



YASMIN DE OLIVEIRA LARAIA

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS E APLICAÇÕES

LAVRAS – MG

2026

YASMIN DE OLIVEIRA LARAIA

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Fernando Lourenço
Orientador

LAVRAS – MG

2026

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Laraia, Yasmin de Oliveira

O Teorema de Euler para poliedros e aplicações / . –
Lavras : UFLA, 2026.
55 p. : il.

Dissertação(mestrado)–Universidade Federal de Lavras,
2026.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Lourenço.
Bibliografia.

1. Teorema de Euler. 2. Geometria. 3. Topologia. I. Lourenço, Fernando II. Universidade Federal de Lavras. III. Título.

YASMIN DE OLIVEIRA LARAIA

**O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS E APLICAÇÕES
EULER'S THEOREM FOR POLYHEDRA AND APPLICATIONS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 24 de Fevereiro de 2026.

Prof. Dr. Fernando Lourenço	UFLA
Prof. Dr. Helvécio Geovani Fagnoli Filho	UFLA
Prof. Dr. Marcelo Oliveira Veloso	UFSJ

Documento assinado digitalmente
 **FERNANDO LOURENÇO**
Data: 10/06/2026 15:23:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fernando Lourenço
Orientador

**LAVRAS – MG
2026**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gratidão a Deus pelo dom da vida, pelas oportunidades de crescimento e pela família que me concedeu.

Ao meu companheiro e família, pelo apoio, incentivo e compreensão ao longo desta trajetória.

Ao Prof. Dr. Fernando Lourenço, pela orientação, dedicação e valiosas contribuições, fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de Lavras (UFLA), pelas colaborações, ensinamentos e pela convivência acadêmica.

Aos professores examinadores, pelo tempo dedicado e pelas valiosas contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

Aos amigos, antigos e novos, e àqueles que deixaram saudade, pelo carinho, pela paciência e pelos bons momentos compartilhados.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), por proporcionar aprendizagem, crescimento acadêmico e incentivar a busca pelo conhecimento e pelo aperfeiçoamento.

*Defende o teu direito de pensar, porque até pensar de forma errada é melhor do que não
pensar.
(Hipátia de Alexandria)*

RESUMO

A Geometria constitui uma das áreas fundamentais da Matemática, desempenhando papel central na compreensão das formas e estruturas do espaço. Entre os objetos geométricos de maior relevância nesse contexto destacam-se os poliedros, cuja superfície é formada por um número finito de faces planas, arestas e vértices. Uma das relações mais importantes associadas a esses sólidos é o Teorema de Euler, que estabelece uma conexão invariável entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. O Teorema de Euler para poliedros convexos é analisado sob uma perspectiva geométrica, combinatória e topológica, com ênfase em sua interpretação como um invariante topológico. São considerados os conceitos fundamentais de geometria, superfície e poliedros, bem como diferentes demonstrações clássicas do teorema, evidenciando a diversidade de abordagens utilizadas em sua fundamentação histórica e matemática. A relação de Euler é também examinada no plano, estabelecendo conexões com grafos planares e conduzindo ao conceito de característica de Euler, que amplia o alcance do resultado para superfícies mais gerais. Além disso, são exploradas aplicações em diferentes contextos, como o estudo dos poliedros de Platão, grafos, computação gráfica, engenharia, arquitetura, estruturas moleculares e cartografia, ressaltando a relevância do Teorema de Euler tanto no âmbito matemático quanto em áreas interdisciplinares.

Palavras-chave: Teorema de Euler. Geometria. Topologia.

ABSTRACT

The geometry is one of the fundamental areas of mathematics, playing a central role in the understanding of shapes and spatial structures. Among the most relevant geometric objects in this context are polyhedra, whose surfaces are composed of a finite number of planar faces, edges, and vertices. One of the most important relations associated with these solids is Euler's Theorem, which establishes an invariant connection between the number of vertices, edges, and faces of a convex polyhedron. Euler's Theorem for convex polyhedra is examined from a geometric, combinatorial, and topological perspective, with emphasis on its interpretation as a topological invariant. Fundamental concepts of geometry, surfaces, and polyhedra are considered, as well as different classical proofs of the theorem, highlighting the diversity of approaches employed in its historical and mathematical foundation. The Euler relation is also analyzed in the plane, establishing connections with planar graphs and leading to the concept of the Euler characteristic, which extends the result to more general surfaces. In addition, applications are explored in different contexts, such as Platonic solids, graph theory, computer graphics, engineering, architecture, molecular structures, and cartography, emphasizing the relevance of Euler's Theorem both in mathematics and in interdisciplinary areas.

Keywords: Euler's Theorem. Geometry. Topology.

INDICADORES DE IMPACTO

A presente dissertação teve como objetivo analisar o Teorema de Euler para poliedros convexos sob perspectivas geométrica, combinatória e topológica, apresentando demonstrações clássicas do resultado, sua interpretação como invariante topológico e aplicações em diferentes contextos científicos e educacionais. O trabalho possui impacto social e educacional direto ao contribuir para o fortalecimento do ensino de Geometria e Topologia na Educação Básica e no Ensino Superior, especialmente na formação de professores de Matemática. A pesquisa favorece a democratização do conhecimento matemático ao apresentar conceitos abstratos de forma organizada, acessível e historicamente contextualizada, possibilitando sua utilização em aulas, oficinas, materiais didáticos e atividades de formação docente. O estudo também apresenta impacto cultural ao valorizar a evolução histórica do pensamento matemático e destacar contribuições de matemáticos como Euler, Legendre e Cauchy para o desenvolvimento científico da humanidade. Do ponto de vista tecnológico, o trabalho evidencia aplicações do Teorema de Euler em áreas como computação gráfica, engenharia, arquitetura, cartografia e modelagem de estruturas moleculares, demonstrando a relevância interdisciplinar da Matemática em contextos científicos e tecnológicos contemporâneos. Os resultados obtidos possuem potencial de aplicação em atividades extensionistas e educacionais voltadas a estudantes e professores da Educação Básica, especialmente nas áreas de Geometria Espacial e raciocínio lógico, impactando diretamente o contexto educacional da região de Lavras-MG e demais instituições vinculadas ao PROFMAT. O trabalho está alinhado principalmente ao Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 4 da ONU, relacionado à Educação de Qualidade, ao promover formação docente qualificada, disseminação do conhecimento científico e incentivo ao pensamento lógico e matemático.

IMPACT INDICATORS

This dissertation aimed to analyze Euler's Theorem for convex polyhedra from geometric, combinatorial and topological perspectives, presenting classical proofs of the theorem, its interpretation as a topological invariant and applications in different scientific and educational contexts. The research has direct social and educational impact by contributing to the strengthening of Geometry and Topology teaching in Basic and Higher Education, especially in Mathematics teacher education. The study promotes the dissemination of mathematical knowledge through an accessible and historically contextualized approach, enabling its use in classes, workshops, teaching materials and teacher training activities. The work also presents cultural impact by valuing the historical development of mathematical thought and highlighting the contributions of mathematicians such as Euler, Legendre and Cauchy to scientific development. From a technological perspective, the dissertation emphasizes applications of Euler's Theorem in areas such as computer graphics, engineering, architecture, cartography and molecular structure modeling, demonstrating the interdisciplinary relevance of Mathematics in contemporary scientific and technological contexts. The results obtained have potential application in extension and educational activities aimed at students and teachers of Basic Education, especially in Spatial Geometry and logical reasoning, directly impacting the educational context of Lavras-MG and institutions associated with PROFMAT. The work is mainly aligned with the United Nations Sustainable Development Goal 4, Quality Education, by promoting qualified teacher education, dissemination of scientific knowledge and encouragement of logical and mathematical thinking.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Pontos A e B , reta r e plano α	6
Figura 2.2 – Semirreta $\overrightarrow{AB}$ e segmento de reta AB	6
Figura 2.3 – Ângulo $\angle ABC$ com medida $\hat{A}BC$	8
Figura 2.4 – Retas paralelas r e s , retas concorrentes t e u e retas perpendiculares v e w .	8
Figura 2.5 – Circunferência de centro A e raio AB , mediatriz m do segmento de reta AB e bissetriz b do ângulo $\angle ABC$	9
Figura 2.6 – Esfera de centro A e raio AB e plano mediador segmento de reta AB	9
Figura 2.7 – Superfícies esférica, toro e faixa de Möbius	10
Figura 2.8 – Superfícies suaves	10
Figura 4.1 – Poliedro P , plano H e reta r	18
Figura 4.2 – Projeção de P em H	19
Figura 4.3 – Pontos iluminados, pontos sombrios e contorno aparente	20
Figura 4.4 – Poliedro P contido na esfera E	23
Figura 4.5 – Projeção radial de P sobre E	24
Figura 4.6 – Superfície poliédrica convexa aberta	27
Figura 4.7 – Poliedro convexo fechado com uma face removida	28
Figura 4.8 – Cubo sem uma face planificado	30
Figura 4.9 – Cubo planificado com as diagonais de cada face	30
Figura 4.10 – Retirada do triângulo com uma aresta livre	30
Figura 4.11 – Retirada do triângulo com duas arestas livres	31
Figura 4.12 – Região R do plano dividida em regiões justapostas.	33
Figura 4.13 – Acréscimo de uma nova região	35
Figura 5.1 – Sólidos de Platão	42
Figura 5.2 – As sete pontes de Königsberg em 1736 e o respectivo multigrafo	44
Figura 5.3 – Grafo euleriano	45
Figura 5.4 – Grafo semi-euleriano	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	3
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE GEOMETRIA E SUPERFÍCIE	5
3	POLIEDROS	12
4	O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS	15
4.1	O Teorema de Euler para Poliedros	17
4.1.1	Demonstração de Zoroastro Azambuja Filho	17
4.1.2	Demonstração de Legendre	22
4.1.3	Demonstração de Castrucci	26
4.1.4	Demonstração de Cauchy	29
4.2	O Teorema de Euler no Plano	33
4.3	Característica de Euler	35
5	APLICAÇÕES	40
5.1	Poliedros de Platão	40
5.2	Grafos	44
5.3	Computação gráfica	47
5.4	Engenharia e arquitetura	48
5.5	Estruturas moleculares	49
5.6	Cartografia	50
6	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

A Geometria surgiu da necessidade humana de compreender e organizar o espaço. Desde os primeiros registros históricos, questões relacionadas a formas, superfícies e sólidos estiveram associadas a atividades práticas, como construção, medição e observação do mundo físico. Com o desenvolvimento do pensamento matemático, essas questões passaram a ser tratadas de modo sistemático, dando origem a um corpo teórico fundamentado em definições precisas e argumentos dedutivos (BOYER, 1974).

No estudo do espaço tridimensional, os sólidos geométricos desempenham papel central. Entre eles, os poliedros destacam-se por apresentarem uma estrutura formada por um número finito de elementos — vértices, arestas e faces — organizados de maneira regular. Essa estrutura permite investigar propriedades globais dos sólidos a partir da forma como esses elementos se conectam, independentemente de medidas específicas como comprimento, área ou volume.

Nesse contexto, uma relação particularmente significativa é aquela que envolve o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Essa relação, conhecida como Teorema de Euler, revela que poliedros geometricamente distintos podem compartilhar uma mesma propriedade estrutural, desde que satisfaçam determinadas condições. O interesse por esse resultado não reside apenas na simplicidade de sua formulação, mas no fato de expressar uma característica profunda da superfície do poliedro.

A compreensão do Teorema de Euler exige o domínio de conceitos geométricos fundamentais e a percepção de que certas propriedades dependem mais da organização estrutural dos objetos do que de sua forma particular. Essa perspectiva conduz naturalmente à interpretação do teorema como um invariante associado à superfície do poliedro, antecipando ideias centrais da Topologia, área da Matemática dedicada ao estudo das propriedades preservadas sob deformações contínuas.

Nesse sentido, o Teorema de Euler pode ser compreendido como um exemplo emblemático de resultado que transcende a geometria métrica clássica, estabelecendo conexões entre a Geometria Espacial, a Topologia e a Teoria dos Grafos. Sua formulação e as diversas demonstrações desenvolvidas ao longo do tempo evidenciam a importância de abordagens estruturais e combinatórias na análise de superfícies constituídas por regiões planas.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar demonstrações clássicas do Teorema de Euler para poliedros convexos e discutir sua interpretação como um invariante topológico, bem como algumas aplicações. Para atingir esse objetivo, o trabalho adota predomina-

temente um ponto de vista geométrico-combinatório, com interpretações topológicas, privilegiando a análise das propriedades estruturais das superfícies poliédricas.

Assim, nos capítulos seguintes são apresentados os conceitos fundamentais de geometria e superfície necessários ao desenvolvimento do tema, seguida da definição e classificação dos poliedros. Em seguida, são expostas diferentes demonstrações do Teorema de Euler, bem como sua formulação no plano e sua generalização por meio da característica de Euler. Por fim, discutem-se algumas aplicações do teorema em contextos matemáticos e interdisciplinares.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE GEOMETRIA E SUPERFÍCIE

A Geometria é uma das áreas mais antigas da matemática, tendo se desenvolvido a partir da necessidade de descrever e compreender as formas do espaço (EVES, 2011). Na geometria clássica, a geometria euclidiana, o estudo das figuras planas e dos sólidos baseia-se em noções primitivas, axiomas e postulados que permitem a construção sistemática de definições e proposições geométricas. Ao longo do desenvolvimento da Matemática, novas abordagens ampliaram o escopo dos estudos geométricos, possibilitando investigações sobre propriedades locais e globais das superfícies.

Neste capítulo, são apresentados os conceitos fundamentais de Geometria e superfícies necessários ao desenvolvimento do trabalho. Inicialmente, são discutidas noções básicas da Geometria Euclidiana e da Geometria Analítica, como ponto, reta, plano, ângulo, paralelismo e lugar geométrico. Em seguida, são introduzidos conceitos relacionados às superfícies topológicas, suaves, convexas e poliédricas, estabelecendo a base teórica necessária para o estudo dos poliedros e do Teorema de Euler.

Com o desenvolvimento da matemática moderna, especialmente a partir do século XIX, novas abordagens passaram a coexistir com a geometria clássica (EVES, 2011). O surgimento da Geometria Diferencial e da Topologia possibilitou uma compreensão mais profunda das superfícies, distinguindo propriedades locais, observáveis em pequenas vizinhanças, de propriedades globais, relacionadas à estrutura total do objeto. Essa distinção revelou que determinadas relações geométricas permanecem invariantes sob deformações contínuas da superfície, independentemente de medidas métricas específicas.

Para este capítulo, serão usadas as referências Neto (2022) e Gómez, Frensel e Crissaff (2017) para os assuntos de geometria euclidiana e geometria analítica, respectivamente, e Lima (2015), Neto (2022) e Doria (2019) para os tópicos relativos às superfícies.

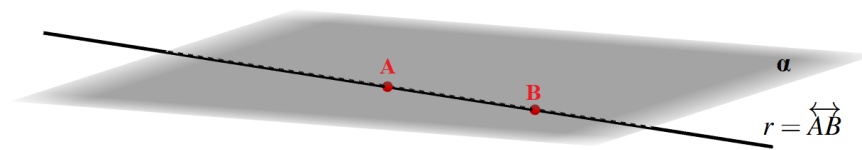
A Geometria Euclidiana fundamenta-se em noções primitivas, axiomas e postulados, que constituem a base para a construção lógica das proposições geométricas. As noções primitivas correspondem a conceitos intuitivos não definidos formalmente, entre os quais se destacam ponto, reta, plano e espaço. A partir dessas noções, são estabelecidas definições e relações geométricas mais elaboradas.

Os postulados, por sua vez, consistem em afirmações aceitas como verdadeiras dentro do sistema geométrico. Entre eles destaca-se o quinto postulado de Euclides, também conhecido

como Postulado das Paralelas, segundo o qual: dado um ponto P não pertencente a uma reta r , existe uma única reta s paralela à reta r e que passa pelo ponto P (NETO, 2022).

Convencionalmente, adotam-se as notações de ponto e reta, respectivamente, como uma letra latina maiúscula e uma letra latina minúscula. Ainda, denota-se uma reta por dois pontos pertencentes a ela. Por exemplo, sejam A e B dois pontos pertencentes à reta r , pode-se denotar $r = \overleftrightarrow{AB}$. Já o plano pode ser denotado por uma letra grega minúscula (Figura 2.1).

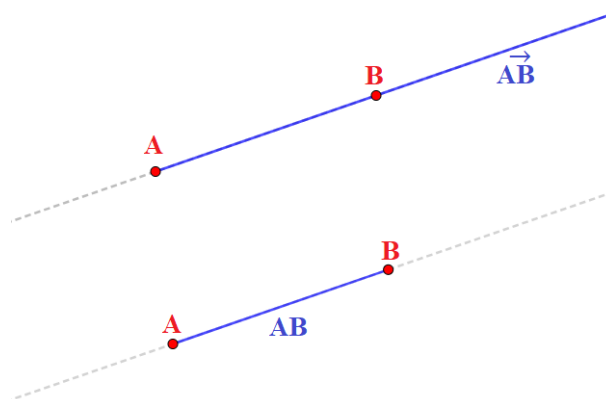
Figura 2.1 – Pontos A e B , reta r e plano α



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Dentro do contexto de retas, considerando um ponto A pertencente à reta r , tal ponto divide a reta em duas partes denominadas semirretas. E, dados dois pontos distintos A e B pertencentes à reta r , define-se o segmento de reta AB como a porção de r compreendida entre A e B (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Semirreta $\overrightarrow{AB}$ e segmento de reta AB



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

No contexto da geometria analítica, tais noções podem ser representadas por meio de estruturas algébricas, permitindo uma descrição precisa dos objetos geométricos (GÓMEZ; FRENSEL; CRISSAFF, 2017).

O espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, munido de sua métrica usual, constitui um modelo adequado para a representação de objetos geométricos espaciais. Pontos podem ser iden-

tificados com vetores de $\mathbb{R}^3$, possibilitando a descrição de relações geométricas por meio de expressões algébricas e vetoriais.

Dados dois pontos $A, B \in \mathbb{R}^3$, define-se o segmento de reta que os liga como o conjunto

$$AB = \{(1-t)A + tB \mid t \in [0, 1]\}.$$

Essa definição expressa, em termos analíticos, a noção geométrica de percurso retilíneo entre dois pontos.

Uma reta r em $\mathbb{R}^3$ pode ser descrita como o conjunto dos pontos da forma

$$r = \{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\},$$

em que $A \in \mathbb{R}^3$ é um ponto fixo e $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é um vetor diretor.

O produto interno entre dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em $\mathbb{R}^3$ é definido por

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Esse conceito permite descrever relações geométricas como perpendicularidade e medida de ângulos.

De maneira análoga à reta, um plano π em $\mathbb{R}^3$ é definido como o conjunto dos pontos que satisfazem uma equação linear da forma

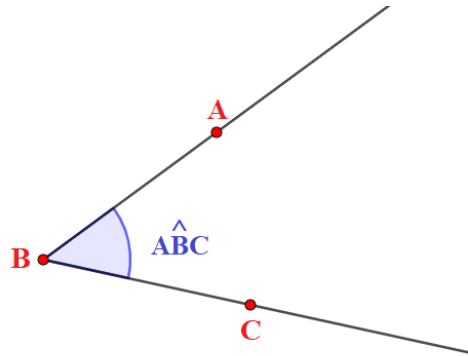
$$\pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n \rangle = d\},$$

em que $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é um vetor normal ao plano e $d \in \mathbb{R}$.

Dados três pontos distintos A, B e C , define-se o ângulo $\angle ABC$ como a região determinada pelas semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, onde $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ são os lados e B é o vértice do ângulo (Figura 2.3). A medida de um ângulo $A\hat{B}C$ pode ser associada ao ângulo formado entre os vetores correspondentes, sendo obtida por meio do produto interno. Conceitos como ângulos congruentes, complementares e suplementares ocupam posição central na geometria clássica.

No plano ou no espaço, duas retas são ditas paralelas quando possuem a mesma direção e não se intersectam, ou coincidem. Em geometria analítica, isso equivale a dizer que seus vetores diretores são linearmente dependentes. O paralelismo constitui um conceito fundamental da

Figura 2.3 – Ângulo $\angle ABC$ com medida $\hat{A}BC$

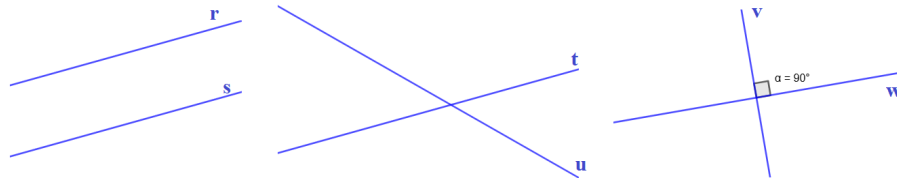


Fonte: Elaborada pela autora (2026).

geometria euclidiana, estando diretamente relacionado ao estudo de ângulos e à organização das figuras geométricas (Figura 2.4).

Ainda, se duas retas possuem um único ponto em comum, diz-se que são retas concorrentes. Um caso particular de retas concorrentes é quando os ângulos formados pela interseção entre elas é igual a 90° . Neste caso dizemos que tais retas são perpendiculares (Figura 2.4).

Figura 2.4 – Retas paralelas r e s , retas concorrentes t e u e retas perpendiculares v e w

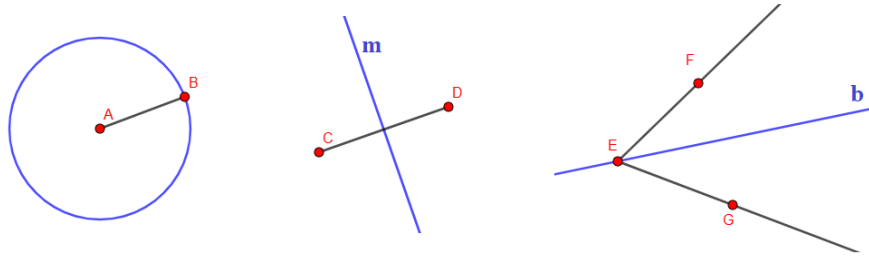


Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Outro conceito relevante é o de lugar geométrico. Dado um conjunto de pontos do plano ou do espaço que satisfazem uma determinada propriedade geométrica, denomina-se lugar geométrico o conjunto de todos os pontos que satisfazem essa propriedade (NETO, 2022). Exemplos clássicos incluem a circunferência, definida como o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo; a mediatriz de um segmento, formada pelos pontos equidistantes de suas extremidades; a bissetriz de um ângulo, formada pela semirreta com origem no vértice e equidistantes dos lados do ângulo (Figura 2.5).

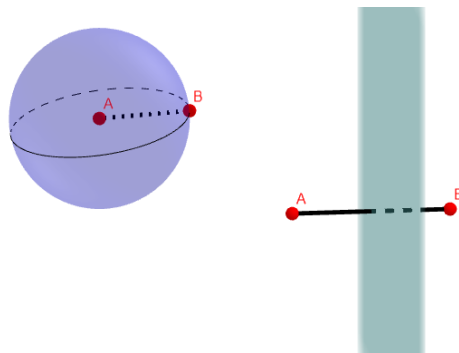
No espaço tridimensional, a noção de lugar geométrico estende-se de maneira natural, permitindo descrever superfícies como conjuntos de pontos que satisfazem determinadas condições geométricas ou analíticas. Exemplos dessas superfícies são a esfera e o plano mediador, equivalentes à circunferência e à mediatriz no espaço, respectivamente (Figura 2.6).

Figura 2.5 – Circunferência de centro A e raio AB , mediatriz m do segmento de reta AB e bissetriz b do ângulo $\angle ABC$



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Figura 2.6 – Esfera de centro A e raio AB e plano mediador segmento de reta AB



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Já a noção de superfície emerge da análise de conjuntos que, embora imersos em um espaço tridimensional, apresentam comportamento local bidimensional. Intuitivamente, uma superfície pode ser compreendida como um conjunto que, em torno de cada um de seus pontos, se assemelha a uma região do plano. Essa característica local pode ser formalizada rigorosamente no contexto da Topologia.

Antes de definir superfície topológica, recorda-se o conceito de homeomorfismo. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $h : X \longrightarrow Y$ é denominada homeomorfismo quando é bijetiva, contínua e possui inversa contínua. Nesse caso, diz-se que X e Y são topologicamente equivalentes.

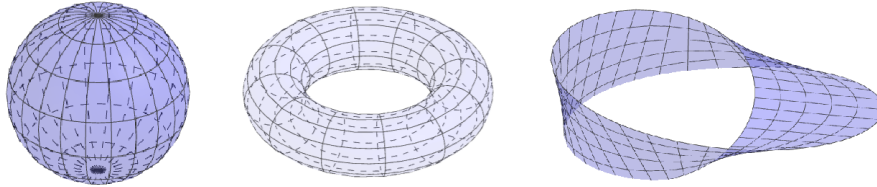
Definição 2.1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é denominado uma superfície topológica se, para todo ponto $p \in S$, existe uma vizinhança $U \subset S$ de p e um homeomorfismo

$$h : U \rightarrow V,$$

onde V é um aberto de $\mathbb{R}^2$.

Essa definição captura a estrutura local da superfície, independentemente de propriedades métricas ou diferenciais. A esfera, o toro e a faixa de Möbius são alguns exemplos de superfícies (Figura 2.7).

Figura 2.7 – Superfícies esférica, toro e faixa de Möbius



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Uma superfície é dita compacta quando é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^3$, e conexa quando não pode ser decomposta na união de dois subconjuntos abertos disjuntos e não vazios. Superfícies sem bordo não apresentam extremidades ou fronteiras, o que simplifica sua estrutura global.

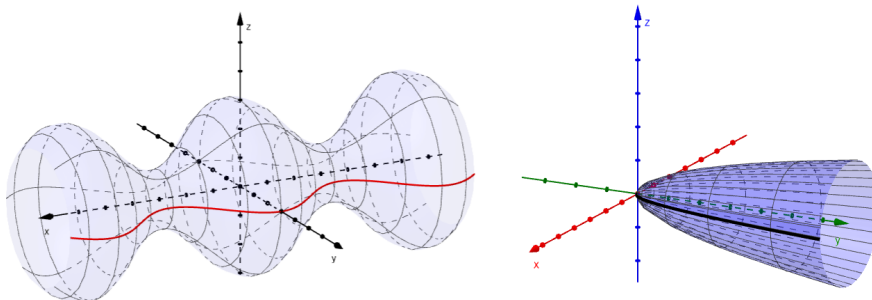
No âmbito da Geometria Diferencial, superfícies são dotadas de uma estrutura diferenciável que permite o estudo detalhado de suas propriedades locais. Uma aplicação $h : X \rightarrow Y$ é denominada difeomorfismo quando é bijetiva, diferenciável e possui inversa diferenciável.

Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita suave se, para todo ponto $p \in S$, existe uma vizinhança $U \subset S$ e um difeomorfismo

$$h : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$$

(NETO, 2022). A Figura 2.8 apresenta exemplos de superfícies suaves, nas quais a estrutura local pode ser descrita por aplicações diferenciáveis.

Figura 2.8 – Superfícies suaves



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

A existência dessa estrutura diferenciável possibilita a definição de conceitos como plano tangente, vetor normal e curvaturas, fundamentais na análise geométrica local. A ausên-

cia de suavidade em determinados conjuntos evidencia a necessidade de abordagens baseadas apenas na estrutura topológica.

A convexidade, inicialmente formulada no contexto da geometria plana, estende-se naturalmente a subconjuntos do espaço tridimensional. Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ é denominado convexo quando, para quaisquer dois pontos $A, B \in K$, o segmento de reta determinado por esses pontos está inteiramente contido em K , isto é,

$$(1 - t)A + tB \in K, \forall t \in [0, 1].$$

Seja $K \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto convexo, compacto e com interior não vazio. A fronteira de K , denotada por ∂K , é denominada uma superfície convexa.

Superfícies convexas delimitam de forma única o sólido ao qual estão associadas e não apresentam auto-interseções. A convexidade do sólido impõe restrições globais à superfície, garantindo um tipo topológico simples e uma organização estrutural adequada à decomposição em regiões planas no caso particular das superfícies poliédricas (LIMA, 2015).

Definição 2.2. *Uma superfície poliédrica é uma superfície topológica em $\mathbb{R}^3$ composta pela união finita de regiões poligonais planas, denominadas faces, coladas ao longo de segmentos de reta denominados arestas, de modo que:*

- *cada aresta seja comum a exatamente duas faces;*
- *a interseção entre duas faces distintas seja vazia, um vértice ou uma aresta;*
- *cada ponto da superfície possua uma vizinhança homeomorfa a um disco aberto do plano ou a um semidisco, no caso de superfícies abertas.*

A presença de arestas e vértices impede, em geral, a existência de uma estrutura diferenciável global nessas superfícies. Ainda assim, cada ponto de uma superfície poliédrica possui uma vizinhança homeomorfa a um disco do plano ou a um semidisco, no caso de superfícies com bordo, o que assegura que tais superfícies possuem estrutura topológica local bidimensional. (LIMA, 2015).

A decomposição natural de uma superfície poliédrica em vértices, arestas e faces fornece uma descrição combinatória finita da superfície, permitindo a contagem sistemática desses elementos e a análise de invariantes globais associados à estrutura da superfície.

3 POLIEDROS

O estudo dos poliedros ocupa posição central na história da Geometria, tendo despertado interesse desde a antiguidade. Esses objetos geométricos foram inicialmente investigados a partir de suas propriedades métricas e simetrias, como evidenciado nos estudos dos sólidos platônicos. Com o desenvolvimento da matemática, os poliedros passaram a ser analisados sob perspectivas mais abstratas, revelando relações profundas entre sua estrutura geométrica, sua organização combinatória e as propriedades topológicas de suas superfícies (BOYER, 1974), (EVES, 2011).

A análise rigorosa desses objetos requer a distinção entre o sólido geométrico, a superfície que o delimita e a estrutura combinatória associada a essa superfície. Essa distinção permite situar os poliedros em meio a outras classes de sólidos clássicos e compreender com precisão quais propriedades são compartilhadas e quais são específicas das superfícies poliédricas.

Para esse capítulo, serão usadas as referências Neto (2022), Dolce e Pompeo (2013) e Lima (2015).

Um sólido geométrico é entendido como uma região limitada do espaço tridimensional. Considera-se, assim, um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ compacto, conexo e com interior não vazio. A fronteira desse conjunto, denotada por ∂K , constitui uma superfície que delimita o sólido.

Entre os exemplos fundamentais de sólidos geométricos encontra-se a bola. Fixado um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ e um número real $r > 0$, define-se a bola de centro p e raio r como o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ cuja distância a p é menor ou igual a r . A fronteira desse conjunto é denominada esfera, constituindo um exemplo clássico de superfície suave, sem arestas e vértices.

Outros exemplos ilustram a diversidade de estruturas possíveis para a superfície ∂K . O cilindro e o cone possuem superfícies formadas por regiões suaves, mas apresentam singularidades ao longo de curvas ou em pontos isolados, como as circunferências das bases ou o vértice do cone. Esses exemplos evidenciam que nem todo sólido geométrico possui uma superfície passível de decomposição em um número finito de regiões planas.

A distinção entre sólidos de superfície suave, sólidos com singularidades e sólidos cuja superfície admite uma decomposição poliédrica é fundamental para a caracterização dos poliedros.

Os elementos fundamentais de um poliedro são seus vértices, arestas e faces. Um vértice é um ponto da superfície no qual se encontram três ou mais arestas. Uma aresta é o segmento

de reta comum a exatamente duas faces adjacentes. Uma face é uma região poligonal plana que integra a superfície do poliedro.

A partir desses elementos, pode-se definir um poliedro como um sólido geométrico cuja superfície limitante é composta por um número finito de regiões planas. Formalmente, tem-se a seguinte definição

Definição 3.1. *Um poliedro é um sólido geométrico $K \subset \mathbb{R}^3$ tal que sua fronteira ∂K pode ser decomposta em um número finito de faces poligonais planas, satisfazendo as seguintes condições:*

- *cada aresta é comum a exatamente duas faces;*
- *a interseção de duas faces distintas é vazia, um vértice ou uma aresta;*
- *a união das faces coincide com ∂K ;*
- *a superfície ∂K é conexa.*

Essas condições garantem que a superfície do poliedro possui uma estrutura combinatória bem definida, adequada à contagem sistemática de seus elementos fundamentais.

Entre os exemplos mais simples de poliedros encontram-se os prismas e as pirâmides. Prismas são sólidos cujas faces laterais são paralelogramos e cujas bases são polígonos congruentes situados em planos paralelos. Pirâmides, por sua vez, são formadas por uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram em um vértice comum. Esses exemplos evidenciam de forma clara a decomposição da superfície em faces, arestas e vértices.

Denotam-se por V , A e F o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, de um poliedro. A estrutura combinatória de um poliedro é determinada pelas relações de incidência entre esses conjuntos, isto é, pela forma como vértices, arestas e faces se conectam ao longo da superfície poliédrica.

Um poliedro é dito convexo quando o sólido geométrico K associado é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^3$. Nesse caso, para quaisquer dois pontos de K , o segmento de reta que os liga está inteiramente contido em K . A convexidade do sólido impõe restrições importantes à superfície ∂K , garantindo que ela não apresenta auto-interseções e que cada face é visível externamente, favorecendo a análise global de suas propriedades combinatórias (LIMA, 2015).

Entre os poliedros convexos, destacam-se os poliedros regulares, caracterizados por apresentarem faces congruentes e disposição simétrica em torno de cada vértice. Os cinco

sólidos platônicos — tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro — constituem exemplos clássicos dessa classe de poliedros, amplamente estudados desde a antiguidade por suas propriedades geométricas e relevância histórica.

Nem todo poliedro satisfaz a propriedade de convexidade. Poliedros não convexos podem apresentar reentrâncias em sua superfície, de modo que existam pontos do sólido cujos segmentos de reta não estejam inteiramente contidos em K . A ausência de convexidade pode acarretar modificações significativas na estrutura topológica da superfície poliédrica, evidenciando a importância das hipóteses geométricas adotadas.

A superfície de um poliedro pode ser interpretada como um complexo celular bidimensional, no qual as faces correspondem a células bidimensionais, as arestas a células unidimensionais e os vértices a células zero-dimensionais. Essa interpretação permite tratar a superfície poliédrica como um objeto essencialmente combinatório, abstraindo-se de sua realização geométrica no espaço, fornecendo um arcabouço adequado para a análise de invariantes topológicos associados à superfície (LIMA, 2015).

4 O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS

O Teorema de Euler para poliedros convexos estabelece uma relação entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro. Tal relação foi formulada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783), uma das figuras mais influentes na história da matemática. Euler contribuiu para quase todos os ramos da matemática de sua época, e suas produções científicas ultrapassaram 850 publicações. É considerado, por muitos, o matemático mais prolífico de todos os tempos (VIANA, 2021).

A descoberta do Teorema ocorreu em 1750, quando Euler enviou uma carta à Academia de Ciências de Paris, apresentando a fórmula baseada em observações empíricas feitas a partir dos sólidos platônicos e outros poliedros convexos. A publicação oficial ocorreu em 1758, mas Euler não apresentou uma demonstração formal rigorosa (LIMA, 1985).

A disputa em torno do Teorema de Euler revela que a construção do conhecimento matemático não ocorreu de forma linear, mas envolveu debates intensos sobre as definições e os métodos adequados para fundamentá-lo, refletindo uma evolução histórica que conecta tradições geométricas ao surgimento da topologia (SIQUEIRA, 2020).

Por volta de 1639, René Descartes havia obtido resultados dos quais a relação poderia ser deduzida como consequência imediata, embora sem mencionar explicitamente as arestas. A fórmula acabou sendo atribuída a Leonhard Euler, que, em 1758, apresentou pela primeira vez a relação completa entre vértices, arestas e faces. (LIMA, 1985)

Embora Euler não tenha oferecido uma demonstração rigorosa, Adrien-Marie Legendre foi o primeiro a apresentar uma prova formal do teorema, fundamentando-se em métodos como o Teorema de Girard (LIMA, 2006). A primeira demonstração rigorosa amplamente reconhecida, no entanto, foi apresentada apenas em 1811 por Augustin-Louis Cauchy, que introduziu uma abordagem baseada na planificação da superfície do poliedro. Tal ideia consistia em transformar a superfície em um grafo planar e aplicar operações que não alterassem a relação de Euler.

Ao longo dos séculos XIX e XX, o Teorema de Euler para poliedros foi reinterpretado sob uma perspectiva topológica, sendo compreendido como um caso particular da característica de Euler. Para os poliedros convexos, cujas superfícies são homeomorfas à esfera, essa característica assume o valor 2. Tal abordagem topológica amplia o alcance do teorema para além de sua formulação geométrica original, conferindo-lhe uma fundamentação mais geral e rigorosa (FREITAS, 2017).

Tabela 4.1 – Linha do tempo da evolução histórica dos estudos sobre poliedros

Matemático(s)	Data	Feito histórico associado aos poliedros
Pitagóricos	Séc. VI a.C.	Estudos iniciais dos poliedros regulares associados à harmonia do universo.
Platão	427–347 a.C.	Associou os poliedros regulares aos elementos da natureza em <i>Timeu</i> .
Euclides	Séc. III a.C.	Demonstrou que existem apenas cinco poliedros regulares convexos.
Johannes Kepler	1571–1630	Relacionou os sólidos regulares à estrutura do cosmos.
Leonhard Euler	1758	Estabeleceu a relação $V - A + F = 2$ para poliedros convexos.
A.-M. Legendre	séc. XVIII	Primeira demonstração inteligível do Teorema de Euler.
A.-L. Cauchy	1811	Demonstração rigorosa baseada na planificação do poliedro.
Henri Poincaré	séc. XIX	Generalização topológica: característica de Euler.

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

No Brasil, a abordagem empírica contribuiu significativamente para a difusão do Teorema nas escolas. Segundo Almeida, Castanho e Castrucci (1944), "a relação de Euler pode ser verificada diretamente em figuras familiares como o cubo e o tetraedro". E, quase quatro décadas depois, Filho (1983) propôs uma demonstração acessível, publicada na Revista do Professor de Matemática, baseada em conceitos simples, como a soma de ângulos de um polígono.

A trajetória do Teorema de Euler, desde sua formulação até sua formalização e aplicações contemporâneas, reflete a evolução do pensamento matemático — da geometria clássica à topologia moderna. O Teorema possui dezenas de demonstrações, das quais serão apresentadas algumas, e segundo Lima (1985) ele, “tem as características usuais que tornam um teorema atraente e popular; generalidade de validade, simplicidade de enunciado, demonstração elegante e inteligível.”

No Ensino Fundamental II, os estudantes têm o primeiro contato com o teorema de Euler ao trabalhar com poliedros convexos. Em atividades práticas, constroem tabelas com o número de vértices, faces e arestas de diferentes sólidos e verificam experimentalmente que a relação $V - A + F = 2$ é satisfeita. Em seguida, são apresentados exemplos de poliedros não convexos e, repetindo o processo, percebem que a relação pode ou não se manter. Nessa fase, a ênfase está na observação, descoberta de padrões e no caráter experimental da matemática.

No Ensino Médio, o teorema de Euler aparece novamente, agora dentro do estudo da geometria espacial. Nesse estágio, os professores costumam apresentar intuitivamente a validade da relação para poliedros convexos, fortalecendo a transição da observação empírica para o raciocínio dedutivo. O teorema é então utilizado como ferramenta para estudar propriedades dos sólidos, especialmente os poliedros regulares.

Já no Ensino Superior, quando tratado em cursos de graduação em matemática ou áreas afins, o Teorema de Euler é apresentado com maior rigor, geralmente por meio de demonstrações simples e acessíveis. Caso o curso inclua tópicos de Topologia em sua grade, a fórmula é reinterpretada como a característica de Euler–Poincaré, ampliando seu alcance para superfícies e variedades de dimensão superior. Contudo, é mais comum que o estudo aprofundado dessa generalização seja abordado apenas em níveis avançados de graduação ou no mestrado, dentro da Topologia Algébrica.

4.1 O Teorema de Euler para Poliedros

Após a publicação de seu teorema sem a demonstração, Euler apresentou uma demonstração, segundo O’Conner e Robertson (1996), "baseada na dissecação de sólidos em fatias tetraédricas. Euler ignora alguns problemas com sua demonstração notavelmente inteligente. Em particular, ele assumiu que os sólidos eram convexos".

Teorema 4.1. *[Teorema de Euler.] Seja P um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices. Tem-se que, necessariamente,*

$$F - A + V = 2.$$

4.1.1 Demonstração de Zoroastro Azambuja Filho

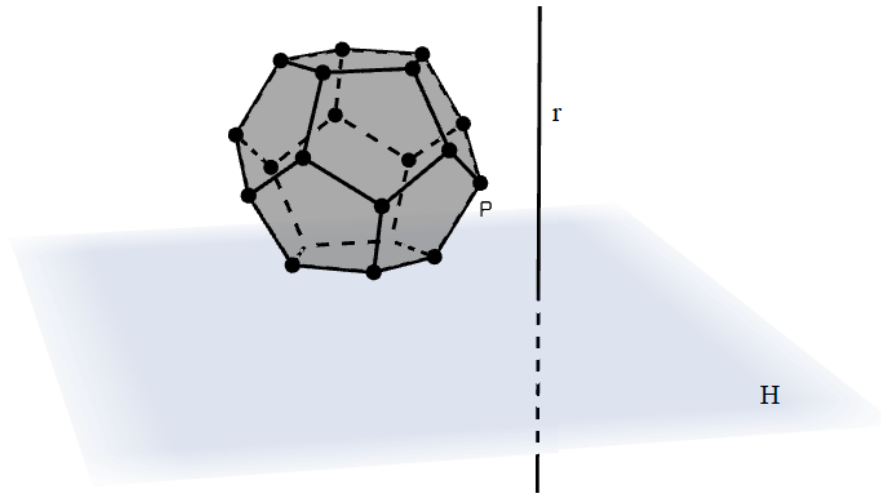
Zoroastro Azambuja Filho foi um professor de matemática que desenvolveu uma abordagem própria e didática para demonstrar o Teorema de Euler para poliedros convexos. Seu trabalho foi publicado como resposta à constatação de que a demonstração usualmente ensinada nos colégios era, na verdade, insuficiente.

Filho (1983) relata que tomou conhecimento de um artigo de Elon Lages Lima no qual se discute a falha na demonstração de Cauchy. Incomodado com a complexidade da solução alternativa proposta, Azambuja decidiu apresentar uma prova mais simples, acessível e visualmente didática.

Para a demonstração do teorema, fazem-se necessárias as hipóteses e definições que serão apresentadas nos próximos parágrafos.

Sejam P um poliedro convexo, r uma reta que não é paralela a nenhuma das faces de P e H um plano perpendicular a r que não contém nenhum ponto pertencente a P (Figura 4.1).

Figura 4.1 – Poliedro P , plano H e reta r

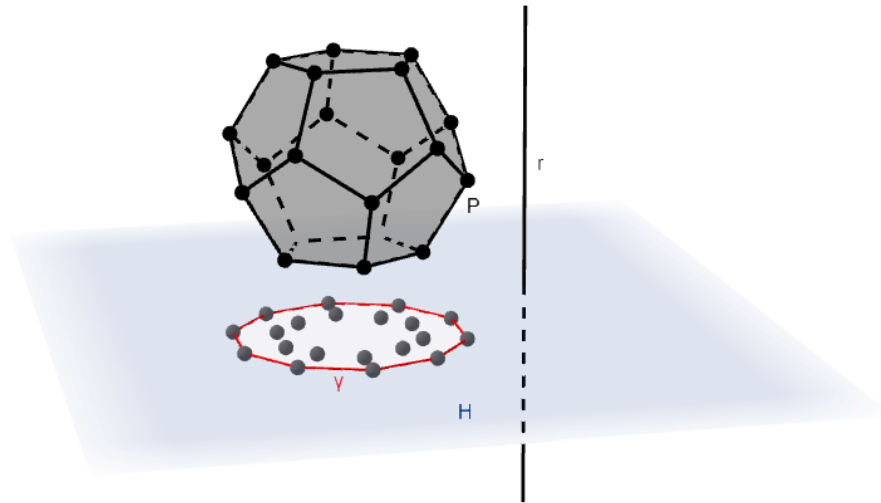


Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Denomina-se H o plano horizontal, e chamam-se retas verticais aquelas que são perpendiculares a H . O semi-espaço determinado por H que contém o poliedro P é denominado semi-espaço superior.

Suponha que os raios solares incidam verticalmente sobre o semi-espaço superior, ou seja, perpendicularmente ao plano horizontal H . Para cada ponto x pertencente ao semi-espaço superior, definimos sua sombra x' como a interseção entre a reta vertical que contém x e o plano H . A sombra de um conjunto X é o conjunto $X' \subseteq H$ formado pelas sombras dos pontos de X , isto é, a projeção de X sobre H (Figura 4.2).

Como a interseção entre uma reta vertical e o conjunto convexo delimitado pelo poliedro P constitui um subconjunto convexo dessa reta, essa interseção pode ser vazia, caso a reta passe completamente fora de P ; pode ser um único ponto, quando a reta tangencia o poliedro; ou pode ser um segmento de reta, quando a reta intersecta o poliedro, entrando por uma face e saindo por outra, interceptando dois pontos distintos de P . Dessa forma, qualquer reta vertical pode ter, no máximo, dois pontos em comum com P . Logo, para todo ponto $x' \in P'$, existe um ou dois pontos $x \in P$ tais que x' é a sombra de x .

Figura 4.2 – Projeção de P em H 

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

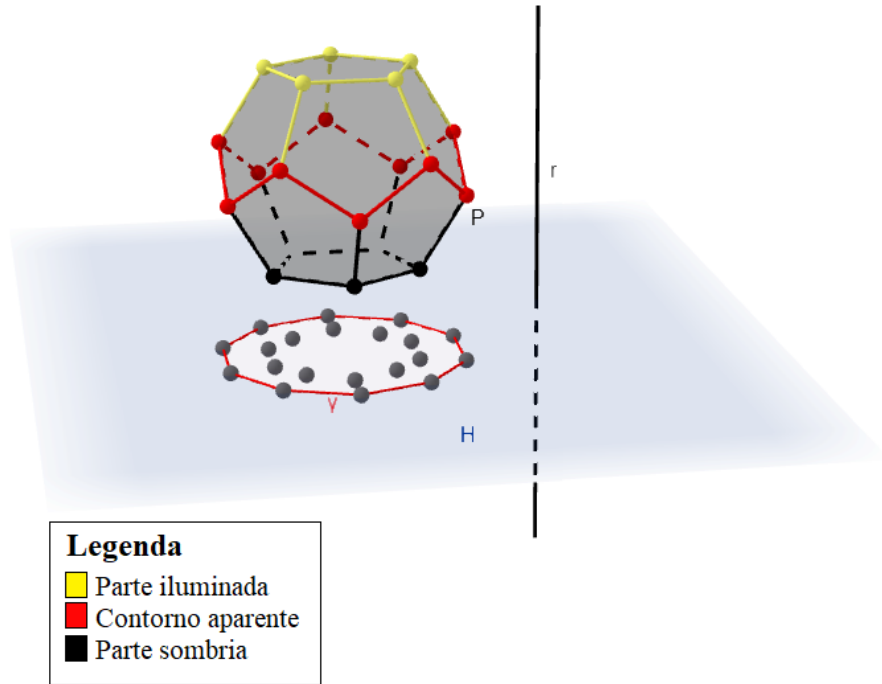
A sombra P' do poliedro P no plano horizontal é um polígono convexo cuja borda, γ' , é a sombra de uma poligonal fechada γ formada por arestas de P . Essa poligonal γ , chamada contorno aparente do poliedro, representa a borda visível de P sob iluminação direta. Cada ponto em γ' corresponde à sombra de um único ponto em γ , enquanto os pontos interiores de P' são sombras de dois pontos distintos de P , um mais alto e outro mais baixo em relação ao plano horizontal H . O ponto mais alto, mais próximo da fonte de luz, é denominado ponto iluminado, pois está exposto à luz direta, enquanto o ponto mais baixo, oculto atrás do iluminado, é chamado ponto sombrio. Conforme a figura 4.3.

Deste modo, os conjuntos dos pontos iluminados, dos pontos sombrios e do contorno aparente γ compõem o poliedro P .

Seja P_1 o conjunto formado pelos pontos iluminados de P acrescido do contorno aparente γ , e P_2 o conjunto dos pontos sombrios de P junto com esse mesmo contorno. A regra que associa a cada ponto $x \in P_1$ sua sombra $x' \in P'$ configura uma correspondência biunívoca entre P_1 e P' , assim como a regra que associa a cada ponto $y \in P_2$ sua sombra $y' \in P'$ define uma correspondência biunívoca entre P_2 e P' . Denotaremos por P'_1 e P'_2 as decomposições do polígono P' como uniões de polígonos justapostos, que representam, respectivamente, as sombras das faces iluminadas (contidas em P_1) e das faces sombrias (contidas em P_2) de P .

Para a próxima hipótese, note que, ao decompor cada face do poliedro P em triângulos, por meio de diagonais traçadas em cada uma das faces, os números F , A e V são alterados individualmente, mas a expressão $F - A + V$ permanece inalterada. De fato, cada vez que uma

Figura 4.3 – Pontos iluminados, pontos sombrios e contorno aparente



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

diagonal é traçada em uma face, os valores de F e A aumentam em uma unidade, enquanto V permanece constante. Assim, na expressão $F - A + V$, os acréscimos em F e A se anulam mutuamente. Ainda, como cada face possui 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, tem-se que $3F = 2A$.

Demonstração do Teorema 4.1. Agora, por meio das somas S dos ângulos internos dos triângulos que constituem o poliedro P acima, será feita a demonstração do teorema.

Seja F o número de faces do poliedro convexo P , e n_i o número de lados da i -ésima face, para $1 \leq i \leq F$. Como o poliedro é convexo, cada face é um polígono convexo, cuja soma dos ângulos internos é dada por $\pi(n_i - 2)$ radianos. Assim, a soma total S dos ângulos internos em todas as faces do poliedro é:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \cdots + \pi(n_F - 2).$$

Agrupando os termos:

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - 2F].$$

Sabendo que a soma total de todas as faces é igual ao dobro do número de arestas A , pois cada aresta pertence a exatamente duas faces, tem-se:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_F = 2A.$$

Substituindo na expressão de S , obtem-se:

$$S = \pi(2A - 2F),$$

ou seja,

$$S = 2\pi(A - F). \quad (4.1)$$

Sob outra perspectiva, a soma total dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro pode ser decomposta em duas partes:

$$S = S_1 + S_2,$$

onde S_1 representa a soma dos ângulos internos dos triângulos da parte iluminada e S_2 , dos triângulos da parte sombria.

Para calcular S_1 , adota-se uma abordagem mais eficiente. Em vez de somar os ângulos, triângulo por triângulo, realiza-se a soma vértice a vértice.

Sejam V_0 o número de vértices do contorno aparente, V_1 o número de vértices iluminados e V_2 o número de vértices sombrios. Logo, o total de vértices do poliedro é

$$V = V_0 + V_1 + V_2.$$

Como o contorno aparente possui V_0 vértices, existem também V_0 lados. Portanto, a soma dos ângulos internos dessa região é $\pi(V_0 - 2)$. Além disso, como a soma dos ângulos em torno de cada vértice iluminado é 2π , obtém-se:

$$S_1 = \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_1.$$

De modo análogo, tem-se:

$$S_2 = \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_2.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 \\
 S &= \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_2 \\
 S &= 2\pi(V_0 - 2) + 2\pi(V_1 + V_2) \\
 S &= 2\pi[(V_0 - 2) + (V_1 + V_2)] \\
 S &= 2\pi[V_0 + V_1 + V_2 - 2] \\
 S &= 2\pi[V - 2].
 \end{aligned}$$

Logo,

$$S = 2\pi(V - 2). \quad (4.2)$$

Comparando as expressões (4.1) e (4.2), tem-se:

$$\begin{aligned}
 2\pi(A - F) &= 2\pi(V - 2) \\
 (A - F) &= (V - 2).
 \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, obtém-se a famosa fórmula de Euler para poliedros convexos:

$$F - A + V = 2.$$

□

Segundo Lima (1984), a ideia central do argumento de Azambuja foi proposta pela primeira vez por A. M. Legendre.

4.1.2 Demonstração de Legendre

Adrien Marie Legendre (1752–1833) foi um matemático francês de destaque, cuja carreira científica se desenvolveu em uma tradição que também valorizava o ensino elementar. De acordo com Lima (1984), sua obra mais conhecida, *Éléments de Géométrie* (1794), influenciou o ensino da geometria em diversas línguas e países, sendo notável pela clareza, simplicidade e originalidade na apresentação, além de registrar as tentativas do autor em demonstrar o postulado das paralelas – quinto postulado de Euclides.

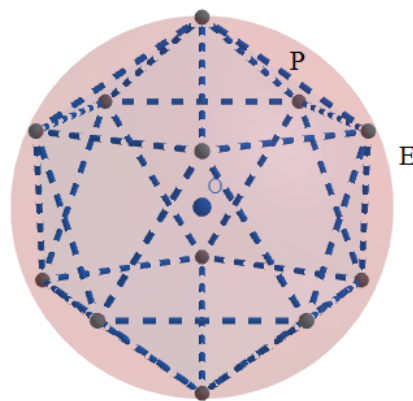
Entre suas contribuições, destaca-se a primeira demonstração inteligível do Teorema de Euler para poliedros convexos — marco fundamental na história da geometria, que até então carecia de uma prova acessível (LIMA, 1984). Contudo, segundo Boyer (1974), apesar do sucesso da geometria de Legendre, suas contribuições mais significativas ocorreram em áreas não geométricas, como análise e teoria dos números, ressaltando sua versatilidade e importância na matemática.

A demonstração proposta por Legendre para o Teorema de Euler baseia-se na fórmula da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Demonstração do Teorema 4.1. Seja P um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que todas as faces de P são triangulares. De fato, caso alguma face seja um polígono com mais de três lados, basta subdividi-la em triângulos por meio do traçado de diagonais interiores. Cada diagonal introduzida aumenta em uma unidade tanto o número de arestas quanto o número de faces, sem alterar o número de vértices. Assim, a expressão $V - A + F$ permanece invariável durante o processo de triangulação. Dessa forma, é válido restringir a demonstração ao caso em que todas as faces de P são triângulos.

Considere a esfera E de centro O e raio r , com $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, tal que o poliedro convexo P esteja contido em seu interior e o ponto O pertença ao interior de P (Figura 4.4).

Figura 4.4 – Poliedro P contido na esfera E

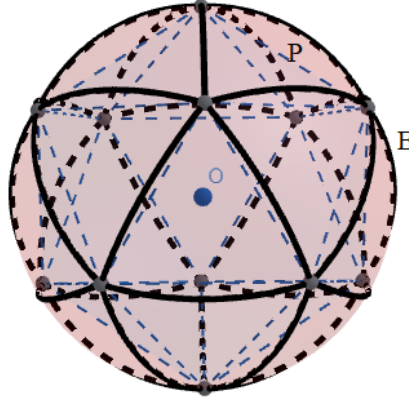


Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Projetando-se radialmente, a partir de O , os elementos (vértices, faces e arestas) de P sobre a superfície de E , obtém-se uma correspondência direta: cada vértice projeta-se em um ponto de E , cada aresta em um arco de círculo máximo, e cada face triangular em um triângulo esférico limitado por três desses arcos. Assim, a projeção induz uma decomposição da esfera

em F triângulos esféricos, com A arestas e V vértices, preservando os valores de V , A e F (Figura 4.5).

Figura 4.5 – Projeção radial de P sobre E



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

A fórmula de Girard (4.3) afirma que, para cada triângulo esférico t , com $1 \leq t \leq F$ com ângulos $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$, tem-se:

$$\alpha_t + \beta_t + \gamma_t = \pi + \frac{a_t}{r^2}, \quad (4.3)$$

onde a_t é a área do triângulo t e r o raio da esfera.

Tomando a equação (4.3) para todos os F triângulos esféricos obtém-se:

$$\sum_{t=1}^F (\alpha_t + \beta_t + \gamma_t) = \pi F + \frac{A_E}{r^2}, \quad (4.4)$$

onde A_E é a área da esfera E .

Visto que a soma dos ângulos ao redor de cada vértice é 2π e há V vértices então, $\sum_t (\alpha_t + \beta_t + \gamma_t) = 2\pi V$. Ademais, a área total da esfera é $A_E = 4\pi r^2$. Assim, substituindo as igualdades acima em (4.4):

$$\begin{aligned} 2\pi V &= \pi F + \frac{4\pi r^2}{r^2} \\ 2V &= F + 4. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$2V - F = 4. \quad (4.5)$$

Observe que a equação (4.5) foi obtida assumindo que todas as faces de P são triangulares. E, por conveniência, pode-se escrever $F = 3F - 2F$, pois permite reescrever o termo F de forma a introduzir as relações combinatórias entre faces e arestas. Assim, cada face tem 3 arestas e cada aresta é compartilhada por duas faces adjacentes, logo $3F = 2A$. Deste modo, desenvolvendo a equação (4.5):

$$2V = 3F - 2F + 4$$

$$2V = 2A - 2F + 4$$

$$V = A - F + 2.$$

Portanto,

$$V - A + F = 2.$$

□

A análise comparativa entre as demonstrações de Zoroastro Azambuja Filho e Adrien-Marie Legendre para o Teorema de Euler revela distinções essenciais em múltiplos aspectos. Em termos de generalidade, ambas estabelecem a relação para poliedros convexos, mas Legendre, ao fundamentar-se na geometria esférica, atinge maior generalidade conceitual, enquanto Azambuja permanece no âmbito da geometria plana.

No plano da profundidade teórica, a prova de Legendre mobiliza conceitos da geometria não euclidiana, conferindo-lhe maior sofisticação. Já a de Azambuja, de abordagem mais elementar, destaca-se pela acessibilidade. Quanto à elegância, Azambuja privilegia uma construção simples e visual, eficaz para fins didáticos, ao passo que Legendre recorre a uma formulação mais abstrata, orientada pelo rigor formal.

Metodologicamente, Legendre baseia-se na fórmula de Girard e em propriedades de triângulos esféricos, enquanto Azambuja adota projeções planas e o conceito de sombras, aproximando-se de uma demonstração construtiva e intuitiva. Em termos pedagógicos, a simplicidade de Azambuja favorece a introdução ao tema, enquanto a abordagem de Legendre exige maior maturidade conceitual.

No critério da construtividade, Azambuja oferece um procedimento direto e visual. Legendre, por sua vez, elabora uma argumentação mais abstrata. A originalidade de cada um manifesta-se na adaptação metodológica: Azambuja orienta-se por objetivos didáticos. E, Legendre, pelo uso sistemático dos fundamentos da geometria esférica.

Ambas as demonstrações são logicamente claras e corretas, embora Azambuja sacrifique parte do formalismo em favor da simplicidade. Quanto à economia de recursos conceituais, a vantagem é de Azambuja, cuja abordagem exige menos aparato técnico, em contraste com a base teórica mais sofisticada requisitada por Legendre.

No que se refere à robustez frente a variações nas hipóteses, Legendre apresenta maior flexibilidade e resistência, ao passo que a demonstração de Azambuja é mais sensível ao contexto específico. Finalmente, em termos de transferibilidade, a formalidade e abstração da prova de Legendre conferem-lhe maior potencial de adaptação a outros contextos matemáticos, diferentemente da abordagem mais restrita de Azambuja.

Dessa forma, as duas demonstrações se complementam: Legendre contribui com rigor e profundidade conceitual, enquanto Azambuja destaca-se pela clareza e eficácia pedagógica.

4.1.3 Demonstração de Castrucci

Benedito Castrucci (1909–1995) destacou-se como um dos principais nomes do ensino de matemática no Brasil, com ênfase na Geometria. Formado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (1939), foi discípulo de Giacomo Albanese e Luigi Fantappiè. Ingressou como assistente no Instituto de Matemática da USP e, posteriormente, assumiu a cátedra, consolidando uma carreira marcada pela erudição matemática e pelo compromisso com a formação de professores (RAMASSOTTI, 2018).

Entre suas contribuições didáticas, destaca-se sua participação na obra *Matemática: destinado à primeira série dos cursos Clássicos e Científico* (ALMEIDA; CASTANHO; CASTRUCCI, 1944), na qual Castrucci apresenta uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos por meio do princípio da indução completa.

Definição 4.1. *Uma superfície poliédrica aberta é uma superfície obtida pela remoção de uma face de um poliedro, produzindo uma superfície conexa com bordo.*

Demonstração do Teorema 4.1. Considere uma superfície poliédrica aberta. O caso mais simples ocorre quando a superfície consiste em um único polígono plano. Nesse cenário, o número de vértices V é igual ao número de arestas A , e o número de faces é $F = 1$. Portanto,

$$V - A + F = 1$$

A convexidade do poliedro garante que a remoção sucessiva de faces preserve a conexão da superfície restante.

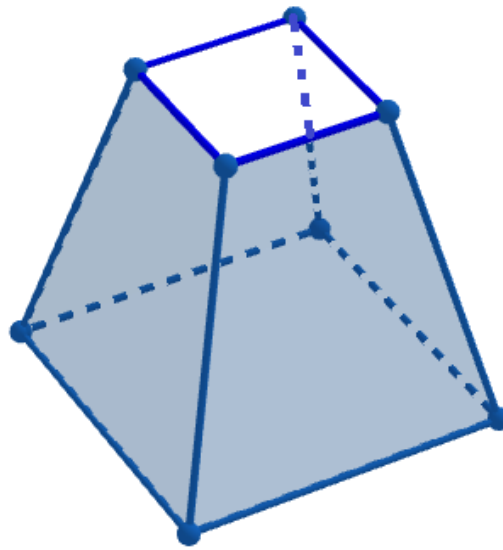
Suponha válida a relação

$$V - A + F = 1$$

para toda superfície poliédrica aberta com $k - 1$ faces e uma única componente de bordo.

Considere tal superfície com $k - 1$ faces (Figura 4.6).

Figura 4.6 – Superfície poliédrica convexa aberta



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Acrescente uma nova face poligonal com n arestas e n vértices, das quais h arestas coincidem com o contorno existente.

Como h arestas consecutivas determinam $h + 1$ vértices, o número de novos vértices efetivamente adicionados é $n - h - 1$. Com relação às arestas, como h delas já existiam, apenas $n - h$ são novas. Por fim, o número de faces aumenta em uma unidade. Assim,

$$V' = V + n - h - 1$$

$$A' = A + n - h$$

$$F' = F + 1.$$

Calculando $V' - A' + F'$, obtém-se:

$$V' - A' + F' = (V + n - h - 1) - (A + n - h) + (F + 1)$$

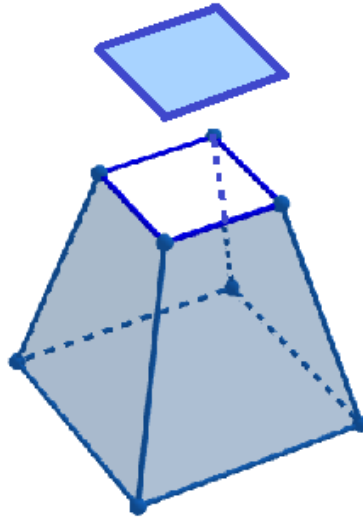
$$V' - A' + F' = V - A + F.$$

Portanto, a relação $V - A + F = 1$ continua válida após a adição da nova face, completando o passo indutivo. Logo, toda superfície poliédrica aberta, convexa e com um único contorno satisfaz:

$$V - A + F = 1. \quad (4.6)$$

Considere agora um poliedro convexo fechado. Ao remover uma de suas faces, obtém-se uma superfície aberta com um único contorno, para a qual já se demonstrou que vale (4.6), conforme a figura 4.7.

Figura 4.7 – Poliedro convexo fechado com uma face removida



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Ao restaurar a face removida, o número de vértices e arestas permanece o mesmo, enquanto o número de faces aumenta em uma unidade. Assim:

$$V - A + (F + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Portanto, todo poliedro convexo fechado satisfaz a fórmula de Euler:

$$V - A + F = 2.$$

□

4.1.4 Demonstração de Cauchy

Augustin-Louis Cauchy destacou-se no século XIX por sua contribuição decisiva à formalização do rigor matemático, reformulando diversas demonstrações com base em princípios lógicos sólidos (BOYER, 1974). No contexto do Teorema de Euler para poliedros convexos, Lima (1985) afirma que, embora Legendre tenha sido o primeiro a apresentar uma prova, foi a demonstração de Cauchy, publicada em 1811, que se tornou a mais divulgada e aceita, especialmente no caso de poliedros topologicamente equivalentes à esfera. Essa abordagem, baseada em operações elementares sobre a estrutura combinatória dos poliedros, assegura a invariância da relação entre vértices, arestas e faces (LIMA, 1985).

Demonstração do Teorema 4.1. Seja P um poliedro convexo finito, cujas faces são polígonos convexos. Remove-se uma de suas faces. O número de vértices V e o número de arestas A permanecem os mesmos, enquanto o número de faces F é reduzido em uma unidade. Sejam $V' = V$, $A' = A$ e $F' = F - 1$. Logo,

$$V - A + F = V' - A' + F' + 1.$$

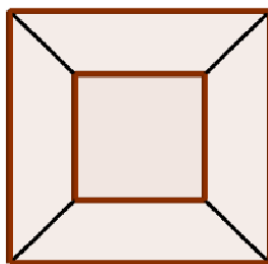
Assim, basta demonstrar que $V' - A' + F' = 1$ para concluir que $V - A + F = 2$.

A superfície obtida pela remoção da face é planificada, sem alteração nos valores de V' , A' e F' , nem nas conexões entre vértices, arestas e faces (Figura 4.8).

Decompõem-se todas as faces poligonais da superfície planificada em triângulos, conforme figura 4.9, traçando-se diagonais não concorrentes. A cada nova diagonal, o número de vértices permanece constante, enquanto o número de arestas e o número de faces aumentam em uma unidade. Assim, a característica $V - A + F$ permanece invariável durante todo o processo de triangulação. Pode-se, portanto, supor que todas as faces são triangulares.

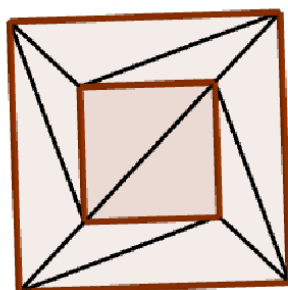
Em seguida, removem-se, uma a uma, as faces triangulares que apresentam pelo menos uma aresta livre — aresta pertencente a uma única face. A cada remoção, ocorrem dois casos:

Figura 4.8 – Cubo sem uma face planificado



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

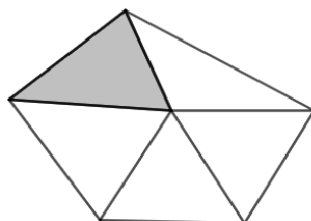
Figura 4.9 – Cubo planificado com as diagonais de cada face



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

- Se o triângulo possui uma aresta livre (Figura 4.10):

Figura 4.10 – Retirada do triângulo com uma aresta livre



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

$$\Delta V = 0$$

$$\Delta A = -1$$

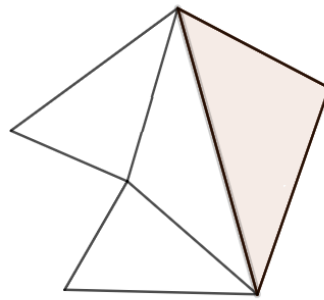
$$\Delta F = -1$$

$$\Delta(V - A + F) = 0.$$

onde ΔV , ΔA e ΔF representam, respectivamente, as variações no número de vértices, arestas e faces após a remoção de um triângulo da superfície planificada.

- Se o triângulo possui duas arestas livres (Figura 4.11):

Figura 4.11 – Retirada do triângulo com duas arestas livres



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

$$\Delta V = -1$$

$$\Delta A = -2$$

$$\Delta F = -1$$

$$\Delta(V - A + F) = 0.$$

Como a característica $V - A + F$ permanece constante em ambos os casos, o processo pode ser repetido até restar apenas um triângulo. Para esse triângulo final, tem-se:

$$V = 3$$

$$A = 3$$

$$F = 1$$

$$V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1.$$

Logo, para a superfície planificada,

$$V' - A' + F' = 1.$$

Como $F = F' + 1$, segue que:

$$V - A + F = V' - A' + (F' + 1)$$

$$V - A + F = 1 + 1 = 2.$$

Portanto, todo poliedro convexo satisfaz a fórmula de Euler:

$$V - A + F = 2.$$

□

Assim, enquanto Cauchy estabeleceu a validade do Teorema de Euler de forma rigorosa para poliedros convexos, Poincaré generalizou essa ideia para superfícies mais complexas e fundamentou o teorema dentro do campo da topologia, abrindo caminho para o estudo das características topológicas das variedades em geral. Dessa forma, a demonstração de Cauchy pode ser vista como o ponto de partida rigoroso que Poincaré utilizou para o desenvolvimento da topologia algébrica moderna.

A diversidade de métodos para demonstrar o Teorema de Euler mostra a riqueza e as múltiplas abordagens da matemática. Três demonstrações clássicas — de Azambuja, Castrucci e Cauchy — revelam diferentes aspectos da estrutura dos poliedros.

Azambuja utiliza a projeção do poliedro sobre um plano e a soma dos ângulos internos dos polígonos. Essa abordagem é clara, visual e de fácil compreensão, com forte aplicabilidade didática, especialmente no ensino médio e na formação inicial de professores. Apesar de menos formal, seu valor exploratório é notável, ao relacionar propriedades angulares à geometria plana.

Castrucci baseia-se na indução matemática, apresentando rigor lógico, formalismo e generalidade. Embora menos intuitiva, sua prova é sólida e elegante, com economia de raciocínio compatível aos padrões acadêmicos.

Cauchy propõe um método histórico e engenhoso: retira uma face do poliedro, planifica a superfície restante e traça diagonais até decompor a figura em triângulos. Esse procedimento

relaciona o teorema à geometria plana e à topologia elementar. Embora tenha menos rigor segundo os padrões atuais, seu valor histórico e conceitual permanece significativo.

Assim, as três provas refletem modos distintos de pensar a matemática: Azambuja privilegia a visualidade, simplicidade e valor didático; Castrucci foca no rigor, formalismo e generalidade; Cauchy enfatiza a historicidade, elegância e profundidade conceitual. Elas se complementam, enriquecendo a compreensão do teorema em todas as suas dimensões.

4.2 O Teorema de Euler no Plano

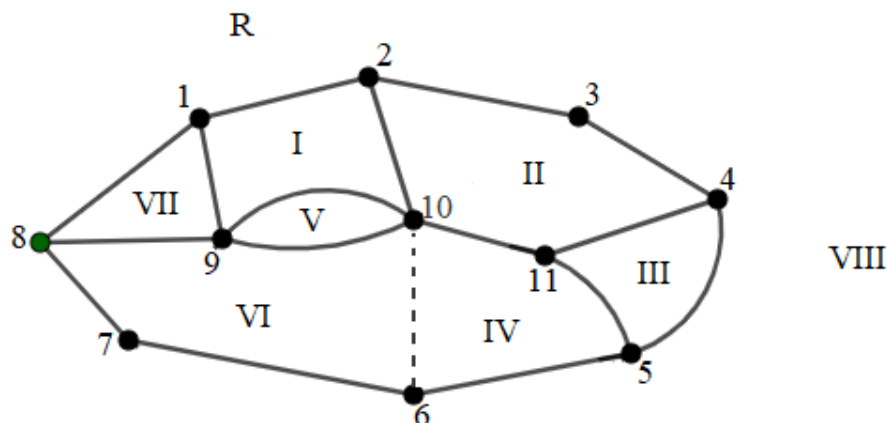
A relação de Euler no plano é válida para situações mais abrangentes do que a apresentada na demonstração de Cauchy (4.1.4), onde é considerada a planificação de um poliedro convexo após a remoção de uma de suas faces.

Teorema 4.2 (Teorema de Euler para Grafos Planos). *Seja G um grafo plano conexo com V vértices, A arestas e F faces. Então,*

$$V - A + F = 2.$$

A demonstração do Teorema de Euler no plano, segundo Melo (2013) não necessita recorrer ao resultado obtido no espaço, pode ser obtida diretamente no plano. Para tanto, basta considerar uma região R do plano dividida em regiões justapostas, conforme a Figura 4.12.

Figura 4.12 – Região R do plano dividida em regiões justapostas.



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Qualquer região, seja R ou uma das que compõem a decomposição, é limitada por pelo menos duas arestas, sendo o vértice definido como um ponto comum a, no mínimo, duas dessas arestas. Destaca-se que, neste contexto, o termo aresta não se refere a um segmento de reta, mas sim a qualquer curva contínua, sem autointersecções, que conecta um vértice a outro. Cabe enfatizar, ainda, a exigência de que nenhuma região se encontre totalmente contida em outra. Convenientemente, também é considerada como uma região o exterior de R . Deste modo, tal região — comumente denominada oceano — é ilimitada e tem como fronteira o contorno de R .

Sob as condições acima, usando indução na quantidade de regiões, considere como caso base o plano dividido em F regiões, onde uma região é ilimitada pelas A arestas que concorrem em V vértices. Tomando um polígono de n lados, tem-se $A = V = n$ e $F = 2$ (uma face interna e o oceano). Logo, $V - A + F = 2$.

Para o passo indutivo, suponha que a relação de Euler $V - A + F = 2$ seja válida para uma decomposição do plano em F regiões, com V vértices e A arestas. Então, será mostrado que ela continua válida quando se passa para uma decomposição com $F + 1$ regiões. Para isso, acrescenta-se uma nova região no oceano traçando-se um caminho formado por r arestas que liga dois vértices distintos já existentes no contorno da decomposição.

Como os vértices inicial e final já existem, os únicos vértices novos são os que ficam no interior do caminho: cada aresta liga dois vértices consecutivos e, como existem r arestas e dois vértices extremos já existentes, criam-se exatamente $r - 1$ vértices novos. O caminho acrescenta ainda r arestas novas (uma para cada segmento do traçado) e, por ser parte de um novo contorno fechado juntamente com arestas já existentes, divide a região ilimitada em duas, criando exatamente uma nova face (Figura 4.13).

Assim, após o acréscimo da região, tem-se:

$$V' = V + (r - 1), \quad A' = A + r, \quad F' = F + 1$$

Calculando, obtém-se:

$$V' - A' + F' = [V + (r - 1)] - [A + r] + (F + 1)$$

$$V' - A' + F' = V - A + F + (r - 1) - r + 1$$

$$V' - A' + F' = V - A + F + 0$$

$$V' - A' + F' = V - A + F.$$

Originalmente enunciada por Euler no século XVIII, a característica de Euler revela que, para qualquer poliedro convexo, o valor dessa característica é sempre 2, demonstrando uma surpreendente uniformidade estrutural entre formas distintas (RICHESON, 2012).

Henri Poincaré, no final do século XIX, reinterpretou a característica de Euler em termos de homologia, introduzindo o que hoje se denomina característica de Euler–Poincaré. Essa generalização permitiu que a característica fosse estendida para superfícies e variedades de dimensões superiores, constituindo um marco para a Topologia moderna, ao deslocar o foco do estudo da métrica para invariantes combinatórios e algébricos (LIMA, 1985; HOSCH, 2017).

A característica de Euler é definida da seguinte maneira:

Definição 4.2. *Seja P um poliedro com V vértices, F faces e A arestas. O número*

$$\chi(P) = V - A + F$$

é chamado de característica de Euler de P .

Generalizada para superfícies S de diferentes gêneros, a característica de Euler assume valores como 2 para a esfera e 0 para o toro, seguindo a relação para superfícies mais gerais

$$\chi(S) = 2 - 2g,$$

onde g é o gênero da superfície, permitindo assim a classificação de superfícies compactas.

A homologia simplicial é uma ferramenta central na topologia algébrica, que permite estudar propriedades essenciais de espaços topológicos a partir de uma abordagem combinatória. O ponto de partida é o conceito de simplexo, que generaliza figuras geométricas simples a dimensões superiores. Um 0-simplexo é um ponto, um 1-simplexo é um segmento de reta, um 2-simplexo é um triângulo com seu interior, e um 3-simplexo é um tetraedro. Mais formalmente, dados $k + 1$ pontos $v_0, \dots, v_k$ linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, define-se o k -simplexo como o conjunto de todas as combinações convexas desses pontos:

$$[v_0, \dots, v_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

A independência linear dos pontos assegura que o simplexo tenha dimensão k . Cada subconjunto de k vértices determina uma face do simplexo, que é um $(k - 1)$ -simplexo contido no simplexo original.

A partir de simplexo, constrói-se um complexo simplicial, que é uma coleção finita de simplexo, satisfazendo duas condições fundamentais: toda face de um simplexo pertence também ao complexo, e a interseção de dois simplexos, se não vazia, é uma face comum de ambos. Essa estrutura permite representar espaços topológicos de forma discreta, possibilitando o estudo de suas propriedades essenciais com ferramentas algébricas.

Para cada dimensão k , define-se o grupo de cadeias C_k , que consiste em combinações lineares de k -simplexos com coeficientes em um anel fixo, usualmente $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. O operador de bordo $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ associa a cada k -simplexo a soma orientada de suas $(k-1)$ -faces, de forma que a composição de dois operadores consecutivos seja nula, isto é, $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$. Exemplos concretos incluem

$$\partial_1([v_0, v_1]) = [v_1] - [v_0], \quad \partial_2([v_0, v_1, v_2]) = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1].$$

A orientação do simplexo é determinada pela ordem dos vértices, sendo crucial para a definição consistente dos sinais no operador de bordo.

Com esses operadores, define-se o grupo de ciclos $Z_k = \ker(\partial_k)$, formado por cadeias cujo bordo é nulo, e o grupo de bordos $B_k = \text{im}(\partial_{k+1})$, formado por cadeias que são bordos de cadeias de dimensão superior. O grupo de homologia $H_k = Z_k/B_k$ identifica ciclos que não são bordos, representando assim as características topológicas essenciais do espaço, como laços ou cavidades que não podem ser contraídos a um ponto.

A dimensão do grupo de homologia H_k é chamada número de Betti, $\beta_k = \dim H_k$, fornecendo uma medida quantitativa da topologia do espaço. Especificamente, β_0 conta o número de componentes conexas, β_1 conta o número de laços ou túneis independentes, e β_2 mede o número de cavidades tridimensionais. A partir desses números, define-se a característica de Euler do espaço como a soma alternada

$$\chi = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k,$$

que generaliza a fórmula clássica de Euler e permite seu cálculo para qualquer espaço que possa ser decomposto em simplexos.

Dessa forma, a homologia simplicial estabelece uma ponte elegante entre geometria, álgebra e topologia, permitindo estudar propriedades invariantes de espaços complexos usando construções combinatórias simples e operadores lineares bem definidos. Essa base sólida prepara o terreno para a análise das propriedades da característica de Euler e para aplicações con-

cretas, como no caso da esfera, onde a estrutura simplicial revela de maneira elegante suas propriedades topológicas fundamentais.

A característica de Euler constitui, portanto, um invariante topológico associado à superfície considerada, isto é, um número que depende apenas do tipo topológico da superfície e permanece inalterado sob subdivisões ou refinamentos da decomposição celular. Em particular, diferentes triangulações ou decomposições da mesma superfície conduzem ao mesmo valor da característica de Euler (LIMA, 1985).

No caso dos poliedros convexos, cuja superfície é homeomorfa à esfera, a característica de Euler assume o valor 2, independentemente do número de faces, arestas ou vértices utilizados na decomposição. Essa observação evidencia que a fórmula de Euler não expressa uma propriedade geométrica específica de um poliedro particular, mas sim uma propriedade global da superfície esférica enquanto espaço topológico (RICHESON, 2012).

A esfera constitui o caso mais elementar para a compreensão da característica de Euler, uma vez que todo poliedro convexo é topologicamente equivalente a ela. Tal equivalência decorre do fato de que a superfície de um poliedro convexo pode ser projetada radialmente a partir de um ponto interno sobre a superfície esférica, estabelecendo correspondência entre vértices, arestas e faces (LIMA, 1985; SOUZA, 2016). Dessa forma, a relação $V - A + F = 2$, válida para poliedros convexos, implica diretamente que a característica de Euler da esfera é igual a 2.

Esse valor é preservado independentemente da decomposição escolhida. Por exemplo, utilizando um tetraedro temos $V = 4$, $A = 6$ e $F = 4$; um cubo fornece $V = 8$, $A = 12$ e $F = 6$; e um icosaedro apresenta $V = 12$, $A = 30$ e $F = 20$. Em todos os casos, $V - A + F = 2$, confirmando que a característica de Euler é um invariante topológico da esfera (VELASCO et al., 2023).

Essa constatação evidencia que a característica de Euler não depende da forma geométrica específica, mas da estrutura topológica subjacente. A esfera, enquanto superfície compacta e orientável de gênero zero, é o exemplo paradigmático desse princípio, sendo preservada sob qualquer deformação contínua que não altere sua conectividade. A generalização introduzida por Henri Poincaré no final do século XIX estendeu essa análise para superfícies de gênero arbitrário, sintetizada pela expressão

$$\chi = 2 - 2g,$$

onde g denota o número de alças ou “furos” da superfície. Para a esfera, $g = 0$, de modo que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ (MARTINES, 2009; ARANTES; PEDROCHI; MARTINS, 2019).

Além de seu valor teórico, a esfera desempenha papel central no ensino da característica de Euler. No contexto da educação básica, atividades com poliedros elementares, como cubos e tetraedros, permitem aos alunos construir tabelas de vértices, arestas e faces, favorecendo a experimentação e a intuição matemática. No ensino superior, a esfera fornece o elo entre a geometria clássica e a topologia, servindo de ponto de partida para a classificação das superfícies compactas orientáveis e introduzindo os conceitos que conduzem à característica de Euler–Poincaré (SOUZA, 2016).

5 APLICAÇÕES

O Teorema de Euler para poliedros é um dos resultados mais significativos da geometria clássica e um marco na transição para a topologia moderna. Essa relação, que conecta o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, evidencia propriedades estruturais que ultrapassam o domínio da geometria elementar. Ao longo do desenvolvimento da matemática, o teorema revelou-se não apenas um resultado teórico de grande elegância, mas também uma ferramenta que permite compreender e modelar sistemas com características poliédricas em diferentes contextos científicos.

Com o objetivo de mostrar a relevância e amplitude do Teorema de Euler, em áreas distintas do conhecimento, serão apresentadas algumas aplicações. Entre as aplicações diretas, destacam-se a classificação dos Sólidos de Platão – que mostra as restrições geométricas impostas pela relação euleriana – e a teoria dos grafos, onde o teorema fundamenta o estudo da planaridade e da conectividade de redes. Entre as aplicações indiretas, o teorema aparece em computação gráfica, na verificação e correção topológica de malhas tridimensionais; na engenharia e arquitetura, auxiliando no projeto e análise de estruturas espaciais e domos geodésicos; na química e cristalografia, na descrição de estruturas moleculares e redes cristalinas; e na geografia e cartografia, na interpretação da equivalência topológica entre superfícies esféricas e suas representações planas.

Desse modo, o Teorema de Euler demonstra sua capacidade de transcender fronteiras disciplinares, unindo aspectos abstratos da matemática às suas manifestações concretas no mundo físico e tecnológico. Sua presença em diferentes campos evidencia o poder unificador das ideias matemáticas e reforça o papel da geometria e da topologia como linguagens essenciais para compreender e representar a estrutura do espaço.

5.1 Poliedros de Platão

Os sólidos de Platão, também conhecidos como poliedros regulares, são figuras geométricas tridimensionais que reúnem simetria, estética e raciocínio lógico. Esses sólidos despertam fascínio desde a antiguidade, não apenas por sua perfeição formal, mas também por sua relação simbólica com os elementos da natureza e a estrutura do cosmos (EVES, 2011; REIS, 2013).

Os registros sobre os poliedros regulares remontam à antiguidade, especialmente aos pitagóricos, que acreditavam que toda a realidade poderia ser explicada por meio de números e formas geométricas. Entre esses estudos, as figuras espaciais de simetria perfeita ocupavam um

papel central, representando a ordem e a harmonia do universo (EVES, 2011). Séculos depois, Platão (427–347 a.C.), filósofo grego e discípulo de Sócrates, retomou e ampliou essas ideias. Ao fundar sua escola, a Academia, em Atenas, destacou a importância da geometria como base do conhecimento filosófico e científico. Segundo Reis (2013), havia na entrada da Academia a inscrição: “Não entre aqui quem não seja geômetra”, o que demonstra o valor que Platão atribuía à matemática.

Em sua obra *Timeu*, Platão associou quatro dos poliedros regulares aos elementos fundamentais da natureza: o tetraedro ao fogo, o hexaedro (ou cubo) à terra, o octaedro ao ar e o icosaedro à água. O quinto sólido, o dodecaedro, foi associado ao universo, representando a totalidade e a harmonia cósmica (EVES, 2011; REIS, 2013). Mais tarde, Euclides consolidou o estudo matemático desses sólidos no Livro XIII de *Os Elementos*, onde demonstrou que apenas cinco poliedros regulares convexos podem existir. No século XVII, Johannes Kepler (1571–1630) retomou o tema em sua obra *Mysterium Cosmographicum*, relacionando as órbitas dos planetas aos cinco sólidos regulares e reforçando a crença na harmonia matemática do universo (EVES, 2011).

Segundo Neto (2022), temos a seguinte definição:

Definição 5.1 (Sólido de Platão). *Um poliedro regular, sólido de Platão, é um sólido convexo que satisfaz as seguintes condições:*

- *todas as faces são polígonos regulares congruentes;*
- *o mesmo número de arestas concorre em cada vértice;*
- *todos os ângulos poliédricos são iguais.*

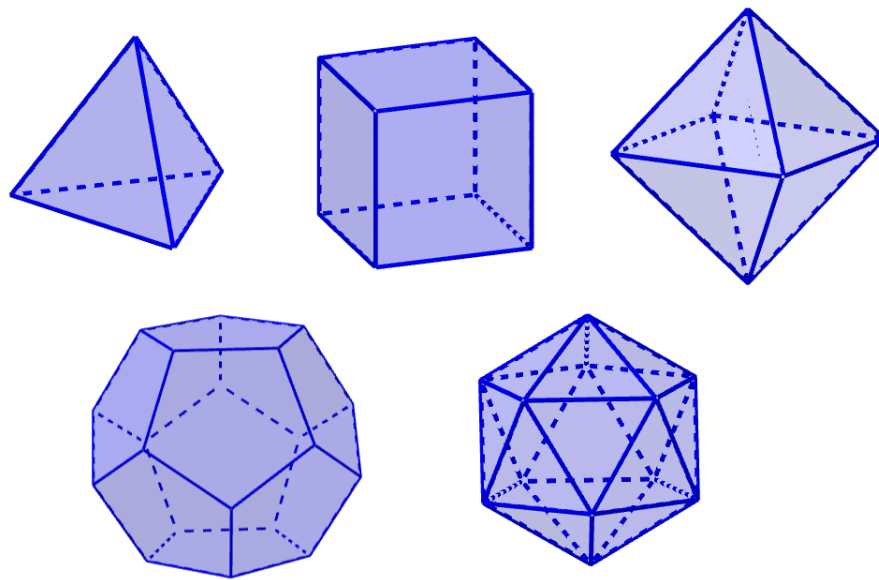
Essas condições de regularidade e simetria limitam o número de poliedros regulares, conforme o seguinte teorema,

Teorema 5.1. *Existem exatamente cinco poliedros regulares convexos: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro.*

Tais sólidos eram associados à elementos da natureza (Figura 5.1). O tetraedro, formado por quatro triângulos equiláteros, é o mais simples e representa o elemento fogo, por ser o mais pontiagudo e de menor estabilidade. O hexaedro, de seis faces quadradas, representa a terra, pela sua forma estável e simétrica. O octaedro, com oito faces triangulares, é associado ao ar,

pela leveza e equilíbrio. O icosaedro, com vinte faces triangulares, é ligado à água, por sua fluidez e maior volume em relação à superfície. Por fim, o dodecaedro, composto por doze faces pentagonais, foi identificado por Platão como o símbolo do universo, devido à sua complexidade e relação com o zodíaco e os doze meses do ano (REIS, 2013). Séculos depois, Kepler reinterpretou essas associações explicando-as com base nas propriedades geométricas dos sólidos. Ele observou que o tetraedro possui a menor razão entre volume e área, simbolizando o fogo, enquanto o icosaedro possui a maior, simbolizando a água. O cubo representa a terra; o octaedro, o ar; e o dodecaedro, o cosmos (EVES, 2011).

Figura 5.1 – Sólidos de Platão



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

A demonstração de que existem apenas cinco sólidos regulares convexos é baseada no Teorema de Euler, que relaciona o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) de qualquer poliedro convexo:

$$V - A + F = 2.$$

Considere P um poliedro convexo, sendo n o número de lados de cada face e p o número de arestas que se encontram em cada vértice. Assim, tem-se:

$$2A = nF = pV.$$

Substituindo na relação de Euler:

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2$$

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}.$$

Para que F seja positivo, é necessário que:

$$2p + 2n - pn > 0 \Rightarrow p < \frac{2n}{n-2}.$$

Como $p \geq 3$, conclui-se que $n < 6$, restando apenas as seguintes combinações possíveis:

- $n = 3, p = 3$: Tetraedro
- $n = 3, p = 4$: Octaedro
- $n = 3, p = 5$: Icosaedro
- $n = 4, p = 3$: Cubo
- $n = 5, p = 3$: Dodecaedro.

Portanto, conforme demonstraram Euclides e autores posteriores, existem exatamente cinco sólidos regulares (REIS, 2013; NETO, 2022).

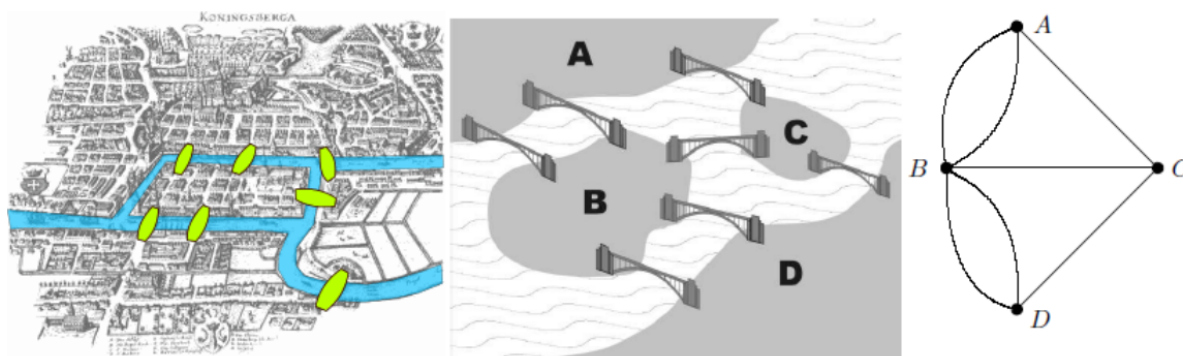
Os sólidos de Platão representam um dos capítulos mais notáveis da história da matemática, unindo razão, estética e filosofia. Desde a antiguidade, essas figuras expressam a busca humana por compreender a ordem e a perfeição do universo. Seu estudo, quando conduzido de maneira contextualizada e adequada às etapas de ensino, contribui para o desenvolvimento da visão espacial, do raciocínio lógico e do encantamento pela geometria.

Nas instituições de ensino brasileiras, o tema é abordado de maneira gradual. No ensino fundamental, enfatiza-se o caráter visual e manipulativo, utilizando-se modelos físicos e softwares de geometria dinâmica. No ensino médio, o foco passa à dedução matemática, com a aplicação da relação de Euler e o estudo das propriedades geométricas. Já no ensino superior, os sólidos de Platão são explorados em contextos mais teóricos, envolvendo geometria espacial e grupos de simetria. Assim, a presença desse conteúdo nos diversos níveis de ensino reforça a importância da geometria como instrumento de compreensão e expressão da harmonia do mundo.

5.2 Grafos

A Teoria dos Grafos teve início no século XVIII com o trabalho de Leonhard Euler, ao resolver o famoso Problema das Pontes de Königsberg, considerado o marco inaugural dessa teoria. A cidade de Königsberg, então pertencente à Prússia, era cortada pelo rio Pregel, que a dividia em quatro regiões — duas ilhas e duas margens — conectadas por sete pontes (Figura 5.2). O desafio proposto aos moradores era determinar se seria possível realizar um passeio que atravessasse todas as pontes exatamente uma vez e retornasse ao ponto de partida (FREITAS; BORGES, 2015).

Figura 5.2 – As sete pontes de Königsberg em 1736 e o respectivo multigrafo



Fonte: Lima (2021)

Euler demonstrou que tal percurso era impossível. Para chegar a essa conclusão, desconsiderou as distâncias e dimensões das ilhas, concentrando-se apenas na conectividade entre as partes da cidade. Representou cada região por um vértice e cada ponte por uma aresta, inaugurando o conceito de grafo, uma estrutura matemática baseada em relações, e não em medidas (JURKIEWICZ, 2009).

De acordo com Freitas e Borges (2015), um grafo é definido como o par $G = (V, A)$, em que V representa o conjunto de vértices (ou nós) e A o conjunto de arestas, cada uma ligando dois vértices distintos. Quando dois vértices são ligados por uma aresta, dizem-se adjacentes; caso contrário, são independentes.

O grau de um vértice, denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes a esse vértice. Um vértice é isolado se $d(v) = 0$ e pendente se $d(v) = 1$. Um laço é uma aresta que liga um vértice a ele mesmo. Quando há mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices, o grafo possui arestas múltiplas. Um grafo sem laços nem arestas múltiplas é chamado de grafo simples.

Um caminho é uma sequência de vértices distintos $(x_0, x_1, \dots, x_k)$, em que cada par consecutivo é conectado por uma aresta. O caminho é fechado se $x_0 = x_k$; caso contrário, é aberto. Quando o caminho fechado possui pelo menos três vértices distintos, tem-se um ciclo. Um grafo é conexo se existir um caminho entre quaisquer dois de seus vértices; caso contrário, é desconexo.

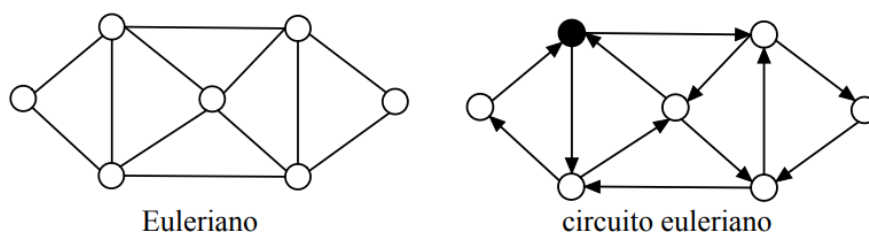
Um resultado fundamental estabelece que a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|A|.$$

Dessa propriedade conclui-se que todo grafo possui um número par de vértices de grau ímpar (JURKIEWICZ, 2009).

O estudo das pontes de Königsberg levou Euler à formulação de um resultado que caracteriza os grafos capazes de serem percorridos integralmente por um único trajeto. Um grafo é euleriano se admite um caminho fechado que percorre todas as arestas exatamente uma vez (Figura 5.3). Um grafo conexo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.

Figura 5.3 – Grafo euleriano



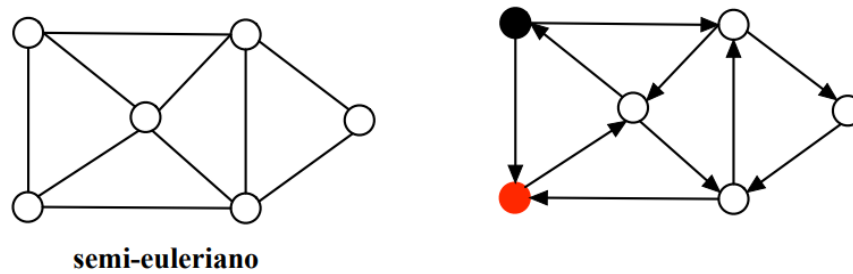
Fonte: Prestes (2016)

Além disso, um grafo conexo é semi-euleriano se possuir exatamente dois vértices de grau ímpar (Figura 5.4); nesse caso, o caminho inicia-se em um desses vértices e termina no outro (FREITAS; BORGES, 2015).

No grafo que representa o problema das pontes de Königsberg, todos os vértices têm grau ímpar; portanto, o grafo não é euleriano nem semi-euleriano, tornando o passeio desejado impossível.

Um grafo é dito planar quando pode ser desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem. As regiões delimitadas pelas arestas são chamadas de faces, incluindo a face exterior.

Figura 5.4 – Grafo semi-euleriano



Fonte: Prestes (2016)

Para um grafo planar conexo, vale a relação

$$V - A + F = 2,$$

conhecida como relação de Euler, que também se aplica aos poliedros convexos (SILVA, 2015). Essa relação evidencia a correspondência entre a estrutura combinatória dos poliedros e dos grafos planares.

A planicidade pode ser caracterizada pelo Teorema de Kuratowski (1930), que estabelece que um grafo é planar se, e somente se, não contém subgrafos homeomorfos a K_5 (grafo completo com cinco vértices) ou a $K_{3,3}$ (grafo bipartido completo com duas partições de três vértices).

Dois grafos são homeomorfos quando um pode ser obtido do outro por subdivisão ou fusão de arestas, isto é, pela inserção ou remoção de vértices intermediários sem alterar sua conectividade essencial (JURKIEWICZ, 2009).

Para cada grafo planar, é possível definir um grafo dual, no qual cada face do grafo original é representada por um vértice, e cada aresta que separa duas faces é representada por uma aresta que conecta os respectivos vértices do dual. Assim, a relação

$$V - A + F = 2$$

mantém-se válida tanto para o grafo quanto para seu dual.

A dualidade entre grafos e poliedros convexos reflete a relação entre as estruturas topológicas e combinatórias da geometria, evidenciando a profundidade do pensamento de Euler (SILVA, 2015).

Um dos problemas mais conhecidos associados aos grafos planares é o Problema das Quatro Cores, que busca determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir as regiões de um mapa de modo que regiões adjacentes não compartilhem a mesma cor (JURKIEWICZ, 2009).

Em linguagem de grafos, o problema equivale a colorir os vértices de um grafo planar de forma que vértices adjacentes recebam cores distintas. Em 1976, Appel e Haken demonstraram, com auxílio de computadores, que quatro cores são suficientes para qualquer grafo planar (JURKIEWICZ, 2009). Esse resultado é considerado um marco na história da matemática moderna, pois foi a primeira demonstração amplamente aceita a utilizar verificação computacional extensiva.

O estudo das pontes de Königsberg não apenas inaugurou a Teoria dos Grafos, como também uma nova forma de raciocínio matemático baseada em estruturas e relações. Euler mostrou que a essência de muitos problemas não está nas medidas, mas nas conexões entre os elementos que os compõem.

A relação de Euler $V - A + F = 2$, os grafos eulerianos e os resultados sobre planicidade revelam a profundidade de suas ideias. A partir do rio Pregel e de suas sete pontes, surgiu uma das áreas mais férteis e aplicáveis da matemática contemporânea, unindo topologia, combinatória e geometria sob uma única estrutura conceitual.

5.3 Computação gráfica

A computação gráfica utiliza modelos geométricos para representar objetos tridimensionais em ambientes digitais. Esses modelos são amplamente empregados em áreas como visualização científica, simulações geométricas e modelagem assistida por computador. Do ponto de vista conceitual, a representação de objetos tridimensionais baseia-se na descrição de suas superfícies por meio de estruturas discretas, compostas por elementos planos organizados de maneira finita, o que permite analisar propriedades globais independentemente de aspectos métricos (RICHESON, 2012).

Sob uma perspectiva matemática, tais modelos podem ser descritos como superfícies poliédricas representadas por complexos celulares bidimensionais. Nessa abordagem, a superfície de um objeto é modelada por uma malha formada por vértices, arestas e faces, cuja organização combinatória determina a estrutura global do objeto representado (LIMA, 1985).

A consistência topológica desses modelos está diretamente associada à manutenção da característica de Euler da superfície considerada. Em particular, modificações realizadas na malha poliédrica devem preservar o valor da expressão

$$V - A + F,$$

de modo a garantir que a superfície resultante permaneça topologicamente equivalente à superfície original, isto é, pertencente à mesma classe topológica.

Nesse contexto, introduzem-se os chamados operadores de Euler, que correspondem a operações elementares de modificação da malha poliédrica. Esses operadores alteram localmente os números de vértices, arestas e faces, mas são definidos de modo a preservar o valor da característica de Euler. Tais operadores são formalmente descritos no contexto da modelagem geométrica e constituem um conjunto de transformações combinatórias que mantêm inalterada a relação de Euler (MÄNTYLÄ, 1988).

Do ponto de vista matemático, os operadores de Euler podem ser interpretados como transformações combinatórias que preservam o tipo topológico da superfície representada. Assim, a aplicação sucessiva desses operadores permite a construção e a edição de modelos geométricos mantendo inalterada a característica de Euler da superfície, assegurando a integridade estrutural do objeto modelado (FREITAS, 2017).

Dessa forma, a relação de Euler fornece um critério matemático fundamental para a validação estrutural de superfícies utilizadas em computação gráfica, evidenciando o papel do Teorema de Euler como um invariante topológico relevante tanto no contexto teórico quanto em aplicações baseadas na representação discreta de superfícies.

5.4 Engenharia e arquitetura

Em aplicações da engenharia e da arquitetura, estruturas tridimensionais são frequentemente descritas por meio de superfícies discretas que modelam a organização global do objeto físico considerado. Essas superfícies podem ser interpretadas como superfícies poliédricas, nas quais vértices, arestas e faces representam, respectivamente, pontos de junção, elementos de conexão e superfícies construtivas. Tal representação permite analisar a estrutura a partir de sua organização combinatória, independentemente de aspectos métricos específicos.

Quando a superfície discreta associada à estrutura pode ser interpretada como a fronteira de um modelo poliédrico convexo, a coerência global da representação é garantida pela relação combinatória entre faces, arestas e vértices formalizada no Teorema de Euler. Nesse caso, a verificação da igualdade

$$F - A + V = 2$$

assegura que a superfície representa um sólido fechado do ponto de vista topológico (LIMA, 1985).

Em muitas situações práticas, contudo, a relação não é verificada explicitamente. Ainda assim, os procedimentos de modelagem adotados pressupõem os princípios que fundamentam o Teorema de Euler, como a finitude da decomposição, a incidência controlada entre elementos e a preservação da conectividade global da superfície. A manutenção dessas propriedades garante que modificações locais na malha não alterem a estrutura topológica do modelo, refletindo a aplicação implícita do raciocínio euleriano na validação estrutural (ARRUDA, 2005).

Em ambientes computacionais de projeto e simulação, refinamentos e simplificações da malha poliédrica são realizados de modo a preservar a coerência combinatória da superfície. Embora a relação de Euler não seja utilizada como ferramenta de cálculo direto, ela fundamenta os critérios que asseguram a integridade topológica do modelo, desempenhando papel essencial na confiabilidade das análises estruturais realizadas (BOMFIM, 2022).

5.5 Estruturas moleculares

Em determinados modelos matemáticos empregados na descrição de estruturas moleculares, a organização dos átomos e de suas ligações pode ser representada por estruturas discretas de caráter poliédrico. Nessa abordagem, vértices representam átomos, arestas correspondem a ligações químicas e faces estão associadas a ciclos que compõem a rede molecular, permitindo uma análise combinatória das propriedades globais da estrutura (CORRÊA; OUTROS, 2017).

Quando a rede molecular forma uma configuração fechada, pode-se associar a ela um modelo poliédrico convexo, caracterizado por F faces, A arestas e V vértices. Nesse contexto, o Teorema de Euler impõe a relação

$$F - A + V = 2,$$

a qual estabelece restrições globais às possíveis configurações combinatórias da estrutura, independentemente de deformações geométricas locais (CORRÊA; OUTROS, 2017).

Em aplicações mais gerais, a relação não é necessariamente utilizada de forma explícita. Ainda assim, a classificação e a análise dessas estruturas baseiam-se em princípios que decorrem diretamente do Teorema de Euler, como a invariância topológica da superfície subjacente e a preservação das relações de incidência entre seus elementos. Esses princípios restringem as configurações admissíveis da rede molecular e fundamentam a compreensão da organização global das moléculas, evidenciando a aplicação implícita do pensamento euleriano no estudo dessas estruturas.

5.6 Cartografia

Na cartografia, a representação de superfícies geográficas é frequentemente realizada por meio de modelos discretos que aproximam regiões contínuas do espaço. Em modelos vetoriais, áreas do território são descritas por faces, fronteiras por arestas e pontos de interseção por vértices, configurando uma decomposição discreta que pode ser interpretada como uma superfície poliédrica associada à superfície geográfica considerada (QUEIROZ; FERREIRA, 2006).

A validade dessas representações depende da preservação de relações topológicas fundamentais, como adjacência, incidência e conectividade, que garantem a coerência estrutural do modelo. Tais relações são expressas por meio da organização combinatória entre faces, arestas e vértices, refletindo princípios topológicos que fundamentam a formulação do Teorema de Euler (IBGE, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2019).

Em modelos globais, nos quais a superfície terrestre é representada como uma superfície fechada, a relação de Euler fornece um critério matemático para a verificação explícita da consistência topológica da decomposição. Em aplicações cartográficas usuais, entretanto, a relação não é avaliada diretamente. Ainda assim, os procedimentos de construção e validação de modelos cartográficos incorporam implicitamente os conceitos de invariância topológica e preservação da conectividade global, que constituem o núcleo conceitual do Teorema de Euler.

A presença de lacunas, sobreposições indevidas ou inconsistências na conectividade entre regiões adjacentes indica a violação desses princípios, comprometendo a validade do modelo cartográfico (BREUNIG; OUTROS, 2019). Dessa forma, o Teorema de Euler atua como fun-

damento teórico implícito para os critérios de consistência estrutural empregados na cartografia moderna.

6 CONCLUSÃO

A análise do Teorema de Euler para poliedros evidencia que relações simples podem expressar propriedades estruturais profundas. A igualdade que envolve vértices, arestas e faces não constitui apenas um resultado combinatório, mas reflete uma característica essencial das superfícies poliédricas convexas, relacionada à forma como seus elementos se organizam no espaço.

A distinção entre diferentes classes de poliedros mostrou-se fundamental para compreender o alcance e as limitações do teorema. Em particular, a convexidade surge como uma condição estrutural indispensável, cuja ausência altera de maneira significativa o comportamento das superfícies consideradas. Essa observação reforça a importância de hipóteses bem definidas na formulação de resultados geométricos.

As diferentes abordagens possíveis para a demonstração do teorema evidenciam sua riqueza conceitual. A possibilidade de obtê-lo por argumentos variados revela que o resultado ocupa uma posição de convergência entre a Geometria Espacial e ideias que se aproximam do pensamento topológico, mesmo quando formulado em um contexto elementar.

A recorrência da relação de Euler em diversos contextos matemáticos e aplicados confirma seu papel como princípio estruturante na análise de superfícies discretas. Independentemente da natureza do modelo considerado, a preservação dessa relação assegura a coerência global da estrutura, evidenciando a permanência e a atualidade do teorema no estudo das formas geométricas.

Ao longo deste trabalho, o Teorema de Euler foi analisado sob diferentes perspectivas, desde abordagens geométricas clássicas até interpretações de natureza estrutural. Embora historicamente formulado a partir da observação de poliedros concretos, o teorema revela-se, em essência, um resultado topológico, pois sua validade depende exclusivamente da estrutura da superfície considerada e não de propriedades métricas particulares (LIMA, 1985; FREITAS, 2017).

As diversas demonstrações apresentadas evidenciam que uma mesma relação matemática pode ser compreendida por meio de linguagens distintas — geométrica, combinatória e topológica — todas convergindo para a noção de invariante. Essa multiplicidade de abordagens reforça o papel do Teorema de Euler como um elo conceitual entre áreas fundamentais da Matemática, destacando sua relevância tanto no estudo teórico das superfícies quanto em contextos aplicados que envolvem estruturas discretas.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, A.; CASTANHO, R.; CASTRUCCI, B. **Matemática: destinado à primeira série dos cursos Clássicos e Científico**. São Paulo: Edições Brasil, 1944. Coleção Didática do Brasil, v. 10.
- ARANTES, L. P. G.; PEDROCHI, W. E.; MARTINS, R. Característica de euler-poincaré para poliedros n-tóricos. 2019.
- ARRUDA, M. C. d. **Operações booleanas com modelos de contorno (B-Rep)**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.
- BOMFIM, D. S. **Modelagem geométrica baseada em B-Rep e operadores de Euler**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- BREUNIG, M.; OUTROS. Representation and analysis of topology in geospatial data. **ISPRS International Journal of Geo-Information**, v. 8, n. 6, 2019.
- CORRÊA, T. H. B.; OUTROS. Estruturas de fulerenos: estabelecendo interfaces entre a química, a física e a matemática. **Química Nova**, v. 40, n. 10, 2017.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 10.
- DORIA, C. M. **Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019. 405 p. ISBN 9788583371540.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- FILHO, Z. A. Demonstração do teorema de euler para poliedros convexos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 3, p. 7–10, 1983.
- FREITAS, A.; BORGES, L. M. As pontes de königsberg. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Centro Paula Souza, v. 5, p. 44–48, dez. 2015.
- FREITAS, J. dos Santos de. O teorema de euler para poliedros e a topologia dos grafos no ensino básico. Universidade Federal do Maranhão, 2017.
- GÓMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. d. S. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- HOSCH, W. L. **Euler Characteristic**. 2017. Disponível em: <<https://www.britannica.com/science/Euler-characteristic>>.
- IBGE, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Introdução ao ambiente SIG QGIS**. Rio de Janeiro, 2019.
- JURKIEWICZ, S. **Grafos: uma introdução**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.
- LIMA, E. L. Ainda sobre o teorema de euler para poliedros convexos. **RPM – Revista do Professor de Matemática**, v. 5, 1984. Disponível em: <<https://rpm.org.br/cdrpm/5/6.htm>>.

- LIMA, E. L. A característica de euler-poincaré. **Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro**, n. 1, p. 47–62, 1985.
- LIMA, E. L. O teorema de euler sobre poliedros. **Matemática Universitária**, Sociedade Brasileira de Matemática, n. 5, 1985.
- LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.
- LIMA, R. F. de. **Topologia e Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$** . Rio de Janeiro: SBM, 2015. 498 p. ISBN 9788583370376.
- LIMA, R. P. d. **Um estudo do diagrama de Voronoi para dois pontos geradores específicos com um obstáculo circular**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional)) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2021.
- MÄNTYLÄ, M. **An Introduction to Solid Modeling**. Rockville: Computer Science Press, 1988.
- MARTINES, M. d. C. S. Algumas observações sobre a características de euler: uma introdução de elementos da história da matemática no ensino médio. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2009.
- MELO, H. de A. **Fórmula de Euler no Plano e para Poliedros**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2013.
- NETO, A. C. M. **Geometria**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2022.
- O'CONNER, J.; ROBERTSON, E. A history of topology. **MacTutor**, 1996.
- PRESTES, E. Teoria dos grafos. **Porto Alegre. 2011a. Disponível em:** < [http://www. inf. ufrgs. br/~ prestes/Courses/Graph% 20Theory/GrafosA6. pdf](http://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/GrafosA6.pdf)>. Acesso em 28 de março de 2026, v. 4, 2016.
- QUEIROZ, G. R.; FERREIRA, K. R. **Tutorial sobre bancos de dados geográficos**. São José dos Campos, 2006.
- RAMASSOTTI, L. C. **Benedito Castrucci e as suas publicações destinadas ao ensino em geral com ênfase em geometria**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2018.
- REIS, E. A. dos. **Os poliedros de Platão**. 35 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013.
- RICHESON, D. S. **Euler's gem: the polyedron formula and the birth of topology**. [S.l.]: Princeton University Press, 2012.
- SILVA, A. S. **O Teorema de Euler e Algumas Aplicações**. Campina Grande: Universidade Estadual da Paraíba, 2015.

SIQUEIRA, R. Monteiro de. História, tradição e pesquisa sob disputa: o caso dos poliedros na geometria. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 17, p. 53–63, 2020. Disponível em: <<https://mail.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/169>>.

SOUZA, A. F. M. d. **Um estudo sobre a classificação topológica das superfícies**. 86 p. Tese (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016.

VELASCO, B. L. N. et al. A característica de euler de superfície. 2023.

VIANA, M. **Euler, o matemático mais prolífico da história**. 2021. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2021/02/euler-o-matematico-mais-prolifico-da-historia.shtml>>.