



ARIANA CAMPOS FRÜHAUF

**ESTUDO DO CRESCIMENTO DIAMÉTRICO DE CEDRO
(*Cedrela fissilis*) POR REGRESSÃO QUANTÍLICA NÃO
LINEAR**

LAVRAS – MG

2022

ARIANA CAMPOS FRÜHAUF

**ESTUDO DO CRESCIMENTO DIAMÉTRICO DE CEDRO (*Cedrela fissilis*) POR
REGRESSÃO QUANTÍLICA NÃO LINEAR**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutora.

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

Orientador

Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes

Coorientador

LAVRAS – MG

2022

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Frühauf, Ariana Campos

Estudo do crescimento diamétrico de cedro (*Cedrela fissilis*) por regressão quantílica não linear / Ariana Campos Frühauf. – Lavras : UFLA, 2022.

73 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Joel Augusto Muniz.

Coorientador: Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes.

Tese(doutorado)–Universidade Federal de Lavras, 2022.

Bibliografia.

1. Anéis de crescimento. 2. Curva de crescimento. 3. Dendrocronologia. I. Muniz, Joel Augusto. II. Fernandes, Tales Jesus. III. Título.

ARIANA CAMPOS FRÜHAUF

**ESTUDO DO CRESCIMENTO DIAMÉTRICO DE CEDRO (*Cedrela fissilis*) POR
REGRESSÃO QUANTÍLICA NÃO LINEAR
STUDY OF THE DIAMETER GROWTH OF CEDAR (*Cedrela fissilis*) BY
NONLINEAR QUANTILE REGRESSION**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutora.

APROVADA em 13 de abril de 2022.

Profa. Dra. Ana Carolina Maioli Campos Barbosa	UFLA
Prof. Dr. Gabriel de Assis Pereira	USP
Prof. Dr. João Domingos Scalon	UFLA
Prof. Dr. Marcelo Ângelo Cirillo	UFLA

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz
Orientador

Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2022**

À Deus em primeiro lugar, pois sem Ele nada seria possível.

*Ao meu amado esposo, Otávio José dos Santos Filho, pelo amor, apoio, incentivo e paciência
em cada passo dessa caminhada.*

À minha linda filha, Júlia Frühauf Santos, por entender minha ausência e me apoiar.

Aos meus amigos e colegas que contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por mais uma vez conduzir a minha vida e estar ao meu lado na realização de mais um de meus vários sonhos.

Ao meu maravilhoso esposo, Otávio José dos Santos Filho, por sempre ser o meu maior apoiador e incentivador. Obrigada por tanto amor e por entender cada momento de ausência nessa caminhada.

À minha linda filha, Júlia Frühauf Santos, por sempre me ajudar com suas palavras carinhosas e abraços restauradores.

À minha irmã, Sheila Chris Frühauf Argenton, pelo constante incentivo.

Ao meu orientador, professor Joel Augusto Muniz, pelas orientações, conselhos, tantas palavras de incentivo e por sempre acreditar em minha capacidade, muitas vezes mais do que eu mesma, isso foi fundamental para realização deste sonho. Obrigada pela confiança depositada em mim a cada dia e por dividir um pouco da sua grande sabedoria comigo.

Ao meu coorientador, professor Tales Jesus Fernandes, por sempre ter me ensinado e aconselhado. Obrigada por ter me ajudado a acreditar mais em mim, seus conselhos com certeza foram fundamentais para minha formação.

À minha querida amiga e tutora Kelly Pereira de Lima, sem você este trabalho não teria sido realizado. Obrigada por toda ajuda que me deu ao longo do caminho e obrigada por ser a minha inspiração, tanto nos estudos como na vida.

À minha eterna professora, Selzi Fonseca Souza, por sempre me incentivar e aconselhar. Seus conselhos foram fundamentais para realização desse sonho. Obrigada por sempre acreditar em mim e por, em muitos momentos, a senhora ser mais que uma professora, mais que uma amiga, ser na verdade... uma mãe.

Ao Grupo de Estudos em Regressão Não Linear, pois sem vocês esta caminhada teria sido muito mais difícil.

À Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Estatística, em especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária pelo conhecimento transmitido e contribuição para minha formação profissional.

À secretária do Programa do Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, Nádia, pela simpatia e prestatividade de sempre. Obrigada por ser uma bênção na vida de cada estudante que passa pelo programa.

Aos meus colegas e amigos de pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária pela tão boa convivência e troca de saberes. Em especial, ao Jorge e à Fernanda, os quais sempre estiveram ao meu lado nos momentos bons e difíceis de cada disciplina cursada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

As florestas exercem um papel fundamental na manutenção da vida. Porém, elas estão diminuindo e assim, muitas espécies arbóreas, principalmente de florestas nativas, como é o caso do cedro (*Cedrela fissilis*), estão entrando em extinção devido a sua intensa exploração. Sendo assim, faz-se necessário o estudo do seu crescimento como auxílio na obtenção de melhores planos de manejo para as florestas que o contém. O crescimento das árvores, em geral, é bem ajustado por modelos de regressão não linear. Porém, comumente pode apresentar problemas proporcionados pela heterocedasticidade ou possível assimetria na distribuição dos resíduos. A regressão quantílica pode contornar esses problemas permitindo estimativas em diferentes quantis e gerando assim um mapeamento mais completo do desenvolvimento da floresta em estudo. O objetivo deste trabalho foi comparar o ajuste dos modelos não lineares Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull pelo método dos mínimos quadrados e pela regressão quantílica, para os dados do diâmetro a altura do peito (DAP) acumulado ao longo do tempo para 56 árvores amostradas em floresta nativa com o uso de técnica não destrutiva e classificá-las como de pequeno, médio e grande porte. Utilizou-se o coeficiente de determinação, o desvio médio absoluto e o critério de informação de Akaike para avaliar a qualidade dos ajustes e verificou-se a adequabilidade dos modelos através da análise residual e das medidas de não linearidade. Toda análise computacional foi realizada utilizando-se o *software* estatístico R e o modelo Brody foi o que melhor aderiu aos dados.

Palavras-chave: Anéis de crescimento. Curva de crescimento. Dendrocronologia. Modelo Brody.

ABSTRACT

Forests play a key role in sustaining life. However, they are decreasing, and so many tree species, mainly from native forests, as is the case of cedar (*Cedrela fissilis*), are going into extinction due to their intense exploitation. Therefore, it is necessary to study its growth as an aid in obtaining better management plans for the forests that contain it. Tree growth, in general, is well adjusted by nonlinear regression models. However, it can commonly present problems caused by heteroscedasticity or possible asymmetry in the distribution of residues. Quantile regression can overcome these problems by allowing estimates in different quantiles and thus generating a more complete mapping of the development of the forest under study. The objective of this work was to compare the fit of the nonlinear Logistic, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards, and Weibull models by the least-squares method and by quantile regression, for the data of the diameter of breast height (DBH) accumulated at the overtime for 56 trees sampled in a native forest using a non-destructive technique and classify them as small, medium and large. The coefficient of determination, the mean absolute deviation, and the Akaike information criterion was used to assess the quality of the adjustments and the adequacy of the models was verified through residual analysis and non-linearity measures. All computational analysis was performed using the R statistical software and the Brody model was the one that best adhered to the data.

Keywords: Growth rings. Growth curve. Dendrochronology. Brody model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Anéis de crescimento observados em um disco de <i>Araucaria angustifolia</i>	14
Figura 2.2 – Variações dos anéis de crescimento da árvore: 1 - primeiro ano de crescimento, 2 - ano chuvoso (anéis mais largos), 3 - ano com estiagem (anéis mais estreitos), 4 - cicatriz de um incêndio.	15
Figura 2.3 – Amostra cilíndrica retirada de floresta nativa com o uso do Trado de Pressler	15
Figura 2.4 – Representação dos períodos de crescimento em fenômenos biológicos	21
Figura 2.5 – Ilustração do quantil de ordem τ numa dada distribuição.	28
Figura 2.6 – Densidade da distribuição Laplace assimétrica padrão	30
Figura 2.7 – Densidade das distribuições Skew normal, Skew Student-t, Skew Laplace, Skew slash e Skew normal contaminada para $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e diferentes valores para o parâmetro τ	31
Figura 2.8 – Gráfico da função de perda quantílica para o quantil de ordem τ	32
Figura 2.9 – Ilustração do caminho percorrido para encontrar a solução ótima pelos métodos <i>simplex</i> e pontos interiores.	33
Figura 3.1 – Processo de coleta das amostras de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) com o Trado de Pressler. A: Inserção do Trado de Pressler na árvore; B: Retirada da amostra radial com o extrator do Trado de Incremento	40
Figura 3.2 – Anéis de crescimento de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) ampliados	40
Figura 3.3 – Amostra de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) preparada para a medição com o LIN-TAB 6 Scientific	41
Figura 4.1 – Histograma para o DAP acumulado em árvores de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>)	46
Figura 4.2 – <i>Boxplot</i> para o DAP acumulado, em cm, em árvores de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>)	47
Figura 4.3 – Gráfico de dispersão para os dados de DAP acumulado, em cm, em função da idade, em anos, das árvores de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>)	47
Figura 4.4 – Distribuição gráfica dos resíduos para DAP acumulado das árvores de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>), em que (A), (C) e (E) representam os valores ajustados em relação aos resíduos e (B), (D) e (F) representam os valores residuais em relação aos quantis teóricos para os modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy.	49

Figura 4.5 – Distribuição gráfica dos resíduos para DAP acumulado das árvores de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>), em que (A), (C) e (E) representam os valores ajustados em relação aos resíduos e (B), (D) e (F) representam os valores residuais em relação aos quantis teóricos para os modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull.	50
Figura 4.6 – Ajuste dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull aos dados de DAP acumulado, em cm, em função da idade, em anos, das árvores de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>)	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Modelos de regressão não linear de uso comum para descrever curvas de crescimento na área florestal.	22
Tabela 3.1 – Modelos de regressão não linear ajustados para descrever a curva de crescimento de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) através da regressão convencional e regressão quantílica.	42
Tabela 4.1 – Estatística descritiva para o DAP acumulado, em cm, em árvores de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) ao longo dos anos.	45
Tabela 4.2 – Valor-p dos testes de Shapiro-Wilk (normalidade), Durbin-Watson (independência) e Breusch-Pagan (homocedasticidade) aplicados aos resíduos dos modelos ajustados.	48
Tabela 4.3 – Critério de informação de Akaike (AIC) para os modelos de regressão quantílica em diferentes quantis.	51
Tabela 4.4 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull ajustados pelo método dos mínimos quadrados ordinários (M.Q.O.) e pela regressão quantílica (R.Q.) com seus respectivos erros-padrão.	52
Tabela 4.5 – Critérios para seleção dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull ajustados aos dados de DAP acumulado em árvores de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) ao longo dos anos pela regressão quantílica.	54
Tabela 4.6 – Distância euclidiana entre os valores de DAP acumulado observados e preditos pelos modelos de regressão quantílica nos quantis $\tau = 0,25$, $\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$ para árvores classificadas como de pequeno porte.	58
Tabela 4.7 – Distância euclidiana entre os valores de DAP acumulado observados e preditos pelos modelos de regressão quantílica nos quantis $\tau = 0,25$, $\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$ para árvores classificadas como de porte intermediário.	59
Tabela 4.8 – Distância euclidiana entre os valores de DAP acumulado observados e preditos pelos modelos de regressão quantílica nos quantis $\tau = 0,25$, $\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$ para árvores classificadas como de grande porte.	60
Tabela 4.9 – Estimativas dos parâmetros do modelo Brody ajustado pela regressão quantílica no quantil $\tau = 0,5$ para cada árvore amostrada.	61

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	REFERENCIAL TEÓRICO	12
2.1	A importância das florestas	12
2.2	Idade das árvores	13
2.3	Dendrocronologia	16
2.4	Cedro	17
2.5	Modelos de Regressão	18
2.5.1	Regressão não linear convencional	20
2.5.2	Regressão quantílica	27
2.5.2.1	Regressão quantílica não linear	29
2.5.3	Crítérios para seleção de modelos	36
3	MATERIAL E MÉTODOS	39
3.1	Material	39
3.2	Metodologia	41
3.2.1	Modelos a serem ajustados	41
3.2.2	Análise de resíduos	42
3.2.3	Seleção do modelo	43
3.2.4	Agrupamento das árvores em estudo	43
3.2.5	Recursos computacionais	44
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	45
4.1	Análise exploratória	45
4.2	Ajuste dos modelos	47
4.3	Agrupamento das árvores em estudo	57
4.4	Ajuste dos modelos de regressão quantílica não linear para cada árvore	61
5	CONCLUSÕES	63
	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

As florestas são indispensáveis para manutenção da vida em nosso planeta, sendo responsáveis pelo ar e água limpos, estabilização do solo protegendo-o de erosões, manutenção da biodiversidade abrigando mais da metade das espécies terrestres de plantas, animais e insetos e pela sua importante contribuição na estabilidade do clima global, através, principalmente, da absorção do dióxido de carbono, o qual é o principal gás causador do efeito estufa. Além disso, é importante destacar que, segundo a Organização das Nações Unidas (ONU, 2021), mais de 1,6 bilhão de pessoas dependem diretamente das florestas para sua subsistência.

As florestas também se mostram importantes para a economia mundial, pois o setor florestal contribui com, aproximadamente, US\$ 600 bilhões anualmente para PIB global e oferece emprego para mais de 50 milhões de pessoas (FAO, 2020). Porém, observa-se ao longo dos anos que a cobertura florestal vem diminuindo, o que segundo o IPCC (2021) (Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas), tem contribuído diretamente com o aumento da temperatura global, ocasionando graves danos à humanidade como severas secas e inundações, ondas de calor e frio extremos, graves incêndios ambientais, entre outros. Com isso, observa-se a importância de práticas sustentáveis de manejo florestal para que os recursos das florestas se perpetuem.

O Brasil detém a segunda maior área florestal do mundo, o que corresponde a, aproximadamente, 498 milhões de hectares, sendo desse total, 97,6% de florestas naturais (BRASIL, 2019). À vista disso, torna-se evidente a importância de estudos que possibilitem um maior entendimento dos processos que envolvem esse tipo de floresta, obtendo-se um aprimoramento em sua forma de manejo e assim possibilitando a continuidade de seus recursos.

Uma das principais variáveis de estudo é a idade das árvores, porém, em florestas nativas ela é muito difícil de ser mensurada, pois essas florestas geralmente são formadas por maciços multiâneos, portanto, essas idades precisam ser encontradas através de alguma metodologia. O método mais difundido para determinação da idade de uma árvore é o que utiliza a análise e contagem dos anéis de crescimento, chamado de dendrocronologia. Por meio de amostragens não destrutivas, é possível aplicar a dendrocronologia em formações naturais sem prejudicar a conservação das florestas nativas (FIGUEIREDO FILHO et al., 2017).

O crescimento das árvores é bem descrito por modelos de regressão não linear, porém esses ajustes podem estar sujeitos a problemas como estimativas enganosas, interpretações equivocadas e ajuste inadequado do modelo aos dados proporcionados pela heterocedasticidade

e/ou assimetria na distribuição dos resíduos. Segundo Inga e Valle (2017), esses problemas são comuns em estudos florestais, porém na maioria das vezes não são abordados e nem sequer mencionados.

No decorrer dos estudos de Frühauf (2018) ao utilizar a regressão não linear convencional para modelar todas as observações do DAP acumulado das árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) ao longo do tempo, modelagem esta importante para estudos dendrocronológicos, foi possível observar no vetor de resíduos os problemas mencionados acima, os quais foram contornados com o agrupamento dos dados e a modelagem das médias, ocasionando com isso uma perda significativa de informações.

Assim sendo, a regressão quantílica é apresentada como uma alternativa para contornar esses problemas no vetor de resíduos, permitindo com isso o ajuste dos dados de todas as árvores amostradas sem a utilização de médias e do agrupamento dos mesmos, além de possibilitar estimativas em diferentes quantis, gerando assim um mapeamento mais completo do desenvolvimento florestal, uma vez que se calcula a resposta de cada quantil da distribuição.

Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo ajustar e comparar modelos não lineares por meio do método dos mínimos quadrados e da regressão quantílica para descrever o crescimento diamétrico de árvores de cedro, provenientes de floresta nativa, em função da idade, a partir das medidas de seus anéis de crescimento anuais. Objetivou-se também classificar as árvores individualmente como de pequeno, médio ou grande porte através da regressão quantílica não linear obtendo um mapeamento mais completo da floresta em estudo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A importância das florestas

As florestas exercem um papel fundamental na preservação da vida em nosso planeta. Segundo o último relatório apresentado pela FAO (2020) (Organização das Nações Unidas para a Alimentação e a Agricultura) em julho de 2020 sobre a Avaliação Global dos Recursos Florestais (Global Forest Resources Assessment - FRA 2020), foi destacada a importância das florestas para as pessoas, o meio ambiente e também para a economia mundial.

Elas fornecem madeiras, combustíveis, alimentos e matérias-primas como resina, celulose, cortiça, entre outras e proporcionam serviços ambientais essenciais, tais como ar e água limpos, protegem o solo de erosões, conservam a biodiversidade, pois abrigam mais da metade das espécies terrestres de animais, plantas e insetos desempenhando assim um papel fundamental no equilíbrio ecológico do planeta, mantêm o ciclo hidrológico e amenizam as mudanças climáticas (FAO, 2020; GIBSON et al., 2011).

O setor florestal contribui anualmente com, aproximadamente, US\$ 160 bilhões para o PIB global e oferece emprego para mais de 50 milhões de pessoas, porém, para ceder lugar para agricultura, pecuária e outros fins, as florestas do mundo estão diminuindo à medida que a população está aumentando. Foram perdidos, desde 1990, cerca de 178 milhões de hectares, o que equivale aproximadamente uma área do tamanho do Chile e da Bolívia juntos. No Brasil a perda das florestas também é algo considerável, pois o país perdeu cerca de 50 milhões de hectares em 18 anos (2000-2018), o que corresponde a 8% de suas florestas e equivale a duas vezes o tamanho do Estado de São Paulo (BROZ et al., 2018; FAO, 2020; IBGE, 2020).

Segundo os cientistas do IPCC (2021) (Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas), essa redução da cobertura florestal está diretamente relacionada ao aumento da temperatura global, pois as florestas tem um papel fundamental na absorção do dióxido de carbono (CO₂), o qual é o principal gás causador do efeito estufa. Tem-se visto que o aquecimento global tem causado graves danos à humanidade como calor e frio extremos, queimadas devastadoras, longos períodos de seca, chuvas torrenciais causando graves enchentes, entre outros, fenômenos estes que estão cada vez mais recorrentes.

Com isso, observa-se a importância do desenvolvimento e implementação de práticas sustentáveis de manejo florestal para que as florestas e seus recursos se perpetuem, pois, segundo Hess, Ricken e Ciarnoschi (2018), a não intervenção não garante a conservação das

florestas, pelo contrário, contribui com a estagnação do crescimento florestal e baixo índice de regeneração natural e, de acordo com Andrae, Schneider e Durlo (2018), a maior garantia da continuidade de um sistema se dá pelo uso sustentável do mesmo e não pela exclusiva proteção da natureza.

Algo preocupante é a redução de florestas nativas, pois além de contribuírem para a conservação dos genótipos e da manutenção da composição das espécies de árvores nativas, essas florestas ainda fornecem habitats vitais para espécies animais ameaçadas de extinção e são imprescindíveis para manutenção da biodiversidade (FAO, 2020; GIBSON et al., 2011).

Porém, no Brasil as pesquisas florestais foram fortemente voltadas para as florestas plantadas, com isso poucos estudos foram desenvolvidos para as florestas naturais, o que as tornam ainda pouco conhecidas (BRASIL, 2019; FIGUEIREDO FILHO et al., 2017). Fato este, que atrelado aos altos índices de desmatamento ilegal dificultam sua preservação (GOLDMAN; WEISSE, 2019; SANQUETTA et al., 2018; TURUBANOVA et al., 2018).

Logo, faz-se necessário o estudo dessas florestas e para isso é fundamental entender a dinâmica do seu crescimento, o qual pode ser mensurado por várias grandezas, dentre elas a idade das árvores.

2.2 Idade das árvores

A idade de qualquer organismo vivo é o período de vida que ele tem desde sua origem até um ponto determinado no tempo (IMAÑA; ENCINAS, 2008). Em geral, o técnico florestal utiliza a idade das árvores para avaliar o incremento em termos de diâmetro, área basal, volume ou altura de uma dada espécie em um determinado local. A idade do povoamento também é importante quando se deseja construir curvas de índice de sítio, comparar as capacidades produtivas de diferentes locais e no planejamento da atividade madeireira sustentável ao longo do tempo (STEPKA et al., 2014).

Os autores supracitados afirmam ainda que conhecer ou determinar a idade das árvores nos permite ter uma base sólida na interpretação da ciência florestal, sendo extremamente importante para estabelecer corretos ciclos de corte, desbaste e outras atividades silviculturais, fazendo assim um uso sustentável dos ecossistemas. Porém, florestas nativas são geralmente maciços multiâneos, ou seja, apresentam árvores com diferentes idades. Sendo assim, sua idade é uma variável muito difícil de ser mensurada, precisando-se usar metodologias para realizar essas estimativas (ENCINAS; SILVA; PINTO, 2005; FIGUEIREDO FILHO et al., 2017).

Segundo os autores supracitados, o método mais difundido para a determinação da idade das árvores é o que utiliza a análise e contagem dos anéis de crescimento. Segundo Schweingruber (1993), a atividade cambial da árvore é fortemente influenciada pela sazonalidade do clima ao longo dos anos, o que formam estruturas que se repetem sazonalmente na madeira. Estas estruturas são os chamados anéis de crescimento (Figura 2.1), os quais são um fragmento de madeira formado em um ano de vida da árvore e demarcado pela presença de um sinal na estrutura anatômica, tornando possível a visualização de um período de crescimento. Essa sucessão de anéis contém o registro sobre as condições de crescimento às quais a árvore foi submetida ao longo de toda a sua vida e pode ser estudada por uma área da ciência chamada de dendrocronologia (ANDREACCI; BOTOSSO; GALVÃO, 2014).

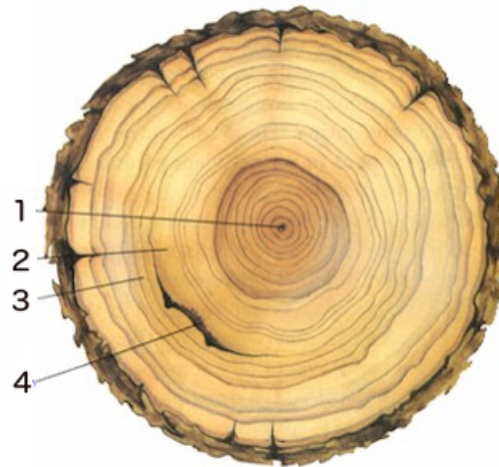
Figura 2.1 – Anéis de crescimento observados em um disco de *Araucaria angustifolia*



Fonte: Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais - UFLA/MG
Ana Carolina Barbosa (Fotógrafa)

Como os anéis de crescimento são formados anualmente durante todo o período de vida da árvore, é possível determinar a sua idade através da contagem desses anéis. Porém, o técnico florestal deve estar sempre atento nessa contagem, pois podem ocorrer falsos anéis ou anéis incompletos, os quais podem ser formados pela ocorrência de inundação, seca, geada, fogo, etc. o que interfere na atividade cambial das árvores tornando assim a determinação de sua idade e da periodicidade de seu crescimento algo bastante complexo (BOTOSSO; VETTER; TOMAZELLO FILHO, 2000). Na Figura 2.2 pode-se observar uma ilustração sobre as variações nos anéis de crescimento devido aos fatores ambientais como chuvas ou secas, o que interfere na largura dos anéis, e cicatrizes derivadas de incêndios.

Figura 2.2 – Variações dos anéis de crescimento da árvore: 1 - primeiro ano de crescimento, 2 - ano chuvoso (anéis mais largos), 3 - ano com estiagem (anéis mais estreitos), 4 - cicatriz de um incêndio.



Fonte: NUPECC (2020)

A contagem dos anéis de crescimento pode ser feita em árvores abatidas, observando-se os discos ou cortes transversais da tora, ou em árvores vivas (Figura 2.3), com a coleta de amostras obtidas através de um instrumento chamado Trado de Pressler. Com esse instrumento é possível extrair amostras cilíndricas radiais do lenho (baquetas), apresentando uma vantagem para o estudo de florestas nativas por não necessitar da derrubada da árvore (FIGUEIREDO FILHO et al., 2017).

Figura 2.3 – Amostra cilíndrica retirada de floresta nativa com o uso do Trado de Pressler



Fonte: Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais - UFLA/MG
Gabriel de Assis Pereira (Fotógrafo)

2.3 Dendrocronologia

Pode-se definir dendrocronologia como sendo a ciência que possibilita a datação dos anéis de crescimento das árvores aplicando as informações registradas em sua estrutura para estudos ambientais e históricos (FRITTS, 1976; TOMAZELLO FILHO; BOTOSSO; LISI, 1999).

A existência de anéis de crescimento tiveram suas primeiras observações feitas na Grécia antiga. No século XVI, Leonardo da Vinci observou em árvores de Pinus, na Itália, a relação entre os anéis de crescimento e o clima, onde ele constatou que a quantidade dos anéis de crescimento mostravam o número de anos das árvores e a sua espessura estava relacionada com a presença ou não de estiagem naqueles anos. No entanto, considera-se que a dendrocronologia teve seu início como ciência em meados do século XIX na Alemanha, com os trabalhos de Theodor e Robert Hartig e nos EUA, a partir do início do século XX, com Andrew E. Douglass, considerado o pai da dendrocronologia, ao publicar seu livro *Climatic cycles and tree growth* (FRITTS, 1976; TOMAZELLO FILHO; BOTOSSO; LISI, 1999).

A dendrocronologia é utilizada como ferramenta em várias áreas como na ciência forense contribuindo com a solução de crimes (BALOUEZ, 2005); na ecologia com a investigação de históricos de incêndios (JONES; BOWLES, 2016); na arqueologia, reconstruindo a história de vários povos através da datação (BOGINO et al., 2019), entre outras.

Porém, durante muitos anos, estudos com anéis de crescimento ficaram restritos a locais com clima temperado, pois os pesquisadores acreditavam que as árvores das regiões tropicais e subtropicais não apresentavam sazonalidade da atividade cambial, devido às condições climáticas serem consideradas praticamente constantes durante todo o ano e, portanto, não formariam anéis de crescimento anuais. Contudo, Brandis em 1926 na Índia, trouxe os primeiros estudos que contradiziam essa teoria e mostravam a existência de anéis de crescimento em espécies tropicais, os quais foram confirmados devido ao avanço das pesquisas em dendrocronologia e totalmente aceitos na atualidade onde se verificou que o fator limitante da formação de anéis nas regiões tropicais é a sazonalidade na distribuição das chuvas, enquanto que para regiões temperadas o crescimento é limitado pela temperatura (ANDREACCI; BOTOSSO; GALVÃO, 2014; BARBOSA et al., 2018; BOTOSSO; VETTER; TOMAZELLO FILHO, 2000; ROZENDAAL; ZUIDEMA, 2011; TOMAZELLO FILHO; BOTOSSO; LISI, 1999).

No Brasil, um número considerável de espécies foi listada como tendo grande potencial para estudos dendrocronológicos, dentre estas se encontra a *Cedrela fissilis*, conhecida popularmente por cedro, a qual se destaca pela formação de anéis de crescimento anuais distintos e de

fácil visualização, constituindo uma importante ferramenta para estudos sobre manejo florestal sustentável em florestas nativas (ANDREACCI; BOTOSSO; GALVÃO, 2014; DÜNISCH, 2005; PEREIRA et al., 2018; QUINTILHAN et al., 2021) .

2.4 Cedro

A espécie *Cedrela fissilis* faz parte da família Meliaceae e recebe vários nomes populares como: cedro, acaiacá, cedro-rosa, cedro-vermelho, entre outros. *Cedrela* vem de *Cedrus*, pelo fato dessa árvore emanar um aroma semelhante ao legítimo cedro. Do grego *kedros* (cedro) o qual procede de *keein*, *kaiein* (queimar, perfumar, purificar), devido ao lenho do cedro ser usado para perfumar ambientes; *fissilis* vem do latim *fissilis*, que pode ser fendido, fácil de rachar (CARVALHO, 2003).

O cedro é uma árvore que apresenta copa frondosa com folhagem densa, verde escura em cima e mais clara por baixo. O cedro é caducifólio, ou seja, perde as folhas em alguma época do ano, geralmente na época de seca e, em algumas regiões, antes da queda elas adquirem uma coloração ferrugínea. As folhas têm cerca de 40 cm de comprimento e quando retiradas do galho, exalam um cheiro bastante desagradável, semelhante ao de cebola (CARVALHO, 2003; GRINGS; BRACK, 2011; SILVA, 2013).

O cedro está entre as mais importantes árvores brasileiras, tanto que existem cidades no Brasil que levam o seu nome, como Cedro do Abaeté em Minas Gerais, Cedro nos estados do Ceará, Pernambuco e Bahia, Cedro de São João em Sergipe e São José do Cedro em Santa Catarina. Em Minas Gerais, Antônio Francisco Lisboa, mais conhecido como Aleijadinho, utilizou a madeira do cedro para produzir muitas das suas peças de arte sacra (CARVALHO, 2003; GRINGS; BRACK, 2011; SILVA, 2013).

Ele é muito utilizado na construção civil, naval e aeronáutica e em marcenarias o que o torna uma das espécies nativas de maior impacto econômico no Brasil (GOMES et al., 2021; SIQUEIRA; HIGUCHI; SILVA, 2019; XAVIER; SANTOS; OLIVEIRA, 2003). Antigamente era uma árvore encontrada em grande quantidade por quase todo o Brasil, mas a intensa exploração de sua madeira, a qual apresenta excelente qualidade e se assemelha muito ao mogno por sua coloração, quase o levou à extinção, sendo hoje uma espécie rara em regiões antropizadas. Fato comprovado pela inclusão da espécie *Cedrela fissilis* na "Lista Vermelha" de espécies da flora brasileira ameaçadas de extinção (CNCFLORA, 2020) e na "Lista Vermelha" da União In-

ternacional para a Conservação da Natureza (IUCN, 2020), sendo classificada em ambas como "Vulnerável" por enfrentar risco de extinção elevado na natureza.

Contudo, o maior problema do plantio do cedro e que ainda não se encontrou uma solução é o ataque da broca-do-cedro (*Hypsipyla grandella*), que prejudica o crescimento retilíneo do tronco e, em casos extremos, leva à morte da planta (CARVALHO, 2003; HILJE, 2020; PEREIRA et al., 2016; SIQUEIRA; HIGUCHI; SILVA, 2019). Desta forma, o cedro é obtido de florestas nativas o que causa grande pressão sobre as populações remanescentes, sendo que existem apenas algumas árvores centenárias na Floresta Amazônica, em alguns parques nacionais e reservas (SILVA, 2013). Infelizmente, segundo Figueiredo Filho et al. (2017), apesar do Brasil ser mundialmente conhecido pela sua ampla diversidade de espécies florestais é extremamente carente de estudos e informações sobre árvores em condições naturais.

Sendo assim, faz-se necessário um estudo mais aprofundado sobre o cedro, seu crescimento e a dinâmica das florestas nativas que o contém, pois segundo Marcon et al. (2019), avaliar os padrões de crescimento das árvores é extremamente importante tanto para conservação quanto para o manejo, pois pode-se resgatar informações e indicar características do comportamento ecológico das espécies e para esse tipo de estudo é fundamental lançar mão de técnicas que utilizam os modelos de crescimento, os quais estão baseados em uma área da estatística que se denomina *Regressão*.

2.5 Modelos de Regressão

A regressão é amplamente utilizada em várias áreas do conhecimento como agricultura, economia, engenharia, pesquisas nas áreas da saúde, entre outras. Ela permite que se conheçam os efeitos que algumas variáveis exercem, ou parecem exercer, sobre outras e assim relacioná-las através de uma expressão matemática, a qual pode ser útil para estimar o valor de uma das variáveis quando conhecemos os valores das outras sob determinadas condições (HOFFMANN, 2015).

Assim, a análise de regressão se baseia na procura de uma relação entre as variáveis X e Y, ou seja, uma função de X que explique Y, a qual pode ser representada genericamente por

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k),$$

em que, Y representa a variável dependente ou resposta e X representa as variáveis independentes ou regressoras. Como exemplo pode-se citar a relação entre a produção (Y) obtida numa cultura e a quantidade de nitrogênio (X_1), fósforo (X_2) e potássio (X_3) utilizada na adubação (DEMÉTRIO; ZOCCHI, 2006; HOFFMANN, 2015).

Os autores supracitados afirmam que em Estatística, diferentemente da Matemática, geralmente essa relação não é perfeita, pois na prática além de existirem erros de mensuração da variável dependente, os quais afetam os valores das variáveis regressoras, ainda existem inúmeros fatores que afetam a variável resposta e não são considerados no modelo por vários motivos, como impossibilidade de mensuração, entre outros.

Com isso, admitindo que o erro seja aditivo, o modelo estatístico pode ser representado por

$$Y = f(X_i; \theta) + \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

em que, Y representa a variável dependente, X_i as variáveis independentes; θ é o conjunto de parâmetros do modelo e ε o erro aleatório, o qual deve ser reduzido ao máximo possível através do processo de estimação e pressupõe-se que seja independente, identicamente distribuído seguindo uma distribuição normal com média zero e variância constante, ou seja, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

Segundo Ratkowsky (1983), os modelos de regressão podem ser classificados como:

- a) **modelos lineares:** são aqueles lineares em seus parâmetros, ou seja, a derivada parcial em relação a qualquer parâmetro não depende de nenhum dos parâmetros do modelo, como se pode observar nos exemplos abaixo:

$$\begin{aligned} - f(x, \alpha) &= \alpha + \varepsilon \Rightarrow \frac{df}{d\alpha} = 1; \\ - f(x, \alpha, \beta) &= \alpha + \beta x + \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial \beta} = x; \\ - f(x, \alpha, \beta, \gamma) &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1, \frac{\partial f}{\partial \beta} = x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial \gamma} = x^2. \end{aligned}$$

- b) **modelos não lineares:** são aqueles não lineares em seus parâmetros, ou seja, pelo menos uma das derivadas parciais em relação a qualquer parâmetro depende de algum parâmetro do modelo, como se pode observar nos exemplos que se seguem:

$$\begin{aligned} - f(x, \alpha, \beta, \gamma) &= \alpha + \beta e^{\gamma x} + \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1, \frac{\partial f}{\partial \beta} = e^{\gamma x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial \gamma} = \beta x e^{\gamma x}; \\ - f(x, \alpha, \beta, \gamma) &= \alpha \text{sen}(\beta x + \gamma) + \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \text{sen}(\beta x + \gamma), \frac{\partial f}{\partial \beta} = \alpha x \cos(\beta x + \gamma) \\ &\text{e } \frac{\partial f}{\partial \gamma} = \alpha \cos(\beta x + \gamma). \end{aligned}$$

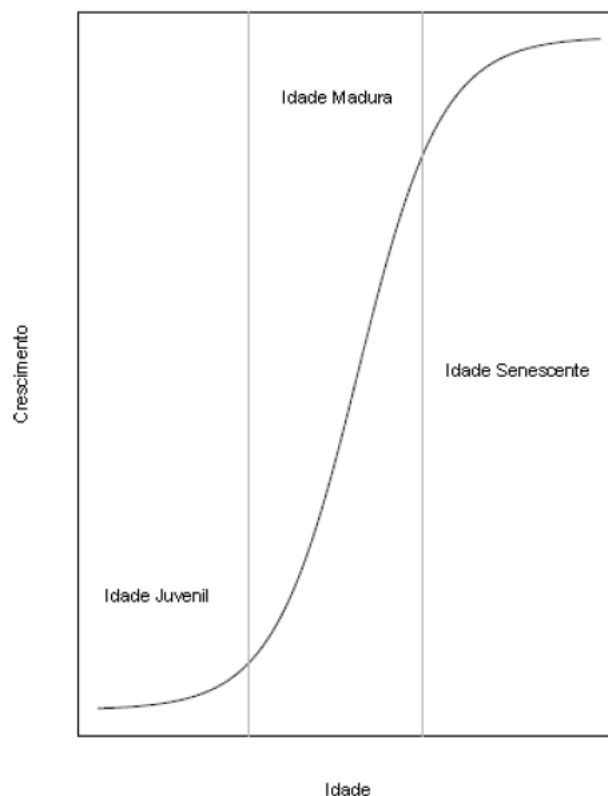
2.5.1 Regressão não linear convencional

De acordo com Draper e Smith (1998), os modelos não lineares podem ser classificados como:

- a) **“intrinsecamente lineares”**: são aqueles que podem ser linearizados através de uma transformação ou reduzidos à modelos lineares através de uma reparametrização. Como exemplo tem-se a função $f(X, \alpha, \beta) = \alpha X^\beta \varepsilon$, a qual pode ser escrita como $Y = \alpha X^\beta \varepsilon$ e através de uma transformação logarítmica se transforma no modelo linear $\ln Y = \ln \alpha + \beta \ln X + \ln \varepsilon$;
- b) **“intrinsecamente não lineares”**: são aqueles em que não é possível obter uma transformação ou reparametrização que os reduza à forma linear.

Muitos fenômenos podem ser bem ajustados por modelos lineares, mas outros, principalmente os fenômenos biológicos obtém os melhores ajustes por meio da regressão não linear. Isso se deve ao fato do crescimento de um animal ou de uma planta ser geralmente mais rápido em sua fase inicial, diminuindo sua velocidade ao longo do tempo e tendendo a uma estabilidade na fase adulta, o que pode ser descrito através de curvas de crescimento em formato de "S", conhecidas como curvas sigmóides ou sigmoidais como a representada na Figura 2.4 (ENCINAS; SILVA; PINTO, 2005; MISCHAN; PINHO, 2014).

Figura 2.4 – Representação dos períodos de crescimento em fenômenos biológicos



Fonte: Veloso (2013)

Na literatura é possível encontrar diferentes trabalhos que utilizaram esses modelos para descrever o comportamento de seres vivos, seja de origem animal (BRITO et al., 2021; DUDUSOLA; OSENI; ADEYEMI, 2019; FERNANDES et al., 2019; JANAMPA-SARMIENTO et al., 2020) ou vegetal (DIEL et al., 2018; JANE et al., 2020; RIBEIRO et al., 2018b; SILVA et al., 2021).

Sendo assim, esse tipo de modelo se torna importante para estudos florestais, pois segundo Míguez, Archontoulis e Dokoochaki (2017), os modelos não lineares além de serem geralmente mais realistas, o que se deve ao fato dos parâmetros apresentarem, em geral, uma interpretação prática, ainda tendem a serem mais parcimoniosos que os lineares.

A forma clássica de um modelo de regressão não linear é

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

sendo, \mathbf{Y} o vetor da variável resposta (variável dependente); \mathbf{X} a matriz de uma ou mais variáveis independentes; $\boldsymbol{\theta}$ o vetor de parâmetros; $f(\cdot)$ a forma funcional que expressa a relação não linear entre as variáveis e $\boldsymbol{\varepsilon}$ o vetor de erros associados ao modelo, o qual pressupõe-se que

seja independente e identicamente distribuído seguindo uma distribuição normal de média zero e variância constante, ou seja, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}\sigma^2)$.

Na Tabela 2.1 estão apresentados modelos não lineares de uso comum em estudos de curvas de crescimento na área florestal, os quais são: Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody (monomolecular), Chapman-Richards e Weibull. É possível também observar alguns trabalhos na área florestal que utilizaram os modelos citados.

Tabela 2.1 – Modelos de regressão não linear de uso comum para descrever curvas de crescimento na área florestal.

Modelo	Forma funcional	Referência
Logístico	$y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{\kappa(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i$	Frühauf et al. (2020)
Gompertz	$y_i = \alpha e^{-e^{\kappa(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i$	Gul (2021)
von Bertalanffy	$y_i = \alpha \left[1 - \frac{e^{\kappa(\beta - x_i)}}{3} \right]^3 + \varepsilon_i$	Silva et al. (2021)
Brody	$y_i = \alpha \left[1 - \beta e^{(-\kappa x_i)} \right] + \varepsilon_i$	Korkmaz e Unluyol (2018)
Chapman-Richards	$y_i = \alpha [1 - e^{(-\kappa x_i)}]^\beta + \varepsilon_i$	Nigul et al. (2021)
Weibull	$y_i = \alpha \left[1 - e^{(-\kappa x_i^\beta)} \right] + \varepsilon_i$	Gheyret et al. (2021)

Fonte: Da autora

Para estes modelos, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) é a i -ésima observação da variável dependente, x_i é a i -ésima observação da variável independente; α é o valor assintótico, ou seja, o valor esperado para o crescimento máximo do objeto em estudo, quando $x_i \rightarrow \infty$; β é a abscissa do ponto de inflexão, ou seja, a partir dele o crescimento é desacelerado, com exceção para os modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull cuja forma da curva não apresenta ponto de inflexão; κ é um índice de maturidade ou precocidade, está associado ao crescimento, quanto maior for seu valor, menos tempo será necessário para o objeto em estudo atingir o valor assintótico; ε_i é o erro aleatório associado à i -ésima observação sobre o qual são assumidos os pressupostos usuais. (FERNANDES et al., 2014; FERNANDES et al., 2015; FREITAS, 2005; MUNIZ; NASCIMENTO; FERNANDES, 2017).

Estimação dos parâmetros

Quando se ajusta um modelo não linear a um conjunto de dados, a estimação dos parâmetros, em geral, é feita pelo método dos mínimos quadrados, que consiste na minimização da soma de quadrados dos resíduos (DRAPER; SMITH, 1998).

Para ilustrar o método dos mínimos quadrados ordinários, considere uma equação de regressão não linear como definida em (2.1). Esta equação pode ser escrita na forma matricial da seguinte maneira:

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

em que,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} f(x_1; \boldsymbol{\theta}) \\ f(x_2; \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ f(x_n; \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Esse método consiste na estimação dos parâmetros através da minimização da soma de quadrados dos resíduos (SQR). Essa soma, associada à equação acima, é dada pela seguinte expressão:

$$SQR(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{Y} - f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})]' [\mathbf{Y} - f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})]$$

Logo,

$$\begin{aligned} SQR(\boldsymbol{\theta}) &= \{\mathbf{Y}' - [f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})]'\} [\mathbf{Y} - f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})] \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) - [f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})]'\mathbf{Y} + [f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})]'f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}'f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) + [f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})]'f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Esta é uma forma quadrática e seu ponto crítico é obtido derivando-se $SQR(\boldsymbol{\theta})$ em relação à cada θ_j ($j = 1, 2, \dots, p$) e igualando-se a derivada a zero. Assim,

$$\frac{\partial SQR(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -2\mathbf{Y}' \times \frac{\partial f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial [f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})]'}{\partial \boldsymbol{\theta}} \times f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) + [f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})]' \times \frac{\partial f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

Em que $\frac{\partial f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ é a matriz das derivadas parciais, também conhecida como matriz jacobiana, de dimensões $n \times p$, sendo n o número de observações e p a quantidade de parâmetros

do modelo. Essa matriz pode ser representada como:

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\theta_1)} & \frac{\partial f(x_1; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\theta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_1; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\theta_p)} \\ \frac{\partial f(x_2; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\theta_1)} & \frac{\partial f(x_2; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\theta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_2; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\theta_p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_n; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\theta_1)} & \frac{\partial f(x_n; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\theta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_n; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\theta_p)} \end{bmatrix}$$

Chamando a matriz jacobiana de \mathbf{J} e igualando $\frac{\partial SQR(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ a zero, tem-se:

$$-2\mathbf{Y}'\mathbf{J} + 2 \left[f(\mathbf{X}; \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right]' \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \mathbf{J}' f(\mathbf{X}; \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{J}'\mathbf{Y}$$

Esse é o sistema de equações normais (SEN) para o modelo não linear, no qual a matriz \mathbf{J} e $f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})$ dependem de $\boldsymbol{\theta}$, logo esse sistema não possui uma solução explícita para $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, sendo necessária a utilização de métodos iterativos para uma aproximação desta solução (DRAPER; SMITH, 1998).

Método iterativo de Gauss-Newton

Existem, na literatura, vários métodos iterativos para obtenção das estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros de um modelo de regressão não linear, dentre eles, se destacam o método *Steepest-Descent* ou método do gradiente, o método de Marquardt e o método de Gauss-Newton ou método da linearização, sendo este um dos métodos de otimização mais utilizados para problemas não lineares (SILVA et al., 2020).

Tomando a função não linear geral apresentada em (2.1) e, considerando o vetor $\boldsymbol{\theta}$ contendo dois parâmetros (a e b) a fim de simplificar os cálculos, tem-se:

$$y_i = f(x_i; a, b) + \varepsilon_i$$

Denotando-se $f(x_i; a, b)$ simplesmente por $f(x_i)$, escreve-se:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \quad (2.2)$$

Para o método iterativo de Gauss-Newton faz-se necessária a linearização da função $f(x_i)$, a qual é realizada através da expansão em série de Taylor de primeira ordem na j -ésima iteração como se segue:

$$f(x_i)_{j+1} \approx f(x_i)_j + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial b} \Delta b \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) em (2.2), tem-se:

$$y_i \approx f(x_i)_j + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial b} \Delta b + \varepsilon_i$$

Logo,

$$y_i - f(x_i)_j \approx \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial b} \Delta b + \varepsilon_i \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é o algoritmo de Gauss-Newton e abaixo tem-se a sua escrita em formato matricial, o qual é útil para sua implementação em *softwares*.

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{J}_j] [\Delta \boldsymbol{\theta}] + [\mathbf{E}] \quad (2.5)$$

Em que,

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} y_1 - f(x_1) \\ y_2 - f(x_2) \\ \vdots \\ y_n - f(x_n) \end{bmatrix}, [\mathbf{J}_j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial a} & \frac{\partial f(x_1)}{\partial b} \\ \frac{\partial f(x_2)}{\partial a} & \frac{\partial f(x_2)}{\partial b} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_n)}{\partial a} & \frac{\partial f(x_n)}{\partial b} \end{bmatrix}, [\Delta \boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix}, [\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Utilizando-se os recursos da álgebra linear pode-se escrever (2.5) como se segue:

$$[\Delta \boldsymbol{\theta}] = [\mathbf{J}'_j \mathbf{J}_j]^{-1} [\mathbf{J}'_j] [\mathbf{D}]$$

O método é considerado iterativo, pois a partir da escolha de valores iniciais (a^0, b^0) , principia-se o processo estimando-se os parâmetros $a^1 = a^0 + \Delta a$ e $b^1 = b^0 + \Delta b$ e, assim sucessivamente, gerando uma solução aproximada a cada etapa. O processo se repete até a convergência, que ocorre quando um critério de parada é atingido $\left(\left| \hat{\boldsymbol{\theta}}^{j+1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^j \right| < \delta \right)$, em que δ é algum valor fixo muito pequeno, por exemplo $\delta = 10^{-6}$.

A escolha de valores iniciais é extremamente importante, pois a rapidez na convergência e a qualidade das estimativas depende da escolha adequada desses valores. Segundo Calegario et al. (2005), uma das limitações do uso de modelos não lineares é a escolha correta dos valores iniciais dos parâmetros, pois a má escolha pode causar uma convergência para um mínimo local ou até a não convergência do método. Essa escolha pode ser feita por meio de métodos computacionais ou baseada na experiência e/ou resultados prévios obtidos de estudos anteriores.

Análise de resíduos

Ao se ajustar um modelo de regressão não linear convencional, pressupõe-se que o vetor de resíduos seja independente e identicamente distribuído seguindo uma distribuição normal de média zero e variância constante. Sendo assim, após o ajuste do modelo de regressão é de suma importância que seja feito um diagnóstico sobre o vetor de resíduos para validação do modelo ajustado, pois caso sejam violadas as suposições de homocedasticidade e/ou independência residual, esses estimadores não serão mais eficientes, ou seja, não mais possuirão variância mínima, produzindo assim estimativas enganosas, o que causa problemas de interpretação e um ajuste inadequado do modelo aos dados (CORDEIRO; DEMÉTRIO, 2008; RAWLINGS; PANTULA; DICKEY, 1998; SEBER; WILD, 2003).

Segundo os autores supracitados, quanto à suposição de normalidade, não se faz necessário que ela seja satisfeita para a aplicação do método dos mínimos quadrados, porém ela é imprescindível para que alguma inferência seja realizada sobre as estimativas dos parâmetros, como a construção de intervalos de confiança e testes de significância.

A verificação das pressuposições sobre o vetor de resíduos pode ser feita visualmente, através da análise gráfica ou utilizando-se testes de hipóteses. Dentre os vários testes de significância disponíveis na literatura pode-se destacar os testes de Breusch-Pagan, Shapiro-Wilk e Durbin-Watson para verificação de homocedasticidade, normalidade e independência residual, respectivamente.

A regressão não linear convencional tem se mostrado muito útil para estudos de curvas de crescimento na área florestal, porém segundo Inga e Valle (2017), muitos deles apresentam problemas relacionados à validação dos pressupostos do modelo, os quais muitas vezes não são abordados e nem sequer mencionados (ANDRADE et al., 2019b; BARBOSA et al., 2018; PRETZSCH, 2021; SHODA; IMANISHI; SHIBATA, 2020; WORBES; SCHÖNGART, 2019).

Para contornar os problemas causados pela violação dos pressupostos, Inga e Valle (2017) sugerem a utilização de uma transformação logarítmica, o que pode ser visto em muitos estudos da área florestal (ANDRADE et al., 2019a; BATISTA et al., 2020; CHAVE et al., 2014; KHAMYONG et al., 2018; OLIVEIRA et al., 2019; SALLES et al., 2012; VESCOVI et al., 2020; ZIMBRES et al., 2021), contudo, as transformações devem ser utilizadas como último recurso, pois quando variáveis são transformadas os coeficientes perdem as interpretações práticas que possuíam originalmente, além de apresentarem dificuldades em se especificar adequadamente os erros associados ao modelo (DRAPER; SMITH, 1998; MAZUCHELI; ACHCAR, 2002; SEBER; WILD, 2003).

Logo, mostra-se de grande valia o estudo de novas técnicas de regressão, como a regressão quantílica não linear, que consigam modelar erros com distribuições não normais e variâncias heterogêneas, algo que é comum ao se estudar o crescimento de árvores.

2.5.2 Regressão quantílica

A análise de regressão convencional, com modelos ajustados geralmente pelo método dos mínimos quadrados, é baseada na média, ou seja, descreve a relação entre as variáveis explicativas e a média da variável resposta. Sendo assim, Hao e Naiman (2007) e Koenker (2005) relatam que a regressão fornecerá uma visão limitada da relação entre as variáveis.

Koenker e Bassett (1978) propuseram uma alternativa: a regressão quantílica, a qual permite descrever a relação entre as variáveis preditoras em diferentes níveis da distribuição da variável resposta, sem a necessidade de ajustes com a utilização de subamostras. Como qualquer quantil pode ser utilizado, é possível modelar qualquer posição da distribuição, tais como a cauda inferior ou superior, posições estas que são de interesse em várias áreas do conhecimento e não podem ser ajustadas através de uma regressão baseada em médias. Seus modelos são mais robustos em relação à presença de *outliers* e também aos erros com distribuição não normal, sendo possível incorporar uma possível heterocedasticidade (BARROSO et al., 2015; PUIATTI et al., 2020).

A utilização da regressão quantílica está cada vez mais presente nos estudos da área de saúde pública, analisando, por exemplo, o índice de massa corporal (IMC) da população, examinando-se a cauda inferior da distribuição para estudos de magreza e, a cauda superior, para sobrepeso/obesidade (ORTIZ et al., 2016). Ela também tem contribuído nas áreas de finanças

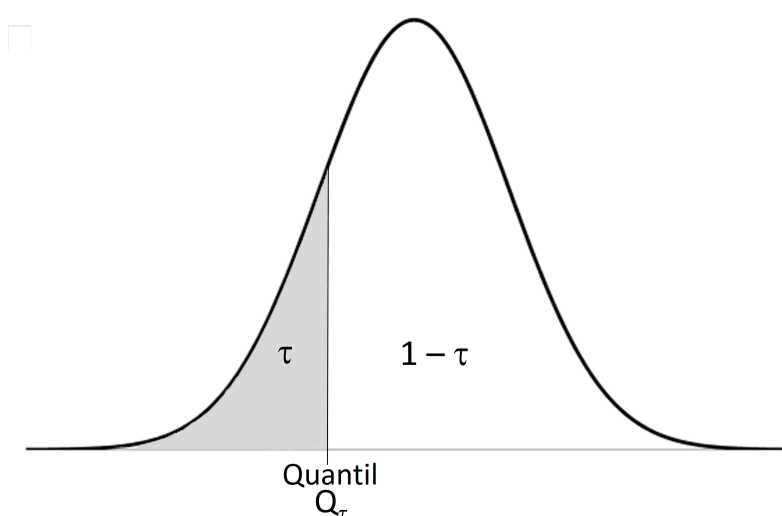
(BOURI et al., 2017), genômica (NASCIMENTO et al., 2018), agropecuária (KIM et al., 2019), medicina (GULOXSUZ et al., 2016), entre outras.

Contudo, está pouco difundida na área florestal, com alguns estudos como os realizados por Araújo et al. (2019), Oliveira et al. (2021), Santos, Thiersch e Moreira (2018) e Sun, Gao e Li (2017) baseados em florestas plantadas e até o presente momento essa metodologia não havia sido empregada em florestas nativas. Porém, segundo Santos, Thiersch e Moreira (2018), essa técnica se apresenta de grande valia para estudos florestais, pois possibilita gerar um mapeamento mais completo do desenvolvimento da floresta em relação ao seu crescimento temporal, uma vez que se calcula a resposta de cada quantil da distribuição.

Definição de quantil

O quantil de ordem τ , com $0 < \tau < 1$, é o valor Q_τ que divide um conjunto de dados ordenados $[X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}]$ de maneira que, $100\tau\%$ dos seus elementos são inferiores a esse valor e o restante $[100(1 - \tau)\%]$, são superiores a ele, conforme pode-se observar na Figura 2.5. Assim, como exemplo, o quantil de ordem $\tau = 0,10$ separa os dados ordenados de forma que, 10% deles estão abaixo do valor $Q_{0,10}$ e os 90% restantes estão acima dele. Logo, os quantis são medidas que dividem os dados ordenados em intervalos regulares e os mais comuns são os quartis, que dividem a distribuição em quatro partes iguais, os decis, que dividem em dez partes iguais e os percentis, que dividem em cem partes iguais.

Figura 2.5 – Ilustração do quantil de ordem τ numa dada distribuição.



Fonte: Adaptado de Glöder (2021)

Segundo Davino, Furno e Vistocco (2014), o τ -ésimo quantil da distribuição de uma variável aleatória Y é um local particular dessa distribuição e pode ser definido como

$$\tau = F_Y(y) = P(Y \leq y),$$

sendo, $\tau \in (0, 1)$ e F_Y a função de distribuição acumulada de Y .

Utilizando-se a função inversa da distribuição acumulada no ponto τ , tem-se que

$$Q_\tau(y) = F^{-1}(\tau) = \inf\{y : F_Y(y) \geq \tau\}$$

é o quantil de ordem τ da variável aleatória Y e $\inf\{A\}$ denota o valor ínfimo do conjunto numérico A . A mediana, nesse caso, seria definida como $F^{-1}(1/2)$ e o primeiro e terceiro quartis seriam $F^{-1}(1/4)$ e $F^{-1}(3/4)$, respectivamente.

Com isso, pode-se definir o método utilizado pela regressão quantílica, pois enquanto os métodos de regressão convencionais utilizam as médias condicionais $[E(Y|X)]$ para obter a relação funcional entre as variáveis, a regressão quantílica utiliza os quantis condicionais $[Q(Y|X)]$, ajustando a relação entre as variáveis preditoras e o quantis da variável resposta (PUIATTI et al., 2018).

2.5.2.1 Regressão quantílica não linear

Desde sua proposta original, a teoria da regressão quantílica tem sido bastante desenvolvida ao longo do tempo, sendo esta ampliada para classe de modelos não lineares por Koenker e Park (1996), classe esta ainda carente de investigação científica e com poucos trabalhos desenvolvidos.

O modelo de regressão quantílica não linear pode ser escrito como

$$Y = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}(\tau)) + \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)$$

sendo, \mathbf{Y} o vetor da variável resposta; \mathbf{X} a matriz de uma ou mais variáveis independentes; $\boldsymbol{\theta}(\tau)$ o vetor de parâmetros no τ -ésimo quantil de Y , $f(\cdot)$ a forma funcional que expressa a relação não linear entre as variáveis e $\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)$ o vetor de erros independentes e identicamente

distribuídos com função densidade de probabilidade $f_\tau(\cdot)$ e quantil de ordem τ igual a zero, isto é, $\int_{-\infty}^0 f_\tau(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = \tau$ (GALARZA et al., 2018; MORALES et al., 2017).

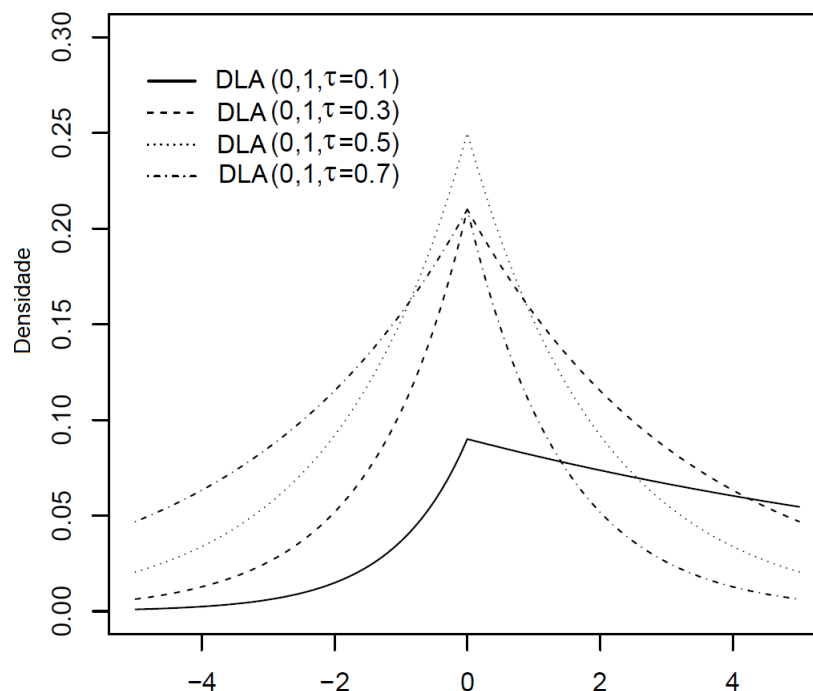
Com isso, faz-se necessário que o vetor de erros do modelo ajustado esteja associado à alguma distribuição de probabilidade que satisfaça essas características. Vários estudos como os realizados por Galarza et al. (2018), Koenker (2005), Sánchez, Lachos e Labra (2013), Santos e Elian (2015), entre outros, sugerem o uso da distribuição Laplace assimétrica (DLA) com três parâmetros, a qual foi proposta por Yu e Zhang (2005) e cuja função densidade de probabilidade (f.d.p.) é dada por:

$$f(y|\mu, \sigma, \tau) = \frac{\tau(1-\tau)}{\sigma} \exp\left(-\rho_\tau\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

sendo, μ o parâmetro de localização, $\mu \in (-\infty, \infty)$; σ o parâmetro de escala, $\sigma > 0$; τ o parâmetro de assimetria, $\tau \in (0, 1)$ e ρ_τ uma função de perda ou função “check”, a qual será definida posteriormente. Se os parâmetros de localização e escala apresentam valores zero e um, respectivamente, ter-se-á a f.d.p. da distribuição Laplace assimétrica padrão, similar ao que ocorre com a distribuição normal.

Observando-se a Figura 2.6, é possível notar a mudança de simetria na curva de densidade de probabilidade da distribuição Laplace assimétrica conforme se varia o valor de τ .

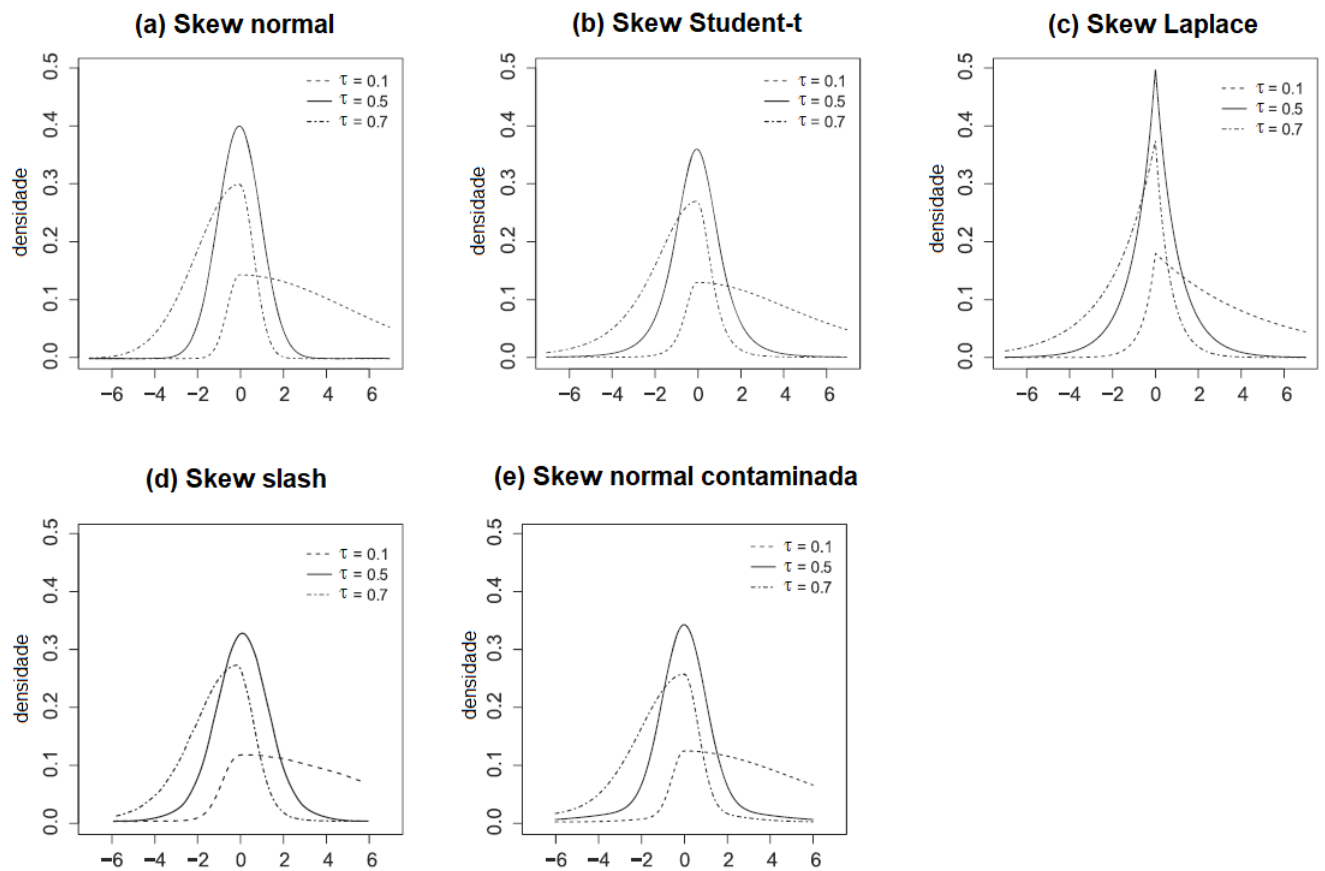
Figura 2.6 – Densidade da distribuição Laplace assimétrica padrão



Fonte: Adaptado de Sánchez, Lachos e Labra (2013)

Morales et al. (2017) propuseram outras distribuições assimétricas para serem utilizadas na técnica de regressão quantílica, às quais eles classificaram como distribuições da família *skew* ou família SKD. As distribuições que foram incluídas nessa família são a Skew normal, Skew Student-t, Skew Laplace, Skew slash e Skew normal contaminada, as quais têm as curvas de densidade de probabilidade apresentadas na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Densidade das distribuições Skew normal, Skew Student-t, Skew Laplace, Skew slash e Skew normal contaminada para $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e diferentes valores para o parâmetro τ .



Fonte: Adaptado de Morales et al. (2017)

Estimação dos parâmetros

A função quantil condicional $[Q_\tau(\mathbf{Y}|\mathbf{X})]$ possui parâmetros não conhecidos ($\boldsymbol{\theta}_\tau$), os quais devem ser estimados ($\hat{\boldsymbol{\theta}}_\tau$). Enquanto que na regressão convencional utiliza-se, em geral, o método dos mínimos quadrados através da minimização da soma dos quadrados dos resíduos

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2,$$

na regressão quantílica, segundo Koenker (2005), a estimação é feita minimizando-se a soma ponderada dos resíduos absolutos

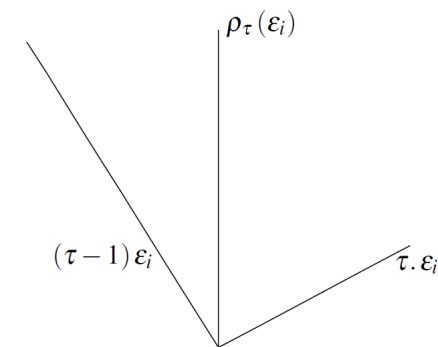
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tau} = \arg \min \sum_{i=1}^n \rho_{\tau} |\varepsilon_i|,$$

em que $\varepsilon_i = y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta})$ e ρ_{τ} a função “check” definida como $\rho_{\tau}(\varepsilon_i) = \varepsilon_i(\tau - I(\varepsilon_i < 0))$, sendo I uma função indicadora, tem-se que a função “check” pode ser escrita como

$$\rho_{\tau}(\varepsilon_i) = \begin{cases} \tau \cdot \varepsilon_i, & \text{se } \varepsilon_i \geq 0 \\ (\tau - 1) \varepsilon_i, & \text{se } \varepsilon_i < 0 \end{cases}$$

Pode-se observar que a função ρ_{τ} multiplica os resíduos ε_i por τ , se eles forem positivos ou zero e por $\tau - 1$, se forem negativos, com isso, essa função faz com que os resíduos sejam tratados de forma assimétrica como pode ser visto na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Gráfico da função de perda quantílica para o quantil de ordem τ .



Fonte: Adaptado de Koenker (2005)

Para estimação dos parâmetros é preciso minimizar os erros absolutos e, para isso, faz-se necessário o uso de programação linear, necessidade esta que remonta ao século XVIII, cinquenta anos antes da origem do método dos mínimos quadrados por Legendre. Boscovich em seu interesse em medir a elipicidade da Terra propôs estimar os parâmetros de seu modelo de regressão a partir da minimização dos erros absolutos, porém encontrou dificuldades para computar os valores estimados. Dificuldade semelhante foi encontrada por Edgeworth, o qual em 1888 propôs uma abordagem geométrica para a regressão mediana, a qual pode ser considerada um prelúdio da regressão quantílica (FURNO; VISTOCCO, 2018).

Com isso, pode-se observar que a história da regressão quantílica está entrelaçada com a da programação linear, pois foi somente a partir da descoberta de que o problema da minimiza-

ção de erros absolutos poderia ser resolvido através de um algoritmo de programação linear, é que os primeiros avanços em regressão quantílica aconteceram no final da década de 1970 com o trabalho proposto por Koenker e Bassett (1978) (HAO; NAIMAN, 2007).

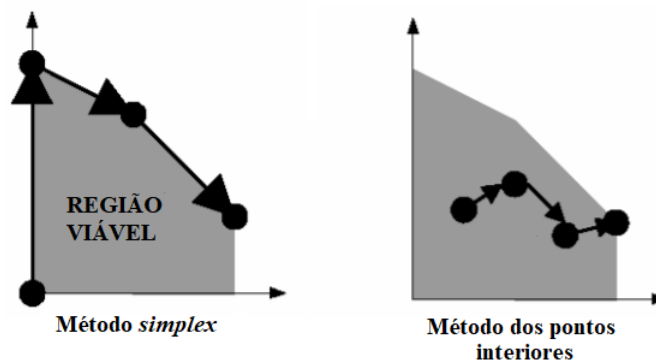
A utilização de programação linear para modelos de regressão L_1 ou regressão de erros absolutos, iniciou-se com a proposta de Barrodale e Roberts (1973) para o primeiro algoritmo realmente eficiente na estimação de parâmetros, o qual adapta o algoritmo *simplex* para o problema de minimização de desvios absolutos. Esse algoritmo foi adaptado para o problema de regressão quantílica por Koenker e D'Orey (1987), porém ele se apresentou computacionalmente exigente para bancos de dados com muitas observações, mas ainda razoável para conjuntos de dados com até 5000 observações e 50 variáveis (CHEN; WEI, 2005).

Sendo assim, Koenker e Park (1996) sugeriram o algoritmo de pontos interiores, o qual é mais eficiente para banco de dados com grandes dimensões e segundo Chen e Wei (2005), verificou-se uma performance superior ao algoritmo *simplex*.

Algoritmo de pontos interiores para regressão quantílica não linear

O algoritmo de pontos interiores se diferencia do método *simplex* pelo caminho percorrido para encontrar a solução ótima (Figura 2.9), pois enquanto o método *simplex* vai de um ponto extremo (vértice) da região de soluções viáveis para outro extremo adjacente, o método dos pontos interiores percorre o interior da região viável (factível) até encontrar a solução ótima (LUENBERGER; YE, 2016).

Figura 2.9 – Ilustração do caminho percorrido para encontrar a solução ótima pelos métodos *simplex* e pontos interiores.



Fonte: Adaptado de Moura et al. (2019)

O algoritmo de pontos interiores proposto por Koenker e Park (1996) para estimar os parâmetros para modelos de regressão quantílica não linear é apresentado a seguir. Inicialmente considera-se um problema não linear de regressão L_1 :

$$\min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n |f_i(\boldsymbol{\theta})|, \quad (2.6)$$

em que, por exemplo, $f_i(\boldsymbol{\theta}) = y_i - f_0(x_i, \boldsymbol{\theta})$. Para que o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}^*$ solucione a equação (2.6), faz-se necessário que exista um vetor $\mathbf{d} \in [\tau - 1, \tau]^n$ para $\tau \in (0, 1)$, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^*)^T \mathbf{d} &= 0, \\ \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^*)^T \mathbf{d} &= \sum_{i=1}^n |f_i(\boldsymbol{\theta}^*)|, \end{aligned}$$

sendo, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = (f_i(\boldsymbol{\theta}))$ e $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = (\partial f_i(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_j)$. Com isso, uma abordagem para solução de (2.6) é resolver uma sequência de problemas lineares L_1 minimizando $\sum_{i=1}^n |f_i(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\delta}|$ e, a cada iteração, escolher um passo de largura λ , procurando nas direções resultantes $\boldsymbol{\delta}$. Porém, nessa abordagem surgem duas dificuldades: a primeira diz respeito ao alto custo computacional envolvido, pois a cada iteração é necessário resolver um problema de regressão L_1 e, a segunda, refere-se as direções resultantes determinadas a cada iteração, as quais podem ser inferiores às determinadas pelas etapas iniciais do processo de solução da sequência de problemas linearizados. Com isso, as informações contidas nas etapas iniciais da iteração dual parecem ser mais convenientes para resolver o problema não linear, uma vez que incorporam informações locais relevantes sobre o valor atual de $\boldsymbol{\theta}$.

Considere o seguinte problema dual sendo $\boldsymbol{\theta}$ o valor do parâmetro na atual iteração:

$$\max \{ \mathbf{f}^T \mathbf{d} \mid \mathbf{d} \in [\tau - 1, \tau]^n, \mathbf{J}^T \mathbf{d} = 0 \}. \quad (2.7)$$

Se o modelo é linear, de maneira que $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{K}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\theta})$ para alguma matriz fixa \mathbf{K} , então uma solução pode ser encontrada aplicando o algoritmo de Meketon (VANDERBEI; MEKETON; FREEDMAN, 1986) para encontrar \mathbf{d}^* que resolva (2.7), calculando

$$\boldsymbol{\delta}^* = (\mathbf{K}^T \mathbf{D}^2 \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{D}^2 \mathbf{f},$$

sendo $\mathbf{D} = \text{diag}(\min\{\tau - d_i^*, 1 - \tau + d_i^*\})$ e $\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\delta}^*$.

Quando \mathbf{f} é não linear, não é propício resolver todo o problema dual (2.7) a cada iteração. Assim, o algoritmo segue duas etapas entre contínuas atualizações de \mathbf{f} e \mathbf{J} .

Etapa dual

Para qualquer \mathbf{d} viável no interior do conjunto de restrições do problema dual (2.7), este é aprimorado através do algoritmo de Meketon (VANDERBEI; MEKETON; FREEDMAN, 1986) como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \text{diag}(\min\{\tau - d_i, 1 - \tau + d_i\}), \\ \mathbf{s} &= \mathbf{D}^2 \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{J}^T \mathbf{D}^2 \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{D}^2 \right) \mathbf{f}, \\ \mathbf{d} &\leftarrow \mathbf{d} + (\eta/\alpha) \mathbf{s}, \end{aligned}$$

sendo $\alpha = \max\{\max\{s_i/(\tau - d_i), -s_i/(1 - \tau + d_i)\}$ e $\eta \in (0, 1)$ uma constante para garantir a viabilidade, a qual será utilizada com o valor de $\eta = 0,97$ de acordo com a sugestão de Vanderbei, Meketon e Freedman (1986). Atualizando os valores de \mathbf{D} , \mathbf{s} e \mathbf{d} a iteração continua, porém agora \mathbf{f} e \mathbf{J} dependem do valor atual de $\boldsymbol{\theta}$, sendo assim, o processo está entrelaçado em uma sequência de iterações primais, nas quais serão atualizados os valores de \mathbf{f} e \mathbf{J} .

Etapa primal

Através da etapa dual pode-se encontrar a direção primal $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{J}^T \mathbf{D}^2 \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{D}^2 \mathbf{f}$, com a qual pode-se atualizar $\boldsymbol{\theta}$, como sendo

$$\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} + \lambda^* \boldsymbol{\delta},$$

em que $\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \sum_{i=1}^n |f_i(\boldsymbol{\theta} + \lambda \boldsymbol{\delta})|$ e, assim pode-se atualizar \mathbf{f} e \mathbf{J} . Porém, antes de retornar à etapa dual deve-se ajustar \mathbf{d} para assegurar que este seja viável para o novo valor de \mathbf{J} . Para isto, projeta-se o \mathbf{d} atual no espaço nulo do novo \mathbf{J} , ou seja, $\hat{\mathbf{d}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T) \mathbf{d}$ e então este deve ser reduzido para garantir que esteja em $[\tau - 1, \tau]^n$, logo

$$\mathbf{d} \leftarrow \hat{\mathbf{d}} / (\max\{|\hat{d}_i|\} + \nu),$$

sendo $v > 0$ um parâmetro de tolerância. O algoritmo para de ser executado quando uma nova iteração não melhora a função objetivo por uma tolerância especificada, chamada de critério de parada, a qual na implementação feita por Koenker e Park (1996) é um valor igual a 10^{-7} .

2.5.3 Critérios para seleção de modelos

É comum, em pesquisas, o ajuste de vários modelos para descrever um fenômeno, porém depois de obtidas as estimativas dos parâmetros é necessário utilizar algum critério que permita ao pesquisador a comparação e seleção do modelo que melhor se ajusta aos dados. Abaixo estão apresentados alguns dos critérios que são utilizados na regressão convencional e têm sido empregados em regressão quantílica para este fim.

Desvio médio absoluto

O desvio médio absoluto (DMA) consiste no somatório dos desvios absolutos entre os valores observados e estimados, dividido pela quantidade de observações e é indicado por

$$DMA = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n}$$

sendo, y_i o valor observado, \hat{y}_i o valor estimado e n o número de observações. O modelo mais bem ajustado será indicado por menores valores do desvio médio absoluto. Esse critério foi utilizado em estudos de regressão quantílica como os de Araújo et al. (2019), Bohora e Cao (2014), Oliveira et al. (2021), Özçelik et al. (2018), Sun, Gao e Li (2017), Zhang et al. (2020).

Critério de informação de Akaike

O critério de informação de Akaike (AIC) sugerido por Akaike (1974) leva em consideração a adequação dos dados e o grau de parametrização do modelo, tendo como característica evitar modelos superparametrizados. Esse critério é dado por

$$AIC = -2l(\hat{\theta}) + 2p$$

em que, $l(\hat{\theta})$ é o logaritmo da função de máxima verossimilhança do modelo e p é o número de parâmetros. Será indicado como melhor modelo o que apresentar menor valor de AIC indicando assim que esse modelo descreve melhor os dados. Muitos trabalhos sobre regressão quantílica

utilizam esse critério como base para seleção do modelo que melhor aderiu aos dados, como pode ser visto em Bottai e Cilluffo (2020), Oliveira et al. (2021), Oliveira et al. (2021), Özçelik et al. (2018), Paulo et al. (2021), Puiatti et al. (2020), Sun, Gao e Li (2017), Zhang et al. (2020).

Coefficiente de determinação

O coeficiente de determinação (R^2) mede a quantidade de variabilidade nos dados que é explicada pelo modelo ajustado, sua medida varia de 0 a 1, sendo que valores mais próximos de 1 representam melhor ajuste e é definido por

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT}$$

sendo, SQT a soma de quadrados total, calculada como a diferença entre o valor observado e a média das observações.

Coefficiente de determinação para regressão quantílica

Koenker e Machado (1999) sugeriram uma medida análoga ao R^2 , porém avaliando o ajuste do modelo para um quantil específico. O coeficiente de determinação para regressão quantílica ($R^1(\tau)$) é dado por

$$R^1(\tau) = 1 - \frac{\hat{V}(\tau)}{\tilde{V}(\tau)}$$

em que, $\hat{V}(\tau)$ representa a função da variância dos resíduos do modelo ajustado para o quantil τ e $\tilde{V}(\tau)$ a variância dos valores observados. O valor desse critério também varia entre 0 e 1, obtendo-se melhor ajuste o modelo com maior valor de $R^1(\tau)$. Trabalhos como os realizados por Araújo, Soares e Leite (2016), Bohora e Cao (2014), Narne et al. (2021), Oliveira et al. (2021), Paulo et al. (2021), Sun, Gao e Li (2017), Vospernik e Sterba (2014), Zhang et al. (2020) utilizaram o coeficiente de determinação proposto para estudos em regressão quantílica.

Medidas de curvatura de Bates e Watts

Existem muitos benefícios ao se utilizar modelos não lineares com comportamento próximo dos lineares, sendo um dos principais deles a obtenção de uma maior confiabilidade nas estimativas e, conseqüentemente, inferências mais seguras. Sendo assim, faz-se necessário verificar o grau de não linearidade do modelo, ou seja, quão próximo ele se encontra de um modelo linear e para isso pode-se utilizar as medidas de curvatura de Bates e Watts (FERNANDES et

al., 2015; MAZUCHELI; ACHCAR, 2002). Porém, é importante ressaltar que segundo Silva et al. (2021), essas medidas são importantes para verificar a adequabilidade do modelo e não como critério para selecionar o melhor modelo.

A primeira tentativa de mensurar a não linearidade de um modelo de regressão não linear foi exposta por Beale (1960), mas suas medidas, segundo Guttman e Meeter (1965), tinham a tendência de subestimar a verdadeira não linearidade do modelo. Com isso, Bates e Watts (1980) ampliaram as ideias de Beale (1960) e desenvolveram novas medidas de não linearidade baseadas no conceito geométrico da curvatura. Eles mostraram que a não linearidade pode ser decomposta em duas componentes: a não linearidade intrínseca (c^I), que está associada à curvatura do espaço de estimação e a não linearidade paramétrica (c^θ), devido ao efeito dos parâmetros, o qual é consequência da falta de uniformidade do sistema de coordenadas no espaço de estimação (RATKOWSKY, 1983).

Para o modelo linear, essas medidas serão nulas, sendo assim, quanto menor forem essas medidas mais próximo o modelo estará do linear. Bates e Watts (1988) sugerem como referência que uma medida de curvatura (c) será considerada pequena se $c \ll 1/\sqrt{F}$, ou equivalentemente, se $c\sqrt{F} \ll 1$, em que $F_{(p,n-p,\alpha)}$ é o valor crítico obtido a partir de uma distribuição F com p e $(n - p)$ graus de liberdade. Como a regressão quantílica não linear ainda é pouco explorada, tem-se como precursor no uso de medidas de não linearidade nessa área o trabalho de Oliveira et al. (2021).

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Material

Os dados analisados fazem parte da coleção permanente do Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais (DCF) da Universidade Federal de Lavras (UFLA), município de Lavras/MG.

Para o desenvolvimento deste estudo, foram utilizadas 56 árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) amostradas em áreas de preservação ambiental nos municípios de Montalvânia e Juvenília, extremo norte de Minas Gerais, num fragmento preservado de floresta sazonalmente seca, por ser potencial para a ocorrência de árvores centenárias. Segundo a estação meteorológica mais próxima (Estação Caririnha-BA, ID:83408), a precipitação total anual da região é de 814 mm de lâmina d'água e a estação chuvosa é de outubro a março, quando 90,7% da precipitação anual total ocorre. Os meses mais secos são junho, julho e agosto com uma média de precipitação nos três meses abaixo de 7 mm (PEREIRA et al., 2018).

As coletas das amostras foram realizadas nos meses de fevereiro e maio de 2016 com o uso da técnica não destrutiva, a qual não compromete a sobrevivência dos indivíduos amostrados. Para isso utilizou-se trados de incrementos de 5 e 12 mm de furo, perfurando o tronco das árvores vivas no sentido casca-medula. Para se obter uma boa representatividade, foram retiradas mais de uma amostra radial do tronco de cada indivíduo, as quais são chamadas de cilindros ou raios, que foram coladas em suportes de madeira que permitem sua manipulação (processamento e análise). Uma ilustração do processo de coleta das amostras pode ser visualizado na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Processo de coleta das amostras de cedro (*Cedrela fissilis*) com o Trado de Pressler. A: Inserção do Trado de Pressler na árvore; B: Retirada da amostra radial com o extrator do Trado de Incremento



Fonte: Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais - UFLA/MG
Gabriel de Assis Pereira (Fotógrafo)

Em laboratório, as amostras de discos e cilindros foram preparadas por meio do lixamento de suas superfícies transversais, com lixadeira elétrica manual, para assim possibilitar a visualização dos anéis de crescimento. As amostras foram submetidas a uma sequência sucessiva de abrasividade das lixas (40, 60, 80, 150, 180, 220, 300 e 400) para assim manter a integridade dos elementos anatômicos. Posteriormente as amostras são polidas manualmente com folhas de lixa micro abrasivas de óxido de alumínio (grão 40, 30, 15 e 9 μm) e lã de aço #0000, permitindo a visualização de cada célula sob lupa estereomicroscópica, conforme se observa na figura 3.2.

Figura 3.2 – Anéis de crescimento de cedro (*Cedrela fissilis*) ampliados



Fonte: Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais - UFLA/MG
Gabriel de Assis Pereira (Fotógrafo)

A contagem dos anéis de crescimento e co-datação foram realizadas de acordo com as técnicas rigorosas da dendrocronologia detalhadas em Stokes e Smiley (1996). A co-datação foi

realizada no sentido da casca para medula, em que o anel mais próximo da casca corresponde ao ano corrente e os demais anéis decrescem retrospectivamente, determinando assim a idade daquela árvore.

Após a etapa da co-datação, as larguras dos anéis de crescimento devidamente datados foram medidas pelo sistema de medição LINTAB 6 Scientific, onde a soma das larguras de todos os anéis equivale ao raio da árvore, o qual, multiplicado por dois, resulta no diâmetro acumulado à altura do peito (DAP). Na Figura 3.3 observa-se a amostra preparada para a devida medição.

Figura 3.3 – Amostra de cedro (*Cedrela fissilis*) preparada para a medição com o LINTAB 6 Scientific



Fonte: Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais - UFLA/MG
Gabriel de Assis Pereira (Fotógrafo)

3.2 Metodologia

3.2.1 Modelos a serem ajustados

Foram ajustados os dados do diâmetro à altura do peito (DAP) acumulado do cedro (*Cedrela fissilis*) em função da sua idade utilizando a regressão não linear convencional e também a regressão quantílica não linear. Previamente todas as árvores foram consideradas e, em seguida, o modelo que melhor se ajustou à esses dados foi utilizado para modelar cada árvore individualmente.

Foram utilizados os modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull, os quais estão apresentados na Tabela 3.1. O método de estimação para os parâmetros foi o de Mínimos Quadrados Ordinários utilizando o método iterativo de Gauss-Newton e a regressão quantílica de acordo com os quantis $\tau = 0,25$, $\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$ utilizando-se o algoritmo de pontos interiores proposto por Koenker e Park (1996).

Tabela 3.1 – Modelos de regressão não linear ajustados para descrever a curva de crescimento de cedro (*Cedrela fissilis*) através da regressão convencional e regressão quantílica.

Modelo	Função convencional	Função quantílica
Logístico	$E[Y x_i] = \frac{\alpha}{1 + e^{\kappa(\beta-x_i)}}$	$Q_\tau[Y x_i] = \frac{\alpha(\tau)}{1 + e^{\kappa(\tau)(\beta(\tau)-x_i)}}$
Gompertz	$E[Y x_i] = \alpha e^{-e^{\kappa(\beta-x_i)}}$	$Q_\tau[Y x_i] = \alpha(\tau) e^{-e^{\kappa(\tau)(\beta(\tau)-x_i)}}$
von Bertalanffy	$E[Y x_i] = \alpha \left[1 - \frac{e^{\kappa(\beta-x_i)}}{3} \right]^3$	$Q_\tau[Y x_i] = \alpha(\tau) \left[1 - \frac{e^{\kappa(\tau)(\beta(\tau)-x_i)}}{3} \right]^3$
Brody	$E[Y x_i] = \alpha \left[1 - \beta e^{(-\kappa x_i)} \right]$	$Q_\tau[Y x_i] = \alpha(\tau) \left[1 - \beta(\tau) e^{(-\kappa(\tau) x_i)} \right]$
Chapman-Richards	$E[Y x_i] = \alpha [1 - e^{(-\kappa x_i)}]^\beta$	$Q_\tau[Y x_i] = \alpha(\tau) [1 - e^{(-\kappa(\tau) x_i)}]^\beta(\tau)$
Weibull	$E[Y x_i] = \alpha \left[1 - e^{(-\kappa x_i^\beta)} \right]$	$Q_\tau[Y x_i] = \alpha(\tau) \left[1 - e^{(-\kappa(\tau) x_i^{\beta(\tau)})} \right]$

Fonte: Da autora

Em que, $E[Y|x_i]$ representa o DAP médio acumulado, em cm, x_i a idade da árvore, em anos, com i variando de 1 a 154, τ refere-se ao quantil assumido ($\tau \in (0, 1)$), $Q_\tau[Y|x_i]$ representa o DAP acumulado, em cm, no quantil τ , α o valor assintótico para resposta média, ou seja, o valor esperado para o DAP máximo acumulado das árvores em estudo, β a abscissa dos pontos de inflexão das curvas, com exceção para os modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull cujas formas das curvas não apresentam ponto de inflexão e κ o índice de maturidade ou precocidade, quanto maior indica que menos tempo a árvore leva para atingir seu tamanho adulto.

Para a função quantílica, $\alpha(\tau)$ representa o valor assintótico para resposta quantílica, ou seja, o valor esperado para o DAP máximo acumulado das árvores em estudo no quantil τ , $\beta(\tau)$ a abscissa dos pontos de inflexão das curvas no quantil τ , com exceção para os modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull cuja forma das curvas não apresenta ponto de inflexão e $\kappa(\tau)$ o índice de maturidade ou precocidade no quantil τ .

3.2.2 Análise de resíduos

Após o ajuste dos modelos através da regressão não linear convencional foi realizada uma análise de resíduos com a finalidade de verificar se os pressupostos de normalidade, homocedasticidade e independência residuais estavam sendo satisfeitos. Foram utilizados os testes de

Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson para testar a normalidade, homocedasticidade e independência residuais, respectivamente.

3.2.3 Seleção do modelo

Estimados os parâmetros dos modelos, a qualidade dos ajustes foi avaliada através dos resultados encontrados para: *i*) desvio médio absoluto (DMA); *ii*) critério de informação de Akaike (*AIC*) e *iii*) coeficiente de determinação (R^2 ou $R^1(\tau)$), sendo escolhido como modelo melhor ajustado aquele que apresentou maiores valores para R^2 ou $R^1(\tau)$ e menores valores para DMA e *AIC*. Foi verificada a adequabilidade do modelo de regressão através das medidas de curvatura de Bates e Watts.

3.2.4 Agrupamento das árvores em estudo

Após ajustar os modelos de regressão quantílica não linear para as 56 árvores, estas foram classificadas de acordo com os diferentes padrões de crescimento, pois segundo Lobão et al. (2016), ainda existe pouco conhecimento sobre o crescimento e a regeneração natural das árvores de espécies tropicais, o que dificulta na elaboração adequada de planos de manejo e de acordo com Ebling et al. (2012), agrupar espécies de árvores com características de crescimento semelhantes é muito importante para auxiliar na tomada de decisões.

O agrupamento das árvores em estudo foi feito calculando-se as distâncias entre os valores observados de cada árvore e os seus respectivos valores estimados pelos modelos de regressão quantílica ajustados para cada quantil ($\tau = 0,25$; $\tau = 0,50$; $\tau = 0,75$). A medida de dissimilaridade utilizada foi a distância euclidiana, apresentada por Puiatti et al. (2018) como:

$$d_{rs} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (\hat{y}_{rj} - y_{sj})^2},$$

sendo, d_{rs} a distância entre os valores estimados pelo modelo r e observados na árvore s , \hat{y}_{rj} o valor estimado do DAP acumulado, em cm, pelo modelo r , y_{sj} o valor observado do DAP acumulado, em cm, da árvore s e m o número de observações da árvore em estudo.

Cada árvore foi classificada de acordo com a curva que apresentou menor distância entre os valores estimados e observados: árvores de pequeno porte ($\tau = 0,25$), árvores de porte intermediário ($\tau = 0,50$) e árvores de grande porte ($\tau = 0,75$).

3.2.5 Recursos computacionais

Todo o processo de análise e modelagem envolvida na elaboração deste trabalho foi feita utilizando-se o *software* estatístico R, de acesso livre (R Core Team, 2021) com a utilização dos pacotes *nlme*, *car*, *lmtest*, *qpcR* e *quantreg*.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Análise exploratória

Inicialmente foi realizada uma análise exploratória para verificar o comportamento dos dados de DAP acumulado em árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) ao longo dos anos. Conforme pode-se observar na Tabela 4.1, o maior valor observado foi de 48,20 cm, valor este que foi utilizado como valor inicial para estimação da assíntota horizontal superior da curva de crescimento das árvores, já que o parâmetro α apresenta essa interpretação biológica nos modelos não lineares utilizados (MISCHAN; PINHO, 2014).

Tabela 4.1 – Estatística descritiva para o DAP acumulado, em cm, em árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) ao longo dos anos.

Variável	Mínimo	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	Assimetria
DAP acumulado	0,00	8,34	14,80	16,84	24,84	48,20	0,55

Fonte: Da autora

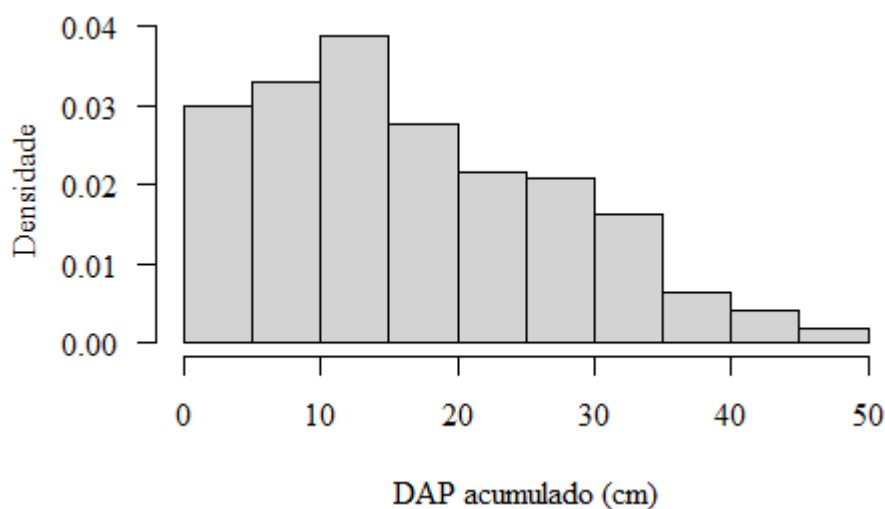
Outra medida importante a ser observada é a assimetria da curva de distribuição dos dados, a qual está associada ao grau de desvio ou afastamento da simetria de uma distribuição. A assimetria pode ser observada pela comparação das medidas de tendência central, sendo que numa distribuição simétrica a média, a mediana e a moda são iguais ou através de uma medida adimensional como o coeficiente de assimetria de Pearson, de tal modo que a distribuição é classificada como simétrica quando esse coeficiente é igual a 0. A assimetria pode ser classificada como fraca quando o valor absoluto do coeficiente for menor ou igual a 0,15, moderada quando pertencer ao intervalo (0,15; 1] e forte quando for maior que 1. Através do sinal algébrico (+/-) do coeficiente pode-se indicar o lado da distribuição que existe maior concentração dos dados, assim a distribuição pode ser considerada como assimétrica à direita (positiva) ou à esquerda (negativa) (CRESPO, 2020; MATTOS; KONRATH; AZAMBUJA, 2017).

A partir disso, observa-se que a distribuição da variável em estudo apresenta uma assimetria positiva, pois pela Tabela 4.1 tem-se que o valor médio do DAP acumulado é igual a 16,84 cm, valor este maior que a mediana (14,80 cm) e, além disso, a medida do coeficiente de assimetria encontrado (0,55) é maior que zero e tem seu valor absoluto dentro do intervalo (0,15; 1], indicando uma assimetria moderada à direita.

Para melhor visualização da distribuição dos dados foi construído o histograma da variável em estudo (Figura 4.1), através do qual é possível observar a concentração dos dados nos

valores mais baixos, o que torna a distribuição assimétrica. Note que a ocorrência de valores altos apresenta baixa frequência, o que mostra que a cauda da distribuição está localizada à direita, ratificando assim que a distribuição dos dados possui uma assimetria positiva. Pode-se observar um comportamento semelhante da distribuição dos dados de DAP acumulado em estudos como os realizados por Pereira et al. (2018) e Stepka et al. (2021), em árvores de *Cedrela fissilis* amostradas na região sul do Brasil.

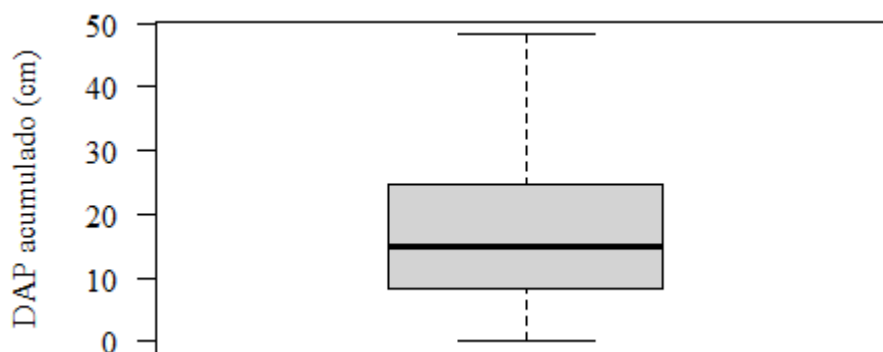
Figura 4.1 – Histograma para o DAP acumulado em árvores de cedro (*Cedrela fissilis*)



Fonte: Da autora

Para finalizar a análise exploratória dos dados foi construído um *boxplot*, o qual segundo Morales, Giraldo e Torres (2021), é uma ferramenta estatística muito eficaz para verificar de modo visual e rápido o resumo do conjunto de dados estudado e a presença de *outliers*, os quais podem exercer uma forte influência na análise estatística, podendo até mesmo levar a conclusões equivocadas na utilização da regressão convencional (SCHWERTMAN; OWENS; ADNAN, 2004), porém a regressão quantílica se mostra bem robusta a existência de *outliers* no banco de dados (ARAÚJO et al., 2019; KOENKER, 2005; PAULO et al., 2021).

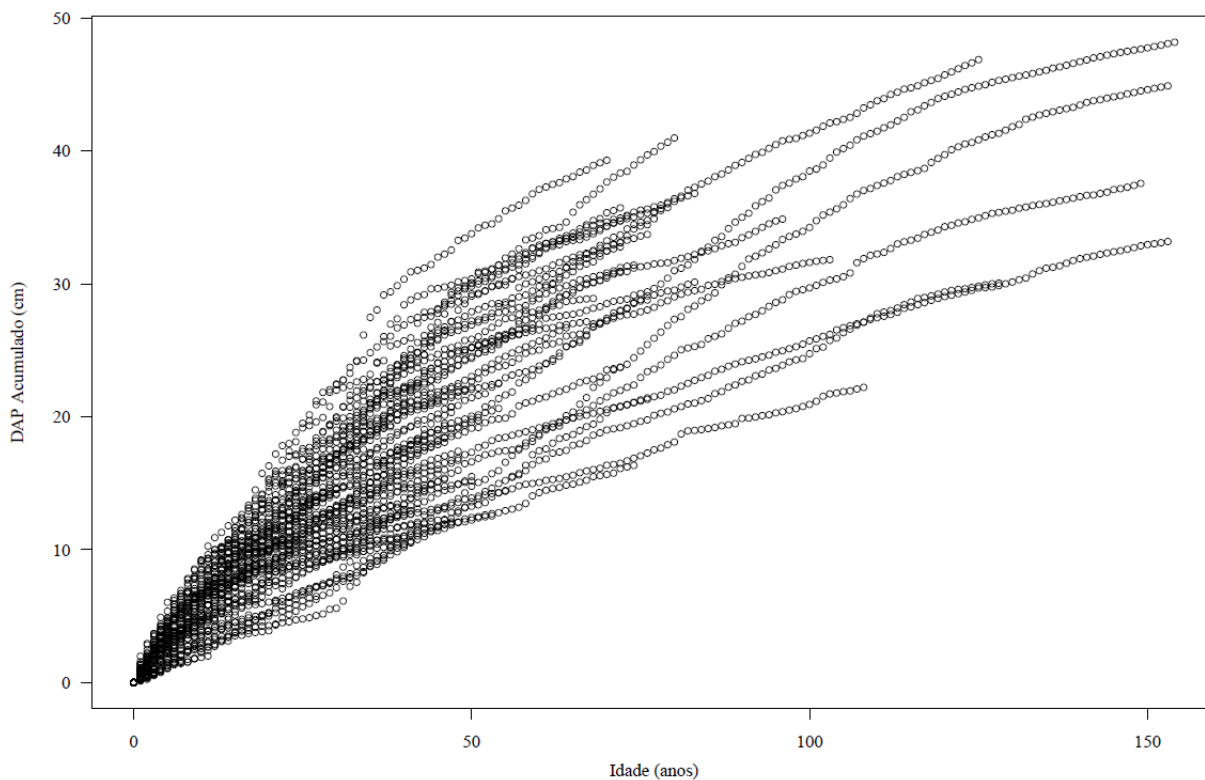
Desta forma, pode-se observar na Figura 4.2 o *boxplot* construído para os dados de DAP acumulado, mostrando visualmente a ausência de *outliers* e a assimetria do conjunto de dados em estudo.

Figura 4.2 – *Boxplot* para o DAP acumulado, em cm, em árvores de cedro (*Cedrela fissilis*)

Fonte: Da autora

4.2 Ajuste dos modelos

Na Figura 4.3, pode-se observar o diagrama de dispersão do DAP acumulado ao longo do tempo para as 56 árvores amostradas de cedro (*Cedrela fissilis*), o qual nos sugere um caráter não linear dos dados (exponencial/sigmoidal).

Figura 4.3 – Gráfico de dispersão para os dados de DAP acumulado, em cm, em função da idade, em anos, das árvores de cedro (*Cedrela fissilis*)

Fonte: Da autora

Curvas de crescimento com caráter exponencial ou sigmoidal são bem representadas por modelos não lineares, sendo assim, para descrever o crescimento dessas árvores foram ajustados os modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull, modelos estes muitos utilizados em estudos de crescimento na área florestal, como pode ser observado em Barbosa et al. (2018) com espécies nativas de florestas tropicais, Gheyret et al. (2021) em espécies de floresta subtropical, Korkmaz e Unluyol (2018) em *Eucalyptus camaldulensis* Dehn., Nigul et al. (2021) em espécie nativa e comercial e Silva et al. (2021) em espécie híbrida de *Eucalyptus urophylla* & *Eucalyptus grandis*.

Após a obtenção das estimativas dos parâmetros dos modelos pelo método dos mínimos quadrados ordinários foi feita uma análise de resíduos para verificar a validade dos pressupostos, ou seja, se os resíduos são independentes e identicamente distribuídos seguindo uma distribuição normal com média zero e variância constante. São apresentados na Tabela 4.2 os resultados da aplicação dos testes de Shapiro-Wilk (normalidade), Durbin-Watson (independência) e Breusch-Pagan (homocedasticidade). Estes mesmos testes foram utilizados em trabalhos como os de Fernandes et al. (2019), Jane et al. (2020) e Silva et al. (2021) para verificar as pressuposições dos resíduos obtidos a partir de ajustes de modelos não lineares.

Tabela 4.2 – Valor-p dos testes de Shapiro-Wilk (normalidade), Durbin-Watson (independência) e Breusch-Pagan (homocedasticidade) aplicados aos resíduos dos modelos ajustados.

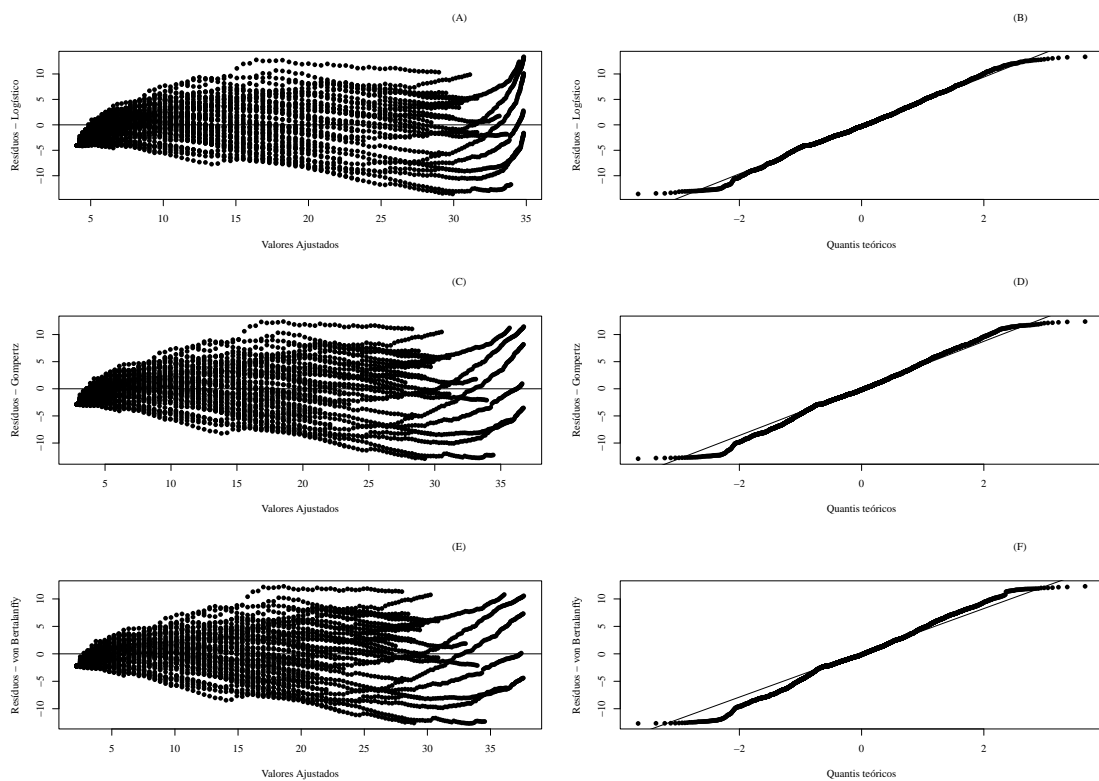
Modelo	Shapiro-Wilk	Durbin-Watson	Breusch-Pagan
Logístico	< 0,001	< 0,001	< 0,001
Gompertz	< 0,001	0,5980	< 0,001
von Bertalanffy	< 0,001	0,6640	< 0,001
Brody	< 0,001	0,1820	< 0,001
Chapman-Richards	< 0,001	0,1740	< 0,001
Weibull	< 0,001	0,1920	< 0,001

Fonte: Da autora

Pelos resultados apresentados na Tabela 4.2, percebe-se que todos os modelos, exceto o Logístico, atenderam ao pressuposto de independência residual, o que pode ser verificado pelo teste de Durbin-Watson (valor-p > 0,05). Porém por meio dos testes de Shapiro-Wilk e Breusch-Pagan, verifica-se que todos os modelos ajustados apresentaram problema de não normalidade e heterocedasticidade no vetor de resíduos (valor-p < 0,001).

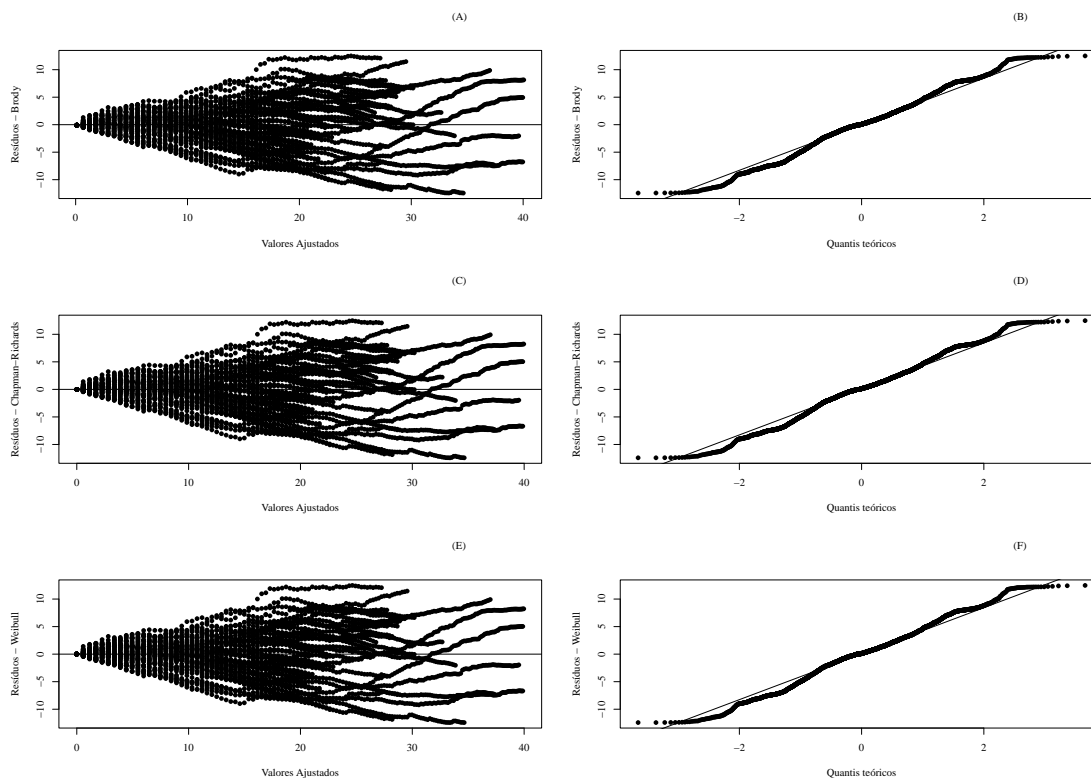
É possível observar pelas Figuras 4.4 e 4.5 que a análise gráfica corroborou com os resultados obtidos pelos testes Breusch-Pagan e Shapiro-Wilk presentes na Tabela 4.2, indicando resíduos heterocedásticos (formato de cone) nos gráficos de valores ajustados em relação aos resíduos (A, C, E) e não normalidade (leve formato de "S") nos gráficos de valores residuais em relação aos quantis teóricos (B, D, F).

Figura 4.4 – Distribuição gráfica dos resíduos para DAP acumulado das árvores de cedro (*Cedrela fissilis*), em que (A), (C) e (E) representam os valores ajustados em relação aos resíduos e (B), (D) e (F) representam os valores residuais em relação aos quantis teóricos para os modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy.



Fonte: Da Autora

Figura 4.5 – Distribuição gráfica dos resíduos para DAP acumulado das árvores de cedro (*Cedrela fissilis*), em que (A), (C) e (E) representam os valores ajustados em relação aos resíduos e (B), (D) e (F) representam os valores residuais em relação aos quantis teóricos para os modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull.



Fonte: Da autora

Diante disso, ressalta-se a importância do trabalho realizado por Inga e Valle (2017), em que os autores afirmam que a presença de heterocedasticidade e não normalidade residuais são comuns em estudos na área florestal, porém apresentam preocupação por muitos trabalhos realizados sem a devida atenção à análise de resíduos (ANDRADE et al., 2019a; GHEYRET et al., 2021; NIGUL et al., 2021; RESENDE et al., 2020; ROSA et al., 2017; SCHÖNGART, 2008), fato este que pode gerar conclusões equivocadas em suas pesquisas.

Portanto, perante a não validação dos pressupostos, os modelos foram ajustados utilizando-se regressão quantílica, a qual segundo Koenker (2005) incorpora satisfatoriamente a falta de normalidade e a heterocedasticidade no vetor de resíduos. Foram utilizados a mediana ($\tau = 0,50$) e os quantis $\tau = 0,25$ e $\tau = 0,75$ para as caudas da distribuição, os quais apresentaram menores valores de AIC para todos os modelos estudados, como pode ser observado pela Tabela 4.3. Serão expostos os ajustes realizados através do método de mínimos quadrados somente a título de comparação.

Tabela 4.3 – Critério de informação de Akaike (AIC) para os modelos de regressão quantílica em diferentes quantis.

Modelo	Quantil	AIC	Modelo	Quantil	AIC
Logístico	0,10	24.690,61	Brody	0,10	23.716,95
	0,15	24.497,75		0,15	23.597,02
	0,20	24.362,04		0,20	23.537,00
	0,25	24.221,18		0,25	23.533,71
	0,50	23.700,56		0,50	23.297,42
	0,75	23.782,53		0,75	23.213,53
	0,80	23.906,31		0,80	23.261,61
	0,85	24.077,22		0,85	23.369,32
	0,90	24.354,55		0,90	23.611,07
Gompertz	0,10	24.293,06	Chapman-Richards	0,10	24.028,65
	0,15	24.123,10		0,15	23.595,92
	0,20	24.010,08		0,20	23.519,89
	0,25	23.919,97		0,25	23.517,23
	0,50	23.490,79		0,50	23.297,37
	0,75	23.451,75		0,75	23.216,35
	0,80	23.530,91		0,80	23.265,34
	0,85	23.674,83		0,85	23.376,04
	0,90	23.951,06		0,90	23.620,52
von Bertalanffy	0,10	24.093,65	Weibull	0,10	23.717,38
	0,15	23.951,55		0,15	23.595,82
	0,20	23.854,32		0,20	23.519,19
	0,25	23.795,12		0,25	23.516,15
	0,50	23.400,28		0,50	23.297,70
	0,75	23.330,30		0,75	23.217,92
	0,80	23.401,07		0,80	23.267,52
	0,85	23.541,60		0,85	23.378,13
	0,90	23.803,76		0,90	23.623,08

Fonte: Da autora

Na Tabela 4.4 são apresentadas as estimativas dos parâmetros e seus respectivos erros-padrão baseado no ajuste dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull através do método dos mínimos quadrados ordinários e da regressão quantílica nos quantis $\tau = 0,25$, $\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$.

Tabela 4.4 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull ajustados pelo método dos mínimos quadrados ordinários (M.Q.O.) e pela regressão quantílica (R.Q.) com seus respectivos erros-padrão.

Modelos		α (EP)	β (EP)	κ (EP)
Logístico	M.Q.O.	34,9176 (0,2810)	39,3411 (0,4632)	0,0517 (0,0009)
	R.Q. ($\tau = 0,25$)	28,2893 (0,5518)	40,6403 (0,8697)	0,0588 (0,0019)
	R.Q. ($\tau = 0,50$)	33,0491 (0,5649)	35,6132 (0,8195)	0,0624 (0,0018)
	R.Q. ($\tau = 0,75$)	39,0163 (0,6566)	35,3150 (0,8843)	0,0581 (0,0020)
Gompertz	M.Q.O.	37,4827 (0,3743)	29,9314 (0,4346)	0,0316 (0,0007)
	R.Q. ($\tau = 0,25$)	30,9360 (0,3634)	32,7585 (0,6883)	0,0329 (0,0011)
	R.Q. ($\tau = 0,50$)	35,6914 (0,7358)	27,6954 (0,8006)	0,0367 (0,0013)
	R.Q. ($\tau = 0,75$)	43,3281 (0,7411)	28,2121 (0,6812)	0,0337 (0,0009)
von Bertalanffy	M.Q.O.	39,1110 (0,4476)	24,3528 (0,4005)	0,0252 (0,0006)
	R.Q. ($\tau = 0,25$)	32,4162 (0,3996)	27,2448 (0,6746)	0,0253 (0,0008)
	R.Q. ($\tau = 0,50$)	37,1546 (0,6643)	22,5993 (0,5657)	0,0290 (0,0008)
	R.Q. ($\tau = 0,75$)	45,3604 (0,5414)	23,0392 (0,4151)	0,0266 (0,0005)
Brody	M.Q.O.	47,1939 (0,9293)	0,9978 (0,0042)	0,0123 (0,0004)
	R.Q. ($\tau = 0,25$)	41,1246 (0,7037)	1,0000 (0,0003)	0,0105 (0,0003)
	R.Q. ($\tau = 0,50$)	46,3680 (3,0945)	1,0000 (0,0015)	0,0128 (0,0012)
	R.Q. ($\tau = 0,75$)	55,8012 (1,9129)	0,9943 (0,0017)	0,0125 (0,0006)
Chapman-Richards	M.Q.O.	46,8284 (1,3200)	1,0030 (0,0283)	0,0125 (0,0009)
	R.Q. ($\tau = 0,25$)	46,3231 (2,0743)	0,9053 (0,0269)	0,0077 (0,0009)
	R.Q. ($\tau = 0,50$)	46,8163 (6,0758)	0,9937 (0,0528)	0,0126 (0,0031)
	R.Q. ($\tau = 0,75$)	57,8871 (2,7871)	0,9535 (0,0177)	0,0113 (0,0010)
Weibull	M.Q.O.	46,8263 (1,5532)	1,0019 (0,0217)	0,0124 (0,0006)
	R.Q. ($\tau = 0,25$)	48,1046 (2,7899)	0,9181 (0,0216)	0,0116 (0,0005)
	R.Q. ($\tau = 0,50$)	45,7757 (6,2157)	1,0088 (0,0446)	0,0126 (0,0006)
	R.Q. ($\tau = 0,75$)	58,3119 (3,4154)	0,9640 (0,0175)	0,0136 (0,0005)

Fonte: Da autora

Nota-se pelos resultados apresentados na Tabela 4.4, que as estimativas do parâmetro α , que representam o DAP acumulado assintótico, obtidas pelo método dos mínimos quadrados foram muito próximas das encontradas pela mediana da regressão quantílica ($\tau = 0,5$), o que segundo Araújo et al. (2019) e Oliveira et al. (2021) pode indicar a ausência de *outliers* no conjunto de dados, fato este que corrobora com a análise visual do *boxplot* construído para variável em estudo (Figura 4.2).

Outro ponto importante a ser considerado está no fato de Stepka et al. (2021) apontarem que as árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) podem atingir de 40 a 80 cm de DAP acumulado, o que corrobora com as estimativas obtidas para o valor assintótico (α) pelos modelos Brody,

Chapman-Richards e Weibull, as quais têm seus valores dentro do intervalo supracitado para todos os quantis estimados, indicando bom ajuste destes em detrimento dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy, os quais apresentaram estimativas abaixo do limite inferior do intervalo.

Pode-se ainda notar que as estimativas do valor assintótico (α) para os modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull encontram-se próximas do limite inferior do intervalo de crescimento para o DAP acumulado indicado por Stepka et al. (2021). Porém, considerando-se estudos como os de Coradin, Siminski e Reis (2011), Gomes et al. (2021) e Silva (2013), os quais indicam intervalos entre 60 e 150 cm para DAP acumulado em árvores cedro, os valores das estimativas encontram-se situados fora desse intervalo, fato este que pode ser justificado pela região sazonalmente seca onde as árvores foram amostradas, pois segundo estudos como os de Dünisch (2005) e Venegas-González et al. (2018), a escassez hídrica do local interfere diretamente no crescimento das árvores de cedro (*Cedrela fissilis*).

Ainda observando as estimativas do valor assintótico (α), o modelo Brody aparenta ser o que melhor adere aos dados, pois pode-se notar que o modelo Chapman-Richards apresenta estimativas muito próximas para os quantis $\tau = 0,25$ e $\tau = 0,50$ e o modelo Weibull superestimou o valor de α para o quantil $\tau = 0,25$ comparado com a mediana ($\tau = 0,50$).

O formato sigmoidal das curvas dos modelos ajustados estão associados aos diferentes valores observados para o parâmetro β , os quais também foram verificados em trabalhos como os de Jane et al. (2020), Ribeiro et al. (2018b) e Silva et al. (2020). Os modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy apresentam ponto de inflexão, sendo o valor de β a abscissa desse ponto, já os modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull como não apresentam esse ponto não possuem interpretação prática para o referido parâmetro.

O parâmetro κ representa o índice de maturidade, ou seja, quanto menor o seu valor mais tempo o objeto em estudo leva para atingir o DAP acumulado assintótico, sendo assim, pode-se observar que para os modelos ajustados o quantil $\tau = 0,25$ apresentou as menores estimativas, indicando que as árvores de cedro de menor DAP acumulado levam mais tempo para atingirem a maturidade comparadas com as árvores medianas e maiores ($\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$, respectivamente).

Na Tabela 4.5 são apresentados os resultados para os critérios utilizados para seleção do modelo que melhor se ajustou aos dados.

Tabela 4.5 – Critérios para seleção dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull ajustados aos dados de DAP acumulado em árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) ao longo dos anos pela regressão quantílica.

Modelos	Quantil	$R^1(\tau)$	DMA	AIC	$c^\theta \cdot \sqrt{F}$	$c^l \cdot \sqrt{F}$
Logístico	M.Q.O.	0,7861	3,8468	23492,55	0,0785	0,0222
	$\tau = 0,25$	0,6745	4,8384	24221,18	0,1990	0,0042
	$\tau = 0,50$	0,7981	3,8070	23700,56	0,1215	0,0039
	$\tau = 0,75$	0,6867	4,6228	23782,53	0,0907	0,0028
Gompertz	M.Q.O.	0,8050	3,7300	23291,03	0,1076	0,0179
	$\tau = 0,25$	0,6833	4,7484	23919,97	0,0323	0,0056
	$\tau = 0,50$	0,8100	3,7063	23490,79	0,0260	0,0054
	$\tau = 0,75$	0,6869	4,5163	23451,75	0,0198	0,0038
von Bertalanffy	M.Q.O.	0,8112	3,6870	23229,33	0,1372	0,0164
	$\tau = 0,25$	0,6848	4,7170	23795,12	0,0422	0,0052
	$\tau = 0,50$	0,8135	3,6636	23400,28	0,0328	0,0050
	$\tau = 0,75$	0,6884	4,4657	23330,30	0,0261	0,0035
Brody	M.Q.O.	0,8186	3,6191	23167,81	0,4425	0,0138
	$\tau = 0,25$	0,6701	4,6788	23533,71	0,1990	0,0042
	$\tau = 0,50$	0,8183	3,6157	23297,42	0,1215	0,0039
	$\tau = 0,75$	0,6894	4,4029	23213,53	0,0907	0,0028
Chapman-Richards	M.Q.O.	0,8203	3,6190	23168,06	1,0130	0,0190
	$\tau = 0,25$	0,6636	4,6754	23517,23	0,9878	0,0057
	$\tau = 0,50$	0,8183	3,6157	23297,37	0,2820	0,0055
	$\tau = 0,75$	0,6891	4,4143	23216,35	0,2614	0,0039
Weibull	M.Q.O.	0,8202	3,6189	23168,06	1,0490	0,0197
	$\tau = 0,25$	0,6634	4,6736	23516,16	0,7306	0,0067
	$\tau = 0,50$	0,8183	3,6159	23297,70	0,2844	0,0057
	$\tau = 0,75$	0,6900	4,4099	23217,92	0,2365	0,0041

Fonte: Da autora

Os critérios utilizados para verificar a qualidade dos ajustes serão comparados nos mesmos quantis, pois segundo Puiatti et al. (2018), comparar medidas de qualidade de ajuste em diferentes quantis para os mesmos dados não faz sentido.

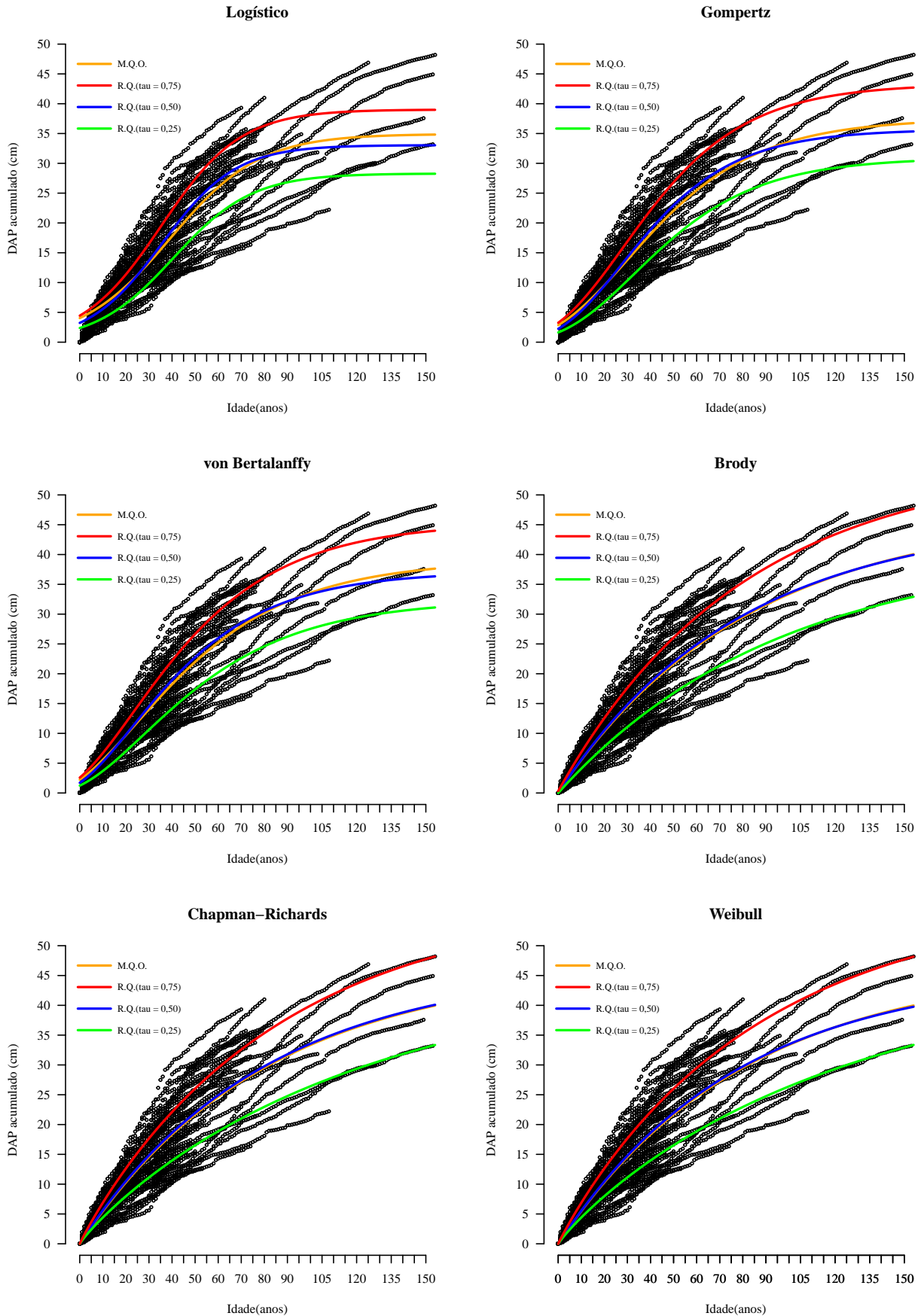
Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.5 para a medida de não linearidade intrínseca ($c^l \cdot \sqrt{F}$), percebe-se que os menores valores são apresentados pelo ajuste do modelo Brody, entretanto pode-se notar que apesar dos demais valores encontrados serem maiores que estes, eles ainda são muito baixos, o que segundo Bates e Watts (1988), Mazucheli e Achcar (2002) e Mischan e Pinho (2014), é comum em modelos não lineares de interesse prático.

Para a medida de não linearidade paramétrica ($c^\theta \cdot \sqrt{F}$), observando-se os modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull, os quais apresentaram estimativas mais consistentes para os parâmetros dos modelos ajustados, pode-se notar que o modelo Brody é o que apresenta os menores valores, indicando um melhor comportamento linear que os demais modelos.

Quanto aos demais critérios utilizados, percebe-se que o ajuste dos modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull foi muito semelhante entre eles e se mostrou superior aos demais modelos testados, pois obteve-se maiores valores de $R^1(\tau)$ e menores valores para DMA e AIC comparados com os demais modelos. Dessa forma, comparando-se os três modelos supracitados, sugere-se que o modelo Brody seja o mais adequado para descrever os dados, pois como descrito anteriormente, além dos modelos Chapman-Richards e Weibull apresentarem problemas nas estimativas do parâmetro α , o modelo Brody é o que apresenta menores valores para as medidas de curvatura de Bates e Watts

Na Figura 4.6 estão apresentados os gráficos dos ajustes dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull aos dados de DAP acumulado das árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) ao longo dos anos.

Figura 4.6 – Ajuste dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Chapman-Richards e Weibull aos dados de DAP acumulado, em cm, em função da idade, em anos, das árvores de cedro (*Cedrela fissilis*)



Através da análise visual dos gráficos é possível notar que os modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy não apresentaram boa aderência aos dados, superestimando as observações iniciais e subestimando as finais. Já os modelos Brody, Chapman-Richards e Weibull mostraram bons e semelhantes ajustes, ratificando assim os resultados encontrados pelos critérios utilizados para avaliar a qualidade dos ajustes.

Com isso, como os modelos Chapman-Richards e Weibull foram descartados anteriormente devido as estimativas da assíntota horizontal e das medidas de não linearidade, o modelo Brody pode ser considerado o que melhor descreveu o conjunto dos dados observados. Como esse modelo não apresenta ponto de inflexão, pode-se observar uma tendência ainda exponencial no crescimento dessas árvores, o que segundo Scolforo (2006), pode ocorrer devido ao fato dessa população ainda não conter indivíduos que tenham atingido a fase final do seu ciclo de crescimento, pois segundo o autor supracitado, a tendência sigmoideal pode ser vista quando pelo menos alguns indivíduos se aproximam do final do ciclo de crescimento.

4.3 Agrupamento das árvores em estudo

O modelo Brody foi ajustado aos dados de DAP acumulado ao longo do tempo para cada uma das 56 árvores em estudo, em seguida, as mesmas foram agrupadas pelas suas medidas de dissimilaridade através da utilização da distância euclidiana, através da qual as árvores foram separadas de acordo com o quantil do modelo de regressão quantílica que apresentou a menor distância entre o valor predito e o observado. As árvores foram classificadas como pequeno porte ($\tau = 0,25$), porte intermediário ($\tau = 0,50$) e grande porte ($\tau = 0,75$).

Nas Tabelas 4.6, 4.7 e 4.8 pode-se observar, respectivamente, o agrupamento das árvores classificadas como de pequeno, médio e grande portes, ou seja, aquelas que apresentaram menores valores da distância euclidiana para os quantis $\tau = 0,25$, $\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$.

Tabela 4.6 – Distância euclidiana entre os valores de DAP acumulado observados e preditos pelos modelos de regressão quantílica nos quantis $\tau = 0,25$, $\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$ para árvores classificadas como de pequeno porte.

Árvore	Quantil		
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,50$	$\tau = 0,75$
46	9,7263	14,9725	32,3591
48	10,2239	31,8705	49,0466
51	6,7809	37,7066	68,3625
55	6,2193	21,0218	35,6664
56	8,7717	32,4766	51,0777
63	10,3459	13,9737	25,7825
72	22,9177	48,8117	68,8311
80	5,6977	20,5423	37,0876
81	10,2320	14,8531	32,1774
82	4,2818	22,9497	37,5527
83	6,7394	26,9457	43,6176
86	10,1218	28,1928	42,6283
87	11,6304	24,0488	36,6721
90	5,3159	28,2310	46,8194
91	12,3620	12,9626	23,0658
108	45,0719	98,6626	144,5549
110	26,3628	85,2570	139,5576
116	30,1871	67,0342	96,8136
128	35,5946	53,0988	112,6906
134	20,9477	86,2175	151,5005

Fonte: Da autora

Tabela 4.7 – Distância euclidiana entre os valores de DAP acumulado observados e preditos pelos modelos de regressão quantílica nos quantis $\tau = 0,25$, $\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$ para árvores classificadas como de porte intermediário.

Árvore	Quantil		
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,50$	$\tau = 0,75$
41	11,3993	9,8982	23,1455
42	27,7618	6,6980	10,5496
43	24,2626	8,9818	15,5830
47	13,2295	11,5911	27,4697
59	17,1563	15,4192	27,9150
61	17,5330	6,8628	23,1623
67	31,1714	6,5296	17,0648
68	22,3624	8,6813	24,2888
79	13,6996	12,4080	27,3635
89	44,4332	13,9157	15,6470
92	39,9973	6,8696	37,2302
96	86,2695	60,6822	92,8165
115	21,7542	6,9450	26,1621
118	19,7278	19,6897	47,8449
135	45,0910	9,9372	51,6116

Fonte: Da autora

Tabela 4.8 – Distância euclidiana entre os valores de DAP acumulado observados e preditos pelos modelos de regressão quantílica nos quantis $\tau = 0,25$, $\tau = 0,50$ e $\tau = 0,75$ para árvores classificadas como de grande porte.

Árvore	Quantil		
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,50$	$\tau = 0,75$
35	85,2940	49,4247	22,2447
36	71,1642	24,2212	22,0401
37	97,7248	58,3146	28,2845
52	39,7087	19,3194	6,1677
58	55,8750	22,7402	11,0122
60	94,3019	57,9463	30,3879
64	39,2491	20,4987	7,5203
66	39,2612	18,3338	11,5309
69	99,4974	58,0323	26,7909
75	48,1263	15,8474	15,1757
77	111,0633	75,9568	48,4210
93	39,3107	17,6858	12,8307
101	55,3621	18,3165	17,4970
102	85,6330	47,3257	18,7327
104	82,0642	42,5104	13,6018
107	119,9223	58,7133	45,1849
109	80,9270	42,7799	14,3065
114	53,1072	20,3384	19,5527
120	72,1828	35,7995	13,5003
123	70,5842	35,1089	11,8371
124	122,3349	62,3646	14,5852

Fonte: Da autora

Por meio da classificação das árvores amostradas é possível notar que a maior parte da amostra (37,5%) é composta por árvores de grande porte, seguida pelas de pequeno porte (35,72%) e que a menor fração das árvores (26,78%) são de porte intermediário obtendo-se assim um mapeamento mais completo da floresta em estudo, o que pode ser visto como uma grande vantagem que a regressão quantílica traz para os estudos em florestas nativas, pois segundo Ebling et al. (2012), um dos grandes desafios para tomada de decisões em florestas tão heterogêneas é a carência de estudos que avaliem o seu real crescimento, o que ocasiona uma generalização das práticas de manejo.

Também é possível observar que o agrupamento das árvores foi eficiente, pois as árvores com menor (árvore 86) e maior (árvore 107) DAP acumulados estão, respectivamente, nos grupos de pequeno e grande portes. Puiatti et al. (2018) também obtiveram resultados satisfatórios

ao utilizarem a regressão quantílica não linear para obter o agrupamento de diferentes acessos de alho.

4.4 Ajuste dos modelos de regressão quantílica não linear para cada árvore

Para cada uma das árvores em estudo, foi ajustado o modelo Brody para mediana ($\tau = 0,5$) através da regressão quantílica e as estimativas dos parâmetros desse modelo são apresentadas na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Estimativas dos parâmetros do modelo Brody ajustado pela regressão quantílica no quantil $\tau = 0,5$ para cada árvore amostrada.

Árvore	Estimativas			Árvore	Estimativas		
	α	β	κ		α	β	κ
35	52,0361	1,0010	0,0162	81	23,9675	1,0051	0,0259
36	42,3428	1,0022	0,0176	82	24,6834	1,0245	0,0191
37	109,3490	0,9967	0,0060	83	17,1584	1,0288	0,0331
41	20,7800	0,9866	0,0325	86	12,5572	1,0636	0,0472
42	42,9403	1,0089	0,0158	87	9,9095	0,9818	0,1004
43	24,8116	0,9451	0,0297	89	34,2769	1,0022	0,0231
46	39,2918	0,9795	0,0120	90	27,5938	1,0409	0,0176
47	48,3135	0,9846	0,0101	91	13,0057	1,0000	0,0758
48	15,1982	1,0741	0,0384	92	53,6321	1,0031	0,0102
51	30,0730	0,9747	0,0161	93	26,5445	0,9835	0,0358
52	32,7158	0,9932	0,0269	96	120,4303	1,0381	0,0036
55	15,1240	1,0189	0,0436	101	36,6311	1,0139	0,0218
56	52,6157	1,0082	0,0071	102	55,8387	1,0016	0,0140
58	50,3248	1,0005	0,0138	104	46,9413	0,9697	0,0169
59	15,4216	1,0306	0,0684	107	99,9775	0,9998	0,0046
60	40,3358	1,0725	0,0292	108	38,7571	1,0071	0,0080
61	44,0436	1,0000	0,0125	109	43,7185	1,0136	0,0205
63	21,8955	0,8975	0,0221	110	166,0108	0,9959	0,0016
64	36,7403	0,9928	0,0232	114	71,1719	1,0120	0,0085
66	28,0372	0,9548	0,0316	115	31,0934	0,9966	0,0209
67	32,0944	1,0137	0,0233	116	25,3297	0,9535	0,0130
68	25,9755	1,0072	0,0281	118	31,7279	0,9974	0,0187
69	41,6135	1,0619	0,0263	120	36,9661	1,0031	0,0258
72	50,1108	1,0073	0,0059	123	54,2280	1,0000	0,0136
75	40,8170	1,0076	0,0180	124	68,8882	0,9911	0,0091
77	64,2668	1,0011	0,0144	128	70,7910	1,0160	0,0055
79	19,3943	1,0284	0,0398	134	46,8407	1,0441	0,0084
80	22,1472	1,0182	0,0252	135	39,3435	1,0409	0,0168

Fonte: Da autora

Ao observar as estimativas do parâmetro α pode-se perceber a diversidade entre as árvores amostradas, com estimativas de DAP acumulados assintóticos variando de 9,9095 cm a 166,0108 cm. O parâmetro κ foi o que apresentou maior coeficiente de variação para suas estimativas (78,33%) com valores oscilando entre 0,0016 e 0,1004. As estimativas do parâmetro β apresentaram menor coeficiente de variação que os demais.

Das árvores analisadas pode-se destacar a árvore 87, que apesar de possuir o menor DAP acumulado assintótico é a que atinge a maturidade mais rapidamente, pois apresenta o maior valor estimado para o índice de maturidade (κ) e a árvore 110, que apresenta o maior DAP assintótico e a menor estimativa para o índice de maturidade, o que indica que essa árvore é a que tem o crescimento mais lento comparada com as demais. Esse caráter inversamente proporcional entre o valor assintótico (α) e o índice de maturidade (κ) pode ser visto em estudos de modelagem não linear em espécies animais (ANDRADE et al., 2021; RIBEIRO et al., 2018a) e vegetais (DANTAS et al., 2018; OLIVEIRA et al., 2021; SANTOS; THIERSCH; MOREIRA, 2018; SILVA et al., 2020).

5 CONCLUSÕES

A regressão quantílica não linear se mostrou adequada para descrever o DAP acumulado ao longo do tempo de árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) em floresta nativa com resíduos assimétricos e heterocedásticos, podendo ser utilizada como uma alternativa para auxiliar em estudos de crescimento, sem desconsiderar os essenciais modelos convencionais de regressão e suas extensões.

O modelo Brody para regressão quantílica foi o que melhor aderiu aos dados indicando assim um caráter exponencial no crescimento da floresta em estudo.

Por meio da regressão quantílica não linear foi possível identificar as árvores com padrões de crescimento distintos, classificá-las e agrupá-las como pequeno, médio e grandes portes permitindo um mapeamento mais completo da população de cedro estudada.

REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE transactions on automatic control**, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.
- ANDRADE, P. C. M. et al. Curva de crescimento de capivaras (*hydrochoerus hydrochaeris* L., 1766) em cativeiro. **Brazilian Journal of Animal and Environmental Research**, v. 4, n. 1, p. 1553–1570, 2021.
- ANDRADE, V. H. F. et al. Growth models for two commercial tree species in upland forests of the southern brazilian amazon. **Forest Ecology and Management**, Elsevier, v. 438, p. 215–223, 2019.
- ANDRADE, V. L. C. et al. Growth rings of brazil nut trees (*bertholletia excelsa*) as a living record of historical human disturbance in central amazonia. **PloS one**, v. 14, n. 4, p. 1–18, 2019.
- ANDRAE, F. H.; SCHNEIDER, P. R.; DURLO, M. A. Importância do manejo de florestas nativas para a renda da propriedade e abastecimento do mercado madeireiro. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 28, n. 3, p. 1293–1302, 2018.
- ANDREACCI, F.; BOTOSSO, P. C.; GALVÃO, F. Sinais climáticos em anéis de crescimento de *Cedrela fissilis* em diferentes tipologias de florestas ombrófilas do sul do Brasil. **Floresta**, Curitiba, v. 44, n. 2, p. 323–332, 2014.
- ARAÚJO, C. A.; SOARES, C. P. B.; LEITE, H. G. Curvas de índices de local em povoamentos de eucalipto obtidas por regressão quantílica. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 51, p. 720–727, 2016.
- ARAÚJO, C. A. et al. Artificial neural networks, quantile regression, and linear regression for site index prediction in the presence of outliers. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 54, 2019.
- BALOUET, J. C. Dendroecology: A key forensic age-dating tool. **Environmental Forensics**, v. 6, n. 1, p. 3–4, 2005.
- BARBOSA, A. C. M. et al. Tree rings and growth trajectories of tree species from seasonally dry tropical forest. **Australian Journal of Botany**, v. 66, n. 5, p. 414–427, 2018.
- BARRODALE, I.; ROBERTS, F. D. An improved algorithm for discrete L_1 linear approximation. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 10, n. 5, p. 839–848, 1973.
- BARROSO, L. M. A. et al. Metodologia para análise de adaptabilidade e estabilidade por meio de regressão quantílica. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 50, n. 4, p. 290–297, 2015.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. Relative curvature measures of nonlinearity. **Journal of the Royal Statistical Society**, Wiley Online Library, v. 42, n. 1, p. 1–16, 1980.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John Wiley, 1988. 365 p.
- BATISTA, A. et al. Modeling tree diameter growth of *bertholletia excelsa* bonpl. in the brazilian amazon. **Forests**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 12, p. 1–10, 2020.

- BEALE, E. M. L. Confidence regions in non-linear estimation. **Journal of the Royal Statistical Society**, Wiley Online Library, v. 22, n. 1, p. 41–76, 1960.
- BOGINO, S. et al. Dendrochronological studies of indigenous and creole archeological remains in the argentinean pampas (19th and 20th centuries). **Dendrochronologia**, v. 55, p. 25–32, 2019.
- BOHORA, S. B.; CAO, Q. V. Prediction of tree diameter growth using quantile regression and mixed-effects models. **Forest Ecology and Management**, v. 319, p. 62–66, 2014.
- BOTOSSO, P. C.; VETTER, R. E.; TOMAZELLO FILHO, M. Periodicidade e taxa de crescimento de arvores de cedro (*Cedrela odorata* L., Meliaceae), jacareuba (*Calophyllum angulare* A. C. Smith, Clusiaceae) e muirapiranga (*Eperua bijuga* Mart. ex Benth, Leg. Caesalpinoideae) de floresta de Terra Firme, em Manaus-AM. **Dendrocronología en América Latina**, p. 357–380, 2000.
- BOTTAI, M.; CILLUFFO, G. Nonlinear parametric quantile models. **Statistical Methods in Medical Research**, v. 29, n. 12, p. 3757–3769, 2020.
- BOURI, E. et al. Does Bitcoin hedge global uncertainty? Evidence from wavelet-based quantile-in-quantile regressions. **Finance Research Letters**, v. 23, p. 87–95, 2017.
- BRASIL. **Florestas do Brasil em resumo: 2019**. Brasília: Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento/Serviço Florestal Brasileiro, 2019. 207 p.
- BRITO, C. O. et al. Growth curves of different free-range chicken lineages by the gompertz model. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 5, p. 1 – 11, 2021.
- BROZ, D. R. et al. The argentinian forest sector: opportunities and challenges in supply chain management. **Growing Science**, p. 1–18, 2018.
- CALEGARIO, N. et al. Melhoria da qualidade de ajuste de modelos biométricos florestais pelo emprego da teoria dos modelos não lineares generalizados. **Scientia Forestalis, Piracicaba**, v. 69, p. 38–50, 2005.
- CARVALHO, P. E. R. **Espécies arbóreas brasileiras**. Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica; Colombo, PR: Embrapa Florestas, 2003. 1039 p. (Coleção espécies arbóreas brasileiras).
- CHAVE, J. et al. Improved allometric models to estimate the aboveground biomass of tropical trees. **Global change biology**, Wiley Online Library, v. 20, n. 10, p. 3177–3190, 2014.
- CHEN, C.; WEI, Y. Computational issues for quantile regression. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics**, p. 399–417, 2005.
- CNCFLORA. 2020. Centro Nacional de Conservação da Flora. Ministério do Meio Ambiente. Brasil. Disponível em: <<http://www.cncflora.jbrj.gov.br/portal/pt-br/listavermelha>>. Acesso em: 05 jan. 2020.
- CORADIN, L.; SIMINSKI, A.; REIS, A. **Espécies nativas da flora brasileira de valor econômico atual ou potencial: plantas para o futuro - Região Sul**. Brasília: MMA, 2011. 934 p.

CORDEIRO, G. M.; DEMÉTRIO, C. G. B. **Modelos Lineares Generalizados e Extensões**. Piracicaba: ESALQ/USP, 2008. 392 p.

CRESPO, A. A. **Estatística**. São Paulo: Saraiva, 2020. 256 p.

DANTAS, D. et al. Modelagem não linear da curva de acumulação de espécies, no sul de moçambique. **Caderno de Ciências Agrárias**, v. 10, n. 2, p. 35–45, 2018.

DAVINO, C.; FURNO, M.; VISTOCCO, D. **Quantile regression: theory and applications**. : Wiley, 2014. 260 p.

DEMÉTRIO, C. G. B.; ZOCCHI, S. S. **Modelos de regressão**. Piracicaba: ESALQ/USP, 2006. 191 p.

DIEL, M. I. et al. Nonlinear regression for description of strawberry (fragaria x ananassa) production. **The Journal of Horticultural Science and Biotechnology**, v. 94, n. 2, p. 259–273, 2018.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1998. 706 p.

DUDUSOLA, I.; OSENI, S.; ADEYEMI, E. Modeling the growth curve of japanese quail under different nutritional environments. **Nigerian Journal of Animal Science**, v. 21, n. 2, p. 53–58, 2019.

DÜNISCH, O. Influence of the El-niño southern oscillation on cambial growth of *Cedrela fissilis* Vell. in tropical and subtropical Brazil. **Journal of Applied Botany and Food Quality**, v. 79, p. 05–11, 2005.

EBLING, A. A. et al. Acuracidade da distribuição diamétrica entre métodos de projeção em floresta ombrófila mista. **Ciência Rural**, v. 42, n. 6, p. 1020–1026, 2012.

ENCINAS, J. I.; SILVA, G. F. d.; PINTO, J. R. R. **Idade e crescimento das árvores**. Brasília, DF: Universidade de Brasília. Departamento de Engenharia Florestal, 2005. 43 p. (Comunicações técnicas florestais; v. 7, n. 1).

FAO. **Food and Agriculture Organization of the United Nations**. 2020. Disponível em: <<https://www.fao.org/forest-resources-assessment/en/>>. Acesso em: 20 out. 2021.

FERNANDES, F. A. et al. Growth curves of meat-producing mammals by von bertalanffy's model. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 54, 2019.

FERNANDES, T. J. et al. Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum Technology**, Maringá, v. 37, n. 4, p. 397–402, 2015.

FERNANDES, T. J. et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, Lavras, v. 9, n. 2, p. 207–215, 2014.

FIGUEIREDO FILHO, A. et al. Crescimento e idade de espécies nativas regenerantes sob plantio de *Araucaria angustifolia* no Paraná. **Floresta e Ambiente**, v. 24, 2017.

FREITAS, A. R. Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira Zootecnia**, v. 34, n. 3, p. 786–795, 2005.

- FRITTS, H. C. **Tree rings and climate**. London: Academic Press, 1976. 567 p.
- FRÜHAUF, A. C. **Uso de modelos não lineares no estudo do crescimento diamétrico de cedro (*Cedrela fissilis*)**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras, 2018. 61 p.
- FRÜHAUF, A. C. et al. Nonlinear models in the study of the cedar diametric growth in a seasonally dry tropical forest. **Revista Brasileira de Ciências Agrárias**, v. 15, n. 4, p. 1–8, 2020.
- FURNO, M.; VISTOCCO, D. **Quantile regression: estimation and simulation**. : Wiley, 2018. 287 p.
- GALARZA, C. E. et al. Quantile regression for nonlinear mixed effects models: a likelihood based perspective. **Statistical Papers**, p. 1–27, 2018.
- GHEYRET, G. et al. Radial growth response of trees to seasonal soil humidity in a subtropical forest. **Basic and Applied Ecology**, Elsevier, p. 74–86, 2021.
- GIBSON, L. et al. Primary forests are irreplaceable for sustaining tropical biodiversity. **Nature**, v. 478, n. 7369, p. 378–381, 2011.
- GLÖDER, M. 2021. Disponível em: <<https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Normalverteilung.png#filelinks>>. Acesso em: 31 dez. 2021.
- GOLDMAN, L.; WEISSE, M. **Technical Blog: Global Forest Watch’s 2018 Data Update Explained**. 2019. Disponível em: <<https://blog.globalforestwatch.org/data-and-research/blog-tecnico-explicacao-da-atualizacao-de-dados-do-global-forest-watch-2018>>. Acesso em: 02 jan. 2020.
- GOMES, J. O. et al. Biometria de frutos e armazenamento de sementes de cedrela fissilis vell. **Revista Brasileira de Agropecuária Sustentável**, v. 11, n. 1, p. 86–94, 2021.
- GRINGS, M.; BRACK, P. Cedrela fissilis: cedro. In: **Espécies nativas da flora brasileira de valor econômico atual ou potencial: plantas para o futuro - Região Sul**. Brasília, DF: Ministério do Meio Ambiente, 2011. v. único, p. 444–447.
- GUL, O. T. A simple method to grow millimeters long vertically aligned carbon nanotube forests. **Diamond and Related Materials**, Elsevier, v. 120, p. 1–6, 2021.
- GULOKSUZ, S. et al. Analyzing the duration of untreated psychosis: quantile regression. **JAMA psychiatry**, v. 73, n. 10, p. 1094–1095, 2016.
- GUTTMAN, I.; MEETER, D. A. On Beale’s measures of non-linearity. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 7, n. 4, p. 623–637, 1965.
- HAO, L.; NAIMAN, D. Q. **Quantile regression**. New York: SAGE Publications, 2007. 126 p.
- HESS, A. F.; RICKEN, P.; CIARNOSCHI, L. D. Dendrocronologia, incremento e manejo florestal em floresta de araucária-SC. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 28, n. 4, p. 1568–1582, 2018.
- HILJE, L. En busca de un enfoque preventivo para el manejo del barrenador de las meliáceas (*hypsipyla grandella*). **Revista de Ciencias Ambientales**, v. 54, n. 2, p. 211–229, 2020.

HOFFMANN, R. **Análise de regressão: uma introdução à econometria [recurso eletrônico]**. Piracicaba: ESALQ/USP, 2015. 393 p.

IBGE. **Monitoramento da cobertura e uso da terra do Brasil 2016 - 2018**. Rio de Janeiro - RJ: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2020. 27 p.

IMAÑA, J.; ENCINAS, O. **Epidometria forestal**. Brasília, DF: Universidade de Brasília. Departamento de Engenharia Florestal, 2008. 72 p.

INGA, J. G.; VALLE, J. I. del. Log-relative growth: A new dendrochronological approach to study diameter growth in *cedrela odorata* and *juglans neotropica*, central forest, peru. **Dendrochronologia**, Elsevier, v. 44, p. 117–129, 2017.

IPCC. **Climate Change 2021: The Physical Science Bases**. Geneva, 2021. 3949 p.

IUCN. 2020. Lista Vermelha de espécies ameaçadas. União Internacional para a Conservação da Natureza. Disponível em: <<http://www.iucnredlist.org/details/33928/0>>. Acesso em: 05 jan. 2020.

JANAMPA-SARMIENTO, P. et al. Nonlinear regression analysis of length growth in cultured rainbow trout. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, v. 72, n. 5, p. 1778–1788, 2020.

JANE, S. A. et al. Adjusting the growth curve of sugarcane varieties using nonlinear models. **Ciência Rural**, v. 50, n. 3, p. 1 – 10, 2020.

JONES, M. D.; BOWLES, M. L. Eastern redcedar dendrochronology links hill prairie decline with decoupling from climatic control of fire regime and reduced fire frequency1. **The Journal of the Torrey Botanical Society**, v. 143, n. 3, p. 239–254, 2016.

KHAMYONG, N. et al. Tree species composition and height-diameter allometry of three forest types in northern thailand. **CMU J. Nat. Sci**, v. 17, n. 4, p. 289–306, 2018.

KIM, H.-R. et al. Assessment of nitrogen application limits in agro-livestock farming areas using quantile regression between nitrogen loadings and groundwater nitrate levels. **Agriculture, Ecosystems & Environment**, v. 286, p. 1–13, 2019.

KOENKER, R. **Quantile Regression**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. 349 p.

KOENKER, R.; BASSETT, G. Regression quantiles. **Econometrica**, p. 33–50, 1978.

KOENKER, R.; MACHADO, J. A. Goodness of fit and related inference processes for quantile regression. **Journal of the american statistical association**, v. 94, n. 448, p. 1296–1310, 1999.

KOENKER, R.; PARK, B. J. An interior point algorithm for nonlinear quantile regression. **Journal of Econometrics**, v. 71, n. 1-2, p. 265–283, 1996.

KOENKER, R. W.; D'OREY, V. Algorithm as 229: Computing regression quantiles. **Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)**, v. 36, n. 3, p. 383–393, 1987.

KORKMAZ, M.; UNLUYOL, E. Series expansions and polynomial approximations of monomolecular growth model for some populations of *eucalyptus camaldulensis* dehn. from eastern mediterranean forest research manager. **Hittite Journal of Science and Engineering**, v. 5, n. 4, p. 275–284, 2018.

- LOBÃO, M. S. et al. Análise de similaridade das árvores de cedrela sp. sob diferentes condições de crescimento no leste do estado do acre, brasil. **Scientia Forestalis**, v. 44, n. 109, p. 231–239, 2016.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and nonlinear programming**. New York, USA: Springer, 2016. 546 p.
- MARCON, A. K. et al. Padrões de crescimento de *Araucaria angustifolia* e *Cedrela fissilis* no centro-sul do Paraná. **BIOFIX Scientific Journal**, v. 4, n. 2, p. 116–123, 2019.
- MATTOS, V. L. D. de; KONRATH, A. C.; AZAMBUJA, A. M. V. de. **Introdução à Estatística com aplicações em Ciências Exatas**. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 287 p.
- MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não linear. **Acta Scientiarum**, v. 24, n. 6, p. 1761–1770, 2002.
- MIGUEZ, F.; ARCHONTOULIS, S.; DOKOOHAKI, H. Nonlinear regression models and applications. **Applied statistics in agricultural, biological, and environmental sciences**, p. 401–448, 2017.
- MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. de. **Modelos não lineares [recurso eletrônico]: funções assintóticas de crescimento**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014. 184 p.
- MORALES, C.; GIRALDO, R.; TORRES, M. Boxplot fences in proficiency testing. **Accreditation and Quality Assurance**, v. 26, n. 4, p. 193–200, 2021.
- MORALES, C. G. et al. Robust quantile regression using a generalized class of skewed distributions. **Stat**, v. 6, n. 1, p. 113–130, 2017.
- MOURA, C. R. et al. Otimização de cortes bidimensionais em chapas através da aplicação de modelos matemáticos. **Revista Gestão Industrial**, v. 15, n. 3, p. 59–75, 2019.
- MUNIZ, J. A.; NASCIMENTO, M. d. S.; FERNANDES, T. J. Nonlinear models for description of cacao fruit growth with assumption violations. **Revista Caatinga**, Mossoró, v. 30, n. 1, p. 250–257, 2017.
- NARNE, V. K. et al. Confidence limits of word identification scores derived using nonlinear quantile regression. **Trends in Hearing**, v. 25, p. 2331216520983110, 2021.
- NASCIMENTO, M. et al. Quantile regression for genome-wide association study of flowering time-related traits in common bean. **PloS one**, v. 13, n. 1, p. 1–14, 2018.
- NIGUL, K. et al. The possibility of using the chapman–richards and näslund functions to model height–diameter relationships in hemiboreal old-growth forest in estonia. **Forests**, v. 12, n. 2, p. 184, 2021.
- NUPECC. 2020. Comitê Europeu de Colaboração em Física Nuclear. Fundação Europeia da Ciência. Disponível em: <<http://www.nupecc.org/NUPEX/index.php?g=textcontent/nuclearapplications/datingartarch&lang=en>>. Acesso em: 03 jan. 2020.
- OLIVEIRA, A. C. R. de et al. Nonlinear models based on quantiles in the fitting of growth curves of pepper genotypes. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 39, n. 3, 2021.

- OLIVEIRA, C. P. d. et al. Comparação de modelos estatísticos para estimativa da biomassa de árvores, e estimativa do estoque de carbono acima do solo em cerrado. **Ciência Florestal**, v. 29, p. 255–269, 2019.
- OLIVEIRA, X. M. d. et al. **Pesquisas agrárias e ambientais [livro eletrônico]: Uso de regressão quantílica na classificação de sítios florestais em povoamentos de Pinus elliotti, no Uruguai**. Nova Xavantina, MT: Pantanal Editora, 2021. Volume VI. 133 p.
- ONU. **Organização das Nações Unidas**. 2021. Disponível em: <<https://brasil.un.org/pt-br/156668-lideres-mundiais-firmam-compromisso-historico-pela-protacao-de-florestas-na-cop26>>. Acesso em: 11 jan. 2022.
- ORTIZ, R. J. F. et al. Perceived neighborhood characteristics and the functional performance of elderly people in the Belo Horizonte Metropolitan Area, Minas Gerais State, Brazil: a quantile regression analysis. **Cadernos de saúde pública**, v. 32, p. 1–12, 2016.
- ÖZÇELİK, R. et al. Predicting tree height from tree diameter and dominant height using mixed-effects and quantile regression models for two species in turkey. **Forest ecology and management**, v. 419, p. 240–248, 2018.
- PAULO, J. A. et al. Quantile regression for modelling the impact of climate in cork growth quantiles in portugal. **European Journal of Forest Research**, p. 1–14, 2021.
- PEREIRA, G. A. et al. The climate response of cedrela fissilis annual ring width in the rio são francisco basin, brazil. **Tree-ring research**, v. 74, n. 2, p. 162–171, 2018.
- PEREIRA, L. D. et al. Suscetibilidade do cedro ao ataque de pragas em floresta estacional decidual. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 51, n. 5, p. 607–614, 2016.
- PEREIRA, L. D. et al. Influence of forest gaps on the density of cedar population in silveira martins-rs. **Científica**, v. 46, n. 2, p. 164–170, 2018.
- PRETZSCH, H. Trees grow modulated by the ecological memory of their past growth. consequences for monitoring, modelling, and silvicultural treatment. **Forest Ecology and Management**, v. 487, p. 1–16, 2021.
- PUIATTI, G. A. et al. Quantile regression of nonlinear models to describe different levels of dry matter accumulation in garlic plants. **Ciência Rural**, v. 48, n. 1, p. 1–6, 2018.
- PUIATTI, G. A. et al. Nonlinear quantile regression to describe the dry matter accumulation of garlic plants. **Ciência Rural**, v. 50, n. 1, p. 1–8, 2020.
- QUINTILHAN, M. T. et al. Growth-ring boundaries of tropical tree species: Aiding delimitation by long histological sections and wood density profiles. **Dendrochronologia**, Elsevier, v. 69, p. 1–10, 2021.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2021. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RATKOWSKY, D. A. **Nonlinear regression modelling**. New York: Marcel Dekker, 1983. 276 p.
- RAWLINGS, J. O.; PANTULA, S. G.; DICKEY, D. A. **Applied regression analysis: a research tool**. 2. ed. U.S.A.: Springer Science & Business Media, 1998. 658 p.

- RESENDE, A. F. et al. Flood-pulse disturbances as a threat for long-living amazonian trees. **New Phytologist**, Wiley Online Library, v. 227, n. 6, p. 1790–1803, 2020.
- RIBEIRO, R. et al. Curva de crescimento em altura na cernelha de equinos da raça mangalarga marchador considerando-se heterocedasticidade. **Arq. bras. med. vet. zootec.(Online)**, v. 70, n. 1, p. 272–278, 2018.
- RIBEIRO, T. D. et al. Description of the growth of pequi fruits by nonlinear models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, v. 40, n. 4, 2018.
- ROSA, S. A. et al. Growth models based on tree-ring data for the neotropical tree species *calophyllum brasiliense* across different brazilian wetlands: implications for conservation and management. **Trees**, Springer, v. 31, n. 2, p. 729–742, 2017.
- ROZENDAAL, D. M.; ZUIDEMA, P. A. Dendroecology in the tropics: a review. **Trees**, Springer, v. 25, n. 1, p. 3–16, 2011.
- SALLES, T. T. et al. Modelo de clutter na modelagem de crescimento e produção de eucalipto em sistemas de integração lavoura-pecuária-floresta. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, SciELO Brasil, v. 47, p. 253–260, 2012.
- SÁNCHEZ, B.; LACHOS, H.; LABRA, V. Likelihood based inference for quantile regression using the asymmetric laplace distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 81, p. 1565–1578, 2013.
- SANQUETTA, C. R. et al. Dinâmica em superfície, volume, biomassa e carbono nas florestas nativas brasileiras: 1990-2015. **BIOFIX Scientific Journal**, v. 3, n. 1, p. 193–198, 2018.
- SANTOS, B. R.; ELIAN, S. N. Influence measures in quantile regression models. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, v. 44, n. 9, p. 1842–1853, 2015.
- SANTOS, C. J.; THIERSCH, C. R.; MOREIRA, M. F. B. Regressão não linear quantílica para classificação de sítio em povoamentos de *Eucalyptus* sp. **Scientia Forestalis**, v. 46, n. 120, 2018.
- SCHÖNGART, J. Growth-oriented logging (gol): A new concept towards sustainable forest management in central amazonian várzea floodplains. **Forest Ecology and Management**, Elsevier, v. 256, n. 1-2, p. 46–58, 2008.
- SCHWEINGRUBER, F. H. **Trees and wood in dendrochronology: morphological, anatomical, and tree-ring analytical characteristics of trees frequently used in dendrochronology**. New York: Springer Science & Business Media, 1993. 402 p.
- SCHWERTMAN, N. C.; OWENS, M. A.; ADNAN, R. A simple more general boxplot method for identifying outliers. **Computational statistics & data analysis**, Elsevier, v. 47, n. 1, p. 165–174, 2004.
- SCOLFORO, J. R. S. **Biometria florestal: modelos de crescimento e produção florestal**. Lavras: UFLA/FAEPE, 2006. 393 p.
- SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2003.

- SHODA, T.; IMANISHI, J.; SHIBATA, S. Growth characteristics and growth equations of the diameter at breast height using tree ring measurements of street trees in kyoto city, japan. **Urban Forestry & Urban Greening**, v. 49, p. 1–8, 2020.
- SILVA, É. M. d. et al. Description of blackberry fruit growth by nonlinear regression models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 42, p. 1–11, 2020.
- SILVA, S. **Árvores Nativas do Brasil**. São Paulo: Editora Europa, 2013. v. 1.
- SILVA, W. S. et al. Eucalyptus grandis x eucalyptus urophylla growth curve in different site classifications, considering residual autocorrelation. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 39, n. 1, p. 122–138, 2021.
- SIQUEIRA, S. d. F.; HIGUCHI, P.; SILVA, A. C. d. Contemporary and future potential geographic distribution of cedrela fissilis vell. under climate change scenarios. **Revista Árvore**, v. 43, p. 1–9, 2019.
- STEPKA, T. F. et al. Idade e dendrocronologia em árvores nativas de araucária, cedro e imbuia no sul do Brasil. **Floresta com araucária: Pesquisas ecológicas de longa duração. Curitiba-PR: Multi-Graphics.**, p. 117–164, 2014.
- STEPKA, T. F. et al. Growth of araucaria angustifolia, cedrela fissilis and ocotea porosa in different locations within the araucaria forest in the southern brazil. **Forest Ecology and Management**, v. 486, p. 1–14, 2021.
- STOKES, M. A.; SMILEY, T. L. **An introduction to tree-ring dating**. Tucson, AZ, USA: University of Arizona Press, 1996.
- SUN, Y.; GAO, H.; LI, F. Using linear mixed-effects models with quantile regression to simulate the crown profile of planted pinus sylvestris var. mongolica trees. **Forests**, v. 8, n. 11, p. 446, 2017.
- TOMAZELLO FILHO, M.; BOTOSSO, P. C.; LISI, C. Análise e aplicação dos anéis de crescimento das árvores como indicadores ambientais: dendrocronologia e dendroclimatologia. **Indicadores ambientais: conceitos e aplicações. São Paulo: EDUC**, v. único, p. 117–143, 1999.
- TURUBANOVA, S. et al. Ongoing primary forest loss in Brazil, Democratic Republic of the Congo, and Indonesia. **Environmental Research Letters**, v. 13, n. 7, p. 1–15, 2018.
- VANDERBEI, R. J.; MEKETON, M. S.; FREEDMAN, B. A. A modification of karmarkar's linear programming algorithm. **Algorithmica**, Springer, v. 1, n. 1, p. 395–407, 1986.
- VELOSO, R. B. **Proposta de um modelo não linear de crescimento e produtividade florestal**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Lavras (UFLA), Lavras, 2013. 102 p.
- VENEGAS-GONZÁLEZ, A. et al. Drought and climate change incidence on hotspot cedrela forests from the mata atlântica biome in southeastern brazil. **Global Ecology and Conservation**, v. 15, p. e00408, 2018.
- VESCOVI, L. B. et al. Effect of growth and yield modelling on forest regulation and earnings. **African Journal of Agricultural Research**, Academic Journals, v. 16, n. 7, p. 1050–1060, 2020.

VOSPERNIK, S.; STERBA, H. Do competition-density rule and self-thinning rule agree? **Annals of Forest Science**, v. 72, n. 3, p. 379–390, 2014.

WORBES, M.; SCHÖNGART, J. Measures for sustainable forest management in the tropics—a tree-ring based case study on tree growth and forest dynamics in a central amazonian lowland moist forest. **PloS one**, v. 14, n. 8, p. 1–21, 2019.

XAVIER, A.; SANTOS, G. A.; OLIVEIRA, M. L. Enraizamento de miniestaca caulinar e foliar na propagação de cedro-rosa (*Cedrela fissilis* Vell.). **Revista Árvore**, Viçosa-MG, v. 27, n. 3, p. 351–356, 2003.

YU, K.; ZHANG, J. A three-parameter asymmetric laplace distribution and its extension. **Communications in Statistics—Theory and Methods**, v. 34, n. 9-10, p. 1867–1879, 2005.

ZHANG, B. et al. Predicting tree height-diameter relationship from relative competition levels using quantile regression models for chinese fir (*cunninghamia lanceolata*) in fujian province, china. **Forests**, v. 11, n. 2, p. 183, 2020.

ZIMBRES, B. et al. Mapping the stock and spatial distribution of aboveground woody biomass in the native vegetation of the brazilian cerrado biome. **Forest Ecology and Management**, Elsevier, v. 499, p. 119615, 2021.