



ARIANA CAMPOS FRÜHAUF

**USO DE MODELOS NÃO LINEARES NO ESTUDO DO
CRESCIMENTO DIAMÉTRICO DE CEDRO (*Cedrela fissilis*)**

LAVRAS – MG

2018

ARIANA CAMPOS FRÜHAUF

**USO DE MODELOS NÃO LINEARES NO ESTUDO DO CRESCIMENTO
DIAMÉTRICO DE CEDRO (*Cedrela fissilis*)**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Joel Augusto Muniz

Orientador

Prof. DSc. Ana Carolina Maioli Campos Barbosa

Coorientadora

LAVRAS – MG

2018

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Frühaufl, Ariana Campos

Uso de modelos não lineares no estudo do crescimento di-
amétrico de cedro (*Cedrela fissilis*) / Ariana Campos Frühaufl.
– Lavras : UFLA, 2018.

61 p. : il.

Dissertação(mestrado acadêmico)–Universidade Federal de
Lavras, 2018.

Orientador: Prof. DSc. Joel Augusto Muniz.

Bibliografia.

1. Regressão não linear. 2. Curva de crescimento. 3.
Modelagem do crescimento florestal. I. Muniz, Joel Augusto.
II. Barbosa, Ana Carolina Maioli Campos. III. Título.

ARIANA CAMPOS FRÜHAUF

**USO DE MODELOS NÃO LINEARES NO ESTUDO DO CRESCIMENTO
DIAMÉTRICO DE CEDRO (*Cedrela fissilis*)
USE OF NON-LINEAR MODELS TO STUDY CEDAR DIAMETRIC GROWTH
(*Cedrela fissilis*)**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 30 de Maio de 2018.

Prof. DSc. Tales Jesus Fernandes UFLA
Prof. DSc. Adriele Aparecida Pereira UNIFAL

Prof. DSc. Joel Augusto Muniz
Orientador

Prof. DSc. Ana Carolina Maioli Campos Barbosa
Co-Orientadora

**LAVRAS – MG
2018**

À Deus em primeiro lugar, pois sem Ele nada seria possível.
Ao meu amado esposo, Otávio José dos Santos Filho, pelo amor, apoio, incentivo e paciência
em cada passo dessa caminhada.

À minha linda filha, Júlia Frühauf Santos, por entender minha ausência e me apoiar.
Aos meus amigos e colegas que contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus, por mais uma vez conduzir a minha vida e estar ao meu lado na realização de mais um de meus vários sonhos.

Ao meu maravilhoso esposo, Otávio José dos Santos Filho, por sempre ser o meu maior apoiador e incentivador. Obrigada por tanto amor e por entender cada momento de ausência nessa caminhada.

À minha linda filha, Júlia Frühauf Santos, por sempre me ajudar com suas palavras carinhosas e abraços restauradores.

À minha irmã, Sheila Chris Frühauf, pelo constante incentivo.

Ao meu orientador, professor Joel Augusto Muniz, pelas orientações, conselhos, tantas palavras de incentivo e por sempre acreditar em minha capacidade, muitas vezes mais do que eu mesma, isso foi fundamental para realização deste sonho. Obrigada pela confiança depositada em mim a cada dia e por dividir um pouco da sua grande sabedoria comigo.

À minha coorientadora, professora Ana Carolina Maioli Campos Barbosa, por ter me acolhido de uma maneira tão carinhosa no Laboratório de Dendroecologia e ter me ensinado com tanta paciência e amor. Obrigada por ter me ajudado a acreditar mais em mim, suas orientações e conselhos com certeza foram fundamentais para realização deste trabalho.

À Daniela Granato de Souza e Gabriel de Assis Pereira, os quais me ajudaram a entender um pouco do "mundo" das Ciências Florestais me disponibilizando materias diversos e também doando um pouco do tempo tão precioso que eles possuem para esclarecimento de tantas dúvidas. Obrigada por tanto carinho e acolhimento.

À minha eterna professora, Selzi Fonseca Souza, por sempre me incentivar e aconselhar. Seus conselhos foram fundamentais para realização desse sonho. Obrigada por sempre acreditar em mim e por, em muitos momentos, a senhora ser mais que uma professora, mais que uma amiga, ser na verdade... uma mãe.

Ao Grupo de Estudos em Regressão Não Linear, pois sem vocês esta caminhada teria sido muito mais difícil. Em especial agradeço à Kelly Pereira de Lima por sempre me socorrer quando tudo parece sem solução, à Thais Destéfani Ribeiro e ao Felipe Augusto Fernandes por terem doado um pouco de seu tempo com a leitura deste trabalho, a qual rendeu contribuições extremamente relevantes para melhoria do mesmo, ao professor Tales Jesus Fernandes pelos conselhos e incentivo de sempre e à Jaqueline Gonçalves Fernandes e Thais Destéfani Ribeiro, as quais me ajudaram no começo desta caminhada com tanta paciência e carinho.

À Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Estatística, em especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária pelo conhecimento transmitido e contribuição para minha formação profissional.

Aos secretários do DES e do DEX, Nádia, Josi, Magali e Fernando, pela simpatia e prestatividade.

Aos meus colegas e amigos de pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária pela tão boa convivência e troca de saberes. Em especial, ao Jorge e à Fernanda, os quais sempre estiveram ao meu lado nos momentos bons e difíceis de cada disciplina cursada.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão da bolsa de estudos.

RESUMO

As florestas exercem um papel fundamental na manutenção da vida. Elas fornecem serviços ambientais essenciais, conservam a biodiversidade, amenizam as mudanças climáticas, entre outros. Porém, as florestas estão diminuindo e assim, muitas espécies arbóreas, principalmente de florestas nativas, como é o caso do cedro (*Cedrela fissilis*), estão entrando em extinção devido a sua intensa exploração. O cedro tem grande impacto econômico no Brasil devido a sua grande utilização em marcenarias, engenharia civil, entre outros. Sendo assim, faz-se necessário o estudo do seu crescimento como auxílio na obtenção de melhores planos de manejo para as florestas que o contém. Segundo Encinas, Silva e Pinto (2005), o crescimento das árvores em geral, pode ser caracterizado por uma curva sigmoide, a qual é bem ajustada por modelos não lineares. Foram utilizados os dados de DAP (diâmetro à altura do peito) médio acumulado ao longo do tempo, obtidos de amostras não destrutivas de 85 árvores em área de preservação ambiental num fragmento de florestas sazonalmente secas no extremo norte de Minas Gerais. Ajustou-se os modelos não lineares Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody e Richards através do software R de acesso livre, porém o método iterativo utilizado (Gauss-Newton) não apresentou convergência para o modelo Richards. Para o ajuste dos demais modelos foi considerada a estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem (AR1), sendo utilizado para estimação dos parâmetros o método dos Mínimos Quadrados Generalizados e para critério de seleção do modelo o desvio padrão residual (DPR), o Critério de Informação de Akaike Corrigido (AIC_C), o Critério de Informação Bayesiano (BIC) e o coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2). Todos os modelos apresentaram bons ajustes, porém o modelo Brody apresentou-se como o melhor para descrever o crescimento diamétrico de cedro (*Cedrela fissilis*) ao longo do tempo na região de estudo.

Palavras-chave: Curva de crescimento. Erros autocorrelacionados. Regressão não linear. Modelo Brody.

ABSTRACT

Forests play a key role in maintaining life. They provide essential environmental services, conserve biodiversity, alleviate climate change, among others. However, forests are declining and many tree species, mainly native forests such as cedar (*Cedrela fissilis*), are becoming extinct due to intense exploitation. Cedar has great economic impact in Brazil due to its great use in carpentry, civil engineering, among others. Therefore, it is necessary to study its growth as an aid to obtain better management plans for the forests that contain it. According to Encinas, Silva e Pinto (2005), most tree growth can be characterized by a sigmoid curve, which is well fit by nonlinear models. Mean accumulated DBH (diameter at breast height) collected over time were used in this study. These were collected from nondestructive samples of 85 trees in a part of seasonally dry forests within an area of environmental preservation in the north end of Minas Gerais. Logistic, Gompertz, von Bertalanffy, Brody and Richards non-linear models were fit using the free access R software. However, the iterative method used (Gauss-Newton) did not converge in the Richards model. The structure of first-order autoregressive errors (AR1) was considered for the adjustment of the other models. The Generalized Least Squares method was used for parameter estimation and the residual standard deviation, the corrected Akaike's Information Criterion (AIC_C), the Bayesian Information Criterion (BIC) and the Adjusted Coefficient of Determination (R^2_{adj}) were used as criteria for model selection. All models fit well, but the Brody model was the best to describe the cedar diametric growth (*Cedrela fissilis*) in the study region over time.

Keywords: Growth curve. Autocorrelated errors. Nonlinear regression. Brody model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Anéis de crescimento da árvore	14
Figura 2.2 – Variações dos anéis de crescimento da árvore: 1 - primeiro ano de crescimento, 2 - ano chuvoso (anéis mais largos), 3 - ano com estiagem (anéis mais estreitos), 4 - cicatriz de um incêndio.	15
Figura 2.3 – Amostra cilíndrica retirada de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) nativo com o uso do Trado de Pressler	16
Figura 2.4 – Ilustração do método de datação cruzada, partindo da direita (período recente) para a esquerda (passado). A) A parte superior mostra de a proveniência das amostras retiradas com trado de incremento; B) Análise visual dos anéis de crescimento; C) Medidas de larguras dos anéis representadas nos gráficos.	18
Figura 2.5 – Representação dos períodos de crescimento em fenômenos biológicos . . .	21
Figura 2.6 – Representação da curva sigmoidal do modelo Logístico	23
Figura 2.7 – Representação da curva sigmoidal do modelo Gompertz	24
Figura 2.8 – Representação da curva sigmoidal do modelo von Bertalanffy	25
Figura 2.9 – Representação da curva não sigmoidal do modelo Brody	26
Figura 2.10 – Curvas da família Richards variando o parâmetro δ	27
Figura 3.1 – Processo de coleta das amostras de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) com o Trado de Pressler. A: Inserção do Trado de Pressler na árvore; B: Retirada da amostra radial com o extrator do Trado de Incremento	38
Figura 3.2 – Anéis de crescimento de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) ampliados	38
Figura 3.3 – Amostra de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>) preparada para a medição com o LIN-TAB 6 Scientific	39
Figura 4.1 – Ajustes dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody com (AR1) aos dados do DAP médio acumulado (cm) de árvores de cedro (<i>Cedrela fissilis</i>)	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Distribuição de frequências por classe de idade utilizada nos procedimentos de ajuste dos modelos não lineares para descrição do crescimento diamétrico do cedro (<i>Cedrela fissilis</i>)	40
Tabela 4.1 – Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados	44
Tabela 4.2 – Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados com o acréscimo de parâmetro autorregressivo de primeira ordem (AR1)	45
Tabela 4.3 – Estimativas para os parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem (AR1) com seus respectivos erros-padrão	45
Tabela 4.4 – Avaliadores da qualidade de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem (AR1)	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	REFERENCIAL TEÓRICO	11
2.1	Cedro	11
2.2	Idade das árvores	13
2.3	Determinação da idade	13
2.4	Dendrocronologia	16
2.5	Modelos de regressão	19
2.6	Modelos não lineares	20
2.7	Estimação dos parâmetros em modelos não lineares	28
2.8	Métodos iterativos	32
2.9	Análise de resíduos	32
2.10	CrITÉrios para seleÇão de modelos	35
3	MATERIAL E MÉTODOS	37
3.1	Obtenção dos dados	37
3.2	Modelagem	40
3.2.1	Modelos a serem ajustados	40
3.2.2	Método iterativo	40
3.2.3	Análise de resíduo	41
3.2.4	Intervalo de confiança para os parâmetros	42
3.2.5	Compar�a�o e sele�o de modelos	42
3.2.6	Recursos computacionais	43
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	44
5	CONCLUSÕES	49
6	TRABALHOS FUTUROS	50
	REFERÊNCIAS	51
	APENDICE A – Comando R	56

1 INTRODUÇÃO

As florestas exercem um papel fundamental em nosso planeta. Segundo o último relatório apresentado pela **FAO (2015)** (Food and Agriculture Organization of the United Nation) em setembro de 2015 sobre a Avaliação Global dos Recursos Florestais (Global Forest Resources Assessment - FRA 2015), foi destacada a importância das florestas para as pessoas, o meio ambiente e também para a economia mundial.

Elas proporcionam serviços ambientais essenciais, tais como ar e água limpos, protegem o solo de erosões, conservam a biodiversidade, pois abrigam mais da metade das espécies terrestres de animais, plantas e insetos e amenizam as mudanças climáticas, pois o crescimento das florestas e das árvores absorve o dióxido de carbono, o qual é o principal gás causador do efeito estufa. O setor florestal contribui com aproximadamente US\$ 600 bilhões anualmente para PIB global e oferece emprego para mais de 50 milhões de pessoas (**FAO, 2015**).

Porém, segundo o mesmo relatório, para ceder lugar para agricultura, pecuária e outros fins, as florestas do mundo estão diminuindo à medida que a população está aumentando. Foram perdidos, desde 1990, cerca de 129 milhões de hectares, o que equivale a aproximadamente uma área do tamanho da África do Sul.

No Brasil essa perda foi maior ainda, pois segundo o **IBGE (2017)**, enquanto no mundo houve uma perda de 1% de cobertura florestal em 25 anos (1990-2015), o Brasil perdeu cerca de 9,5% de suas florestas em 14 anos (2000-2014). Com isso, observa-se a importância de práticas sustentáveis de manejo florestal para que os recursos das florestas se perpetuem.

Algo preocupante é a preservação das florestas nativas, pois além de contribuírem para a conservação dos genótipos e da manutenção da composição das espécies de árvores nativas, ainda fornecem habitats vitais para espécies animais ameaçadas de extinção (**FAO, 2015**). Porém, como as pesquisas florestais foram fortemente voltadas para as florestas plantadas, poucos estudos foram desenvolvidos para as florestas naturais, as quais apresentam altos índices de desmatamento ilegal e consequentemente, várias espécies arbóreas correndo risco de extinção, sendo que dentre essas espécies está o cedro (*Cedrela fissilis*), fato comprovado pela sua inclusão na lista vermelha de espécies da flora brasileira ameaçada de extinção (**CNCFLORA, 2017**; **STEPKA et al., 2014**).

O cedro está entre as madeiras de maior interesse econômico no Brasil (**SANTOS; TAKAKI, 2005**), isso se deve a alta qualidade de sua madeira e coloração semelhante ao mogno. A madeira de cedro possui vasta utilização na construção civil, naval e aeronáutica, marcena-

ria, movelaria, confecção de instrumentos musicais e religiosos, esculturas e até na medicina popular no combate à febre, feridas e úlceras. O cedro ainda é usado para recuperação de áreas degradadas devido ao seu crescimento relativamente rápido (MOTTA et al., 2014; STEPKA, 2012).

Devido à importância da sua preservação, faz-se necessário um estudo mais aprofundado em florestas nativas para obtenção de dados sobre a sua dinâmica. Sabe-se que na mensuração florestal a idade de uma árvore é uma das variáveis principais de estudo, pois é por meio dela que o técnico florestal pode estudar o crescimento presente e futuro de uma floresta podendo assim traçar melhores planos de manejo, entender as perturbações passadas para assim preveni-las no futuro desenvolvendo estratégias para preservação da mesma.

Porém, a idade de florestas nativas é uma variável muito difícil de ser mensurada, pois essas florestas geralmente são formadas por árvores multiâneas, portanto, essas idades precisam ser encontradas através de alguma metodologia. O método mais difundido para determinação da idade de uma árvore é o que utiliza a análise e contagem dos anéis de crescimento, chamado de dendrocronologia. Por meio de amostragens não destrutivas, é possível aplicar a dendrocronologia em formações naturais sem prejudicar a conservação das florestas nativas (ENCINAS; SILVA; PINTO, 2005).

O uso da dendrocronologia foi desenvolvido e é amplamente empregado em regiões de clima temperado. Durante muito tempo era quase um consenso entre os pesquisadores que árvores de regiões tropicais não formavam anéis de crescimento anuais devido ao fato da temperatura ser praticamente constante ao longo do ano. Atualmente com os avanços das pesquisas em dendrocronologia nas florestas tropicais, os resultados obtidos foram suficientes para convencer a comunidade científica acerca da presença desses anéis de crescimento em baixas latitudes (TOMAZELLO FILHO; BOTOSSO; LISI, 1999).

Portanto, este trabalho teve como objetivo modelar o crescimento diamétrico do cedro em função da idade, a partir das medidas de seus anéis de crescimento anuais com amostras não destrutivas retiradas de florestas nativas localizadas no extremo norte de Minas Gerais. Essa modelagem foi realizada utilizando-se modelos de regressão não linear, os quais apresentam curvas sigmoidais que caracterizam a taxa de crescimento de árvores. Este trabalho será de grande valia para o desenvolvimento de pesquisas na área de ciências florestais devido à carência de modelos estatísticos que descrevem o crescimento de espécies arbóreas nativas provenientes de florestas naturais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Cedro

Pelo Sistema de Classificação de Cronquist, desenvolvido por Arthur Cronquist em 1981 (BARBOSA, 2012) para classificação de angiospermas, a taxonomia do cedro segundo Carvalho (2003) obedece a seguinte hierarquia:

Divisão: Magnoliophyta (Angiospermae)

Classe: Magnoliopsida (Dicotyledonae)

Família: Meliaceae

Espécie: *Cedrela fissilis* Vellozo

De acordo com o autor, *Cedrela* vem de *Cedrus*, pelo fato dessa árvore emanar um aroma semelhante ao legítimo cedro. Do grego *kedros* (cedro) o qual procede de *keen*, *kaiein* (queimar, perfumar, purificar), devido ao lenho do cedro ser usado para perfumar ambientes; *fissilis* vem do latim *fissilis*, que pode ser fendido, fácil de rachar. O cedro ainda é conhecido por vários nomes diferentes: acaiacá, acaju, acajatinga, capiúva, cedro-fofo, cedro-rosado, cedro-do-rio, cedrinho, cedro-amarelo, cedro-rosa, cedro-verdadeiro, cedro-vermelho, cedro-batata, entre outros.

É uma árvore que apresenta copa frondosa com folhagem densa, verde escura em cima e mais clara por baixo (SILVA, 2013). De acordo com Poggiani (1980) o cedro é caducifólio, que perde as folhas em alguma época do ano, geralmente na época de seca e, em algumas regiões, antes da queda elas adquirem uma coloração ferrugínea. As folhas têm cerca de 40 cm de comprimento e quando retiradas do galho, exalam um cheiro bastante desagradável, semelhante ao de cebola (CARVALHO, 2003; GRINGS; BRACK, 2011; SILVA, 2013).

O cedro se desenvolve melhor em solos profundos e úmidos, contanto que sejam bem drenados e com textura argilosa e areno-argilosa. Nesse tipo de solo o seu crescimento em geral é rápido, então devido a esse e outros motivos, essa espécie é utilizada para recuperação de matas (SILVA, 2013). Porém, o seu crescimento como o de qualquer outra árvore, é influenciado por alguns fatores como: luz, concentração de CO₂, temperatura, água e nutrientes. Estudos realizados por Dünisch (2005) sobre o crescimento de cedro (*Cedrela fissilis*) em clima tropical e subtropical, mostraram uma correlação positiva entre a taxa de incremento anual de *Cedrela* e a precipitação local. Segundo Mattos (2007) outro fator importante que afeta o crescimento das árvores é a competição florestal, o que pode ser definida como a falta de espaço ocasionada por

uma alta densidade de plantas, o que influencia diretamente no desenvolvimento destas. Com isso, segundo o autor, é comum observar indivíduos da mesma espécie que apresentam curvas de crescimento distintas.

Conforme destacado por Dünisch (2005) e Mattos (2007) vários fatores afetam o crescimento das árvores tanto na altura como no DAP (diâmetro à altura do peito). No caso do cedro, para CARVALHO (2003) ele é uma árvore retilínea e de grande porte, com altura variando de 10 a 25 m e DAP entre 40 e 80 cm, podendo atingir até 40 m de altura e 300 cm de DAP na fase adulta. Silva (2013) afirma que a árvore de cedro atinge 35 m de altura e 90 cm de DAP, enquanto que Coradin, Siminski e Reis (2011) relatam árvores de cedro com alturas entre 20 e 25 m e DAP entre 60 e 150 cm.

O cedro está entre as mais importantes árvores brasileiras, tanto que existem cidades no Brasil que levam o seu nome, como Cedro do Abaeté em Minas Gerais, Cedro nos estados do Ceará, Pernambuco e Bahia, Cedro de São João em Sergipe e São José do Cedro em Santa Catarina. Em Minas Gerais, Antônio Francisco Lisboa, mais conhecido como Aleijadinho, utilizou a madeira do cedro para produzir muitas das suas peças de arte sacra (CARVALHO, 2003; SILVA, 2013).

Ele é muito utilizado na construção civil, naval e aeronáutica e em marcenarias o que o torna uma das espécies nativas de maior impacto econômico no Brasil (XAVIER; SANTOS; OLIVEIRA, 2003). Antigamente era uma árvore encontrada em grande quantidade por quase todo o Brasil, mas a intensa exploração de sua madeira, que se assemelha muito ao mogno por sua coloração, quase o levou à extinção, sendo hoje uma espécie rara em regiões antropizadas. Fato comprovado pela inclusão da espécie *Cedrela fissilis* na "Lista Vermelha" de espécies da flora brasileira ameaçadas de extinção, sendo classificada como "Vulnerável" por enfrentar risco de extinção elevado na natureza (CNCFLORA, 2017) e sua inclusão na "Lista Vermelha" da União Internacional para a Conservação da Natureza (IUCN) sendo classificada como "Em Risco de Extinção" desde 1998 (IUCN, 2017).

Contudo, o maior problema do plantio do cedro é que ainda não se encontrou uma solução é o ataque da broca-do-cedro (*Hypsipyla grandella*), que prejudica o crescimento retilíneo do tronco e, em casos extremos, leva à morte da planta (CARVALHO, 2003; PEREIRA et al., 2016b). Assim, o cedro é obtido de florestas nativas o que causa grande pressão sobre as populações remanescentes, sendo que existem apenas algumas árvores centenárias na Floresta Amazônica, e em alguns parques nacionais e reservas (SILVA, 2013). Logo, faz-se necessário

um estudo mais aprofundado sobre o cedro e a dinâmica das florestas nativas que o contém, pois segundo Figueiredo Filho et al. (2017) apesar do Brasil ser mundialmente conhecido pela sua ampla diversidade de espécies florestais é extremamente carente de estudos e informações sobre árvores em condições naturais.

2.2 Idade das árvores

A idade de qualquer organismo vivo é o período de vida que ele tem desde sua origem até um ponto determinado no tempo (ENCINAS; SILVA; PINTO, 2005). Segundo os autores, na área florestal, a idade da árvore é útil especialmente na estimativa da produção florestal. Ela é utilizada como ferramenta para práticas silviculturais, para o estudo do crescimento presente e futuro da floresta e nas tomadas de decisões dos planos de manejo.

Em geral, o técnico florestal utiliza a idade das árvores para avaliar o incremento em termos de diâmetro, área basal, volume ou altura de uma dada espécie em um determinado local. A idade do povoamento também é importante quando se deseja construir curvas de índice de sítio, comparar as capacidades produtivas de diferentes locais e no planejamento da atividade madeireira sustentável ao longo do tempo (STEPKA et al., 2014).

Os autores afirmam ainda que conhecer ou determinar a idade das árvores nos permite ter uma base sólida na interpretação da ciência florestal, sendo extremamente importante para estabelecer corretos ciclos de corte, desbaste e outras atividades silviculturais, fazendo assim um uso sustentável dos ecossistemas.

Porém, florestas nativas são geralmente maciços multiâneos, ou seja, apresentam árvores com diferentes idades (ENCINAS; SILVA; PINTO, 2005). Sendo assim, sua idade é uma variável muito difícil de ser mensurada, precisando-se usar metodologias para realizar essas estimativas (STEPKA et al., 2014).

2.3 Determinação da idade

Para determinar a idade de uma árvore podem-se usar métodos variados. Para Encinas, Silva e Pinto (2005) um dos métodos de determinação da idade de uma árvore é através de simples análise visual, mas esse método exige muita experiência e prática do mensurador, além da sua familiaridade com a espécie e com o ambiente onde a árvore está se desenvolvendo. Todavia, em povoamento multiâneo existem árvores dominantes e dominadas, sendo assim,

árvores da mesma espécie e com a mesma idade poderão apresentar diferenças marcantes, logo pode-se perceber que esse método não é muito fidedigno.

Outro método para determinar a idade de uma árvore é através da contagem de seus verticilos. Em algumas essências florestais como os Pinheiros, eles aparecem nítidos ao longo da vida de cada indivíduo e como são formados anualmente, o número de verticilos ao longo do tronco pode corresponder à idade da árvore. Porém esse método apresenta alguns inconvenientes como a tendência que os verticilos inferiores tem de caírem no decorrer do tempo, a formação de mais um ou dois verticilos por ano além do verticilo anual e a formação deste em período superior a um ano, podendo assim dificultar a determinação da respectiva idade (ENCINAS; SILVA; PINTO, 2005; STEPKA et al., 2014).

Segundo os autores, o método mais difundido para a determinação da idade das árvores é o que utiliza a análise e contagem dos anéis de crescimento conhecido como dendrocronologia. Segundo Schweingruber (1993) a atividade cambial da árvore é fortemente influenciada pela sazonalidade do clima ao longo dos anos, o que formam estruturas que se repetem sazonalmente na madeira. Estas estruturas são os chamados anéis de crescimento (Figura 2.1), os quais são um fragmento de madeira formado em um ano de vida da árvore, o qual é demarcado pela presença de um sinal na estrutura tornando possível a visualização de um período de crescimento. Essa sucessão de anéis contém o registro sobre as condições de crescimento às quais a árvore foi submetida ao longo de toda a sua vida e pode ser estudada por uma área da ciência chamada de dendrocronologia (FERREIRA, 2012).

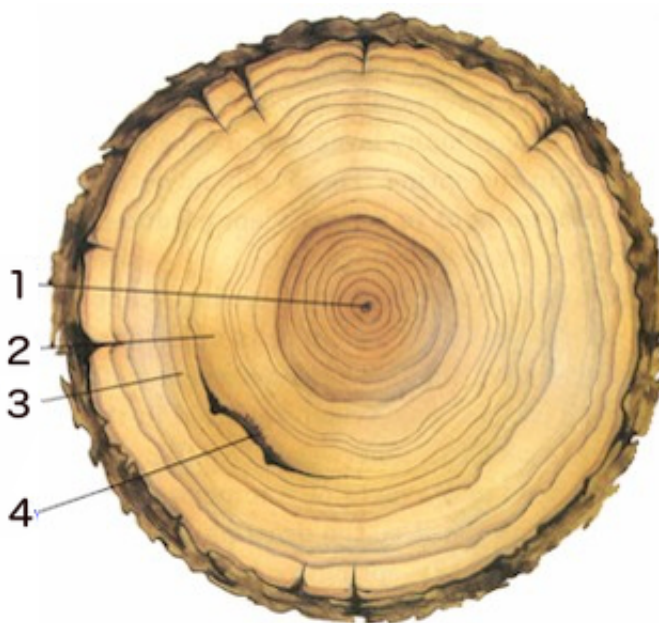
Figura 2.1 – Anéis de crescimento da árvore



Fonte: Adaptado do site CadNav.com (CADNAV, 2018)

Como os anéis de crescimento são formados anualmente durante todo o período de vida da árvore, é possível determinar a sua idade através da contagem desses anéis. Porém, o técnico florestal deve estar sempre atento nessa contagem, pois no xilema podem ocorrer falsos anéis ou anéis incompletos, os quais podem ser formados pela ocorrência de inundação, seca, geada, fogo, etc. o que interfere na atividade cambial das árvores tornando assim a determinação de sua idade e da periodicidade de seu crescimento algo bastante complexo (BOTOSSO; VETTER; TOMAZELLO FILHO, 2000). Na Figura 2.2 pode-se observar uma ilustração sobre as variações nos anéis de crescimento devido aos fatores ambientais como chuvas ou secas, o que interfere na largura dos anéis, e cicatrizes derivadas de incêndios.

Figura 2.2 – Variações dos anéis de crescimento da árvore: 1 - primeiro ano de crescimento, 2 - ano chuvoso (anéis mais largos), 3 - ano com estiagem (anéis mais estreitos), 4 - cicatriz de um incêndio.



Fonte:(NUPECC, 2018)

A contagem dos anéis de crescimento pode ser feita em árvores abatidas, observando-se os discos ou cortes transversais da tora, ou em árvores vivas (Figura 2.3), com a coleta de amostras obtidas através do Trado de Pressler. O instrumento sueco, usado para extrair amostras cilíndricas radiais do lenho (baquetas), apresentando uma vantagem para o estudo de florestas nativas por não necessitar da derrubada da árvore. Em alguns casos, para facilitar a contagem dos anéis, são utilizados meios físicos, óticos e químicos para aumentar a distinção entre as camadas (ENCINAS; SILVA; PINTO, 2005).

Figura 2.3 – Amostra cilíndrica retirada de cedro (*Cedrela fissilis*) nativo com o uso do Trado de Pressler



Fonte: Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais - UFLA/MG
Gabriel de Assis Pereira (Fotógrafo)

Durante muitos anos, estudos com anéis de crescimento ficaram restritos a locais com clima temperado, pois os pesquisadores acreditavam que as árvores das regiões tropicais e subtropicais não apresentavam sazonalidade da atividade cambial, devido às condições climáticas serem consideradas praticamente constantes durante todo o ano e, portanto, não formariam anéis de crescimento anuais. Contudo, Brandis em 1926 na Índia, trouxe os primeiros estudos que contradiziam essa teoria e mostravam a existência de anéis de crescimento em espécies tropicais, os quais foram confirmados devido ao avanço das pesquisas em dendrocronologia e totalmente aceitos na atualidade onde se verificou que o fator limitante da formação de anéis nas regiões tropicais é a sazonalidade na distribuição das chuvas, enquanto que para regiões temperadas o crescimento é limitado pela temperatura (STEPKA et al., 2014; TOMAZELLO FILHO; BOTOSSO; LISI, 1999).

2.4 Dendrocronologia

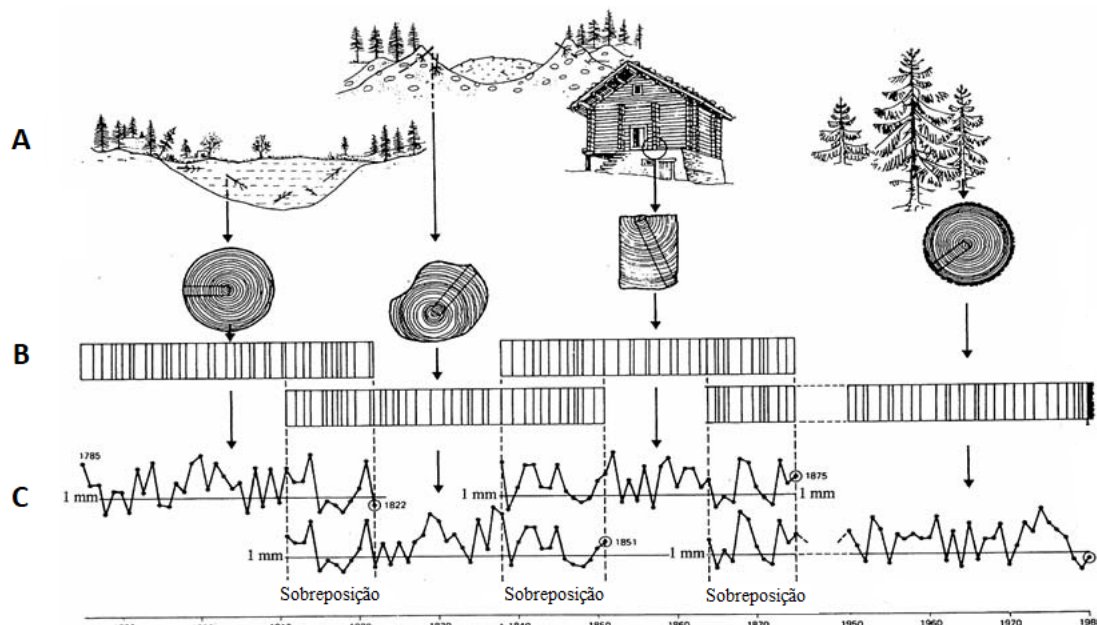
O prefixo *dendro* vem do grego *dendron* que significa árvore e a palavra *cronologia* (*kronos* - tempo e *logos* - conhecimento), refere-se à ciência que lida com o tempo e a atribuição de datas para alguns eventos. Sendo assim, pode-se definir dendrocronologia como sendo a ciência que possibilita a datação dos anéis de crescimento das árvores aplicando as informações registradas em sua estrutura para estudos ambientais e históricos (FRITTS, 1976; GONÇALVES, 2007; TOMAZELLO FILHO; BOTOSSO; LISI, 1999).

A existência de anéis de crescimento tiveram suas primeiras observações feitas na Grécia antiga. No século XVI Leonardo da Vinci observou em árvores de Pinus, na Itália, a relação entre os anéis de crescimento e o clima, onde ele constatou que os anéis de crescimento mostravam o número de anos das árvores e a sua espessura estava relacionada com a presença ou não de estiagem naqueles anos. No entanto, considera-se que a dendrocronologia teve seu início como ciência em meados do século XIX na Alemanha, com os trabalhos de Theodor e Robert Hartig e nos EUA, a partir do início do século XX, com Andrew E. Douglas, considerado o pai da dendrocronologia, ao publicar seu livro *Climatic cycles and tree growth* (TOMAZELLO FILHO; BOTOSSO; LISI, 1999).

A dendrocronologia é utilizada como ferramenta em várias áreas como na ciência forense contribuindo com a solução de crimes (BALOUE, 2005); na ecologia com a investigação de históricos de incêndios (LAFON, 2005); na arqueologia, reconstruindo a história de vários povos através da datação, entre outras.

Em 1929, Andrew E. Douglas na Universidade do Arizona, conseguiu determinar a idade exata de amostras de madeira extraídas de uma expedição arqueológica utilizando sobreposição numa curva de calibração o que é conhecido como datação cruzada, método que consiste na sincronização entre séries temporais de largura de anéis de diferentes árvores da mesma zona geográfica conforme ilustrado na Figura 2.4 . Muitas vezes essa técnica não permite apenas a datação da amostra arqueológica, mas também o aumento da curva de calibração para aquela determinada região com um registro das espessuras dos anéis desde o momento presente até séculos ou milênios atrás (GONÇALVES, 2007).

Figura 2.4 – Ilustração do método de datação cruzada, partindo da direita (período recente) para a esquerda (passado). A) A parte superior mostra de a proveniência das amostras retiradas com trado de incremento; B) Análise visual dos anéis de crescimento; C) Medidas de larguras dos anéis representadas nos gráficos.



Fonte:(PAREDES et al., 2009)

Em 1946 na Universidade de Chicago, o professor Willard Libby descobriu a datação por radiocarbono, a qual é amplamente utilizada nos dias atuais, principalmente na arqueologia. Em 1960 ele foi premiado com o Nobel da Química pela sua descoberta. Porém, no final da década de 50, vários cientistas observaram que havia uma divergência entre as idades aferidas em árvores através do método de Libby com as datadas pela dendrocronologia. Em 1958, o holandês Hessel De Vries percebeu que isso se devia a variação na concentração global de radiocarbono na atmosfera terrestre ao longo do tempo, o que foi resolvido através da criação, na década de 60, da curva calibrada de radiocarbono, a qual foi feita com o auxílio da dendrocronologia e é usada até hoje com as variações adequadas (CAMACHO, 2012; GONÇALVES, 2007).

Os estudos dendrocronológicos têm avançado ao longo do tempo e a estatística tem sido uma das suas principais ferramentas, principalmente, através da modelagem de curvas de crescimento, como pode ser visto em estudos realizados por Figueiredo Filho et al. (2017), em que foram utilizadas as espécies nativas de araucária (*Araucaria angustifolia*) e de cedro (*Cedrela fissilis* Vell.), por Cusatis et al. (2013), os quais utilizaram a espécie nativa de cedro (*Cedrela fissilis* Vell.) e por Mattos (2007) em que foram utilizadas as espécies *Cabralea canjerana* (Vell.)

Mart., *Cedrela fissilis Vell.* e *Cordia trichotoma (Vell.)*. Esses e outros estudos que utilizam a modelagem de curvas de crescimento têm como base uma área da estatística que se denomina *Regressão*.

2.5 Modelos de regressão

Galton deu origem à teoria da *Regressão* no século XIX. Em um de seus estudos ele procurava entender a relação entre as alturas de pais e filhos, ou seja, ele queria saber como a altura do pai influenciava a do filho. No decorrer de sua pesquisa, ele notou que se o pai fosse muito alto ou muito baixo, a altura do filho sempre tendia à média da população como um todo. Daí surgiu o nome *regressão*, pois ele percebeu que existe uma tendência dos dados se deslocarem ou *regredirem* à média da população (DEMÉTRIO; ZOCCHI, 2006).

A regressão é amplamente utilizada em várias áreas do conhecimento como agricultura, economia, engenharia, pesquisas nas áreas da saúde, entre outras. Ela permite que se conheçam os efeitos que algumas variáveis exercem, ou parecem exercer, sobre outras e assim relacioná-las através de uma expressão matemática, a qual pode ser útil para estimar o valor de uma das variáveis quando conhecemos os valores das outras sob determinadas condições (HOFFMANN, 2015).

Assim, a análise de regressão se baseia na procura de uma relação entre as variáveis X e Y, ou seja, uma função de X que explique Y, a qual pode ser representada genericamente por

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i),$$

em que, Y representa a variável dependente ou resposta e os X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) representam as variáveis independentes ou regressoras. Como exemplo pode-se citar a relação entre a produção (Y) obtida numa cultura e a quantidade de nitrogênio (X_1), fósforo (X_2) e potássio (X_3) utilizada na adubação (DEMÉTRIO; ZOCCHI, 2006; HOFFMANN, 2015).

Os autores afirmam que em Estatística, diferentemente da Matemática, geralmente essa relação não é perfeita, pois na prática além de existirem erros de mensuração da variável dependente, os quais afetam os valores das variáveis regressoras, ainda existem inúmeros fatores que afetam a variável resposta e não são considerados no modelo por vários motivos, como impossibilidade de mensuração, entre outros.

Com isso, admitindo que o erro seja aditivo, o modelo estatístico pode ser representado por

$$Y_i = f(X_i; \theta) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

em que, Y_i representa os valores observados ou variáveis dependentes, X_i as variáveis independentes; θ é o conjunto de parâmetros do modelo e $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ os erros aleatórios atribuídos ao modelo, os quais devem ser reduzidos ao máximo possível através do processo de estimação.

Segundo Draper e Smith (1998) os modelos de regressão podem ser classificados como:

- **modelos lineares:** são aqueles lineares em seus parâmetros, ou seja, a derivada parcial em relação a qualquer parâmetro não depende de nenhum dos parâmetros do modelo como se pode observar nos exemplos abaixo:

- $f(X, \alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{df}{d\alpha} = 1$;
- $f(X, \alpha, \beta) = \alpha + \beta X \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial \beta} = X$;
- $f(X, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial \beta} = X$ e $\frac{\partial f}{\partial \gamma} = X^2$.

- **modelos não lineares:** são aqueles não lineares em seus parâmetros, ou seja, pelo menos uma das derivadas parciais em relação a qualquer parâmetro depende de algum parâmetro do modelo e não existe transformação capaz de torná-los lineares, como se pode observar nos exemplos que se seguem:

- $f(X, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta e^{\gamma X} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial \beta} = e^{\gamma X}$ e $\frac{\partial f}{\partial \gamma} = \beta X e^{\gamma X}$;
- $f(X, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \sin(\beta X + \gamma) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sin(\beta X + \gamma)$, $\frac{\partial f}{\partial \beta} = \alpha X \cos(\beta X + \gamma)$ e $\frac{\partial f}{\partial \gamma} = \alpha \cos(\beta X + \gamma)$.

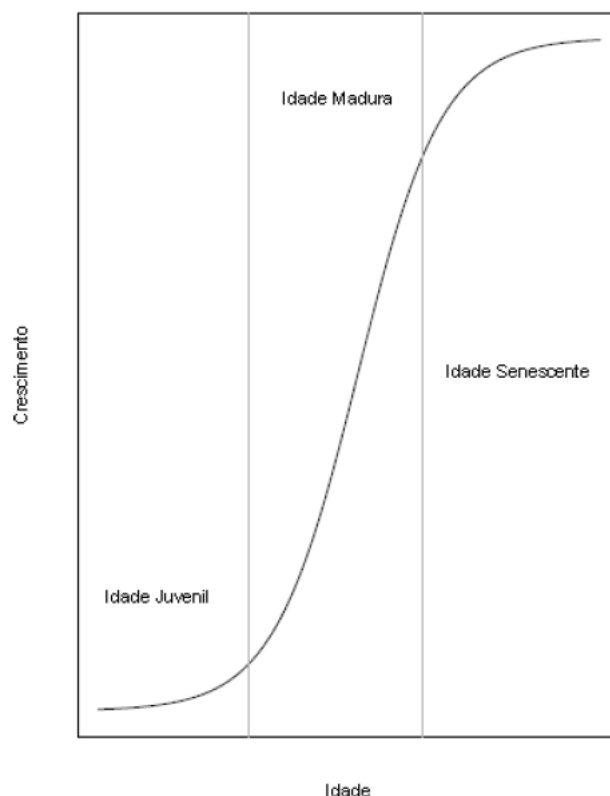
- **modelos linearizáveis:** são modelos não lineares em sua forma inicial, mas podem se tornar lineares através de uma transformação apropriada em sua variável dependente e/ou independente; como exemplo tem-se a função $f(X, \alpha, \beta) = e^{(\alpha + \beta X)}$, a qual pode ser escrita como $Y = e^{(\alpha + \beta X)}$ e através de uma transformação logarítmica se transforma no modelo linear $\ln Y = \alpha + \beta X$.

2.6 Modelos não lineares

Muitos fenômenos podem ser bem ajustados por modelos lineares, mas outros, principalmente os fenômenos biológicos obtêm os melhores ajustes por meio da regressão não linear.

Isso se deve ao fato do crescimento de um animal ou de uma planta ser geralmente mais rápido em sua fase inicial, diminuindo sua velocidade ao longo do tempo e tendendo a uma estabilidade na fase adulta, o que pode ser descrito através de curvas de crescimento em formato de "S", conhecidas como curvas sigmóides ou sigmoidais como a representada na Figura 2.5 (ENCINAS; SILVA; PINTO, 2005; MISCHAN; PINHO, 2014).

Figura 2.5 – Representação dos períodos de crescimento em fenômenos biológicos



Fonte: (VELOSO, 2013)

Sendo assim, esse tipo de modelo se torna extremamente importante para estudos florestais, pois segundo Rawlings, Pantula e Dickey (1998), os modelos não lineares além de serem mais realistas, o que se deve ao fato dos parâmetros apresentarem uma interpretação prática (FERNANDES et al., 2015), ainda tendem a serem mais parcimoniosos que os lineares.

Porém, segundo Veloso (2013), apesar da grande importância desses modelos para estudos biológicos eles são pouco utilizados na área florestal devido, principalmente, à maior facilidade de ajuste dos modelos lineares. Contudo, os modelos não lineares quando ajustados são, em geral, utilizados com algum tipo de transformação em suas variáveis, as quais, segundo Ratkowsky (1983), devem ser utilizadas como último recurso, pois quando as variáveis são transformadas os coeficientes perdem as interpretações práticas que possuíam originalmente,

além de apresentarem dificuldades em se especificar adequadamente os erros associados ao modelo.

A forma clássica de um modelo de regressão não linear é

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

em que, $\mathbf{Y}$ é o vetor com a variável resposta (variável dependente); $\mathbf{X}$ é o vetor de uma ou mais variáveis independentes; $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros; $f(\cdot)$ é a função (ou relação) matemática que acredita-se existir entre as variáveis e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de erros associados ao modelo.

Os modelos não lineares mais utilizados em estudos de curvas de crescimento terão suas características apresentadas a seguir, os quais segundo [Fernandes et al. \(2015\)](#) são: Logístico, Gompertz, von Bertalanffy, Brody e Richards.

Modelo Logístico

Foi inicialmente proposto por Verhulst em 1838 para descrever o crescimento de populações humanas ([BACAËR, 2011](#)).

Segundo [Fernandes et al. \(2015\)](#) muitos autores têm usado diferentes parametrizações para os modelos não lineares que descrevem curvas de crescimento, mas a que apresentou melhor desempenho para o modelo Logístico devido, principalmente, à interpretação prática de todos os parâmetros foi

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{k(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i, \quad (2.2)$$

em que, $i = 1, 2, \dots, n$; Y_i é a i -ésima observação da variável dependente, x_i é a i -ésima observação da variável independente; α é o valor assintótico, ou seja, o valor esperado para o crescimento máximo do objeto em estudo, quando $x_i \rightarrow \infty$; β é a abscissa do ponto de inflexão, ou seja, a partir dele o crescimento é desacelerado; k é um índice de maturidade ou precocidade, está associado ao crescimento, quanto maior for seu valor, menos tempo será necessário para o objeto em estudo atingir o valor assintótico (α); ε_i é o erro aleatório associado à i -ésima observação o qual pressupõe-se que seja independente e identicamente distribuído seguindo uma distribuição normal de média zero e variância constante, ou seja, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ([FERNANDES et al., 2014](#); [FERNANDES et al., 2015](#); [FREITAS, 2005](#); [MUNIZ; NASCIMENTO; FERNANDES, 2017](#)).

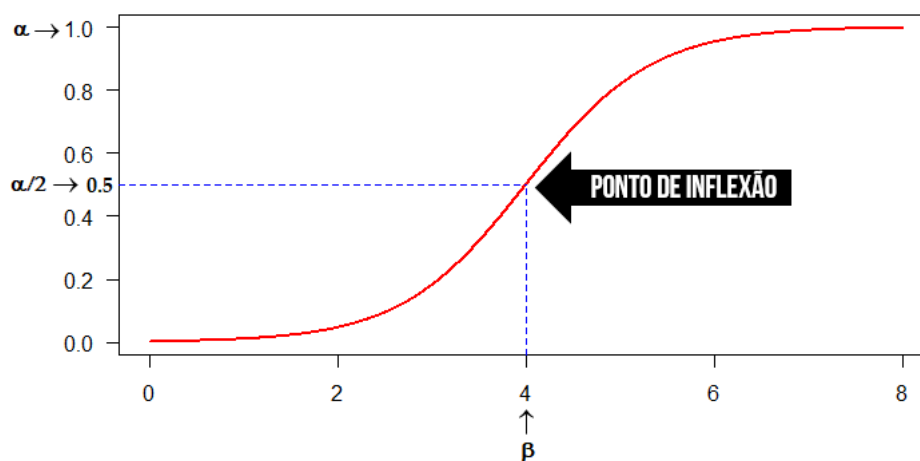
Esse modelo apresenta a reta $y = \alpha$ como assíntota horizontal e curva sigmoidal simétrica no ponto de inflexão, no qual ocorre a mudança de concavidade da curva. A abscissa

do ponto de inflexão é dada por $x = \beta$, que se comprova pelo valor da variável independente que anula a derivada de segunda ordem da função (MISCHAN; PINHO, 2014). Substituindo-se essa abscissa na função tem-se

$$y = \frac{\alpha}{1 + e^{k(\beta - \beta)}} \Rightarrow y = \frac{\alpha}{2}$$

Assim, a função Logística possui ponto de inflexão dado pelas coordenadas $(\beta, \frac{\alpha}{2})$, daí vem a simetria da função, pois o ponto de inflexão dessa função se dá exatamente na metade do valor assintótico (α), conforme se observa na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Representação da curva sigmoidal do modelo Logístico



Fonte: Da autora (2018)

Modelo Gompertz

Esse modelo, por muito tempo, foi de interesse apenas das ciências atuariais, pois ele foi proposto por Gompertz, em 1825, com o objetivo de se estudar as tábuas de vida. Em 1926, Wright o usou na obtenção de curvas de crescimento e em 1940, Medawar utilizou-o para descrever o crescimento do coração de galinhas. A partir daí, passou a ser utilizado por vários autores como curva de crescimento para fenômenos biológicos e econômicos (SEBER; WILD, 2003; WINSOR, 1932).

Ele muito se assemelha ao modelo Logístico, sendo observado um crescimento inicial exponencial e, a seguir, assintótico (MISCHAN; PINHO, 2014). Além disso, possui diferentes parametrizações, das quais a que apresenta melhor desempenho, segundo Fernandes et al.

(2015), principalmente devido à interpretação prática de todos os seus parâmetros é

$$Y_i = \alpha e^{-e^{k(\beta - x_i)}} + \varepsilon_i \quad (2.3)$$

A interpretação dos parâmetros é a mesma definida anteriormente para o modelo Logístico, inclusive a assíntota horizontal, a qual continua sendo a reta $y = \alpha$.

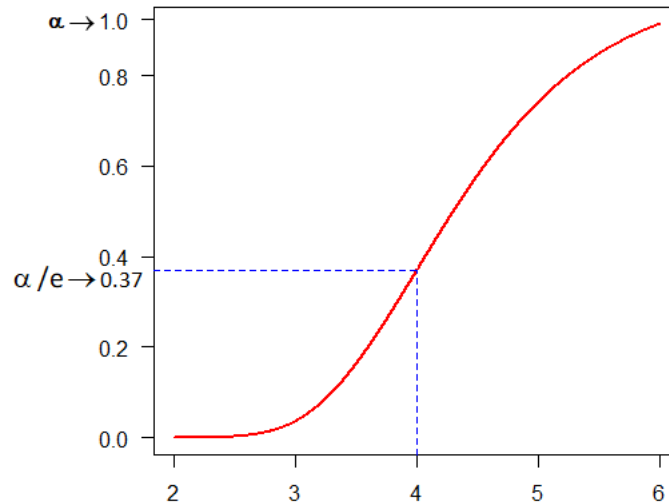
O modelo Gompertz também apresenta curva com caráter sigmoidal, porém não é simétrica em relação ao ponto de inflexão, o que favorece muitos estudos de crescimento animal (SEBER; WILD, 2003).

Igualando a derivada de segunda ordem a zero encontra-se a abscissa do ponto de inflexão, a qual é dada por $x = \beta$ e, substituindo-a na função tem-se

$$y = \alpha e^{-e^{k(\beta - \beta)}} \Rightarrow y = \alpha e^{-e^0} \Rightarrow y = \alpha e^{-1} \Rightarrow y = \frac{\alpha}{e}.$$

Assim, o ponto de inflexão para o modelo Gompertz tem coordenadas $(\beta, \frac{\alpha}{e})$, sendo $e \approx 2,7183$; como $\frac{\alpha}{e} < \frac{\alpha}{2}$ conclui-se que o ponto de inflexão desse modelo é atingido antes do modelo Logístico, o que pode ser observado na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Representação da curva sigmoidal do modelo Gompertz



Fonte: Da autora (2018)

Modelo von Bertalanffy

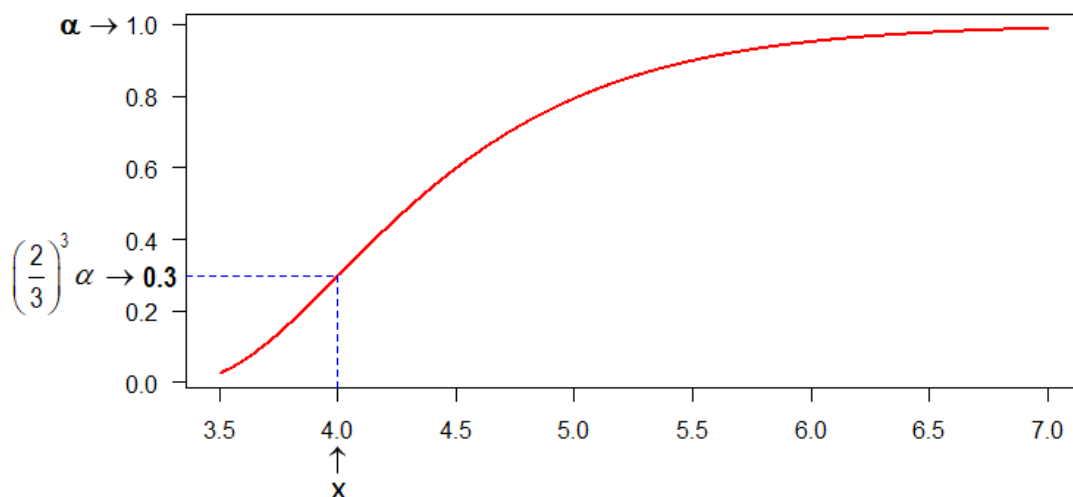
Esse modelo foi proposto por von Bertalanffy em 1957, e tem se mostrado muito útil para descrever curvas de crescimento populacional de peixes e de crustáceos (BERTALANFFY, 1957; SEBER; WILD, 2003). Segundo Brito et al. (2007), Richards foi o primeiro a utilizar o modelo von Bertalanffy nas Ciências Florestais, mostrando sua utilidade também para modelagem de crescimento vegetal, devido ao formato sigmoidal não simétrico de sua curva de crescimento, a qual pode ser representada por:

$$Y_i = \alpha \left[1 - \beta e^{(-kx_i)} \right]^3 + \varepsilon_i \quad (2.4)$$

A interpretação dos parâmetros é a mesma definida para o modelo Logístico, com exceção do parâmetro β , o qual segundo Lima et al. (2017) é um parâmetro de locação que mantém o formato sigmoidal do modelo e está associado ao ponto de inflexão da curva, não possuindo interpretação prática direta nessa parametrização.

O ponto de inflexão do modelo von Bertalanffy tem como coordenadas $\left(x, \left(\frac{2}{3}\right)^3 \alpha\right)$, sendo a abscissa do ponto de inflexão dada por $x = \left(\frac{1}{k}\right) \ln(3\beta)$ (SEBER; WILD, 2003; LIMA, 2016). Como $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \alpha < \frac{\alpha}{e} < \frac{\alpha}{2}$ o ponto de inflexão dessa curva acontece ainda mais precocemente que nos dois modelos anteriores como pode ser observado na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Representação da curva sigmoidal do modelo von Bertalanffy



Fonte: Da autora (2018)

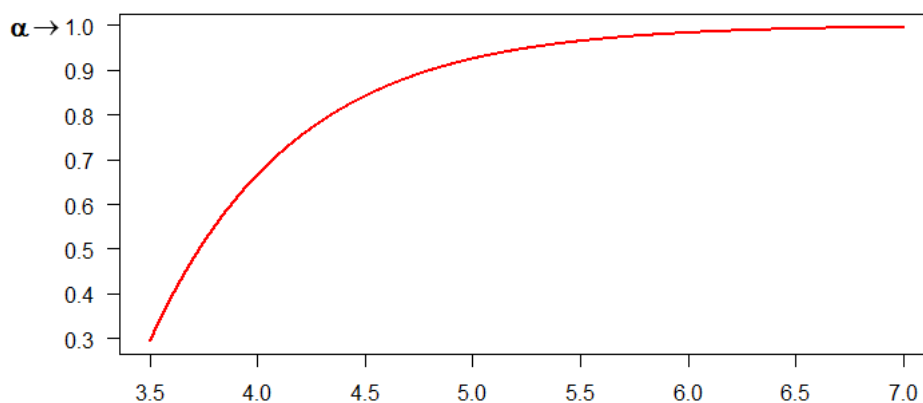
Modelo Brody

Esse modelo foi proposto por Brody em 1945 e é usado para descrever o crescimento de organismos com taxas de crescimento decrescentes desde o início até a sua fase final, onde há uma estabilidade do crescimento (BRODY, 1945; MISCHAN; PINHO, 2014). Ele descreve curvas de crescimento que não apresentam o padrão sigmoidal, pois não possui ponto de inflexão. Segundo (SALLUM NETO; CARVALHO; MISCHAN, 2013) esse modelo pode ser descrito por:

$$Y_i = \alpha \left[1 - \beta e^{(-kx_i)} \right] + \varepsilon_i \quad (2.5)$$

A interpretação dos parâmetros é a mesma do modelo Logístico, com exceção do parâmetro β que, neste modelo, não possui interpretação prática por não existir o ponto de inflexão da curva como pode ser observado na Figura 2.9.

Figura 2.9 – Representação da curva não sigmoidal do modelo Brody



Fonte: Da autora (2018)

Modelo Richards

Esse modelo foi proposto por Richards em 1959, na tentativa de generalizar os principais modelos de crescimento em um único modelo de quatro parâmetros dado por:

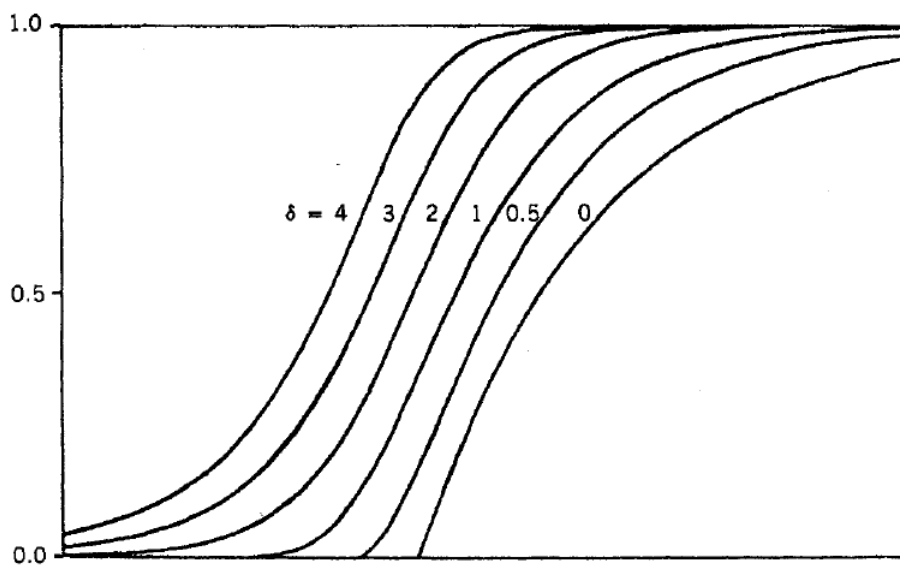
$$Y_i = \alpha \left(1 + (\delta - 1) e^{k(\beta - x_i)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} + \varepsilon_i \quad (2.6)$$

Os parâmetros têm a mesma interpretação do modelo Logístico, sendo δ um parâmetro livre, responsável por determinar a forma da curva e seu respectivo ponto de inflexão. Quando δ assume os valores 0, $\frac{2}{3}$ e 2 o modelo Richards se decompõe nos modelos Brody, von Bertalanffy

e Logístico, respectivamente e quando $\delta \rightarrow 1$ se decompõe no modelo Gompertz, daí esse grupo de modelos ser conhecido como "modelos da família Richards" (SEBER; WILD, 2003).

Na figura 2.10 tem-se a representação das curvas do modelo Richards com $\alpha = 1$ e k constante, os valores de β variam como consequência da variação de δ , o que interfere na forma da curva e seu respectivo ponto de inflexão.

Figura 2.10 – Curvas da família Richards variando o parâmetro δ .



Fonte: (SEBER; WILD, 2003)

Vários pesquisadores, em diversas áreas, têm usado modelos não lineares para o ajuste de curvas de crescimento. Os modelos Gompertz e Logístico foram utilizados na descrição da curva de crescimento da pera asiática 'Shinseiki' (RIBEIRO et al., 2018b), do fruto do cacau (MUNIZ; NASCIMENTO; FERNANDES, 2017) e do pequi (FERNANDES et al., 2015). Para descrever o crescimento em altura das árvores dominantes e codominantes de *Eucalyptus* sp., Melo et al. (2017) utilizaram os modelos Bailey e Clutter, Logístico, Richards e Schumacher.

Como exemplos aplicados na área animal tem-se os ajustes realizados para o crescimento em frangos de corte nos quais foram utilizados os modelos de regressão não linear Gompertz, Logístico, von Bertalanffy e Richards (DEMUNER et al., 2017) e para crescimento em peso de cavalos da raça Mangalarga Marchador foram utilizados os modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy por Souza et al. (2017).

Todos os ajustes citados acima foram realizados obtendo-se resultados satisfatórios para as estimativas, o que indica a eficácia desse tipo de modelo para fenômenos biológicos.

2.7 Estimação dos parâmetros em modelos não lineares

Quando se ajusta um modelo não linear a um conjunto de dados, a estimação dos parâmetros, em geral, é feita pelo método dos mínimos quadrados, que consiste na minimização das somas de quadrados dos resíduos (DRAPER; SMITH, 1998).

Para a aplicação desse método não se faz necessário que nenhuma pressuposição seja satisfeita, porém para que alguma inferência seja feita sobre as estimativas dos parâmetros é preciso que alguns pressupostos em relação ao vetor de erros sejam atendidos, tais como erros independentes, identicamente distribuídos com distribuição normal de média zero e variância homogênea (SEBER; WILD, 2003).

Segundo Gallant (1987), o método dos mínimos quadrados pode ser classificado de acordo com a sua estrutura de erros da seguinte maneira:

- i. **ordinários:** são aqueles cuja estrutura dos erros não viola nenhuma das pressuposições, ou seja, $\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$;

Para ilustrar o método dos mínimos quadrados ordinários, considere uma equação de regressão não linear como definida em 2.1. Esta equação pode ser escrita na forma matricial da seguinte maneira:

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

em que,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} f(X_1; \boldsymbol{\theta}) \\ f(X_2; \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ f(X_n; \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Esse método consiste na estimação dos parâmetros através da minimização da soma de quadrados dos resíduos (SQR). Essa soma, associada à equação acima, é dada pela seguintes expressão:

$$SQR(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = [Y - f(X; \boldsymbol{\theta})]' [Y - f(X; \boldsymbol{\theta})]$$

Logo,

$$\begin{aligned} SQR(\theta) &= \{Y' - [f(X; \theta)]'\} [Y - f(X; \theta)] \\ &= Y'Y - Y'f(X; \theta) - [f(X; \theta)]'Y + [f(X; \theta)]'f(X; \theta) \\ &= Y'Y - 2Y'f(X; \theta) + [f(X; \theta)]'f(X; \theta) \end{aligned}$$

Esta é uma forma quadrática e seu ponto crítico é obtido derivando-se $SQR(\theta)$ em relação à θ e igualando-se a derivada a zero. Assim,

$$\frac{\partial SQR(\theta)}{\partial \theta} = -2Y' \times \frac{\partial f(X; \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial [f(X; \theta)]'}{\partial \theta} \times f(X; \theta) + [f(X; \theta)]' \times \frac{\partial f(X; \theta)}{\partial \theta}$$

Em que $\frac{\partial f(X; \theta)}{\partial \theta}$ é a matriz da derivadas parciais, também conhecida como matriz jacobiana, de dimensões $n \times p$, sendo n o número de observações e p a quantidade de parâmetros do modelo. Essa matriz pode ser representada como:

$$\frac{\partial f(X; \theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1; \theta)}{\partial (\theta_1)} & \frac{\partial f(x_1; \theta)}{\partial (\theta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_1; \theta)}{\partial (\theta_p)} \\ \frac{\partial f(x_2; \theta)}{\partial (\theta_1)} & \frac{\partial f(x_2; \theta)}{\partial (\theta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_2; \theta)}{\partial (\theta_p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_n; \theta)}{\partial (\theta_1)} & \frac{\partial f(x_n; \theta)}{\partial (\theta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_n; \theta)}{\partial (\theta_p)} \end{bmatrix}$$

Seja a matriz jacobiana chamada de J , então:

$$-2Y'J + 2[f(X; \hat{\theta})]'J = 0 \Rightarrow J'f(X; \hat{\theta}) = J'Y$$

Esse é o sistema de equações normais (SEN) para o modelo não linear, no qual a matriz J e $f(X; \theta)$ dependem de θ , logo esse sistema não possui uma solução explícita para $\hat{\theta}$.

- ii. **ponderados:** são aqueles cuja estrutura de erros não atende a pressuposição de homogeneidade de variâncias (homocedasticidade), assim os erros são classificados como heterocedásticos, $\varepsilon \sim N(0, D\sigma^2)$, em que D é uma matriz diagonal, positiva definida, cujos elementos da diagonal são os pesos que ponderam a variância σ^2 ;

A matriz D pode ser escrita da seguinte maneira:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_n \end{bmatrix}$$

Como a pressuposição da independência dos resíduos é válida, os resíduos não são correlacionados, logo os elementos da matriz D fora da diagonal principal são nulos, isto é, $E[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0$ para $i \neq j$.

Definindo-se uma matriz diagonal P , cujos elementos são dados por $\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{D_i}}$, ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

tem-se que, $PP = D^{-1}$ e $D = P^{-1}P^{-1}$.

Pré-multiplicando cada termo do modelo $Y = f(X; \theta) + \varepsilon$ por P , obtém-se o modelo $PY = Pf(X; \theta) + P\varepsilon \Rightarrow Y^* = f^*(X; \theta) + \varepsilon^*$. Assim, o vetor de erros desse novo modelo é dado por $\varepsilon^* = P\varepsilon$. Uma vez que $E(\varepsilon) = 0$, tem-se que $E(\varepsilon)^* = 0$ e ainda,

$$Var(\varepsilon^*) = Var(P\varepsilon) = PVar(\varepsilon)P' = PDP'\sigma^2 = PP^{-1}P^{-1}P\sigma^2 = I\sigma^2$$

Logo, o modelo $PY = Pf(X; \theta) + P\varepsilon$ possui resíduos homocedásticos.

- iii. **generalizados:** são aqueles cuja estrutura de erros não atende a pressuposição de independência e/ou de homogeneidade de variâncias, logo os erros são correlacionados e possivelmente heterocedásticos, $\varepsilon \sim N(0, W\sigma^2)$, em que W é uma matriz simétrica, positiva definida, cujos elementos da diagonal principal são as ponderações das variâncias e fora dela a correlação dos erros.

Segundo Morettin e Toloi (2006), admitindo-se que os resíduos sejam correlacionados na forma de um processo autorregressivo estacionário de ordem p , $AR(p)$, tem-se que

$$\varepsilon_i = \phi_1 \varepsilon_{i-1} + \dots + \phi_p \varepsilon_{i-p} + a_i,$$

em que, ε_i é o resíduo do ajuste no i -ésimo tempo, com $i = 1, \dots, p$ e p o número de tempos em que foram realizadas as medidas de crescimento; ϕ_1 é o parâmetro autorregressivo de ordem 1; ε_{i-1} é o resíduo do ajuste do tempo imediatamente anterior à i -ésima medida; ϕ_p é o parâmetro autorregressivo de ordem p ; ε_{i-p} é o resíduo do ajuste em p tempos anteriores à i -ésima medida e a_i é o ruído branco com distribuição normal, média zero e variância σ_a^2 , sendo assim $E(a_i) = 0$, $E(a_i^2) = \sigma_a^2$ e $E(a_i, a_{i-h}) = 0$ se $h \neq 0$. Para o caso particular de primeira ordem $AR(1)$, tem-se $\varepsilon_i = \phi_1 \varepsilon_{i-1} + a_i$ (RIBEIRO et al., 2018b).

O processo será estacionário se $-1 \leq \phi_1 \leq 1$, para $i = 1, \dots, p$. Nessas condições, $Var(\varepsilon) = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2} = \sigma_\varepsilon^2$ e $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_h) = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2} \phi_1^h = \sigma_\varepsilon^2 \phi_1^h$.

Portanto, a matriz W é dada por

$$W = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \dots & \phi_1^{n-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \dots & \phi_1^{n-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & \dots & \phi_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, a escolha do método de mínimos quadrados (MMQ) a ser utilizado depende da estrutura de erros do modelo de regressão analisado, caso o vetor de erros apresente característica de um modelo ordinário, pode-se utilizar o MMQ ordinários, se for a de um modelo ponderado, tem-se o MMQ ponderados e se apresentar as características de um modelo generalizado, pode-se usar o MMQ generalizados, o qual segundo SOUZA (1998) é mais eficiente que os dois métodos mencionados anteriormente.

2.8 Métodos iterativos

A estimação de mínimos quadrados dos parâmetros em modelos não lineares, diferentemente dos modelos lineares, conduz a um sistema de equações normais sem solução explícita, com isso as estimativas são obtidas através de métodos iterativos (DRAPER; SMITH, 1998; SOUZA, 1998).

Existem, na literatura, vários métodos iterativos para obtenção dessas estimativas, sendo os mais utilizados, o método de Gauss-Newton ou método da linearização, o método *Steepest-Descent* ou método do gradiente e o método de Marquardt (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002).

Em qualquer método iterativo, a escolha adequada de valores iniciais é de suma importância, pois dessa escolha depende a rapidez da convergência e diminui a possibilidade do algoritmo convergir para mínimos locais. A qualidade desses valores iniciais está ligada a experiência do pesquisador e/ou à resultados prévios obtidos de estudos anteriores.

2.9 Análise de resíduos

Como foi visto anteriormente, em Estatística existem vários erros que afetam a variável resposta, dentre eles os mais comuns são os erros de mensuração, pois por mais preciso que seja um instrumento de medida, sempre existirá uma imprecisão associada à ele.

Esses erros são as diferenças entre os valores da variável resposta Y e a curva "verdadeira", isto é, a curva dada pelos valores populacionais dos parâmetros, porém como sempre os ajustes dos modelos são feitos utilizando-se amostras, não é possível encontrar os valores "reais" desses parâmetros, mas somente os valores estimados. Sendo assim, após o ajuste dos modelos, as diferenças encontradas entre os valores observados e os estimados, não são os erros, mas sim os erros estimados, os quais são denominados de *resíduos*. A análise desses resíduos é extremamente importante para verificar a adequabilidade do modelo.

Segundo Bates e Watts (1988), os erros devem se comportar de acordo com as seguintes pressuposições:

- os erros têm *média zero*, ou seja, $E(\varepsilon_i) = 0$.
- os erros são *normalmente distribuídos*. A suposição de normalidade dos erros é importante, pois está diretamente relacionada com a forma da distribuição amostral da variável resposta. Como foi visto anteriormente, os erros são uma soma de fatores que não foram

incorporados ao modelo e, como são muitos fatores, pelo Teorema do Limite Central, essa soma deverá seguir uma distribuição normal.

- os erros são *homocedásticos*, isto é, $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ (constante). Segundo SOUZA (1998), caso os erros não possuam variância constante, os estimadores de mínimos quadrados apesar de não viesados perdem sua eficiência e, os desvios padrão podem subestimar ou superestimar os valores verdadeiros.
- os erros são *independentes*, isto é, $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_{i'}) = 0, i \neq i'$. De acordo com Rawlings, Pantula e Dickey (1998), assim como no caso de erros heterocedásticos, na presença de erros autocorrelacionados, os estimadores de mínimos quadrados continuam sendo não viesados, porém perdem sua eficácia afetando diretamente a estimação dos parâmetros.

Caso haja a violação de algum dos pressupostos, as inferências sobre os parâmetros do modelo ficam prejudicadas e este desvio deve ser corrigido ou incorporado ao modelo (RAWLINGS; PANTULA; DICKEY, 1998). O modelo ajustado será considerado adequado para descrever os dados se a abordagem descrita por Draper e Smith (1998) for atendida. O autor escreve a equação 2.7 da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

em que,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{p1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

A soma de quadrados dos resíduos ($SQR(\boldsymbol{\theta})$) pode ser escrita como

$$SQR(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{u=1}^n \left[Y_u - \sum_{i=1}^p \theta_i X_{iu} \right]^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\boldsymbol{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \boldsymbol{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}.$$

Como a expressão acima trata-se de uma forma quadrática, seu ponto crítico pode ser encontrado através da derivada em relação à θ igualada à zero. Com isso, substituindo-se θ por $\hat{\theta}$, obtém-se a equação normal

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\theta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Caso $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ seja não singular, a solução da equação normal acima é dada por

$$\hat{\theta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Como a soma de quadrados de regressão é dada por $\hat{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ e a soma de quadrados dos resíduos é $\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$, tem-se

$$SQR(\hat{\theta}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\theta} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \hat{\theta}'(\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\theta}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Assim, os resíduos do modelo ajustado podem ser escritos como

$$SQR(\theta) - SQR(\hat{\theta}) = \theta'\mathbf{X}'\mathbf{X}\theta - 2\theta'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\theta} = (\theta - \hat{\theta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\theta - \hat{\theta}).$$

Com isso, se os erros ϵ são independentes e seguem a distribuição $N(0, \sigma^2)$, isto é, $\epsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}\sigma^2)$, então os seguintes resultados serão satisfeitos caso o modelo ajustado esteja adequado aos dados:

- i. $\hat{\theta} \sim N[\theta, (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\sigma^2]$
- ii. $SQR(\hat{\theta}) \sim \sigma^2\chi_{n-p}^2$
- iii. $SQR(\theta) - SQR(\hat{\theta}) \sim \sigma^2\chi_p^2$
- iv. $SQR(\theta) - SQR(\hat{\theta})$ e $SQR(\hat{\theta})$ são identicamente distribuídos de acordo com a relação

$$\frac{[SQR(\theta) - SQR(\hat{\theta})]/p}{SQR(\hat{\theta})/(n-p)} \sim F(p, n-p)$$

em que, n é o número de observações e p o número de parâmetros do modelo ajustado.

2.10 Critérios para seleção de modelos

É comum, em pesquisas, o ajuste de vários modelos para descrever um fenômeno, porém depois de obtidas as estimativas dos parâmetros é necessário utilizar algum critério que permita ao pesquisador a comparação e seleção do modelo que melhor se ajusta aos dados.

Coeficiente de determinação ajustado

Segundo Draper e Smith (1998) e Rawlings, Pantula e Dickey (1998) o coeficiente de determinação (R^2), embora largamente utilizado para escolha do modelo, não é indicado para comparação de modelos com número diferente de parâmetros. Portanto, o mais indicado é a utilização do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2), o qual faz uma ponderação em relação ao número de parâmetros do modelo e é dado por:

$$R_{aj}^2 = 1 - \left[\frac{(1 - R^2)(n - i)}{n - p} \right],$$

em que, n é o número de observações; i está relacionado com o ajuste do intercepto na curva, sendo igual a 1 se houver intercepto e 0 para o caso contrário; p é o número de parâmetros do modelo e R^2 é o coeficiente de determinação estimado por:

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT},$$

em que, SQR se refere à soma de quadrados do resíduo e SQT , à soma de quadrados total.

Será considerado como melhor modelo aquele que apresentar maior valor do R_{aj}^2 .

Desvio padrão residual

Indica a distância entre os valores observados e as estimativas do modelo ajustado, ou seja, gera o valor de desvio residual. O modelo que apresentar o menor valor do desvio padrão residual (DPR) é considerado o mais adequado. O DPR é dado por

$$DPR = \sqrt{QMR},$$

em que, QMR é o quadrado médio residual.

Critério de Informação de Akaike Corrigido

O Critério de Informação de Akaike Corrigido (AIC_C) é utilizado quando se dispõe de uma quantidade pequena de amostras e, assim como o AIC leva em consideração o grau de parametrização do modelo. Esse critério é dado por

$$AIC_C = \ln \frac{SQR}{n} + 2(p+1) + \frac{2(p+1)(p+2)}{n-(p+2)},$$

em que, $\ln$ é operador logaritmo natural; SQR é a soma de quadrados do resíduo; p é o número de parâmetros do modelo e n é o tamanho da amostra. Será indicado como melhor modelo o que apresentar menores valores de AIC_C indicando assim que esse modelo descreve melhor os dados.

Critério de Informação Bayesiano

O Critério de Informação Bayesiano (BIC) foi proposto por Schwarz (1978) e, assim como o AIC leva em consideração o grau de parametrização do modelo. Esse critério é dado por

$$BIC = -2 \ln(L(\hat{\theta})) + p \ln(n),$$

em que, $L(\hat{\theta})$ é a função máxima de verossimilhança; p é o número de parâmetros do modelo; n é o número de observações utilizadas no ajuste e $\ln$ é operador logaritmo natural. Assim como no AIC_C , será indicado como melhor modelo o que apresentar menores valores de BIC (MUIANGA et al., 2016).

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Obtenção dos dados

Os dados analisados fazem parte da coleção permanente do Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais (DCF) da Universidade Federal de Lavras (UFLA), município de Lavras/MG.

Para o desenvolvimento deste estudo, foram utilizadas 85 árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) amostradas em áreas de preservação ambiental nos municípios de Montalvânia e Juvenília, extremo norte de Minas Gerais, num fragmento preservado de floresta sazonalmente seca, por ser potencial para a ocorrência de árvores centenárias. Segundo a estação meteorológica mais próxima (Estação Caririnha-BA, ID:83408), a precipitação total anual da região é de 814 mm de lâmina d'água e a estação chuvosa é de outubro a março, quando 90,7% da precipitação anual total ocorre. Os meses mais secos são junho, julho e agosto com uma média de precipitação nos três meses abaixo de 7 mm (PEREIRA et al., 2018).

As coletas das amostras foram realizadas nos meses de fevereiro e maio de 2016 com o uso da técnica não destrutiva, a qual não compromete a sobrevivência dos indivíduos amostrados. Para isso utilizou-se trados de incrementos de 5 e 12 mm de furo, perfurando o tronco das árvores vivas no sentido casca-medula. Para se obter uma boa representatividade, foram retiradas mais de uma amostra radial do tronco de cada indivíduo, as quais são chamadas de cilindros ou raios, que foram coladas em suportes de madeira que permitem sua manipulação (processamento e análise). Uma ilustração do processo de coleta das amostras pode ser visualizado na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Processo de coleta das amostras de cedro (*Cedrela fissilis*) com o Trado de Pressler. A: Inserção do Trado de Pressler na árvore; B: Retirada da amostra radial com o extrator do Trado de Incremento



Fonte: Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais - UFLA/MG
Gabriel de Assis Pereira (Fotógrafo)

Em laboratório, as amostras de discos e cilindros foram preparadas por meio do lixamento de suas superfícies transversais, com lixadeira elétrica manual, para assim possibilitar a visualização dos anéis de crescimento. As amostras foram submetidas a uma sequência sucessiva de abrasividade das lixas (40, 60, 80, 150, 180, 220, 300 e 400) para assim manter a integridade dos elementos anatômicos. Posteriormente as amostras são polidas manualmente com folhas de lixa micro abrasivas de óxido de alumínio (grão 40, 30, 15 e 9 μm) e lã de aço #0000, permitindo a visualização de cada célula sob lupa estereomicroscópica, conforme se observa na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Anéis de crescimento de cedro (*Cedrela fissilis*) ampliados



Fonte: Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais - UFLA/MG
Gabriel de Assis Pereira (Fotógrafo)

A contagem dos anéis de crescimento e co-datação foram realizadas de acordo com as técnicas rigorosas da dendrocronologia detalhadas em Stokes e Smiley (1996). A co-datação foi realizada no sentido da casca para medula, em que o anel mais próximo da casca corresponde ao ano corrente e os demais anéis decrescem retrospectivamente, determinando assim a idade daquela árvore.

Após a etapa da co-datação, as larguras dos anéis de crescimento devidamente datados foram medidas pelo sistema de medição LINTAB 6 Scientific, onde a soma das larguras de todos os anéis equivale ao raio da árvore, o qual, multiplicado por dois, resulta no diâmetro acumulado à altura do peito (DAP). Na Figura 3.3 observa-se a amostra preparada para a devida medição.

Figura 3.3 – Amostra de cedro (*Cedrela fissilis*) preparada para a medição com o LINTAB 6 Scientific



Fonte: Laboratório de Dendroecologia do Departamento de Ciências Florestais - UFLA/MG
Gabriel de Assis Pereira (Fotógrafo)

Obtidos os dados, idade e DAP acumulado das 85 árvores, construiu-se a Tabela 3.1 de distribuição de frequências por classes de idade de acordo com as regras propostas por Vieira (2015). A quantidade de classes (k) foi obtida pela fórmula $k = \sqrt{n}$. Como as idades variam entre 0 e 154 anos, tem-se $n = 155$ observações, com isso os dados foram agrupados utilizando-se 13 classes com comprimento de cada classe igual a 12 anos. Foram utilizados para o ajuste dos modelos não lineares o DAP médio acumulado (cm) em função da idade média de cada classe (anos).

Tabela 3.1 – Distribuição de frequências por classe de idade utilizada nos procedimentos de ajuste dos modelos não lineares para descrição do crescimento diamétrico do cedro (*Cedrela fissilis*)

Imin¹ (anos)	Imax² (anos)	Quantidade de árvores	Idade média da classe (anos)	DAP médio acumulado (cm)	Variância
0	12	85	6	3,08	5,52
12	24	85	18	8,59	14,02
24	36	85	30	13,31	25,95
36	48	85	42	17,80	35,75
48	60	61	54	21,83	44,74
60	72	47	66	25,36	45,56
72	84	37	78	27,32	43,79
84	96	19	90	28,59	44,22
96	108	17	102	30,94	52,63
108	120	15	114	34,92	54,98
120	132	12	126	38,33	45,99
132	144	8	138	41,51	41,98
144	156	5	150	42,44	44,18

¹Idade mínima da classe; ²Idade máxima da classe

3.2 Modelagem

3.2.1 Modelos a serem ajustados

Os modelos não lineares utilizados foram: Logístico (2.2), Gompertz (2.3), von Bertalanffy (2.4), Brody (2.5) e Richards (2.6) em que, Y_i representa o DAP médio acumulado, em cm, observado na i -ésima idade média da árvore e x_i a idade média da árvore, em anos. Estes modelos foram escolhidos por pertencerem à "família Richards" e, com exceção do modelo Brody, apresentarem um caráter sigmoidal correspondente ao crescimento padrão das árvores (ENCINAS; SILVA; PINTO, 2005).

3.2.2 Método iterativo

Como padrão, na estimação dos parâmetros dos modelos foi utilizado o algoritmo de convergência de Gauss-Newton ou método da linearização, pois consiste na utilização de uma expansão da série de Taylor para aproximar o modelo de regressão não linear em termos lineares para, então, aplicar o método dos mínimos quadrados encontrando assim a estimação dos parâmetros (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002).

Como, na maioria dos métodos iterativos, o primeiro passo consiste em atribuir valores iniciais para o vetor dos parâmetros $\theta^0 = (\alpha^0, \beta^0, k^0)$, os quais foram obtidos através na análise

visual dos dados e também por meio da interface gráfica para ajuste de modelos de regressão não linear desenvolvida com as ferramentas do pacote rpanel do software livre R (R Core Team, 2017).

3.2.3 Análise de resíduo

Depois de estimados os parâmetros através do método dos mínimos quadrados, foram obtidos os resíduos, por meio dos quais foi realizada a análise de resíduos com base em testes estatísticos.

Para verificar o pressuposto de *normalidade* dos resíduos foi utilizado o teste de normalidade de Shapiro-Wilk, no qual a hipótese nula é de que os resíduos seguem uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 . A estatística do teste é calculada pela seguinte expressão (SHAPIRO; WILK, 1965):

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

em que, $\bar{x}$ é a média amostral (dos resíduos); x_i são os valores amostrais residuais ordenados (x_1 é o menor valor) e b é um valor calculado com base nas médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra aleatória com n elementos de uma distribuição normal. Menores valores de W são evidências de desvio de normalidade. A descrição na íntegra desse teste pode ser vista em Shapiro e Wilk (1965).

Para verificar o pressuposto de *homocedasticidade* de variâncias residuais foi utilizado o teste de Breusch-Pagan, que tem como hipótese nula que as variâncias residuais são homogêneas. Esse teste é realizado, inicialmente, ajustando uma regressão linear simples com os resíduos padronizados e sua estatística é dada por (BREUSCH; PAGAN, 1979):

$$BP = \frac{SQR}{2},$$

em que, SQR é a soma dos quadrados da regressão. O valor (BP) calculado deve ser comparado com o valor crítico da distribuição de qui-quadrado, com 1 grau de liberdade.

Para verificar a *independência* dos resíduos foi utilizado o teste de Durbin-Watson, que tem como hipótese nula que os resíduos são independentes. A estatística do teste é dada por (DURBIN; WATSON, 1951):

$$D = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2},$$

em que, ε_i é o resíduo relacionado à observação no tempo i e ε_{i-1} é o resíduo relacionado à observação no tempo $i - 1$.

D é um valor entre 0 e 4. Valores calculados próximos de 0 indicam presença de autocorrelação positiva; próximos de 2 os resíduos são independentes e próximos de 4 indicam presença de autocorrelação negativa.

Como os resíduos apresentaram autocorrelação significativa, o que geralmente ocorre, pois os dados foram obtidos ao longo do tempo e nas mesmas árvores, fez-se necessário considerar um parâmetro de autocorrelação de primeira ordem (AR1) no processo de estimação, o qual foi incorporado ao resíduo da seguinte maneira:

$$\varepsilon_i = \phi_1 \varepsilon_{i-1} + a_i,$$

em que, $i = 1, 2, \dots, n$; ε_i é o resíduo no tempo i ; ε_{i-1} é o resíduo gerado no tempo $i - 1$; ϕ_1 é o parâmetro de autocorrelação de primeira ordem e a_i é o erro puro (ruído branco).

3.2.4 Intervalo de confiança para os parâmetros

Com o pressuposto de normalidade dos resíduos validado, construiu-se os intervalos de confiança para os parâmetros, os quais são dados por

$$IC(\theta_i)_{1-\alpha} = \hat{\theta}_i \pm t_{(v; \frac{\alpha}{2})} \sqrt{V\hat{ar}(\hat{\theta}_i)},$$

em que, $\hat{\theta}_i$ corresponde a estimativa do parâmetro θ_i ; v é o número de grau de liberdade ($v = n - p$) do resíduo; $t_{(v; \frac{\alpha}{2})}$ é o quantil superior da distribuição t de Student; α é o nível de significância; $V\hat{ar}(\hat{\theta}_i)$ é a estimativa da variância da estimativa do parâmetro θ_i obtida da diagonal da matriz assintótica de variâncias e covariâncias e IC são os resultados encontrados para o limite inferior (LI) e superior (LS) (DRAPER; SMITH, 1998).

3.2.5 Comparação e seleção de modelos

Ajustados os modelos, a comparação e seleção do modelo que melhor descreveu os dados foi feita com base nos resultados encontrados para o coeficiente de determinação ajustado

(R_{aj}^2), o desvio padrão residual (DPR), Critérios de Informação de Akaike Corrigido (AIC_C) e Bayesiano (BIC), sendo considerado como modelo mais bem ajustado aquele que apresentou o maior valor de R_{aj}^2 e menores valores para o DPR e para os Critérios de Informação (AIC_C e BIC).

3.2.6 Recursos computacionais

A estimação dos parâmetros dos modelos, seus gráficos, análise de resíduos, intervalos de confiança e a verificação da qualidade do ajuste para seleção dos modelos foram feitos utilizando-se o software estatístico R de acesso livre (R Core Team, 2017) com a utilização dos pacotes *nlme*, *car*, *lmtest*, *rpanel* e *qpcR*. Porém, o erro-padrão para o parâmetro de autocorrelação (ϕ_1) foi calculado utilizando-se o software estatístico SAS® (SAS INSTITUTE, 2018).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após o ajuste dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody, considerando que todas as pressuposições sobre o vetor de erros são aceitas, ou seja, os resíduos são independentes e identicamente distribuídos seguindo uma distribuição normal com média zero e variância constante ($\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$), foi feita uma análise de resíduos com base nos seguintes testes estatísticos: Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan. São apresentados na Tabela 4.1 os resultados obtidos na aplicação destes testes para os quatro modelos. O método iterativo Gauss-Newton não apresentou convergência para o ajuste do modelo Richards, indicando sua inadequabilidade aos dados.

Tabela 4.1 – Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados

Modelo ajustado	Shapiro-Wilk	valor-p	Durbin-Watson	valor-p	Breusch-Pagan	valor-p
Logístico	0,9328	0,3707	0,5964	0,0000*	1,5319	0,4649
Gompertz	0,8937	0,1095	0,6549	0,0000*	0,4331	0,8053
von Bertalanffy	0,8777	0,0664	0,6813	0,0000*	0,1677	0,9196
Brody	0,9323	0,3654	0,7781	0,0000*	1,9223	0,3825

* significativo ao nível de 1% de probabilidade

Observando-se os resultados apresentados e considerando-se um nível de significância de 1%, tem-se que as pressuposições de normalidade e homogeneidade de variâncias para o vetor de resíduos exigidas nas análises foram atendidas, o que pode ser verificado através dos testes de Shapiro-Wilk e Breusch-Pagan (valor-p > 0,01) para todos os modelos. Já por meio do teste Durbin-Watson, verifica-se que a pressuposição de independência residual não foi atendida para nenhum dos ajustes (valor-p < 0,01).

A tabela 4.1 mostra forte dependência residual, o que era de se esperar devido ao fato dos dados de cada árvore serem obtidos não somente na mesma árvore ao longo do tempo, mas também na mesma amostra por esta ser obtida utilizando-se técnicas dendrocronológicas, o que corrobora com Cassiano e Sáfiadi (2015), os quais afirmam que observações ordenadas ao longo do tempo e realizadas no mesmo indivíduo são geralmente autocorrelacionadas.

Diante da dependência residual, o ajuste foi refeito pelo método dos mínimos quadrados generalizados incorporando-se aos modelos o parâmetro autorregressivo de primeira ordem (AR1), pois segundo Ribeiro et al. (2018b), na presença de erros autocorrelacionados, é importante modelar essa autocorrelação e incorporá-la ao modelo para garantir maior precisão nas estimativas e melhor qualidade no ajuste. Resultados semelhantes foram encontrados por Pe-

reira et al. (2016a), Prado, Savian e Muniz (2013), Carneiro et al. (2014) e Muniz, Nascimento e Fernandes (2017), que observaram erros autocorrelacionados no ajuste de modelos não lineares aplicados a dados de crescimento em altura do cafeeiro, de frutos de coqueiro anão verde, de bovinos da raça Tabapuã e de frutos de cacaueiro, respectivamente.

Após a incorporação do parâmetro autorregressivo de primeira ordem (AR1) aos modelos, fez-se nova análise de resíduos e, pode-se observar (Tabela 4.2) que todos os pressupostos associados aos erros dos modelos ajustados foram validados, ao nível de 1% de significância.

Tabela 4.2 – Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados com o acréscimo de parâmetro autorregressivo de primeira ordem (AR1)

Modelo ajustado	Shapiro-Wilk	valor-p	Durbin-Watson	valor-p	Breusch-Pagan	valor-p
Logístico	0,9357	0,4038	2,9760	0,0700	2,6551	0,4479
Gompertz	0,8790	0,0691	2,5751	0,9160	2,5068	0,4741
von Bertalanffy	0,8775	0,0660	2,0081	0,2480	9,9504	0,0190
Brody	0,8951	0,1145	1,4955	0,0380	5,6460	0,1302

Na Tabela 4.3 são apresentadas as estimativas dos parâmetros e os seus respectivos erros-padrão, com base no ajuste dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody, para as medidas do DAP médio acumulado (cm) das árvores de cedro (*Cedrela fissilis*) considerando a estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem. Todos os parâmetros foram significativos, pelo teste t, a 1% de significância.

Tabela 4.3 – Estimativas para os parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem (AR1) com seus respectivos erros-padrão

LOGÍSTICO			GOMPERTZ		
Parâmetros	Estimativa	Erro Padrão	Parâmetros	Estimativa	Erro Padrão
α	44,6471	4,0920	α	47,2990	4,3595
β	62,3102	9,6894	β	45,4280	7,0528
k	0,0294	0,0061	k	0,0196	0,0038
ϕ_1	0,7122	0,3035	ϕ_1	0,6681	0,2782
VON BERTALANFFY			BRODY		
Parâmetros	Estimativa	Erro Padrão	Parâmetros	Estimativa	Erro Padrão
α	49,5345	4,7843	α	64,3691	9,5200
β	0,5969	0,0524	β	0,9881	0,0205
k	0,0158	0,0030	k	0,0070	0,0017
ϕ_1	0,6555	0,2665	ϕ_1	0,5987	0,2604

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.3 tem-se que as estimativas do parâmetro α foram muito próximas para os modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy, já o modelo Brody apresentou valor acima dos demais. Porém, segundo CARVALHO (2003), o cedro pode apresentar DAP entre 40 e 80 cm, fato comprovado por esse estudo, no qual os cedros na fase senil, em torno de 150 anos, apresentaram valor assintótico (α) para o DAP médio acumulado dentro do intervalo acima citado para todos os modelos ajustados, indicando bons ajustes.

Outro fato observado é que essas estimativas para o valor assintótico (α) de todos os modelos estão próximas ao limite inferior do intervalo de crescimento do DAP indicado por CARVALHO (2003). Por outro lado, as estimativas discordaram dos valores de DAP citados por Silva (2013) e por Coradin, Siminski e Reis (2011), que indicam valores entre 60 e 150 cm, o que pode ser justificado pela região sazonalmente seca em que as árvores amostradas se encontram. Segundo Dünisch (2005) o índice pluviométrico do local interfere diretamente no crescimento das árvores de cedro (*Cedrela fissilis*).

As diferenças observadas no valor do parâmetro β estão associadas ao formato sigmoide das diferentes curvas dos modelos ajustados, o que também foi verificado por Fernandes et al. (2014), Ribeiro et al. (2018b) e Silva et al. (2017).

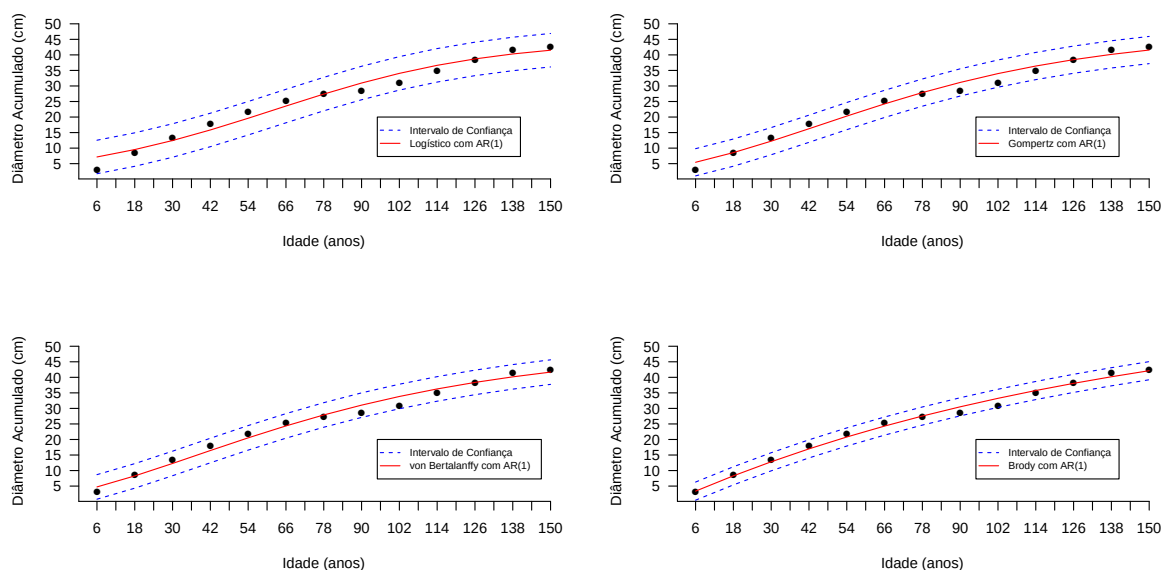
Com base nas estimativas dos parâmetros é possível encontrar o ponto de inflexão de cada modelo ajustado:

- *Logístico*: ocorreu exatamente na metade do desenvolvimento máximo do DAP médio acumulado, ou seja, $\hat{Y} = \frac{\hat{\alpha}}{2} = \frac{44,6471}{2} = 22,3255$ cm a, aproximadamente, 62 anos da árvore ($\hat{x} = \hat{\beta} = 62,3102 \approx 62$).
- *Gompertz*: ocorreu antes de atingir a metade do desenvolvimento máximo do DAP acumulado, ou seja, $\hat{Y} = \frac{\hat{\alpha}}{e} = \frac{47,2990}{2,7183} = 17,4002$ cm a, aproximadamente, 45 anos da árvore ($\hat{x} = \hat{\beta} = 45,4280 \approx 45$).
- *von Bertalanffy*: ocorreu antes de atingir a metade do desenvolvimento máximo do DAP acumulado e mais precocemente que o modelo Gompertz, ou seja, $\hat{Y} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \hat{\alpha} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 49,5345 = 14,6769$ cm a, aproximadamente, 37 anos da árvore ($\hat{x} = \left(\frac{1}{k}\right) \ln\left(3\hat{\beta}\right) = \left(\frac{1}{0,0158}\right) \ln(3 \cdot 0,5969) = 36,8738 \approx 37$).
- *Brody*: devido ao caráter não sigmoide de sua curva, esse modelo não possui ponto de inflexão.

Pode-se observar que cada modelo apresentou idades distintas para o ponto de inflexão, sendo o Logístico o que mais se diferenciou dos demais modelos, com idade de 62 anos. Os valores de inflexão de Gompertz (45 anos) e von Bertalanffy (37 anos) são os mais consistentes com o esperado para Cedro em região semiárida, onde o crescimento é fortemente limitado pela disponibilidade hídrica.

Na Figura 4.1, estão ilustrados os gráficos do ajuste dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem (AR1) aos dados do DAP médio acumulado (cm). A análise visual dos gráficos indica que os modelos avaliados ajustaram-se bem aos dados do DAP médio acumulado das árvores, com destaque para os modelos von Bertalanffy e Brody que mais se aproximaram dos valores observados.

Figura 4.1 – Ajustes dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody com (AR1) aos dados do DAP médio acumulado (cm) de árvores de cedro (*Cedrela fissilis*)



Fonte: Da Autora (2018)

Na Tabela 4.4, observa-se os resultados dos avaliadores da qualidade de ajuste. É possível perceber que todos os modelos indicaram bom ajuste aos dados. Porém, como o modelo Brody apresentou os menores valores para o AIC_C , BIC e DPR, e maior valor para R^2_{aj} sugere-se ser este modelo o que melhor descreve os dados.

Tabela 4.4 – Avaliadores da qualidade de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem (AR1)

Modelo	AIC_C	BIC	DPR	R^2_{aj}
Logístico	60,8443	61,0023	2,3812	0,9659
Gompertz	55,1552	55,3132	1,9347	0,9789
von Bertalanffy	52,2267	52,3848	1,7460	0,9831
Brody	45,0772	45,2352	1,2893	0,9908

Pode-se observar com base nos avaliadores da qualidade de ajuste e na análise visual dos dados, que todos os modelos ajustados foram adequados para descrever o crescimento diamétrico do cedro (*Cedrela fissilis*) na região estudada, porém o modelo Brody, apresentou maior valor para o R^2_{aj} , menores valores para o AIC_C , BIC e DPR e curva mais próxima aos valores observados, sendo assim considerado o modelo que melhor descreveu os dados observados.

5 CONCLUSÕES

Como as medidas do crescimento do cedro (*Cedrela fissilis*) foram provenientes das mesmas amostras e ao longo do tempo fez-se necessária a incorporação do parâmetro autorregressivo de primeira ordem (AR1) o que forneceu estimativas mais confiáveis dos parâmetros e melhor qualidade nos ajustes.

Os modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Brody apresentaram bons ajustes aos dados do DAP médio acumulado. O modelo Brody foi o mais adequado para descrever o crescimento do cedro (*Cedrela fissilis*) agrupado em classes de idade, sugerindo que o padrão de crescimento desta espécie na região de estudo não é sigmoideal. O modelo Richards não se ajustou aos dados.

6 TRABALHOS FUTUROS

Pode-se observar, pelas análises apresentadas anteriormente, que o ajuste para o crescimento diamétrico de cedro (*Cedrela fissilis*) apresentou bons resultados para o DAP médio acumulado, porém para estudos dendrocronológicos é importante que esse ajuste seja feito considerando-se todos os anéis de crescimento anuais das árvores e, conseqüentemente, todas as suas idades sem a utilização de agrupamento em classes, o que não foi possível nesse estudo devido a não validação dos pressupostos associados aos erros dos modelos ajustados. Sendo assim, sugere-se os seguintes tipos de estudos para serem desenvolvidos para esse tipo de dados: modelos não lineares mistos, inferência bayesiana, modelos não lineares com erros simétricos ou assimétricos, regressão não linear quantílica ou modelos não lineares GAMLSS (Generalized Additive Models for Location, Scale and Shape).

REFERÊNCIAS

- BACAËR, N. **A short history of mathematical population dynamics**. London: Springer, 2011. Verhulst and the logistic equation (1838).
- BALOUET, J. Dendroecology: A key forensic age-dating tool. TAYLOR & FRANCIS LTD 4 PARK SQUARE, MILTON PARK, ABINGDON OX14 4RN, OXON, ENGLAND, 2005.
- BARBOSA, S. B. **Evolução da taxonomia vegetal: perspectiva histórica**. Apostila 1. Botucatu, SP, 2012.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. [S.l.]: John Wiley, 1988. 365 p.
- BERTALANFFY, L. V. Quantitative laws in metabolism and growth. **The quarterly review of biology**, American Institute of Biological Sciences, v. 32, n. 3, p. 217–231, 1957.
- BOTOSSO, P. C.; VETTER, R. E.; TOMAZELLO FILHO, M. Periodicidade e taxa de crescimento de árvores de cedro (*Cedrela odorata* L., Meliaceae), jacareuba (*Calophyllum angulare* A. C. Smith, Clusiaceae) e muirapiranga (*Eperua bijuga* Mart. ex Benth, Leg. Caesalpinoideae) de floresta de Terra Firme, em Manaus-AM. **Dendrocronología en América Latina**, p. 357–380, 2000.
- BREUSCH, T. S.; PAGAN, A. R. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, New York, p. 1287–1294, 1979.
- BRITO, C. C. Ramos de et al. Modelos de crescimento resultantes da combinação e variações dos modelos de chapman-richards e silva-bailey aplicados em leucaena leucocephala (lam.) de wit. **Ciência Florestal**, Universidade Federal de Santa Maria, v. 17, n. 2, 2007.
- BRODY, S. **Bioenergetics and growth**. New York: Reinhold Publishing Corporation, 1945.
- CADNAV. 2018. Site CadNav.com. Acesso em 23 abr. 2018. Disponível em: <www.cadnav.com/textures/5724.html>
- CAMACHO, L. S. Estadios del isótopo de carbono: un modelo cronológico basado en las variaciones seculares del carbono-14 atmosférico. **Arqueología y Sociedad**, n. 24, p. 137–160, 2012.
- CARNEIRO, A. P. S. et al. Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça tabapuã. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 49, n. 1, p. 57–62, 2014.
- CARVALHO, P. E. R. **Espécies arbóreas brasileiras**. Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica; Colombo, PR: Embrapa Florestas, 2003. 1039 p. (Coleção espécies arbóreas brasileiras).
- CASSIANO, F. R.; SÁFADI, T. Modelos de crescimento animal para tempos irregulares. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 50, n. 11, p. 1114–1119, 2015.
- CNCFLOA. 2017. Centro Nacional de Conservação da Flora. Ministério do Meio Ambiente. Brasil. Acesso em 01 ago. 2017. Disponível em: <<http://www.cncflora.jbrj.gov.br/portal/pt-br/listavermelha>>.

- CORADIN, L.; SIMINSKI, A.; REIS, A. **Espécies nativas da flora brasileira de valor econômico atual ou potencial: plantas para o futuro - Região Sul**. Brasília: MMA, 2011. 934 p.
- CUSATIS, A. C. et al. Dendroecologia de cedrela fissilis na floresta ombrófila mista. **Pesquisa Florestal Brasileira**, v. 33, n. 75, p. 287–297, 2013.
- DEMÉTRIO, C. G. B.; ZOCCHI, S. S. **Modelos de regressão**. Piracicaba: ESALQ/USP, 2006. 191 p.
- DEMUNER, L. F. et al. Adjustment of growth models in broiler chickens. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 52, n. 12, p. 1241–1252, 2017.
- DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1998. 706 p.
- DÜNISCH, O. Influence of the el-niño southern oscillation on cambial growth of cedrela fissilis vell. in tropical and subtropical brazil. **J. appl. Bot. food Qual**, v. 79, p. 05–11, 2005.
- DURBIN, J.; WATSON, G. S. Testing for serial correlation in least squares regression. ii. **Biometrika**, Londres, v. 38, n. 1/2, p. 159–177, 1951.
- ENCINAS, J. I.; SILVA, G. F. d.; PINTO, J. R. R. **Idade e crescimento das árvores**. Brasília, DF: Universidade de Brasília. Departamento de Engenharia Florestal, 2005. 43 p. (Comunicações técnicas florestais; v. 7, n. 1).
- FAO. 2015. Food and Agriculture Organization of the United Nations. Acesso em 02 mai. 2018. Disponível em: <<http://www.fao.org/news/story/en/item/326911/icode/>>.
- FERNANDES, T. J. et al. Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum Technology**, Maringá, v. 37, n. 4, p. 397–402, 2015.
- FERNANDES, T. J. et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, Lavras, v. 9, n. 2, p. 207–215, 2014.
- FERREIRA, G. B. **Análise dendroclimatológica do cedro (Cedrela fissilis L.-Meliaceae) para reconstrução do cenário ambiental recente da cidade de São Paulo, SP**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.
- FIGUEIREDO FILHO, A. et al. Crescimento e idade de espécies nativas regenerantes sob plantio de Araucaria angustifolia no Paraná. **Floresta e Ambiente**, Seropédia, v. 24, p. 1–9, 2017.
- FREITAS, A. R. Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira Zootecnia**, v. 34, n. 3, p. 786–795, 2005.
- FRITTS, H. C. **Tree rings and climate**. London: Academic Press, 1976. 567 p.
- GALLANT, A. R. **Nonlinear statistical models**. New York: John Wiley, 1987. 610 p.
- GONÇALVES, G. V. Dendrocronologia: princípios teóricos, problemas práticos e aplicabilidade. **CIDEHUS. Universidade de Evora. Consultado julho**, v. 23, p. 1–16, 2007.

GRINGS, M.; BRACK, P. *Cedrela fissilis*: cedro. In: **Espécies nativas da flora brasileira de valor econômico atual ou potencial: plantas para o futuro - Região Sul**. Brasília, DF: Ministério do Meio Ambiente, 2011. v. único, p. 444–447.

HOFFMANN, R. **Análise de regressão: uma introdução à econometria [recurso eletrônico]**. Piracicaba: ESALQ/USP, 2015.

IBGE. **MONITORAMENTO DA COBERTURA E USO DA TERRA DO BRASIL 2000 - 2010 - 2012 - 2014**. Rio de Janeiro - RJ, 2017. 31 p.

IUCN. 2017. Lista Vermelha de espécies ameaçadas. União Internacional para a Conservação da Natureza. Acesso em 27 dez. 2017. Disponível em: <<http://www.iucnredlist.org/details/33928/0>>.

LAFON, C. W. Reconstructing fire history: An exercise in dendrochronology. **Journal of Geography**, Taylor & Francis, v. 104, n. 3, p. 127–137, 2005.

LIMA, K. P. de. **Uso de modelos não lineares na descrição do acúmulo de boro em diferentes partes do feijoeiro cultivar Jalo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras (UFLA), Lavras, 2016. 81 p.

LIMA, K. P. de et al. Uso de modelos não lineares na descrição do acúmulo de boro em diferentes partes do feijoeiro cultivar jalo. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 35, n. 4, p. 834–861, 2017.

MATTOS, R. B. de. **Produtividade e incremento de cabralea canjerana (Vell.) Mart., Cedrela fissilis Vell. e Cordia trichotoma (Vell.) Arrab. Ex Steud., em floresta nativa no Rio Grande do Sul**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2007.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não linear. **Acta Scientiarum, Maringá**, v. 24, n. 6, p. 1761–1770, 2002.

MELO, E. A. et al. Modelagem não linear da relação hipsométrica e do crescimento das árvores dominantes e codominantes de *Eucalyptus* sp. **Ciência Florestal**, v. 27, n. 4, p. 1325–1338, 2017.

MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. de. **Modelos não lineares [recurso eletrônico]: funções assintóticas de crescimento**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014. 184 p.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. **Análise de séries temporais**. São Paulo: Blucher, 2006.

MOTTA, J. P. et al. Caracterização da madeira de quatro espécies florestais. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 44, n. 12, p. 2186–2192, 2014.

MUIANGA, C. A. et al. Descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro por modelos não lineares. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Directory of Open Access Journals, v. 38, n. 1, p. 22–32, 2016.

MUNIZ, J. A.; NASCIMENTO, M. d. S.; FERNANDES, T. J. Nonlinear models for description of cacao fruit growth with assumption violations. **Revista Caatinga**, Mossoró, v. 30, n. 1, p. 250–257, 2017.

- NUPECC. 2018. Comitê Europeu de Colaboração em Física Nuclear. Fundação Europeia da Ciência. Acesso em 24 abr. 2018. Disponível em: <<http://www.nupecc.org/NUPEX/index.php?g=textcontent/nuclearapplications/datingartarch&lang=en>>.
- PAREDES, J. C. et al. Reconstrucción de 350 años de precipitación para el suroeste de chihuahua, México. **Madera y bosques**, Instituto de Ecología AC, v. 15, n. 2, p. 27–44, 2009.
- PEREIRA, A. A. et al. Modelagem não linear do crescimento em altura do cafeeiro irrigado e não irrigado em diferentes densidades. **IRRIGA**, v. 1, n. 1, p. 140–149, 2016a.
- PEREIRA, G. d. A. et al. The climate response of *cedrela fissilis* annual ring width in the rio são francisco basin, Brazil. **Tree Ring Research**, 2018. (no prelo).
- PEREIRA, L. D. et al. Suscetibilidade do cedro ao ataque de pragas em floresta estacional decidual. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 51, n. 5, p. 607–614, 2016b.
- POGGIANI, F. Florestas para fins energéticos e ciclagem de nutrientes. **Série Técnica IPEF, Piracicaba**, v. 1, n. 2, p. 1–11, 1980.
- PRADO, T. K. L. do; SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J. A. Ajuste dos modelos gompertz e logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. **Ciência Rural**, v. 43, n. 5, p. 803–809, 2013.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RATKOWSKY, D. A. **Nonlinear regression modeling**. New York: Dekker, 1983. 276 p.
- RAWLINGS, J. O.; PANTULA, S. G.; DICKEY, D. A. **Applied regression analysis: a research tool**. 2. ed. U.S.A.: Springer Science & Business Media, 1998. 658 p.
- RIBEIRO, T. D. et al. The use of the nonlinear models in the growth of pears of ‘Shinseiki’ cultivar. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 48, n. 1, p. 01–07, 2018b.
- SALLUM NETO, F.; CARVALHO, L. R. de; MISCHAN, M. M. Ajustes de modelos não lineares a dados de crescimento com estrutura de erros independentes e autoregressivos de primeira ordem-aplicações. **Revista Brasileira de Biometria**, p. 631–644, 2013.
- SANTOS, D. L. d.; TAKAKI, M. Phenology of *cedrela fissilis* vellozo (meliaceae) in Itirapina, São Paulo state, Brazil. **Acta Botanica Brasilica**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 625–632, 2005.
- SAS INSTITUTE. **STATISTICAL ANALYSIS SYSTEM INSTITUTE**. Cary, North Carolina, USA, 2018. Versão 9.0.
- SCHWARZ, G. et al. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.
- SCHWEINGRUBER, F. H. **Trees and wood in dendrochronology: morphological, anatomical, and tree-ring analytical characteristics of trees frequently used in dendrochronology**. New York: Springer Science & Business Media, 1993. 402 p.
- SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2003.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, London, v. 52, n. 3/4, p. 591–611, 1965.

SILVA, J. A. A. da et al. Modelagem do crescimento volumétrico de clones de eucalipto (*Eucalyptus Urophylla*) no polo gesseiro do Araripe-PE. **Anais da Academia Pernambucana de Ciência Agrônômica**, v. 13, p. 173–190, 2017.

SILVA, S. **Árvores Nativas do Brasil**. São Paulo: Editora Europa, 2013. v. 1.

SOUZA, F. A. C. et al. Modelagem não linear do crescimento em peso vivo de equinos da raça mangalarga marchador. **Ciência Rural**, v. 47, n. 4, p. 01–06, 2017.

SOUZA, G. S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear**. Brasília: Embrapa, 1998. 505 p.

STEPKA, T. F. **Modelagem do crescimento e dendrocronologia em árvores nativas de Araucaria angustifolia, Cedrela fissilis e Ocotea porosa no sul do Brasil**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná (UFPR, Curitiba, 2012. 207 p.

STEPKA, T. F. et al. Idade e dendrocronologia em árvores nativas de araucária, cedro e imbuia no sul do Brasil. **Floresta com araucária: Pesquisas ecológicas de longa duração. Curitiba-PR: Multi-Graphics.**, p. 117–164, 2014.

STOKES, M. A.; SMILEY, T. L. **An introduction to tree-ring dating**. Arizona, U.S.A.: University of Arizona Press, 1996.

TOMAZELLO FILHO, M.; BOTOSSO, P. C.; LISI, C. Análise e aplicação dos anéis de crescimento das árvores como indicadores ambientais: dendrocronologia e dendroclimatologia. **Indicadores ambientais: conceitos e aplicações**. São Paulo: EDUC, v. único, p. 117–143, 1999.

VELOSO, R. B. **Proposta de um modelo não linear de crescimento e produtividade florestal**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Lavras (UFLA), Lavras, 2013. 102 p.

VIEIRA, S. **Estatística básica**. São Paulo: Cengage Learning, 2015. 176 p.

WINSOR, C. P. The gompertz curve as a growth curve. **Proceedings of the national academy of sciences**, National Acad Sciences, v. 18, n. 1, p. 1–8, 1932.

XAVIER, A.; SANTOS, G. A.; OLIVEIRA, M. L. Enraizamento de miniestaca caulinar e foliar na propagação de cedro-rosa (*Cedrela fissilis* Vell.). **Revista Árvore**, Viçosa-MG, v. 27, n. 3, p. 351–356, 2003.

APÊNDICE A – Comando R

```
#+++++#####
# Script do software R utilizado para estimação dos parâmetros, testes #
# estatísticos e geração de gráficos dos modelos não lineares ajustados #
#+++++#####

##### PACOTES NECESSÁRIOS #####

library(nlme)
library(car)
library(lmtest)
library(qpcR)

##### IMPORTANDO OS DADOS #####

dados <- read.table("dist_fq_12anos.txt", h = T, dec = ",")

attach(dados)

##### AJUSTE DOS MODELOS NÃO LINEARES #####

#+++++#####
# LOGÍSTICO
#+++++#####

logis=nls(y~a/(1+exp(k*(b-x))),start=c(a=45,b=20,k=0.05), data=dados)

summary(logis)

## GRÁFICO AJUSTADO ##

plot(x, y, xlab="Idade (anos)", ylab="Diâmetro Acumulado (cm)",
```

```

ylim=c(2,50), las=1, pch=16, axes=F)

axis(1,c(0,6,12,18,24,30,36,42,48,54,60,66,72,78,84,90,96,102,108,
114,120,126,132,138,144,150))
axis(2,at=seq(0,50,5), las=1)

lines(x,fitted(logis), col="red")

## CONSTRUINDO O INTERVALO DE CONFIANÇA PARA O GRÁFICO ##

yest=fitted(logis)
SQR=sum((y-fitted(logis))^2)
QMR= SQR/10 # Grau de liberdade igual a 10 (13 observações - 3 parâmetros)
DPRlogis=sqrt(QMR); DPRlogis

LS= yest+qt(0.975,10)*DPRlogis
LI= yest-qt(0.975,10)*DPRlogis
lines(x, LS, col="blue", lty=2)
lines(x, LI, col="blue", lty=2)

legend(102,10, c("Intervalo de Confiança", "Logístico"),
lty=c(2,1),pch=c("", ""), col=c("blue", "red"), cex=.75)

## ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS E SEUS INTERVALOS DE CONFIANÇA ##

coef(logis)
confint(logis)

#++++++#+
# QUALIDADE DO AJUSTE
#++++++#+

```



```

Rsq.ad(logis)
Rsq(logis)
AIC(logis)
AICc(logis)
BIC(logis)

#####
#   ANÁLISE DE RESÍDUOS
#####

# Normalidade
shapiro.test(residuals(logis))

# Independência
MG1=attr(logis$m$fitted(),"gradient")
mlg1=lm(y~-1+MG1)
durbinWatsonTest(mlg1)

# Homocedasticidade
bptest(mlg1)

#####
#   LOGÍSTICO COM AR(1)
#####

logis1=gnls(y~a/(1+exp(k*(b-x))), data=dados, start=c(a=40,b=65,k=0.05),
correlation=corARMA(p=1,q=0))

summary(logis1)

## GRÁFICO AJUSTADO ##

```

```

plot(x, y, xlab="Idade (anos)", ylab="Diâmetro Acumulado (cm)",
ylim=c(2,50), las=1, pch=16, axes=F)

axis(1,c(0,6,12,18,24,30,36,42,48,54,60,66,72,78,84,90,96,102,108,114,
120,126,132,138,144,150))
axis(2,at=seq(0,50,5), las=1)

lines(x,fitted(logis1), col="red")

## CONSTRUINDO O INTERVALO DE CONFIANÇA PARA O GRÁFICO ##

yest1=fitted(logis1)
SQR1=sum((y-fitted(logis1))^2)
QMR1= SQR1/9 # Grau de liberdade igual a 9 (13 observações - 4 parâmetros)
DPRlogis1=sqrt(QMR1); DPRlogis1

LS= yest+qt(0.975,9)*DPRlogis1
LI= yest-qt(0.975,9)*DPRlogis1
lines(x, LS, col="blue", lty=2)
lines(x, LI, col="blue", lty=2)

legend(102,10, c("Intervalo de Confiança", "Logístico com AR(1)"),
lty=c(2,1),pch=c("",""), col=c("blue", "red"), cex=.75)

## ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS E SEUS INTERVALOS DE CONFIANÇA ##

coef(logis1)
confint(logis1)

#+++++++#
# QUALIDADE DO AJUSTE
#+++++++#

```

```

Rsq.ad(logisl)
Rsq(logisl)
AIC(logisl)
AICc(logisl)
BIC(logisl)

#####
#           ANÁLISE DE RESÍDUO
#####
res<-residuals(logisl)
vecRes<-as.vector(res)

## Normalidade

st<-shapiro.test(res); st

# Independência
derivadalogisl<- deriv3(y~a/(1+exp(k*(b-x)))+Phi*(vecRes),
c("a", "b", "k", "Phi"), function(x, a, b, k, Phi){NULL})

m <- derivadalogisl(x, a=coef(logisl)["a"],
b=coef(logisl)["b"],
k=coef(logisl)["k"], Phi=coef(logisl)["Phi"])

MG=attr(m, "gradient")
mlg=lm(y~-1+MG, data=dados)
dw<-durbinWatsonTest(mlg, max.lag = 1, method=c("normal"),
alternative = "two.sided"); dw

# Homocedasticidade
bptest(mlg)

```

```
#++++++  
# PARA O AJUSTE DOS DEMAIS MODELOS O PROCEDIMENTO  
# FOI O MESMO DESCRITO ACIMA  
#++++++
```