



MIGUEL CARVALHO NASCIMENTO

**PROPOSIÇÃO DE DOIS TESTES, SENDO UM ASSINTÓTICO E
OUTRO *BOOTSTRAP*, PARA COMPARAÇÕES ENTRE DOIS
VETORES DE MÉDIAS INDEPENDENTES EM ALTA
DIMENSIONALIDADE**

LAVRAS – MG

2023

MIGUEL CARVALHO NASCIMENTO

**PROPOSIÇÃO DE DOIS TESTES, SENDO UM ASSINTÓTICO E OUTRO *BOOTSTRAP*,
PARA COMPARAÇÕES ENTRE DOIS VETORES DE MÉDIAS INDEPENDENTES EM
ALTA DIMENSIONALIDADE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Análise Multivariada, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

**LAVRAS – MG
2023**

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Nascimento, Miguel Carvalho.

Proposição de dois testes, sendo um assintótico e outro *bootstrap*, para comparações entre dois vetores de médias independentes em alta dimensionalidade / Miguel Carvalho Nascimento. - 2023.

162 p.

Orientador(a): Daniel Furtado Ferreira.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Lavras, 2023.

Bibliografia.

1. *Bootstrap* não-paramétrico. 2. Avaliação de teste. 3. Simulação Monte Carlo. I. Ferreira, Daniel Furtado. II. Título.

MIGUEL CARVALHO NASCIMENTO

**PROPOSIÇÃO DE DOIS TESTES, SENDO UM ASSINTÓTICO E OUTRO *BOOTSTRAP*,
PARA COMPARAÇÕES ENTRE DOIS VETORES DE MÉDIAS INDEPENDENTES EM
ALTA DIMENSIONALIDADE**

**PROPOSITION OF TWO TESTS, ONE ASYMPTOTIC AND THE OTHER *BOOTSTRAP*,
FOR COMPARISONS BETWEEN TWO VECTORS OF INDEPENDENT MEANS IN
HIGH DIMENSIONALITY**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Análise Multivariada, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 16 de janeiro de 2023.

Prof. Dr. Ben Dêivide de Oliveira Batista UFSJ
Prof. Dr. Luiz Ricardo Nakamura UFLA
Prof. Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães UFLA

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

**LAVRAS – MG
2023**

À memória de minha amada bisavó, Maria Freitas Guedes.
DEDICO

AGRADECIMENTOS

À minha família, que me apoiou e incentivou em todos os momentos; à minha amada, Ana Beatriz Monteiro, que me deu suporte e esteve ao meu lado durante toda a caminhada, nos momentos felizes e difíceis.

Ao meu orientador Daniel Furtado Ferreira, agradeço pela paciência, dedicação e maestria na orientação desse trabalho. Um grande professor, pesquisador e, além disso, uma grande pessoa pela qual tenho imenso respeito e admiração.

Aos meus colegas, em especial Lúcia Helena Costa Braz, agradeço pelos bons momentos de estudos, também pela ajuda e colaboração nesta caminhada em busca de conhecimento.

À Universidade Federal de Lavras, ao Departamento de Estatística (DES), aos professores que sempre nos apoiam e incentivam e, por fim, ao Laboratório de Computação Científica (LCC) do Departamento de Estatística da UFLA, que possibilitou a obtenção dos resultados científicos apresentados nesta dissertação.

À Capes, por ter me proporcionado apoio financeiro para que eu pudesse prosseguir nesse estudo.

RESUMO

A inferência relativa às comparações de vetores de médias entre duas populações independentes é de grande interesse nas áreas aplicadas, principalmente em cenários que as análises de dados com alta dimensionalidade são comuns. Em casos de baixa dimensionalidade com problema de Behrens-Fisher multivariado, existem inúmeras soluções, mas a maioria das estatísticas dos testes possuem distribuição assintótica. Nos procedimentos multivariados existe um problema que surge quando o número de variáveis, p , é maior ou igual ao tamanho da amostra, n , neste caso, não é possível utilizar dos poucos métodos existentes, em razão deles dependerem da inversa da matriz de covariâncias amostral que, nesta situação ($p \geq n$), não pode ser obtida, uma vez que a matriz de covariâncias é singular. Na maioria dos casos, os testes assintóticos são muito liberais, principalmente em pequenas amostras e, especificamente, no caso multivariado, quando a dimensionalidade é alta. O método *bootstrap* é um dos principais métodos computacionais intensivos, em que a principal vantagem é a não necessidade do conhecimento da distribuição de probabilidade populacional. Além disso, quando se viola as condições assumidas para a aplicação de um teste, com o *bootstrap*, o problema se torna extremamente simples de ser contornado. Com base nisso, o presente trabalho teve como objetivo propor testes de comparações multivariadas entre dois vetores de médias independentes, teste de Ahmad modificado (TAM) e sua versão *bootstrap* (TB), em alta dimensionalidade, para dados balanceados ou não, não-normais e normais sob o problema de Behrens-Fisher multivariado. O desempenho destes testes foi avaliado e comparado com o dos testes indicados pela literatura, sendo estes, T^2 de Hotelling, o teste modificado de Nel e Merwe (MNV) proposto por Krishnamoorthy e Yu e o teste proposto por Ahmad (TA), utilizando simulação Monte Carlo. Foram considerados o poder e a taxa de erro tipo I como medidas avaliativas. As comparações foram conduzidas em diversos cenários como, casos de homocedasticidade e heterocedasticidade das matrizes de covariâncias, em baixa e alta dimensionalidade para distribuições multivariadas normal, t com 7 graus de liberdade e uniforme $(0, 1)$, ou seja, cenários em que se violam as condições assumidas para aplicação da maioria dos testes. Os resultados mostraram que o teste TAM, em geral, foi robusto, superando seus concorrentes na maioria das situações avaliadas, já o teste usando o método *bootstrap* foi efetivo em situações de homogeneidade das matrizes de covariâncias e para o caso de heterocedasticidade, quando as matrizes são equicorrelacionadas.

Palavras-chave: *Bootstrap* não-paramétrico. Avaliação de teste. Simulação Monte Carlo.

ABSTRACT

The inference related to comparisons of mean vectors between two independent populations is of great interest in applied areas, mainly in scenarios where data analyzes with high dimensionality are common. In low-dimensional cases with multivariate Behrens-Fisher problem, there are numerous solutions, but most of the test statistics have an asymptotic distribution. In multivariate procedures there is a problem that arises when the number of variables, p , is greater than or equal to the sample size, n , in this case, it is not possible to use the few existing methods, because they depend on the inverse of the sample covariance matrix which, in this situation ($p \geq n$), cannot be obtained, since the covariance matrix is singular. In most cases, asymptotic tests are very liberal, mainly in small samples and specifically in the multivariate case, when dimensionality is high. The *bootstrap* method is one of the main computational intensive methods that, among its main advantages, is in the no necessity of knowledge of the population probability distribution. Furthermore, when the conditions assumed for the application of a test are violated, with *bootstrap*, the problem becomes extremely simple to be circumvented. Based on this, the present work aimed to propose tests of multivariate comparisons between two vectors of independent means, modified Ahmad test (TAM) and its *bootstrap* version (TB), in high dimensionality, for balanced or unbalanced, non-normal and normal data under the multivariate Behrens-Fisher problem. The performance of these tests was evaluated and compared with the tests indicated in the literature, being these, Hotelling's T^2 , the modified Nel and Merwe test (MNV) proposed by Krishnamoorthy and Yu and the test proposed by Ahmad (TA), using Monte Carlo simulation. Power and type I error rate were considered as evaluative measures. Comparisons were conducted in several scenarios, such as cases of homoscedasticity and heteroscedasticity of covariance matrices, in low and high dimensionality for multivariate distributions normal, t with 7 degrees of freedom and uniform (0, 1), that is, scenarios in which the conditions assumed for the application of most tests are violated. The results showed that the TAM test, in general, was robust, outperforming its competitors in most of the evaluated situations, whereas the test using the *bootstrap* method was effective in situations of homogeneity of the covariance matrices and in the case of heteroscedasticity, when the matrices are equicorrelated.

Keywords: *Bootstrap* non-parametric. Test rating. Monte Carlo simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Fluxograma do método <i>bootstrap</i> não-paramétrico de teste entre dois vetores de médias.	35
Figura 2.2 – Poder dos testes de Ahmad (T_2), de Bai e Saranadasa (T_{BS}) e de Chen e Qin (T_{CQ}), para distribuição normal multivariada, obtidos por Ahmad (2019b), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (10, 20), (20, 40), (50, 100)$, $\delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estrutura das matrizes de covariâncias SC com $\rho = 0,4$ e $\rho = 0,8$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$	44
Figura 2.3 – Poder dos testes de Ahmad (T_2), de Bai e Saranadasa (T_{BS}) e de Chen e Qin (T_{CQ}), para distribuição t_7 multivariada, obtidos por Ahmad (2019b), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (10, 20), (20, 40), (50, 100)$, $\delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estrutura das matrizes de covariâncias SC com $\rho = 0,4$ e $\rho = 0,8$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$	44
Figura 3.1 – Fluxograma da avaliação dos testes.	59
Figura 4.1 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (40, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	68
Figura 4.2 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	69
Figura 4.3 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição t_7 multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	70

Figura 4.4 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	71
Figura 4.5 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	72
Figura 4.6 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição t_7 multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	72
Figura 4.7 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	73
Figura 4.8 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	84
Figura 4.9 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	85

- Figura 4.10 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$ 86
- Figura 4.11 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 50$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$ 87
- Figura 4.12 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (50, 100)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$ 88
- Figura 4.13 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$ 89
- Figura 4.14 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$ 90

Figura 4.15 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	91
Figura 4.16 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 50$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	92
Figura 4.17 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (50, 100)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	93
Figura 4.18 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 50$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	93
Figura 4.19 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	94
Figura 4.20 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$	94

- Figura 4.21 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$ 95
- Figura 4.22 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 500$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$ 95
- Figura 4.23 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $\rho = 0,8$, $p = 50$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$ 96
- Figura 4.24 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $\rho = 0,8$, $p = 500$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$ 96

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Tipos de erros e decisões corretas, com suas respectivas probabilidades associadas entre parênteses.	36
Tabela 2.2 – Resultados de Krishnamoorthy e Yu (2004) para taxa de erro tipo I e poderes dos testes Yao, Johansen e MNV, considerando $p = 2$, $n_1 \in \{6, 12\}$, $n_2 \in \{12\}$, $\delta \in \{0, 2, 4, 8, 16\}$ e $\lambda_i \in \{0, 1, 0, 2, 0, 5, 0, 7, 0, 9\}$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$	38
Tabela 2.3 – Resultados de Krishnamoorthy e Yu (2004) para taxa de erro tipo I e poder dos testes Yao, Johansen e MNV, considerando $p = 10$, $n_1 \in \{19\}$, $n_2 \in \{19, 29\}$, $\delta \in \{0, 2, 4, 8, 16\}$ e $\lambda_i \in \{0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9\}$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$	40
Tabela 2.4 – Resultados de Ahmad (2019b) para a taxa de erro tipo I dos testes de Ahmad (T_2), de Bai e Saranadasa (T_{BS}) e de Chen e Qin (T_{CQ}), considerando $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, $n_1 \in \{10, 20, 50\}$, $n_2 \in \{20, 40, 100\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuições multivariadas normal, t_7 e uniforme (0, 1) e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0	42
Tabela 2.5 – Resultados encontrados por Gebert (2014) para taxa de erro tipo I dos testes TBP, TBPKL e MNV, considerando $p \in \{2, 7\}$, $n_1 = 8$, $n_2 = 30$, $\delta \in \{1, 2, 8, 16, 32\}$ e $\alpha \in \{0,01, 0,05, 0,01\}$	48
Tabela 2.6 – Resultados encontrados por Gebert (2014) para taxa de erro tipo I dos testes TBP, TBPKL e MNV, considerando $p \in \{2, 7\}$, $n_1 = 100$, $n_2 = 8$, $\delta \in \{1, 2, 8, 16, 32\}$, $k \in \{4, 8\}$ e $\alpha \in \{0,01, 0,05, 0,01\}$	49
Tabela 4.1 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC), distribuições multivariadas e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0 , caso homocedástico e baixa dimensionalidade.	65

Tabela 4.2 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC), distribuições multivariadas e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0 , caso homocedástico e alta dimensionalidade.	66
Tabela 4.3 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0	75
Tabela 4.4 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0	76
Tabela 4.5 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0,1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0	78
Tabela 4.6 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0	80

Tabela 4.7 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0	81
Tabela 4.8 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0,1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0	82
Tabela 1 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC), distribuições multivariadas e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0 , caso homocedástico.	113
Tabela 2 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC), distribuições multivariadas e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0 , caso homocedástico.	114
Tabela 3 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0	115

Tabela 4 –	Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0	116
Tabela 5 –	Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0	117
Tabela 6 –	Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0	118
Tabela 7 –	Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0	119
Tabela 8 –	Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0	120

Tabela 9 –	Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0	121
Tabela 10 –	Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0	122
Tabela 11 –	Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0	123
Tabela 12 –	Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0	124
Tabela 13 –	Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0	125

Tabela 14 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0	126
Tabela 15 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).	127
Tabela 16 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).	129
Tabela 17 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).	131
Tabela 18 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).	133

Tabela 19 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).	135
Tabela 20 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).	137
Tabela 21 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).	139
Tabela 22 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).	141
Tabela 23 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).	143

Tabela 24 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).	145
Tabela 25 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).	147
Tabela 26 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).	149
Tabela 27 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).	151
Tabela 28 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).	153

Tabela 29 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).	155
Tabela 30 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).	157
Tabela 31 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).	159
Tabela 32 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e <i>bootstrap</i> (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).	161

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
2	REFERENCIAL TEÓRICO	27
2.1	Inferência sobre vetores de médias de duas populações	27
2.1.1	Covariâncias homogêneas	28
2.1.2	Problema de Behrens-Fisher	30
2.1.3	Teste de Ahmad	32
2.2	Métodos <i>bootstrap</i>	33
2.2.1	<i>Bootstrap</i> não-paramétrico	33
2.3	Erro tipo I, poder e robustez de um teste	35
2.4	Principais resultados encontrados das aplicações dos testes	37
2.4.1	Resultados do teste MNV	38
2.4.2	Resultados do teste de Ahmad	41
2.4.3	Resultados dos métodos <i>bootstrap</i>	45
3	METODOLOGIA	52
3.1	Testes	53
3.1.1	Teste T^2 de Hotelling (TH)	53
3.1.2	Teste MNV	54
3.1.3	Teste de Ahmad (TA)	54
3.1.4	Proposta de modificação do teste de Ahmad (TAM)	55
3.1.5	Teste <i>bootstrap</i> proposto (TB)	57
3.2	Avaliação do desempenho dos testes via simulação Monte Carlo	58
3.2.1	Taxa de erro tipo I	61
3.2.2	Poder	63
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	64
4.1	Homocedasticidade das matrizes de covariâncias	64
4.1.1	Taxas de erro tipo I	64
4.1.2	Poder	67

4.2	Heterocedasticidade das matrizes de covariâncias	70
4.2.1	Taxa de erro tipo I	70
4.2.2	Poder	83
4.3	Considerações gerais	89
5	CONCLUSÃO	97
	REFERÊNCIAS	98
	APENDICE A – Rotina com os comandos do <i>software</i> R para aplicação dos testes	100
	APENDICE B – Tabelas - Taxa de erro tipo I	113
	APENDICE C – Tabelas - Poder dos testes	127

1 INTRODUÇÃO

A inferência relativa às comparações de vetores de médias entre duas populações independentes é de grande interesse nas áreas aplicadas, principalmente em cenários que as análises de dados com alta dimensionalidade, que se caracterizam quando o número de variáveis é maior ou igual ao de observações, são comuns. Em casos de baixa dimensionalidade com o problema de Behrens-Fisher multivariado, que se caracteriza por apresentar heterogeneidade das matrizes de covariâncias de duas populações normais multivariadas (FERREIRA, 2018), as estatísticas dos testes tradicionalmente aplicados possuem apenas distribuição assintótica. Neste caso, existem inúmeras soluções (BENNETT, 1951; JAMES, 1954; YAO, 1965; JOHANSEN, 1980; NEL; VAN der MERWE, 1986; KRISHNAMOORTHY; YU, 2004). Dentre elas, Krishnamoorthy e Yu (2004) recomendam o uso da estatística de testes de Nel e Van der Merwe (1986) com uma modificação proposta por eles.

Nos procedimentos multivariados existe um problema que surge quando o número de variáveis (dimensão) p é maior que o tamanho da amostra n , ou seja, alta dimensionalidade. Nestes casos, não é possível utilizar dos poucos métodos existentes, em razão deles dependerem da inversa da matriz de covariâncias amostral, que nesta situação ($p \geq n$) não pode ser obtida, uma vez que a matriz de covariâncias é singular. Também existem problemas quando os dados multivariados não são originários de distribuições normais multivariadas e quando, análogo ao caso univariado, as matrizes de covariâncias de tratamentos ou populações não são homogêneas. Alguns trabalhos são encontrados na literatura buscando contornar estes problemas (AHMAD, 2019a, 2019b).

Nas situações práticas em que se deseja comparar dois vetores de médias, mas as pressuposições de normalidade multivariada e homogeneidade não são atendidas, que há necessidade de se mensurar um grande número de variáveis com poucos recursos para se ter uma grande amostra e ainda, impossibilidade de amostrar igualmente as duas populações de interesse, cenários de condições gerais e desfavoráveis são abordados por Ahmad (2019a, 2019b), apresentando soluções assintóticas baseadas nas distribuições qui-quadrado e normal padrão. Estes casos em condições gerais desfavoráveis são abordados por Ahmad (2019a, 2019b), apresentando soluções assintóticas

baseadas nas distribuições qui-quadrado e normal padrão. Após uma análise criteriosa, verificou-se a existência de algum problema na estatística do teste de Ahmad (2019a, 2019b).

Na maioria dos casos, os testes assintóticos são muito liberais, ou seja, apresentam taxas de erro tipo I consideravelmente superiores aos níveis nominais de significâncias adotados, principalmente em pequenas amostras e, especificamente, no caso multivariado, quando a dimensionalidade é alta, ou seja, o número de variáveis é maior que o tamanho da amostra. Em muitos casos, estes testes não são eficientes no controle do erro tipo I, como observado por Silva, Ferreira e Nogueira (2008), em que se concluiu que o teste *bootstrap* estudado foi superior aos assintóticos, sendo considerado robusto em relação as pressuposições assumidas para o teste com controle do erro tipo I de forma conservativa.

A técnica *bootstrap* é um dos principais métodos computacionais intensivos, que dentre as principais vantagens está a não necessidade do conhecimento da distribuição de probabilidade populacional. Além disso, quando se viola as condições assumidas para a aplicação de um teste, com o *bootstrap*, o problema se torna extremamente simples de ser contornado.

Portanto, o objetivo geral é propor dois testes, uma modificação do teste original de Ahmad (2019a, 2019b) e o outro, uma versão *bootstrap* não-paramétrico desta modificação, para comparações multivariadas, entre dois vetores de médias independentes em alta dimensionalidade, para dados balanceados ou não, não-normais e normais sob o problema de Behrens-Fisher multivariado. Os objetivos específicos são avaliar o desempenho dos testes propostos e compará-los com os testes presentes na literatura, sendo estes, o T^2 de Hotelling, o proposto por Krishnamoorthy e Yu (2004) (MNV) e o assintótico proposto por Ahmad (2019a, 2019b), em diversos cenários, como, casos de homocedasticidade e heterocedasticidade das matrizes de covariâncias, em baixa e alta dimensionalidade para distribuições multivariadas normal, t com 7 graus de liberdade e uniforme $(0, 1)$.

O trabalho foi organizado em cinco capítulos, cujo Capítulo 1 é a Introdução. No Capítulo 2 serão apresentadas as principais referências utilizadas para o trabalho. Será feita uma revisão sobre os testes de comparações entre vetores de médias que servirão como referência para as propostas dos testes, uma revisão sobre problemas na inferências sobre vetores de médias de duas populações como problema de Behrens-Fisher multivariado e alta dimensionalidade, será abordado os métodos

bootstrap, uma revisão sobre taxas de erro, poder estatístico e robustez e, por fim, os principais resultados encontrados dos testes e métodos que servirão de referência para este trabalho.

No Capítulo 3 será abordada a metodologia do trabalho, apresentando o cômputo dos testes T^2 de Hotelling (TH), o teste proposto por Krishnamoorthy e Yu (2004) (MNV), o teste de Ahmad (TA) e os testes propostos, teste de Ahmad modificado (TAM) e sua versão *bootstrap* (TB), a metodologia de avaliação dos testes via simulação Monte Carlo e a metodologia de classificação dos testes quanto a taxa de erro tipo I.

No Capítulo 4 será apresentada a avaliação de desempenho (taxa de erro tipo I e poder) dos testes propostos, confrontando com os testes de referência, via simulação Monte Carlo e resultados encontrados na literatura.

No Capítulo 5 será apresentada a conclusão do trabalho, enfatizando os principais resultados e recomendações.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo são apresentadas as principais bases teóricas utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho. Ele está dividido em seções para abordar separadamente os temas alvos dos estudos propostos.

2.1 Inferência sobre vetores de médias de duas populações

A inferência sobre vetores de médias de duas populações, de acordo com Ferreira (2018), é de grande interesse por parte dos pesquisadores das áreas aplicadas, tanto na estimação do parâmetro da diferença de duas médias populacionais quanto em testes de hipóteses sobre o parâmetro.

Ferreira (2018) aborda a inferência em duas situações, amostras populacionais emparelhadas e independentes, ambas provenientes de populações normais multivariadas. A atenção neste trabalho será no estudo de comparações de vetores de médias do segundo caso.

Para caracterizar o problema, são considerados, sem perda de generalidade, os vetores aleatórios p -dimensionais (p é o número de variáveis) $\mathbf{X}_{ik} = [X_{ik1}, \dots, X_{ikp}]^\top \sim \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots, n_i$ com vetor p -dimensional de médias $E(\mathbf{X}_{ik}) = \boldsymbol{\mu}_i$ e matriz de covariâncias $Cov(\mathbf{X}_{ik}) = \boldsymbol{\Sigma}_i$ positiva definida $p \times p$ simétrica e \mathfrak{F}_i uma família de distribuição para o i -ésimo tratamento ou população. Serão considerados casos em que a família de distribuição \mathfrak{F}_i refere-se à distribuição normal multivariada e, além disso, o caso bem geral, em que \mathfrak{F}_i é uma distribuição p -variada não necessariamente normal, com matrizes de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_i$'s potencialmente desiguais (heterogêneas) e não balanceado, em que os n_i 's são diferentes (n_i é o tamanho amostral do i -ésimo tratamento ou população). A amostra completa é a combinação das amostras das duas populações em uma única amostra, sendo n o tamanho total da amostra combinada, em que $n = \sum_{i=1}^2 n_i$. Serão considerados casos típicos com $p < n - 2$ e também casos em que $p \geq n - 2$, de alta dimensionalidade. O interesse da inferência é nos vetores de parâmetros p -dimensionais $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1$.

Os estimadores não viesados do vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_i$ e da matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_i$ do i -ésimo tratamento (ou população) são dados por

$$\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{k=1}^{n_i} (\mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i)^\top, \quad i = 1, 2.$$

O caso de interesse geral refere-se às combinações lineares $\mathbf{a}^\top \boldsymbol{\delta}$, para um vetor não nulo conhecido $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, em que $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1$ é o vetor de diferenças entre os dois vetores médias. Um caso de particular interesse é o caso de $\boldsymbol{\delta}$ *per se*, que inclui todas as possíveis diferenças. O estimador de $\boldsymbol{\delta}$ é $\hat{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\mathbf{X}}_2 - \bar{\mathbf{X}}_1$.

2.1.1 Covariâncias homogêneas

De acordo com Ferreira (2018), para testar a hipótese nula de igualdade dos vetores de médias de duas populações normais, dada por

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu},$$

pressupondo, ainda, $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$, para o caso irrestrito (sob H_1), os estimadores de máxima verossimilhança do vetor de médias e da matriz de covariâncias comum são dados, respectivamente, por

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_i = \bar{\mathbf{X}}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ij}}{n_i} \quad \text{e} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2}{n},$$

e o máximo da função de verossimilhança é

$$L_\Omega(\mathbf{X}_{ij}; \hat{\boldsymbol{\mu}}_i, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{np}{2} \right\},$$

em que $n = n_1 + n_2$ e $\mathbf{W}_i = (n_i - 1)\mathbf{S}_i$. Para o modelo restrito (sob H_0) tem-se que os estimadores assintóticos de máxima verossimilhança do vetor de médias e da matriz de covariâncias são dados,

respectivamente, por

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ij}}{n} = \frac{n_1 \bar{\mathbf{X}}_{1.} + n_2 \bar{\mathbf{X}}_{2.}}{n},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0 = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}}_{..})(\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}}_{..})^\top}{n},$$

e o máximo da função de verossimilhança e a estatística do teste são dados, respectivamente por

$$L_{\Omega}(\mathbf{X}_{ij}; \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0|^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{np}{2}\right\}$$

e

$$\Lambda = |\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0^{-1}|^{\frac{n}{2}}.$$

Ferreira (2018) conclui que, sob H_0 , $-2\ln(\Lambda)$ tem distribuição assintótica qui-quadrado com p graus de liberdade, para testar a hipótese de interesse e apresentar uma estatística de teste exata para comparar vetores de médias de duas populações independentes sob homocedasticidade, se define, primeiramente, o estimador não-viesado da matriz de covariâncias como sendo

$$\mathbf{S}_p = \frac{\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2}{n-2}.$$

A estatística do teste de razão de verossimilhanças apresentada de forma alternativa é

$$\Lambda = \frac{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|}{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}} + \frac{n_1 n_2}{n_2} (\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.})(\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.})^\top|},$$

que pode ser simplificada em

$$\Lambda = \left[1 + \frac{n_1 n_2 n}{(n-2)n^2} (\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.})^\top \mathbf{S}_p^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.})\right]^{-n/2} = \left[1 + \frac{T_c^2}{n-2}\right]^{-n/2}.$$

Assim, deve-se rejeitar H_0 se

$$T_c^2 = \frac{n_1 n_2}{n} (\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.})^\top \mathbf{S}_p^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.})$$

for maior ou igual ao valor crítico $(n_1 + n_2 - 2)p / (n_1 + n_2 - 1 - p) F_{\alpha, p, n_1 + n_2 - 1 - p}$, sendo o quantil superior 100 $\alpha\%$ da distribuição F , $F_{\alpha, p, n_1 + n_2 - 1 - p}$, com $f_1 = p$ e $f_2 = n_1 + n_2 - 1 - p$ graus de liberdade.

Para o caso mais geral, em que a hipótese nula é dada por

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\delta}_0$$

e $\boldsymbol{\delta}_0$ é um vetor conhecido em \mathbb{R}^p , considerando ainda $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$, o teste da razão de verossimilhanças é obtido substituindo $\boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\delta}_0$ nas expressões anteriores do modelo reduzido. Nesse caso, deve-se rejeitar a hipótese nula se

$$T_c^2 = \frac{n_1 n_2}{n} (\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.} - \boldsymbol{\delta}_0)^\top \mathbf{S}_p^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.} - \boldsymbol{\delta}_0)$$

superar o valor crítico $(n_1 + n_2 - 2)p / (n_1 + n_2 - 1 - p) F_{\alpha, p, n_1 + n_2 - 1 - p}$. Para mais detalhes veja Ferreira (2018).

2.1.2 Problema de Behrens-Fisher

No caso anterior, uma das pressuposições assumidas para o teste era a homocedasticidade, ou seja, $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2$. No entanto, quando as matrizes de covariâncias são heterogêneas, $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$, não é possível a construção de um teste exato baseado na distribuição T^2 de Hotelling para testar a hipótese nula de igualdade dos vetores de médias de duas populações normais, $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\delta}_0$, pois, neste caso, a distribuição depende dos parâmetros $\boldsymbol{\Sigma}_1$ e $\boldsymbol{\Sigma}_2$ (FERREIRA, 2018). Esse problema é conhecido como problema de Behrens-Fisher multivariado. Gebert (2014) apresenta várias soluções para esse problema, encontradas por diversos autores, sendo que muitas delas sofreram adaptações

ao longo do tempo. A autora ainda destaca que muitas são de alta complexidade e limitadas, além de que em diferentes cenários há um teste que se apresenta como mais adequado.

Muitas das soluções aproximadas, propostas na literatura, segundo Ferreira (2018), são formuladas por meio do ajuste dos graus de liberdades para se obter uma melhor aproximação qui-quadrado ou T^2 de Hotelling. O autor destaca como recomendável o teste modificado de Nel e Van der Merwe (1986) proposto por Krishnamoorthy e Yu (2004) (MNV), que frente aos demais testes é o melhor entre todas as soluções invariantes às transformações lineares para o problema.

Krishnamoorthy e Yu (2004) afirmam que o teste MNV é satisfatório, simples de usar e pode ser facilmente estendido para testar ou estimar quaisquer contrastes especificados. Os autores recomendam também o uso do MNV como referência de comparação para testes futuros envolvendo problema de Behrens-Fisher.

A estatística do teste MNV é dada por

$$T_c^{*2} = (\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.} - \boldsymbol{\delta}_0)^\top \left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1} + \frac{\mathbf{S}_2}{n_2} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_{1.} - \bar{\mathbf{X}}_{2.} - \boldsymbol{\delta}_0),$$

com os graus de liberdade da aproximação do teste MNV para T^2 de Hotelling que, para $p \geq 1$, estão sempre entre $\min(n_1, n_2)$ e $n_1 + n_2$. De acordo com Ferreira (2018), deve-se rejeitar a hipótese nula $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\delta}_0$ quando

$$T_c^{*2} > \frac{vp}{(v+1-p)} F_{\alpha, p, v+1-p},$$

em que o ajuste nos graus de liberdade é dado por v

$$v = \frac{p + p^2}{\sum_{i=1}^2 \frac{1}{n_i - 1} \left\{ \text{tr} \left[\left(\frac{\mathbf{S}_i \mathbf{S}_e^{-1}}{n_i} \right)^2 \right] + \left[\text{tr} \left(\frac{\mathbf{S}_i \mathbf{S}_e^{-1}}{n_i} \right) \right]^2 \right\}},$$

em que

$$\mathbf{S}_e = \frac{\mathbf{S}_1}{n_1} + \frac{\mathbf{S}_2}{n_2}.$$

2.1.3 Teste de Ahmad

Com o objetivo de se obter uma estatística de teste unificada para vetores de médias de uma ou várias amostras, Ahmad (2019a, 2019b) propôs um teste assintótico que tem como principal característica, que o distingue dos demais testes propostos, a flexibilidade quanto às suposições de normalidade multivariada e homocedasticidade, além de contemplar situações de alta dimensionalidade, consideradas pelo autor como $p > n - 2$ ou, mais geralmente, $p > n_i, \forall i = 1, 2$.

Ahmad (2019a, 2019b) considera situações bem gerais em que nem a distribuição é especificada e nem a suposição de homocedasticidade das matrizes de covariâncias é exigida. A ideia é testar a hipótese do tipo $H_0 : \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$. Assim, o vetor de todos os parâmetros das hipóteses nulas a serem testadas é $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^p$. A estatística associada à hipótese nula, T_2 , é definida por

$$T_2 = 1 + \frac{nQ_0}{nQ_1/p},$$

em que as quantidades são detalhadas na seção 3.1.3.

A distribuição de T_2 é apresentada em Ahmad (2019a, 2019b) após os seguintes pressupostos: os momentos de ordem 4 das variáveis aleatórias são finitos; se $n_i \rightarrow \infty$, a razão n_i/n é finita para todo $i = 1, 2$; se $p \rightarrow \infty$, $tr(\boldsymbol{\Sigma}_i)/p$ converge para um valor finito, $O(1)$ (ordem de convergência 1), e também $\boldsymbol{\mu}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_k \boldsymbol{\mu}_j / p^2$ é finito, para $j = 1, 2, k = i$ ou $k = j$.

O autor considerou que a distribuição assintótica de T_2 é uma qui-quadrado dada por χ_f^2/f , em que os graus de liberdade f serão detalhados na seção 3.1.3. O autor também propôs uma distribuição normal assintótica da estatística, considerando que $E(T_2) = 1$ e $Var(T_2) = 2/f$. Assim, $T_2 \sim N(1, 2/f)$.

Como será apresentado na seção 2.4, testes via *bootstrap* se mostram robustos e apresentam desempenho superior ao de seus concorrentes assintóticos (MIRANDA; FERREIRA, 2006; SILVA; FERREIRA; NOGUEIRA, 2008; GEBERT, 2014), como é o caso do teste de Ahmad (2019a, 2019b), o que motivou a utilização dos métodos *bootstrap* neste trabalho.

2.2 Métodos *bootstrap*

A técnica *bootstrap* é um dos principais métodos computacionais intensivos, através da qual é possível realizar testes de hipóteses, estimar parâmetros por intervalos e estimar erros padrões (FERREIRA, 2013). Além disso, Efron (1979) e Manly (2006) afirmam que com o método é possível estimar quantidades relacionadas à precisão da obtenção dos parâmetros.

A técnica *bootstrap* consiste em reamostragens com reposição da amostra original, sendo que o número de repetições ideal, B , é de no mínimo 1000 (MANLY, 2006; GEBERT, 2014). A grande vantagem que se tem do uso do método é quando não se conhece a distribuição de probabilidade e o modelo normal não é adequado para a população em estudo. Além disso, quando são violadas as condições assumidas para a aplicação de um teste, ao se utilizar deste método, o problema se torna extremamente factível e simples de ser resolvido (FERREIRA, 2013). Existem duas formas básicas do método, o *bootstrap* paramétrico e o *bootstrap* não-paramétrico, sendo que a diferença entre as duas versões é que, no caso do *bootstrap* paramétrico é necessário assumir algum tipo de distribuição de probabilidade, enquanto no não-paramétrico não há esta necessidade, bastando somente assumir que as variáveis aleatórias atendam ao princípio de serem permutáveis, ou seja, que a distribuição de probabilidade de quaisquer observações consecutivas não se altera quando a ordem das observações é trocada, que é uma suposição mais fraca que sejam independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

2.2.1 *Bootstrap* não-paramétrico

A ideia do *bootstrap* não-paramétrico é a substituição dessa distribuição da população, que pode ser desconhecida, por uma distribuição empírica. Esta distribuição é obtida ao realizar B reamostragens com reposição da amostra original, em que o tamanho destas pseudoamostras é o mesmo obtido na amostra original, e assim construir uma amostragem do estimador do parâmetro (FERREIRA, 2013), que de acordo com Saha, Dey e Maiti (2018) tem-se um total de n^n possíveis reamostras. De acordo com a teoria de amostragem, o processo se baseia no fato da amostra conter toda a informação da população.

Para o caso de testes de hipótese, a ideia do método, de acordo com Ferreira (2013), se baseia na observação do valor do parâmetro, sob a hipótese nula, estar ou não no intervalo de confiança. Caso ele pertença ao intervalo, aceita-se a hipótese nula H_0 ; caso contrário, rejeita-se H_0 . O autor destaca alguns aspectos para se construir um teste de hipótese genuinamente baseado no método *bootstrap*:

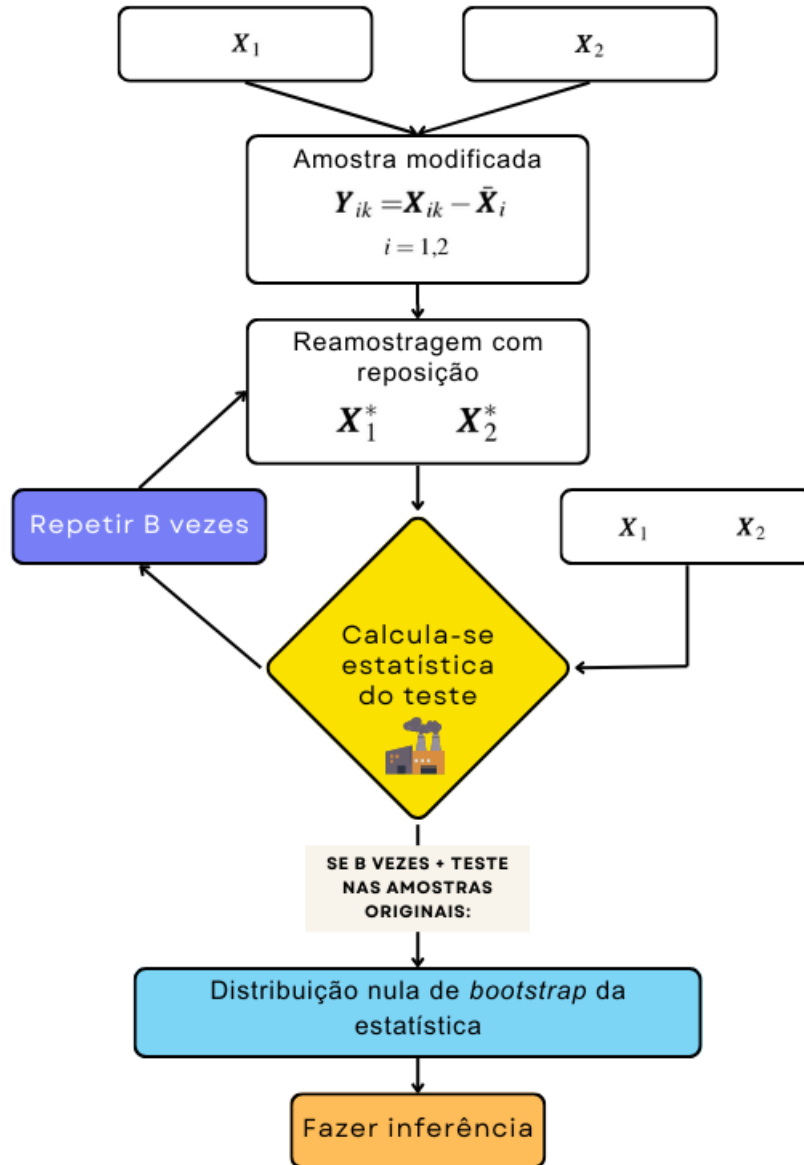
- a) observar que o teste é baseado na distribuição de uma estatística;
- b) imposição da hipótese nula durante o processo de obtenção da distribuição *bootstrap* da estatística do teste;
- c) a distribuição nula *bootstrap* da estatística do teste deve ser usada para obtenção de valores- p , e não para intervalos de confiança;
- d) a estatística não precisa necessariamente ser uma estimativa do parâmetro de interesse.

Para o caso específico de comparações de duas médias populacionais é comum substituir, em cada amostra, as observações pelos resíduos, que são obtidos pela diferença entre a observação e a média amostral correspondente. Os resíduos provenientes das duas amostras, \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 , são combinados em uma amostra única, \mathbf{Y} , de tamanho $n_1 + n_2$, em que n_1 e n_2 são os tamanhos da primeira e da segunda população, respectivamente, realiza-se reamostragem com reposição obtendo \mathbf{X}_1^* e \mathbf{X}_2^* de tamanhos, respectivamente, n_1 e n_2 , e, em seguida, calcula-se a estatística do teste (SILVA, 2005). Esse processo é repetido B vezes. A estatística do teste também deve ser calculada nos dados originais. Os B valores, juntamente com o valor obtido na amostra original, formam um vetor de dimensão $B + 1$, que determina a distribuição nula de *bootstrap* da estatística, a partir da qual pode-se fazer inferências. Uma forma seria calcular a proporção em que a estatística obtida na amostra original é maior ou igual aos valores obtidos na estatística da distribuição nula *bootstrap*, e se essa proporção for menor ou igual ao nível de significância adotado, rejeita-se a hipótese nula.

Na Figura 2.1 é apresentado o fluxograma em que é ilustrada a comparação entre dois vetores de médias via *bootstrap* não-paramétrico.

Uma vez apresentado o método que será utilizado em um dos testes propostos, torna-se necessário abordar as estratégias que serão consideradas para avaliar o desempenho da estatística do teste e de seus concorrentes, sendo elas, avaliar as taxas de erro tipo I e o poder, além disso, avaliar a robustez, que são abordados na próxima seção.

Figura 2.1 – Fluxograma do método *bootstrap* não-paramétrico de teste entre dois vetores de médias.



Fonte: Do autor (2023).

2.3 Erro tipo I, poder e robustez de um teste

O teste de hipóteses é, sem dúvidas, uma das partes mais importantes para os pesquisadores. No entanto, é preciso saber que, ao se tomar uma decisão, ou de rejeição ou de não rejeição de uma

hipótese nula H_0 , é possível estar incorrendo em erros. Tais erros são conhecidos como erros tipo I e tipo II, ou respectivamente, falso positivo e falso negativo (VIEIRA, 2021). O primeiro se refere a rejeitar a hipótese nula dado que ela é verdadeira; já o segundo se dá quando, ao realizar o teste, não rejeita-se a hipótese nula, dado que ela é falsa.

O tamanho do erro tipo I é definido pela probabilidade $\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$, que pode ser fixado pelo pesquisador. O ideal para um teste é manter o tamanho do erro tipo I no nível de significância adotado. Já o tamanho do erro tipo II é definido pela probabilidade $\beta = P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$ (FERREIRA, 2013).

A Tabela 2.1 apresenta um resumo dos dois tipos de erros que podem ocorrer numa tomada de decisão sob uma hipótese nula H_0 e suas respectivas probabilidades entre parênteses.

Tabela 2.1 – Tipos de erros e decisões corretas, com suas respectivas probabilidades associadas entre parênteses.

Decisão	Realidade	
	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Não rejeitar H_0	Decisão correta ($1 - \alpha$)	Erro tipo II (β)
Rejeitar H_0	Erro tipo I (α)	Decisão correta ($1 - \beta$)

Fonte: Do autor (2023).

Silva (2005) ressalta a impossibilidade de se controlar a probabilidade de ocorrência simultaneamente dos erros, pois a tentativa de diminuir um erro aumenta o outro, para um tamanho de amostra fixo. Portanto, é necessário manter um equilíbrio entre ambas as taxas de erro. De acordo com Gebert (2014), o erro tipo I é possível de ser controlado, uma vez que ele é fixado pelo pesquisador previamente, e que, por serem inversamente proporcionais, a única forma de reduzir simultaneamente os erros é com o aumento do tamanho da amostra. O valor para fixação prévia de α usualmente empregado é, segundo Ferreira (2013), entre 0,10 e 0,01. De acordo com os tamanhos reais de erro tipo I de um teste, se o valor for menor que o nível nominal de significância pré-estabelecido, α , ele é considerado conservativo ou rigoroso e, em caso contrário, é chamado de liberal (GEBERT, 2014).

Vieira (2021) chama atenção para o poder estatístico, que é uma probabilidade relacionada com a probabilidade de se cometer o erro tipo II, dada por $(1 - \beta)$, ou seja, é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa, fixados o tamanho do efeito, o nível de significância e o tamanho amostral. O poder de um teste é a habilidade de se detectar as diferenças reais entre tratamentos (EVANS; ROSENTHAL, 2010; MITTELHAMMER, 2013). Como há uma relação estreita entre taxa de erro tipo II e o poder estatístico, como vimos anteriormente, a avaliação do erro tipo II pode ser substituída pela avaliação do poder estatístico.

Outro fato relevante abordado por Gebert (2014) é a avaliação da robustez de um teste que, de acordo com a autora, um teste é considerado robusto se ele mantém, ao menos de forma aproximada, as características delineadas pela teoria mesmo quando se violar uma ou mais das pressuposições estabelecidas. Assim, um teste robusto é flexível e de fácil adaptação para situações que diferem daquelas estabelecidas pelas pressuposições adotadas na sua formulação.

Portanto, para ter um teste otimizado deve-se avaliar a sua taxa de erro tipo I, o seu poder estatístico e a sua robustez. Desta forma, é possível verificar a eficiência do teste e comparar com outros de maneira mais ampla, como por exemplo, sob a violação de alguma pressuposição.

Na seção seguinte serão apresentados alguns resultados encontrados na literatura sobre o desempenho das estatísticas de teste citadas na seção 2.1, bem como alguns resultados de versões *bootstrap* de estatísticas de teste.

2.4 Principais resultados encontrados das aplicações dos testes

Neste trabalho foi proposto a utilização do método *bootstrap* para a proposição de um dos testes de hipótese sobre a igualdade de vetores de médias entre duas populações multivariadas independentes, cujo desempenho foi comparado com o das estatísticas de testes T^2 de Hotelling, MNV e o teste proposto por Ahmad. Assim, nesta seção serão discutidos os resultados destas estatísticas de teste de maneira geral, levando em conta as configurações utilizadas pelos autores nas simulações.

2.4.1 Resultados do teste MNV

Krishnamoorthy e Yu (2004) propuseram uma modificação do teste Nel e Van der Merwe (1986) (MNV) para o problema de Behrens-Fisher multivariado. Os autores o compararam, via simulação Monte Carlo, com os testes de Johansen (1980) e de Yao (1965), em que se avaliou a taxa de erro tipo I e o poder.

Para as simulações, Krishnamoorthy e Yu (2004) usaram a sub-rotina IMSL de RNNOA para gerar variáveis aleatórias normais, e a sub-rotina Fortran de Smith e Hocking (1972) para gerar matrizes Wishart e, para cada configuração, fizeram 100.000 execuções. O erro máximo de uma estimativa foi adotado como 0,003 para estimar as probabilidades.

Os autores apontam a existência de uma matriz não singular \mathbf{M} tal que, de acordo com Yao (1965), $\tilde{\Sigma}_1 = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^\top$, $\tilde{\Sigma}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^\top$ e $\tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_2 = \mathbf{M}\mathbf{M}^\top$, em que $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p < 1$, e λ_i 's são os autovalores de $(\tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_2)^{-1/2}\tilde{\Sigma}_1(\tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_2)^{-1/2}$.

Pelo motivo de todas as três soluções das equações em relação à \mathbf{M} serem invariantes e não singulares, sem perda de generalidade, os autores assumem $\tilde{\Sigma}_1 = \mathbf{\Lambda}$ e $\tilde{\Sigma}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}$. Krishnamoorthy e Yu (2004) computaram a taxa de erro tipo I e o poder com $p = \{1, 2, 10\}$ e parâmetro de não centralidade $\delta = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top (\tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_2)^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)$. Os vetores de médias foram escolhidos de tal forma que $\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 = (\sqrt{\delta/p})\mathbf{1}$, em que $\mathbf{1}$ é um vetor de uns.

As taxas de erro tipo e poder, obtidos pelos autores, são apresentados nas Tabelas 2.2 e 2.3, respectivamente, para os testes de Yao, Johansen e o MNV em função dos tamanhos amostrais, $n_1 \in \{6, 12, 19\}$ e $n_2 \in \{12, 19, 29\}$, parâmetro de não centralidade $\delta \in \{0, 2, 4, 8, 16\}$, números de variáveis $p \in \{2, 10\}$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$.

Tabela 2.2 – Resultados de Krishnamoorthy e Yu (2004) para taxa de erro tipo I e poder dos testes Yao, Johansen e MNV, considerando $p = 2$, $n_1 \in \{6, 12\}$, $n_2 \in \{12\}$, $\delta \in \{0, 2, 4, 8, 16\}$ e $\lambda_i \in \{0,1, 0,2, 0,5, 0,7, 0,9\}$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ (Continua).

		$p = 2$		$\alpha = 0,05$			
(λ_1, λ_2)	δ	$n_1 = 6$ e $n_2 = 12$			$n_1 = 12$ e $n_2 = 12$		
		Yao	Johansen	MNV	Yao	Johansen	MNV
	0	0,051	0,051	0,050	0,053 ⁺	0,052	0,051
	2	0,191	0,193	0,190	0,193	0,194	0,191

Tabela 2.2 – Resultados de Krishnamoorthy e Yu (2004) para taxa de erro tipo I e poder dos testes Yao, Johansen e MNV, considerando $p = 2$, $n_1 \in \{6, 12\}$, $n_2 \in \{12\}$, $\delta \in \{0, 2, 4, 8, 16\}$ e $\lambda_i \in \{0, 1, 0, 2, 0, 5, 0, 7, 0, 9\}$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ (Conclusão).

		$p = 2$ e $\alpha = 0,05$					
(λ_1, λ_2)	δ	$n_1 = 6$ e $n_2 = 12$			$n_1 = 12$ e $n_2 = 12$		
		Yao	Johansen	MNV	Yao	Johansen	MNV
(0,1, 0,1)	4	0,341	0,345	0,340	0,347	0,350	0,346
	8	0,612	0,617	0,612	0,617	0,621	0,617
	16	0,900	0,903	0,901	0,900	0,904	0,901
(0,2, 0,5)	0	0,049	0,051	0,050	0,048	0,049	0,049
	2	0,186	0,190	0,188	0,196	0,197	0,196
	4	0,342	0,347	0,344	0,360	0,362	0,361
	8	0,623	0,628	0,625	0,646	0,648	0,647
	16	0,907	0,910	0,908	0,920	0,921	0,920
	0	0,048	0,050	0,049	0,049	0,050	0,049
(0,2, 0,7)	2	0,186	0,190	0,187	0,196	0,199	0,198
	4	0,338	0,344	0,340	0,364	0,366	0,365
	8	0,612	0,617	0,613	0,646	0,647	0,646
	16	0,901	0,904	0,901	0,923	0,924	0,923
	0	0,047 ⁻	0,053 ⁺	0,050	0,047 ⁻	0,050	0,049
	2	0,179	0,189	0,185	0,193	0,198	0,197
(0,1, 0,9)	4	0,331	0,340	0,334	0,356	0,361	0,359
	8	0,598	0,606	0,599	0,641	0,643	0,641
	16	0,895	0,897	0,894	0,922	0,922	0,921
	0	0,048	0,049	0,048	0,048	0,048	0,048
	2	0,187	0,190	0,187	0,198	0,199	0,198
(0,5, 0,5)	4	0,342	0,346	0,342	0,362	0,364	0,363
	8	0,612	0,619	0,615	0,650	0,652	0,651
	16	0,898	0,904	0,902	0,925	0,926	0,926
	0	0,064 ⁺	0,059 ⁺	0,054 ⁺	0,052	0,052	0,051
	2	0,181	0,182	0,171	0,194	0,194	0,192
(0,9, 0,9)	4	0,305	0,313	0,295	0,345	0,347	0,343
	8	0,524	0,544	0,519	0,614	0,618	0,614
	16	0,802	0,827	0,807	0,900	0,903	0,901

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Krishnamoorthy e Yu (2004).

Tabela 2.3 – Resultados de Krishnamoorthy e Yu (2004) para taxa de erro tipo I e poder dos testes Yao, Johansen e MNV, considerando $p = 10$, $n_1 \in \{19\}$, $n_2 \in \{19, 29\}$, $\delta \in \{0, 2, 4, 8, 16\}$ e $\lambda_i \in \{0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9\}$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ (Continua).

$(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$	δ	$p = 10$ e $\alpha = 0,05$					
		$n_1 = 19$ e $n_2 = 29$			$n_1 = 19$ e $n_2 = 19$		
		Yao	Johansen	MNV	Yao	Johansen	MNV
(0,1,0,1,	0	0,063 ⁺	0,056 ⁺	0,052	0,055 ⁺	0,058 ⁺	0,051
0,1,0,1,	2	0,118	0,111	0,104	0,107	0,113	0,101
0,1,0,1,	4	0,188	0,179	0,170	0,169	0,178	0,161
0,1,0,1,	8	0,349	0,343	0,329	0,324	0,342	0,315
0,1,0,1)	16	0,655	0,657	0,642	0,620	0,646	0,618
(0,1,0,1,	0	0,049	0,052	0,052	0,046 ⁻	0,052	0,047 ⁻
0,1,0,1,	2	0,099	0,104	0,104	0,094	0,106	0,098
0,5,0,5,	4	0,163	0,171	0,171	0,153	0,170	0,158
0,5,0,9,	8	0,328	0,337	0,338	0,308	0,333	0,315
0,9,0,9)	16	0,652	0,661	0,661	0,617	0,644	0,626
(0,5,0,5,	0	0,045 ⁻	0,043 ⁻	0,044 ⁻	0,046 ⁻	0,052	0,049
0,5,0,5,	2	0,104	0,100	0,101	0,093	0,104	0,096
0,5,0,5,	4	0,174	0,170	0,172	0,156	0,171	0,161
0,5,0,5,	8	0,331	0,331	0,335	0,292	0,316	0,300
0,5,0,5)	16	0,659	0,660	0,663	0,617	0,645	0,628
(0,1,0,1,	0	0,053 ⁺	0,053 ⁺	0,051	0,074 ⁺	0,074 ⁺	0,057 ⁺
0,1,0,1,	2	0,112	0,111	0,108	0,129	0,133	0,106
0,1,0,1,	4	0,189	0,185	0,182	0,192	0,202	0,165
0,1,0,1,	8	0,339	0,339	0,333	0,338	0,358	0,306
0,1,0,9)	16	0,661	0,663	0,658	0,612	0,650	0,591
(0,1,0,1,	0	0,049	0,048	0,049	0,055 ⁺	0,058 ⁺	0,050
0,1,0,1,	2	0,103	0,102	0,103	0,107	0,114	0,101
0,1,0,5,	4	0,171	0,170	0,172	0,173	0,183	0,165
0,5,0,5,	8	0,339	0,338	0,341	0,323	0,340	0,313
0,5,0,5)	16	0,665	0,665	0,668	0,622	0,647	0,619
(0,1,0,2,	0	0,051	0,050	0,051	0,047 ⁻	0,053 ⁺	0,048
0,3,0,4,	2	0,104	0,104	0,104	0,093	0,104	0,096
0,5,0,6,	4	0,175	0,174	0,174	0,153	0,169	0,158
0,7,0,8,	8	0,339	0,339	0,339	0,309	0,332	0,316
0,9,0,9)	16	0,662	0,665	0,665	0,619	0,644	0,626
(0,9,0,9,	0	0,106 ⁺	0,083 ⁺	0,058 ⁺	0,094 ⁺	0,083 ⁺	0,056 ⁺
0,9,0,9,	2	0,171	0,145	0,107	0,115	0,144	0,104
0,9,0,9,	4	0,242	0,217	0,167	0,224	0,217	0,162
0,9,0,9,	8	0,388	0,376	0,306	0,365	0,372	0,295

Tabela 2.3 – Resultados de Krishnamoorthy e Yu (2004) para taxa de erro tipo I e poder dos testes Yao, Johansen e MNV, considerando $p = 10$, $n_1 \in \{19\}$, $n_2 \in \{19, 29\}$, $\delta \in \{0, 2, 4, 8, 16\}$ e $\lambda_i \in \{0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9\}$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ (Conclusão).

		$p = 10$ e $\alpha = 0,05$					
		$n_1 = 19$ e $n_2 = 29$			$n_1 = 19$ e $n_2 = 19$		
$(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$	δ	Yao	Johansen	MNV	Yao	Johansen	MNV
$(0,9, 0,9)$	16	0,644	0,664	0,585	0,620	0,655	0,569

–: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

+ : significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Krishnamoorthy e Yu (2004).

Krishnamoorthy e Yu (2004) mostraram, numericamente, que a solução MNV é a melhor entre as soluções assintóticas e invariantes disponíveis para o problema de Behrens-Fisher, pois foi o único teste que controlou a taxa de erro tipo I satisfatoriamente. Por exemplo, para o caso em que $p = 10$, em relação à taxa de erro tipo I, o teste de Johansen chegou a 0,083 e o de Yao a 0,106, enquanto o MNV não excedeu 0,058. Além disso, os autores afirmam que o teste MNV é satisfatório, simples de usar e pode ser facilmente estendido para estimar e testar quaisquer contrastes, também ser usado como comparativo para futuros testes para estabelecerem sua superioridade.

2.4.2 Resultados do teste de Ahmad

Como apresentado na Subseção 2.1.3, o teste assintótico proposto por Ahmad (2019a, 2019b) é robusto para comparações entre vetores de médias de populações. O teste foi comparado com os testes de Bai e Saranadasa (1996) (T_{BS}) e Chen e Qin (2010) (T_{CQ}) para duas populações e, nesta ocasião, chamado de T_2 .

Para comparações, o autor fez um estudo, via simulação Monte Carlo, da taxa erro tipo I e poder dos testes. As configurações usadas por Ahmad (2019b) foram: duas amostras aleatórias de vetores i.i.d. de tamanhos n_1 e n_2 , em que $n_1 \in \{10, 20, 50\}$, $n_2 = 2n_1$, com cada uma das dimensões $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, geradas a partir de distribuições normal, t com 7 graus de liberdade (t_7) e uniforme $(0, 1)$, e estruturas das matrizes de covariâncias Σ_i , $i = 1, 2$, simetria composta (SC) e autorregressiva de ordem 1 (AR(1)) definidas, respectivamente, como $\kappa \mathbf{I} + \rho \mathbf{J}$ e $\text{Cov}(X_k, X_l) = \kappa \rho^{|k-l|}$, $\forall k, l$, com \mathbf{I} uma matriz identidade e \mathbf{J} uma matriz de uns.

Para a taxa de erro tipo I, Ahmad (2019b) considerou as seguintes estruturas para Σ_i : Σ_1 e Σ_2 com estrutura de SC com $\rho = 0,5$ e $\rho = 0,8$, respectivamente; Σ_1 com SC e Σ_2 com AR(1), ambas com $\rho = 0,5$. Para o poder, foi usado SC com $\rho = 0,4$ e $\rho = 0,8$, respectivamente. Foi tomado $\kappa = 1$ para todos os casos.

Na Tabela 2.4 são apresentados os resultados obtidos por Ahmad (2019b) em $N = 1000$ repetições para a taxa de erro tipo I, considerando o nível nominal de significância $\alpha = 0,05$. O autor destaca o desempenho preciso do teste T_2 para todos os parâmetros, enquanto T_{BS} e T_{CQ} se mostram respectivamente muito liberais e muito conservativos. Ahmad (2019b) justifica como possível motivo para o desempenho dos testes T_{BS} e T_{CQ} , a violação das suposições para os testes.

Tabela 2.4 – Resultados de Ahmad (2019b) para a taxa de erro tipo I dos testes de Ahmad (T_2), de Bai e Saranadasa (T_{BS}) e de Chen e Qin (T_{CQ}), considerando $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, $n_1 \in \{10, 20, 50\}$, $n_2 \in \{20, 40, 100\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuições multivariadas normal, t_7 e uniforme (0, 1) e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 . (Continua).

		$\alpha = 0,05$						
Distribuição	n_1, n_2	p	$\Sigma_1 = SC, \Sigma_2 = SC$			$\Sigma_1 = SC, \Sigma_2 = AR$		
			T_2	T_{BS}	T_{CQ}	T_2	T_{BS}	T_{CQ}
Normal	10, 20	50	0,063	0,104 ⁺	0,023 ⁻	0,043	0,118 ⁺	0,010 ⁻
		100	0,054	0,113 ⁺	0,024 ⁻	0,048	0,181 ⁺	0,024 ⁻
		300	0,057	0,112 ⁺	0,027 ⁻	0,056	0,160 ⁺	0,015 ⁻
		500	0,047	0,105 ⁺	0,012 ⁻	0,044	0,135 ⁺	0,013 ⁻
	20, 40	50	0,061	0,110 ⁺	0,030 ⁻	0,043	0,125 ⁺	0,012 ⁻
		100	0,051	0,106 ⁺	0,016 ⁻	0,050	0,143 ⁺	0,012 ⁻
		300	0,059	0,115 ⁺	0,025 ⁻	0,059	0,148 ⁺	0,014 ⁻
		500	0,056	0,087 ⁺	0,022 ⁻	0,055	0,163 ⁺	0,021 ⁻
	50, 100	50	0,064	0,104 ⁺	0,026 ⁻	0,055	0,120 ⁺	0,011 ⁻
		100	0,052	0,097 ⁺	0,025 ⁻	0,048	0,127 ⁺	0,015 ⁻
		300	0,066	0,107 ⁺	0,022 ⁻	0,056	0,150 ⁺	0,009 ⁻
		500	0,053	0,099 ⁺	0,021 ⁻	0,056	0,164 ⁺	0,016 ⁻
t_7	10, 20	50	0,056	0,094 ⁺	0,025 ⁻	0,036	0,103 ⁺	0,013 ⁻
		100	0,046	0,087 ⁺	0,023 ⁻	0,052	0,140 ⁺	0,016 ⁻
		300	0,042	0,095 ⁺	0,019 ⁻	0,036	0,119 ⁺	0,014 ⁻
		500	0,053	0,099 ⁺	0,014 ⁻	0,056	0,144 ⁺	0,015 ⁻
	20, 40	50	0,047	0,086 ⁺	0,020 ⁻	0,057	0,110 ⁺	0,016 ⁻
		100	0,044	0,086 ⁺	0,015 ⁻	0,053	0,122 ⁺	0,011 ⁻
		300	0,052	0,108 ⁺	0,030 ⁻	0,041	0,119 ⁺	0,013 ⁻

Tabela 2.4 – Resultados de Ahmad (2019b) para a taxa de erro tipo I dos testes de Ahmad (T_2), de Bai e Saranadasa (T_{BS}) e de Chen e Qin (T_{CQ}), considerando $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, $n_1 \in \{10, 20, 50\}$, $n_2 \in \{20, 40, 100\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuições multivariadas normal, t_7 e uniforme (0, 1) e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 . (Conclusão).

		$\alpha = 0,05$						
Distribuição	n_1, n_2	p	$\Sigma_1 = SC, \Sigma_2 = SC$			$\Sigma_1 = SC, \Sigma_2 = AR$		
			T_2	T_{BS}	T_{CQ}	T_2	T_{BS}	T_{CQ}
Uniforme (0,1)	50, 100	500	0,053	0,096 ⁺	0,019 ⁻	0,054	0,113 ⁺	0,012 ⁻
		50	0,049	0,091 ⁺	0,022 ⁻	0,063	0,124 ⁺	0,020 ⁻
		100	0,054	0,096 ⁺	0,020 ⁻	0,058	0,122 ⁺	0,010 ⁻
		300	0,057	0,089 ⁺	0,025 ⁻	0,050	0,122 ⁺	0,012 ⁻
		500	0,055	0,104 ⁺	0,021 ⁻	0,057	0,141 ⁺	0,010 ⁻
	10, 20	50	0,062	0,115 ⁺	0,025 ⁻	0,046	0,104 ⁺	0,016 ⁻
		100	0,055	0,107 ⁺	0,022 ⁻	0,054	0,135 ⁺	0,014 ⁻
		300	0,057	0,114 ⁺	0,019 ⁻	0,054	0,150 ⁺	0,015 ⁻
		500	0,058	0,106 ⁺	0,024 ⁻	0,059	0,163 ⁻	0,013 ⁻
	20, 40	50	0,069	0,105 ⁺	0,020 ⁻	0,060	0,119 ⁺	0,015 ⁻
		100	0,058	0,103 ⁺	0,026 ⁻	0,044	0,122 ⁺	0,013 ⁻
		300	0,053	0,097 ⁺	0,017 ⁻	0,051	0,144 ⁺	0,013 ⁻
		500	0,051	0,118 ⁺	0,027 ⁻	0,056	0,147 ⁺	0,011 ⁻
	50, 100	50	0,054	0,083 ⁺	0,018 ⁻	0,046	0,111 ⁺	0,013 ⁻
		100	0,055	0,107 ⁺	0,024 ⁻	0,051	0,106 ⁺	0,020 ⁻
		300	0,058	0,100 ⁺	0,020 ⁻	0,049	0,148 ⁺	0,016 ⁻
		500	0,052	0,118 ⁺	0,023 ⁻	0,051	0,113 ⁺	0,017 ⁻

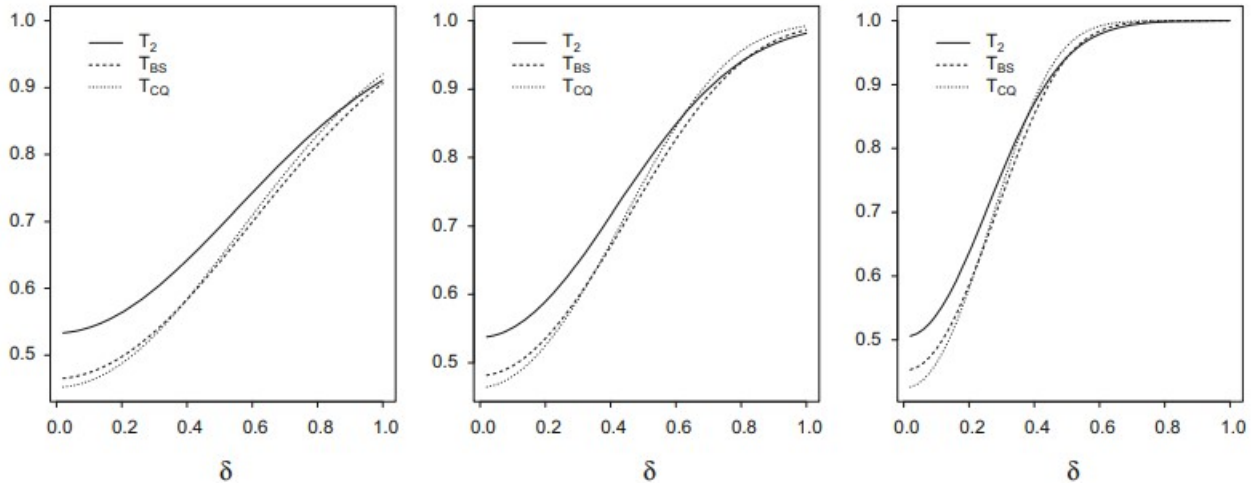
⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Ahmad (2019b).

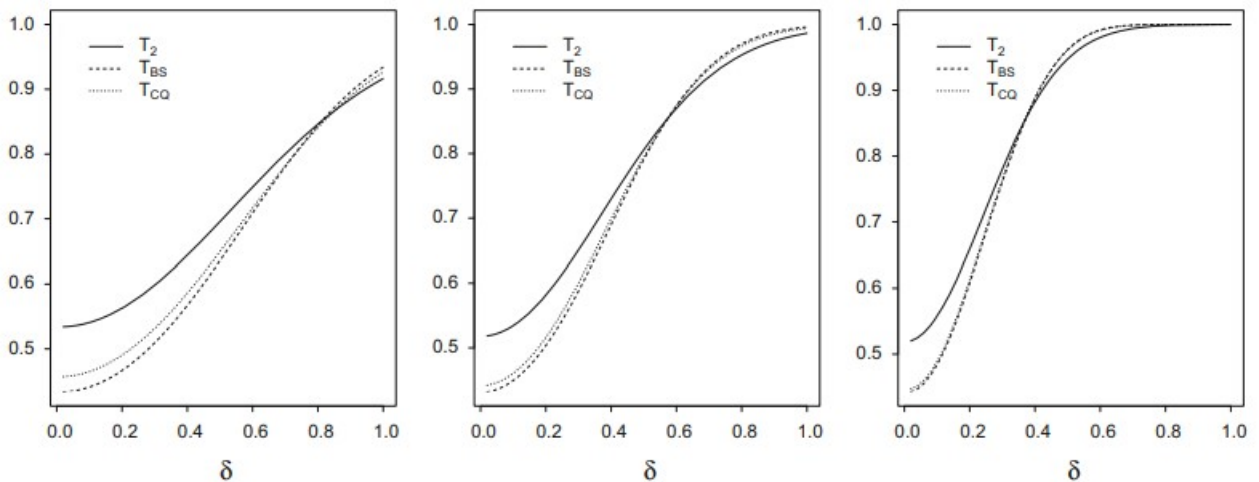
Ahmad (2019b) destaca o poder do teste T_2 frente aos seus concorrentes, onde as curvas se aproximam com o aumento do parâmetro de não centralidade, definido pelo autor como δ , bem como, com o aumento dos tamanhos das amostras. O autor compara as curvas de poder dos testes para a distribuição normal (Figura 2.2) e para a distribuição t (Figura 2.3), para $(n_1, n_2) = (10, 20), (20, 40), (50, 100)$, $p = 100$ e estrutura das matrizes de covariâncias SC com $\rho = 0,4$ e $\rho = 0,8$, respectivamente.

Figura 2.2 – Poder dos testes de Ahmad (T_2), de Bai e Saranadasa (T_{BS}) e de Chen e Qin (T_{CQ}), para distribuição normal multivariada, obtidos por Ahmad (2019b), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (10, 20), (20, 40), (50, 100)$, $\delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estrutura das matrizes de covariâncias SC com $\rho = 0,4$ e $\rho = 0,8$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$.



Fonte: Ahmad (2019b).

Figura 2.3 – Poder dos testes de Ahmad (T_2), de Bai e Saranadasa (T_{BS}) e de Chen e Qin (T_{CQ}), para distribuição t_7 multivariada, obtidos por Ahmad (2019b), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (10, 20), (20, 40), (50, 100)$, $\delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estrutura das matrizes de covariâncias SC com $\rho = 0,4$ e $\rho = 0,8$ e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$.



Fonte: Ahmad (2019b).

2.4.3 Resultados dos métodos *bootstrap*

Muito se tem pesquisado sobre a utilização de métodos computacionais em testes estatísticos, sendo que várias destas pesquisas são estudos e propostas de versões *bootstrap* de estatísticas de testes. Destas, iremos abordar alguns resultados sobre comparações e desempenho dos testes baseados nos métodos *bootstrap*, apresentados em Gebert (2014), Miranda e Ferreira (2006) e Silva, Ferreira e Nogueira (2008). Daremos mais detalhes do trabalho de Gebert (2014), uma vez este também aborda comparações entre vetores de médias de duas populações independentes, além de que, a autora também comparou com o teste MNV.

Miranda e Ferreira (2006) apresentam uma comparação entre testes assintóticos e de *bootstrap* para autocorrelação residual, com o objetivo de avaliar, via simulação Monte Carlo, uma abordagem *bootstrap* do teste Durbin-Watson (DWB), teste de *bootstrap* (B_ρ) aplicado diretamente no estimador de quadrados mínimos de primeira ordem, teste *bootstrap* com correção acelerada de viés aplicado diretamente sobre o parâmetro de autocorrelação ($B\rho Ca$), teste t ($t\rho$), teste t de *bootstrap* ($t\rho B$), teste normal para ρ ($N\rho$), teste normal para ρ com correção de viés ($N\rho c$), teste normal para C de Young (1941) (NC), em que a estatística C proposta por Young (1941) é um estimador de ρ , e por fim, o teste *bootstrap* para C (BC).

De modo geral, dos dez testes comparados, sendo cinco deles que utilizam a metodologia *bootstrap*, que são DWB, B_ρ , $B\rho Ca$, $t\rho B$ e BC, Miranda e Ferreira (2006) concluíram que os testes DWB, BC, $t\rho B$, $N\rho c$ e NC são considerados melhores por apresentarem tamanhos de testes idênticos ao valor nominal, maior poder e foram robustos e, destes, o teste NC foi considerado rigoroso para pequenos valores de α e n . Portanto, pode-se verificar que dos quatro com melhores desempenhos, três utilizam a metodologia *bootstrap*. Para mais detalhes ver Miranda e Ferreira (2006).

Silva, Ferreira e Nogueira (2008) objetivaram avaliar o desempenho, via simulação Monte Carlo, de dois testes de homogeneidade entre matrizes de covariâncias em populações normais e não-normais, avaliando-se a taxa de erro tipo I, o poder e a robustez. Os testes utilizados foram o teste de Bartlett multivariado (MBT) e sua versão *bootstrap* (MBTB). Os autores fizeram combinações entre tamanhos amostrais, número de variáveis, correlação e número de populações, e os

resultados obtidos os levaram a concluir que o teste MBTB foi considerado superior ao assintótico MBT, sendo robusto e controlando a taxa de erro tipo I. Tal estudo, assim como o de Miranda e Ferreira (2006), mostra a robustez dos testes via *bootstrap* considerados.

Gebert (2014) apresenta uma solução via *bootstrap* paramétrico para o problema de Behrens-Fisher multivariado, que a autora chama de TBP, ou seja, comparações entre vetores de médias de duas populações normais p -variadas independentes com heterogeneidade das matrizes de covariâncias. A estatística de teste usada pela autora foi

$$TBP_c = (\bar{\mathbf{X}}_1. - \bar{\mathbf{X}}_2.)^\top (\bar{\mathbf{X}}_1. - \bar{\mathbf{X}}_2.),$$

em que $\bar{\mathbf{X}}_i.$ é o vetor de médias da população i , com $i = 1, 2$.

O teste TBP foi comparado com o MNV e o teste de Krishnamoorthy e Lu (2010), que a autora chama TBPKL. Os testes foram avaliados em duas partes via simulação Monte Carlo. A primeira parte foi a obtenção das taxas de erro tipo I, onde foram simuladas, sob $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{0}$ é um vetor p -dimensional de zeros, amostras aleatórias de duas populações normais multivariadas, $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_i)$, de tamanhos n_i , $i = 1, 2$, em que $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ são as matrizes de covariâncias populacionais $p \times p$, positivas e definidas.

As estruturas adotadas para as matrizes $\boldsymbol{\Sigma}_i$ foram duas, a primeira com estrutura de simetria composta, dada por $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$, em que \mathbf{I} é uma matriz identidade $p \times p$, \mathbf{J} uma matriz $p \times p$ de uns, ρ e σ^2 foram fixados em 0,5 e 1, respectivamente, e $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \delta_p \boldsymbol{\Sigma}_1$, em que $\delta_p = \sqrt[p]{\delta}$, com $\delta = |\boldsymbol{\Sigma}_2|/|\boldsymbol{\Sigma}_1|$ e δ fixado em 1, 2, 8, 16 e 32. A segunda estrutura considerada foi a de matrizes não estruturadas, dada por $\boldsymbol{\Sigma}_1 = TT^\top$, em que T é uma matriz triangular inferior gerada a partir de variáveis aleatórias independentes e com distribuição Gama, e $\boldsymbol{\Sigma}_2$ foi obtida da mesma forma descrita anteriormente, porém utilizou-se apenas $\delta = 32$.

O valor- p obtido em cada teste foi confrontado com o nível nominal de significância α adotado pela autora, em que $\alpha = 0,10, 0,05$ e $0,01$. O processo de geração das amostras, aplicação dos testes e comparação dos valores- p e α foi repetido $N = 2000$ vezes. As probabilidades de se ocorrer o erro tipo I ($\hat{\alpha}_k$) do k -ésimo teste, em que $k = 1$ para TBP, $k = 2$ para MNV e $k = 3$ para

TBPKL, foram estimadas em Gebert (2014) por

$$\hat{\alpha}_k = \frac{\sum_{j=1}^N I(\text{valor-}p_{kj} \leq \alpha)}{N},$$

em que $I(\text{valor-}p_{kj} \leq \alpha)$ é uma função indicadora e $\text{valor-}p_{kj}$ é o valor- p do k -ésimo teste na j -ésima simulação Monte Carlo, com $j = 1, 2, \dots, N$. Foi considerado, pela autora, diferentes tamanhos para as amostras das populações, sendo $n_i \in \{8, 30, 100\}$, com nove configurações possíveis dadas pelo produto cartesiano $|n_1| \times |n_2|$, em que $|n_i|$ é a cardinalidade de n_i . O número de variáveis escolhido nas configurações de Gebert (2014) dependeu dos tamanhos amostrais, sendo, quando o tamanho mínimo das amostras era 8, os p 's foram 2 e 7, quando o menor $n_i = 30$, $p \in \{7, 29\}$ e quando $n_i = 100$, $p \in \{7, 15\}$.

Para o poder, a autora utilizou o mesmo procedimento considerado para o erro tipo I, exceto pelo fato das simulações terem sido realizadas sob $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$, em que $\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{0}$, sem perda de generalidade, e $\boldsymbol{\mu}_2 = [\mu_{21}, \mu_{22}, \dots, \mu_{2p}]^\top$, em que $\mu_{2i} = k\sigma_{\bar{X}_{1i} - \bar{X}_{2i}}$ e $\sigma_{\bar{X}_{1i} - \bar{X}_{2i}}$ dado por

$$\sigma_{\bar{X}_{1i} - \bar{X}_{2i}} = \sqrt{\frac{\sigma_{ii}^{(1)}}{n_1} + \frac{\sigma_{ii}^{(2)}}{n_2}},$$

que é o erro padrão da diferença entre as médias $\bar{X}_{1i} - \bar{X}_{2i}$, para cada variável, $\sigma_{ii}^{(1)}$ e $\sigma_{ii}^{(2)}$ são as variâncias da i -ésima variável das populações, e $k \in \{1, 2, 4, 8\}$ para matrizes com estrutura de simetria composta e $k \in \{1, 2\}$ para o caso de matrizes não estruturadas.

Para o cômputo dos valores do poder, Gebert (2014) usou a seguinte expressão

$$\hat{P}_k = \frac{\sum_{j=1}^N I(\text{valor-}p_{kj} \leq \alpha)}{N},$$

em que $I(\text{valor-}p_{kj} \leq \alpha)$, $\text{valor-}p_{kj}$, α e N são os mesmos descritos para erro tipo I.

Na avaliação da taxa de erro tipo I, considerando matrizes de covariâncias com estrutura de simetria composta, o TBP se sobressaiu, em geral, diante de seus concorrentes para casos de

maiores dimensões, sendo exato ou levemente liberal, enquanto seus concorrentes se mostraram extremamente liberais. Quando o número de variáveis foi baixo, o teste proposto por Gebert (2014) foi levemente liberal, porém apresentou altos valores de poder, o que a autora afirma compensar essa liberdade pequena. Além disso, a autora destaca que o teste TBP foi praticamente estável quanto a variação do número de variáveis, enquanto os concorrentes sofreram variabilidade quando se teve aumento no número de p .

Para o caso de matrizes não estruturadas, o TBP apresentou bom desempenho para amostras grandes, no entanto, para amostras pequenas, se mostrou levemente liberal, mas, de modo geral, o teste TBP apresentou um desempenho maior que o de seus concorrentes.

Na Tabela 2.5 podem ser observados os resultados encontrados por Gebert (2014) para as taxas de erro tipo I dos testes em função dos tamanhos amostrais, $n_1 = 8$ e $n_2 = 30$, grau de heterogeneidade das matrizes de covariâncias $\delta \in \{1, 2, 8, 16, 32\}$, números de variáveis $p \in \{2, 7\}$ e nível nominal de significância $\alpha \in \{0,01, 0,05, 0,10\}$.

Tabela 2.5 – Resultados encontrados por Gebert (2014) para taxa de erro tipo I dos testes TBP, TBPKL e MNV, considerando $p \in \{2, 7\}$, $n_1 = 8$, $n_2 = 30$, $\delta \in \{1, 2, 8, 16, 32\}$ e $\alpha \in \{0,01, 0,05, 0,01\}$ (Continua).

α	p	$n_1 = 8$		$n_2 = 30$	
		δ	TBP	TBPKL	MNV
$\alpha = 0,10$	$p = 2$	1	0,1175	0,1050	0,0990
		2	0,1250 ⁺	0,1160	0,1095
		8	0,1090	0,1040	0,1030
		16	0,1120	0,1160	0,1145
		32	0,1160	0,1030	0,0975
	$p = 7$	1	0,1200 ⁺	0,1800 ⁺	0,1460 ⁺
		2	0,1035	0,1830 ⁺	0,1550 ⁺
		8	0,1030	0,1635 ⁺	0,1455 ⁺
		16	0,1080	0,1510 ⁺	0,1245 ⁺
		32	0,1135	0,1600 ⁺	0,1400 ⁺
$\alpha = 0,05$	$p = 2$	1	0,0705 ⁺	0,0635	0,0560
		2	0,0665 ⁺	0,0605	0,0575
		8	0,0620	0,0490	0,0460
	16	0,0675 ⁺	0,0595	0,0570	
	32	0,0445	0,0390	0,0380 ⁻	
	1	0,0660 ⁺	0,0990 ⁺	0,0765 ⁺	

Tabela 2.5 – Resultados encontrados por Gebert (2014) para taxa de erro tipo I dos testes TBP, TBPKL e MNV, considerando $p \in \{2, 7\}$, $n_1 = 8$, $n_2 = 30$, $\delta \in \{1, 2, 8, 16, 32\}$ e $\alpha \in \{0,01, 0,05, 0,01\}$ (Conclusão).

		$n_1 = 8$ e $n_2 = 30$				
α	p	δ	TBP	TBPKL	MNV	
$\alpha = 0,01$	$p = 7$	2	0,0630	0,0910 ⁺	0,0740 ⁺	
		8	0,0635	0,0845 ⁺	0,0690 ⁺	
		16	0,0565	0,0835 ⁺	0,0655 ⁺	
		32	0,0715 ⁺	0,0905 ⁺	0,0785 ⁺	
	$p = 2$	1	0,0170	0,0125	0,0095	
		2	0,0125	0,0115	0,0100	
		8	0,0135	0,0105	0,0095	
		16	0,0125	0,0115	0,0110	
	$p = 7$	32	0,0150	0,0080	0,0085	
		1	0,0175 ⁺	0,0280 ⁺	0,0180 ⁺	
		2	0,0140	0,0205 ⁺	0,0140	
		8	0,0165	0,0115	0,0080	
			16	0,0190 ⁺	0,0125	0,0065
			32	0,0220 ⁺	0,0140	0,0100

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Gebert (2014).

O poder dos testes obtido por Gebert (2014) é apresentado na Tabela 2.6, para matrizes de covariâncias com estrutura de simetria composta, em função dos tamanhos amostrais, $n_1 = 100$, $n_2 = 8$, $k \in \{4, 8\}$, grau de heterogeneidade das matrizes de covariâncias $\delta \in \{1, 2, 8, 16, 32\}$, números de variáveis $p \in \{2, 7\}$ e nível nominal de significância $\alpha \in \{0,01, 0,05, 0,10\}$.

Tabela 2.6 – Resultados encontrados por Gebert (2014) para taxa de erro tipo I dos testes TBP, TBPKL e MNV, considerando $p \in \{2, 7\}$, $n_1 = 100$, $n_2 = 8$, $\delta \in \{1, 2, 8, 16, 32\}$, $k \in \{4, 8\}$ e $\alpha \in \{0,01, 0,05, 0,01\}$ (Continua).

		$n_1 = 100$ e $n_2 = 8$						
α	p	δ	$k = 4$			$k = 8$		
			TBP	TBPKL	MNV	TBP	TBPKL	MNV
$\alpha = 0,10$	$p = 2$	1	0,9970	0,9700	0,9670	1,0000	1,0000	1,0000
		2	0,9975	0,9765	0,9740	1,0000	1,0000	1,0000
		8	0,9990	0,9665	0,9650	1,0000	1,0000	1,0000
		16	0,9975	0,9695	0,9700	1,0000	1,0000	1,0000
		32	0,9975	0,9675	0,9675	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 2.6 – Resultados encontrados por Gebert (2014) para taxa de erro tipo I dos testes TBP, TBPKL e MNV, considerando $p \in \{2, 7\}$, $n_1 = 100$, $n_2 = 8$, $\delta \in \{1, 2, 8, 16, 32\}$, $k \in \{4, 8\}$ e $\alpha \in \{0,01, 0,05, 0,01\}$ (Conclusão).

$n_1 = 100$ e $n_2 = 8$								
α	p	δ	$k = 4$			$k = 8$		
			TBP	TBPKL	MNV	TBP	TBPKL	MNV
$\alpha = 0,05$	$p = 7$	1	1,0000	0,9490	0,8930	1,0000	1,0000	0,9990
		2	0,9995	0,9445	0,8820	1,0000	1,0000	0,9970
		8	0,9995	0,9305	0,8540	1,0000	1,0000	0,9985
		16	0,9995	0,9270	0,8430	1,0000	0,9995	0,9935
		32	0,9995	0,9225	0,8310	1,0000	0,9995	0,9940
	$p = 2$	1	0,9890	0,9290	0,9205	1,0000	1,0000	1,0000
		2	0,9860	0,9095	0,9040	1,0000	1,0000	1,0000
		8	0,9915	0,8930	0,8905	1,0000	1,0000	1,0000
		16	0,9900	0,9135	0,9120	1,0000	1,0000	1,0000
		32	0,9930	0,9115	0,9070	1,0000	1,0000	1,0000
	$p = 7$	1	0,9980	0,8895	0,7845	1,0000	0,9995	0,9885
		2	0,9990	0,8840	0,7590	1,0000	1,0000	0,9870
8		1,0000	0,8775	0,7480	1,0000	0,9990	0,9815	
16		0,9975	0,8750	0,7475	1,0000	0,9985	0,9755	
32		0,9980	0,8625	0,7060	1,0000	0,9980	0,9760	
$\alpha = 0,01$	$p = 2$	1	0,9605	0,7190	0,6750	1,0000	0,9995	0,9995
		2	0,9490	0,6950	0,6540	1,0000	0,9995	0,9995
		8	0,9515	0,6354	0,6030	1,0000	0,9965	0,9960
		16	0,9480	0,6285	0,6010	1,0000	0,9980	0,9985
		32	0,9575	0,6125	0,5965	1,0000	0,9980	0,9995
	$p = 7$	1	0,9865	0,7230	0,5195	1,0000	0,9900	0,9285
		2	0,9885	0,6940	0,4840	1,0000	0,9950	0,9165
		8	0,9855	0,6870	0,4595	1,0000	0,9905	0,8890
		16	0,9885	0,6650	0,4345	1,0000	0,9855	0,8750
		32	0,9890	0,6600	0,4175	1,0000	0,9810	0,8435

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Gebert (2014).

Gebert (2014) aponta que, de maneira geral, o teste TBP apresentou maior poder, exceto quando os tamanhos das amostras foram muito diferentes um do outro como, por exemplo $n_1 = 100$ e $n_2 = 8$, mas apenas para $k = 1$, $p = 7$ e $\alpha \in \{0,10, 0,05\}$, sendo levemente superado pelo teste TBPKL. Para matrizes não estruturadas e amostras de mesmo tamanho, o TBP superou os demais

testes quando $n_1 = n_2 = 8$ e com maiores números de variáveis. Quando $n_1 \neq n_2$ e com maior números de variáveis, o TBP foi menos poderoso, porém exato quanto ao erro tipo I, enquanto os demais testes se mostraram fortemente liberais quanto ao erro tipo I.

Portanto, os resultados obtidos por Silva, Ferreira e Nogueira (2008), Miranda e Ferreira (2006) e Gebert (2014) mostraram a robustez dos testes via *bootstrap* considerados. Além disso, de maneira geral, apresentaram um desempenho superior ao de seus concorrentes, o que motivou a utilização dos métodos *bootstrap* neste trabalho.

3 METODOLOGIA

Foram considerados, sem perda de generalidade, os vetores aleatórios p -dimensionais (p é o número de variáveis) $\mathbf{X}_{ik} = [X_{ik1}, \dots, X_{ikp}]^\top \sim \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots, n_i$ com vetor p -dimensional de médias $E(\mathbf{X}_{ik}) = \boldsymbol{\mu}_i$ e matriz de covariâncias $Cov(\mathbf{X}_{ik}) = \boldsymbol{\Sigma}_i$ positiva definida $p \times p$ simétrica e \mathfrak{F}_i uma família de distribuição para o i -ésimo tratamento ou população. Foram considerados casos em que a família de distribuição \mathfrak{F}_i refere-se à distribuição normal multivariada e, além disso, o caso bem geral, em que \mathfrak{F}_i é uma distribuição p -variada não necessariamente normal, com matrizes de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_i$'s potencialmente desiguais (heterogêneas) e não balanceado, em que os n_i 's são diferentes (n_i é o tamanho amostral do i -ésimo tratamento ou população). A amostra completa é a combinação das amostras das duas populações em uma única amostra, sendo n o tamanho total da amostra combinada, em que $n = \sum_{i=1}^2 n_i$. Considerou-se os casos típicos com $p < n - 2$ e também casos em que $p \geq n - 2$, de alta dimensionalidade. O interesse da inferência foi nos vetores de parâmetros p -dimensionais $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1$.

Os estimadores não viesados do vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_i$ e da matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_i$ do i -ésimo tratamento (ou população) são dados por

$$\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{k=1}^{n_i} (\mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i)^\top, \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

Quando as matrizes de covariâncias das populações são iguais, ou seja, o caso homogêneo em que $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$, o estimador da matriz de covariâncias comum $\boldsymbol{\Sigma}$ é dado por

$$\mathbf{S}_p = \frac{1}{n - 2} \sum_{i=1}^2 (n_i - 1) \mathbf{S}_i, \quad (3.2)$$

associado à $v = n - 2$ graus de liberdade, $n = n_1 + n_2$.

O caso de interesse geral refere-se às combinações lineares $\mathbf{a}^\top \boldsymbol{\delta}$, para um vetor não nulo conhecido $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, em que $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1$ é o vetor de diferenças entre os dois vetores médias. Um caso de particular interesse foi o caso de $\boldsymbol{\delta}$ *per se*, que inclui todas as possíveis diferenças. O estimador de $\boldsymbol{\delta}$ é $\hat{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\mathbf{X}}_2 - \bar{\mathbf{X}}_1$.

A hipótese nula que foi testada é $H_0 : \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, cuja alternativa é dada por $H_1 : \boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$. O teste T^2 de Hotelling foi aplicado e serviu de referência para as comparações com as demais propostas. Este teste e o MNV foram aplicados somente quando $p < n - 2$. O teste assintótico de Ahmad (2019a, 2019b) foi aplicado em todos os casos, assim como os dois testes propostos no presente trabalho. A seguir serão descritos os testes supondo as estruturas amostrais descritas anteriormente.

3.1 Testes

Nesta subseção são apresentados cálculos dos testes T^2 de Hotelling, MNV, de Ahmad e o desenvolvimento dos testes propostos de Ahmad modificado e a versão *bootstrap* de Ahmad modificado. As rotinas com os comandos do *software* R (R Core Team, 2022) para aplicação dos testes estão descritas no Apêndice A.

3.1.1 Teste T^2 de Hotelling (TH)

A estatística T_c^2 , do teste TH, foi computada por

$$T_c^2 = \frac{n_1 n_2}{n} (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2 - \boldsymbol{\delta}_0)^\top \mathbf{S}_p^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2 - \boldsymbol{\delta}_0). \quad (3.3)$$

A distribuição de T_c^2 , sob H_0 , é exata e proporcional a uma distribuição F central, considerando que as amostras são normais multivariadas e sob homocedasticidade, sendo dada por

$$T_c^2 \sim \frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - 1 - p)} F_{\alpha, p, n_1 + n_2 - 1 - p}. \quad (3.4)$$

A hipótese nula $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}$ foi rejeitada quando o valor obtido da estatística em (3.3) superou o valor crítico da distribuição (3.4), em que $F_{\alpha, p, n_1 + n_2 - 1 - p}$ é o quantil superior 100 α % da distribuição F com $f_1 = p$ e $f_2 = n_1 + n_2 - 1 - p$ graus de liberdade.

3.1.2 Teste MNV

A estatística do teste MNV, T_c^{*2} , foi computada por

$$T_c^{*2} = (\bar{\mathbf{X}}_1. - \bar{\mathbf{X}}_2. - \boldsymbol{\delta}_0)^\top \left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1} + \frac{\mathbf{S}_2}{n_2} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_1. - \bar{\mathbf{X}}_2. - \boldsymbol{\delta}_0),$$

e a hipótese nula foi rejeitada quando

$$T_c^{*2} > \frac{vp}{(v+1-p)} F_{\alpha, p, v+1-p},$$

em que o ajuste nos graus de liberdade é dado por v

$$v = \frac{p+p^2}{\sum_{i=1}^2 \frac{1}{n_i-1} \left\{ \text{tr} \left[\left(\frac{\mathbf{S}_i \mathbf{S}_e^{-1}}{n_i} \right)^2 \right] + \left[\text{tr} \left(\frac{\mathbf{S}_i \mathbf{S}_e^{-1}}{n_i} \right) \right]^2 \right\}} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_e = \frac{\mathbf{S}_1}{n_1} + \frac{\mathbf{S}_2}{n_2}.$$

3.1.3 Teste de Ahmad (TA)

A estatística do teste TA, T_2 , foi computada por

$$T_2 = 1 + \frac{nQ_0}{nQ_1/p}, \quad (3.5)$$

em que $Q_0 = U_0$, sendo a quantidade U_0 dada por

$$U_0 = \sum_{i=1}^2 U_{n_i} - 2U_{n_1 n_2},$$

para

$$U_{n_i} = \frac{1}{n_i(n_i-1)} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\substack{\ell=1 \\ k \neq \ell}}^{n_i} h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{i\ell}) \quad \text{e} \quad U_{n_1 n_2} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{\ell=1}^{n_2} h(\mathbf{X}_{1k}, \mathbf{X}_{2\ell}),$$

sendo os núcleos de U_{n_i} e $U_{n_1 n_2}$ escalados por

$$h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{i\ell}) = \frac{\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell}}{p} \quad h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{2\ell}) = \frac{\mathbf{X}_{1k}^\top \mathbf{X}_{2\ell}}{p}, \quad (3.6)$$

e a quantidade Q_1 dada por

$$Q_1 = \sum_{i=1}^2 Q_{i1}, \quad Q_{i1} = \frac{E_i - U_{n_i}}{n_i}, \quad E_i = \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik}}{n_i}.$$

A rejeição da hipótese nula ocorreu se $T_2 \geq T_\alpha$, em que T_α é dado por $T_\alpha = \chi_{\alpha;f}^2 / f$, sendo $\chi_{\alpha;f}^2$ o quantil superior 100 $\alpha\%$ da distribuição qui-quadrado com graus de liberdade f dado por

$$f = \frac{[tr(\mathbf{\Omega}_0)]^2}{tr(\mathbf{\Omega}_0^2)}, \quad (3.7)$$

em que

$$\mathbf{\Omega}_0 = \frac{n}{p} \hat{\mathbf{\Sigma}}_0 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{\Sigma}}_0 = \sum_{i=1}^2 \frac{\mathbf{S}_i}{n_i}.$$

3.1.4 Proposta de modificação do teste de Ahmad (TAM)

Ahmad (2019a, 2019b) apresenta algumas quantidades para o seu teste de comparações de vetores de médias em alta dimensionalidade e robusto. Uma importante equivalência é feita, mas acredita-se que esteja definida de forma equivocada, levando uma pequena alteração nos valores da estatística do teste produzida. Na sequência são apresentadas a igualdade e as alterações sugeridas na obtenção da estatística da proposta de modificação.

O autor menciona as seguintes identidades

$$Q_{i1} = \frac{tr(\mathbf{S}_i)}{n_i} \quad \text{e} \quad Q_1 = tr(\hat{\mathbf{\Sigma}}_0). \quad (3.8)$$

Entretanto, com as definições das funções h , dadas em (3.6), os resultados (3.8) não se verificam. Assim, ambas as funções foram redefinidas como

$$h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{i\ell}) = \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \quad \text{e} \quad h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{2\ell}) = \mathbf{X}_{1k}^\top \mathbf{X}_{2\ell}.$$

Com esta definição, tem-se

$$U_{n_i} = \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\substack{\ell=1 \\ k \neq \ell}}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell}$$

e

$$Q_{i1} = \frac{1}{n_i} \left[\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\substack{\ell=1 \\ k \neq \ell}}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right],$$

para $i = 1, 2$. Pode-se reestruturar, ainda, a expressão de Q_{i1} da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q_{i1} &= \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \left[\frac{n_i - 1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\substack{\ell=1 \\ k \neq \ell}}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right] \\ &= \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \left[\sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\substack{\ell=1 \\ k \neq \ell}}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right] \\ &= \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \left[\sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\ell=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right]. \end{aligned}$$

Deve-se provar que Q_{i1} é igual a $tr(\mathbf{S}_i)/n_i$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{tr(\mathbf{S}_i)}{n_i} &= \frac{1}{n_i} tr \left[\frac{1}{n_i - 1} \left(\sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{ik}^\top - \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \right) \right] \\
&= \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \left[\sum_{k=1}^{n_i} tr(\mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{ik}^\top) - \frac{1}{n_i} tr \left(\sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \right) \right] \\
&= \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \left[\sum_{k=1}^{n_i} tr(\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik}) - \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} tr(\mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{ik}^\top) \right] \\
&= \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \left[\sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} tr(\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik}) \right] \\
&= \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \left[\sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\ell=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right],
\end{aligned}$$

que corresponde exatamente a Q_{i1} . Da mesma forma, como $Q_1 = Q_{11} + Q_{21}$, então trivialmente temos que $Q_1 = tr(\hat{\Sigma}_0)$, conforme previsto. Com as definições originais, em que os produtos internos e externos foram divididos por p , na definição das funções h , as igualdades de (3.6) não se verificam. Assim, a estatística do teste foi reestruturada para

$$T_{*2} = 1 + \frac{Q_0}{Q_1}, \quad (3.9)$$

que, sob H_0 , possui distribuição assintótica χ_f^2/f , sendo f definido da mesma forma que em (3.7).

Portanto, a estatística (3.9), do TAM, foi computada de forma similar a que foi usada no TA, porém considerando as quantidades aqui apresentadas.

3.1.5 Teste *bootstrap* proposto (TB)

A justificativa para o presente procedimento é o fato de as opções assintóticas serem potencialmente conservativas, como mencionado anteriormente. Para o cômputo da proposta via *bootstrap* não-paramétrico do teste de Ahmad modificado, inicialmente a estatística T_{*2} foi computada na amostra original usando a expressão (3.9). De posse das estimativas $\bar{\mathbf{X}}_i$ de (3.1) da amostra

original foi obtida a amostra modificada dada por

$$\mathbf{Y}_{ik} = \mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i,$$

para $i = 1, 2$ e $k = 1, 2, \dots, n_i$.

Esta amostra foi combinada agrupando as $n = \sum_{i=1}^2 n_i$ observações \mathbf{Y}_{ik} em uma amostra única p dimensional de tamanho n , realizando, dessa forma, a imposição da hipótese nula de igualdade dos vetores de médias. Esta amostra combinada foi reamostrada com reposição, recriando a estrutura da amostra original de 2 populações com n_i observações p -variadas do i -ésimo tratamento ou população, com $i = 1, 2$. Esse processo foi repetido $B = 2000$ vezes.

Em cada conjunto de dados gerado, a estatística T_{*2} em (3.9) foi obtida, gerando a estatística final T_{*2_ℓ} , na ℓ -ésima reamostragem *bootstrap*, ou na amostra original, quando $\ell = B + 1$. Os valores da ℓ -ésima reamostragem *bootstrap* foram armazenados juntamente com o valor original, formando um vetor de dimensão $B + 1$, dado por $\mathbf{T} = [T_{*2_1}, T_{*2_2}, \dots, T_{*2_B}, T_{*2_{(B+1)}}]^\top$. Em seguida, o valor- p foi computado por

$$\text{valor-}p = \frac{\sum_{\ell=1}^{B+1} I\left(T_{*2_\ell} \geq T_{*2_{(B+1)}}\right)}{B + 1},$$

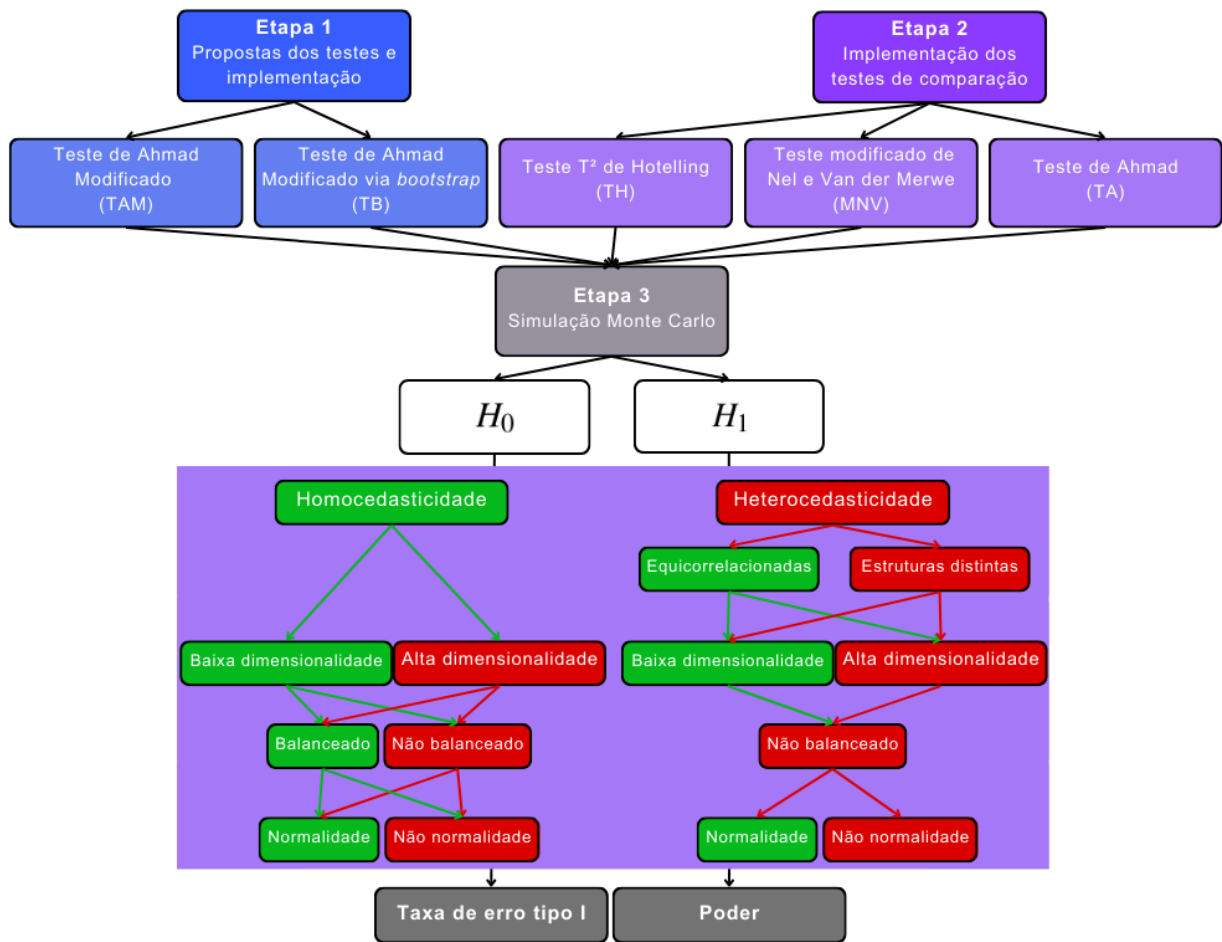
em que $I\left(T_{*2_\ell} \geq T_{*2_{(B+1)}}\right)$ é a função indicadora que retorna 1 se $T_{*2_\ell} \geq T_{*2_{(B+1)}}$ e 0, caso contrário. A rejeição da hipótese nula se deu quando o valor- p obtido foi menor ou igual ao nível nominal de significância adotado, ou seja, quando $\text{valor-}p \leq \alpha$. Na seção seguinte são apresentadas as estratégias consideradas neste trabalho para avaliar o desempenho dos testes.

3.2 Avaliação do desempenho dos testes via simulação Monte Carlo

A avaliação do desempenho dos testes propostos, TAM e TB, e dos testes TH, TA e o MNV foi realizada via simulação Monte Carlo e em duas etapas. Na primeira, em que as simulações foram feitas sob a hipótese $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}$, a proporção de rejeições da hipótese nula está

relacionada à taxa de erro tipo I e, na segunda, feita sob a hipótese H_1 , a proporção de rejeições está relacionada ao poder. Na Figura 3.1 é apresentado o fluxograma da avaliação dos testes.

Figura 3.1 – Fluxograma da avaliação dos testes.



Fonte: Do autor (2023).

Foram usadas configurações de Ahmad (2019b) da Subseção 2.4.2, além de outras para avaliar o desempenho dos testes em casos de baixa dimensionalidades e homocedasticidade: duas amostras aleatórias de vetores i.i.d. de tamanhos n_1 e n_2 , em que $n_1 \in \{10, 20, 50\}$, $n_2 = 2n_1$, com cada uma das dimensões $p \in \{2, 10, 50, 100, 300, 500\}$, geradas a partir das distribuições multivariadas normal, t com 7 graus de liberdade e uniforme $(0, 1)$, e as estruturas das matrizes de covariâncias Σ_i , $i = 1, 2$, foram duas, simetria composta (SC) e autorregressiva de ordem 1 (AR(1)), definidas, respectivamente, por $\Sigma_i = \sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$ e $\text{Cov}(X_k, X_l) = \kappa\rho^{|k-l|}$, $\forall k, l$, em que \mathbf{I}

é uma matriz identidade e \mathbf{J} uma matriz de uns, ambas $p \times p$. Especificamente para os casos homocedásticos, foram considerados apenas $p \in \{10, 300\}$ com $(n_1, n_2) = (20, 40), (40, 40)$.

Para a normal multivariada, gerou-se, inicialmente, um vetor aleatório $\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_p]^\top$ de p variáveis normais padrão independentes, ou seja, $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, em que $\mathbf{0}$ é um vetor p -dimensional de zeros e \mathbf{I} matriz identidade $p \times p$, utilizando a transformação de Box-Müller (PRESS et al., 1992). Em seguida, este vetor foi transformado por

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}, \quad (3.10)$$

em que $\mathbf{\Sigma}^{1/2}$ é a matriz raiz quadrada da matriz de covariâncias $\mathbf{\Sigma}$ e $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor p -dimensional de médias populacional. Logo, $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$, dado $\mathbf{\Sigma}^{1/2} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{P}^\top$, em que $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz diagonal dos autovalores, $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ é a matriz diagonal contendo a raiz quadrada destes elementos e \mathbf{P} é a matriz de autovetores, cada um destes vetores dispostos em uma de suas colunas (GENTLE, 2003). Para gerar as amostras, como descrito acima, foi utilizada a função *mvrnorm()* da biblioteca *MASS* do *software R* (R Core Team, 2022).

Para a t multivariada, o vetor aleatório $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, gerado na obtenção da normal multivariada, foi transformado por

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{\frac{U}{v}}},$$

em que U é a variável aleatória com distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade. Nesse caso, o vetor aleatório \mathbf{Y} possui distribuição t multivariada esférica com v graus de liberdade. Este vetor, por sua vez, foi transformado por

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}.$$

O vetor \mathbf{X} , assim obtido, possui distribuição t multivariada elíptica com v graus de liberdade e parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{\Sigma}$ (GENTLE, 2003). Foi utilizada a função *rmvt()*, da biblioteca *mvtnorm* do *software R* (R Core Team, 2022), para gerar amostras como descrita acima.

Por fim, para obter a uniforme multivariada, foi considerado $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})$, obtido pela transformação $\mathbf{X} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{1/2} \mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ (GENTLE, 2003), em que $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e covariância $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ é estabelecida com estrutura AR ou SC pré-escolhida à partir da correlação $\tilde{\rho} = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$. Em seguida, foi feita a transformação

$$X_i = \Phi(Y_i),$$

em que $\Phi(\bullet)$ é a função de distribuição normal padrão. O vetor $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]^\top$, obtido assim, possui distribuição uniforme multivariada. A função seno foi aplicada à ρ obtendo-se $\tilde{\rho}$ na construção de $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$, para que ao final, a matriz de covariância de \mathbf{X} , $\boldsymbol{\Sigma}$, tenha exatamente a correlação ρ dentro da estrutura pré-estabelecida (AR ou SC).

3.2.1 Taxa de erro tipo I

Para a taxa de erro tipo I, nos casos heterocedásticos, foram consideradas duas configurações para $\boldsymbol{\Sigma}_i$, a primeira com ambas as estruturas de matrizes equicorrelacionadas, ou seja, SC, com $\rho = 0,5$ e $\rho = 0,8$ para $\boldsymbol{\Sigma}_1$ e $\boldsymbol{\Sigma}_2$, respectivamente e, a segunda, SC e AR(1), respectivamente, ambas com $\rho = 0,5$. E nos casos homocedásticos, SC, com $\rho = 0,5$.

As simulações foram geradas sob a hipótese nula completa, ou seja, com as duas populações tendo os mesmos vetores de médias paramétricas. Logo, a rejeição da hipótese nula, de igualdade dos dois vetores de médias, foi considerada como um erro do tipo I. A probabilidade de se cometer o erro tipo I foi estimada pela proporção de experimentos com diferença entre as médias detectadas incorretamente em relação ao total de $N = 2000$ experimentos simulados. Assim, a taxa de erro tipo I real foi estimada por

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^N I(E_k = 1)}{N}, \quad (3.11)$$

em que E_k é uma variável binária que assume o valor 1 se ocorreu um erro do tipo I no k -ésimo experimento e 0, em caso contrário, para $k = 1, 2, \dots, N$; e $I(E_k = 1)$ é a função indicadora que

retorna 1 se a igualdade for verificada e 0, caso contrário. O nível nominal de significância usado foi $\alpha = 0,05, 0,10$ ou $0,01$.

As taxas de erro tipo I obtidas foram comparadas entre si e com as obtidas por Ahmad (2019b) e, como foram estimadas via simulação Monte Carlo, não estavam livres de erro. Foi utilizado, então, o teste binomial exato, com 99% confiança (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010), para verificar se os testes são liberais, conservativos ou exatos. As hipóteses do teste são

$$H_0 : \alpha = 0,05 \text{ (ou } 0,01 \text{ ou } 0,10)$$

versus

$$H_1 : \alpha \neq 0,05 \text{ (ou } 0,01 \text{ ou } 0,10).$$

Se a hipótese nula foi rejeitada e as taxas de erro tipo I observadas foram consideradas significativamente ($\text{valor-}p < 0,01$) inferior ao nível nominal de significância, o teste em questão foi considerado conservativo; se as taxas de erro tipo I observadas foram consideradas significativamente ($\text{valor-}p < 0,01$) superiores ao nível nominal, o teste em questão foi considerado liberal; e se as taxas de erro tipo I observadas não foram significativamente ($\text{valor-}p < 0,01$) diferentes do nível nominal, o teste em questão foi considerado exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010). Considerando y o número de rejeições de H_0 para $N = 2000$ simulações Monte Carlo para o nível nominal de significância α , pode-se obter a estatística de teste, usando a relação entre as distribuições F e binomial, com probabilidade de sucesso α .

A estatística de teste foi computada por

$$F_b = \left(\frac{y-1}{N-y} \right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right),$$

que sob a hipótese nula, H_0 , essa estatística segue uma distribuição F com $\nu_1 = 2(N-y)$ e $\nu_2 = 2(y+1)$ graus de liberdade. Se $F_b \leq F_{\nu_1, \nu_2}(\alpha/2)$ ou $F_b > F_{\nu_1, \nu_2}(1 - \alpha/2)$, então rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 1% de probabilidade, em que $F_{\nu_1, \nu_2}(\alpha/2)$ e $F_{\nu_1, \nu_2}(1 - \alpha/2)$ são os quantis $100\alpha/2\%$ e $100(1 - \alpha/2)\%$, respectivamente, da distribuição F com ν_1 e ν_2 graus de liberdade (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010).

3.2.2 Poder

Na segunda etapa, de avaliação do poder, sob a hipótese alternativa H_1 , foi considerado, nos casos heterocedásticos, SC com $\rho = 0,4$ e $\rho = 0,8$ para Σ_1 e Σ_2 , respectivamente e, no caso homocedástico, SC com $\rho = 0,5$. As simulações foram realizadas seguindo os procedimentos descritos para o erro tipo I, exceto pelo fato de \mathbf{X}_{ik} ser gerados de distribuições multivariadas consideradas com diferentes vetores de médias, isto é, $\mathbf{X}_{ik} \sim \mathfrak{F}_i(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i)$. O vetor de médias da população 1, $\boldsymbol{\mu}_1$, foi definido de acordo com a distribuição da simulação em cada caso e o outro vetor de médias fixado por

$$\boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\delta},$$

em que $\boldsymbol{\delta}$ é definido por $\boldsymbol{\delta} = \Delta \mathbf{p}_1$, sendo $\Delta = 0,2(0,2)1$ e o vetor \mathbf{p}_1 é $\mathbf{p}_1 = [1/p, 2/p, \dots, p/p]$, conforme apresentado em Ahmad (2019a, 2019b).

$$\hat{P} = \frac{\sum_{k=1}^N I(E_k = 1)}{N},$$

em que as quantidades $I(E_k = 1)$ e E_k são as mesmas quantidades descritas em (3.11).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados serão apresentados e discutidos utilizando-se tabelas e gráficos, buscando uma melhor visualização e compreensão. Foi realizada uma avaliação dos resultados obtidos nas simulações para os três níveis de significância adotados, $\alpha \in \{0,10, 0,05, 0,01\}$, que permitiu perceber comportamentos semelhantes quando se considera as mesmas configurações para cada α . Portanto, serão apresentados e discutidos os resultados das simulações considerando $\alpha = 0,05$, como em Ahmad (2019b) e Krishnamoorthy e Yu (2004), a fim de estabelecer uma comparação direta entre os testes estudados. Eventualmente, quando o padrão não se mantiver, serão discutidos os resultados para os demais níveis de significância, cujas tabelas encontram-se no Apêndice B (taxas de erro tipo I), nas Tabelas 1 a 14, e no Apêndice C (poder), nas Tabelas 15 a 32.

Estes resultados foram sinalizados com símbolos para classificar os testes como liberal (+), conservativo (−) ou exato (sem símbolo), de acordo com o teste binomial exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010). Os testes foram avaliados em diversas configurações para verificar a robustez.

4.1 Homocedasticidade das matrizes de covariâncias

Para avaliar o desempenho, as taxas de erro tipo I dos testes propostos foram comparadas com as dos TH, MNV e TA. Para esses dois últimos, além das simulações realizadas neste trabalho, foram considerados os resultados encontrados na literatura e apresentados na Seção 2.4.

4.1.1 Taxas de erro tipo I

Nas Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam-se os resultados obtidos para taxa de erro tipo I sob homocedasticidade nas situações de baixa e alta dimensionalidade, respectivamente. Na situação considerada ideal, normal multivariada, homocedasticidade e baixa dimensionalidade ($p < n - 2$), Tabela 4.1, todos os testes apresentaram comportamento exato no controle da taxa de erro tipo I, de acordo com o teste binomial exato, o que corrobora os resultados encontrados nas configurações estudadas por Gebert (2014) para o teste MNV. O mesmo pode ser observado nas distribuições t_7 e uniforme $(0, 1)$ multivariadas, conforme é apresentado na Tabela 4.1, exceto o teste TA, no

caso da distribuição uniforme (0, 1) multivariada, que controla a taxa de erro tipo I de maneira conservativa.

Em particular, para $\alpha = 0,10$, no Apêndice B, Tabela 1, os testes TH e MNV tiveram comportamento levemente liberal no caso balanceado na distribuição uniforme (0, 1) multivariada. Observa-se também que, para esta distribuição, o TA foi extremamente conservativo para todos os α 's. Em $\alpha = 0,01$, no Apêndice B, Tabela 2, o TAM passa a ser levemente liberal nas distribuições normal e t_7 multivariadas, quando se trata dos casos não balanceados, e na distribuição uniforme (0, 1) multivariada, em ambos os casos apresentados. O único teste que manteve o controle da taxa de erro tipo I de forma exata, em baixa dimensionalidade, para todos os α 's e para todas as distribuições simuladas, foi o TB.

Tabela 4.1 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC), distribuições multivariadas e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0 , caso homocedástico e baixa dimensionalidade.

SC com $\rho = 0,5$, $\alpha = 0,05$							
p	Distribuição	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
10	Normal	40,40	0,0460	0,0450	0,0480	0,0485	0,0485
		20,40	0,0505	0,0565	0,0530	0,0565	0,0525
	t_7	40,40	0,0470	0,0445	0,0430	0,0450	0,0450
		20,40	0,0505	0,0505	0,0480	0,0515	0,0460
	Unif(0, 1)	40,40	0,0590	0,0580	0,0005 ⁻	0,0510	0,0485
		20,40	0,0520	0,0555	0,0015 ⁻	0,0610	0,0555

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

No caso de alta dimensionalidade ($p \geq n - 2$), os testes TH e MNV não se aplicam por dependerem da inversa da matriz de covariâncias, como foi apresentado nos Capítulos 2 e 3 e, por esta razão, não são apresentados seus resultados na Tabela 4.2. Para alta dimensionalidade, o comportamento dos testes TA, TAM e TB foi semelhante ao caso de baixa dimensionalidade, no geral. De acordo com as taxas apresentadas na Tabela 4.2, o comportamento dos testes foi

exatamente igual ao apresentado na Tabela 4.1, no caso de $\alpha = 0,05$ e, para $\alpha = 0,10$ e $0,01$, Apêndice B, Tabelas 1 e 2, poucas diferenças foram observadas.

Para $\alpha = 0,10$, no Apêndice B, Tabela 1, o TA se manteve com comportamento extremamente conservativo na distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, com taxa máxima de $0,0045$, enquanto o maior nível de significância adotado é $0,10$ e, com isso, pode-se esperar que provavelmente o teste tenha um poder muito baixo para esta distribuição. Já os testes TA e TAM apresentaram comportamento levemente conservativo para a distribuição normal multivariada no caso balanceado. Por fim para $\alpha = 0,01$, Apêndice B, Tabela 2, uma alteração que vale a pena destacar é que o TA passou a ter comportamento levemente liberal para a distribuição t_7 , o que não ocorreu no caso de baixa dimensionalidade, e o TAM teve comportamento levemente liberal para as distribuições normais e t_7 e para o caso não balanceado na uniforme. Como no caso de baixa dimensionalidade, o único teste que foi exato para todos os casos em alta dimensionalidade foi o TB.

Tabela 4.2 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC), distribuições multivariadas e nível nominal de $0,05$ de significância (α), sob H_0 , caso homocedástico e alta dimensionalidade.

SC com $\rho = 0,5$, $\alpha = 0,05$					
p	Distribuição	n_1, n_2	TA	TAM	TB
300	Normal	40,40	0,0495	0,0500	0,0450
		20,40	0,0590	0,0615	0,0565
	t_7	40,40	0,0550	0,0560	0,0520
		20,40	0,0545	0,0580	0,0555
	Unif(0, 1)	40,40	0,0005 ⁻	0,0540	0,0510
		20,40	0,0005 ⁻	0,0595	0,0535

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Por fim, cabe ressaltar que o teste TA foi conservativo para todos os α 's no caso da distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada e, neste caso, como os valores observados para a taxa de erro tipo I foram extremamente abaixo dos níveis de significância adotados, não ultrapassando $0,0045$,

o teste pode ser considerado extremamente conservativo e, neste caso, é esperado que apresente baixo poder. Por outro lado, o único teste exato para todos os α 's foi o TB.

4.1.2 Poder

Inicialmente, o poder foi avaliado em situação normal multivariada, homocedástica e em baixa dimensionalidade. As linhas pontilhadas nos gráficos indicam os limites em que a hipótese $H_0: \alpha = 0,05$ deve ser rejeitada pelo teste binomial exato, considerando um coeficiente de confiança de 0,99.

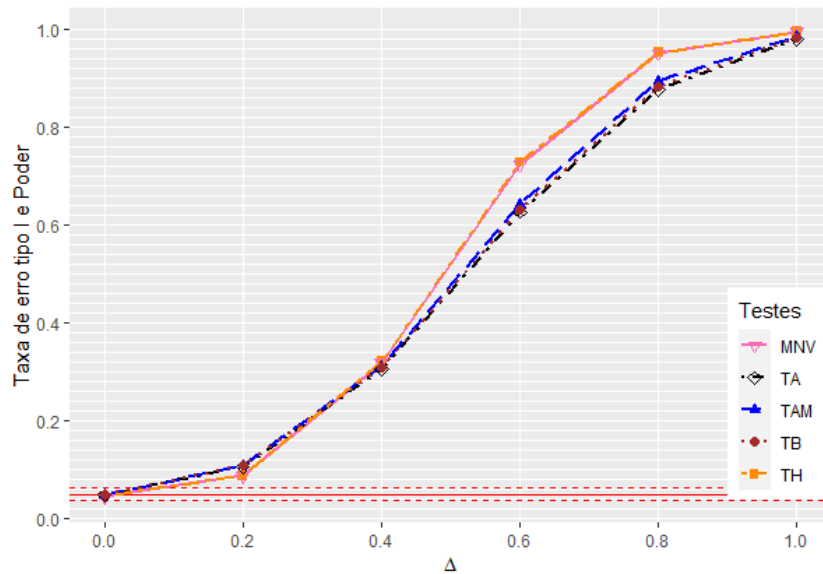
Nas Figuras 4.1 e 4.2 são apresentados os resultados para $p = 10$ balanceado e não balanceado, respectivamente. Pode-se observar que, no caso balanceado, para pequenas diferenças de médias ($\Delta = 0,2$), os testes TA, TAM e TB são mais poderosos que TH e MNV mas, quando esta diferença aumenta, os testes TH e MNV têm maior poder que os demais. Este fenômeno também ocorre no TAM, mas de maneira menos expressiva. Para o caso não balanceado, os testes possuem o mesmo comportamento para o poder, exceto pelo fato de que os testes TH e MNV ficam muito semelhantes aos demais. Ao se aumentar Δ , os testes TH, MNV e TAM ganham destaque, sendo TH com maior poder, seguido do MNV e, por fim, TAM.

O mesmo comportamento observado para o caso normal multivariado em baixa dimensionalidade se repete para o caso da distribuição t_7 multivariada, como apresentado na Figura 4.3.

Na Figura 4.4 são apresentados os valores do poder para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, em baixa dimensionalidade, não balanceado. Neste caso, assim como no balanceado, os testes TH, MNV, TAM e TB se mostraram muito poderosos quando comparados com o TA, o que era esperado, uma vez que TA foi extremamente conservativo. Os demais testes, em geral, apresentaram poderes aproximados, em particular, quando $\Delta = 0,2$, destaca-se TH, seguido do MNV, TAM e, por último, TB. No entanto, ao se aumentar o valor de Δ , os testes se tornam equivalentes assintoticamente com valores próximos ou iguais a 1.

Ao se tratar de alta dimensionalidade, como já citado anteriormente, os testes TH e MNV não se aplicam, portanto, nas Figuras 4.5, 4.6 e 4.7 são apresentados os valores de poder para as distribuições normal, t_7 e uniforme $(0, 1)$ multivariadas, respectivamente, para os testes TA, TAM

Figura 4.1 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (40, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.

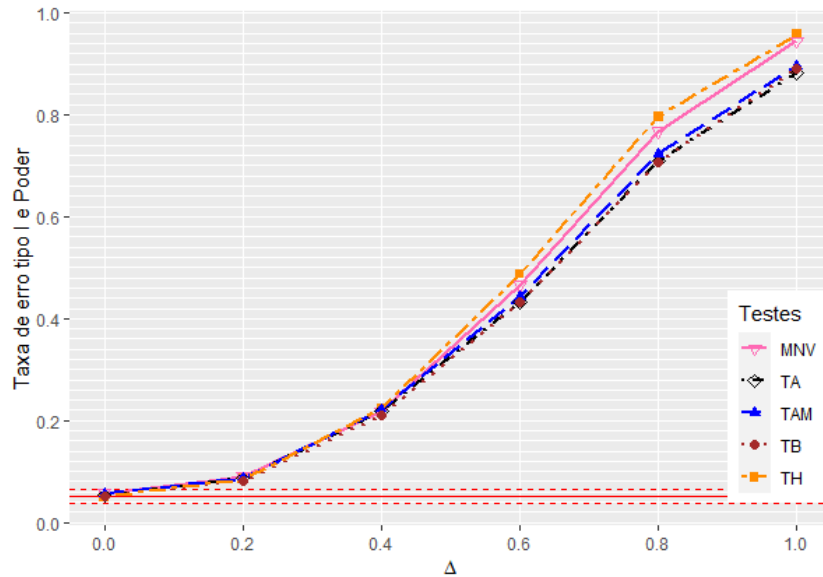


Fonte: Do autor (2023).

e TB e caso não balanceado, uma vez que o comportamento foi o mesmo para o balanceado. Na Figura 4.5, observa-se que, para a normal multivariada, o TAM foi o teste mais poderoso dentre os concorrentes e, à medida que Δ aumenta, esta diferença de valores no poder se evidencia mais, embora este ganho de poder pode ser considerado inexpressível. Como pode-se observar na Figura 4.6, o desempenho dos testes para a distribuição t_7 multivariada foi o mesmo observado para a normal multivariada.

Para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, 4.7, assim como no caso de baixa dimensionalidade, os testes TAM e TB tiveram valores de poder muito acima do teste TA, o que era de se esperar, uma vez que o TA continuou extremamente conservativo em alta dimensionalidade, quando se trata desta distribuição. Não é possível se fazer um paralelo com os resultados de testes já existentes na literatura e apresentados no Capítulo 2, uma vez que os autores não incluíram em suas configurações os casos homocedásticos em alta dimensionalidade. Entretanto, esta distribuição foi especialmente valiosa por mostrar as vantagens relativas das duas propostas de testes realizadas no presente trabalho em relação aos seus concorrentes e, principalmente, em relação ao TA.

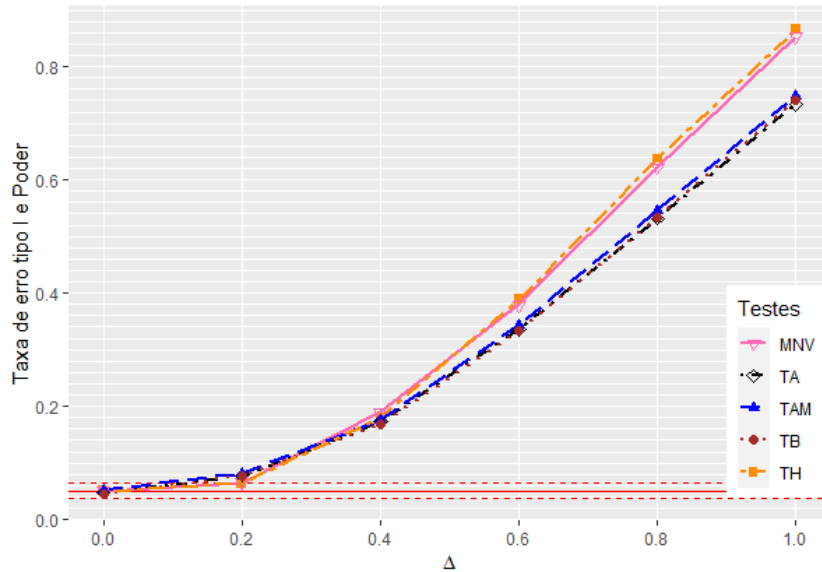
Figura 4.2 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



Fonte: Do autor (2023).

Vale ressaltar que o TB e o TAM, para $\alpha \in \{0,10, 0,05\}$, respectivamente, Apêndice B, Tabela 1 e Tabelas 4.1 e 4.2, foram exatos para todas as distribuições e configurações homocedásticas, exceto TAM, que foi levemente conservativo para $p = 300$, distribuição normal multivariada e $(n_1, n_2) = (40, 40)$. Além disso, o TB continuou controlando a taxa de erro tipo I de forma exata, para $\alpha = 0,01$, apresentando característica de robustez, como observado nos resultados encontrados na literatura na Seção 2.4. Os testes TH e MNV também foram robustos em baixa dimensionalidade, porém, ao se tratar de casos em alta dimensionalidade, os testes não são aplicáveis. Pode-se observar que o TA perdeu desempenho ao ser aplicado em distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, sob homocedasticidade, tendo comportamento extremamente conservativo, o que levou a valores de poder muito baixos.

Figura 4.3 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição t_7 multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



Fonte: Do autor (2023).

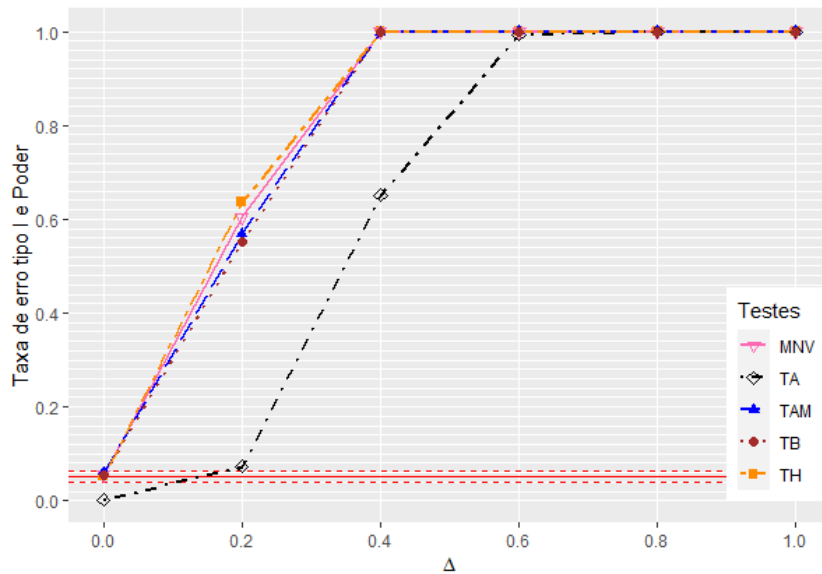
4.2 Heterocedasticidade das matrizes de covariâncias

Para o caso heterocedástico, inicialmente avaliou-se os resultados das taxas de erro tipo I para todos os testes em baixa dimensionalidade. A primeira situação simulada foi com a distribuição normal multivariada sob problema de Behrens-Fisher multivariado com duas estruturas de heterogeneidade para as matrizes de covariâncias, sendo a primeira combinação, matrizes equicorrelacionadas, Σ_1 e Σ_2 com estruturas SC com $\rho = 0,5$ e $\rho = 0,8$, respectivamente, e a segunda combinação, Σ_1 de estrutura SC e Σ_2 , AR(1).

4.2.1 Taxa de erro tipo I

Na Tabela 4.3 são apresentados os resultados para o caso citado acima, para $\alpha = 0,05$. É possível observar, para matrizes de covariâncias equicorrelacionadas, como era de se esperar, que o TH não controlou a taxa de erro tipo I, foi liberal. Inicialmente, para $p = 2$, a taxa de

Figura 4.4 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.

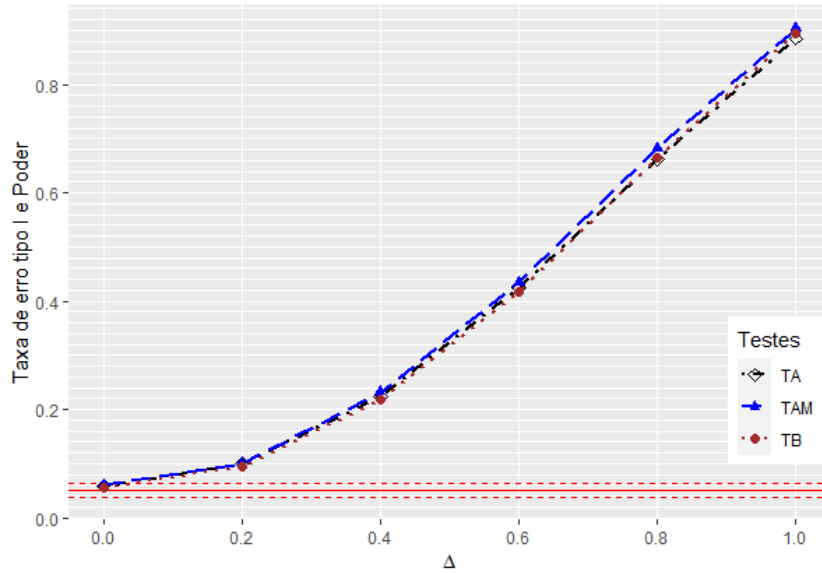


Fonte: Do autor (2023).

erro tipo I deste teste não foi expressivamente maior que o nível nominal, mas à medida que p se aproxima de n_i , a magnitude das taxas aumentou, chegando de 0,072 para $p = 2$ a 0,483 para $p = 100$. Para o MNV, como apresentado por Krishnamoorthy e Yu (2004), para $p = 2$, o teste controlou a taxa de erro tipo I de forma exata, mas a medida que se aumentou p , o desempenho do teste diminuiu, principalmente quando p se aproximou de um dos tamanhos de amostra n_i , como, por exemplo, o caso de $p = 10$, $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$, o MNV apresentou comportamento levemente liberal, mas passou a controlar a taxa de erro tipo I de maneira exata quando se aumentou o tamanho das amostras, distanciando assim p de n_i , o que corrobora os resultados apresentados por Gebert (2014), em que o teste apresentou comportamento liberal para $p = 7$, $n_1 = 8$ e $n_2 = 30$ para todos os graus de heterogeneidade entre as matrizes de covariâncias estudados.

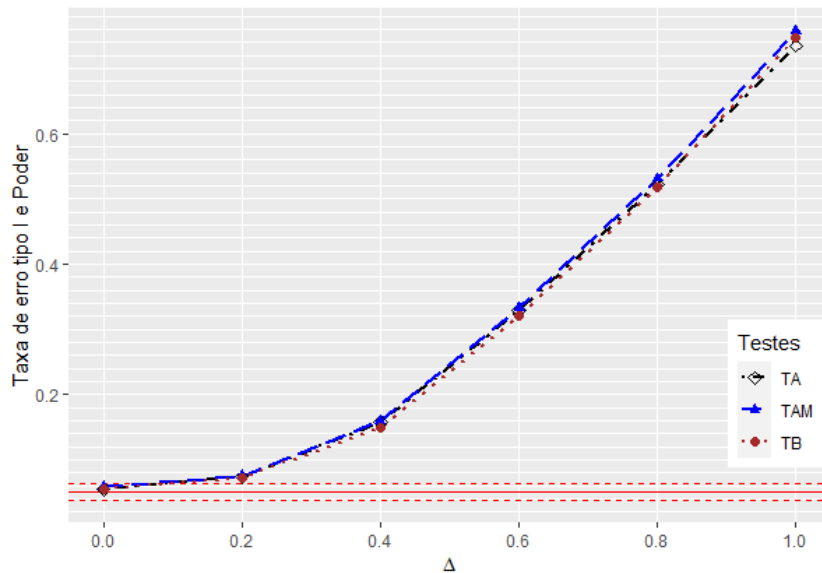
Ainda na Tabela 4.3, pode-se observar, para o caso de matrizes de covariâncias equicorrelacionadas, que os testes TA, TAM e TB controlaram, em geral, a taxa de erro tipo I de maneira exata, exceto TAM, que teve comportamento levemente liberal para $p = 10$, $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$, que pode ter sido causado pelo baixo tamanho das amostras, e TB, que controlou a taxa de erro tipo I

Figura 4.5 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



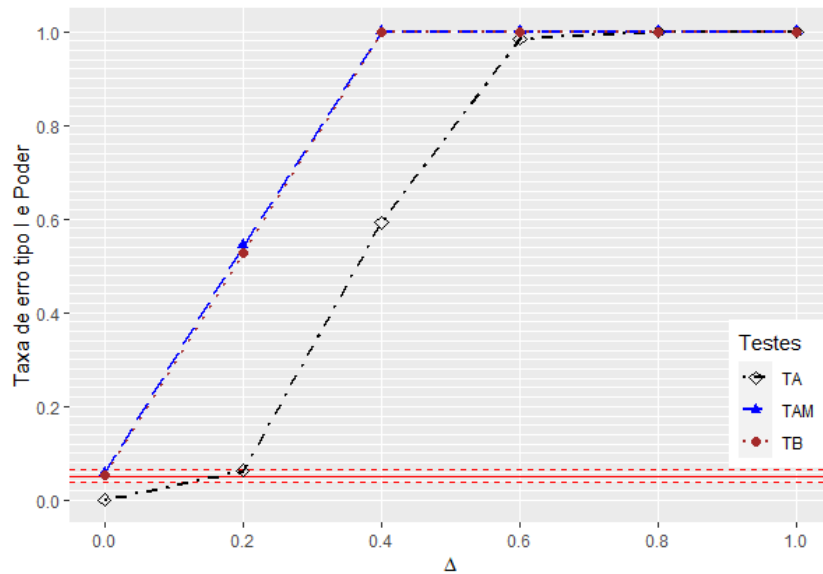
Fonte: Do autor (2023).

Figura 4.6 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição t_7 multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



Fonte: Do autor (2023).

Figura 4.7 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, homocedasticidade, distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



Fonte: Do autor (2023).

de maneira levemente conservativa para $p = 10$, $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$, $p = 50$, $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$ e $p = 100$, $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$. Para a segunda estrutura de matrizes de covariâncias, SC e AR(1), os testes MNV, TA e TAM tiveram comportamento semelhantes aos discutidos para as estruturas SC e SC. Vale destacar que, neste caso, o TH passou a controlar a taxa de erro tipo I de maneira exata, em geral, exceto para $p = 50$, $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$ e $p = 100$, $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$, em que a controlou, de maneira conservativa, e o teste TB passou a se comportar de maneira liberal à medida que p se aproximou de um dos tamanho amostrais n_i .

Observa-se, para as mesmas configurações apresentadas na Tabela 4.3, para $\alpha = 0,10$, Apêndice B, Tabela 3, que os testes obtiveram desempenho muito semelhante ao de $\alpha = 0,05$. Para o caso de $\alpha = 0,01$, Apêndice B, Tabela 9, para estruturas de matrizes equicorrelacionadas, o TAM passa a apresentar mais casos de comportamento levemente liberal para, $p = 50$ com $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$, $p = 10$ e para $p = 100$, tal comportamento, de acordo com os valores, tem relação ao tamanho da amostra, pois, para menores valores a magnitude da taxa de erro tipo I aumenta e, por outro lado, quando se tem um aumento no tamanho das amostras esta taxa diminui. O TB passou

a controlar, em geral de maneira exata tendo apenas um caso conservativo que foi em $p = 100$. Já nas estruturas SC e AR(1), o comportamento se manteve um pouco mais semelhante ao caso de $\alpha = 0,05$ tendo destaque o TH que passou a controlar a taxa de erro tipo I apresentando apenas dois casos em que o teste foi conservativo como pode ser observado na Tabela 4.3.

Para o caso de $\alpha = 0,01$, Apêndice B, Tabela 9, para estruturas de matrizes equicorrelacionadas, o TAM passa a apresentar mais casos de comportamento levemente liberal, $p = 50$ com $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$, $p = 10$ e para $p = 100$. Tal comportamento, de acordo com os valores, tem relação com o tamanho da amostra, pois, para menores valores, a magnitude da taxa de erro tipo I aumenta e, por outro lado, quando se tem um aumento no tamanho das amostras, esta taxa diminui. O TB passou a controlar, em geral, de maneira exata, tendo apenas um caso conservativo, que foi em $p = 100$. Já nas estruturas SC e AR(1), o comportamento se manteve um pouco mais semelhante ao caso de $\alpha = 0,05$, tendo destaque o TH, que foi o único a controlar de maneira exata a taxa de erro tipo I.

Na Tabela 4.4 são apresentados os valores da taxa de erro tipo I para os testes com as mesmas configurações acima descritas para $\alpha = 0,05$, no entanto, as simulações foram feitas com a distribuição t_7 multivariada. Observa-se que o desempenho dos testes foi semelhante ao caso da distribuição normal multivariada, no entanto, os testes TA e TAM tiveram controle da taxa de erro tipo I de maneira exata para todas as configurações em $\alpha = 0,05$. Para os demais α 's, os testes TH, MNV e TB mantiveram comportamento semelhantes, TA para $\alpha = 0,10$, Apêndice B, Tabela 4, foi conservativo quando $p = 10$ com $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$ para estruturas SC e SC e $p = 50$ com $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$ para estruturas SC e AR(1), enquanto TAM apresentou apenas um caso conservativo, $p = 10$ com $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$ para estruturas SC e SC. Para $\alpha = 0,01$, Apêndice B, Tabela 10 TA foi liberal quando $p = 100$ com $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$ para as duas combinações de estruturas de matrizes de covariâncias, enquanto o TAM foi liberal para $p = 100$ com $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$ para CS e AR(1), e no caso SC e SC apresentou um comportamento liberal para as configurações de $p = 10$ com $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$, $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$ e também para $p = 50$ e $p = 100$.

Vale ressaltar que a maioria dos casos em que os testes não controlaram foi onde os valores de p eram próximos ao tamanho amostral n_i , que são casos caracterizados por Ahmad (2019b) como alta dimensionalidade, e outros foram casos de menores tamanhos amostrais, quando $n_1 = 10$

Tabela 4.3 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0 .

Normal multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$						
p	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
2	10,20	0,0720 ⁺	0,0520	0,0525	0,0555	0,0420
	20,40	0,0780 ⁺	0,0490	0,0530	0,0550	0,0495
	50,100	0,0755 ⁺	0,0470	0,0450	0,0460	0,0440
10	10,20	0,1510 ⁺	0,0745 ⁺	0,0565	0,0655 ⁺	0,0445
	20,40	0,1590 ⁺	0,0600	0,0490	0,0500	0,0380 ⁻
	50,100	0,1485 ⁺	0,0445	0,0550	0,0555	0,0435
50	20,40	0,1770 ⁺	0,3015 ⁺	0,0540	0,0565	0,0400
	50,100	0,4270 ⁺	0,1675 ⁺	0,0455	0,0455	0,0360 ⁻
100	50,100	0,4830 ⁺	0,7730 ⁺	0,0485	0,0495	0,0365 ⁻
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$						
2	10,20	0,0495	0,0505	0,0500	0,0560	0,0430
	20,40	0,0460	0,0515	0,0520	0,0550	0,0495
	50,100	0,0475	0,0500	0,0485	0,0510	0,0515
10	10,20	0,0445	0,0575	0,0585	0,0665 ⁺	0,0675 ⁺
	20,40	0,0450	0,0505	0,0540	0,0585	0,0680 ⁺
	50,100	0,0390	0,0540	0,0435	0,0440	0,0550
50	20,40	0,0390	0,0565	0,0705 ⁺	0,0740 ⁺	0,1040 ⁺
	50,100	0,0280 ⁻	0,0645 ⁺	0,0480	0,0490	0,0920 ⁺
100	50,100	0,0280 ⁻	0,1090 ⁺	0,0615	0,0635	0,1095 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

e $n_2 = 20$. Este fato pode ser observado para o teste MNV, nos valores obtidos por Gebert (2014), como discutido anteriormente.

Em situações de amostras que seguem distribuições uniformes (0, 1) multivariadas, observa-se, na Tabela 4.5, que o comportamento dos testes TH, MNV, TAM e TB foi muito semelhante aos

Tabela 4.4 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0 .

t_7 multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$						
p	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
2	10,20	0,0670 ⁺	0,0435	0,0500	0,0575	0,0425
	20,40	0,0650 ⁺	0,0465	0,0485	0,0500	0,0435
	50,100	0,0740 ⁺	0,0470	0,0430	0,0440	0,0390
10	10,20	0,1390 ⁺	0,0750 ⁺	0,0455	0,0520	0,0340 ⁻
	20,40	0,1410 ⁺	0,0465	0,0415	0,0455	0,0345 ⁻
	50,100	0,1540 ⁺	0,0515	0,0520	0,0530	0,0400
50	20,40	0,1635 ⁺	0,2815 ⁺	0,0565	0,0605	0,0405
	50,100	0,3885 ⁺	0,1440 ⁺	0,0525	0,0535	0,0415
100	50,100	0,4610 ⁺	0,7350 ⁺	0,0520	0,0525	0,0360 ⁻
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$						
2	10,20	0,0430	0,0370 ⁻	0,0480	0,0550	0,0440
	20,40	0,0515	0,0460	0,0425	0,0455	0,0420
	50,100	0,0445	0,0445	0,0400	0,0400	0,0400
10	10,20	0,0425	0,0490	0,0470	0,0545	0,0595
	20,40	0,0485	0,0520	0,0465	0,0505	0,0630
	50,100	0,0435	0,0455	0,0505	0,0515	0,0700 ⁺
50	20,40	0,0385	0,0555	0,0480	0,0535	0,0820 ⁺
	50,100	0,0255 ⁻	0,0540	0,0490	0,0505	0,0875 ⁺
100	50,100	0,0275 ⁻	0,0985 ⁺	0,0605	0,0620	0,1080 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

casos anteriores de baixa dimensionalidade e heterogeneidade das matrizes de covariâncias. Vale destacar o comportamento do teste TA, que foi uma exceção e extremamente conservativo, assim como no caso de homogeneidade das matrizes de covariâncias, neste caso, com taxas de erro tipo I não ultrapassando 0,0275 para $\alpha = 0,10$, Apêndice B, Tabela 5, 0,008 para $\alpha = 0,05$ e 0,0005

para $\alpha = 0,01$, Apêndice B, Tabela 11. Este resultados não foram compatíveis com os resultados apresentados por Ahmad (2019b) para $p = 50$ com $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$, com $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$ e nem para $p = 100$ com $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$. Esta diferença pode ser explicada pelas características das amostras uniformes $(0, 1)$ multivariadas que foram obtidas em ambos os casos. Como o autor não descreve a metodologia da simulação dos dados em seu artigo, no presente trabalho foi simulada distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, com objetivo de se manter as estruturas de matrizes de covariâncias apresentadas no Capítulo 3.

As situações descritas até o momento são consideradas baixa dimensionalidade, mas é possível notar, de maneira geral, que quando o número de variáveis aumenta e também quando se aproxima ao menos de um dos tamanhos amostrais n_i , os testes TH e MNV se tornam cada vez mais liberais no controle da taxa de erro tipo I. Esta característica também ocorre para o teste TB quando se tem as estruturas de matrizes de covariâncias, para a primeira população, CS, e para a segunda, AR(1), porém, no caso de estruturas equicorrelacionadas, este teste foi conservativo. Observa-se também que o TA controlou a taxa de erro tipo I, em geral, para as distribuições normal e t_7 multivariadas. Porém, quando o teste é aplicado em amostras que seguem uma uniforme $(0, 1)$ multivariada, ele passa a ser extremamente conservativo e espera-se que apresente baixo poder neste caso. O teste TAM foi o único que, em geral, controlou a taxa de erro tipo I de forma exata.

Analisando-se os resultados da Tabela 4.6, em alta dimensionalidade, primeiramente para estruturas equicorrelacionadas em dados que seguem um distribuição normal multivariada, pode-se observar que, de maneira geral, todos os testes controlaram a taxa de erro tipo I de forma exata, exceto o TAM que se comportou como levemente liberal para pequenas amostras, em $p \in \{300, 500\}$ com $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$. O TB, por outro lado, apresentou comportamento conservativo quando se teve menores números de variáveis, como $p \in \{50, 100\}$ e também para $p = 300$ com $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$. Para $\alpha = 0,10$, Apêndice B, Tabela 6, o desempenho dos testes foi semelhante, os testes TA e TAM foram exatos para todas as configurações e o TB apresentou comportamento levemente conservativo para $p \in \{50, 100\}$, ou seja, para menores números de variáveis. Em $\alpha = 0,01$, Apêndice B, Tabela 12, os testes TA e TAM passaram a ter um comportamento levemente liberal, o teste TA quando $p = 300$ com $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$, $p = 500$ com $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$ e também $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$, enquanto TAM apresentou comportamento levemente liberal em

Tabela 4.5 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0,1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0 .

Uniforme(0,1) multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$						
p	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
2	10,20	0,0755 ⁺	0,0605	0,0080 ⁻	0,0605	0,0490
	20,40	0,0760 ⁺	0,0505	0,0055 ⁻	0,0595	0,0485
	50,100	0,0790 ⁺	0,0530	0,0030 ⁻	0,0490	0,0445
10	10,20	0,1575 ⁺	0,0750 ⁺	0,0020 ⁻	0,0545	0,0375 ⁻
	20,40	0,1550 ⁺	0,0515	0,0005 ⁻	0,0600	0,0465
	50,100	0,1705 ⁺	0,0575	0,0015 ⁻	0,0585	0,0430
50	20,40	0,2410 ⁺	0,3715 ⁺	0,0010 ⁻	0,0615	0,0410
	50,100	0,4405 ⁺	0,1475 ⁺	0,0005 ⁻	0,0600	0,0420
100	50,100	0,5820 ⁺	0,7995 ⁺	0,0010 ⁻	0,0550	0,0345 ⁻
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$						
2	10,20	0,0550	0,0500	0,0075 ⁻	0,0620	0,0500
	20,40	0,0400	0,0395	0,0055 ⁻	0,0585	0,0500
	50,100	0,0515	0,0500	0,0020 ⁻	0,0505	0,0495
10	10,20	0,0475	0,0580	0,0020 ⁻	0,0600	0,0640 ⁺
	20,40	0,0490	0,0585	0,0025 ⁻	0,0615	0,0635
	50,100	0,0465	0,0525	0,0005 ⁻	0,0585	0,0700 ⁺
50	20,40	0,0375 ⁻	0,0595	0,0010 ⁻	0,0485	0,0850 ⁺
	50,100	0,0285 ⁻	0,0685 ⁺	0,0030 ⁻	0,0495	0,0870 ⁺
100	50,100	0,0210 ⁻	0,0985 ⁺	0,0015 ⁻	0,0475	0,1030 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

geral, exceto em $p = 300$ com $n_1 = 20$ e $n_2 = 40$. Por outro lado, o TB apresentou apenas um caso com comportamento levemente conservativo, $p = 50$ com $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$. Em geral, é esperado que, dos testes, o TB apresente menor poder por apresentar comportamento conservativo. Tanto o TA quanto o TAM tiveram comportamento semelhantes para distribuição normal multivariada

para $\alpha = 0,10$ e $0,05$, podendo ser considerados testes com mesmo desempenho, uma vez que as magnitudes das diferenças das taxa de erro tipo I nominal e empírica foram expressivamente próximas de zero para ambos os testes.

Ainda na Tabela 4.6, analisando agora os resultados considerando as estruturas SC e AR(1), os testes TA e TAM tiveram desempenho semelhante ao discutido anteriormente para estruturas equicorrelacionadas, exceto pelo fato de que o teste TA apresentou comportamento liberal para mais casos quando se considera $\alpha = 0,01$, portanto TA e TAM passassem a ter desempenho semelhante, Apêndice B, Tabela 12. O TB foi sensível à modificação das estruturas, sendo expressivamente liberal. Os resultados discutidos, de maneira geral, são semelhantes aos apresentados por Ahmad (2019b) para o teste TA, uma vez que controla a taxa de erro tipo I. Vale ressaltar que Ahmad (2019b) fez metade do número de simulações Monte Carlo feitas neste trabalho para avaliação dos testes, portanto, esta pode ser uma justificativa para as pequenas diferenças de resultados encontrados entre os dois trabalhos.

Para o caso de alta dimensionalidade e distribuição t_7 multivariada, pode-se observar na Tabela 4.7 que o desempenho dos testes foi muito semelhante ao apresentado para distribuição normal multivariada. Vale destacar que, neste caso, para $\alpha = 0,10$, Apêndice B, Tabela 7, os testes TA e TAM tiveram comportamento levemente liberal para pequenas amostras, no entanto, TA apresentou mais casos conservativos do que o TAM, então é esperado que o TA seja menos poderoso que o TAM. Os resultados apresentados por Ahmad (2019b) foram muito semelhantes para o TA. Observou-se diferença, no caso de $\alpha = 0,05$ e estruturas SC e AR(1), em que TA foi exato para todas as configurações e, como pode ser observado na Tabela 4.7, com $p = 300$, $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$, o teste foi classificado como liberal e, com $p = 500$, $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$, classificado como conservativo.

Na Tabela 4.8 são apresentados os resultados para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada para $\alpha = 0,05$. Primeiramente, pode ser observado, para as estruturas de matriz de covariâncias SC e SC, que o TA continuou a apresentar comportamento extremamente conservativo para a alta dimensionalidade para esta distribuição. Tais resultados foram diferentes dos apresentados por Ahmad (2019b), que, como discutido anteriormente, tal fato pode estar relacionado às características das amostras uniformes $(0, 1)$ multivariadas simuladas. O TAM foi exato para todas as configura-

Tabela 4.6 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0 .

Normal multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$				
p	n_1, n_2	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
50	10,20	0,0450	0,0525	0,0330 ⁻
100	10,20	0,0470	0,0510	0,0350 ⁻
	20,40	0,0510	0,0530	0,0360 ⁻
300	10,20	0,0575	0,0675 ⁺	0,0430
	20,40	0,0550	0,0615	0,0350 ⁻
	50,100	0,0570	0,0580	0,0420
500	10,20	0,0580	0,0650 ⁺	0,0415
	20,40	0,0560	0,0595	0,0435
	50,100	0,0615	0,0630	0,0430
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$				
50	10,20	0,0525	0,0585	0,0875 ⁺
100	10,20	0,0505	0,0595	0,0905 ⁺
	20,40	0,0550	0,0605	0,1030 ⁺
300	10,20	0,0555	0,0645 ⁺	0,1035 ⁺
	20,40	0,0530	0,0560	0,1050 ⁺
	50,100	0,0545	0,0560	0,1175 ⁺
500	10,20	0,0580	0,0650 ⁺	0,0995 ⁺
	20,40	0,0580	0,0615	0,1205 ⁺
	50,100	0,0525	0,0540	0,1180 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

ções do primeiro caso. Este teste vem tendo um desempenho semelhante em todas as distribuições para as estruturas de matriz de covariâncias SC e SC, com isso pode-se considerar que o teste é, de maneira geral, eficiente no controle da taxa de erro tipo I. Por outro lado, o teste TB apresenta

Tabela 4.7 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0 .

t_7 multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$				
p	n_1, n_2	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
50	10,20	0,0415	0,0485	0,0285 ⁻
100	10,20	0,0515	0,0575	0,0400
	20,40	0,0530	0,0565	0,0380 ⁻
300	10,20	0,0460	0,0540	0,0390
	20,40	0,0525	0,0555	0,0365 ⁻
	50,100	0,0495	0,0510	0,0315 ⁻
500	10,20	0,0490	0,0545	0,0360 ⁻
	20,40	0,0575	0,0615	0,0455
	50,100	0,0505	0,0515	0,0360 ⁻
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$				
50	10,20	0,0390	0,0485	0,0695 ⁺
100	10,20	0,0420	0,0495	0,0730 ⁺
	20,40	0,0580	0,0605	0,0930 ⁺
300	10,20	0,0415	0,0520	0,0865 ⁺
	20,40	0,0550	0,0585	0,1075 ⁺
	50,100	0,0655 ⁺	0,0670 ⁺	0,1185 ⁺
500	10,20	0,0380 ⁻	0,0465	0,0775 ⁺
	20,40	0,0465	0,0485	0,0990 ⁺
	50,100	0,0580	0,0585	0,1145 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

comportamento levemente conservativo quando se tem um aumento do tamanho das amostras e de variáveis, sendo exato apenas quando $p = 100, 300$ com $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$.

Ainda na tabela 4.8, quando se tem estruturas SC e AR(1), é possível notar que o TA continuou extremamente conservativo, por outro lado, o TB foi muito mais liberal que no caso

anterior. Por fim, o teste TAM, de maneira geral, foi exato, exceto em $p = 50$ com $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$, $p = 500$ com $n_1 = 10$ e $n_2 = 20$, $n_1 = 50$ e $n_2 = 100$, embora não expressivamente liberal.

Tabela 4.8 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0,1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_0 .

Uniforme(0,1) multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$				
p	n_1, n_2	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
50	10,20	0,0000 ⁻	0,0575	0,0380 ⁻
100	10,20	0,0010 ⁻	0,0550	0,0395
	20,40	0,0010 ⁻	0,0580	0,0365 ⁻
300	10,20	0,0025 ⁻	0,0605	0,0420
	20,40	0,0010 ⁻	0,0565	0,0330 ⁻
	50,100	0,0005 ⁻	0,0430	0,0315 ⁻
500	10,20	0,0010 ⁻	0,0540	0,0340 ⁻
	20,40	0,0010 ⁻	0,0520	0,0345 ⁻
	50,100	0,0000 ⁻	0,0540	0,0370 ⁻
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$				
50	10,20	0,0040 ⁻	0,0660 ⁺	0,0830 ⁺
100	10,20	0,0025 ⁻	0,0630	0,0985 ⁺
	20,40	0,0020 ⁻	0,0555	0,0910 ⁺
300	10,20	0,0020 ⁻	0,0570	0,0900 ⁺
	20,40	0,0025 ⁻	0,0630	0,1075 ⁺
	50,100	0,0005 ⁻	0,0605	0,1175 ⁺
500	10,20	0,0050 ⁻	0,0750 ⁺	0,1125 ⁺
	20,40	0,0025 ⁻	0,0630	0,1060 ⁺
	50,100	0,0015 ⁻	0,0660 ⁺	0,1280 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

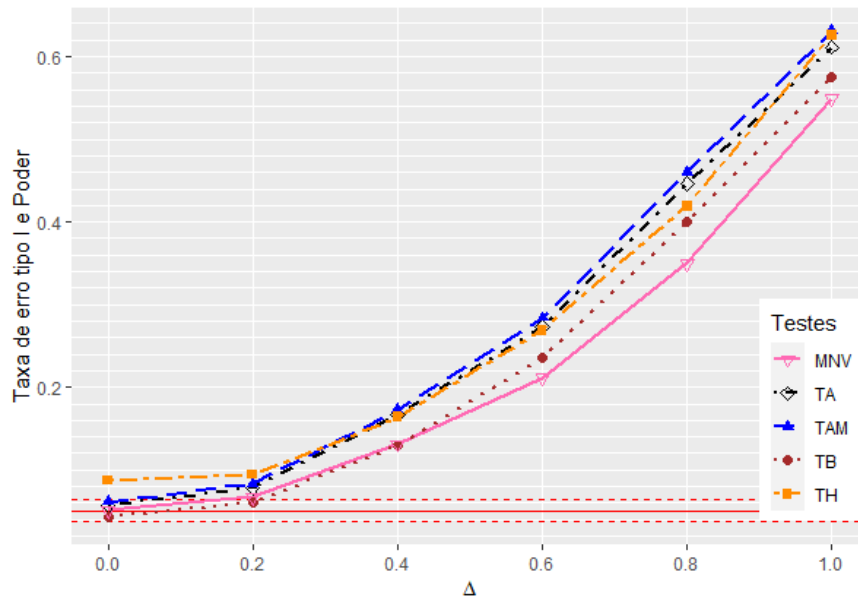
4.2.2 Poder

Partindo dos casos mais favoráveis para a maioria dos testes, inicialmente foi avaliado o poder em baixa dimensionalidade, desde distribuições multivariadas normal, t_7 até, por fim, a uniforme $(0, 1)$. Vale ressaltar que o desempenho dos testes apresentou padrão de resposta semelhante para todos os níveis nominais de significância, portanto será dado foco apenas para $\alpha = 0,05$. Além disso, observou-se que os casos mais críticos que diferenciam os testes foram para as amostras pequenas que, neste estudo, são quando $(n_1, n_2) = (10, 20)$. Nas Figuras 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 são apresentados os valores de poder para cada teste, respectivamente considerando, $p = 2$ com $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $p = 10$ com $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $p = 10$ com $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $p = 50$ com $(n_1, n_2) = (20, 40)$ e $p = 100$ com $(n_1, n_2) = (50, 100)$, para distribuição normal multivariada. Para $p = 2$ com $(n_1, n_2) = (10, 20)$, Figura 4.8, pode-se notar que o TH foi o único que está fora dos limites de aceitação do teste binomial exato para $H_0 : \alpha = 0,05$ e $\Delta = 0$. Os testes TA e TAM foram exatos no controle da taxa de erro tipo I e foram os testes com maior poder dentre os demais, destacando-se o TAM, que foi um pouco mais poderoso que o TA. O teste MNV, até $\Delta = 0,4$, foi levemente mais poderoso que o TB. Para $(n_1, n_2) = (20, 40)$ e $(n_1, n_2) = (50, 100)$, os testes tiveram desempenho semelhante, TH foi liberal e os demais testes foram assintoticamente equivalentes, com TA e TAM levemente mais poderosos que MNV e TB.

Para $p = 10$, nas Figuras 4.9 e 4.10 estão os desempenhos dos testes para $(n_1, n_2) = (10, 20)$ e $(n_1, n_2) = (20, 40)$, respectivamente. No primeiro caso, pode-se observar que os testes TH e MNV foram liberais quanto ao controle da taxa de erro tipo I, assim como observado na Tabela 4.3, o TB foi levemente conservativo e, como era de se esperar, foi o menos poderoso. Os testes TA e TAM foram exatos e, dentre estes dois, o TAM foi levemente mais poderoso que o TA, e esta diferença aumentou à medida que Δ aumenta.

No segundo caso, Figura 4.10, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, observa-se, diferentemente do caso anterior, que o teste MNV passou a controlar a taxa de erro tipo I e, por este motivo, passou a ser, dos testes que controlam a taxa de erro tipo I, o mais poderoso, seguido do TAM e TA. Por fim, o TB foi o menos poderoso, o que era de se esperar por apresentar comportamento conservativo. E

Figura 4.8 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



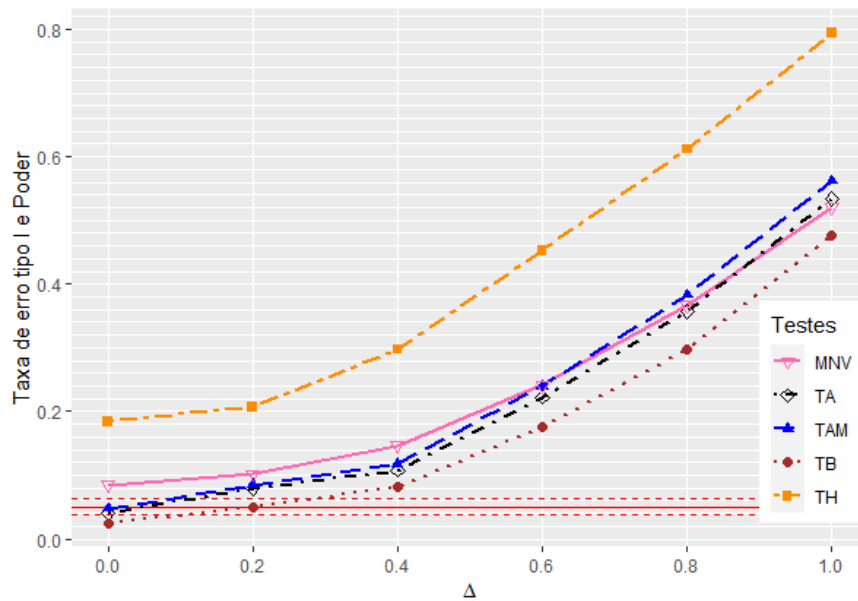
Fonte: Do autor (2023).

para $(n_1, n_2) = (50, 100)$, o desempenho dos testes foi muito semelhante ao de $(n_1, n_2) = (20, 40)$, diferenciando que os testes se tornam assintoticamente equivalentes à medida que Δ aumenta.

Para $p = 50$ e $p = 100$, Figuras 4.11 e 4.12, respectivamente, pode-se observar que os testes TH e MNV foram extremamente liberais no controle da taxa de erro tipo I, de acordo com o teste binomial exato e, por este motivo, o poder destes testes foi maior que os demais. Portanto, são testes não são satisfatórios. Como era de se esperar, TB, que apresentou comportamento conservativo na maioria dos casos de baixa dimensionalidade para configurações de matrizes de covariâncias SC e SC, teve poder menor dentre os testes. Os testes TA e TAM tiveram poderes muito similares. Além disso, os dois apresentaram comportamento levemente liberal para $p = 100$.

Para a distribuição t_7 multivariada, o desempenho dos testes em relação ao poder foi muito semelhante ao caso da distribuição normal multivariada, logo não há necessidade de se dar destaque para esta distribuição. Ahmad (2019b) apresenta resultados semelhantes também em seu trabalho,

Figura 4.9 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.

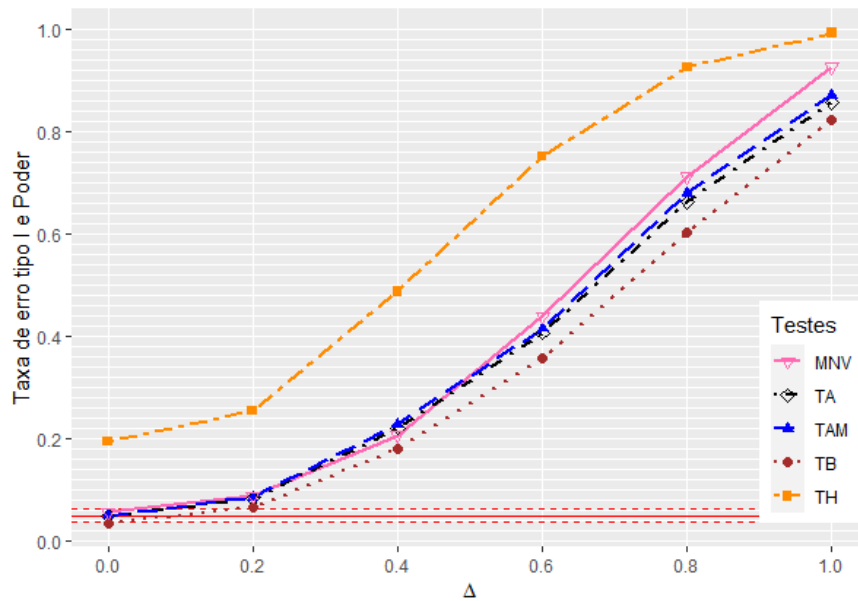


Fonte: Do autor (2023).

que podem ser visto ao se comparar as Figuras 2.2 e 2.3. Para mais detalhes dos resultados obtidos para o poder dos testes, consultar o Apêndice C.

Nas Figuras 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16, 4.17 são apresentados os desempenhos dos testes para distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada. Para $p = 2$, de maneira geral, os testes tiveram desempenho semelhante para todas as configurações simuladas, sendo o TH levemente liberal para todos os casos, mas com poder muito próximo dos testes MNV, TAM e TB que, por sua vez, controlaram a taxa de erro tipo I, como pode ser observado na Figura 4.13, que foi o caso em que o desempenho dos testes mais se diferenciou, muito provavelmente por ser a configuração com menor tamanho das amostras. Os testes com maior poder foram TH e TAM, no entanto, o primeiro foi liberal, enquanto o segundo foi exato no controle da taxa de erro tipo I. Os testes MNV e TB tiveram desempenho aproximados, mas com TB sendo levemente mais poderoso que MNV. Por outro lado, é interessante observar que o TA, que foi extremamente conservativo no controle da taxa de erro tipo I, como era de se esperar, teve poder muito inferior aos demais testes.

Figura 4.10 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.

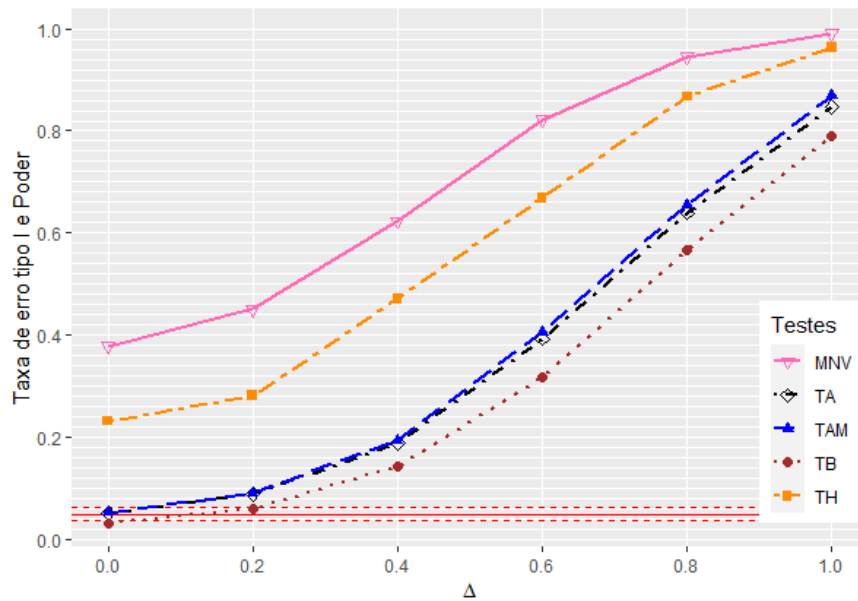


Fonte: Do autor (2023).

Pode-se observar, nas Figuras 4.14 e 4.15, que o teste mais poderoso que controlou a taxa de erro tipo I de forma exata para todas as configurações foi o TAM. É importante verificar que TH foi muito liberal, chegando a taxas de erro tipo I de 0,20, ao se adotar $\alpha = 0,05$. Outro fato interessante é que ao se aumentar o número de variáveis para 10, em situação de pequenos tamanhos amostrais, como no caso apresentado na Figura 4.14, o teste MNV passa a ser liberal, mas com o aumento do tamanho das amostras, o teste passa a ser exato. Por fim, o TA, diferentemente do apresentado por Ahmad (2019b), continua sendo um teste pouco poderoso e muito conservativo para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, simulada de acordo com o descrito no Capítulo 3.

Outro fato interessante é que o aumento do número de variáveis, ainda em baixa dimensionalidade, aumentou expressivamente o poder dos testes, como pode ser observado nas Figuras 4.16 e 4.17. No entanto, também é possível observar que TH e MNV foram testes que não controlaram a taxa de erro tipo I para estes casos, sendo extremamente liberais, chegando a apresentar, respectivamente, taxas de 0,73 e 0,90 para $\alpha = 0,05$.

Figura 4.11 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 50$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.

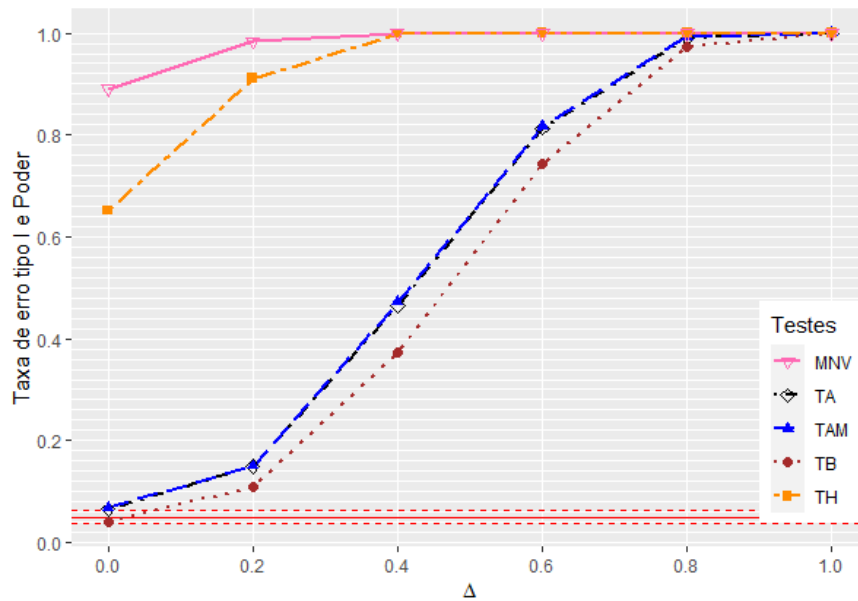


Fonte: Do autor (2023).

A situações descritas até o momento na análise dos valores do poder dos testes foi em baixa dimensionalidade, onde TH e MNV podem ser aplicados. É importante ressaltar que os testes não tiveram bons desempenhos, de modo geral, para pequenos tamanhos amostrais e, principalmente, quando o número de variáveis foi aumentado, como visto anteriormente.

Para a alta dimensionalidade e heterogeneidade nas matrizes de covariâncias, os valores de poder dos testes são apresentados nas Figuras 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22. O padrão de desempenho dos testes se manteve como no caso de baixa dimensionalidade, sendo que o TAM, para pequenos tamanhos amostrais, $(n_1, n_2) = (10, 20)$ e $(n_1, n_2) = (20, 40)$, obteve um poder levemente maior para pequenas diferenças de médias, que aumentou à medida que esta diferença foi aumentada. Outro fato interessante a ser ressaltado é que o poder dos testes, em geral, foi afetado pelo tamanho amostral, sendo que para $(n_1, n_2) = (10, 20)$ os testes não ultrapassaram 0,6, mas à medida que se aumentou o tamanho amostral, os testes chegaram a 1,0 de poder.

Figura 4.12 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (50, 100)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.

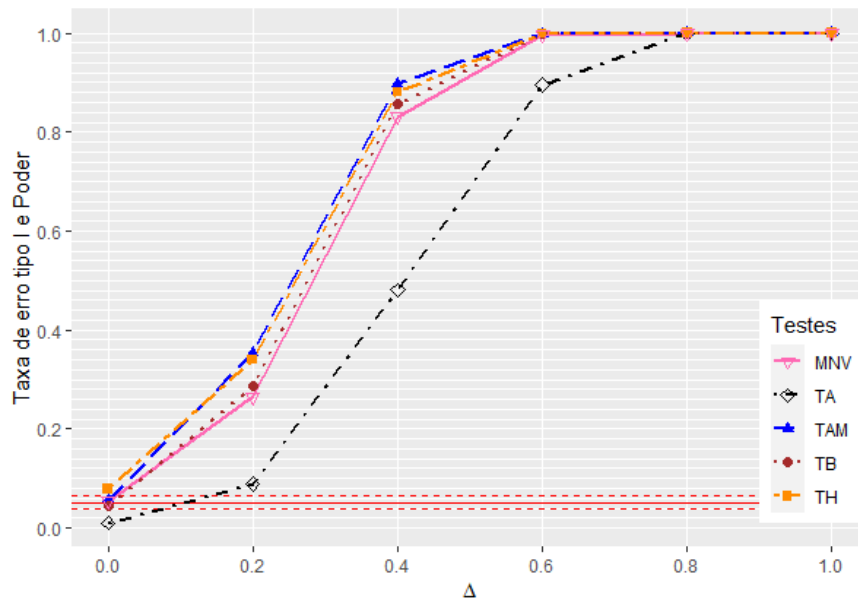


Fonte: Do autor (2023).

Assim como em baixa dimensionalidade, para a distribuição t_7 multivariada, o desempenho dos testes em relação ao poder foi muito semelhantes ao caso da distribuição normal multivariada. Para mais detalhes, consultar o Apêndice C.

Diferentemente dos casos anteriores, para as distribuições multivariadas normal e t_7 , em alta dimensionalidade, para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada os testes TAM e TB foram muito poderosos, principalmente ao se aumentar o número de variáveis e o tamanho amostral, n_i . O TAM foi o teste mais poderoso, seguido do teste TB, o desempenho destes testes se aproximou à medida que se aumentou os tamanhos amostrais. Por outro lado, o teste TA teve baixo poder, chegando a apresentar valores próximos a 0 para $\Delta = 0,2$. Nas Figuras 4.23, e 4.24 estão apresentados os casos em que houve um maior distanciamento no desempenho dos testes, que foi para pequenas amostras, ou seja, quando $(n_1, n_2) = (10, 20)$.

Figura 4.13 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



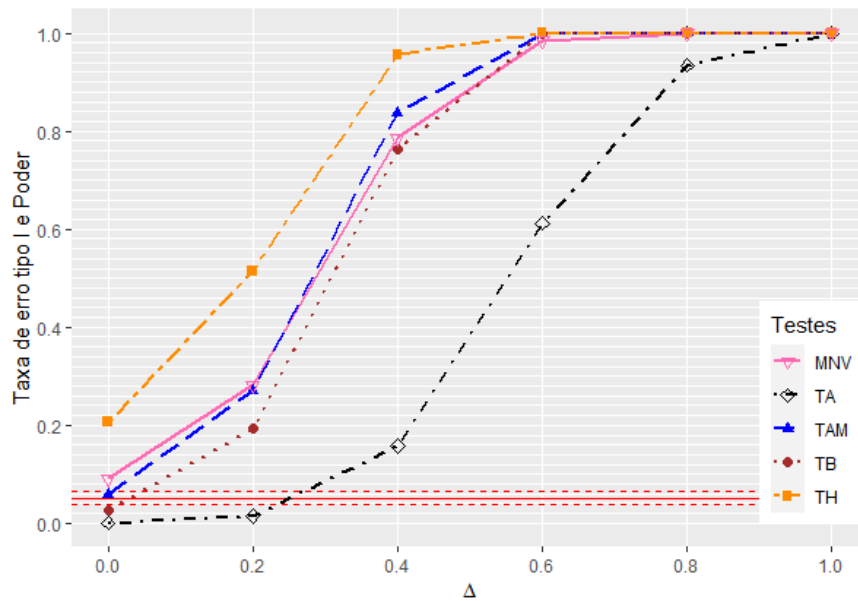
Fonte: Do autor (2023).

4.3 Considerações gerais

É interessante notar que para p menores e maiores tamanhos amostrais, os testes tendem a se tornar assintoticamente equivalentes, mas quando p se aproxima de ao menos um dos tamanhos amostrais n_i , os testes TH e MNV vão se tornando cada vez mais liberais, ou seja, passam a não controlar a taxa de erro tipo I. O tamanho amostral também afetou levemente o desempenho dos testes estudados, em alta dimensionalidade, principalmente para $\alpha = 0,01$.

Em geral, para os casos em que se tem homocedasticidade das matrizes de covariâncias, o teste que apresentou melhor desempenho para todas as configurações e distribuições, sendo o teste mais robusto, foi o TB pois, controlou a taxa de erro tipo I de forma exata e seu poder foi aproximado dos demais testes, além disso, o TB manteve o desempenho para alta dimensionalidade. Os testes TA e TAM foram assintoticamente equivalentes para distribuições multivariadas normal e t_7 , mas se tratando da uniforme multivariada, o teste TA foi extremamente conservativo

Figura 4.14 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.

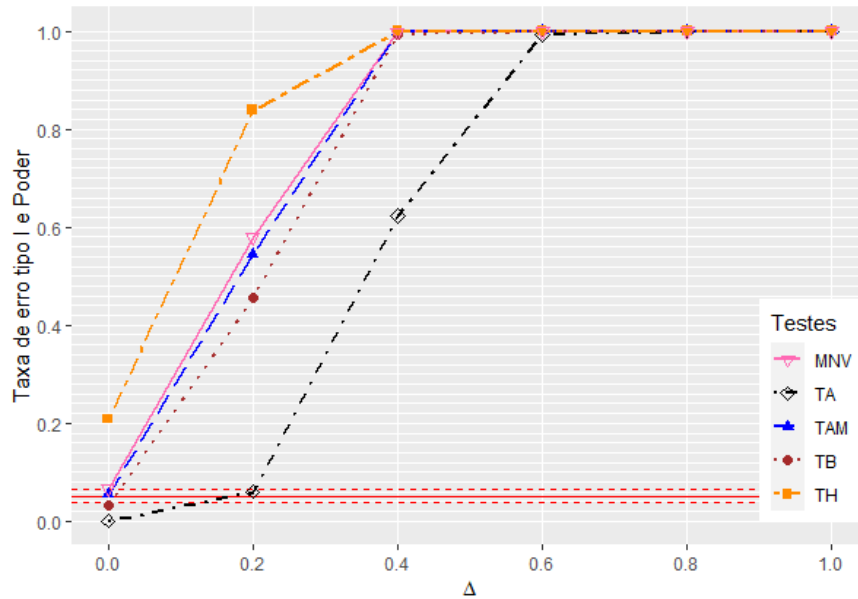


Fonte: Do autor (2023).

e, conseqüentemente, obteve um poder muito abaixo dos demais testes, tanto em baixa quanto em alta dimensionalidade. Por outro lado, o TAM manteve o controle da taxa de erro tipo I e o poder, em alguns casos o teste obteve valores levemente liberais, muito próximos do limite de rejeição de $H_0 : \alpha = 0,10$ (ou 0,05 ou 0,01) para o teste binomial exato ao nível de 1% de significância. Os teste TH e MNV apresentaram valores de poder muito próximos aos dos demais testes para pequenas diferenças nos vetores de médias, mas superando os demais testes quando esta diferença é maior, porém o TH e o MNV não são testes que se aplicam em alta dimensionalidade, ou seja, não robustos quanto a alta dimensionalidade.

Para o caso de heterocedasticidade das matrizes de covariâncias em baixa dimensionalidade, observa-se que, em geral, quando o número de variáveis aumenta e também quando se aproxima de n_i , os testes TH e MNV se tornam cada vez mais liberais. Esta característica também ocorre para o teste TB quando se tem as estruturas de matrizes de covariâncias, para a primeira, SC e para a segunda AR(1), porém no caso de estruturas equicorrelacionadas, este teste foi conservativo.

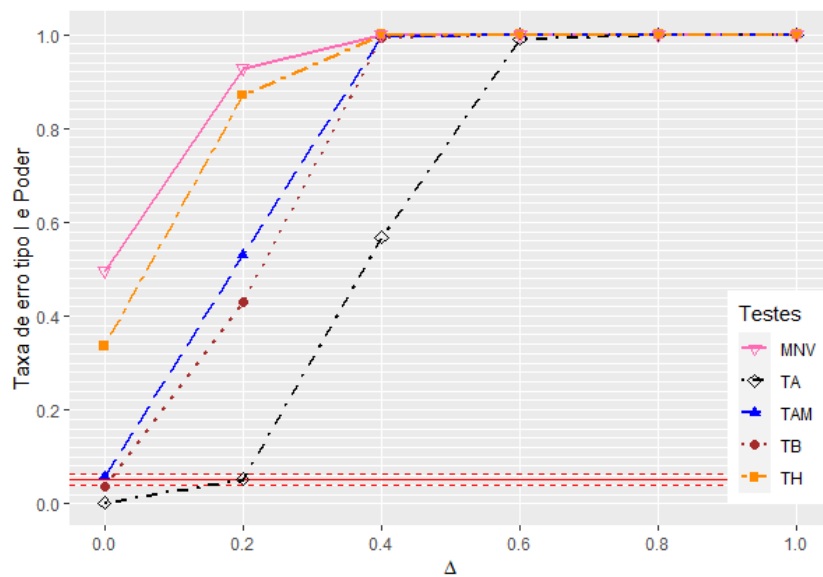
Figura 4.15 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 10$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



Fonte: Do autor (2023).

Observa-se também que o TA controlou a taxa de erro tipo I, em geral, para as distribuições normal e t_7 multivariadas, porém quando o teste é aplicado em amostras que seguem uma uniforme $(0, 1)$ multivariada, o teste passa a ser extremamente conservativo, e apresenta baixo poder. O teste TAM foi o único que, em geral, controlou a taxa de erro tipo I de forma exata, e o mesmo pode ser observado para a alta dimensionalidade, portanto, o teste mais robusto, ou seja, flexível quanto se quebra as pressuposições ideais, é o teste TAM, que manteve, de maneira geral, o controle da taxa de erro tipo I e poder mais alto dentre os concorrentes, porém o teste não foi tão eficiente ao se considerar $\alpha = 0,01$. O TA foi um teste com desempenho semelhante ao TAM, porém, para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada simulada neste trabalho, o teste teve uma queda expressiva no desempenho. O teste TB foi relativamente mais robusto que o TA, se considerado apenas o caso em que se tem estruturas de matrizes de covariâncias equicorrelacionadas, para a outra estrutura de heterogeneidade o teste passa a ser liberal.

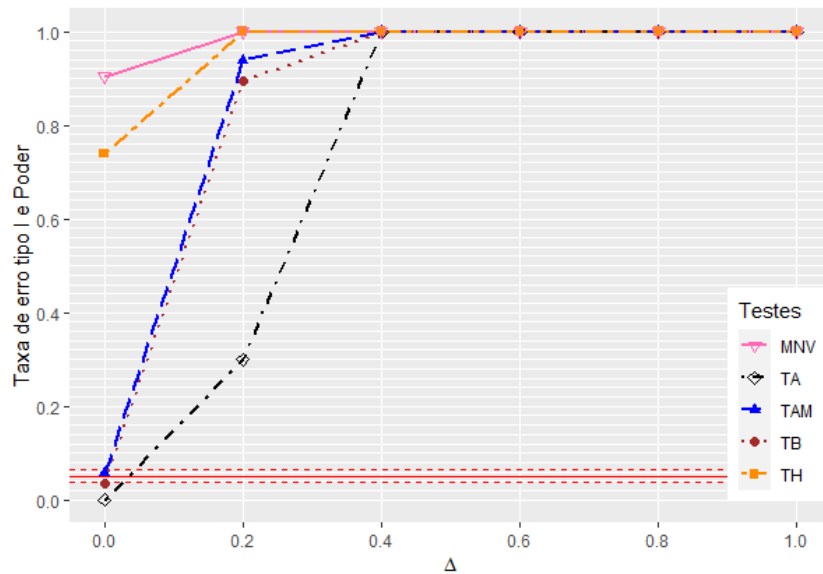
Figura 4.16 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 50$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



Fonte: Do autor (2023).

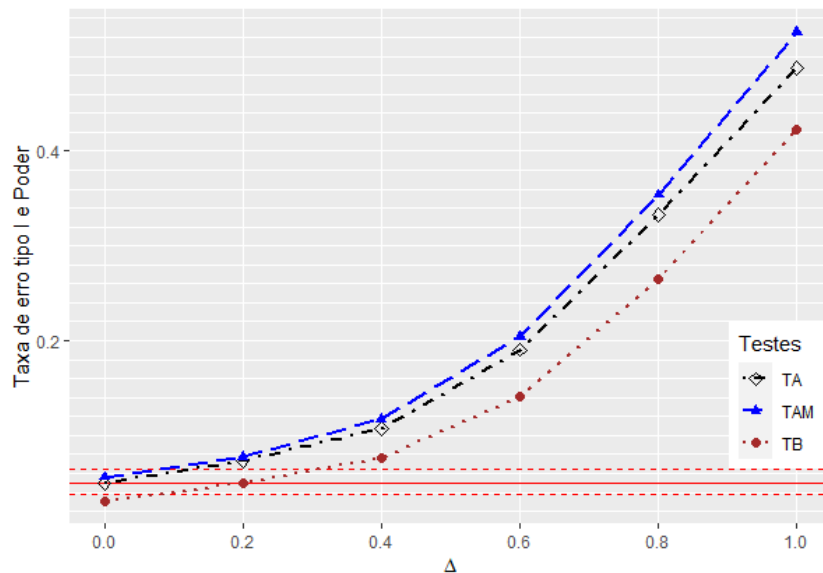
Portanto, uma alternativa de teste robusto e de fácil aplicação recomendada é o TAM, tanto para baixa quanto para alta dimensionalidade, tendo heterogeneidade das matrizes de covariâncias ou não, quando há ou não dados balanceados ou populações que seguem uma distribuição de uma família \mathfrak{F}_i qualquer para a i -ésima população, $i = 1, 2$.

Figura 4.17 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (50, 100)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



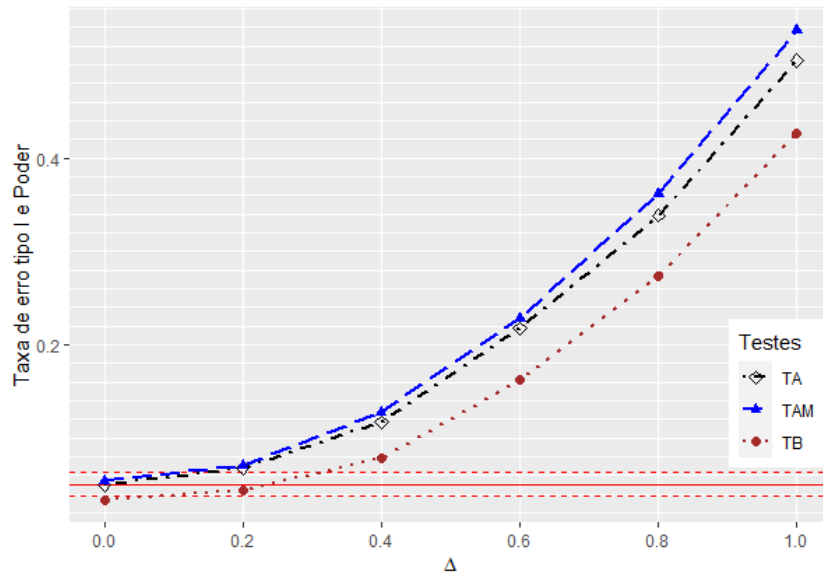
Fonte: Do autor (2023).

Figura 4.18 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 50$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



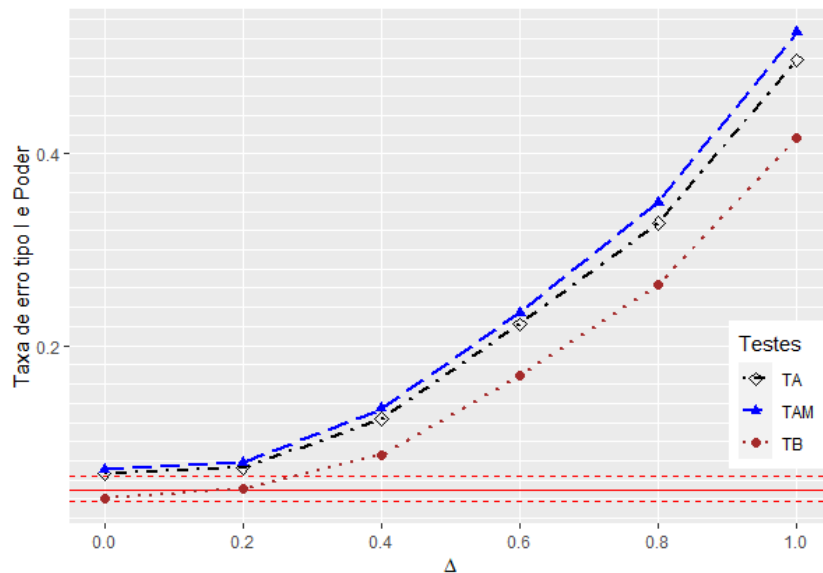
Fonte: Do autor (2023).

Figura 4.19 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 100$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



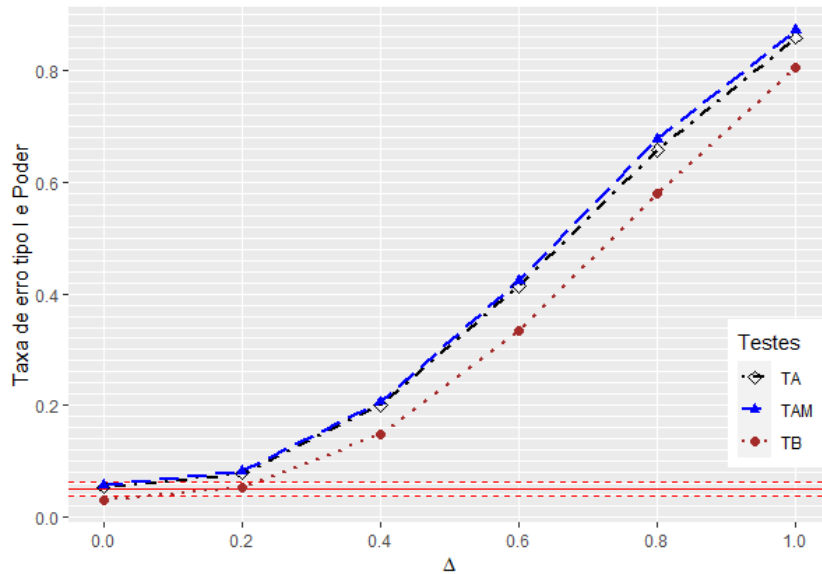
Fonte: Do autor (2023).

Figura 4.20 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



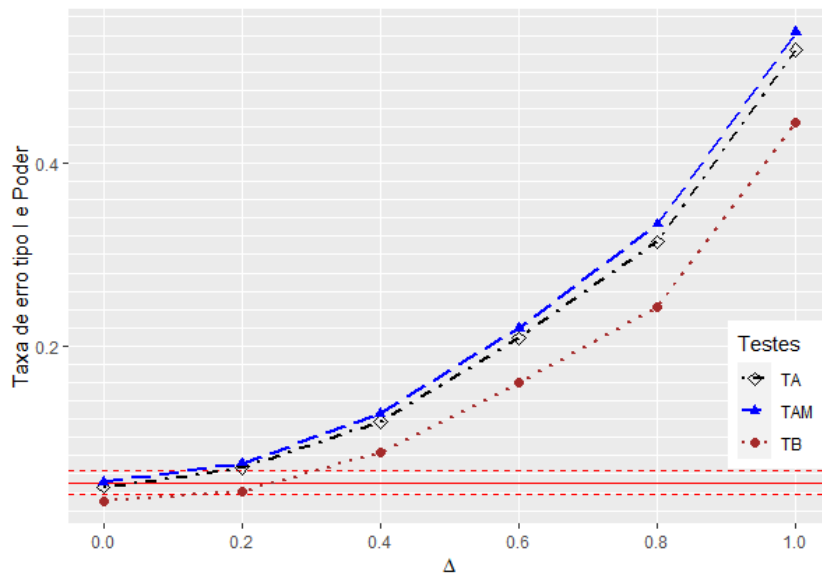
Fonte: Do autor (2023).

Figura 4.21 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 300$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



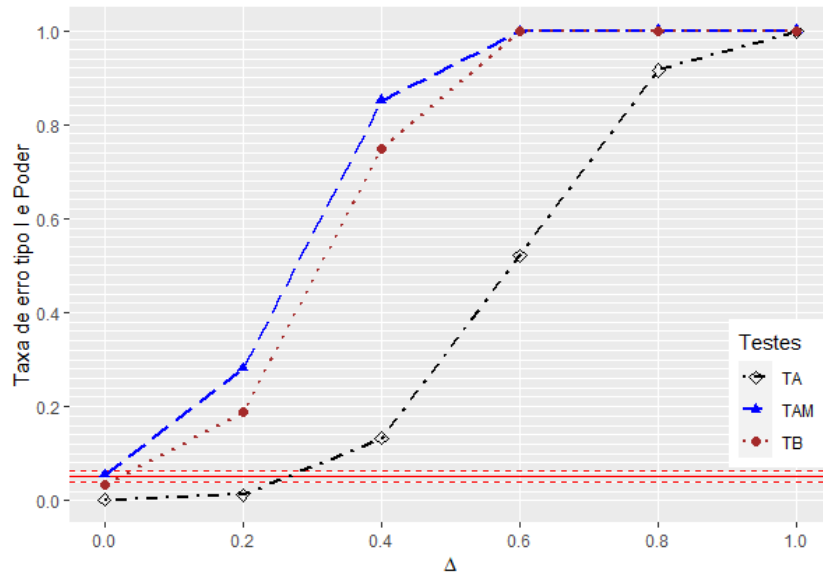
Fonte: Do autor (2023).

Figura 4.22 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $p = 500$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



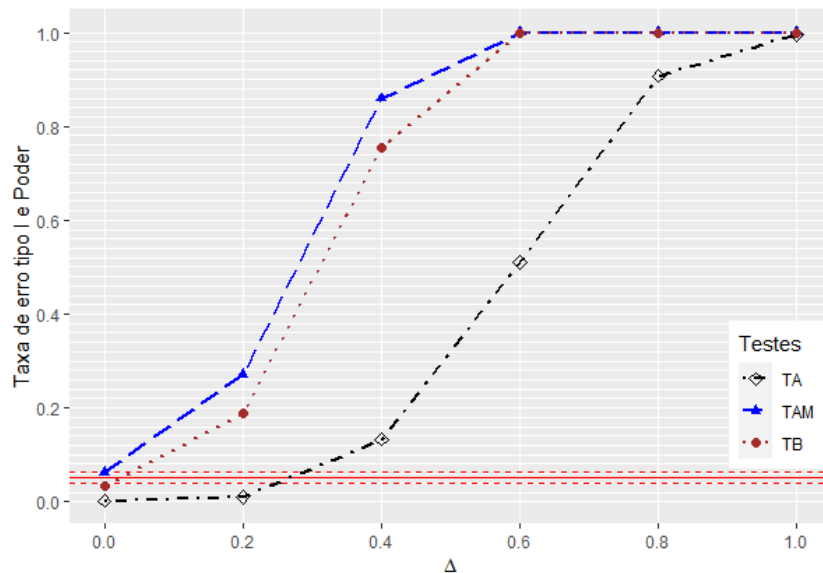
Fonte: Do autor (2023).

Figura 4.23 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $\rho = 0,8$, $p = 50$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



Fonte: Do autor (2023).

Figura 4.24 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando $\rho = 0,8$, $p = 500$, $(n_1, n_2) = (10, 20)$, $\Delta \in \{0,0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, heterocedasticidade, Σ_1 : SC, $\rho = 0,4$ e Σ_2 : SC, $\rho = 0,8$, distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, alta dimensionalidade e $\alpha = 0,05$.



Fonte: Do autor (2023).

5 CONCLUSÃO

Os dois testes propostos, TAM e TB, apresentaram os melhores desempenhos, como controles muito bom e bom, respectivamente, das taxas de erro tipo I e estavam entre os mais poderosos dentre os testes que controlaram adequadamente as taxas de erro tipo I, para todas as situações consideradas, sejam elas homocedásticas ou heterocedásticas, normais ou não normais multivariadas e de baixa ou alta dimensionalidade.

O teste TAM, por ter sido mais eficiente que o TB, melhor controle da taxa de erro tipo I e maior poder, é indicado para uso amplo nos testes de comparações entre dois vetores de médias e superou a versão de seu concorrente principal, o TA, em diversas situações simuladas.

Outro resultado importante, que corrobora a literatura, é a efetividade do teste TH. Em situações ideais, ou seja, normalidade, homocedasticidade e baixa dimensionalidade, o melhor teste foi TH, com controle exato da taxa de erro tipo I e alto poder frente aos concorrentes, como esperado.

REFERÊNCIAS

- AHMAD, M. R. Multiple comparisons of mean vectors with large dimension under general conditions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 89, n. 6, p. 1044–1059, 2019.
- AHMAD, M. R. A unified approach to testing mean vectors with large dimensions. **ASTA Advances in Statistical Analysis**, v. 103, n. 4, p. 593–618, 2019.
- BAI, Z.; SARANADASA, H. Effect of high dimension: by an exemple of a two sample problem. **Stat. Sin.**, v. 6, p. 311–329, 1996.
- BENNETT, B. M. Note on a solution of generalized Behrens-Fisher problem. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, v. 2, p. 87–90, 1951.
- CHEN, S. X.; QIN, Y. L. A two-sample test for high-dimensional data with applications to gene-set testing². **The Annals of Statistics**, v. 38, n. 2, p. 808–835, 2010.
- EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the Jackknife. **Annals of Statistics**, Hayward, v. 7, n. 1, p. 1–26, 1979.
- EVANS, M. J.; ROSENTHAL, J. S. **Probability and statistics. The science of uncertainty**. 2. ed. New York: Freeman, 2010. 760 p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística computacional em Java**. Lavras: Editora UFLA, 2013. 695 p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística multivariada**. 3. ed. Lavras: Editora UFLA, 2018. 622 p.
- GEBERT, D. M. P. **Uma solução via bootstrap paramétrico para o problema de Behrens-Fisher multivariado**. 120 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2014.
- GENTLE, J. E. **Random number generation and Monte Carlo methods**. 2. ed. New York: Springer, 2003. 381 p.
- JAMES, G. S. Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the populations variances are unknown. **Biometrika**, London, v. 41, p. 19–43, 1954.
- JOHANSEN, S. The Welch-James approximation to the distribution of the residual sum of squares in a weighted linear regression. **Biometrika**, London, v. 67, n. 1, p. 85–92, 1980.
- KRISHNAMOORTHY, K.; LU, F. A. A parametric bootstrap solution to the manova under heteroscedasticity. **Journal of Statistical Computation an Simulation**, Lafayette, v. 80, n. 8, p. 873–887, august 2010.
- KRISHNAMOORTHY, K.; YU, J. Modified Nel and Van der Merwe test for the multivariate Behrens-Fisher problem. **Statistics and Probability Letters**, v. 15, p. 161–169, 2004.
- MANLY, B. F. J. **Randomization, bootstrap and Monte Carlo methods in biology**. 3. ed. New York: Chapman and Hall, 2006. 480 p.

- MIRANDA, V. de Fátima Lemes de; FERREIRA, D. F. Avaliação monte carlo de testes assintóticos e de *bootstrap* para autocorrelação residual. **Revista de Matemática e Estatística**, v. 24, n. 1, p. 29–52, 2006.
- MITTELHAMMER, R. C. **Mathematical statistics for economics and business**. 2. ed. New York: Springer, 2013. 742 p.
- NEL, D. G.; VAN der MERWE, C. A. A solution to the multivariate Behrens-Fisher problem. **Communication in Statistics - Theory and Methods**, v. 15, p. 3719–3735, 1986.
- OLIVEIRA, I. R. C.; FERREIRA, D. F. Multivariate extension of chi-squared univariate normality test. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 80, n. 5, p. 513–526, 2010.
- PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes in Fortran: the art of scientific computing**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 994 p.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2022. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- SAHA, M.; DEY, S.; MAITI, S. S. Parametric and non-parametric bootstrap confidence intervals of C_{Npk} for exponential power distribution. **Industrial and Production Engineering**, v. 35, n. 2, p. 160–169, 2018.
- SILVA, R. B. V. **Robustez de testes assintóticos e de bootstrap para homogeneidade de covariâncias em populações multivariadas**. 93 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2005.
- SILVA, R. B. V.; FERREIRA, D. F.; NOGUEIRA, D. A. Robustness of asymptotic and bootstrap tests for multivariate homogeneity of covariance matrices. **Ciência e Agrotecnologia**, v. 32, n. 1, p. 157–166, 2008.
- SMITH, W. B.; HOCKING, R. R. Algorithm AS 53: Wishart variate generator. **Applied Statistics - Journal of the Royal Statistical Society - Series C**, London, v. 21, n. 3, p. 341–345, 1972.
- VIEIRA, L. V. **Modelos paramétricos de matrizes de covariância para medidas repetidas: um estudo de simulação sobre o ajuste, o erro e o poder estatístico em modelos lineares mistos**. 147 p. Tese (Doutorado em Agronomia) — Universidade Estadual Paulista, Botucatu, 2021.
- YAO, Y. An approximate degrees of freedom solution to the Behrens-Fisher problem. **Biometrika**, London, v. 52, n. 1, 2, p. 139–147, 1965.
- YOUNG, L. C. On randomnes in ordered sequences. **Ann. Math. Stat.**, Baltimore, v. 12, p. 296–300, 1941.

APÊNDICE A – Rotina com os comandos do *software* R para aplicação dos testes

Para os códigos abaixo é necessário a instalação dos seguintes pacotes:

```
library(parallel) # Para função foreach()
detectCores() # detectar núcleos do processador
library(doParallel) # Para a função registerDoParallel()
registerDoParallel( ) # colocar o número de núcleos que puder
library(MASS) # Para gerar normal multivariada
library(mvtnorm) # Para gerar t multivariada
```

Rotina com os comandos do *software* R para gerar estruturas das matrizes de covariâncias.

```
# Função para definir as matrizes de covariâncias pretendidas para as
# simulações das populações
# estruturas cs ou ar, entrar com rho e com p

cov.choose <- function(p, type="cs", rho = 0.5)
{
  if (type=="cs")
  sigma <- (1-rho)*diag(p)+rho*matrix(1,p,p) else
  if (type == "ar")
  {
    a <- abs(matrix(1:p-1,nrow=p, ncol=p,byrow=TRUE)-
      (1:p - 1))
    sigma <- rho^a
  }
  return(sigma)
}
```

Rotina com os comandos do *software* R para gerar amostra normal multivariada.

```
# função para gerar normais multivariadas com média mu e cov sigma

mult.sample <- function(n, mu=rep(0, 2), sigma=diag(2))
{
X <- mvrnorm(n, mu, sigma)
return(X)
}
```

Rotina com os comandos do *software* R para gerar amostra *t* multivariada.

```
# função para gerar t multivariadas com média mu, cov sigma e gl nu

tmult.sample <- function(n,mu=rep(0, 2),sigma=diag(2),nu=7)
{
X <- rmvt(n, sigma, nu, delta=mu)
return(X)
}
```

Rotina com os comandos do *software* R para gerar amostra uniforme (0, 1) multivariada.

```
# função para gerar uniformes multivariadas com média mu=0 e cov rho (p x p)
# fornecer rho (1 x 1), tipo (cs, ar), p

umult.sample <- function(n, p, rho = 0.5, type= "cs")
{
mu <- rep(0, p)
rhot <- 2*sin(pi/6*rho)
```

```

sigma <- cov.choose(p, type, rhot)
Y <- mvrnorm(n, mu, sigma)
X <- pnorm(Y)
return(X)
}

```

Rotina com os comandos do *software* R para aplicação do teste T^2 de Hotelling (TH).

```

T2 <- function(X, Y, delta0=matrix(0,ncol(X),1))
{
n1 <- nrow(X);
n2 <- nrow(Y)
p <- ncol(X)
S1 <- var(X);
S2 <- var(Y)
Xb <- apply(X,2,mean)
Yb <- apply(Y,2,mean)
Sp <- (S1 * (n1 - 1) + S2 * (n2-1)) / (n1 + n2 - 2)
aux<- Xb - Yb - delta0
T2 <- as.numeric((t(aux)%*%solve(Sp)%*%aux) * n1*n2/(n1+n2))
v1 <- p
v2 <- n1 + n2 - 1 - p
Fc <- v2 * T2 / (p * (n1 + n2 -2))
valor.p <- 1 - pf(Fc, v1, v2)
return(list(T2 = T2,Fc=Fc,valor.p=valor.p,nu1=n1,nu2=n2))
}

```

Rotina com os comandos do *software* R para aplicação do teste de Krishnamoorthy e Yu (2004) (MNV).

```
# função BFNVM: recebe a amostra da pop. 1 em X e da pop 2 em Y
# n1 número de linhas de X, n2 n. linhas de Y com n2>=n1
# aplica o teste modificado de Nel e Van der Merwe (1986)
# utilizando aproximação T2 com ajustes nos GL
# (Krishnamoorthy e Yu, 2004).
# o teste para heterogeneidade de
# covariâncias deve ser feito a parte; H0: mu1-mu2=delta0
# (delta0, deve ser passado para a função.
# Default = 0 (p x 1)
BFNVMM <- function(X,Y,delta0=matrix(0,ncol(X),1))
{
  n1 <- nrow(X);
  n2 <- nrow(Y)
  p <- ncol(X)
  S1 <- var(X);
  S2 <- var(Y)
  Xb <- apply(X,2,mean);
  Yb <- apply(Y,2,mean)
  SeI<- solve(S1/n1+S2/n2)
  aux<- Xb - Yb - delta0
  T2 <- as.numeric(t(aux)%*%SeI%*%aux)
  V1 <- ((S1/n1)%*%SeI);
  V2 <- ((S2/n2)%*%SeI)
  aux <- (sum(diag(V1%*%V1))+(sum(diag(V1)))^2)/(n1-1)
  aux<- aux+(sum(diag(V2%*%V2))+(sum(diag(V2)))^2)/(n2-1)
  v2 <- (p+p^2)/aux
```

```

v1 <- p
Fc <- (v2+1-p)*T2/(v2*p)
pr.F <- 1 - pf(Fc,v1,v2+1-p)
return(list(f1=v1,f2=v2+1-p,Fc=Fc,pr.F=pr.F,T2=T2,nu=v2))
}

```

Rotina com os comandos do *software* R para aplicação do teste Ahmad (TA).

```

Ahmad <- function(X,Y)
{
  Uni <- function(U)
  {
    nu <- nrow(U)
    p <- ncol(U)
    hxixr <- U%*%t(U) / p
    Ei <- sum(diag(hxixr))
    res <- sum(hxixr) - Ei
    res <- res / (nu * (nu -1))
    return(res)
  }
  Unln2 <- function(U, V)
  {
    nu <- nrow(U)
    nv <- nrow(V)
    p <- ncol(U)
    hxixr <- U%*%t(V) / p
    res <- sum(hxixr) / (nu * nv)
    return(res)
  }
}

```

```

Un1 <- Uni(X)
Un2 <- Uni(Y)
Q0 <- Un1 + Un2 - 2 * Unln2(X, Y)
n1 <- nrow(X)
n2 <- nrow(Y)
p <- ncol(X) # or of Y
h <- function(x)
{
return(t(x) %*% x)
}
E1 <- sum(apply(X,1,h)) / n1
E2 <- sum(apply(Y,1,h)) / n2
Q1 <- (E1 - Un1) / n1 + (E2 - Un2) / n2
T2 <- 1 + (n1+n2)*Q0 / ((n1+n2) * Q1 / p)
Omega0 <- (n1+n2)/p*(var(X)/n1+var(Y)/n2)
df <- (sum(diag(Omega0)))^2 /
sum(diag(Omega0%*%Omega0))
chi2 <- T2 * df
p.val <- 1 - pchisq(chi2, df)
return(list(T2=T2,chi2=chi2,p.val=p.val,df=df))
}

```

Rotina com os comandos do *software* R para aplicação do teste assintótico proposto (TAM)

```

Ahmad.mod <- function(X,Y)
{
Uni <- function(U)
{
nu <- nrow(U)

```

```

p <- ncol(U)
hxixr <- U%*%t(U)
Ei <- sum(diag(hxixr))
res <- sum(hxixr) - Ei
res <- res / (nu * (nu -1))
return(res)
}
Un1n2 <- function(U, V)
{
nu <- nrow(U)
nv <- nrow(V)
p <- ncol(U)
hxixr <- U%*%t(V)
res <- sum(hxixr) / (nu * nv)
return(res)
}
Un1 <- Uni(X)
Un2 <- Uni(Y)
Q0 <- Un1 + Un2 - 2 * Un1n2(X, Y)
n1 <- nrow(X)
n2 <- nrow(Y)
p <- ncol(X) # or of Y
h <- function(x)
{
return(t(x) %*% x)
}
SigmaH120 <- var(X)/n1+var(Y)/n2
Q1 <- sum(diag(SigmaH120)) # teste
T2 <- 1 + (n1+n2)*Q0 / ((n1+n2) * Q1)

```

```

Omega0 <- (n1+n2) * (SigmaH120)
df <- (sum(diag(Omega0)))^2 /
sum(diag(Omega0%%Omega0))
chi2 <- T2 * df
p.val <- 1 - pchisq(chi2, df)
return(list(T2=T2,chi2=chi2,p.val=p.val,df=df))
}

```

Rotina com os comandos do *software* R para aplicação do teste *bootstrap* proposto (TB)

```

# Teste de Ahmad(2019) modificado para duas amostras multivariadas
# cálculo da estatística para o

```

```

Ahmad.mod.boot <- function(X, Y)
{
  Uni <- function(U)
  {
    nu <- nrow(U)
    p <- ncol(U)
    hxixr <- U%%t(U)
    Ei <- sum(diag(hxixr))
    res <- sum(hxixr) - Ei
    res <- res / (nu * (nu -1))
    return(res)
  }
  Unln2 <- function(U, V)
  {
    nu <- nrow(U)
    nv <- nrow(V)

```

```

p <- ncol(U)
hxixr <- U%*%t(V)
res <- sum(hxixr) / (nu * nv)
return(res)
}
Un1 <- Uni(X)
Un2 <- Uni(Y)
Q0 <- Un1 + Un2 - 2 * Unln2(X, Y)
n1 <- nrow(X)
n2 <- nrow(Y)
p <- ncol(X) # or of Y
h <- function(x)
{
return(t(x) %*% x)
}
SigmaH120 <- var(X)/n1+var(Y)/n2
Q1 <- sum(diag(SigmaH120))
T2 <- 1 + (n1+n2)*Q0 / ((n1+n2) * Q1)
return(T2)
}

# teste bootstrap
boot.Ahmad <- function(X, Y, B = 2000)
{
n1 <- nrow(X);
n2 <- nrow(Y)
p <- ncol(X)
Y1 <- X-matrix(rep(apply(X,2,mean),each=n1),n1,p)
Y2 <- Y-matrix(rep(apply(Y,2,mean),each=n2),n2,p)

```

```

W <- rbind(Y1,Y2)
T2 <- Ahmad.mod.boot(X, Y)
aux.b <- function(x) # argumento sem uso
{
  ind1 <- sample(1:(n1+n2), n1, TRUE)
  ind2 <- sample(1:(n1+n2), n2, TRUE)
  Y1 <- W[ind1,]
  Y2 <- W[ind2,]
  y <- Ahmad.mod.boot(Y1, Y2)
  return(y)
}
aux1 <- matrix(0,B,1)
T2null <- apply(aux1,1,aux.b)
T2 <- c(T2null, T2) #valor original na ?ltima posi??o
p.val <- length(T2[T2 >= T2[B+1]]) / (B + 1)
return(list(T2 = T2[B+1], valor.p = p.val))
}

```

Rotina com os comandos do *software* R para aplicação da avaliação da taxa de erro tipo I e do poder para os três testes

```

# Função para realizar as simulações MC
# de acordo com os argumentos de entrada.
# dist: define a distribuição de probabilidade
# 1: normal, 2: t com nu gl e 3: uniforme multivariadas
# rho1 e rho2: correlações pop 1 e 2, respectivamente
# n1 e n2: tamanhos amostrais
# p : número de variáveis
# type1: "cs" e "ar" - (estruturas de correlação)
# type2: "cs" e "ar" - (estruturas de correlação)

```

```

# H0: 1 para sob H0 e 2 para sob H1
# Delta:  $\mu_2 = \mu_1 + \Delta \cdot p_1$ ,  $\Delta=0,2(0,2)1$ 
simulaMC <- function(distr, rho1=0.5,rho2=0.5,n1=20, n2=40,
  p=10,type1="cs",type2="cs",H0=1,N=2000,
  B=2000, nu=7, Delta = 0.2)
{
  if (p < n1 + n2 - 2){
    res1 <- matrix(0,3,5)
    rownames(res1) <- c("10%", "5%", "1%")
    colnames(res1) <- c("T2", "MNVN","Ahmad","Ahmad Mod.", "Ahmad Boot.")
  } else {
    res1 <- matrix(0,3,3)
    rownames(res1) <- c("10%", "5%", "1%")
    colnames(res1) <- c("Ahmad","Ahmad mod.", "Ahmad Boot.")
  }
  res2 <- matrix(c("dist.", "rho1", "rho2", "n1", "n2", "p",
    "Estrut. 1", "Estrut. 2", "H0/H1",
    "N", "B", "nu", "Delta"), 13, 2)
  colnames(res2) <- c("Característica", "Valores")
  if (distr==1) dis <- "normal" else
  if (distr==2) dis <- "t" else
  if (distr==3) dis <- "uniforme"
  if (H0==1) Delta <- 0
  res2[,2] <- c(dis,toString(rho1),toString(rho2),toString(n1),
    toString(n2),toString(p),type1,type2,toString(H0),
    toString(N),toString(B),toString(nu),toString(Delta))
  if (H0==1) {
    mu1 <- rep(0, p)
    mu2 <- mu1
  }
}

```

```

} else
{
mu1 <- rep(0, p)
psi <- Delta * (1:p) / p
mu2 <- mu1 + psi
}
if (distr!=3) {
Sigma1 <- cov.choose(p, type1, rho1)
Sigma2 <- cov.choose(p, type2, rho2)
}
results <- foreach(i = 1:N, .packages=c('MASS','mvtnorm'),
.export=c("Ahmad.mod","Ahmad","boot.Ahmad",
"umult.sample","cov.choose",
"T2", "BFNVMM","Ahmad.mod.boot")) %dopar%
{
if (distr==1) {
X <- mvrnorm(n1, mu1, Sigma1)
Y <- mvrnorm(n2, mu2, Sigma2)
} else if (distr==2) {
X <- rmvt(n1, Sigma1, nu, mu1)
Y <- rmvt(n2, Sigma2, nu, mu2)
} else {
X <- umult.sample(n1, p, rho1, type1)
Y <- umult.sample(n2, p, rho2, type2)
if (H0==2){ # para poder apenas
mu2 <- Delta * (1:p) / p
Y <- Y + matrix(rep(mu2,each=n2),n2,p)
}
}
}
}

```

```

p0 <- Ahmad(X,Y)$p.val
p1 <- Ahmad.mod(X,Y)$p.val
p2 <- boot.Ahmad(X, Y, B)$valor.p
if (p < n1 + n2 - 2){
p3 <- T2(X,Y)$valor.p
p4 <- BFNVM(X,Y)$pr.F
}# situação só de baixa dimensionalidade
if (p < n1 + n2 - 2) c(p3,p4,p0,p1,p2) else
c(p0,p1,p2)
}
if (p < n1 + n2 - 2)
p_values <- matrix(unlist(results), N, 5, byrow = TRUE) else
p_values <- matrix(unlist(results), N, 3, byrow = TRUE)
res1[1,] <- colMeans(p_values <= 0.10)
res1[2,] <- colMeans(p_values <= 0.05)
res1[3,] <- colMeans(p_values <= 0.01)
return(list(res1=res1,res2=res2))
}

```

APÊNDICE B – Tabelas - Taxa de erro tipo I

Tabela 1 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC), distribuições multivariadas e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0 , caso homocedástico.

SC com $\rho = 0,5, \alpha = 0,10$							
p	Distribuição	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
Baixa dimensionalidade							
10	Normal	40,40	0,0960	0,0935	0,0840	0,0845	0,0975
		20,40	0,1085	0,1075	0,0905	0,0940	0,0965
	t_7	40,40	0,0985	0,0950	0,0855	0,0855	0,0975
		20,40	0,1080	0,1050	0,0850	0,0900	0,0975
	Unif(0, 1)	40,40	0,1200 ⁺	0,1195 ⁺	0,0040 ⁻	0,0840	0,0940
		20,40	0,1030	0,1065	0,0090 ⁻	0,0975	0,1020
Alta dimensionalidade							
300	Normal	40,40	–	–	0,0795 ⁻	0,0825 ⁻	0,0895
		20,40	–	–	0,0955	0,0995	0,1105
	t_7	40,40	–	–	0,0900	0,0905	0,1000
		20,40	–	–	0,0970	0,1015	0,1115
	Unif(0, 1)	40,40	–	–	0,0045 ⁻	0,0910	0,1025
		20,40	–	–	0,0045 ⁻	0,0995	0,1050

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 2 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC), distribuições multivariadas e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0 , caso homocedástico.

SC com $\rho = 0,5$, $\alpha = 0,01$							
p	Distribuição	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
Baixa dimensionalidade							
10	Normal	40,40	0,0055	0,0055	0,0155	0,0170	0,0115
		20,40	0,0120	0,0130	0,0155	0,0190 ⁺	0,0105
	t_7	40,40	0,0055	0,0055	0,0110	0,0125	0,0080
		20,40	0,0075	0,0080	0,0150	0,0185 ⁺	0,0125
	Unif(0, 1)	40,40	0,0100	0,0100	0,0000 ⁻	0,0200 ⁺	0,0105
		20,40	0,0145	0,0130	0,0000 ⁻	0,0245 ⁺	0,0140
Alta dimensionalidade							
300	Normal	40,40	–	–	0,0160	0,0185 ⁺	0,0090
		20,40	–	–	0,0160	0,0220 ⁺	0,0105
	t_7	40,40	–	–	0,0190 ⁺	0,0215 ⁺	0,0135
		20,40	–	–	0,0195 ⁺	0,0225 ⁺	0,0125
	Unif(0, 1)	40,40	–	–	0,0000 ⁻	0,0165	0,0105
		20,40	–	–	0,0000 ⁻	0,0215 ⁺	0,0120

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 3 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0 .

Normal multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$						
p	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
2	10,20	0,1260 ⁺	0,0995	0,1035	0,1075	0,0920
	20,40	0,1375 ⁺	0,1085	0,0970	0,1000	0,0930
	50,100	0,1315 ⁺	0,0990	0,0965	0,0975	0,0970
10	10,20	0,2545 ⁺	0,1565 ⁺	0,1010	0,1060	0,0860
	20,40	0,2540 ⁺	0,1120	0,0915	0,0925	0,0850
	50,100	0,2410 ⁺	0,0955	0,0990	0,0990	0,0935
50	20,40	0,3015 ⁺	0,4810 ⁺	0,0920	0,0950	0,0835
	50,100	0,5650 ⁺	0,2680 ⁺	0,0870	0,0880	0,0815 ⁻
100	50,100	0,6255 ⁺	0,8720 ⁺	0,0930	0,0945	0,0855
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$						
2	10,20	0,0890	0,0900	0,0990	0,1045	0,0935
	20,40	0,0975	0,1020	0,0955	0,0965	0,0955
	50,100	0,1015	0,0980	0,1020	0,1030	0,1065
10	10,20	0,0890	0,1105	0,0965	0,1060	0,1140
	20,40	0,0920	0,1040	0,0990	0,1015	0,1180
	50,100	0,0860	0,0935	0,0805 ⁻	0,0835	0,1015
50	20,40	0,0825 ⁻	0,1190 ⁺	0,1015	0,1045	0,1485 ⁺
	50,100	0,0590 ⁻	0,1290 ⁺	0,0870	0,0880	0,1385 ⁺
100	50,100	0,0570 ⁻	0,2055 ⁺	0,0920	0,0920	0,1440 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 4 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0 .

t_7 multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$						
p	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
2	10,20	0,1260 ⁺	0,0930	0,1045	0,1085	0,0920
	20,40	0,1310 ⁺	0,1015	0,0975	0,0995	0,0910
	50,100	0,1305 ⁺	0,0910	0,0935	0,0945	0,0915
10	10,20	0,2350 ⁺	0,1360 ⁺	0,0920	0,0945	0,0800 ⁻
	20,40	0,2260 ⁺	0,0965	0,0780 ⁻	0,0805 ⁻	0,0745 ⁻
	50,100	0,2420 ⁺	0,0960	0,0905	0,0915	0,0845
50	20,40	0,2865 ⁺	0,4565 ⁺	0,1035	0,1045	0,0965
	50,100	0,5335 ⁺	0,2475 ⁺	0,0955	0,0965	0,0890
100	50,100	0,6030 ⁺	0,8400 ⁺	0,0865	0,0870	0,0810 ⁻
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$						
2	10,20	0,0935	0,0840	0,0965	0,1010	0,0900
	20,40	0,1025	0,0995	0,0945	0,0990	0,0950
	50,100	0,0890	0,0860	0,0880	0,0885	0,0905
10	10,20	0,0900	0,0935	0,0910	0,0995	0,1035
	20,40	0,0915	0,1035	0,0880	0,0930	0,1075
	50,100	0,0905	0,0915	0,0945	0,0955	0,1130
50	20,40	0,0840	0,1125	0,0845	0,0855	0,1280 ⁺
	50,100	0,0565 ⁻	0,1090	0,0830 ⁻	0,0845	0,1365 ⁺
100	50,100	0,0535 ⁻	0,1890 ⁺	0,0945	0,0955	0,1525 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 5 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0 .

Uniforme(0,1) multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$						
p	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
2	10,20	0,1255 ⁺	0,1035	0,0275 ⁻	0,1145	0,0945
	20,40	0,1370 ⁺	0,1085	0,0230 ⁻	0,1045	0,0980
	50,100	0,1365 ⁺	0,1075	0,0200 ⁻	0,0945	0,0960
10	10,20	0,2450 ⁺	0,1515 ⁺	0,0060 ⁻	0,0975	0,0825 ⁻
	20,40	0,2585 ⁺	0,1075	0,0080 ⁻	0,0960	0,0865
	50,100	0,2700 ⁺	0,1090	0,0085 ⁻	0,1030	0,0960
50	20,40	0,3825 ⁺	0,5435 ⁺	0,0055 ⁻	0,0975	0,0890
	50,100	0,5705 ⁺	0,2540 ⁺	0,0030 ⁻	0,0960	0,0895
100	50,100	0,7160 ⁺	0,8945 ⁺	0,0040 ⁻	0,0980	0,0870
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$						
2	10,20	0,1005	0,1030	0,0225 ⁻	0,1090	0,0980
	20,40	0,0990	0,0995	0,0165 ⁻	0,0965	0,0965
	50,100	0,0975	0,1000	0,0160 ⁻	0,0960	0,0980
10	10,20	0,0890	0,1125	0,0070 ⁻	0,0975	0,1070
	20,40	0,0965	0,1120	0,0070 ⁻	0,0985	0,1130
	50,100	0,0930	0,1095	0,0045 ⁻	0,1015	0,1245 ⁺
50	20,40	0,0850	0,1115	0,0035 ⁻	0,0865	0,1315 ⁺
	50,100	0,0600 ⁻	0,1235 ⁺	0,0045 ⁻	0,0835	0,1390 ⁺
100	50,100	0,0480 ⁻	0,1785 ⁺	0,0060 ⁻	0,0855	0,1440 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 6 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0 .

Normal multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10$				
p	n_1, n_2	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
50	10,20	0,0880	0,0915	0,0800 ⁻
100	10,20	0,0875	0,0940	0,0770 ⁻
	20,40	0,0875	0,0895	0,0780 ⁻
300	10,20	0,1100	0,1140	0,0985
	20,40	0,0920	0,0955	0,0850
	50,100	0,0965	0,0970	0,0890
500	10,20	0,1030	0,1080	0,0895
	20,40	0,0945	0,0970	0,0865
	50,100	0,0985	0,0990	0,0905
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$				
50	10,20	0,0920	0,1005	0,1315 ⁺
100	10,20	0,0875	0,0935	0,1330 ⁺
	20,40	0,0910	0,0955	0,1475 ⁺
300	10,20	0,0930	0,1015	0,1365 ⁺
	20,40	0,0790 ⁻	0,0835	0,1520 ⁺
	50,100	0,0925	0,0950	0,1675 ⁺
500	10,20	0,0950	0,1015	0,1420 ⁺
	20,40	0,0950	0,0980	0,1675 ⁺
	50,100	0,0810 ⁻	0,0845	0,1740 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 7 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0 .

t_7 multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10$				
p	n_1, n_2	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
50	10,20	0,0730 ⁻	0,0765 ⁻	0,0670 ⁻
100	10,20	0,0880	0,0905	0,0800 ⁻
	20,40	0,1000	0,1040	0,0960
300	10,20	0,0915	0,0960	0,0815 ⁻
	20,40	0,0885	0,0915	0,0835
	50,100	0,0890	0,0905	0,0820 ⁻
500	10,20	0,0820 ⁻	0,0910	0,0805 ⁻
	20,40	0,0960	0,0980	0,0860
	50,100	0,0875	0,0885	0,0780 ⁻
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$				
50	10,20	0,0765 ⁻	0,0835	0,1090
100	10,20	0,0730 ⁻	0,0790 ⁻	0,1165
	20,40	0,0860	0,0910	0,1265 ⁺
300	10,20	0,0810 ⁻	0,0895	0,1280 ⁺
	20,40	0,0925	0,0970	0,1460 ⁺
	50,100	0,0965	0,0985	0,1665 ⁺
500	10,20	0,0705 ⁻	0,0800 ⁻	0,1240 ⁺
	20,40	0,0825 ⁻	0,0870	0,1420 ⁺
	50,100	0,0905	0,0925	0,1595 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 8 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_0 .

Uniforme(0,1) multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10$				
p	n_1, n_2	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
50	10,20	0,0055 ⁻	0,0965	0,0840
100	10,20	0,0060 ⁻	0,0925	0,0745 ⁻
	20,40	0,0020 ⁻	0,1030	0,0925
300	10,20	0,0050 ⁻	0,0975	0,0825 ⁻
	20,40	0,0040 ⁻	0,0940	0,0820 ⁻
	50,100	0,0045 ⁻	0,0775 ⁻	0,0695 ⁻
500	10,20	0,0015 ⁻	0,0965	0,0780 ⁻
	20,40	0,0045 ⁻	0,0920	0,0805 ⁻
	50,100	0,0030 ⁻	0,0940	0,0855
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$				
50	10,20	0,0070 ⁻	0,1040	0,1340 ⁺
100	10,20	0,0060 ⁻	0,0975	0,1400 ⁺
	20,40	0,0040 ⁻	0,0835	0,1340 ⁺
300	10,20	0,0065 ⁻	0,0860	0,1295 ⁺
	20,40	0,0065 ⁻	0,0930	0,1505 ⁺
	50,100	0,0035 ⁻	0,0955	0,1615 ⁺
500	10,20	0,0090 ⁻	0,1050	0,1575 ⁺
	20,40	0,0070 ⁻	0,0870	0,1450 ⁺
	50,100	0,0065 ⁻	0,0950	0,1720 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 9 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0 .

Normal multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$						
p	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
2	10,20	0,0230 ⁺	0,0110	0,0115	0,0155	0,0085
	20,40	0,0190 ⁺	0,0095	0,0125	0,0145	0,0085
	50,100	0,0200 ⁺	0,0115	0,0110	0,0125	0,0085
10	10,20	0,0405 ⁺	0,0140	0,0170	0,0235 ⁺	0,0075
	20,40	0,0550 ⁺	0,0155	0,0185 ⁺	0,0190 ⁺	0,0110
	50,100	0,0500 ⁺	0,0110	0,0170	0,0175 ⁺	0,0075
50	20,40	0,0465 ⁺	0,0725 ⁺	0,0160	0,0205 ⁺	0,0070
	50,100	0,2025 ⁺	0,0455 ⁺	0,0150	0,0165	0,0060
100	50,100	0,2315 ⁺	0,5090 ⁺	0,0160	0,0180 ⁺	0,0050 ⁻
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$						
2	10,20	0,0100	0,0085	0,0140	0,0180 ⁺	0,0120
	20,40	0,0075	0,0075	0,0125	0,0130	0,0095
	50,100	0,0100	0,0110	0,0115	0,0125	0,0085
10	10,20	0,0095	0,0125	0,0080	0,0155	0,0135
	20,40	0,0100	0,0085	0,0170	0,0215 ⁺	0,0195 ⁺
	50,100	0,0055	0,0070	0,0130	0,0135	0,0145
50	20,40	0,0090	0,0100	0,0290 ⁺	0,0320 ⁺	0,0480 ⁺
	50,100	0,0060	0,0140	0,0190 ⁺	0,0205 ⁺	0,0335 ⁺
100	50,100	0,0060	0,0275 ⁺	0,0200 ⁺	0,0215 ⁺	0,0465 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 10 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0 .

t_7 multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$						
p	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : \text{SC}, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : \text{SC}, \rho = 0,8$				
2	10,20	0,0140	0,0080	0,0125	0,0155	0,0115
	20,40	0,0135	0,0070	0,0110	0,0130	0,0080
	50,100	0,0170	0,0095	0,0125	0,0130	0,0075
10	10,20	0,0390 ⁺	0,0155	0,0110	0,0175 ⁺	0,0060
	20,40	0,0350 ⁺	0,0055	0,0115	0,0150	0,0045 ⁻
	50,100	0,0520 ⁺	0,0115	0,0165	0,0180 ⁺	0,0100
50	20,40	0,0455 ⁺	0,0730 ⁺	0,0160	0,0205 ⁺	0,0070
	50,100	0,1705 ⁺	0,0335 ⁺	0,0165	0,0190 ⁺	0,0085
100	50,100	0,2005 ⁺	0,4470 ⁺	0,0185 ⁺	0,0195 ⁺	0,0075
$\Sigma_1 : \text{SC}$ e $\Sigma_2 : \text{AR}(1)$, ambas com $\rho = 0,5$						
2	10,20	0,0100	0,0105	0,0115	0,0130	0,0100
	20,40	0,0065	0,0085	0,0070	0,0085	0,0065
	50,100	0,0100	0,0075	0,0100	0,0105	0,0105
10	10,20	0,0100	0,0120	0,0135	0,0170	0,0160
	20,40	0,0100	0,0115	0,0125	0,0170	0,0155
	50,100	0,0080	0,0105	0,0155	0,0165	0,0175 ⁺
50	20,40	0,0070	0,0095	0,0140	0,0155	0,0290 ⁺
	50,100	0,0035 ⁻	0,0105	0,0150	0,0160	0,0320 ⁺
100	50,100	0,0055	0,0260 ⁺	0,0225 ⁺	0,0240 ⁺	0,0485 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 11 – Taxas de erro tipo I dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0 .

Uniforme(0,1) multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$						
p	n_1, n_2	TH	MNV	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
2	10,20	0,0225 ⁺	0,0170	0,0005 ⁻	0,0235 ⁺	0,0125
	20,40	0,0160	0,0130	0,0005 ⁻	0,0145	0,0080
	50,100	0,0200 ⁺	0,0100	0,0000 ⁻	0,0135	0,0100
10	10,20	0,0425 ⁺	0,0140	0,0000 ⁻	0,0170	0,0065
	20,40	0,0475 ⁺	0,0095	0,0000 ⁻	0,0210 ⁺	0,0080
	50,100	0,0620 ⁺	0,0145	0,0000 ⁻	0,0190 ⁺	0,0085
50	20,40	0,0815 ⁺	0,1180 ⁺	0,0000 ⁻	0,0170	0,0060
	50,100	0,2100 ⁺	0,0415 ⁺	0,0000 ⁻	0,0165	0,0050 ⁻
100	50,100	0,3090 ⁺	0,5455 ⁺	0,0000 ⁻	0,0195 ⁺	0,0060
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$						
2	10,20	0,0175 ⁺	0,0145	0,0005 ⁻	0,0205 ⁺	0,0150
	20,40	0,0125	0,0110	0,0005 ⁻	0,0125	0,0095
	50,100	0,0070	0,0085	0,0000 ⁻	0,0075	0,0070
10	10,20	0,0115	0,0140	0,0000 ⁻	0,0250 ⁺	0,0200 ⁺
	20,40	0,0110	0,0115	0,0000 ⁻	0,0180 ⁺	0,0185 ⁺
	50,100	0,0110	0,0120	0,0005 ⁻	0,0195 ⁺	0,0215 ⁺
50	20,40	0,0060	0,0080	0,0000 ⁻	0,0215 ⁺	0,0315 ⁺
	50,100	0,0075	0,0155	0,0005 ⁻	0,0180 ⁺	0,0340 ⁺
100	50,100	0,0055	0,0205 ⁺	0,0000 ⁻	0,0200 ⁺	0,0405 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 12 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0 .

Normal multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$				
p	n_1, n_2	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : \text{SC}, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : \text{SC}, \rho = 0,8$		
50	10,20	0,0125	0,0185 ⁺	0,0045 ⁻
100	10,20	0,0145	0,0215 ⁺	0,0055
	20,40	0,0160	0,0200 ⁺	0,0065
300	10,20	0,0175 ⁺	0,0195 ⁺	0,0080
	20,40	0,0125	0,0160	0,0070
	50,100	0,0165	0,0185 ⁺	0,0070
500	10,20	0,0155	0,0215 ⁺	0,0080
	20,40	0,0205 ⁺	0,0235 ⁺	0,0095
	50,100	0,0180 ⁺	0,0180 ⁺	0,0085
$\Sigma_1 : \text{SC}$ e $\Sigma_2 : \text{AR}(1)$, ambas com $\rho = 0,5$				
50	10,20	0,0155	0,0255 ⁺	0,0330 ⁺
100	10,20	0,0220 ⁺	0,0280 ⁺	0,0375 ⁺
	20,40	0,0230 ⁺	0,0270 ⁺	0,0455 ⁺
300	10,20	0,0205 ⁺	0,0300 ⁺	0,0460 ⁺
	20,40	0,0215 ⁺	0,0260 ⁺	0,0485 ⁺
	50,100	0,0190 ⁺	0,0200 ⁺	0,0485 ⁺
500	10,20	0,0250 ⁺	0,0300 ⁺	0,0520 ⁺
	20,40	0,0230 ⁺	0,0270 ⁺	0,0530 ⁺
	50,100	0,0210 ⁺	0,0230 ⁺	0,0485 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 13 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade (t_7), alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0 .

t_7 multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$				
p	n_1, n_2	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
50	10,20	0,0100	0,0120	0,0045 ⁻
100	10,20	0,0145	0,0220 ⁺	0,0080
	20,40	0,0175 ⁺	0,0205 ⁺	0,0055
300	10,20	0,0125	0,0180 ⁺	0,0070
	20,40	0,0130	0,0170	0,0055
	50,100	0,0125	0,0130	0,0055
500	10,20	0,0110	0,0140	0,0060
	20,40	0,0190 ⁺	0,0205 ⁺	0,0080
	50,100	0,0150	0,0155	0,0035 ⁻
$\Sigma_1 : SC$ e $\Sigma_2 : AR(1)$, ambas com $\rho = 0,5$				
50	10,20	0,0100	0,0160	0,0225 ⁺
100	10,20	0,0125	0,0195 ⁺	0,0260 ⁺
	20,40	0,0195 ⁺	0,0230 ⁺	0,0440 ⁺
300	10,20	0,0140	0,0195 ⁺	0,0305 ⁺
	20,40	0,0180 ⁺	0,0210 ⁺	0,0465 ⁺
	50,100	0,0325 ⁺	0,0335 ⁺	0,0600 ⁺
500	10,20	0,0110	0,0185 ⁺	0,0335 ⁺
	20,40	0,0145	0,0185 ⁺	0,0425 ⁺
	50,100	0,0240 ⁺	0,0250 ⁺	0,0535 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 14 – Taxas de erro tipo I dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR(1)), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_0 .

Uniforme(0,1) multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$				
p	n_1, n_2	TA	TAM	TB
		$\Sigma_1 : \text{SC}, \rho = 0,5$ e $\Sigma_2 : \text{SC}, \rho = 0,8$		
50	10,20	0,0000 ⁻	0,0255 ⁺	0,0075
100	10,20	0,0000 ⁻	0,0205 ⁺	0,0065
	20,40	0,0000 ⁻	0,0170	0,0050 ⁻
300	10,20	0,0005 ⁻	0,0255 ⁺	0,0060
	20,40	0,0000 ⁻	0,0145	0,0060
	50,100	0,0005 ⁻	0,0120	0,0060
500	10,20	0,0000 ⁻	0,0210 ⁺	0,0035 ⁻
	20,40	0,0000 ⁻	0,0200 ⁺	0,0065
	50,100	0,0000 ⁻	0,0170	0,0060
$\Sigma_1 : \text{SC}$ e $\Sigma_2 : \text{AR}(1)$, ambas com $\rho = 0,5$				
50	10,20	0,0015 ⁻	0,0270 ⁺	0,0390 ⁺
100	10,20	0,0015 ⁻	0,0295 ⁺	0,0375 ⁺
	20,40	0,0000 ⁻	0,0240 ⁺	0,0390 ⁺
300	10,20	0,0000 ⁻	0,0215 ⁺	0,0405 ⁺
	20,40	0,0010 ⁻	0,0220 ⁺	0,0540 ⁺
	50,100	0,0000 ⁻	0,0230 ⁺	0,0505 ⁺
500	10,20	0,0005 ⁻	0,0355 ⁺	0,0570 ⁺
	20,40	0,0000 ⁻	0,0260 ⁺	0,0570 ⁺
	50,100	0,0000 ⁻	0,0320 ⁺	0,0555 ⁺

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que α .

⁺: significativamente (valor- $p < 1\%$) maior que α .

Fonte: Do autor (2023).

APÊNDICE C – Tabelas - Poder dos testes

Tabela 15 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Normal multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
2	10, 20	0,2	0,1560	0,1200	0,1280	0,1335	0,1190
		0,4	0,2570	0,2145	0,2565	0,2615	0,2390
		0,6	0,4040	0,3325	0,3805	0,3885	0,3590
		0,8	0,5570	0,4995	0,5720	0,5840	0,5520
		1,0	0,7415	0,6845	0,7275	0,7390	0,7170
	20, 40	0,2	0,2035	0,1620	0,1685	0,1695	0,1635
		0,4	0,3810	0,3325	0,3510	0,3550	0,3405
		0,6	0,6055	0,5615	0,6025	0,6050	0,5935
		0,8	0,8525	0,8235	0,8325	0,8370	0,8330
		1,0	0,9470	0,9370	0,9480	0,9525	0,9485
	50, 100	0,2	0,2850	0,2365	0,2550	0,2565	0,2480
		0,4	0,6700	0,6355	0,6475	0,6510	0,6495
		0,6	0,9405	0,9320	0,9280	0,9310	0,9290
		0,8	0,9985	0,9970	0,9965	0,9970	0,9965
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	10, 20	0,2	0,3190	0,1830	0,1215	0,1240	0,1105
		0,4	0,4185	0,2495	0,1795	0,1850	0,1580
		0,6	0,5780	0,3715	0,3215	0,3335	0,2925
		0,8	0,7365	0,5225	0,4895	0,5060	0,4545
		1,0	0,8775	0,6895	0,6465	0,6690	0,6320
	20, 40	0,2	0,3775	0,1475	0,1350	0,1380	0,1240
		0,4	0,6030	0,3340	0,3140	0,3175	0,3000
		0,6	0,8370	0,5900	0,5210	0,5295	0,4980
		0,8	0,9600	0,8315	0,7730	0,7840	0,7590
		1,0	0,9980	0,9635	0,9255	0,9305	0,9185
	50, 100	0,2	0,5025	0,2470	0,2140	0,2145	0,2015
		0,4	0,8790	0,6995	0,5790	0,5845	0,5550
		0,6	0,9975	0,9755	0,9160	0,9185	0,9110
		0,8	1,0000	1,0000	0,9940	0,9940	0,9940
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,2	0,4485	0,6550	0,1375	0,1415	0,1190
		0,4	0,6240	0,7990	0,2700	0,2770	0,2455

Tabela 15 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Normal multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
50	20, 40	0,6	0,8250	0,9330	0,5120	0,5175	0,4815
		0,8	0,9495	0,9880	0,7465	0,7575	0,7265
		1,0	0,9945	0,9985	0,9260	0,9320	0,9170
	50, 100	0,2	0,9055	0,5905	0,2265	0,2280	0,2005
		0,4	0,9995	0,9675	0,5435	0,5465	0,5155
		0,6	1,0000	1,0000	0,9045	0,9090	0,8865
		0,8	1,0000	1,0000	0,9980	0,9985	0,9965
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	50, 100	0,2	0,9655	0,9950	0,2150	0,2165	0,1930
		0,4	1,0000	1,0000	0,5635	0,5655	0,5420
		0,6	1,0000	1,0000	0,8840	0,8900	0,8675
		0,8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9990	0,9980
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 16 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Normal multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
50	10,20	0,2	0,1155	0,1175	0,1010
		0,4	0,1885	0,1950	0,1640
		0,6	0,2740	0,2825	0,2470
		0,8	0,4445	0,4550	0,4110
		1,0	0,6210	0,6410	0,5940
100	10,20	0,2	0,1190	0,1225	0,0995
		0,4	0,1690	0,1765	0,1520
		0,6	0,3090	0,3230	0,2770
		0,8	0,4545	0,4680	0,4190
		1,0	0,6400	0,6600	0,6090
100	20,40	0,2	0,1215	0,1240	0,1050
		0,4	0,2890	0,2945	0,2590
		0,6	0,5205	0,5250	0,4820
		0,8	0,7610	0,7755	0,7395
		1,0	0,9280	0,9380	0,9175
300	10,20	0,2	0,1170	0,1245	0,1015
		0,4	0,1925	0,2010	0,1670
		0,6	0,3050	0,3155	0,2750
		0,8	0,4405	0,4635	0,4085
		1,0	0,6235	0,6430	0,5925
300	20,40	0,2	0,1355	0,1370	0,1165
		0,4	0,2900	0,2945	0,2555
		0,6	0,5315	0,5385	0,4905
		0,8	0,7590	0,7725	0,7390
		1,0	0,9330	0,9450	0,9270
300	50,100	0,2	0,2305	0,2320	0,2065
		0,4	0,5590	0,5625	0,5320
		0,6	0,8995	0,9055	0,8765
		0,8	1,0000	1,0000	0,9995
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	10,20	0,2	0,1035	0,1085	0,0910
		0,4	0,1770	0,1860	0,1540
		0,6	0,3090	0,3225	0,2720

Tabela 16 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Normal multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10$						
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$			
			TA	TAM	TB	
500	20, 40	0,8	0,4205	0,4365	0,3865	
		1,0	0,6425	0,6545	0,6135	
		0,2	0,1315	0,1350	0,1160	
		0,4	0,2575	0,2625	0,2285	
		0,6	0,4995	0,5035	0,4650	
		0,8	0,7570	0,7670	0,7310	
	50, 100	1,0	0,9400	0,9485	0,9315	
			0,2	0,2090	0,2100	0,1840
		0,4	0,5490	0,5530	0,5220	
			0,6	0,8960	0,9000	0,8750
			0,8	1,0000	1,0000	0,9960
			1,0	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 17 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).

t_7 multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
2	10, 20	0,2	0,1450	0,1120	0,1280	0,1325	0,1130
		0,4	0,2355	0,1850	0,2060	0,2120	0,1955
		0,6	0,3300	0,2640	0,2925	0,3000	0,2670
		0,8	0,4790	0,4165	0,4575	0,4700	0,4365
		1,0	0,6275	0,5640	0,6125	0,6285	0,5960
	20, 40	0,2	0,1815	0,1440	0,1555	0,1565	0,1470
		0,4	0,3160	0,2770	0,2850	0,2890	0,2770
		0,6	0,5270	0,4770	0,4960	0,5025	0,4880
		0,8	0,7195	0,6825	0,6970	0,7015	0,6900
		1,0	0,8830	0,8625	0,8620	0,8685	0,8600
	50, 100	0,2	0,2470	0,1985	0,2075	0,2080	0,2055
		0,4	0,5765	0,5345	0,5390	0,5410	0,5350
		0,6	0,8400	0,8245	0,8385	0,8410	0,8410
		0,8	0,9710	0,9660	0,9645	0,9665	0,9635
		1,0	0,9970	0,9955	0,9970	0,9970	0,9970
10	10, 20	0,2	0,2990	0,1630	0,1045	0,1100	0,0950
		0,4	0,3950	0,2345	0,1600	0,1665	0,1440
		0,6	0,5190	0,3240	0,2600	0,2705	0,2405
		0,8	0,6820	0,4830	0,3785	0,3915	0,3525
		1,0	0,8180	0,6200	0,5280	0,5380	0,5105
	20, 40	0,2	0,3695	0,1460	0,1345	0,1370	0,1225
		0,4	0,5225	0,2630	0,2285	0,2330	0,2155
		0,6	0,7760	0,5315	0,4210	0,4265	0,4005
		0,8	0,9235	0,7570	0,6335	0,6440	0,6145
		1,0	0,9830	0,9095	0,8305	0,8390	0,8185
	50, 100	0,2	0,4385	0,1945	0,1650	0,1665	0,1490
		0,4	0,7965	0,5895	0,4475	0,4500	0,4255
		0,6	0,9790	0,9250	0,7860	0,7905	0,7745
		0,8	1,0000	0,9955	0,9605	0,9645	0,9570
		1,0	1,0000	1,0000	0,9950	0,9950	0,9945
20, 40	0,2	0,4160	0,5930	0,1210	0,1235	0,1085	
	0,4	0,5975	0,7590	0,2160	0,2185	0,1980	
	0,6	0,8055	0,9125	0,4105	0,4180	0,3895	
	0,8	0,9380	0,9810	0,6095	0,6205	0,5810	

Tabela 17 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

t_7 multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
50	50, 100	1,0	0,9905	0,9980	0,8125	0,8240	0,7990
		0,2	0,8640	0,5340	0,1780	0,1790	0,1585
		0,4	0,9970	0,9515	0,4225	0,4265	0,3925
		0,6	1,0000	0,9995	0,7680	0,7715	0,7455
		0,8	1,0000	1,0000	0,9590	0,9605	0,9525
		1,0	1,0000	1,0000	0,9975	0,9975	0,9960
100	50, 100	0,2	0,9370	0,9850	0,1640	0,1640	0,1475
		0,4	1,0000	1,0000	0,4595	0,4625	0,4230
		0,6	1,0000	1,0000	0,7755	0,7830	0,7475
		0,8	1,0000	1,0000	0,9680	0,9695	0,9620
		1,0	1,0000	1,0000	0,9995	0,9995	0,9995

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 18 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).

t_7 multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
50	10, 20	0,2	0,1075	0,1130	0,0925
		0,4	0,1455	0,1540	0,1300
		0,6	0,2370	0,2465	0,2175
		0,8	0,3680	0,3780	0,3330
		1,0	0,4865	0,5040	0,4625
100	10, 20	0,2	0,1030	0,1075	0,0820
		0,4	0,1620	0,1650	0,1445
		0,6	0,2620	0,2670	0,2385
		0,8	0,3505	0,3625	0,3315
		1,0	0,5200	0,5360	0,4890
100	20, 40	0,2	0,1135	0,1165	0,1015
		0,4	0,2235	0,2280	0,2040
		0,6	0,3850	0,3910	0,3590
		0,8	0,6015	0,6120	0,5725
		1,0	0,7970	0,8100	0,7755
300	10, 20	0,2	0,1030	0,1060	0,0905
		0,4	0,1455	0,1500	0,1340
		0,6	0,2515	0,2585	0,2270
		0,8	0,3750	0,3830	0,3380
		1,0	0,4960	0,5155	0,4745
300	20, 40	0,2	0,1205	0,1215	0,1090
		0,4	0,2255	0,2290	0,2025
		0,6	0,3950	0,4045	0,3680
		0,8	0,6155	0,6280	0,5895
		1,0	0,8170	0,8245	0,7990
300	50, 100	0,2	0,1665	0,1670	0,1505
		0,4	0,4320	0,4340	0,4055
		0,6	0,7790	0,7795	0,7525
		0,8	0,9740	0,9755	0,9655
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	10, 20	0,2	0,1000	0,1040	0,0830
		0,4	0,1425	0,1485	0,1250
		0,6	0,2270	0,2355	0,2025

Tabela 18 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

t_7 multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10$						
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$			
			TA	TAM	TB	
500	20, 40	0,8	0,3740	0,3840	0,3485	
		1,0	0,5000	0,5100	0,4735	
		0,2	0,1145	0,1165	0,0980	
		0,4	0,2270	0,2290	0,2010	
		0,6	0,4185	0,4260	0,3975	
		0,8	0,6115	0,6205	0,5825	
	50, 100	1,0	0,8075	0,8180	0,7865	
			0,2	0,1540	0,1570	0,1390
		0,4	0,4270	0,4310	0,3920	
			0,6	0,7750	0,7800	0,7420
			0,8	0,9670	0,9710	0,9580
			1,0	1,0000	1,0000	0,9990

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 19 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
2	10, 20	0,2	0,4665	0,4030	0,1870	0,4750	0,4445
		0,4	0,9345	0,9125	0,7035	0,9435	0,9335
		0,6	0,9995	0,9985	0,9720	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	20, 40	0,2	0,7525	0,7145	0,4320	0,7515	0,7370
		0,4	0,9985	0,9985	0,9780	0,9990	0,9990
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50, 100	0,2	0,9845	0,9780	0,8550	0,9765	0,9765
		0,4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	10, 20	0,2	0,6500	0,4345	0,0565	0,3630	0,3275
		0,4	0,9800	0,8900	0,3730	0,9195	0,8910
		0,6	1,0000	0,9970	0,8505	1,0000	0,9995
		0,8	1,0000	1,0000	0,9920	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	20, 40	0,2	0,9045	0,7105	0,1675	0,6500	0,6255
		0,4	1,0000	0,9995	0,8400	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50, 100	0,2	0,9990	0,9945	0,5980	0,9755	0,9680
		0,4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20, 40	0,2	0,9335	0,9795	0,1365	0,6505	0,6085	
	0,4	1,0000	1,0000	0,8040	1,0000	0,9990	
	0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Tabela 19 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
50	50, 100	1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,2	1,0000	1,0000	0,5390	0,9745	0,9640
		0,4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	50, 100	0,2	1,0000	1,0000	0,5505	0,9795	0,9690
		0,4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 20 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Uniforme (0,1) multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
50	10,20	0,2	0,0460	0,3750	0,3305
		0,4	0,3350	0,9260	0,8925
		0,6	0,8070	1,0000	1,0000
		0,8	0,9905	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
100	10,20	0,2	0,0485	0,3790	0,3335
		0,4	0,3255	0,9250	0,8925
		0,6	0,8075	1,0000	1,0000
		0,8	0,9860	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
100	20,40	0,2	0,1240	0,6440	0,5995
		0,4	0,8150	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	10,20	0,2	0,0475	0,3795	0,3330
		0,4	0,3180	0,9380	0,9035
		0,6	0,7945	0,9995	0,9995
		0,8	0,9905	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	20,40	0,2	0,1225	0,6315	0,5790
		0,4	0,7945	1,0000	1,0000
		0,6	0,9990	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	50,100	0,2	0,5615	0,9855	0,9740
		0,4	0,9995	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	10,20	0,2	0,0410	0,3730	0,3285
		0,4	0,3085	0,9330	0,9010
		0,6	0,7975	1,0000	1,0000

Tabela 20 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,10 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Uniforme (0,1) multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
500	20,40	0,8	0,9840	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
		0,2	0,1290	0,6010	0,5635
		0,4	0,8115	1,0000	1,0000
		0,6	0,9990	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000
	50,100	0,2	0,5290	0,9770	0,9690
			0,4	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000
			0,8	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
			1,0	1,0000	1,0000

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 21 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Normal multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
2	10, 20	0,2	0,0940	0,0670	0,0780	0,0835	0,0615
		0,4	0,1640	0,1310	0,1675	0,1730	0,1305
		0,6	0,2690	0,2110	0,2735	0,2840	0,2365
		0,8	0,4190	0,3500	0,4465	0,4600	0,4010
		1,0	0,6260	0,5495	0,6115	0,6310	0,5760
	20, 40	0,2	0,1275	0,0925	0,1075	0,1105	0,0915
		0,4	0,2595	0,2165	0,2505	0,2540	0,2335
		0,6	0,4930	0,4405	0,4760	0,4850	0,4455
		0,8	0,7585	0,7155	0,7390	0,7505	0,7225
		1,0	0,9090	0,8750	0,8950	0,9080	0,8920
	50, 100	0,2	0,1880	0,1490	0,1635	0,1650	0,1485
		0,4	0,5550	0,5230	0,5370	0,5400	0,5150
		0,6	0,8985	0,8745	0,8855	0,8900	0,8800
		0,8	0,9930	0,9895	0,9905	0,9920	0,9890
		1,0	1,0000	0,9990	0,9995	0,9995	0,9995
10	10, 20	0,2	0,2070	0,1020	0,0785	0,0850	0,0505
		0,4	0,2975	0,1460	0,1075	0,1180	0,0825
		0,6	0,4525	0,2415	0,2225	0,2390	0,1765
		0,8	0,6120	0,3665	0,3570	0,3830	0,2970
		1,0	0,7940	0,5200	0,5340	0,5620	0,4775
	20, 40	0,2	0,2540	0,0880	0,0830	0,0855	0,0660
		0,4	0,4870	0,2070	0,2215	0,2280	0,1810
		0,6	0,7510	0,4395	0,4065	0,4150	0,3575
		0,8	0,9250	0,7120	0,6615	0,6795	0,6025
		1,0	0,9915	0,9245	0,8560	0,8695	0,8225
	50, 100	0,2	0,3830	0,1565	0,1420	0,1425	0,1130
		0,4	0,8085	0,5655	0,4510	0,4545	0,3850
		0,6	0,9915	0,9525	0,8420	0,8485	0,8040
		0,8	1,0000	0,9980	0,9825	0,9830	0,9760
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20, 40	0,2	0,2815	0,4510	0,0885	0,0905	0,0610	
	0,4	0,4715	0,6235	0,1880	0,1945	0,1435	
	0,6	0,6690	0,8215	0,3935	0,4065	0,3175	
	0,8	0,8675	0,9450	0,6395	0,6550	0,5655	

Tabela 21 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Normal multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
50	50, 100	1,0	0,9625	0,9915	0,8470	0,8685	0,7905
		0,2	0,8370	0,4365	0,1495	0,1515	0,1150
		0,4	0,9975	0,9310	0,4315	0,4380	0,3595
		0,6	1,0000	1,0000	0,8205	0,8265	0,7500
		0,8	1,0000	1,0000	0,9870	0,9895	0,9735
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	50, 100	0,2	0,9110	0,9840	0,1490	0,1500	0,1090
		0,4	0,9990	1,0000	0,4650	0,4720	0,3735
		0,6	1,0000	1,0000	0,8130	0,8165	0,7425
		0,8	1,0000	1,0000	0,9900	0,9920	0,9740
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 22 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Normal multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
50	10, 20	0,2	0,0730	0,0775	0,0500
		0,4	0,1070	0,1170	0,0765
		0,6	0,1905	0,2045	0,1415
		0,8	0,3330	0,3535	0,2650
		1,0	0,4875	0,5250	0,4225
100	10, 20	0,2	0,0680	0,0705	0,0445
		0,4	0,1170	0,1280	0,0790
		0,6	0,2175	0,2285	0,1625
		0,8	0,3385	0,3615	0,2730
		1,0	0,5045	0,5365	0,4260
100	20, 40	0,2	0,0740	0,0760	0,0480
		0,4	0,2005	0,2075	0,1460
		0,6	0,4085	0,4200	0,3210
		0,8	0,6470	0,6665	0,5660
		1,0	0,8605	0,8785	0,8170
300	10, 20	0,2	0,0730	0,0780	0,0515
		0,4	0,1235	0,1345	0,0860
		0,6	0,2225	0,2340	0,1695
		0,8	0,3280	0,3495	0,2630
		1,0	0,4975	0,5265	0,4170
300	20, 40	0,2	0,0785	0,0820	0,0530
		0,4	0,2010	0,2065	0,1480
		0,6	0,4130	0,4240	0,3325
		0,8	0,6570	0,6770	0,5800
		1,0	0,8585	0,8715	0,8050
300	50, 100	0,2	0,1630	0,1665	0,1165
		0,4	0,4435	0,4460	0,3525
		0,6	0,8230	0,8300	0,7680
		0,8	0,9915	0,9930	0,9770
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	10, 20	0,2	0,0665	0,0715	0,0410
		0,4	0,1170	0,1265	0,0840
		0,6	0,2085	0,2195	0,1600

Tabela 22 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Normal multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$						
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$			
			TA	TAM	TB	
500	20, 40	0,8	0,3140	0,3330	0,2430	
		1,0	0,5240	0,5430	0,4450	
		0,2	0,0885	0,0910	0,0615	
		0,4	0,1750	0,1805	0,1260	
		0,6	0,3860	0,3985	0,3135	
		0,8	0,6435	0,6610	0,5565	
	50, 100	1,0	0,8	0,8640	0,8850	0,8090
			1,0	1,0000	1,0000	1,0000
		0,2	0,1380	0,1400	0,0940	
		0,4	0,4480	0,4540	0,3670	
		0,6	0,8150	0,8170	0,7480	
		0,8	0,9870	0,9910	0,9670	
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 23 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).

t_7 multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
2	10, 20	0,2	0,0870	0,0585	0,0635	0,0690	0,0505
		0,4	0,1435	0,1095	0,1270	0,1330	0,1105
		0,6	0,2230	0,1765	0,2055	0,2125	0,1820
		0,8	0,3450	0,2850	0,3390	0,3525	0,3085
		1,0	0,4900	0,4250	0,4885	0,5040	0,4525
	20, 40	0,2	0,1070	0,0795	0,0920	0,0950	0,0780
		0,4	0,2105	0,1605	0,1935	0,1995	0,1780
		0,6	0,4020	0,3410	0,3815	0,3915	0,3610
		0,8	0,6045	0,5505	0,5850	0,5950	0,5655
		1,0	0,8115	0,7640	0,7850	0,7935	0,7715
	50, 100	0,2	0,1470	0,1185	0,1375	0,1400	0,1210
		0,4	0,4460	0,4020	0,4225	0,4245	0,4045
		0,6	0,7605	0,7260	0,7460	0,7505	0,7310
		0,8	0,9525	0,9400	0,9290	0,9335	0,9275
		1,0	0,9950	0,9925	0,9935	0,9940	0,9935
10	10, 20	0,2	0,1915	0,0865	0,0570	0,0635	0,0430
		0,4	0,2795	0,1270	0,1030	0,1120	0,0800
		0,6	0,3850	0,2030	0,1725	0,1845	0,1360
		0,8	0,5520	0,3215	0,2530	0,2795	0,2135
		1,0	0,7090	0,4730	0,3965	0,4245	0,3495
	20, 40	0,2	0,2405	0,0765	0,0740	0,0810	0,0580
		0,4	0,3955	0,1540	0,1525	0,1580	0,1205
		0,6	0,6540	0,3660	0,3085	0,3185	0,2640
		0,8	0,8755	0,6270	0,5210	0,5310	0,4765
		1,0	0,9645	0,8410	0,7245	0,7440	0,6835
	50, 100	0,2	0,3140	0,1115	0,1080	0,1100	0,0825
		0,4	0,7085	0,4505	0,3385	0,3415	0,2895
		0,6	0,9590	0,8590	0,6820	0,6905	0,6235
		0,8	0,9980	0,9880	0,9165	0,9225	0,8865
		1,0	1,0000	0,9995	0,9880	0,9890	0,9835
20, 40	0,2	0,2700	0,4140	0,0715	0,0750	0,0540	
	0,4	0,4215	0,5860	0,1505	0,1560	0,1195	
	0,6	0,6540	0,7945	0,3085	0,3145	0,2550	
	0,8	0,8475	0,9275	0,4765	0,4955	0,4140	

Tabela 23 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

t_7 multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
50	50, 100	1,0	0,9540	0,9870	0,7135	0,7250	0,6555
		0,2	0,7795	0,3890	0,1110	0,1115	0,0805
		0,4	0,9925	0,9025	0,3190	0,3220	0,2565
		0,6	1,0000	0,9995	0,6570	0,6620	0,5805
		0,8	1,0000	1,0000	0,9080	0,9175	0,8710
		1,0	1,0000	1,0000	0,9900	0,9915	0,9850
100	50, 100	0,2	0,8780	0,9620	0,1065	0,1095	0,0750
		0,4	0,9995	1,0000	0,3450	0,3505	0,2790
		0,6	1,0000	1,0000	0,6680	0,6720	0,5855
		0,8	1,0000	1,0000	0,9235	0,9285	0,8855
		1,0	1,0000	1,0000	0,9950	0,9955	0,9880

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 24 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).

t_7 multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
50	10, 20	0,2	0,0580	0,0640	0,0365
		0,4	0,0895	0,0990	0,0680
		0,6	0,1670	0,1755	0,1270
		0,8	0,2475	0,2735	0,2015
		1,0	0,3640	0,3860	0,3175
100	10, 20	0,2	0,0540	0,0625	0,0350
		0,4	0,0990	0,1075	0,0760
		0,6	0,1840	0,1935	0,1460
		0,8	0,2605	0,2735	0,2065
		1,0	0,3960	0,4200	0,3340
100	20, 40	0,2	0,0695	0,0750	0,0465
		0,4	0,1590	0,1625	0,1245
		0,6	0,2775	0,2860	0,2260
		0,8	0,4860	0,5010	0,4185
		1,0	0,6860	0,7050	0,6205
300	10, 20	0,2	0,0560	0,0625	0,0390
		0,4	0,1000	0,1065	0,0715
		0,6	0,1695	0,1820	0,1175
		0,8	0,2650	0,2775	0,2105
		1,0	0,3870	0,4095	0,3250
300	20, 40	0,2	0,0730	0,0755	0,0530
		0,4	0,1600	0,1635	0,1150
		0,6	0,2955	0,3020	0,2310
		0,8	0,4925	0,5080	0,4220
		1,0	0,7040	0,7205	0,6420
300	50, 100	0,2	0,1105	0,1115	0,0750
		0,4	0,3320	0,3350	0,2615
		0,6	0,6725	0,6820	0,5920
		0,8	0,9315	0,9385	0,8870
		1,0	0,9945	0,9955	0,9855
300	10, 20	0,2	0,0545	0,0595	0,0335
		0,4	0,0885	0,0965	0,0570
		0,6	0,1555	0,1695	0,1145

Tabela 24 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

t_7 multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$						
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$			
			TA	TAM	TB	
500	20, 40	0,8	0,2690	0,2855	0,2230	
		1,0	0,3725	0,3990	0,3095	
		0,2	0,0695	0,0715	0,0465	
		0,4	0,1540	0,1555	0,1115	
		0,6	0,3215	0,3285	0,2575	
		0,8	0,4920	0,5085	0,4075	
	50, 100	1,0	0,7135	0,7255	0,6455	
			0,2	0,1070	0,1070	0,0700
		0,4	0,3220	0,3300	0,2510	
			0,6	0,6640	0,6690	0,5810
			0,8	0,9140	0,9190	0,8670
			1,0	0,9940	0,9950	0,9880

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 25 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
2	10, 20	0,2	0,3405	0,2650	0,0890	0,3540	0,2870
		0,4	0,8805	0,8310	0,4810	0,8980	0,8580
		0,6	0,9985	0,9960	0,8950	0,9985	0,9975
		0,8	1,0000	1,0000	0,9985	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	20, 40	0,2	0,6430	0,5840	0,2370	0,6425	0,6030
		0,4	0,9955	0,9955	0,8945	0,9970	0,9955
		0,6	1,0000	1,0000	0,9990	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50, 100	0,2	0,9550	0,9480	0,7080	0,9575	0,9505
		0,4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	10, 20	0,2	0,5145	0,2815	0,0145	0,2700	0,1945
		0,4	0,9560	0,7855	0,1575	0,8370	0,7635
		0,6	1,0000	0,9850	0,6120	0,9980	0,9975
		0,8	1,0000	0,9990	0,9340	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	0,9985	1,0000	1,0000
	20, 40	0,2	0,8390	0,5780	0,0605	0,5440	0,4570
		0,4	1,0000	0,9980	0,6230	0,9980	0,9925
		0,6	1,0000	1,0000	0,9925	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50, 100	0,2	0,9980	0,9875	0,3475	0,9425	0,9110
		0,4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20, 40	0,2	0,8705	0,9275	0,0520	0,5305	0,4305	
	0,4	1,0000	1,0000	0,5675	0,9965	0,9915	
	0,6	1,0000	1,0000	0,9905	1,0000	1,0000	
	0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Tabela 25 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
50	50, 100	1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,2	1,0000	1,0000	0,2925	0,9325	0,8840
		0,4	1,0000	1,0000	0,9985	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	50, 100	0,2	1,0000	1,0000	0,2995	0,9385	0,8940
		0,4	1,0000	1,0000	0,9985	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 26 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Uniforme (0,1) multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
50	10,20	0,2	0,0115	0,2810	0,1885
		0,4	0,1325	0,8510	0,7475
		0,6	0,5210	0,9995	0,9980
		0,8	0,9150	1,0000	1,0000
		1,0	0,9975	1,0000	1,0000
100	10,20	0,2	0,0115	0,2810	0,2025
		0,4	0,1385	0,8530	0,7640
		0,6	0,5220	1,0000	0,9995
		0,8	0,9080	1,0000	1,0000
		1,0	0,9975	1,0000	1,0000
100	20,40	0,2	0,0525	0,5250	0,4185
		0,4	0,5545	0,9985	0,9935
		0,6	0,9835	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	10,20	0,2	0,0100	0,2815	0,1970
		0,4	0,1230	0,8615	0,7535
		0,6	0,5280	0,9995	0,9975
		0,8	0,9060	1,0000	1,0000
		1,0	0,9960	1,0000	1,0000
300	20,40	0,2	0,0430	0,5135	0,3965
		0,4	0,5610	0,9995	0,9960
		0,6	0,9825	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	50,100	0,2	0,2920	0,9420	0,8915
		0,4	0,9965	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	10,20	0,2	0,0100	0,2705	0,1875
		0,4	0,1330	0,8590	0,7545
		0,6	0,5100	1,0000	0,9985

Tabela 26 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,05 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Uniforme (0,1) multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$						
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$			
			TA	TAM	TB	
500	20, 40	0,8	0,9070	1,0000	1,0000	
		1,0	0,9955	1,0000	1,0000	
		0,2	0,0425	0,4910	0,4070	
		0,4	0,5550	0,9985	0,9960	
		0,6	0,9870	1,0000	1,0000	
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	
	50, 100	0,8	1,0	1,0000	1,0000	1,0000
			0,2	0,2900	0,9420	0,9010
		0,4	1,0	1,0000	1,0000	1,0000
			0,6	1,0000	1,0000	1,0000
			0,8	1,0000	1,0000	1,0000
			1,0	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 27 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Normal multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
2	10, 20	0,2	0,0275	0,0170	0,0265	0,0300	0,0130
		0,4	0,0530	0,0355	0,0590	0,0670	0,0380
		0,6	0,1050	0,0725	0,1160	0,1285	0,0850
		0,8	0,1935	0,1380	0,2120	0,2435	0,1550
		1,0	0,3550	0,2590	0,3820	0,4145	0,2910
	20, 40	0,2	0,0370	0,0245	0,0320	0,0375	0,0215
		0,4	0,1010	0,0800	0,1085	0,1175	0,0845
		0,6	0,2730	0,2150	0,2555	0,2705	0,2020
		0,8	0,5250	0,4525	0,5150	0,5360	0,4550
		1,0	0,7510	0,6990	0,7365	0,7670	0,6905
	50, 100	0,2	0,0640	0,0430	0,0600	0,0625	0,0435
		0,4	0,3260	0,2815	0,3255	0,3295	0,2725
		0,6	0,7375	0,6935	0,7140	0,7270	0,6660
		0,8	0,9695	0,9545	0,9560	0,9595	0,9400
		1,0	0,9965	0,9965	0,9960	0,9970	0,9950
10	10, 20	0,2	0,0685	0,0230	0,0215	0,0275	0,0090
		0,4	0,1160	0,0410	0,0430	0,0550	0,0185
		0,6	0,2150	0,0735	0,0885	0,1075	0,0445
		0,8	0,3480	0,1250	0,1825	0,2080	0,0970
		1,0	0,5420	0,2240	0,3090	0,3550	0,1960
	20, 40	0,2	0,1045	0,0235	0,0335	0,0350	0,0145
		0,4	0,2625	0,0635	0,0975	0,1095	0,0480
		0,6	0,5245	0,1915	0,2205	0,2390	0,1240
		0,8	0,7970	0,4425	0,4350	0,4590	0,3060
		1,0	0,9580	0,7410	0,6635	0,6975	0,5330
	50, 100	0,2	0,1890	0,0490	0,0560	0,0585	0,0270
		0,4	0,6315	0,3140	0,2560	0,2625	0,1510
		0,6	0,9635	0,8380	0,6580	0,6740	0,5135
		0,8	1,0000	0,9915	0,9230	0,9330	0,8445
		1,0	1,0000	1,0000	0,9975	0,9985	0,9880
20, 40	0,2	0,0780	0,1350	0,0300	0,0335	0,0100	
	0,4	0,1720	0,2595	0,0810	0,0870	0,0355	
	0,6	0,3195	0,4320	0,2145	0,2330	0,1095	
	0,8	0,5580	0,6805	0,4280	0,4530	0,2620	

Tabela 27 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Normal multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
50	50, 100	1,0	0,7685	0,8580	0,6370	0,6800	0,4805
		0,2	0,6380	0,1890	0,0675	0,0695	0,0230
		0,4	0,9860	0,7945	0,2545	0,2595	0,1290
		0,6	1,0000	0,9975	0,6195	0,6320	0,4420
		0,8	1,0000	1,0000	0,9330	0,9415	0,8215
		1,0	1,0000	1,0000	0,9985	0,9990	0,9860
100	50, 100	0,2	0,7260	0,9060	0,0625	0,0640	0,0265
		0,4	0,9950	0,9980	0,2675	0,2755	0,1360
		0,6	1,0000	1,0000	0,6205	0,6345	0,4295
		0,8	1,0000	1,0000	0,9300	0,9360	0,8250
		1,0	1,0000	1,0000	0,9980	0,9995	0,9825

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 28 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Normal multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
50	10, 20	0,2	0,0245	0,0295	0,0060
		0,4	0,0420	0,0490	0,0165
		0,6	0,0790	0,0925	0,0335
		0,8	0,1635	0,1905	0,0895
		1,0	0,2860	0,3325	0,1695
100	10, 20	0,2	0,0200	0,0285	0,0090
		0,4	0,0450	0,0515	0,0160
		0,6	0,0975	0,1155	0,0435
		0,8	0,1655	0,1980	0,0840
		1,0	0,2905	0,3345	0,1680
100	20, 40	0,2	0,0240	0,0265	0,0100
		0,4	0,0835	0,0905	0,0340
		0,6	0,2180	0,2345	0,1205
		0,8	0,4245	0,4525	0,2570
		1,0	0,6755	0,7125	0,4975
300	10, 20	0,2	0,0275	0,0360	0,0065
		0,4	0,0480	0,0530	0,0175
		0,6	0,0980	0,1165	0,0440
		0,8	0,1640	0,1910	0,0865
		1,0	0,2780	0,3275	0,1610
300	20, 40	0,2	0,0295	0,0335	0,0080
		0,4	0,0860	0,0925	0,0340
		0,6	0,2255	0,2415	0,1095
		0,8	0,4240	0,4580	0,2480
		1,0	0,6670	0,7050	0,4865
300	50, 100	0,2	0,0730	0,0760	0,0245
		0,4	0,2540	0,2605	0,1350
		0,6	0,6545	0,6665	0,4390
		0,8	0,9310	0,9410	0,8165
		1,0	0,9945	0,9975	0,9830
300	10, 20	0,2	0,0225	0,0285	0,0075
		0,4	0,0505	0,0575	0,0215
		0,6	0,0985	0,1180	0,0365

Tabela 28 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição normal multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Normal multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$						
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$			
			TA	TAM	TB	
500	20, 40	0,8	0,1560	0,1800	0,0720	
		1,0	0,2965	0,3475	0,1595	
		0,2	0,0380	0,0415	0,0130	
		0,4	0,0805	0,0880	0,0355	
		0,6	0,2095	0,2285	0,0920	
		0,8	0,4165	0,4455	0,2615	
	50, 100	1,0	0,6730	0,7140	0,4760	
			0,2	0,0580	0,0590	0,0280
		0,4	0,2780	0,2830	0,1310	
			0,6	0,6190	0,6310	0,4230
			0,8	0,9310	0,9400	0,8320
			1,0	0,9980	0,9980	0,9890

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 29 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).

t_7 multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
2	10, 20	0,2	0,0220	0,0110	0,0155	0,0195	0,0110
		0,4	0,0450	0,0295	0,0420	0,0540	0,0290
		0,6	0,0880	0,0520	0,0840	0,0960	0,0575
		0,8	0,1535	0,1100	0,1645	0,1830	0,1205
		1,0	0,2565	0,1820	0,2720	0,3025	0,2075
	20, 40	0,2	0,0335	0,0190	0,0270	0,0300	0,0175
		0,4	0,0740	0,0540	0,0725	0,0780	0,0555
		0,6	0,1855	0,1345	0,1830	0,1935	0,1470
		0,8	0,3520	0,2975	0,3505	0,3685	0,2910
		1,0	0,5780	0,5145	0,5760	0,6020	0,5270
	50, 100	0,2	0,0545	0,0355	0,0420	0,0430	0,0360
		0,4	0,2225	0,1870	0,2170	0,2235	0,1815
		0,6	0,5300	0,4895	0,5035	0,5115	0,4585
		0,8	0,8500	0,8215	0,8160	0,8270	0,7885
		1,0	0,9705	0,9655	0,9675	0,9740	0,9595
10	10, 20	0,2	0,0605	0,0205	0,0195	0,0225	0,0090
		0,4	0,0910	0,0300	0,0385	0,0490	0,0180
		0,6	0,1630	0,0570	0,0595	0,0780	0,0320
		0,8	0,2855	0,1055	0,1115	0,1305	0,0690
		1,0	0,4405	0,1940	0,2090	0,2445	0,1400
	20, 40	0,2	0,0900	0,0160	0,0230	0,0260	0,0115
		0,4	0,1700	0,0460	0,0595	0,0665	0,0255
		0,6	0,4100	0,1385	0,1480	0,1590	0,0865
		0,8	0,6895	0,3405	0,3130	0,3365	0,1965
		1,0	0,8885	0,6030	0,4980	0,5360	0,3795
	50, 100	0,2	0,1400	0,0340	0,0415	0,0420	0,0190
		0,4	0,4960	0,2115	0,1790	0,1840	0,0975
		0,6	0,8805	0,6595	0,4720	0,4785	0,3190
		0,8	0,9910	0,9365	0,7850	0,7950	0,6675
		1,0	1,0000	0,9965	0,9535	0,9600	0,9075
20, 40	0,2	0,0820	0,1310	0,0265	0,0295	0,0120	
	0,4	0,1465	0,2170	0,0695	0,0740	0,0275	
	0,6	0,3015	0,4125	0,1510	0,1620	0,0720	
	0,8	0,5235	0,6285	0,2700	0,2865	0,1570	

Tabela 29 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

t_7 multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
50	50, 100	1,0	0,7370	0,8270	0,4925	0,5220	0,3460
		0,2	0,5440	0,1495	0,0440	0,0460	0,0160
		0,4	0,9700	0,7205	0,1695	0,1760	0,0765
		0,6	0,9995	0,9930	0,4475	0,4585	0,2965
		0,8	1,0000	1,0000	0,7705	0,7820	0,6025
		1,0	1,0000	1,0000	0,9550	0,9620	0,8875
100	50, 100	0,2	0,6505	0,8490	0,0410	0,0435	0,0160
		0,4	0,9850	0,9970	0,1775	0,1850	0,0855
		0,6	1,0000	1,0000	0,4360	0,4475	0,2880
		0,8	1,0000	1,0000	0,7820	0,7990	0,6100
		1,0	1,0000	1,0000	0,9595	0,9630	0,8945

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 30 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).

t_7 multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
50	10, 20	0,2	0,0125	0,0195	0,0055
		0,4	0,0365	0,0435	0,0150
		0,6	0,0650	0,0750	0,0300
		0,8	0,1115	0,1360	0,0615
		1,0	0,1905	0,2265	0,0940
100	10, 20	0,2	0,0175	0,0210	0,0080
		0,4	0,0335	0,0400	0,0125
		0,6	0,0760	0,0895	0,0335
		0,8	0,1165	0,1395	0,0595
		1,0	0,2140	0,2470	0,1230
	20, 40	0,2	0,0250	0,0270	0,0085
		0,4	0,0610	0,0655	0,0230
		0,6	0,1395	0,1540	0,0705
		0,8	0,2990	0,3185	0,1760
		1,0	0,4775	0,5110	0,3250
300	10, 20	0,2	0,0195	0,0245	0,0045
		0,4	0,0360	0,0445	0,0150
		0,6	0,0570	0,0700	0,0235
		0,8	0,1280	0,1570	0,0645
		1,0	0,1945	0,2335	0,1110
	20, 40	0,2	0,0265	0,0295	0,0085
		0,4	0,0670	0,0755	0,0265
		0,6	0,1525	0,1630	0,0805
		0,8	0,2915	0,3115	0,1710
		1,0	0,4840	0,5155	0,3265
	50, 100	0,2	0,0420	0,0435	0,0185
		0,4	0,1765	0,1825	0,0825
		0,6	0,4635	0,4805	0,2940
		0,8	0,7885	0,8040	0,6195
		1,0	0,9635	0,9665	0,8830
10, 20	0,2	0,0150	0,0195	0,0075	
	0,4	0,0305	0,0360	0,0145	
	0,6	0,0545	0,0660	0,0260	

Tabela 30 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição t multivariada com 7 graus de liberdade, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

t_7 multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$						
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$			
			TA	TAM	TB	
500	20, 40	0,8	0,1245	0,1515	0,0555	
		1,0	0,1940	0,2215	0,1145	
		0,2	0,0235	0,0260	0,0085	
		0,4	0,0645	0,0710	0,0285	
		0,6	0,1625	0,1755	0,0810	
		0,8	0,2850	0,3045	0,1610	
	50, 100	1,0	0,4835	0,5150	0,3205	
			0,2	0,0460	0,0480	0,0160
		0,4	0,1760	0,1810	0,0850	
			0,6	0,4650	0,4740	0,2790
			0,8	0,7610	0,7840	0,5920
			1,0	0,9520	0,9580	0,8780

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 31 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
2	10, 20	0,2	0,1515	0,0945	0,0135	0,1705	0,1000
		0,4	0,6830	0,5340	0,1470	0,7465	0,5900
		0,6	0,9865	0,9645	0,5235	0,9905	0,9670
		0,8	1,0000	1,0000	0,8905	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	0,9930	1,0000	1,0000
	20, 40	0,2	0,3765	0,3000	0,0505	0,4080	0,3130
		0,4	0,9840	0,9720	0,5460	0,9855	0,9715
		0,6	1,0000	1,0000	0,9835	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50, 100	0,2	0,8675	0,8395	0,3305	0,8540	0,8170
		0,4	1,0000	1,0000	0,9990	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	10, 20	0,2	0,2670	0,0935	0,0005	0,1270	0,0570
		0,4	0,8380	0,4805	0,0190	0,6635	0,4370
		0,6	0,9970	0,8615	0,1765	0,9895	0,9290
		0,8	1,0000	0,9890	0,5130	1,0000	0,9995
		1,0	1,0000	0,9980	0,8540	1,0000	1,0000
	20, 40	0,2	0,6660	0,3040	0,0060	0,3290	0,1840
		0,4	1,0000	0,9795	0,1995	0,9675	0,9110
		0,6	1,0000	1,0000	0,8030	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	0,9945	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50, 100	0,2	0,9930	0,9380	0,0750	0,8225	0,6635
		0,4	1,0000	1,0000	0,9510	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20, 40	0,2	0,5795	0,6950	0,0055	0,3355	0,1645	
	0,4	0,9870	0,9930	0,1605	0,9745	0,9005	
	0,6	1,0000	1,0000	0,7660	1,0000	1,0000	
	0,8	1,0000	1,0000	0,9925	1,0000	1,0000	

Tabela 31 – Poder dos testes T^2 de Hotelling (TH), MNV, de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Conclusão).

Uniforme (0, 1) multivariada, baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$							
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$				
			TH	MNV	TA	TAM	TB
50	50, 100	1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,2	1,0000	1,0000	0,0520	0,7990	0,6275
		0,4	1,0000	1,0000	0,9350	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	50, 100	0,2	1,0000	1,0000	0,0465	0,8180	0,6385
		0,4	1,0000	1,0000	0,9395	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 32 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Uniforme (0,1) multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$					
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$		
			TA	TAM	TB
50	10, 20	0,2	0,0015	0,1310	0,0500
		0,4	0,0180	0,6535	0,4035
		0,6	0,1390	0,9885	0,9245
		0,8	0,4740	1,0000	1,0000
		1,0	0,8110	1,0000	1,0000
100	10, 20	0,2	0,0025	0,1465	0,0500
		0,4	0,0170	0,6595	0,3830
		0,6	0,1200	0,9930	0,9245
		0,8	0,4710	1,0000	1,0000
		1,0	0,8225	1,0000	1,0000
100	20, 40	0,2	0,0050	0,3210	0,1485
		0,4	0,1575	0,9765	0,9080
		0,6	0,7600	1,0000	1,0000
		0,8	0,9930	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	10, 20	0,2	0,0010	0,1485	0,0525
		0,4	0,0205	0,6570	0,3945
		0,6	0,1310	0,9870	0,9090
		0,8	0,4610	1,0000	0,9995
		1,0	0,8150	1,0000	1,0000
300	20, 40	0,2	0,0060	0,2995	0,1475
		0,4	0,1520	0,9805	0,8860
		0,6	0,7575	1,0000	1,0000
		0,8	0,9930	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	50, 100	0,2	0,0590	0,8235	0,6430
		0,4	0,9295	1,0000	1,0000
		0,6	1,0000	1,0000	1,0000
		0,8	1,0000	1,0000	1,0000
		1,0	1,0000	1,0000	1,0000
300	10, 20	0,2	0,0000	0,1360	0,0450
		0,4	0,0140	0,6580	0,3820
		0,6	0,1180	0,9885	0,9030

Tabela 32 – Poder dos testes de Ahmad (TA), de Ahmad modificado (TAM) e *bootstrap* (TB), considerando número de variáveis (p), tamanhos amostrais (n_1, n_2), $\Delta \in \{0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0\}$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, SC), distribuição uniforme (0, 1) multivariada, alta dimensionalidade e nível nominal de 0,01 de significância (α), sob H_1 (Continua).

Uniforme (0,1) multivariada, alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$						
p	n_1, n_2	Δ	$\Sigma_1 : SC, \rho = 0,4$ e $\Sigma_2 : SC, \rho = 0,8$			
			TA	TAM	TB	
500	20, 40	0,8	0,4555	1,0000	1,0000	
		1,0	0,8065	1,0000	1,0000	
		0,2	0,0050	0,3220	0,1525	
		0,4	0,1545	0,9800	0,8990	
		0,6	0,7660	1,0000	1,0000	
		0,8	0,9980	1,0000	1,0000	
	50, 100	1,0	1,0000	1,0000	1,0000	
			0,2	0,0490	0,8180	0,6120
		0,4	0,9410	1,0000	1,0000	
			0,6	1,0000	1,0000	1,0000
			0,8	1,0000	1,0000	1,0000
			1,0	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Do autor (2023).