear, exceto em temperaturas muito baixas, apresentando diferentes inclinações e valores absolutos. As curvas correspondentes às frequências de rotação de ± 50 GHz coincidem entre si, assim como as curvas para ± 100 GHz. Além disso, as curvas de ± 50 GHz exibem valores maiores de energia interna que ± 100 GHz, considerando os mesmos valores de temperatura.

Quando um campo magnético não nulo é introduzido, a curva correspondente ao caso sem rotação aparece, além disso começa um pequeno afastamento entre as curvas que estavam coincidindo no gráfico anterior. Os níveis de Landau são altamente degenerados, o que se reflete em um comportamento distinto da energia interna. Em geral, esses níveis permanecem em valores de energia interna mais baixos do que as curvas rotacionadas, especialmente à medida que a temperatura aumenta. Para $B = 0.01$ T figura (5.1.b)) e $B = 0.1$ T figura (5.1.c)), a rotação com -100 GHz tende a situar-se acima das demais, seguida pela rotação de mesma magnitude e sinal oposto ($+100$ GHz). Enquanto isso, as rotações de ± 50 GHz exibem valores de energia interna mais baixos. Para $B = 0.5$ T figura (5.1.d)), a hierarquia entre as curvas é modificada em relação aos casos anteriores, com as curvas onde Ω é positivo ficando ligeiramente acima das curvas onde Ω é negativo.

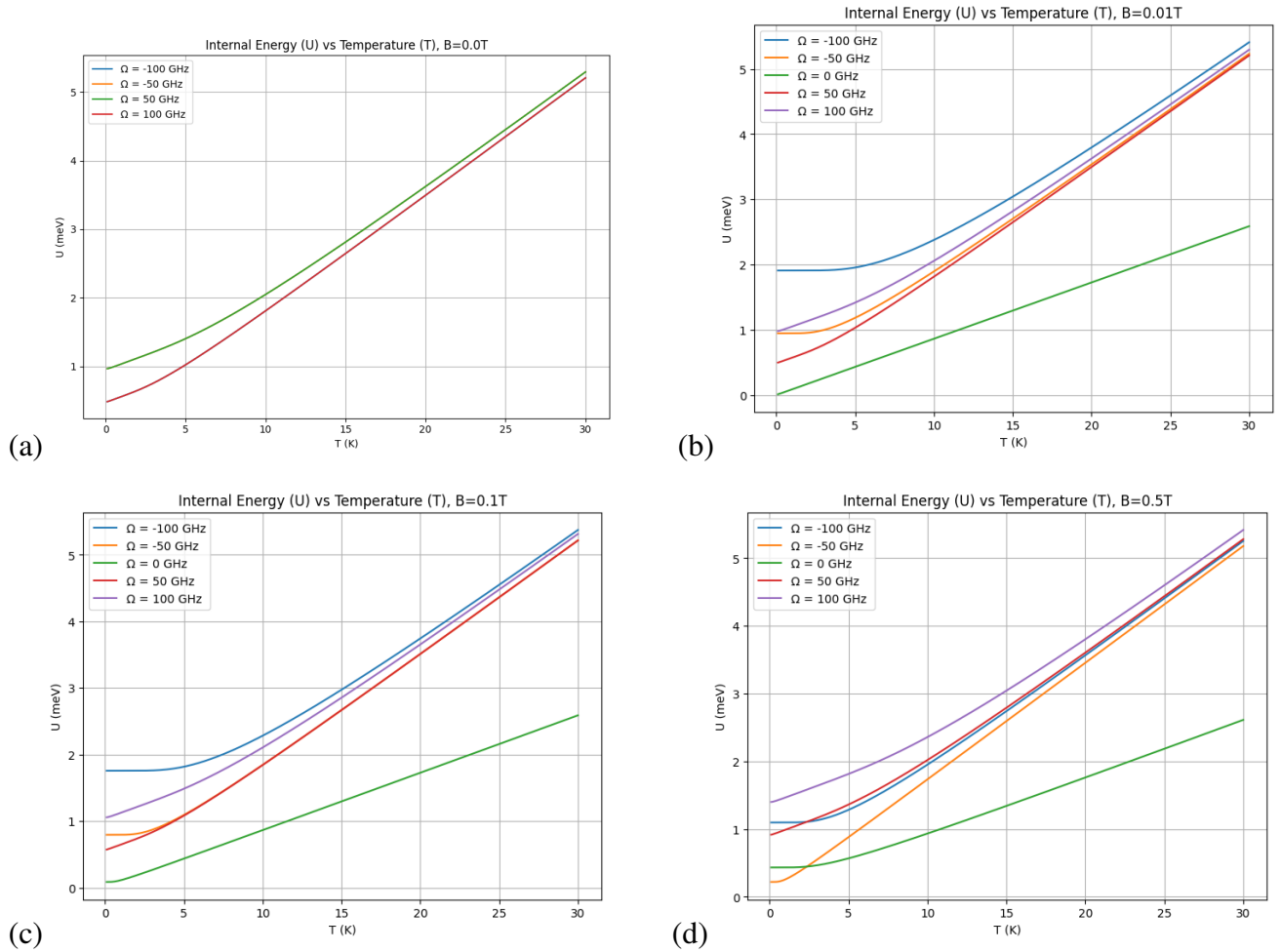


Figura 5.1 – Energia interna para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \neq m_G$.

Por outro lado, a figura (5.2) considera o caso em que $m^* \equiv m_G$, mostrando que o valor e o sentido da rotação Ω não tem um impacto significativo na energia interna para esse caso; porque, não são observadas diferenças notáveis entre as curvas correspondentes às diferentes rotações consideradas. O aumento do campo magnético também provoca pouca diferença entre os gráficos.

A curva sem rotação, característica dos níveis de Landau altamente degenerados, geralmente apresenta valores de U menores do que aqueles obtidos quando a rotação é adicionada ao sistema. O aumento da temperatura leva a um crescimento de U em todos os cenários.

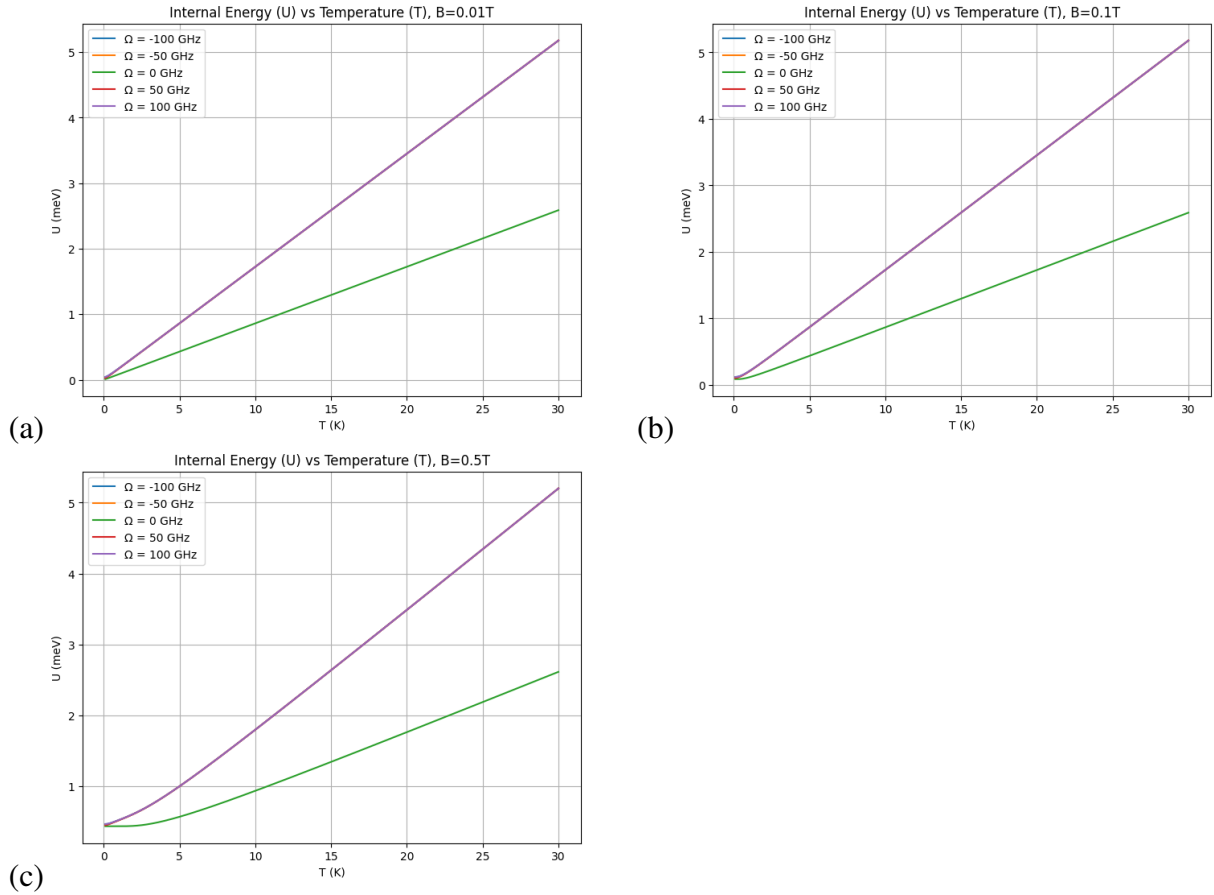


Figura 5.2 – Energia interna para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \equiv m_G$.

5.0.2 Calor específico

A figura (5.3) mostra o calor específico, a partir da figura (5.3.a)) ($B = 0T$), pode-se observar que todas as curvas começam em $T = 0$ e aumentam rapidamente à medida que a temperatura cresce, aproximando-se de um platô em temperaturas acima de aproximadamente 10–15 K. As curvas correspondentes às frequências de rotação de $\pm 50\text{GHz}$ coincidem entre si, assim como as curvas para $\pm 100\text{GHz}$. Frequências de rotação mais altas (em valor absoluto) resultam em valores mais altos de C .

Nas figuras (5.3.b)) e (5.3.c)), com a introdução de um campo magnético, aparece a curva sem rotação, representando um sistema com níveis de Landau. Em geral, ela permanece em valores mais baixos de C para temperaturas intermediárias e altas em comparação com as curvas rotacionadas em baixas temperaturas. Com o campo magnético ocorre um afastamento

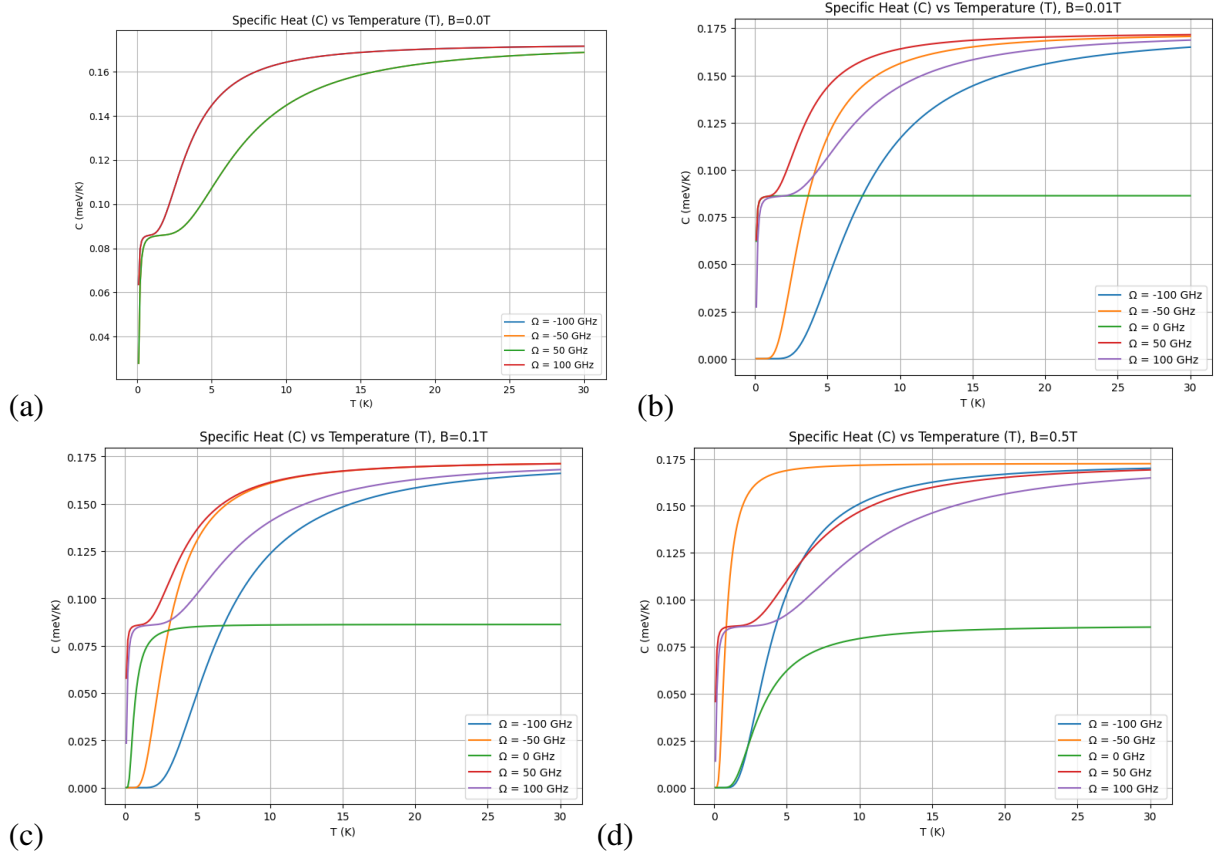


Figura 5.3 – Calor específico para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \neq m_G$.

entre as curvas com o mesmo valor absoluto, além disso a hierarquia entre as curvas sofre alteração, a rotação com 50GHz tende a estabilizar acima das demais, seguida pela rotação de mesma magnitude e sinal oposto (-50GHz). Enquanto isso, as rotações de $\pm 100\text{GHz}$ estabilizam em valores de calor específico mais baixos e em uma temperatura maior. No caso de $B = 0.5\text{T}$, figura (5.3.d)), o efeito de um campo magnético mais intenso torna-se mais evidente, especialmente em temperaturas baixas. Há uma certa mudança na hierarquia entre todas as curvas. Esse fenômeno ocorre devido à forma como o campo magnético, juntamente com a rotação, redistribui os níveis de energia e suas densidades de estados. Com as curvas onde o valor absoluto de Ω é menor se estabilizando acima das curvas onde o valor absoluto de Ω é maior.

Por outro lado, a figura (5.4) considera o caso em que $m^* \equiv m_G$, mostrando que o valor e o sentido da rotação Ω não tem um impacto significativo no calor específico para esse caso ,

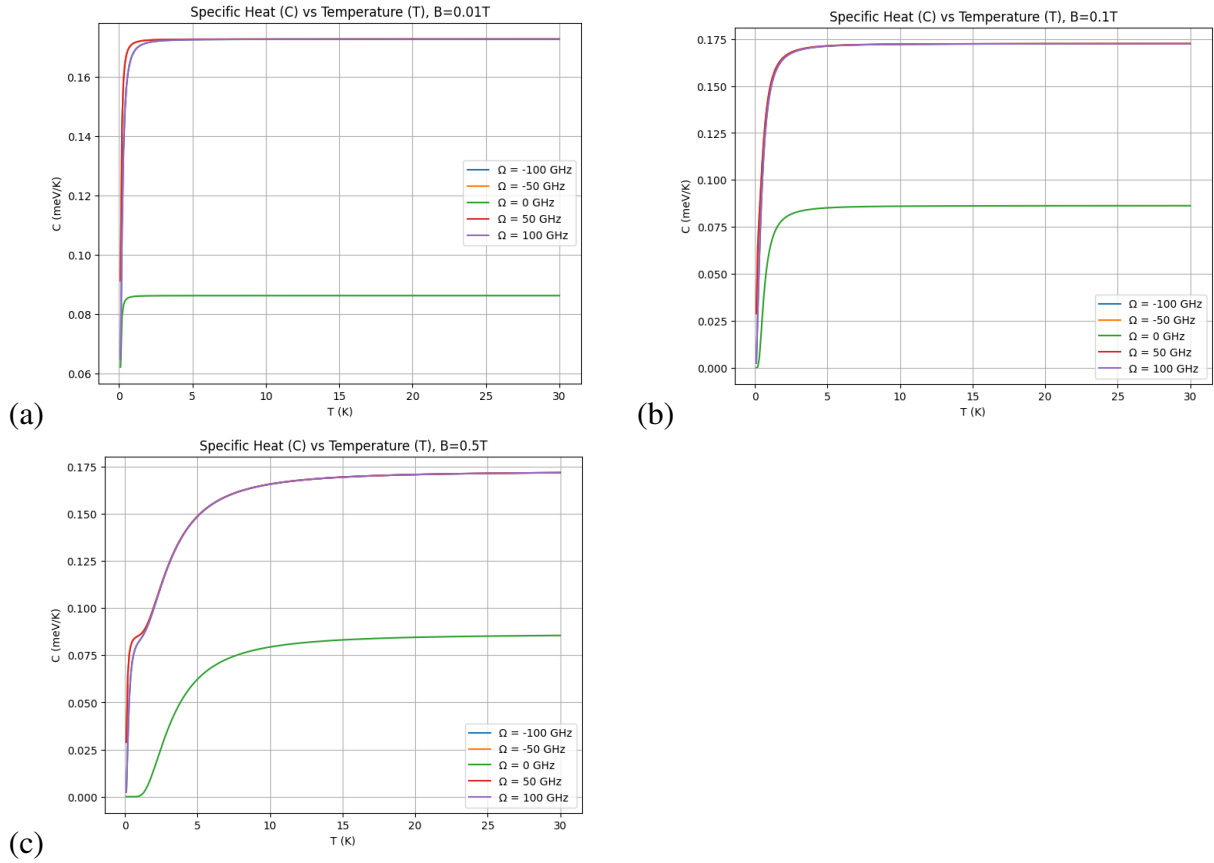


Figura 5.4 – Calor específico para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \equiv m_G$.

assim como para a energia interna; novamente, não são observadas diferenças notáveis entre as curvas correspondentes às diferentes rotações consideradas.

De modo geral, o calor específico tende a zero quando $T \rightarrow 0$, em conformidade com a Terceira Lei da Termodinâmica. Para temperaturas intermediárias e altas, o valor de C reflete o número de estados excitados acessíveis, o que é influenciado tanto pelo campo magnético quanto pela rotação. Enquanto o campo magnético sozinho produz níveis de Landau altamente degenerados, a rotação quebra ou modifica essa degenerescência, resultando em uma maior densidade de transições possíveis e, consequentemente, em um calor específico mais alto.

5.0.3 Energia Livre

A energia livre diminui em todos os gráficos com o aumento da temperatura, na figura (5.5.a)), temos o caso em que $B = 0$. As curvas correspondentes às frequências de rotação de ± 50 GHz coincidem entre si, assim como as curvas para ± 100 GHz. Além disso, as curvas de ± 100 GHz apresentam o maior desvio para baixo.

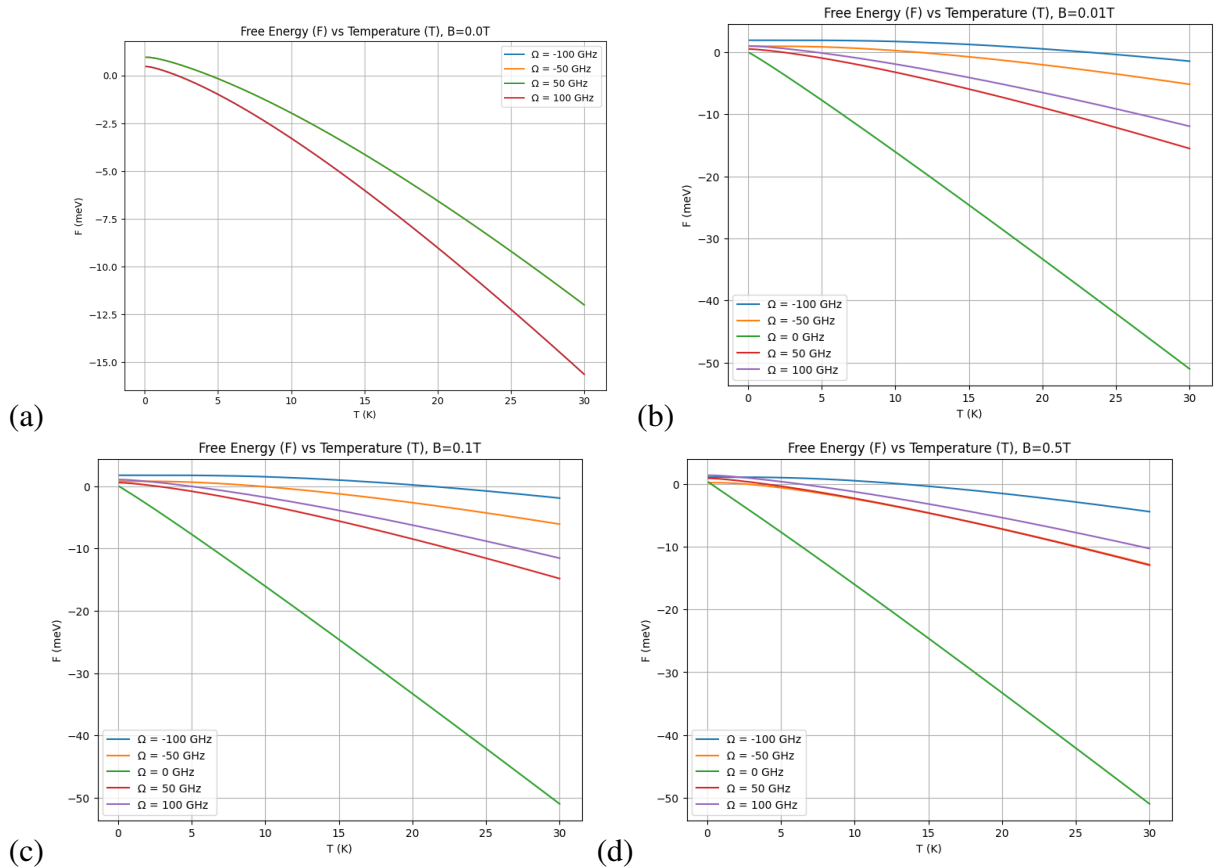


Figura 5.5 – Energia livre para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \neq m_G$.

Nas figuras (5.5.b), c) e d)), são mostradas as curvas para $\Omega = 0$ T, representando o caso sem rotação (níveis de Landau). Em $T = 0$, essa curva apresenta um valor de F menor do que aqueles dos casos com rotação, indicando uma energia do estado fundamental mais baixa para o sistema puramente magnético. A presença da rotação altera o espectro de energia de forma a elevar o valor de F . A Inclinação da curva sem rotação é maior que todas as curvas com rotação e a presença do campo magnético causa uma separação entre as curvas que coincidiam

no gráfico $B = 0$. Além disso, a hierarquia entre as curvas com rotação muda quando $B = 0.5T$, o que depende do equilíbrio entre a energia interna e a contribuição entrópica.

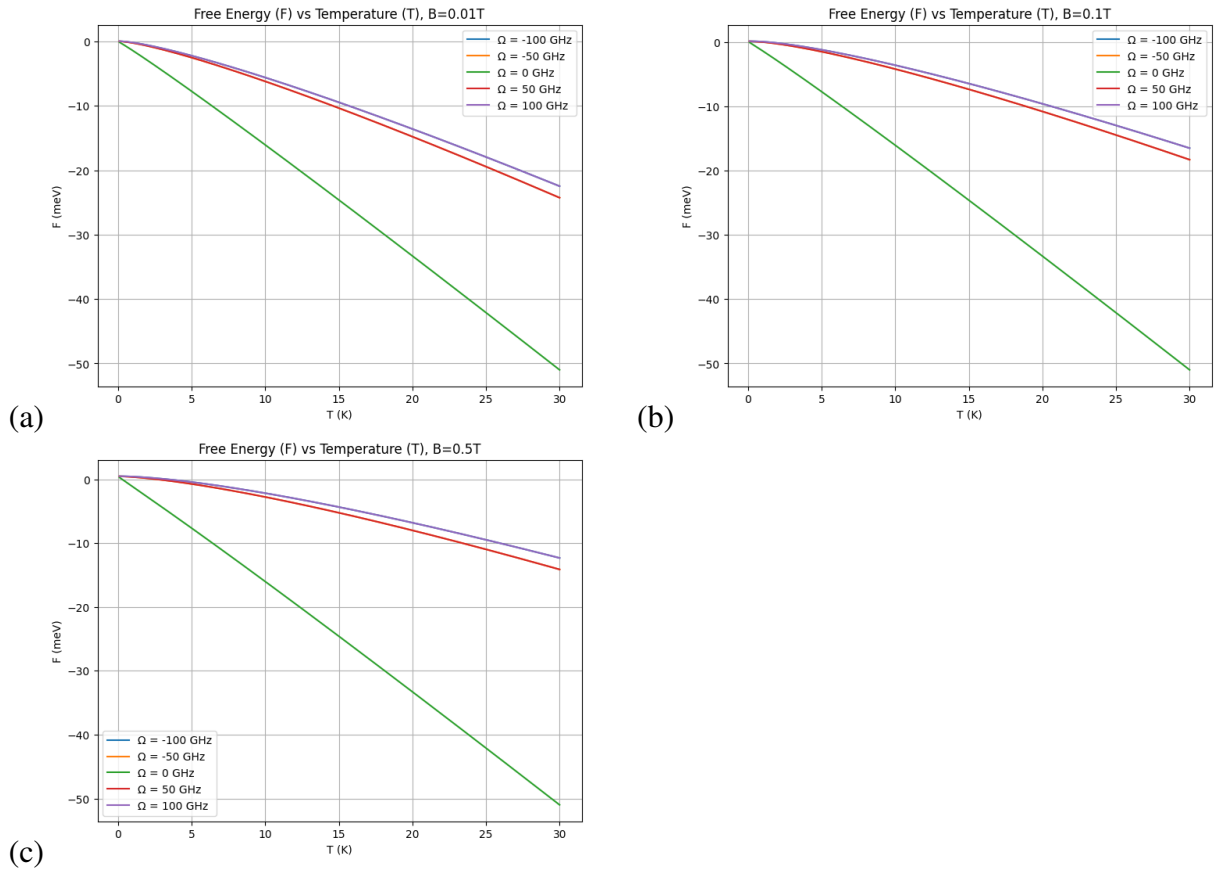


Figura 5.6 – Energia livre para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \equiv m_G$.

A figura (5.6) considera o caso em que $m^* \equiv m_G$, mostrando que o valor e o sentido da rotação Ω não tem um impacto significativo na energia livre para esse caso; novamente, desvios perceptíveis entre as curvas correspondentes às diferentes rotações consideradas não são significativos. Já o aumento do campo magnético provoca uma diminuição na inclinação do gráfico, consequentemente valores maior de energia livre para as curvas com rotação.

5.0.4 Entropia

As figuras (5.7.a), b), c) e d)) mostra a entropia (S) em função da temperatura (T) para alguns valores diferentes de campo magnético, em diferentes cenários de rotação. As curvas

correspondentes às frequências de rotação de $\pm 50\text{GHz}$ em $B = 0\text{T}$ coincidem entre si, assim como as curvas para $\pm 100\text{GHz}$. Além disso, as curvas de $\pm 100\text{GHz}$ apresentam valores mais altos.

Com a introdução de um campo magnético, a curva para $\Omega = 0$ corresponde ao caso sem rotação, onde os níveis de Landau exibem alta degenerescência no estado fundamental, resultando em um valor de entropia diferente de zero mesmo em $T = 0$. Todas as curvas começam em $S = 0$ em $T = 0$, de acordo com a Terceira Lei da Termodinâmica para sistemas com um estado fundamental não degenerado. À medida que a temperatura aumenta, S cresce, refletindo o aumento do número de estados excitados acessíveis.

As curvas de $(+50\text{GHz})$ atingem valores mais altos do que as outras em toda a faixa de T . Há uma mudança na hierarquia entre as curvas de -50GHz em comparação com as outras duas para $B = 0.5\text{T}$. Embora a rotação modifique a densidade de estados, o efeito do intenso campo magnético domina o comportamento da entropia, mantendo-a muito alta para o caso sem rotação. A combinação do campo magnético e da rotação afeta a distribuição dos níveis de energia e, conseqüentemente, a entropia do sistema de maneira significativa.

A figura (5.8) considera o caso em que $m^* \equiv m_G$, mostrando que o valor e o sentido da rotação Ω não tem um impacto significativo na entropia para esse caso; novamente, separações perceptíveis entre as curvas correspondentes às diferentes rotações consideradas não são significativos. Já o aumento do campo magnético provoca uma diminuição na inclinação do gráfico, conseqüentemente valores menores de entropia para as curvas com rotação.

Os resultados demonstram uma interação consistente entre as propriedades termodinâmicas estudadas. A presença do campo magnético leva a uma energia livre mais alta e a uma entropia baixa, mesmo em baixas temperaturas. Simultaneamente, a rotação modifica o espaçamento dos níveis de energia, influenciando o calor específico e a energia interna de maneira não trivial, evidenciado pelas inversões na hierarquia das curvas à medida que a temperatura varia. Juntos, esses efeitos revelam que o campo magnético e a rotação atuam de forma complementar na definição do comportamento geral do sistema.

5.0.5 Magnetização

Os próximos gráficos que corresponde a magnetização $M(T, B)$ e ao efeito magnetocalórico ΔT_B em função da temperatura T , serão realizados para os valores de Ω ($\pm 50\text{GHz}$ e

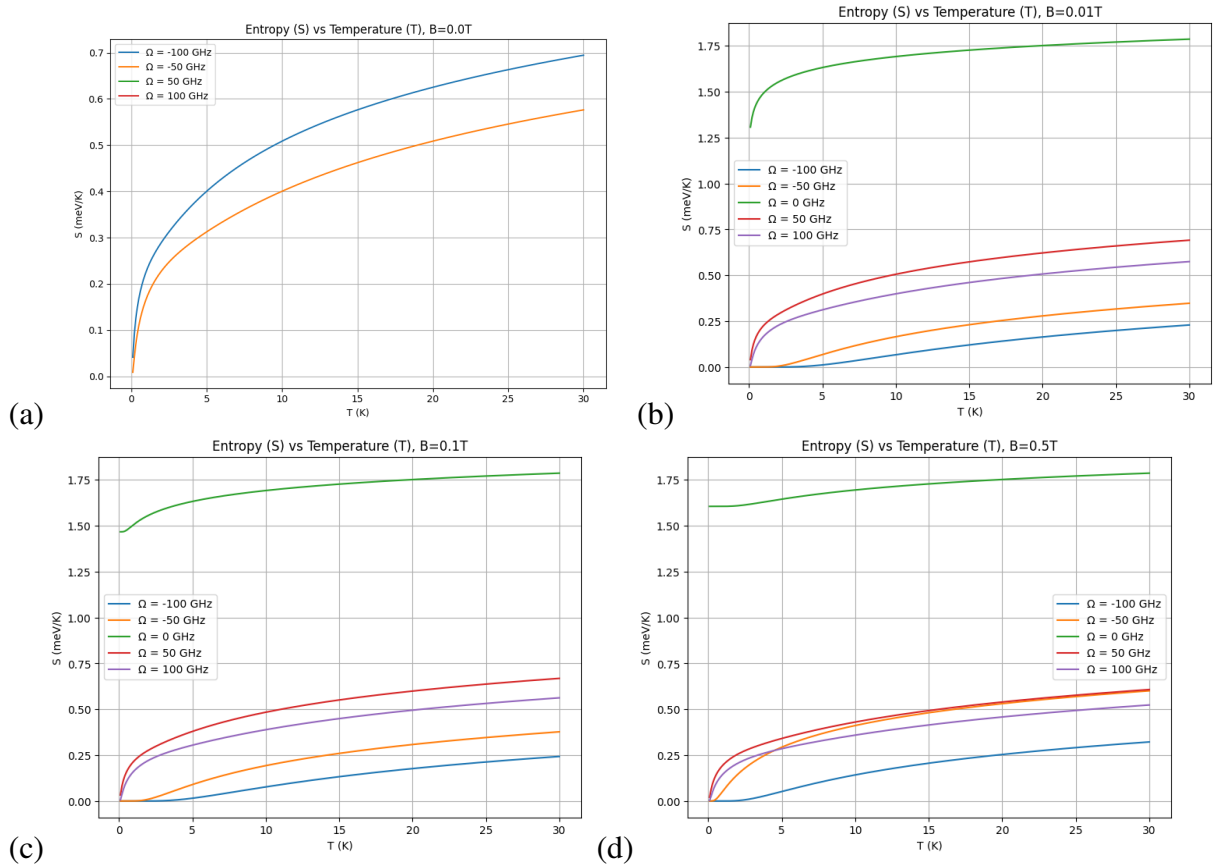


Figura 5.7 – Entropia para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \neq m_G$.

± 100 GHz), para os casos $m^* \neq m_G$ e $m^* \equiv m_G$. Para cada um desses gráficos, são apresentadas as curvas correspondentes a diferentes valores de campos magnéticos, $B = 0.01$ T, $B = 0.05$ T, $B = 0.1$ T, $B = 0.3$ T e $B = 0.5$ T.

Nas figuras (5.9) e (5.10), a magnetização $M(T, B)$ diminui (torna-se mais negativa) com o aumento da temperatura para todos os valores de B , indicando uma resposta térmica típica de sistemas magnéticos, onde a agitação térmica tende a reduzir a ordenação magnética. O aumento do campo magnético causa uma inclinação menor na curva, que significa um valor maior da magnetização a medida que B cresce. Observa-se que a magnetização exibe uma magnitude maior quando $m^* \equiv m_G$.

Nas figuras (5.11) e (5.12), para $\Omega = -50$ GHz e $\Omega = -100$ GHz, respectivamente, pode-se ver que a magnetização muda de sinal no caso em que $m^* \neq m_G$, indicando que o efeito magnetocalórico, que será investigado a seguir, mudará significativamente nesses casos. Assim

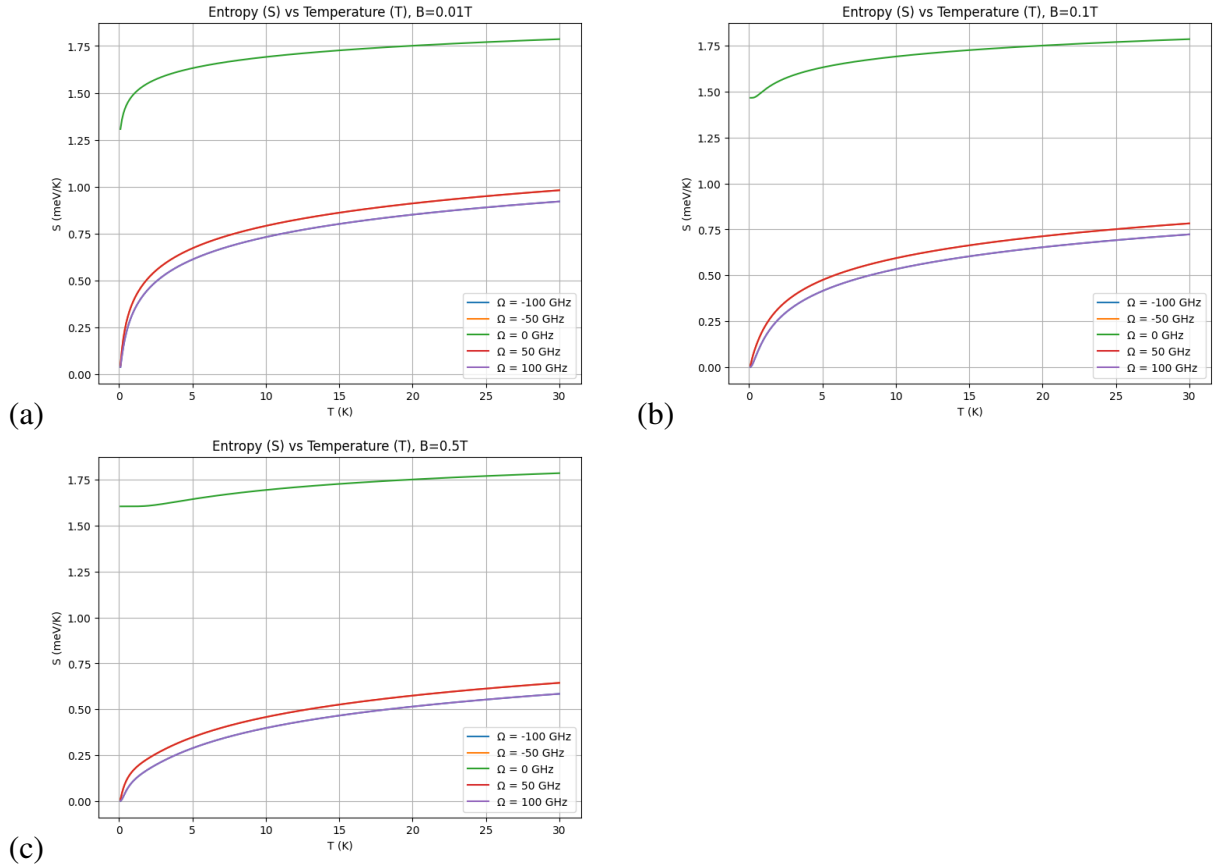


Figura 5.8 – Entropia para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação para alguns valores da velocidade angular Ω em função da temperatura e para diferentes valores da intensidade de um campo magnético externo (medido em Tesla). Os gráficos em que $\Omega = 0$ foram calculados para o problema de níveis de Landau degenerados. Aqui, $m^* \equiv m_G$.

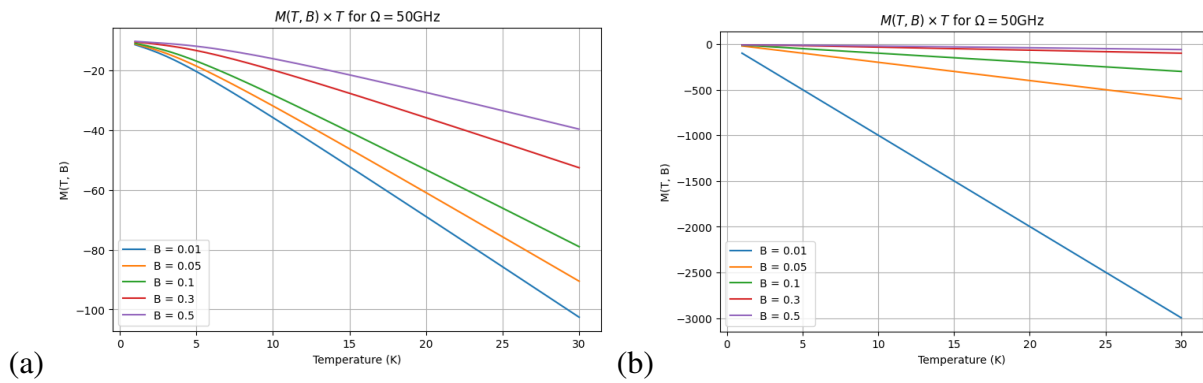


Figura 5.9 – Magnetização $M(T, B)$ para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = 50$ GHz. A figura principal mostra $M(T, B)$ para alguns valores de campos magnéticos externos em Teslas, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$.

como o gráfico anterior a magnetização é maior a medida que aumentamos o valor do campo magnético.

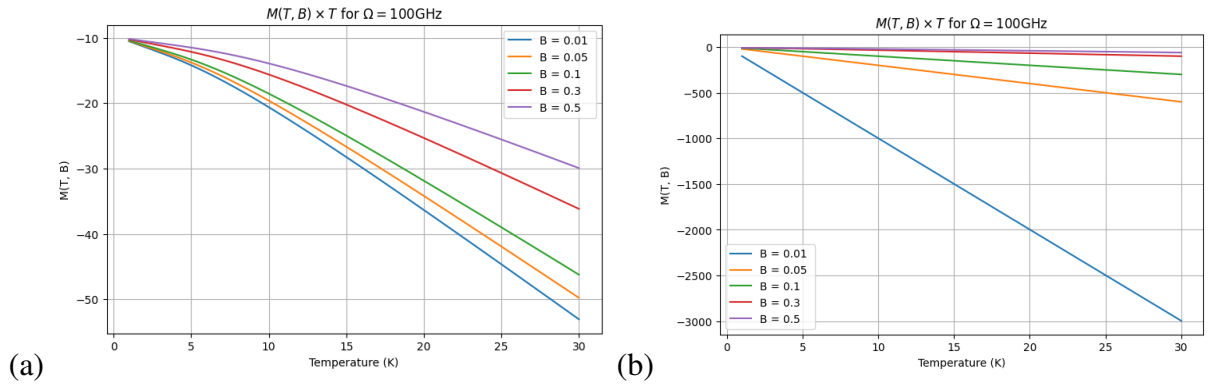


Figura 5.10 – Magnetização $M(T, B)$ para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = 100$ GHz. A figura principal mostra $M(T, B)$ para alguns valores de campos magnéticos externos em Teslas, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$.

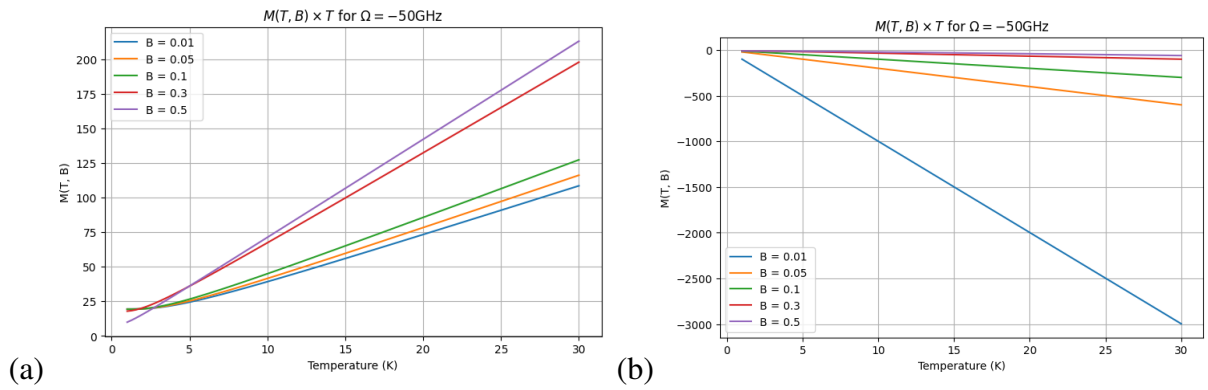


Figura 5.11 – Magnetização $M(T, B)$ para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = -50$ GHz. A figura principal mostra $M(T, B)$ para alguns valores de campos magnéticos externos em Teslas, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$.

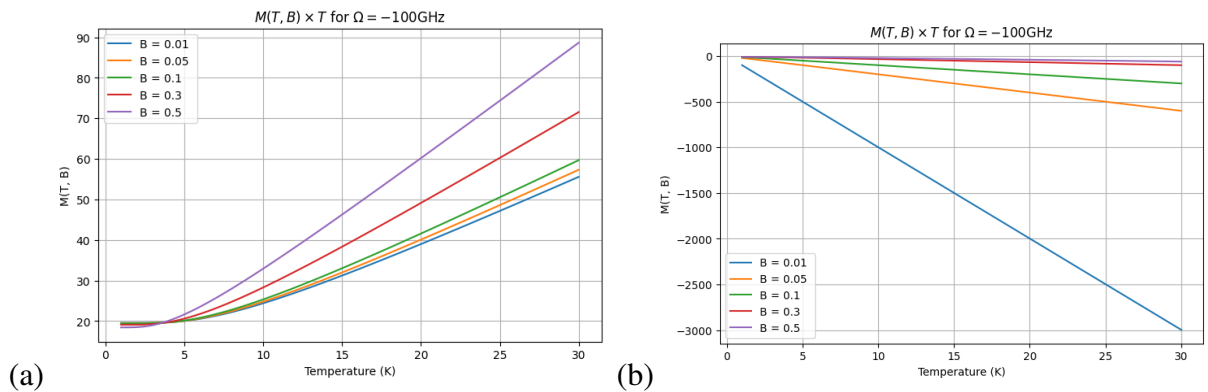


Figura 5.12 – Magnetização $M(T, B)$ para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = -100$ GHz. A figura principal mostra $M(T, B)$ para alguns valores de campos magnéticos externos em Teslas, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$.

5.0.6 Efeito Magnetocalórico

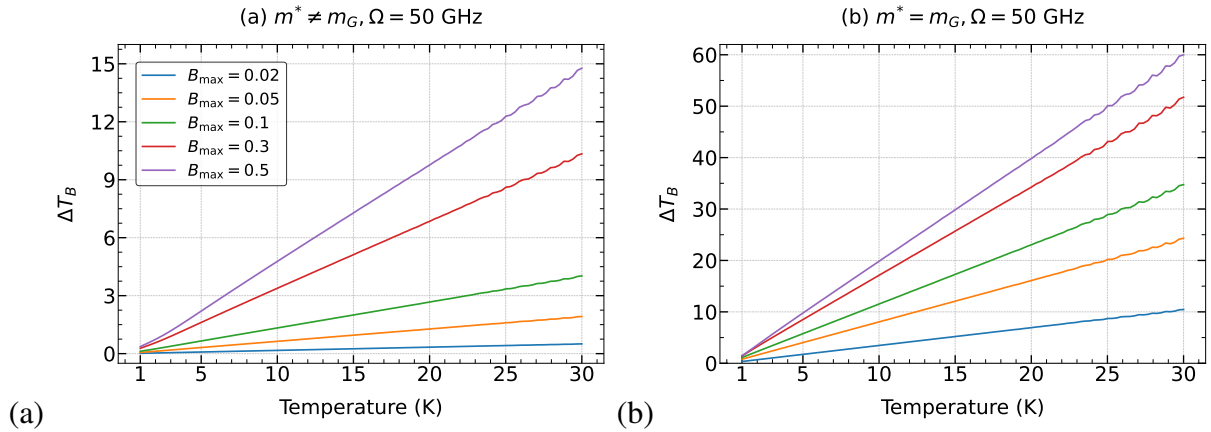


Figura 5.13 – Efeito magnetocalórico (MCE) para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = 50$ GHz. A figura principal mostra ΔT_B para campos magnéticos externos $B_{\max}$ com um valor fixo de $B_i = 0.01$ T, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$.

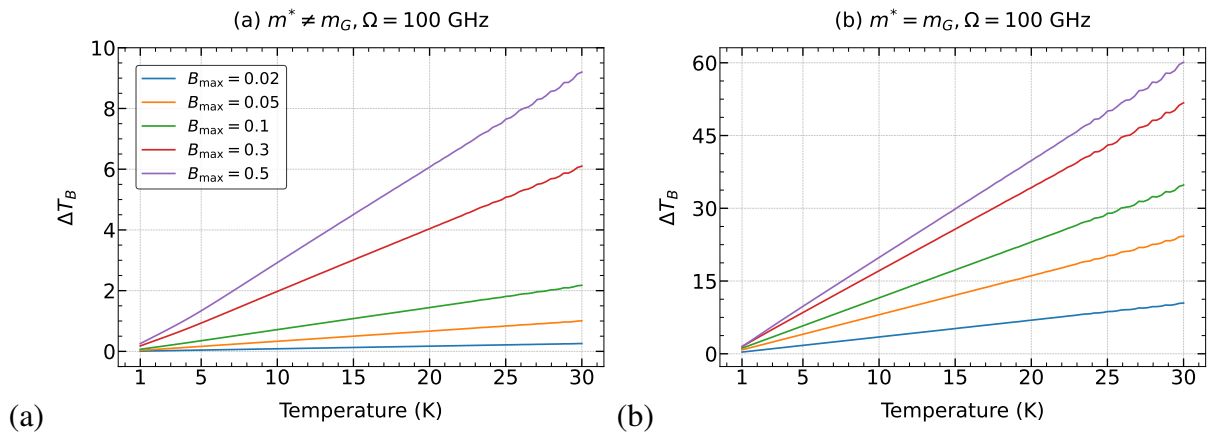


Figura 5.14 – Efeito magnetocalórico (MCE) para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = 100$ GHz. A figura principal mostra ΔT_B para campos magnéticos externos $B_{\max}$ com um valor fixo de $B_i = 0.01$ T, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$.

O efeito magnetocalórico (MCE, do inglês *magnetocaloric effect*) refere-se à variação de temperatura de um material em resposta à aplicação e remoção de um campo magnético externo. Esse efeito pode ser caracterizado pela variação de temperatura ΔT_B em função da temperatura do sistema para diferentes valores do campo magnético máximo $B_{\max}$ e da frequência de rotação Ω . Nos gráficos analisados, a resposta térmica foi avaliada em dois cenários distintos: $m_G \neq m^*$ e $m_G \equiv m^*$.

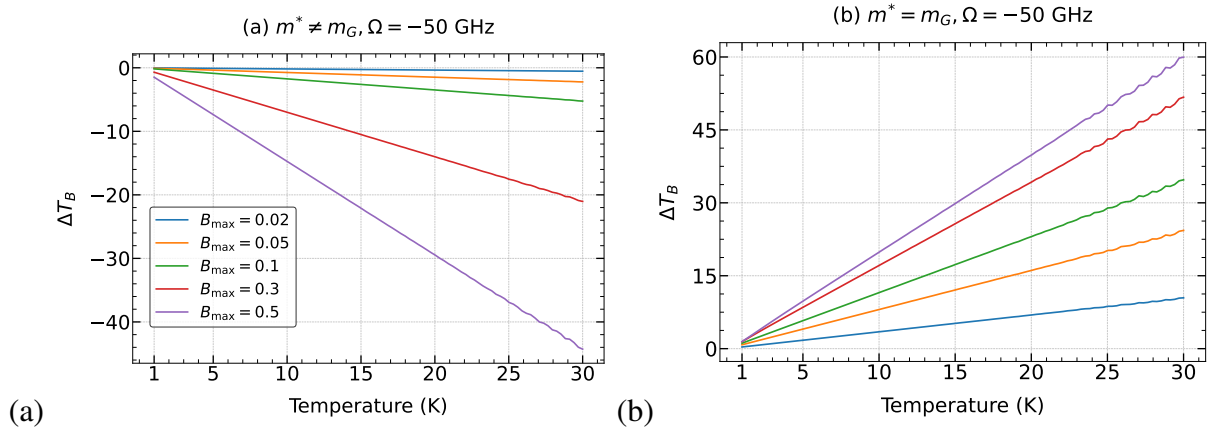


Figura 5.15 – Efeito magnetocalórico (MCE) para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = -100$ GHz. A figura principal mostra ΔT_B para campos magnéticos externos $B_{\max}$ com um valor fixo de $B_i = 0.01$ T, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$.

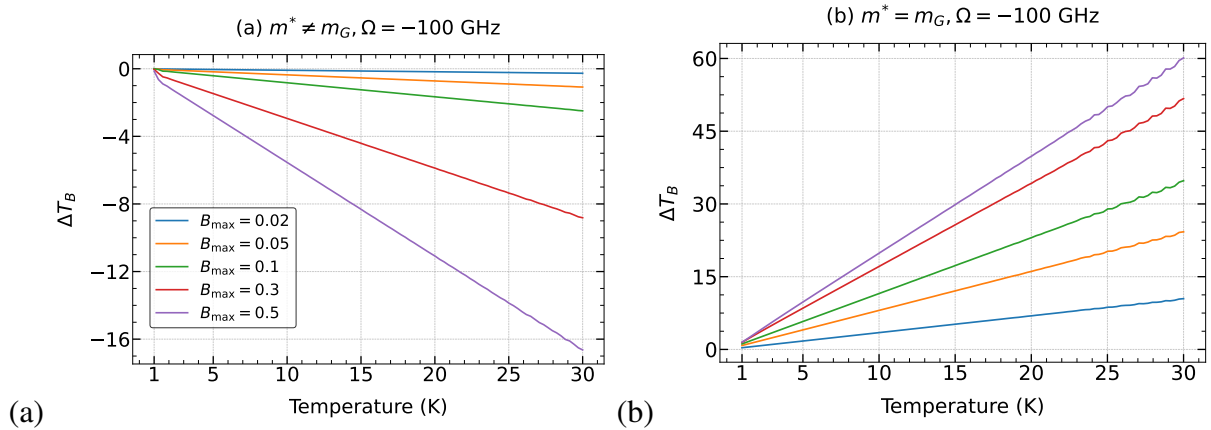


Figura 5.16 – Efeito magnetocalórico (MCE) para um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em rotação em função da temperatura, com $\Omega = -50$ GHz. A figura principal mostra ΔT_B para campos magnéticos externos $B_{\max}$ com um valor fixo de $B_i = 0.01$ T, até 30 K na escala de temperatura, quando a) $m^* \neq m_G$ e b) $m^* \equiv m_G$.

Para todos os gráficos, independentemente do valor de Ω , observa-se que um aumento em $B_{\max}$ resulta em um maior efeito magnetocalórico. Ou seja, a variação de temperatura ΔT_B aumenta à medida que $B_{\max}$ aumenta. Isso ocorre porque um campo magnético mais forte amplifica a resposta térmica do sistema, induzindo uma maior redistribuição da energia dos elétrons.

A rotação afeta significativamente o comportamento do MCE, com padrões distintos para valores positivos e negativos de Ω . Para valores positivos de Ω , ΔT_B aumenta aproximadamente de forma linear com a temperatura, indicando um efeito de aquecimento, sendo maior para 50 GHz do que para 100 GHz. Para valores negativos de Ω , ΔT_B assume valores negativos

em temperaturas mais altas, para $m_G \neq m^*$ indicando um efeito de resfriamento nesse caso, com o resfriamento sendo ligeiramente mais forte para -50 GHz em comparação com -100 GHz.

Ao comparar os conjuntos de gráficos para Ω positivos, nota-se que, quando $m_G \neq m^*$, a variação de temperatura é menor do que no caso em que as massas são iguais. Isso sugere que, ao considerar massas diferentes, a interação entre os estados eletrônicos e o campo magnético é reduzida, limitando o efeito magnetocalórico. Por outro lado, quando as massas são iguais, a resposta térmica do sistema ao campo magnético é mais intensa, resultando em maiores variações em ΔT_B . O efeito de resfriamento não é observado nesse caso, pois vimos que os desvios nas propriedades térmicas são menos proeminentes.

As análises da magnetização $M(T, B)$ e do efeito magnetocalórico ΔT_B destacam a relação intrínseca entre esses fenômenos. Em particular, observa-se que, para valores positivos da frequência de rotação Ω , a diminuição da magnetização é acompanhada por um aumento em ΔT_B , caracterizando um efeito de aquecimento. Esse comportamento permanece consistente, independentemente do modelo adotado, indicando que a interação entre a rotação do sistema e o campo magnético externo influencia diretamente a resposta térmica do gás de elétrons bidimensional (2DEG).

Por outro lado, para Ω negativos, o impacto na magnetização e no efeito magnetocalórico depende da abordagem de massa efetiva considerada. Quando $m^* \equiv m_G$, o comportamento observado é semelhante ao caso de rotações positivas, com a redução da magnetização acompanhando o aumento da temperatura do sistema.

No entanto, quando $m^* \neq m_G$, a resposta da magnetização sofre mudanças significativas, impactando diretamente a manifestação do efeito magnetocalórico. Nessa configuração, surgem regimes de resfriamento, nos quais a variação de temperatura ΔT_B assume valores negativos sob condições específicas. Esse efeito sugere que a diferença entre as massas efetivas modifica a densidade de estados eletrônicos e a forma como o sistema interage com o campo magnético, influenciando a transferência térmica e a resposta magnetocalórica.

O MCE para o caso de níveis de Landau degenerados, ou seja, com $\Omega \equiv 0$, é propriamente investigado na referência (Brandão *et al.*, 2017). A degenerescência dos níveis de Landau altera fundamentalmente o comportamento do MCE: enquanto no caso não degenerado o sistema se aquece com a magnetização, no caso degenerado ocorre resfriamento.

Esses resultados enfatizam a importância de considerar os efeitos rotacionais e as propriedades da massa efetiva na investigação da termodinâmica de sistemas eletrônicos sob campos

magnéticos, abrindo novas possibilidades para a modulação térmica em materiais semicondutores e dispositivos quânticos. Além disso, o efeito magnetocalórico (MCE) pode ser usado para investigar o modelo mais adequado para descrever gases de elétrons bidimensionais (2DEGs) sob efeitos inerciais.

APÊNDICES

APÊNDICE A – ESPECTRO DE ENERGIA: $(n, l) \rightarrow (n_+, n_-)$ Começamos considerando

as seguintes substituições:

$$\frac{\omega_c}{2} + \frac{m_G \Omega}{m^*} \equiv \frac{\varpi}{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\omega_c^2 + 4m_G \Omega^2 \frac{(m_G - m^*)}{m^{*2}} + 4\omega_c \Omega \frac{(m_G - m^*)}{m^*}} \equiv 2\Upsilon$$

Levando em conta o espectro de energia 4.6, obtemos

$$E = \hbar \Upsilon [2n + |\ell| + 1] + \hbar \ell \frac{\varpi}{2}. \quad (1)$$

Fazendo a mudança $n_+ = \frac{1}{2}(2n + |\ell| + \ell)$ e $n_- = \frac{1}{2}(2n + |\ell| - \ell)$, com $n_{\pm} = 0, 1, 2, \dots$, chegamos a

$$n_- - n_+ = 2n + \frac{|\ell|}{2} - \frac{\ell}{2} - 2n - \frac{|\ell|}{2} - \frac{\ell}{2} = -\ell$$

Ou seja,

$$\ell = n_+ - n_-$$

Além disso, temos:

$$2n = 2n_+ - |\ell| - \ell,$$

$$2n = 2n_- - |\ell| + \ell.$$

Somando essas duas relações, obtemos

$$2n + |\ell| = n_+ + n_- = 2n_+ - \ell$$

Dessa forma, podemos reescrever 1 como

$$\begin{aligned} E &= \hbar \Upsilon [2n_+ - \ell + 1] + \hbar \ell \frac{\varpi}{2} \\ &= \hbar (2\Upsilon) \left[n_+ + \frac{1}{2} \right] - \hbar \ell \left(\hbar \Upsilon - \frac{\varpi}{2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Considerando as definições de Υ e ϖ acima, chegamos aos níveis de energia apresentados no texto, equação (4.7).

A CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURA

Este trabalho investigou as propriedades termodinâmicas de um gás de elétrons bidimensional (2DEG) em um meio rotativo sob o efeito Sagnac e um campo magnético uniforme. O foco foi analisar o impacto da rotação (Neto, 2004) e da distinção entre massa efetiva (m^*) e massa gravitacional (m_G) nos níveis de energia e nas respostas termodinâmicas do sistema.

Os resultados mostram que a rotação, mesmo na ausência de um campo magnético, quebra a degenerescência dos estados eletrônicos, e sua presença altera significativamente os níveis de Landau (Landau; Lifshitz, 1971). Além disso, a introdução de $m_G \neq m^*$ modifica a magnetização e favorece regimes de resfriamento no efeito magnetocalórico (MCE) (Sakurai; Napolitano, 2013).

A rotação e o campo magnético influenciam fortemente a energia interna, o calor específico e a energia livre de Helmholtz, com efeitos distintos dependendo do valor de Ω . A entropia do sistema segue a Terceira Lei da Termodinâmica, mas seu comportamento muda com a rotação devido à redistribuição dos estados eletrônicos (Salinas, 2005). A magnetização depende criticamente da frequência de rotação, com inversões de sinal em regimes específicos quando $m_G \neq m^*$ (Zimmerman; Mercereau, 1965). O campo magnético intensifica o MCE e pode levar tanto a aquecimento quanto a resfriamento, dependendo da rotação e da relação entre m_G e m^* .

Esses resultados destacam a interação entre o efeito Sagnac, o campo magnético e a distinção entre as massas na termodinâmica do 2DEG. A introdução de m_G impacta diretamente as respostas do sistema, sugerindo que sua consideração é essencial para modelos mais abrangentes. Investigações adicionais, incluindo cálculos de primeiros princípios e experimentos, poderão fornecer insights mais profundos sobre essa distinção de massas e suas implicações para sistemas semicondutores e dispositivos quânticos (Brandão *et al.*, 2015).

Pensando em uma perspectiva futura, podemos inserir o sistema apresentado no arcabouço da termodinâmica quântica. Durante o mestrado, a área da termodinâmica quântica foi amplamente estudada, visando compreender o surgimento e a importância desse ramo da física, além de traçar um paralelo histórico entre a termodinâmica clássica e quântica, conforme discutido no trabalho (Deffner; Campbell, 2019). O estudo do artigo (Cohen-Tannoudji; Diu; Laloë, 1977) forneceu uma base teórica dos principais conceitos da termodinâmica quântica, incluindo a primeira lei, os processos isotérmicos, adiabáticos e isocóricos. Além disso, ciclos de Carnot e Otto em nível quântico também foram explorados nesse trabalho.

Munido desse ferramental teórico, foram analisados diversos artigos que apresentam motores quânticos. Dentre eles, o que melhor dialoga com nossa pesquisa é o trabalho (Peña *et al.*, 2017). Esse artigo propõe um ciclo de Otto quântico baseado no problema de Landau de partícula única, desenvolvendo gráficos sobre sua eficiência, a região de temperatura e campo magnético nos quais esse ciclo pode ser implementado, entre outros aspectos (Brandão *et al.*, 2017).

Assim, para uma perspectiva futura, podemos desenvolver um motor quântico a partir de um ciclo de Otto aplicado ao nosso sistema: um gás de elétrons bidimensional (2DEG) não interagente em uma amostra rotativa sob a influência de um campo magnético uniforme. Podemos construir gráficos da eficiência do ciclo, bem como das regiões de temperatura e campo magnético onde sua implementação seja viável. Com isso, conseguimos compará-lo ao trabalho (Peña *et al.*, 2017) e também investigar a eficiência e a região de operação do ciclo de Otto para os casos $m_G \neq m^*$ e $m_G \equiv m^*$, buscando uma melhor performance para esse sistema como motor quântico.

REFERÊNCIAS

- BRANDÃO, J. *et al.* Inertial and topological effects on a 2d electron gas. **Journal of Physics Communications**, 2017.
- BRANDÃO, J. E. *et al.* Inertial-hall effect: The influence of rotation on the hall conductivity. **Results in Physics**, 2015.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1977.
- CULSHAW, B. The optical fibre sagnac interferometer: An overview of its principles and applications. **Measurement Science and Technology**, 2005.
- DEFFNER, S.; CAMPBELL, S. **Quantum thermodynamics: An introduction to the thermodynamics of quantum information**. [S.l.]: Morgan and Claypool Publishers, 2019.
- DIRAC, P. A. M. Quantised singularities in the electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society A**, 1931.
- FILGUEIRAS, C. *et al.* Sagnac effect and quantum hall effect in rotating gaas/ga_{1-x}al_xas systems. **Annals of Physics**, 2025.
- GAUTIER, R. *et al.* Accurate measurement of the sagnac effect for matter waves. **Science Advances**, 2022.
- HAKIMI, F. The sagnac effect. **Optics and Photonics News**, 2024.
- JOHNSON, B. L. Inertial forces and the hall effect. **American Journal of Physics**, v. 68, n. 7, p. 649–653, 2000.
- KITTEL, C. **Introduction to solid state physics**. [S.l.]: Wiley, 2005.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. 3rd revised english edition. ed. Oxford: Pergamon Press, 1971. ISBN 9780080160191.
- MEDEIROS, D. **Teoria da Relatividade Especial: Mecânica e Eletrodinâmica**. [S.l.]: Editora Ciência Moderna, 2012.
- NETO, J. A. *et al.* Non-inertial effects in gapped graphene. **European Physical Journal Plus**, v. 139, n. 11, p. 1027, 2024.
- NETO, J. B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. [S.l.]: Livraria da Física, 2004.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**. São Paulo: Edgar Blücher, 2013. ISBN 9788521207267.
- PAIVA, I. L.; LENNY, R.; COHEN, E. Geometric phases and the sagnac effect: Foundational aspects and sensing applications. **Advanced Quantum Technologies**, 2022.
- PEÑA, F. J. *et al.* Magnetic engine for the single-particle landau problem. **Entropy**, 2017.

RAMEZANI-AVAL, H. The sagnac effect in the earth-fixed rotating observer's frame: A comparative study. **Annals of Physics**, 2025.

RUGGIERO, M. L.; TARTAGLIA, A. Test of gravitomagnetism with satellites around the earth. **European Physical Journal Plus**, 2018.

SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Mecânica Quântica Moderna**. [S.l.]: Bookman Companhia Editora, 2013.

SALINAS, S. R. A. **Introdução à Física Estatística**. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 2005.

SEMON, M. D.; SCHMIEG, G. M. Note on the analogy between inertial and electromagnetic forces. **American Journal of Physics**, 1981.

SHADDOCK, D. A. Operating lisa as a sagnac interferometer. **Physical Review D**, 2004.

SOUZA, A. D. S. *et al.* Probing the solar system for dark matter using the sagnac effect. **Annals of Physics**, 2025.

WANG, Z.-Y. Sagnac effect and emf in heavy-electron materials: Revisitation of coriolis force and euler force. **Results in Physics**, 2023.

ZHANG, W.-Z. *et al.* Signal-to-noise-ratio amplification based on symmetry breaking induced by the sagnac effect. **Physical Review A**, 2024.

ZIMMERMAN, J. E.; MERCEREAU, J. E. Compton wavelength of superconducting electrons. **Physical Review Letters**, 1965.

