



TIAGO GONÇALVES BOTELHO

**UMA NOVA PROPOSTA PARA
IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO
PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH**

LAVRAS - MG

2012

TIAGO GONÇALVES BOTELHO

**UMA NOVA PROPOSTA PARA IMPLEMENTAÇÃO
COMPUTACIONAL DO PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas, área de concentração em Modelagem de Sistemas Biológicos, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Onofre Rojas Santos

Coorientador: Dr. Sérgio Martins de Souza

LAVRAS - MG

2012

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Botelho, Tiago Gonçalves.

Uma nova proposta para a implementação computacional do princípio de extensão de Zadeh / Tiago Gonçalves Botelho. – Lavras : UFLA, 2012.

77 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2012.

Orientador: Onofre Rojas Santos.

Bibliografia.

1. Princípio de extensão. 2. Difração de fendas. 3. Métodos numéricos. 4. Inteligência computacional. 5. Lógica *fuzzy*. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 511.313

TIAGO GONÇALVES BOTELHO

**UMA NOVA PROPOSTA PARA IMPLEMENTAÇÃO
COMPUTACIONAL DO PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas, área de concentração em Modelagem de Sistemas Biológicos, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 06 de fevereiro de 2012.

Dra. Angela Dayana Barrera de Brito	UFSJ
Dr. Tadayuki Yanagi Júnior	UFLA
Dr. Sanderson L. Gonzaga de Oliveira	UFLA

Orientador: Dr. Onofre Rojas Santos
Coorientador: Dr. Sérgio Martins de Souza

LAVRAS - MG
2012

**A Deus,
Aos meus pais,
Ao meu irmão,
A minha namorada,
Aos meus familiares,
Aos meus amigos,
Ofereço.**

*Aos meus pais, José Onésio e Helena,
ao meu irmão, Diogo, a minha namorada, Michele
Dedico.*

AGRADECIMENTOS

A Deus por tudo o que tem feito por mim e por minha família.

Aos meus pais, José Onésio Botelho e Helena Maria Botelho, pelo exemplo como pessoas, pela educação, carinho, incentivo, enfim, obrigado por tudo.

Ao meu irmão Diogo Gonçalves Botelho, pelo companheirismo.

À minha namorada, Michele Placedino Andrade, que esteve sempre do meu lado, paciente, compreensiva, desejando o melhor para mim.

Ao meu orientador, Onofre Rojas Santos pela ajuda e paciência.

Ao meu coorientador, Sérgio Martins de Souza pelo apoio e colaboração.

À banca examinadora, que aceitou o convite que lhes foi feito.

Aos professores da UFLA que lecionaram disciplinas no programa, e aos professores do DCC (Departamento de Ciência da Computação) pelo apoio e conselhos.

Aos colegas do mestrado pelo apoio, incentivo e amizade.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), em especial ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas, pela oportunidade de realização do curso.

Aos familiares e amigos que sempre torceram por mim.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior) pela concessão da bolsa de mestrado.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para o cumprimento desta etapa da minha vida.

Obrigado a todos!

RESUMO

Este trabalho apresenta um método computacional que permite aplicar o princípio de extensão para obter a figura de difração de fendas. Este princípio é uma ferramenta da lógica *fuzzy* que permite tratar expressões matemáticas com acréscimo de incerteza em seus parâmetros. As expressões testadas descrevem oscilações e, uma vez que sua resolução via princípio de extensão tradicional ocasiona ruídos nos dados, foi adotado um novo método de resolução. Este método se baseia em métodos numéricos de obtenção de raízes de equações, sendo que a resolução do princípio de extensão é realizada de forma analítica. Para aplicar a nova metodologia, foi adotado a difração de fendas, onde ao parâmetro abertura da fenda foi acrescido incerteza para que se obtenha um determinado padrão de difração. Os resultados obtidos na defuzzificação das expressões acrescidas de incerteza foram confrontados com os resultados clássicos, possibilitando uma nova análise para o padrão de difração.

Palavras-chave: Inteligência computacional. Lógica *fuzzy*. Princípio de extensão. Difração de fendas. Métodos numéricos.

ABSTRACT

This work presents a computational method that allows the application of the extension principle to obtain the slit diffraction pattern. This principle is a fuzzy logic tool that can treat mathematical expressions with an uncertainty in its parameters. The expressions tested describe oscillations and, since their resolution through traditional extension principle generates noisy data, we adopted a new method of resolution. This method is based on numerical methods for obtaining the roots of equations, and the resolution of the extension principle is performed analytically. To apply the new methodology we adopted slit diffraction, where we added uncertainty width parameter in order to obtain a given diffraction pattern. The results obtained on the defuzzification of the expressions with uncertainty were compared with the classical results, enabling a new analysis of the diffraction pattern.

Keywords: Computational intelligence. Fuzzy logic. Extension principle. Slit diffraction. Numerical methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Desenho comparativo entre as lógicas clássica e <i>fuzzy</i>	15
Figura 2	Figura representativa do algoritmo implementado	51

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1	Operações entre conjuntos <i>fuzzy</i>	20
Gráfico 2	Obtenção da extensão \hat{f} de f	23
Gráfico 3	α -níveis: $[A]^\alpha$ e $[A]^0 \neq U$	24
Gráfico 4	Exemplos de funções de pertinência	27
Gráfico 5	Subconjunto $\hat{f}(A)$ do exemplo 2.1.6.2	31
Gráfico 6	Obtenção de x no intervalo $[4.71238898, 7.853981634]$, dado que o ponto está na coordenada $f(x) = 1.81859$	37
Gráfico 7	Processo gráfico da extensão de Zadeh. Obtenção da imagem $f(w)$ por meio de f para o instante 2.....	40
Gráfico 8	Número <i>fuzzy</i> $f(w)$ obtido após operação de máximos....	41
Gráfico 9	Obtenção do número <i>fuzzy</i> $f(w)$ obtido via delimitação de intervalo e determinação da função inversa	41
Gráfico 10	Função de pertinência com limite inferior (a), pertinência máxima (b) e limite superior (c)	44
Gráfico 11	Gráfico representativo do exemplo 4.1	44
Gráfico 12	Representação da extensão do conjunto <i>fuzzy</i> em torno de 15	47
Gráfico 13	$f(x) = \text{sen}(x*\omega)$ para $\alpha_s = 0.2$	47
Gráfico 14	$f(x) = \text{sen}(x)$ com parâmetro incerto ω próximo de 1 após defuzzificação.....	48
Gráfico 15	Comparação método princípio de extensão tradicional e obtenção da extensão por inversa com 5, 10 e 100 números de pontos discretizados	49
Gráfico 16	Representação da função $f(x) = \text{sin}(8.5*\omega)/(8.5*\omega)$	50
Gráfico 17	Extensão da função referente ao gráfico 16	55
Gráfico 18	Espectro de difração de uma fenda única	57
Gráfico 19	(a) Quando a largura da fenda é bem maior que o comprimento de onda. (b) Situação em que a largura da fenda é maior ou igual ao comprimento de onda.....	59
Gráfico 20	Resultado da fuzzificação para a amplitude com $\alpha_s = 0.2$...	62
Gráfico 21	Visão tridimensional do Gráfico 20.....	62
Gráfico 22	Resultado da defuzzificação pelo método centroide para $\alpha_s = 0.2$	63
Gráfico 23	Resultado da fuzzificação para a amplitude com $\alpha_s = 0.1$...	64
Gráfico 24	Sobreposição do resultado da defuzzificação para $\alpha_s = 0.2$, $\alpha_s = 0.1$ e função clássica.....	64
Gráfico 25	Resultado da fuzzificação da equação (54), para A: $\alpha_s = 0.1$ e B: $\alpha_s = 0.2$	66

Gráfico 26	Resultado da defuzzificação pelo método centroide e distribuição de intensidade no gráfico de difração de fenda única para A: $\alpha_s = 0.1$ e B: $\alpha_s = 0.2$	66
Gráfico 27	Espectro de difração de uma fenda dupla, considerando $d=4*a$	68
Gráfico 28	Resultado da fuzzificação da equação (55), para A: $\alpha_s = 0.1$ e B: $\alpha_s = 0.2$	70
Gráfico 29	Resultado da defuzzificação e intensidade de difração da fenda dupla baseada no gráfico de difração, para A: $\alpha_s = 0.1$ e B: $\alpha_s = 0.2$	70
Gráfico 30	Comparação da função clássica com as defuzzificações para $\alpha_s = 0.1$ e $\alpha_s = 0.2$	71
Gráfico 31	Comparação entre métodos de defuzzificação centroide e <i>simpson rule</i>	73
Gráfico 32	Diferenças percentuais comparando os métodos de defuzzificação centroide e <i>simpson rule</i>	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Demonstração das iterações até a convergência	35
Tabela 2	Valores correspondentes ao método de bissecção que obtém convergência quando Erro < 0.01 após 10 iterações.....	37
Tabela 3	Partições de $f(x)$ e obtenção de " $x^*\omega$ " via inversão de função	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	Lógica <i>fuzzy</i>	15
2.1.1	Conjuntos <i>fuzzy</i>	16
2.1.2	Operações entre conjuntos <i>fuzzy</i>	18
2.1.3	Princípio de extensão	20
2.1.4	Conceitos de α -nível	23
2.1.5	Números <i>fuzzy</i>	25
2.1.6	Operações aritméticas com números <i>fuzzy</i>	27
2.1.7	Controlador <i>fuzzy</i>	32
2.2	Métodos de obtenção de raízes de equações	33
3	METODOLOGIA	38
3.1	Trabalhos realizados utilizando o princípio de extensão e nova proposta	39
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	43
4.1	Implementação computacional do princípio de extensão	43
4.2	Descrição do algoritmo	50
4.3	Aplicações – Difração produzida por fendas	55
4.3.1	Difração produzida por fenda única	56
4.3.1.1	Aplicação do princípio de extensão na determinação da amplitude na figura de difração	59
4.3.1.2	Aplicação do princípio de extensão na determinação da intensidade na figura de difração	65
4.3.2	Difração produzida por fenda dupla	67
4.3.2.1	Aplicação do princípio de extensão na determinação da intensidade na figura de difração de fenda dupla	69
4.3.2.2	Comparação entre os métodos de defuzzificação centroide e <i>simpson rule</i>	72
5	CONCLUSÕES	74
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

Fenômenos relacionados à ótica geométrica, resultantes da propagação das ondas num meio em que não existem uniformidades bem pronunciadas, tais como orifícios, fendas num ecrã ou obstáculos são observados constantemente. Este fenómeno é denominado difração, onde a imagem observada por um anteparo é composta pela superposição de muitas ondas luminosas. A figura de difração pode ser obtida por experimento, sendo formada por um feixe colimado (raios paralelos) de luz monocromática que emerge de uma fenda estreita, passando por uma abertura na fenda para formação de um determinado padrão de interferência das franjas em um anteparo. Em determinados casos onde uma figura com este padrão é pré-definida, existirá uma incerteza a qual será acrescida ao comprimento da abertura da fenda para obtenção deste tipo de figura.

Situações como esta são encontradas comumente, onde lida-se com diversos níveis de incerteza e imprecisão, e com frequência, o processo de tomada de decisão baseia-se em conceitos vagos estranhos a lógica clássica e em parâmetros de natureza subjetiva. Baseada na teoria de conjuntos *fuzzy*, a lógica *fuzzy* tem se apresentado como boa alternativa para tratamento de termos incertos, subjetivos e vagos (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Um dos métodos mais importantes na teoria de conjuntos *fuzzy* é o princípio de extensão de Zadeh, o qual é utilizado para estender operações típicas dos conjuntos clássicos, sendo uma das ideias básicas que promove a extensão de conceitos matemáticos não-*fuzzy* em *fuzzy*. O princípio de Zadeh tem sido estudado e aplicado com sucesso por muitos autores. Castanho et al. (2005) utilizou um modelo matemático clássico para a evolução do tumor do câncer de próstata, considerando a taxa de crescimento como um parâmetro

fuzzy; Melo (2009) aplicou em um oscilador *fuzzy* com parâmetros de amplitude e frequência incertos; Pires (2010) validou sua implementação na difusão de calor ao longo de uma haste delgada sujeita a incerteza no coeficiente de difusão e à “termodinâmica *fuzzy*”.

A principal motivação deste trabalho é a utilização de uma técnica que seja capaz de lidar com situações de imprecisão em funções que descrevam oscilações, sem utilizar operações típicas do princípio de extensão, as operações de máximos e mínimos. Pires (2010) implementou o princípio de extensão a funções matemáticas gerais, de forma a permitir uma análise dessas funções acrescidas de incertezas em seus parâmetros, e assim verificar a viabilidade do modelo *fuzzy* em relação aos modelos clássicos já consagrados. Todavia para funções que descrevem oscilações, esta implementação não gera um resultado que permita sua aplicação em uma situação real.

Assim, o objetivo principal do presente trabalho é a implementação computacional do princípio de extensão de Zadeh, utilizando métodos de inversão de função, de forma que se obtenha a imagem de conjuntos *fuzzy* por meio de uma função clássica, sem a necessidade de operações de máximos e mínimos e produza resultados que possibilite sua validação.

Para definir se o método desenvolvido está adequado aos objetivos a que se destina, é preciso que este método seja validado, a fim de se obter resultados confiáveis que possam ser satisfatoriamente interpretados. A validação foi realizada utilizando a experiência da fenda única e fenda dupla, onde se acrescentou o parâmetro incerto na variável abertura da fenda na equação que determina amplitude e intensidade na difração de fendas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Lógica *fuzzy*

A lógica *fuzzy* surgiu com base na teoria de conjuntos *fuzzy*, no ano de 1965, em que a primeira vez foi usado o termo “lógica *fuzzy*” na publicação do artigo *Fuzzy Sets* (ZADEH, 1965), quando Zadeh demonstrou de forma matemática o tratamento dos aspectos imprecisos e ambíguos apresentados na lei da contradição. Nesta lei, proposta por Jan Lukasiewicz, em 1930, uma determinada afirmação pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Isso se torna possível desde que não apresente apenas dois níveis, verdadeiro e falso, mas sim um grau de verdade, existindo assim vários níveis (CAMPOS FILHO, 2004). Essa seria a ideia da lógica *fuzzy*, a não restrição entre o verdadeiro e falso, o preto e o branco, afirmada na lógica clássica; mas sim vários tons de cinza, ilustrado na Figura 1.

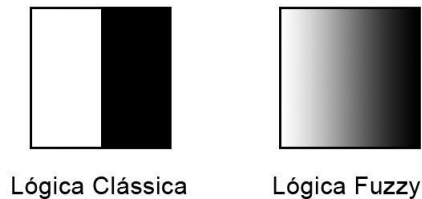


Figura 1 Desenho comparativo entre as lógicas clássica e *fuzzy*.

O termo em inglês *fuzzy* traduzido para o português, tem o significado como algo vago, indefinido, incerto. Este termo é muito utilizado na área de inteligência computacional em que assume significado de nebuloso ou difuso. A lógica *fuzzy* trata de um raciocínio que busca classificar em números uma determinada realidade ou situação, que trabalha com muitas variáveis incertas e

vagas, a fim de facilitar o trabalho ou manipulação dos computadores (SHAW; SIMÕES, 1999). Em resumo, a lógica *fuzzy* buscou uma generalização da lógica clássica, flexibilizando-a [0,1] de modo que a implementação de um projeto de sistema *fuzzy* possa ser reduzida a um ponto em que problemas anteriormente intratáveis passam a ser factíveis a uma solução.

A característica de lidar com a imprecisão e ambigüidade da linguagem natural fez com que a lógica *fuzzy* se tornasse alvo de pesquisas em diversas áreas, como controle de sistemas e inteligência artificial.

2.1.1 Conjuntos *fuzzy*

Os conjuntos *fuzzy* são conjuntos que não possuem fronteiras bem definidas e que foram introduzidos devido ao fato de os conjuntos apresentarem limitações para lidar com problemas onde as transições de uma classe para outra acontecem de forma suave. Sua definição, propriedades e operações são obtidas da generalização da teoria de conjuntos clássicos, recaindo esta em um caso particular da teoria de conjuntos *fuzzy*.

Para obtenção da formalização matemática de um conjunto *fuzzy*, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função, denominada função característica, cuja definição é dada a seguir.

Definição 2.1.1.1: Seja U um conjunto e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

em que U é o conjunto universo, A é um subconjunto de U e x é um elemento de U , ou seja, a função característica é um mapeamento do conjunto universo no conjunto $\{0,1\}$. Essa função característica discrimina entre todos os elementos de U aqueles que, segundo algum critério, pertencem ou não ao subconjunto A ,

dividindo o conjunto universo em duas partes com fronteira bem definida. Todavia, existem casos em que a pertinência entre elementos e conjuntos não é precisa, isto é, não é possível dizer se um elemento pertence efetivamente a um conjunto ou não. Então, torna-se plausível dizer qual elemento do conjunto universo se enquadra “melhor” ao termo que caracteriza o subconjunto. Por exemplo, considere o subconjunto dos números reais “*próximos de 2*”.

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x \text{ é próximo de } 2\}. \quad (2)$$

Pergunta: o número 7 e o número 2,001 pertencem a A ?

A resposta a esta pergunta é incerta, pois não se sabe até que ponto é permitido afirmar objetivamente quando um número está próximo de 2. A única afirmação razoável, neste caso, é que 2,001 está mais próximo de 2 do que 7.

Para obtenção dos conjuntos *fuzzy* basta generalizar a função característica da lógica clássica para o intervalo $[0,1]$, ou seja, $\mu_A(x) = U \rightarrow [0,1]$, o que implica em considerar um contínuo de valores de pertinência e não apenas pertence e não-pertence. Assim, o elemento x pertencerá ao subconjunto A com um grau de pertinência que é um valor no intervalo $[0,1]$. De modo análogo, considera-se o grau de pertinência como uma medida que expressa a possibilidade de um dado elemento ser membro de um conjunto *fuzzy*.

Considerando um universo discreto e enumerável, o conjunto *fuzzy* é representado de modo que seja possível enumerar seus elementos juntamente com seus graus de pertinência, assim, o subconjunto *fuzzy* finito A é convenientemente denotado por:

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n. \quad (3)$$

Na forma contínua, ou seja, quando o universo X é dado por infinitos elementos no intervalo $[0,1]$, a representação é dada como:

$$A = \int \mu_A(x_i)/x_i. \quad (4)$$

No conjunto A tanto os símbolos matemáticos somatório, quanto integral representam a operação união e a notação $\mu_A(x_i)/x_i$ se refere ao elemento x_i que pertence ao conjunto *fuzzy* A com grau de pertinência $\mu_A(x_i)$, em que o símbolo “/” é usado para vincular o elemento x_i e o seu grau de pertinência. O símbolo “+” é utilizado para conectar os elementos, formando um subconjunto *fuzzy* A .

Existem ainda mais duas outras regras referentes à representação discreta:

- quando o grau de pertinência de um elemento x_i é zero, ou seja, $\mu_A(x_i) = 0$, o respectivo termo $\mu_A(x_i)/x_i$ é omitido;
- se existirem vários valores associados com um elemento do universo x_i , é representado somente o termo com maior grau de pertinência $\mu_A(x_i)$.

Uma vez que os conjuntos *fuzzy* são contínuos, sua representação é descrita pela função de pertinência. As formas para as funções de pertinência são totalmente arbitrárias, entretanto, as mais utilizadas são: linear por partes (triangular ou trapezoidal) e gaussiana. Detalhes a respeito destas funções serão descritos posteriormente.

2.1.2 Operações entre conjuntos *fuzzy*

Existem inúmeras maneiras de se implementar as operações entre conjuntos difusos, porém, aqui, apresentar-se-á somente a definição mais

freqüente na literatura, tal como é apresentado em Oliveira Júnior (1999) e Tanaka (1997).

Sejam A e B subconjuntos clássicos de X representados pelas funções de pertinência X_A e X_B , respectivamente. Os conjuntos:

$$A \cup B = \{ x; x \in A \text{ ou } x \in B \}, \quad (5)$$

$$A \cap B = \{ x; x \in A \text{ e } x \in B \}, \quad (6)$$

$$A' = \{ x \in U; x \notin A \}. \quad (7)$$

Têm respectivamente as funções características:

$$X_{A \cup B}(x) = \max\{X_A, X_B\}, \quad (8)$$

$$X_{A \cap B}(x) = \min\{X_A, X_B\}, \quad (9)$$

$$X_A' = 1 - X_A. \quad (10)$$

Como conjuntos *fuzzy* são uma extensão de funções características, podem ser definidos união, intersecção e complementar de conjuntos *fuzzy*.

Definição 2.1.2.1: Sejam A e B conjuntos *fuzzy*. As funções de pertinência que representam os conjuntos *fuzzy* união, intersecção e complementar de conjuntos *fuzzy* são dadas por:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad (11)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad (12)$$

$$\mu_A'(x) = 1 - \mu_A(x), \quad (13)$$

respectivamente.

O Gráfico 1 ilustra exemplos de união, intersecção e complemento de conjuntos *fuzzy*.

As operações de união e interseção assim definidas podem ser vistas como casos especiais de situações abrangentes de agregação de conjuntos nebulosos. Embora as definições destas operações tenham sido realizadas com a utilização das funções *max* e *min*, estas não são as únicas possibilidades para tais.

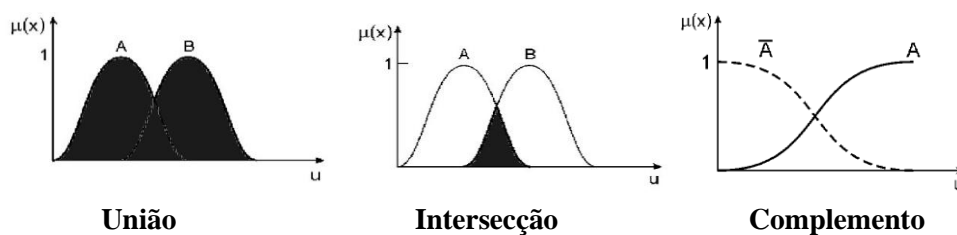


Gráfico 1 Operações entre conjuntos *fuzzy*

2.1.3 Princípio de extensão

O princípio de extensão de Zadeh tem despertado uma considerável atenção de muitos pesquisadores devido ao excelente conceito em que se baseia, bem como ampla e efetiva aplicação (YANG et al., 2000). Esta ferramenta é indispensável para estruturação matemática quando se modelam fenômenos envolvendo grande grau de incerteza.

O princípio de extensão é utilizado para obter a imagem de conjuntos *fuzzy* através de uma função clássica (JAFELICE, 2004), estendendo conceitos da teoria de conjuntos clássicos para a teoria de conjuntos *fuzzy*. Esse princípio surge da necessidade de se aplicar uma função clássica a argumentos imprecisos. Desta forma, a partir de uma função f , é possível aplicar argumentos *fuzzy*, em que este argumento descreve a distribuição de possibilidade do argumento da função f . Para cada possível valor que a variável da função pode assumir, são

aplicados argumentos *fuzzy* para que se produza a possível imagem, fornecendo também a distribuição de possibilidade dessa imagem. Em determinadas funções pode ocorrer que diferentes valores de entrada sejam mapeados no mesmo valor de saída. Assim, é necessário calcular a possibilidade de cada um dos valores de saída, por meio da combinação dos graus de pertinência para um mesmo valor de saída. Para este tipo de situação utiliza-se o operador *sup*, em que será determinado o maior valor de pertinência para o valor de saída.

Definição 2.1.3.1: Seja a função $f : X \rightarrow Z$ e A um subconjunto *fuzzy* de X . A extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que, aplicada a A , fornece o subconjunto *fuzzy* $\hat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) \begin{cases} \sup_{\{x: f(x)=z\}} \varphi_A(x) & \text{se } \{x: f(x) = z\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \{x: f(x) = z\} = \emptyset \end{cases} \quad (14)$$

Se f for uma função bijetora, então:

$$\{x: f(x) = z\} = \{f^{-1}(z)\}. \quad (15)$$

Caso $f : X \rightarrow Z$ uma função injetora e A um subconjunto *fuzzy* de X , enumerável é dado por:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i)/x_i. \quad (16)$$

Então, o princípio de extensão garante que $\hat{f}(A)$ é um subconjunto *fuzzy* de Z , dado por:

$$\hat{f}(A) = \hat{f} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i)/x_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i)/f(x_i). \quad (17)$$

Assim, a imagem de A por f pode ser deduzida do conhecimento das imagens de x_i por f . O grau de pertinência de $z_i = f(x_i)$ em $\hat{f}(A)$ é o mesmo de x_i em A .

Exemplo 2.1.3.1: Sejam $f(x) = x^2 - 6x + 11$, $x \geq 0$ e A um conjunto *fuzzy* com suporte enumerável. Deseja-se determinar um número *fuzzy* “em torno de 4”.

a. Determinação da função de pertinência:

$$f(\text{em torno de } 4) = 0,3/2 + 0,6/3 + 1/4 + 0,6/5 + 0,3/6$$

b. Determinação da imagem de A via princípio de extensão:

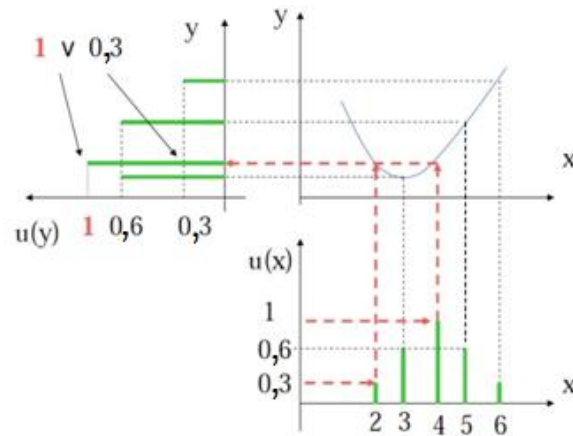
$$\hat{f}(\text{em torno de } 4) = 0,3/f(2) + 0,6/f(3) + 1/f(4) + 0,6/f(5) + 0,3/f(6)$$

$$\hat{f}(\text{em torno de } 4) = 0,3/3 + 0,6/2 + 1/3 + 0,6/6 + 0,3/11$$

$$\hat{f}(\text{em torno de } 4) = 0,6/2 + \max(0,3 \wedge 1)/3 + 0,6/6 + 0,3/11$$

$$\hat{f}(\text{em torno de } 4) = 0,6/2 + 1/3 + 0,6/6 + 0,3/11$$

O Gráfico 2 ilustra o processo gráfico para obtenção da extensão \hat{f} de f , a imagem de A por f pode ser deduzida do conhecimento das imagens de x_i por f . O grau de pertinência de $y_i = f(x_i)$ em $f(A)$ é o mesmo de x_i em A .

Gráfico 2 Obtenção da extensão \hat{f} de f

2.1.4 Conceitos de α -nível

Dado um subconjunto *fuzzy* A em $F(X)$ é definido, para cada $\alpha \in (0, 1]$, o conjunto $[A]^\alpha \subset X$ como sendo o conjunto dos elementos de X tal que o grau de pertinência em A é ao menos α . O conjunto $[A]^\alpha \subset X$ é denominado α -nível de A e é matematicamente definido como:

$$[A]^\alpha = \{x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } \alpha \in (0, 1]. \quad (18)$$

$$[A]^0 = \{x \in X: \mu_A(x) > 0\} \text{ (suporte de } A). \quad (19)$$

O nível zero de um subconjunto *fuzzy* é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de X que contém o conjunto suporte de A .

Exemplo 2.1.4.1: Sejam $U = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e A um subconjunto *fuzzy* de \mathbb{R} com a função de pertinência.

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{se } 2 < x < 3 \\ 0, & \text{se } x \notin [1, 3) \end{cases} \quad (20)$$

Assim, chega-se a conclusão que:

$$x - 1 = \alpha, \text{ logo } x = \alpha + 1$$

$$3 - x = \alpha, \text{ logo } x = 3 - \alpha$$

Resulta em:

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha] \text{ para } 0 < \alpha \leq 1, \text{ portanto } [A]^0 = [1,3].$$

O Gráfico 3 representa o α -níveis: $[A]^\alpha$ e $[A]^0 \neq U$.

Desse modo, pode ser observado no Gráfico 3 que para $[A]^0$ o grau de pertinência é 0 para o intervalo $[1,3]$ e para um determinado α verifica-se o intervalo mostrado no Gráfico 3 denotado $[A]^\alpha$.

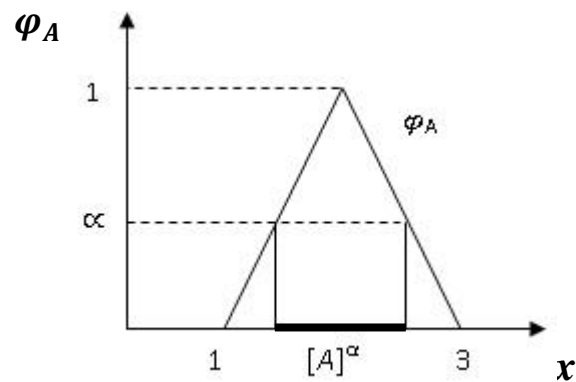


Gráfico 3 α -níveis: $[A]^\alpha$ e $[A]^0 \neq U$

Dois conjuntos *fuzzy* são considerados iguais sempre que possuírem funções características idênticas, ou seja,

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ para } x \in X. \quad (21)$$

A igualdade entre conjuntos *fuzzy* pode ser determinada por meio dos α -níveis, sendo que a igualdade dos conjuntos é determinada quando os α -níveis coincidem para todo $\alpha \in [0,1]$.

2.1.5 Números *fuzzy*

O conceito de número *fuzzy* vem do fato de muitos fenômenos não poderem ser caracterizados por números precisos (BANDO, 2002). De certa forma pode-se afirmar que, em um problema concreto, muitos números que lá aparecem são idealizações de informações imprecisas envolvendo valores numéricos. Por exemplo, quando algum material é pesado, é obtido um valor para este peso carregado de imprecisões, seja esta imprecisão relacionada à precisão da balança, ao material que está sendo pesado, etc. De modo geral, o valor obtido é “preciso” (um número real) a para indicar este peso, porém seria mais razoável dizer que este valor está “em torno de a ”. Neste caso, matematicamente, é prudente dizer que na expressão “em torno de a ”, espera-se que $\varphi_A(a) = 1$. Todavia o domínio da função de pertinência $\varphi_A(a)$ é o conjunto dos números reais. Isso se deve ao fato de que os possíveis valores para o peso são números reais e estão agrupados ao redor de um dado número real chamado o valor médio, neste caso é “ a ”. Assim, a função de pertinência é monotônica em ambos os lados desse valor médio.

Definição 2.1.5.1: Um subconjunto *fuzzy* A é chamado de número *fuzzy* quando o conjunto universo no qual φ_A está definida, é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e satisfaz as condições:

- a – todos os α -níveis de A são não vazios, para $\alpha \in [0,1]$;
- b – todos os α -níveis de A são intervalos fechados em \mathbb{R} ;
- c – $\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R}: \varphi_A(x) > 0\}$ é limitado.

Observa-se que, de acordo com a definição 2.1.5.1, todo número real r é um número *fuzzy* particular cuja função de pertinência é a sua função característica:

$$X_r = \begin{cases} 1, & \text{se } x = r \\ 0, & \text{se } x \neq r \end{cases} \quad (22)$$

Os números *fuzzy* mais comuns são os triangulares, os trapezoidais e os em forma de sino. Estes números são representados por gráficos da função de pertinência, onde esta função tem a forma de, respectivamente, triângulo, trapézio e gaussiana (representando a forma de sino). Entretanto, o problema da escolha da melhor função de pertinência não foi resolvido teoricamente e elas permanecem sendo escolhidas considerando a aplicação e o contexto do problema a ser abordado (REZNIK, 1997).

As formas básicas e as representações de cada uma das funções (Gráfico 4) são apresentadas na sequência.

- Função triangular:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0; & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}; & \text{se } x \in [a, b] \\ \frac{c-x}{c-b}; & \text{se } x \in [b, c] \\ 0; & \text{se } x \geq c \end{cases} \quad (23)$$

- Função trapezoidal:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0; & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}; & \text{se } x \in [a, b] \\ 1; & \text{se } x \in [b, c] \\ \frac{c-x}{c-b}; & \text{se } x \in [c, d] \\ 0; & \text{se } x \geq d \end{cases} \quad (24)$$

- Função gaussiana:

$$\mu_A(x) = \{e^{-\theta(x-m)^2}; \quad \text{se } \theta > 0. \quad (25)$$

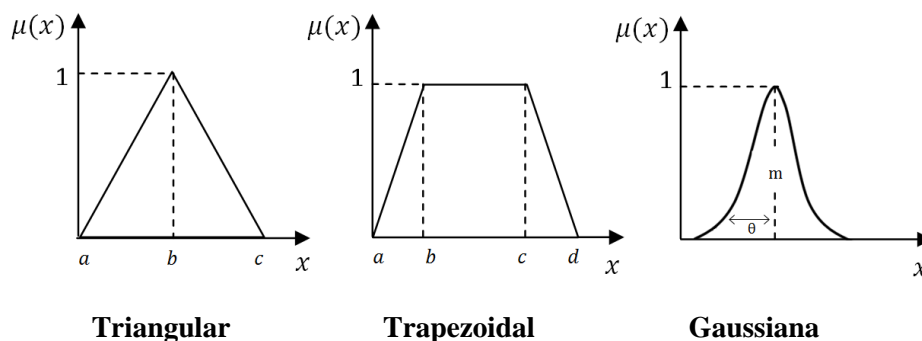


Gráfico 4 Exemplos de funções de pertinência

O conceito de números *fuzzy*, com o subconjunto dos números reais, é um paradigma apropriado para a representação de imprecisões em informações numéricas. Para que os números *fuzzy* possam ser utilizados é necessário que as operações aritméticas estejam bem definidas.

2.1.6 Operações aritméticas com números *fuzzy*

As operações aritméticas envolvendo números *fuzzy* permitem realizar as “contas” com conjuntos *fuzzy*.

As definições que seguem podem ser vistas como casos particulares do princípio de extensão, tanto para funções de uma como de duas variáveis (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Sejam A e B dois números *fuzzy* e λ um número real.

Definição 2.1.6.1: A soma dos números *fuzzy* A e B é o número *fuzzy*, $A + B$, cuja função de pertinência é:

$$\varphi_{(A+B)}(z) = \sup_{\{(x,y):x+y=z\}} \min [\varphi_A(x), \varphi_B(y)] \quad (26)$$

Definição 2.1.6.2: A multiplicação de λ por A é o número *fuzzy*, λA , cuja função de pertinência é:

$$\varphi_{\lambda A}(z) = \sup_{\{x:\lambda x=z\}} [\varphi_A(x)] = \begin{cases} \varphi_A(\lambda^{-1}z) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{se } \lambda = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Definição 2.1.6.3: A subtração $A - B$ é o número *fuzzy*, cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A-B)}(z) = \sup_{\{(x,y):x-y=z\}} \min [\varphi_A(x), \varphi_B(y)]. \quad (28)$$

Definição 2.1.6.4: A multiplicação de A por B é o número *fuzzy* $A.B$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A.B)}(z) = \sup_{\{(x,y):x.y=z\}} \min [\varphi_A(x), \varphi_B(y)]. \quad (29)$$

Definição 2.1.6.5: A divisão de A por B , se $0 \in \text{supp } B$ é o número *fuzzy*, cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A/B)}(z) = \sup_{\{(x,y):x/y=z\}} \min [\varphi_A(x), \varphi_B(y)]. \quad (30)$$

Exemplo 2.1.6.1: Seja A e B os seguintes conjuntos *fuzzy*:

$$A(x) = \{0,3/1, 0,6/2, 1/3, 0,6/4, 0,3/5\}$$

$$B(y) = \{0,5/10, 1/11, 0,5/12\}$$

Portanto, a soma desses dois conjuntos *fuzzy* pode ser obtida pela equação (26) considerando os operadores *min* e *max* para a conjunção e disjunção, respectivamente. Analisando todas as combinações (x, y) dos conjuntos *fuzzy* obtém-se:

$$\begin{aligned}
f(A+B) = & (0,3^{0,5})/(1+10) + (0,6^{0,5})/(2+10) + (1^{0,5})/(3+10) + \\
& (0,6^{0,5})/(4+10) + (0,3^{0,5})/(5+10) + (0,3^1)/(1+11) + (0,6^1)/(2+11) + \\
& (1^1)/(3+11) + (0,6^1)/(4+11) + (0,3^1)/(5+11) + (0,3^{0,5})/(1+12) + \\
& (0,6^{0,5})/(2+12) + (1^{0,5})/(3+12) + (0,6^{0,5})/(4+12) + (0,3^{0,5})/(5+12)
\end{aligned}$$

Aplicando o operador *min* no valor de pertinência, tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
f(A+B) = & 0,3/11 + 0,5/12 + 0,5/13 + 0,5/14 + 0,3/15 + 0,3/12 + 0,6/13 + 1/14 + \\
& 0,6/15 + 0,3/16 + 0,3/13 + 0,5/14 + 0,5/15 + 0,5/16 + 0,3/17
\end{aligned}$$

Aplicando o operador *max* sobre os valores duplicados que, obtem-se o resultado final:

$$f(A+B) = 0,3 / 11 + 0,5 / 12 + 0,6 / 13 + 1 / 14 + 0,6 / 15 + 0,5 / 16 + 0,3 / 17$$

Analisando o exemplo acima, verifica-se que o suporte do conjunto *fuzzy* resultante é maior do que os suportes dos conjuntos argumentos.

Para determinados casos, é conveniente realizar as operações mencionadas acima de forma analítica, quando, por exemplo, trabalha-se no domínio contínuo com funções de pertinência mais simples e conhecidas, como a trapezoidal ou triangular. Estas operações estão estreitamente ligadas às operações aritméticas intervalares, que é um ramo da matemática desenvolvido para lidar com o cálculo de tolerância (PEDRYCZ; GOMIDE, 1998).

As funções características de cada um dos intervalos obtidos, por meio das operações aritméticas intervalares, podem ser obtidas diretamente das respectivas operações para números reais pela aplicação do princípio de

extensão, que é a ferramenta utilizada para a obtenção das operações aritméticas dos números *fuzzy*.

Exemplo 2.1.6.2: Considere o subconjunto *fuzzy* A de números reais cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2); & \text{se } x \in [0,1] \\ 0; & \text{se } x \notin [0,1] \end{cases} \quad (31)$$

$$\text{Para } \alpha = 4x^2 + 4x \rightarrow 4x^2 + 4x - \alpha = 0. \quad (32)$$

Calculando a equação (32), obtêm-se $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-\alpha})$ e $\alpha_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\alpha})$, logo os α -níveis são os intervalos:

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\alpha}) \right]$$

Considere a função real $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$. Como f é crescente, verifica-se que

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= \left[f\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-\alpha})\right), f\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\alpha})\right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{4}(1-\sqrt{1-\alpha})^2, \frac{1}{4}(1+\sqrt{1-\alpha})^2 \right] \end{aligned}$$

O Gráfico 5 ilustra o subconjunto $\hat{f}(A)$.

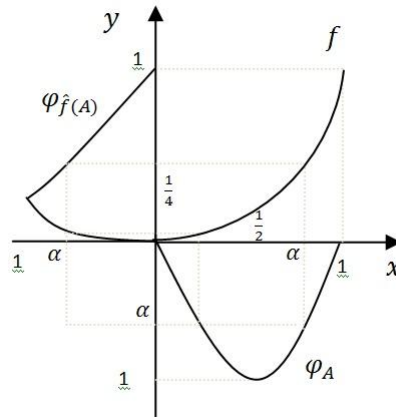


Gráfico 5 Subconjunto $\hat{f}(A)$ do exemplo 2.1.6.2

A seguir estão representadas as operações aritméticas entre intervalos aplicados sobre os α -níveis dos conjuntos *fuzzy* envolvidos.

Proposição 2.1.6.1: Sejam A e B números *fuzzy* definidos em um mesmo conjunto universo X , representados pelas respectivas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, com α -níveis dados, respectivamente por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$.

- A soma entre A e B é o número *fuzzy* $A + B$, podendo ser definida em função de seus respectivos α -níveis:

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_2^\alpha, a_2^\alpha + b_1^\alpha] = C^\alpha. \quad (33)$$

- A diferença entre A e B é o número *fuzzy* $A - B$, definidos em um mesmo universo X , é dada por:

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha] = C^\alpha. \quad (34)$$

- A multiplicação de λ por A é o número *fuzzy* λA , cujos α -níveis são:

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha], & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \quad (35)$$

- A multiplicação entre dois números *fuzzy* A e B especificados ambos em um mesmo conjunto universo, é também definida em função de seus α -níveis:

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [\min P, \max P], \quad (36)$$

onde $P = \{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}$.

- A divisão de A por B , se $0 \notin \text{supp } B$, é o número *fuzzy* cujos α -níveis são:

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha] \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha}\right]. \quad (37)$$

2.1.7 Controlador *fuzzy*

O controlador *fuzzy* é composto, basicamente, dos módulos de fuzzificação, base de regras, inferência e defuzzificação (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Na etapa de fuzzificação as entradas do sistema são modeladas por conjuntos *fuzzy* com seus respectivos domínios, é desejável que um especialista do fenômeno a ser modelado auxilie na formulação das funções de pertinência para cada conjunto *fuzzy* envolvido no processo.

A base de regras é um conjunto de regras *fuzzy* “Se-Então”, que tem como objetivo obter uma solução aproximada para um dado problema. Na lógica de tomada de decisão os valores de entrada são avaliados sob regras da base de conhecimento e é definida uma solução para o problema tratado.

A inferência é a etapa em que as regras são “traduzidas” e analisadas ao mesmo tempo por meio de técnicas da lógica *fuzzy*, resultando a criação de

novos conjuntos *fuzzy* dessa análise. Existem vários métodos de inferência e a escolha por um deles depende do sistema que está sendo analisado (BOAVENTURA, 2010). Entretanto, o método mais utilizado, pela sua simplicidade e por se adaptar muito bem aos controladores fuzzy, é o método de Mamdani (ORTEGA, 2001).

A defuzzificação é um procedimento que nos possibilita interpretar a distribuição de possibilidade da saída de um conjunto *fuzzy* de modo quantitativo, ou seja, fornece um valor numérico representativo que captura o significado essencial dessa distribuição de possibilidades. Existem muitas técnicas de defuzzificação e entre eles as mais utilizadas são: bissetor, centroide, média dos máximos, maior dos máximos e menores dos máximos (MAMDANI, 1974).

Este trabalho utiliza o método de defuzzificação centroide, também chamado de centro de gravidade ou média ponderada (38). Para calcular o valor representativo resultante da defuzzificação, este método considera toda a distribuição de possibilidade de saída do modelo, tendo como resultado a média das áreas que representam o grau de pertinência.

$$G(A) = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \varphi_A(x_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_A(x_i)}. \quad (38)$$

2.2 Métodos de obtenção de raízes de equações

A obtenção de raízes de equações é realizada via métodos de inversão de função. Os métodos mais utilizados são: Método da Bissecção, Secante e Newton Raphson (BENISRAE, 1966). Entretanto o método Newton Raphson é considerado o mais rápido com relação à convergência (KOH, 2006). Para execução deste método toma-se um ponto qualquer da função x_n , admitindo este

ponto como um valor de início, calcula-se a derivada da função $f'(x)$ e com a função $f(x)$, aplica-se o valor inicial na equação (39) calculando de forma iterativa. A representação matemática pode ser expressa na forma:

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} - \frac{f(x_{(n)})}{f'(x_{(n)})} \quad (39)$$

em que n indica a n -ésima iteração do algoritmo $f(x)$ é a derivada da função f em $x_{(n)}$.

Para que se obtenha sucesso na iteração deve-se primeiramente delimitar um intervalo, a fim de escolher um valor estimado inicial adequado, para que a convergência de $x_{(n)}$ seja propícia. Para tanto existem apenas quatro condições a serem satisfeitas (HARTMANN, 2005):

- O intervalo delimitado deve conter a raiz de f ;
- A função f deve ser diferenciável em todo o intervalo;
- A primeira derivada no intervalo não deve trocar de sinal;
- A segunda derivada no intervalo não deve trocar de sinal.

Uma vez delimitado um intervalo que cumpra tais exigências, escolhe-se para o valor inicial o ponto mais à esquerda se o produto da primeira pela segunda derivada for negativo, ou escolhe-se o ponto mais à direita se ocorrer o contrário, se o produto for positivo.

Para melhor entendimento do método suponha que se deseja obter a raiz da equação:

$0,5 = \cos(x)$, logo, igualando a zero, tem-se que $\cos(x) - 0,5 = 0$, assim $f(x) = \cos(x) - 0,5$. Calculando a derivada desta equação, tem-se que $f'(x) = -\text{sen}(x)$. Partindo do pressuposto que o valor inicial $x_{(0)}$ seja próximo de 0,8, adota-se esse valor como valor inicial; deseja-se uma precisão de 10^{-4} ,

ou de quatro casas decimais. Os valores das iterações, quando aplicado a forma representada matematicamente acima podem ser observados na Tabela 1:

Tabela 1 Demonstração das iterações até a convergência

$x_{(n)}$	Raíz calculada	Precisão
$x_{(0)}=0,8$	1,07421	0,27421
$x_{(1)}=1,07421$	1,04740	0,02681
$x_{(2)}=1,0474$	1,04720	0,00024
$x_{(3)}=1,0472$	1,04720	0,00000

Verifica-se que o sistema converge na terceira iteração, este cálculo equivale a $\cos^{-1}(0,5)$, uma vez que a calculadora se encontra em radianos.

Koh (2006) apresentou novos métodos para determinar um fator de relaxamento adequado do método de Newton Raphson para acelerar as características de convergência de uma análise de elementos não lineares. Nos métodos, o quadrado do resíduo da aproximação de Galerkin é sucessivamente aproximada a uma função quadrática utilizando os gradientes ou Métodos de Brent e um fator de relaxamento é determinado pela minimização da função quadrática até um fator de relaxamento ótimo ser obtido. A principal finalidade do algoritmo é melhorar as características de convergência quando se trata de elementos finitos em 3-D não lineares utilizando o método de Newton Raphson, este algoritmo combina a aproximação de uma função quadrática sucessiva do quadrado residual utilizando o método de Brent e encontra raízes de equações. Através de um exemplo numérico, o algoritmo desenvolvido é comparado ao método tradicional e conclui-se que requer um menor número de iterações, possibilitando ser efetivamente aplicado em um problema com grande processamento de dados.

Outro método de obtenção de raiz a ser referenciado é o método da bissecção. Para este método, suponha que f seja uma função contínua definida

no intervalo $[a, b]$ com $f(p)$ de sinais opostos. Pelo Teorema do Valor Intermediário (BURDEN; FAIRES, 2009) existe um número p em (a, b) com $f(p) = 0$. Embora o procedimento funcione também quando há mais de uma raiz no intervalo (a, b) , assumiu-se, para simplificação, que a raiz nesse intervalo seja única. O método exige uma contínua diminuição nos intervalos de $[a, b]$ a outros iguais à metade do anterior e, em cada passo, localizar qual dos meios intervalos contém p .

Para iniciar, considera-se $a_1 = a$ e $b_1 = b$, e toma-se p_1 como o ponto médio do intervalo $[a, b]$; isto é:

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}. \quad (40)$$

Para melhor entendimento, encontra-se a raiz na equação $f(x) = x * \sin(x)$, uma vez que esta raiz se encontra no intervalo $[4,71238898; 7,853981634]$, intervalos dados em x e deseja-se encontrar a coordenada x no ponto $f(x) = 1,81859$, conforme está ilustrado no Gráfico 6.

Para obtenção deste ponto adota-se A e B iniciais como os limites inferior e superior do intervalo, m como a média destes pontos ($M=(A+B)/2$), então aplica-se os valores de A , B e m na função $f(x) = x * \sin(x) - y$, onde y em que se deseja determinar seu x equivalente no sistema de coordenadas é 1,81859. Realizadas estas operações, determina-se qual o maior intervalo comparando $P(A)$ com $P(M)$ ou $P(B)$ com $P(M)$, em que uma vez obtido este intervalo, é calculado o erro, que seria $|A-B|$.

Deste modo, de acordo com a Tabela 2, o valor para a coordenada x quando $y = 1,81859$ será 6,5639.

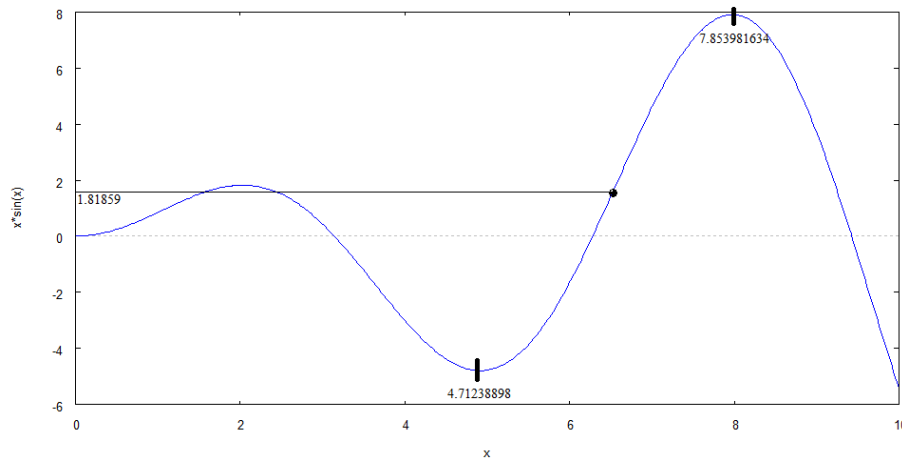


Gráfico 6 Obtenção de x no intervalo $[4,71238898; 7,853981634]$, dado que o ponto está na coordenada $f(x) = 1,81859$.

Tabela 2 Valores correspondentes ao método de bissecção que obtém convergência quando Erro $< 0,01$ após 10 iterações

N	A_n	B_n	M_n	$P(A_n)$	$P(B_n)$	$P(M_n)$	Erro
1	4,71239	7,85398	6,28318	-6,53098	6,03539	-1,81859	-----
2	6,28318	7,85398	7,06858	-1,81859	6,03539	3,17965	3,14159
3	6,28318	7,06858	6,67588	-1,81859	3,17965	0,736156	1,57080
4	6,28318	6,67588	6,57771	-1,81859	0,73616	0,090815	0,78540
...
9	6,55317	6,56544	6,55930	-0,07078	0,01001	-0,03039	...
10	6,55930	6,56544	6,56237	-0,03039	0,01001	0,01019	0,01227
11	6,56237	6,56544	6,56390	0,03039	0,01019	-0,00008	0,00614

3 METODOLOGIA

Para realização do trabalho, a princípio foi efetuada uma revisão bibliográfica sobre lógica *fuzzy* envolvendo especialmente o princípio de extensão de Zadeh, abordando aspectos teóricos e aplicações práticas a respeito dessa ferramenta, condicionando assim, maior conhecimento para desenvolvimento do programa e solução do problema proposto. Foram consultadas monografias, teses, dissertações, artigos nacionais e internacionais.

O objetivo principal do presente trabalho é a implementação computacional do princípio de extensão de Zadeh, por um método analítico, utilizando métodos de inversão de função. Assim foi obtido a imagem de conjuntos *fuzzy* através de uma função clássica, sem a necessidade de operações de máximos e mínimos e o resultado obtido, possibilitou a validação do método.

Na implementação computacional do sistema utilizou-se a linguagem de programação C++, cujas características são: linguagem livre, custo computacional relativamente baixo, de fácil entendimento. Na implementação computacional do programa, uma preocupação foi a eficiência do mesmo, uma vez que foram realizadas diversas operações matemáticas, e, se tratando de números *fuzzy*, eficiência é um dos fatores primordiais.

O programa desenvolvido foi validado utilizando uma aplicação real envolvendo as experiências da fenda única e da fenda dupla. Na simulação utilizou-se como fonte de luz coerente emitida, tal como o laser, e foi determinada a largura da fenda para que se produza determinado padrão de interferência, uma vez que a largura da fenda é tida como incerta para este padrão de interferência a ser considerado, e como esta incerteza manifesta-se no padrão de interferência.

3.1 Trabalhos realizados utilizando o princípio de extensão e nova proposta

O programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas possui a linha de pesquisa de controle e análise de sistemas *fuzzy*. Aplicações bem sucedidas demonstram que é possível implementar computacionalmente o princípio de extensão e validá-lo, desde que sejam levados em consideração os problemas de natureza numérica. Para validação destes sistemas foram utilizadas funções complexas, tais como uma série no processo de difusão e termodinâmica *fuzzy* (PIRES, 2010), oscilador harmônico unidimensional (MELO, 2009) e aplicações em funções aritméticas (LIMA, 2011).

Estes trabalhos utilizam o método tradicional, que consiste na obtenção de uma seqüência de conjuntos *fuzzy* conforme ilustra o Gráfico 7, que representa o processo gráfico do princípio de extensão aplicado a uma função oscilante $f(t) = \cos(\omega * t)$. Para este caso, ω é considerado um parâmetro incerto com incerteza em torno de 2, com limite inferior 0 e limite superior 4, satisfazendo assim a base da função de pertinência triangular. Essa função pode ser discretizada em N pontos no sentido de t , considerando o intervalo que abrange toda a base da função de pertinência.

Dessa forma utiliza-se a estrutura de dados vetor de registros contendo os pontos referentes a t , $f(t)$ e pertinência, os quais são associados aos pares para representar cada ponto nas três funções plotadas no Gráfico 7. Todavia, para diversos valores de $f(t)$ verificam-se dois valores de pertinência e isso não está de acordo com o princípio de extensão que afirma que o conjunto imagem resultante do princípio de extensão é outro número *fuzzy*.

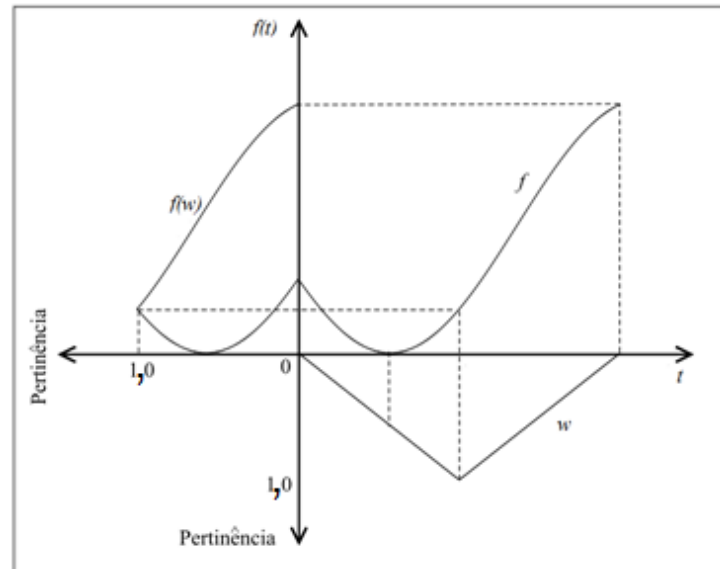


Gráfico 7 Processo gráfico da extensão de Zadeh. Obtenção da imagem $f(w)$ por meio de f para o instante 2.

Cada valor de $f(t)$ terá uma única pertinência que corresponde ao valor máximo entre as pertinências de um mesmo $f(t)$ conforme definição 2.1.3.1. O Gráfico 8 mostra o resultado desta operação, onde são descartadas as pertinências mínimas referentes ao $f(t)$ e mantidas as pertinências máximas.

Para funções deste tipo, é possível também interpretá-las de modo analítico, uma vez que o número *fuzzy* $f(w)$ obtido nada mais é do que o resultante da delimitação do intervalo entre os picos em máximo e mínimo ou mínimo e máximo em que a pertinência máxima se encontra, conforme é verificado no Gráfico 9.

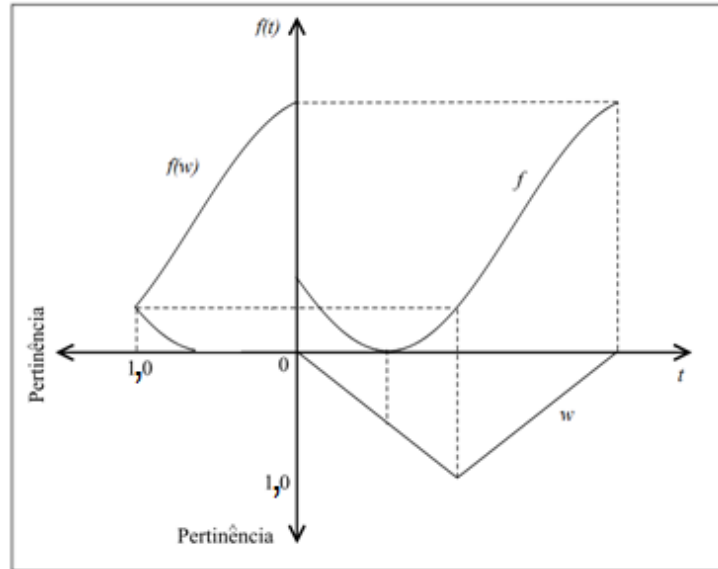


Gráfico 8 Número *fuzzy* $f(w)$ obtido após operação de máximos.

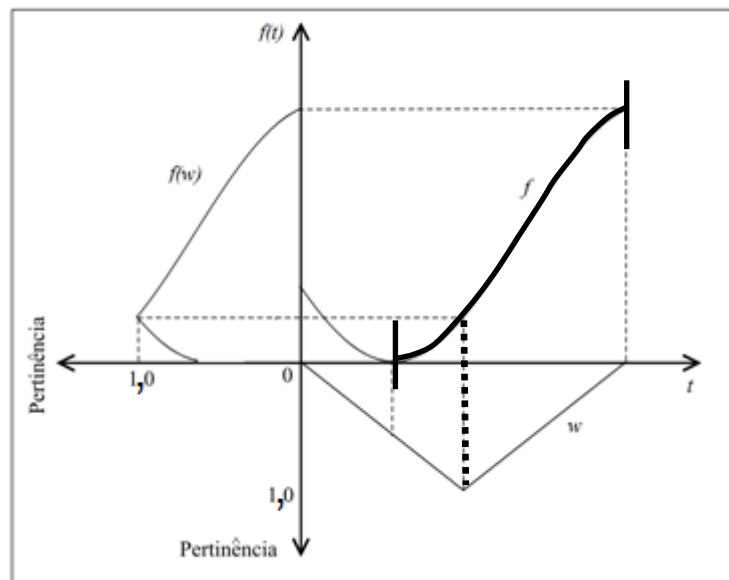


Gráfico 9 Obtenção do número *fuzzy* $f(w)$ obtido via delimitação de intervalo e determinação da função inversa

Para esta delimitação de intervalos de modo analítico, faz-se necessário discretizar os pontos em $f(t)$, e não em t , conforme princípio de extensão tradicional, uma vez que o $f(t)$ foi obtido pela delimitação do intervalo, em que, nestes picos obtemos o valor da coordenada $(t, f(t))$. Assim a discretização sucede por todo o intervalo entre o $f(t)$ no pico inferior e superior. Após esta discretização se faz necessário a obtenção do valor de t para cada $f(t)$ discretizado, ou seja, é necessário extrair uma raiz de uma função. Para concessão desta discretização utilizam-se métodos numéricos para obtenção de inversa de função, a proposta foi utilizar o método de Newton Raphson para funções de mesma amplitude, como $f(t) = \cos(\omega * t)$ por exemplo e método da Bissecção para funções de amplitudes diferentes, tal como $f(t) = \sin(\omega * t) / (\omega * t)$.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta decisões de implementação do algoritmo para resolução do princípio de extensão de modo analítico para funções que descrevam oscilações, sua aplicação utilizando a função seno, e aplicações para situações reais, como a difração de fendas.

É importante ressaltar que o algoritmo implementado necessita de alterações para que possa trabalhar com outras funções dessa natureza. Em contrapartida, conseguiu-se diminuir de modo bastante significativo o “ruído” nas defuzzificações dessas funções. O “ruído” é caracterizado pela deformação da função obtida na etapa de defuzzificação. Para que estas conclusões fossem consolidadas, os resultados obtidos na seção 4.1 foram comparados com Lima (2011) e Pires (2010).

4.1 Implementação computacional do princípio de extensão

Na implementação foi considerada a representação de uma função de pertinência triangular A , conforme pode ser vista no Gráfico 10, foram utilizadas as seguintes entradas no sistema: limite inferior (a), o valor de pertinência máxima (b), o limite superior (c), assim como o número de pontos a serem discretizados.

Exemplo 4.1: Considere a função, $f(x) = \text{sen}(x \cdot \omega)$. Adote que x será a variável a ser fuzzificada e ω será o parâmetro incerto (pertencente ao domínio dos conjuntos *fuzzy*) obtido a partir das entradas do sistema, onde vai ser uma função contínua dentro do intervalo entre o limite inferior e superior. Considere no Gráfico 11 que, os parâmetros de entrada da função foram: $a = 0,8$, $b = 1$ e $c = 1,2$, resultando em $\alpha_s = 0,2$, a variável a ser fuzzificada $x = 15$ e que fossem discretizados 15 pontos. Assim, para obtenção da solução utilizando o princípio

de extensão de modo analítico, considera-se que a pertinência máxima está em $f(x) = \text{sen}(15 * 1)$, ou seja, está em torno de $f(x) = \text{sen}(15)$ que resultaria $f(x) = 0,6502$.

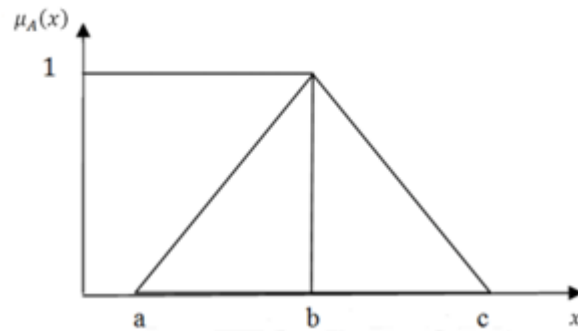


Gráfico 10 Função de pertinência com limite inferior (a), pertinência máxima (b) e limite superior (c)

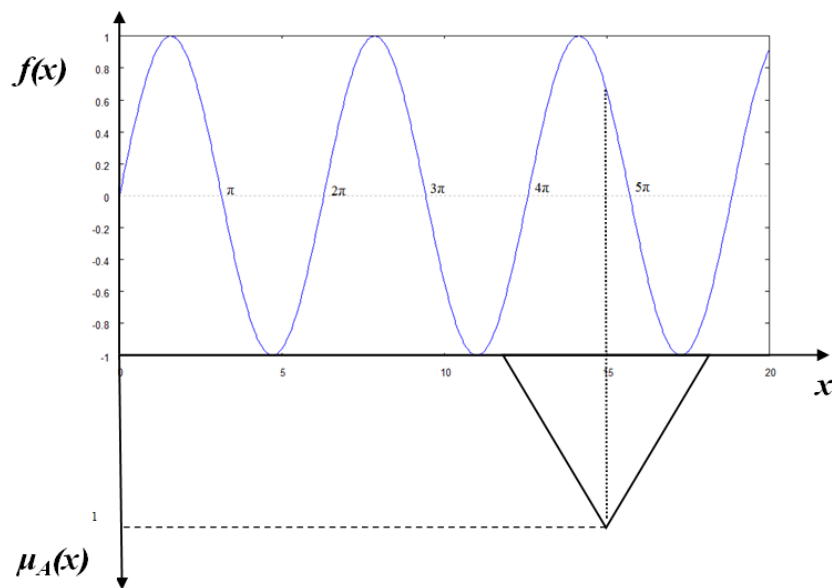


Gráfico 11 Figura representativa do exemplo 4.1

Fica clara a verificação que em $f(x)$, o valor 0,6502 está entre intervalos de 1 a -1 ou -1 a 1. Para obtenção de quais pontos ao longo de x existe neste intervalo, em que $f(x) = 0,6502$ e $x*b = 15$, foi elaborado uma função para obtenção dos mesmos. Essa função retorna um registro denominado “intervalo” contendo os campos limite inferior, limite superior e um contador de quantos intervalos foram procurados, de modo que este contador represente cada π contido no Gráfico 11.

Dessa forma pode-se obter os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) que representam o intervalo em que o par $(x*b, f(x))$ está contido. O próximo passo é determinar o intervalo entre os pontos com base no número de pontos a serem discretizados que corresponde ao conjunto suporte $S(A)$ do número *fuzzy* A . O número de pontos utilizados para este caso é determinado por:

$$\Delta = \frac{y_1 - y_2}{N - 1}. \quad (41)$$

No exemplo 4.1, como são 15 pontos a serem discretizados, e $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$ existe um intervalo de 0,142857 entre cada ponto, partindo do $y_1 = 1$ até $y_2 = -1$. Para determinação dos valores de “ $x*\omega$ ” para os valores de $f(x)$ discretizados, primeiramente verifica-se se o contador de π ($limites.npi$) é par ou ímpar. Para contador de π par, adota-se a seguinte fórmula:

$$x*\omega = limites.npi * \pi + \sin^{-1}(y). \quad (42)$$

Para contador ímpar, utiliza-se:

$$x*\omega = limites.npi * \pi - \sin^{-1}(y). \quad (43)$$

Assim, para o exemplo 4.1, determina-se que $limites.npi = 5$, $pi = 3,141593$ e utilizando o método de inversão de função Newton Raphson é determinada a Tabela 3 de partições em $f(x)$ baseadas na equação (43) :

Tabela 3 Partições de $f(x)$ e obtenção de “ $x*\omega$ ” via inversão de função

Pontos	$f(x)$	$x*\omega$
1	1	14,138076
2	0,857143	14,678266
3	0,714285	14,912360
4	0,571428	15,099717
...
12	-0,571428	16,316208
13	-0,714285	16,503566
14	-0,857143	16,737660
15	-1	17,278020

Após determinação dos “ $x*\omega$ ”, calculou-se a pertinência de cada elemento determinado acima, fornecendo a função de pertinência os valores “ a ”, “ b ”, “ c ” obtidos como entrada de dados e o valor de “ ω ” de cada elemento, que será determinado pelo “ $x*\omega$ ”/x. Desta forma, a função de pertinência retorna o valor de pertinência que este elemento pertence ao conjunto, denominado $\mu_A(\omega)$. O Gráfico 12 representa a obtenção do conjunto *fuzzy* representando a extensão da incerteza.

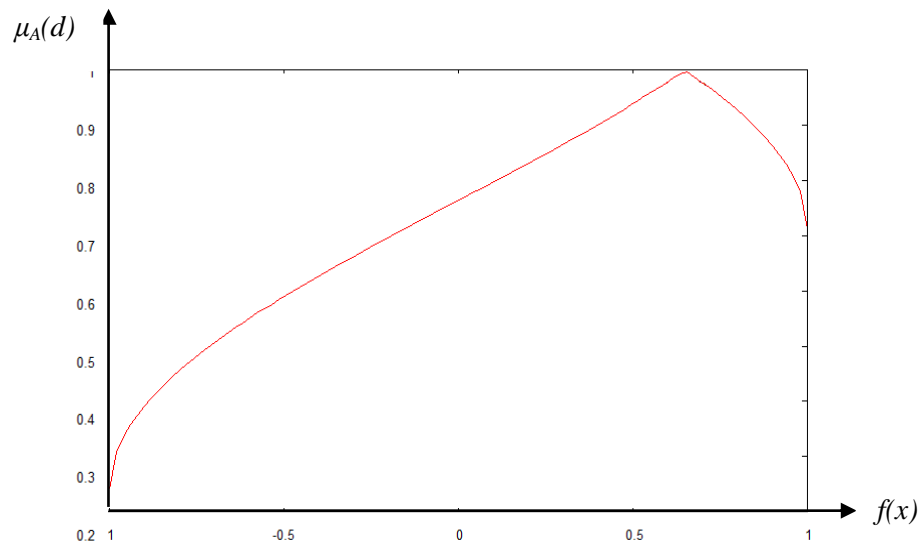


Gráfico 12 Representação da extensão do conjunto *fuzzy* em torno de 15.

O Gráfico 13 é resultado do agrupamento de todos os conjuntos *fuzzy* obtidos para variável *fuzzy* variando de 0 a 30, em intervalos de 0,01, parâmetros citados no exemplo 4.1. Este gráfico tem uma escala, onde os graus de pertinência representados na escala de cinza variam de 0 a 1. O tom de cor mais escuro representa os valores de $f(x)$, com pertinência máxima igual a 1 em determinado instante " $x*\omega$ ".

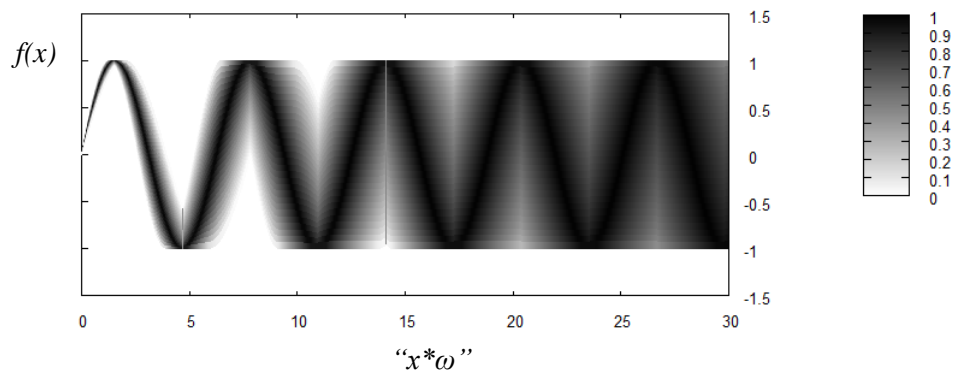


Gráfico 13 $f(x) = \text{sen}(x*\omega)$ para $\alpha_s = 0,2$.

Observa-se que, à medida que a função estende ao longo do eixo “ $x*\omega$ ”, ocorrem maiores concentrações de incertezas, sendo que, estas se tornam mínimas quando este eixo se aproxima de zero.

Nota-se que para cada valor de x , existem diferentes valores de $f(x)$, e todos esses valores de $f(x)$ possuem pertinências diferentes, o que representa todos os valores de x sujeitos a incertezas no parâmetro ω .

Para determinação de um único valor de $f(x)$ para cada x , se faz necessário realizar a etapa de defuzzificação, etapa previamente citada na seção 2.1.7. Neste trabalho, foi utilizado o método de defuzzificação centroide, para determinação dos valores de $f(x)$ estimados com parâmetro incerto ω próximo de 1, conforme mostra o Gráfico 14. Para demonstrar a homogeneidade da função, sem ruídos este gráfico é ilustrado na coordenada x até o instante 50, diferente do Gráfico 13.

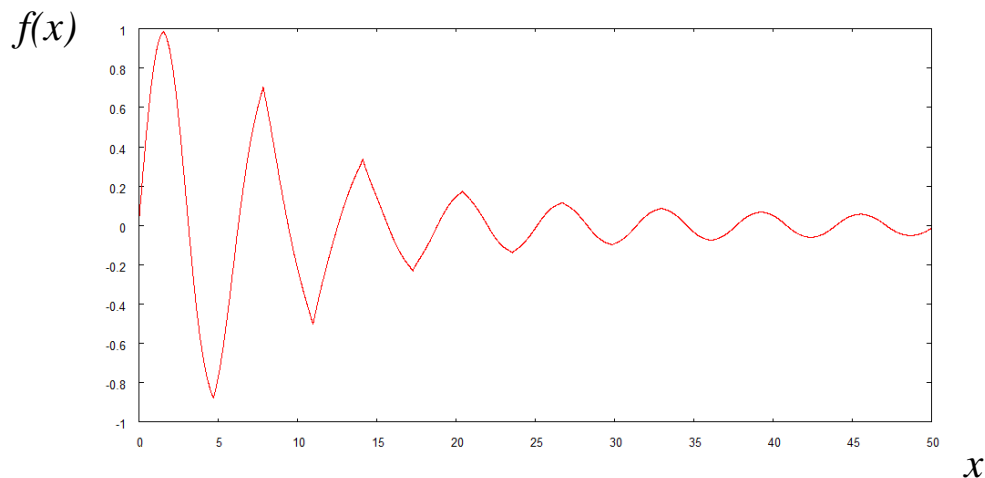


Gráfico 14 $f(x) = \text{sen}(x)$ com parâmetro incerto ω próximo de 1 após defuzzificação.

Com este método, será obtido a extensão da incerteza do parâmetro “ ω ” a cada valor de “ $f(x)$ ” sem a necessidade de operação de obtenção de máxima pertinência. A ideia desse método, para este caso de função de mesma amplitude e fase, tais como, funções seno e cosseno, é que se trabalhe com todos os pontos a serem discretizados. Esse método é diferente do método do princípio de extensão tradicional, onde à medida que surge a necessidade de realizar operação de máximos, os pontos são eliminados, observando assim, um intervalo Δ bem maior que este método realiza. Desse modo para um “ $x*\omega$ ” maior, existe “ruído” nos conjuntos *fuzzy*, e em alguns casos dificulta o trabalho quando se estende essa aplicação para dados reais. Uma comparação entre os dois métodos pode ser vista no Gráfico 15. Este gráfico compara o resultado defuzzificado do princípio de extensão tradicional e via método de inversão de função, denominado “Extensão Analítica” (método implementado).

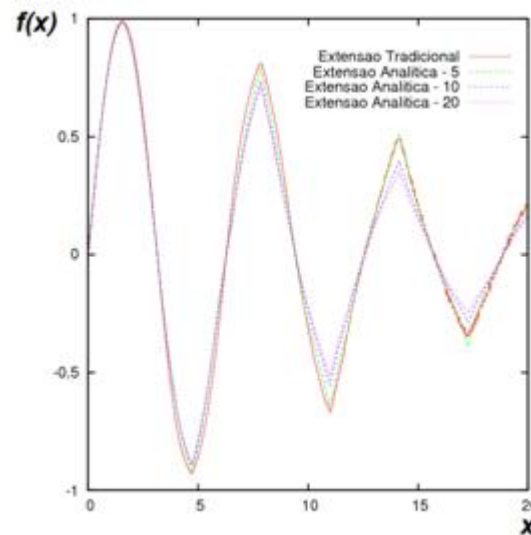


Gráfico 15 Comparação método princípio de extensão tradicional e obtenção da extensão analítica (via inversa de função) com 5, 10 e 20 números de pontos discretizados.

Observa-se que em relação às linhas referentes à obtenção da inversa, quanto mais pontos forem discretizados, mais “amortecida” torna-se a função.

4.2 Descrição do algoritmo

Para realização do trabalho, construiu-se um algoritmo para solucionar o princípio de extensão de Zadeh, de modo analítico. Na implementação computacional desse algoritmo foi adotada a linguagem de programação C++. Para melhor entendimento do algoritmo, foi adotada a notação algorítmica em forma de diagrama de blocos (Figura 2) para ilustração e, posteriormente, a explicação das principais funcionalidades do programa.

O Gráfico 16, representando a função $y = \sin(8,5*\omega)/(8,5*\omega)$ será utilizado como modelo para demonstração do funcionamento do algoritmo para funções com amplitudes diferentes.

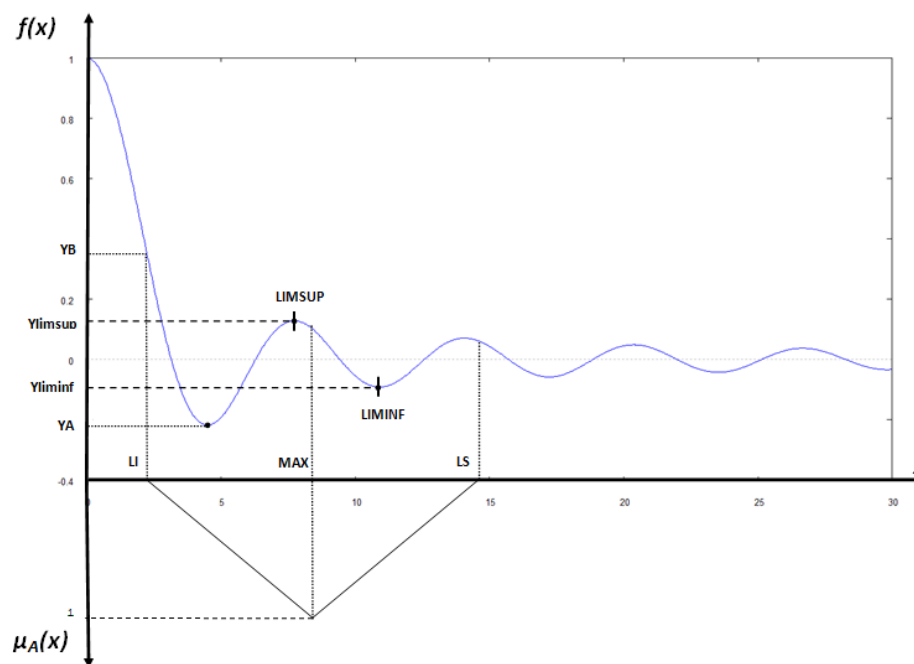


Gráfico 16 Representação da função $f(x) = \sin(8,5*\omega)/(8,5*\omega)$.

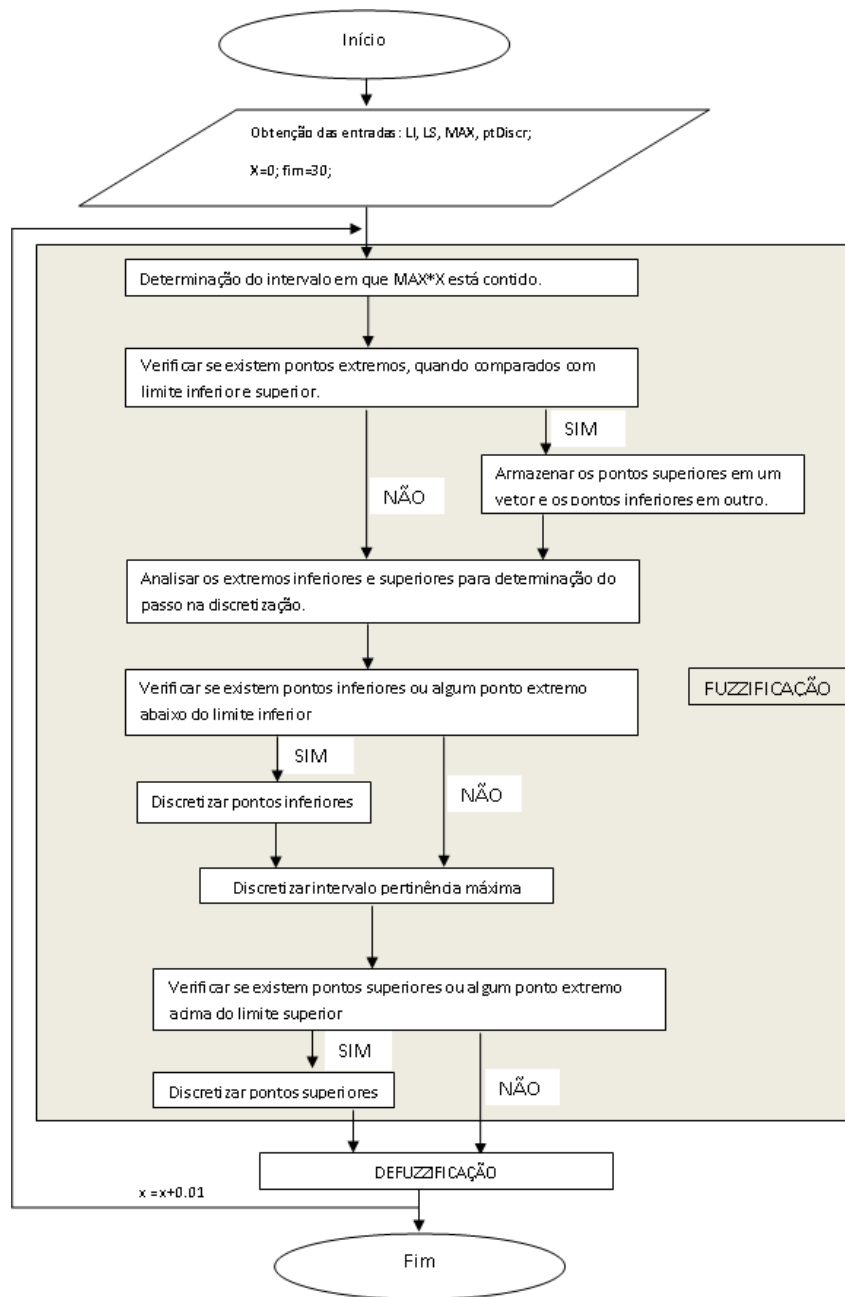


Figura 2 Figura representativa do algoritmo implementado.

1. Obtenção dos dados de entrada: para implementação da função de pertinência triangular, utilizou-se as seguintes entradas: Limite inferior (LI), Limite superior (LS), pertinência máxima (MAX) e número de pontos a serem discretizados (ptDiscret). Dada a função, $f(x)=\sin(x*\omega)/(x*\omega)$, x será a variável a ser fuzzificada, onde será acrescido incerteza a esta variável, aqui representada por ω . A incerteza, inicialmente, abrange o intervalo entre LI, com pertinência 0, MAX com pertinência 1, e LS também com pertinência 0. A variável x irá alterar ao passo de 0,01 entre 0 e 30, estendendo-se assim, ao longo de todo o eixo x . No Gráfico 16 foi demonstrado um exemplo para um passo, com x valendo 8,5, com LI=0,27 e MAX=1 e LS=1,73 e ptDiscret=10. Na etapa 2 inicia-se o processo de fuzzificação.
2. Determinação do intervalo em que X*MAX está contido: nesta etapa do algoritmo, são analisados os pontos extremos da função, com a finalidade de encontrar os extremos, inferior (LIMINF) e superior (LIMSUP) em que X*MAX está contido, para então mapear este intervalo à imagem função. Para análise de pontos extremos foi aplicado o método iterativo de Newton Raphson, onde o valor de x_0 inicial é um valor “próximo” do ponto extremo da função que se espera encontrar. Na obtenção dos resultados, este método utiliza os valores da primeira e segunda derivada da função a ser verificada, e adota-se como critério de parada um valor limite para convergência da função. Por fim, após a obtenção de LIMINF e LIMSUP, é possível calcular os valores para a coordenada $f(x)$, calculando respectivamente, Yliminf e Ylimsup.

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} - \frac{f'(x_{(n)})}{f''(x_{(n)})}. \quad (44)$$

3. Verificação se existem pontos extremos, quando comparados com LIMINF e LIMSUP: determinado o intervalo, para funções de amplitude diferente, é necessário verificar se entre LI e LS existem pontos extremos (de máximo e/ou de mínimo). Além dos limites LIMINF e LIMSUP obtidos na etapa 2, observa-se no Gráfico 16, que existem outros pontos extremos de função além do LIMINF e LIMSUP dentro do intervalo da base da função de pertinência LI e LS. Portanto existe um trecho da função (neste caso, um ponto de mínimo) que também deverá ser mapeado à imagem da função, a variável que representa este ponto de mínimo é YA. Pontos como este devem ser armazenados em um vetor de pontos extremos inferiores da função, e, caso existam pontos superiores, devem ser armazenados em outro vetor para discretização em etapa posterior.
4. Análise dos extremos inferiores e superiores para determinação do passo na discretização: nesta etapa analisa-se o eixo $f(x)$, para determinação do passo, aqui denominado Δ , que é o intervalo entre um ponto e seu adjacente. Voltando ao Gráfico 16, percebe-se que existe um valor extremo superior, na coordenada $f(x)$, representado por YB. Utiliza-se o número de pontos a serem discretizados ($ptDiscret$) para obtenção do Δ , utilizando a fórmula (45):

$$\Delta = \frac{YA - YB}{ptDiscret - 1}. \quad (45)$$

5. Verificação se existem pontos inferiores, ou algum ponto extremo abaixo do LIMINF: aqui é verificado se existem pontos abaixo do LIMINF, onde será analisado se existe algo no vetor de pontos inferiores. Também pode ocorrer de não se chegar a um ponto extremo, mas estar abaixo do LIMINF ou de algum ponto extremo inferior. Após esta análise, é realizada a discretização com base no Δ . No Gráfico 16, existe um ponto extremo inferior, o qual a discretização se inicia em YA até um ponto imediato antes de Yliminf no

sentido crescente da coordenada x , uma vez que nesta direção a pertinência é maior.

6. Discretização de pontos no intervalo da pertinência máxima (LIMINF e LIMSUP): esta etapa é responsável pela discretização dentro do intervalo obtido no passo 1, sempre é executada, podendo ser discretizada ao longo de todo o intervalo, ou não. Caso a verificação da etapa 5 seja positiva, o próximo ponto dentro deste intervalo será calculado pela subtração do último ponto discretizado antes de Y_{liminf} pelo Δ . Se a verificação da etapa 5 for negativa, o início da discretização sucederá a partir do primeiro ponto localizado nesta etapa.
7. Verificação se existem pontos superiores, ou algum ponto extremo acima do LIMSUP: é realizado de modo similar a etapa 5, porém, neste caso, a análise se acontece para pontos acima do LIMSUP. Esta etapa é executada caso existam pontos extremos no vetor de pontos superiores, ou mesmo que não seja ponto extremo superior, mas esteja acima do LIMSUP ou do último ponto extremo do vetor, quando comparado à coordenada $f(x)$. Para situação verdadeira, o primeiro ponto dentro deste intervalo será calculado pela subtração do último ponto obtido na etapa 6 pelo Δ . Para o Gráfico 16, a discretização ocorre até o YB. Vale ressaltar que se não existir pontos superiores a Y_{limsup} , é desnecessária a execução desta etapa. Finalizada essa etapa, a etapa de fuzzificação estará concluída. O resultado da fuzzificação pode-se visualizar no Gráfico 17.
8. Defuzzificação: para cada valor de x , existem diferentes valores de $f(x)$, porém é necessário um valor representativo de $f(x)$. O método de defuzzificação centroide é utilizado para obtenção deste valor representativo, considerando a pertinência e o valor de $f(x)$.

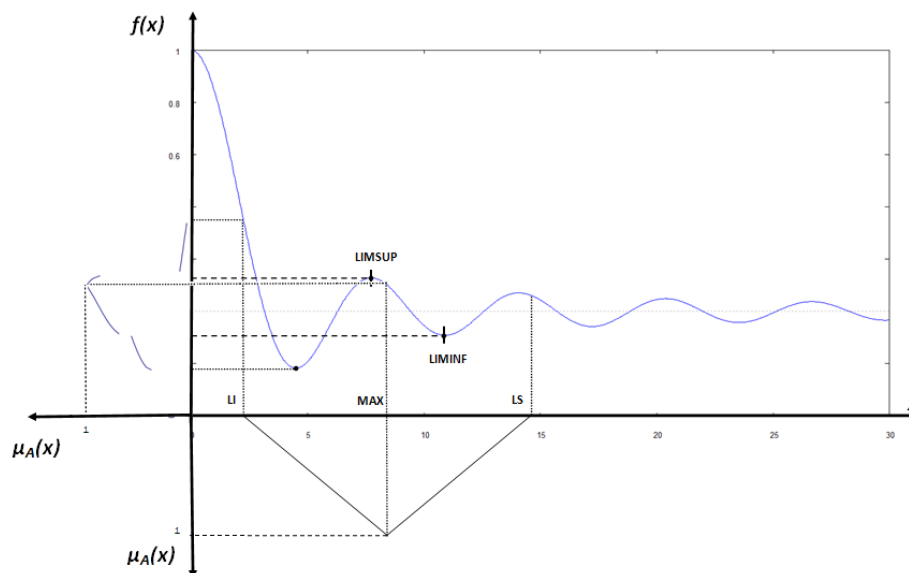


Gráfico 17 Extensão da função referente ao Gráfico 16.

4.3 Aplicações - Difração produzida por fendas

A luz, quando proveniente de uma fonte puntiforme, incide sobre algum contorno retilíneo, a periferia da sombra projetada sobre um plano nunca é perfeitamente retilínea. Observa-se que algumas ondas surgem na área da sombra, e na área iluminada podem surgir franjas claras e escuras. Isto se deve ao fato de que quando uma luz passa por uma abertura, ela não se comporta precisamente de acordo com o modelo de propagação retilínea fornecido pela óptica geométrica. A explicação é que a luz possui características ondulatórias, e, a superposição de muitas ondas luminosas caracteriza o fenômeno da difração.

A formação de figura com franjas claras e franjas escuras acontece pela incidência da luz sobre uma, ou um conjunto de fendas. A medida das intensidades dessas franjas pode ser descrita por uma função, uma vez que o comprimento de onda da luz incidente seja conhecido. Assim, um fator determinante para este fato é o tamanho da abertura da fenda. A largura da fenda

representa uma incerteza, uma vez que quanto menor for a abertura, mais estreita será a fase da função, se afastando da função definida para a determinação do padrão de difração. A fronteira para obtenção dessa informação pode ser considerada incerta, de modo que seja definida por meio de propriedades subjetivas ou atributos imprecisos. É precisamente neste tipo de incerteza que a lógica *fuzzy* tem dado suas principais contribuições.

Para determinar amplitudes e intensidades na difração de fendas, os dados são aplicados a funções. Considerando o parâmetro tamanho da abertura da fenda como incerto, o princípio de extensão se apresenta como ferramenta para aplicar neste parâmetro argumentos *fuzzy*, onde este argumento descreve a distribuição de possibilidade do argumento na função. Assim, o objetivo desta seção é demonstrar aplicações da lógica *fuzzy* através do princípio de extensão a funções relacionadas à difração produzida por uma fenda única e por fenda dupla.

4.3.1 Difração produzida por fenda única

Esta seção apresenta a difração produzida por uma fenda simples, no qual a figura de difração é formada por um feixe colimado (raios paralelos) de luz monocromática quando ele emerge de uma fenda estreita e comprida, como indica o Gráfico 18. Essa dimensão estreita da fenda é denominada largura.

Observa-se no Gráfico 18 que o feixe de luz se espalha verticalmente depois de passar pela fenda. A figura de difração formada sobre a tela é constituída por uma franja brilhante central, cuja largura pode ser maior do que a largura da fenda, seguida em ambos os lados por uma sequência de franjas claras e escuras, as quais diminuem quando elas se afastam do centro. Cerca de 85% da potência do feixe transmitido está concentrado na franja central. A formação da figura de difração tem relação com uma função, conforme pode ser observado,

em que a medida que se afastam do centro, e as amplitudes diminuem, os máximos (franjas brancas) perdem intensidade.

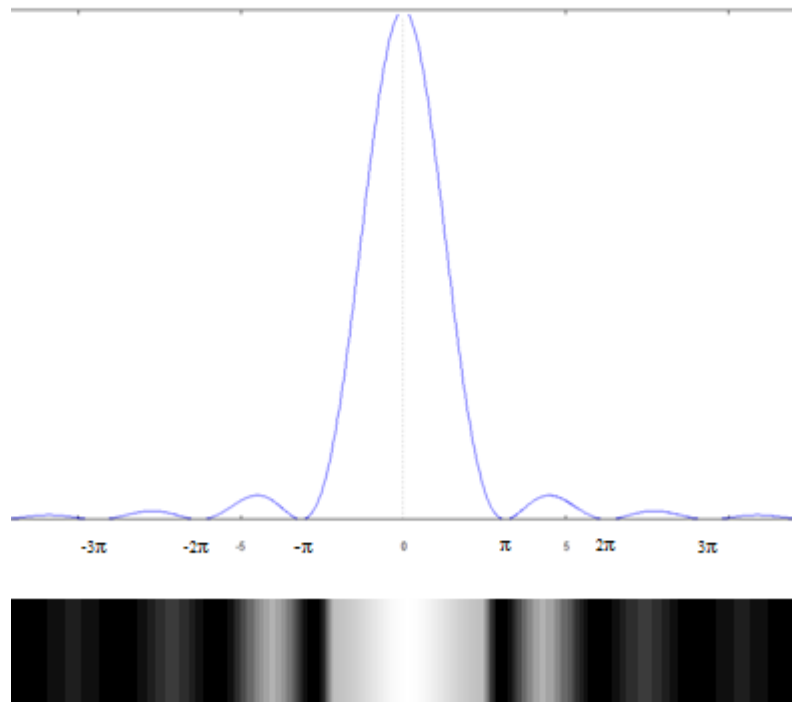


Gráfico 18 Espectro de difração de uma fenda única.

Analisando a função, nota-se que o primeiro mínimo ocorre quando o argumento do seno do numerador for π , isto implica que o primeiro mínimo ocorrerá no ângulo θ dado por:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\lambda}{a}. \quad (46)$$

Isto implica que quanto menor a abertura da fenda, e maior o comprimento de onda, maior será a abertura angular do espectro de difração.

Todavia, para descrição analítica das imagens, ou padrões de difração, estes são obtidos por construções geométricas, que se baseiam no parâmetro abertura da fenda, de modo que se consideram algumas situações:

a) $a \gg \lambda$ (a abertura da fenda é bem maior que o comprimento de onda). Neste caso $\text{sen}(\theta) \ll 1$, ou seja, o ângulo é muito pequeno. Isto significa que os raios de luz (ou de outra onda qualquer) praticamente não se desviam do seu caminho inicial e a imagem, que produz a abertura no ecrã, é simplesmente a projeção geométrica da abertura.

b) $a \geq \lambda$ (a abertura da fenda é um valor maior ou igual ao comprimento de onda). Esse é o caso em que o efeito da difração é o mais importante, o qual será tratado mais adiante nesta seção. Para situações em que se feche a fenda (diminuir “a”) a imagem desta fica mais larga (ver o Gráfico 19 (b)), em vez de diminuir, como no caso anterior. Como o comprimento de onda da luz é da ordem de centenas de nanômetros (a luz verde, por exemplo, tem $\lambda \approx 550 \text{ nm} = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$), esta situação realiza-se só com as aberturas de algumas frações de milímetros. O fenómeno de alargamento da imagem é muito importante não por si só (devido ao fato de que todos os instrumentos ópticos devem ter em conta a difração), mas também para a física quântica, porque mostra como funciona o princípio da incerteza de Heizenberg.

c) $a < \lambda$ (a abertura da fenda é menor que o comprimento de onda). Matematicamente esta situação não deve ser possível porque com estes valores de abertura $\text{sen}(\theta) > 1$. A interpretação física disto é que os objetos cuja dimensão é inferior ao comprimento de onda da onda incidente não afetam a propagação de onda no espaço. É como se estes não existissem. Uma fenda, nessa situação, não deixa passar luz.

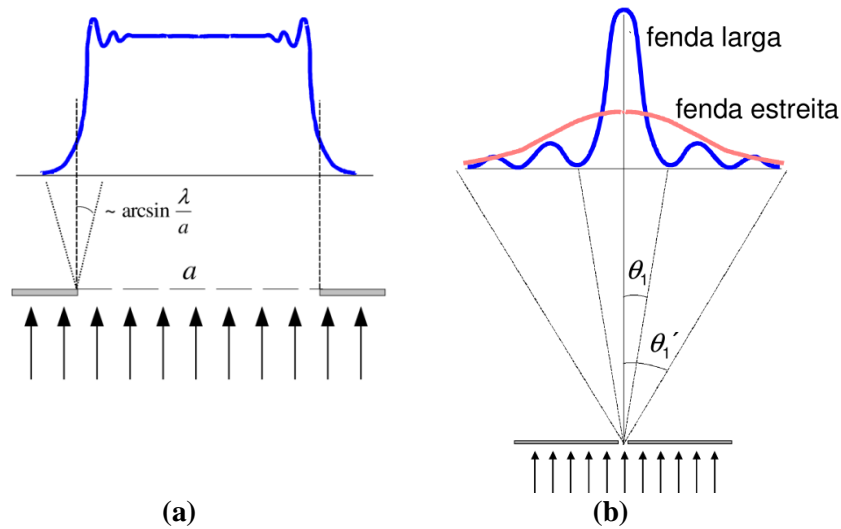


Gráfico 19 (a) Quando a largura da fenda é bem maior que o comprimento de onda. (b) Situação em que a largura da fenda é maior ou igual ao comprimento de onda.

4.3.1.1 Aplicação do princípio de extensão na determinação da amplitude na figura de difração

A amplitude na difração de fenda única pode ser deduzida pelo método de soma de fasores, para detalhes consultar Young e Freedman (2004). Neste método, a amplitude E_p do campo elétrico resultante é dada por:

$$E_p = E_0 \frac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2}. \quad (47)$$

A diferença de fase β pode ser expressa em termos de grandezas geométricas. A diferença de caminho entre o raio proveniente do topo da fenda e o raio que sai do meio da fenda é igual a $\left(\frac{a}{2}\right) \text{sen}(\theta)$. A diferença de caminho

entre o raio proveniente do topo da fenda e o raio que sai da extremidade inferior da fenda é igual ao dobro desse valor, logo:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{sen}(\theta). \quad (48)$$

O princípio de extensão pode ser aplicado na equação (47), complementada pela equação (48), considerando a abertura da fenda como um parâmetro incerto para obtenção da amplitude na difração de fenda única. A equação resultante das equações (47) e (48), com o parâmetro incerto “ ω ” aplicado a abertura da fenda “ a ” é descrita a seguir:

$$E_p = E_0 \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi \text{sen}(\theta)(a * \omega)}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \text{sen}(\theta)(a * \omega)}{\lambda}}. \quad (49)$$

Para aplicação do algoritmo implementado, foi considerado um feixe de luz de laser de 633 nanômetros incidindo sobre uma fenda estreita única. A figura de difração foi formada sobre uma tela situada a uma distância de 6 metros da fenda. Este exemplo para a aplicação foi adaptado de um exemplo de Young e Freedman (2004).

Como o comprimento de onda é muito menor do que a abertura “ a ” da fenda, o valor de θ na equação (49) costuma ser tão pequeno que $\text{sen}(\theta) \approx \theta$, (onde θ é dado em radianos). Dado que a distância entre duas franjas escuras é 0.003 m, então o valor de θ em radianos pode ser calculado pela equação (50):

$$\theta = \frac{y_m}{x}. \quad (50)$$

Onde y_m é a distância entre duas franjas escuras e x é a distância da fenda até a tela onde é formada a imagem. Deste modo o valor de θ é $5 * 10^{-4}$.

Então a equação a ser aplicada no algoritmo para se determinar a amplitude pode ser descrita da forma (51):

$$E_p = E_0 \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi 5 * 10^{-4}(a * \omega)}{6,33 * 10^{-7}}\right)}{\frac{\pi 5 * 10^{-4}(a * \omega)}{6,33 * 10^{-7}}}. \quad (51)$$

A equação (51) foi aplicada no algoritmo implementado, considerando o valor da abertura da fenda “a”, variando de $1 * 10^{-5}$ m até $1 * 10^{-2}$ m. Assim, este parâmetro varia ao passo de $1 * 10^{-5}$, até $1 * 10^{-2}$, de modo que se obtenha um conjunto *fuzzy* para cada valor de abertura da fenda. Este conjunto *fuzzy* é obtido acrescentando uma incerteza ao parâmetro abertura da fenda, denominado “ ω ”, próximo de 1, com um número *fuzzy* triangular de base $\alpha_s = 0,2$, seguindo a função:

$$\mu_A(\omega) = \begin{cases} 0; & \text{se } \omega \leq 0,8 \\ \frac{\omega-0,8}{0,2}; & \text{se } \omega \in [0,8; 1] \\ \frac{1,2-\omega}{0,2}; & \text{se } \omega \in [1; 1,2] \\ 0; & \text{se } \omega \geq 1,2 \end{cases} \quad (52)$$

Esse processo é denominado fuzzificação, em que é obtida a imagem que descreve a função que representa a amplitude, conforme é representado no Gráfico 20.

O Gráfico 20 mostra o resultado da fuzzificação para a equação (51). Observa-se que, para cada valor de β , existem diferentes valores da intensidade E_p , sendo cada um destes valores com a sua respectiva pertinência. Isso representa o quanto de E_p é compatível ao conjunto dos valores esperados de E_p sujeitos a incerteza no parâmetro ω .

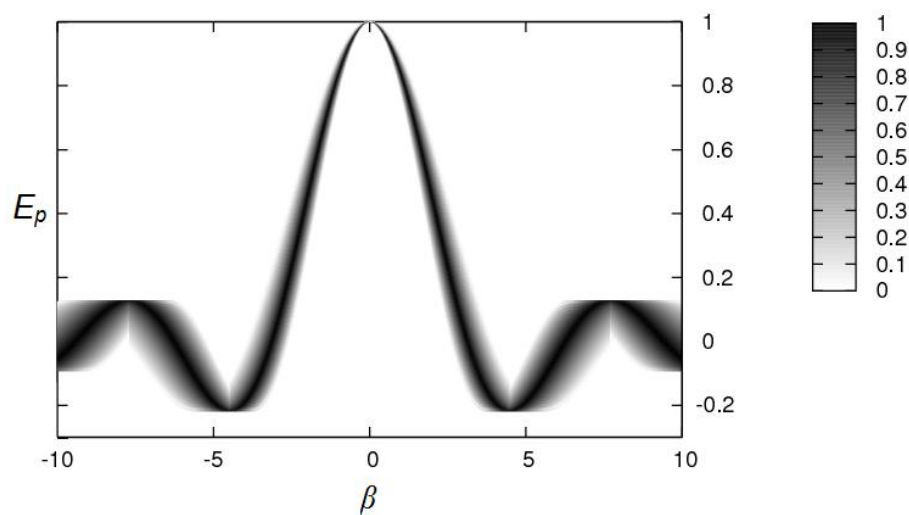


Gráfico 20 Resultado da fuzzificação para a amplitude com $\alpha_s = 0,2$.

Para um maior detalhamento do Gráfico 20, faz-se necessário um movimento na figura para que seja possível ver o conjunto *fuzzy* referente a cada valor de β , formando uma imagem tridimensional do gráfico (Gráfico 21).

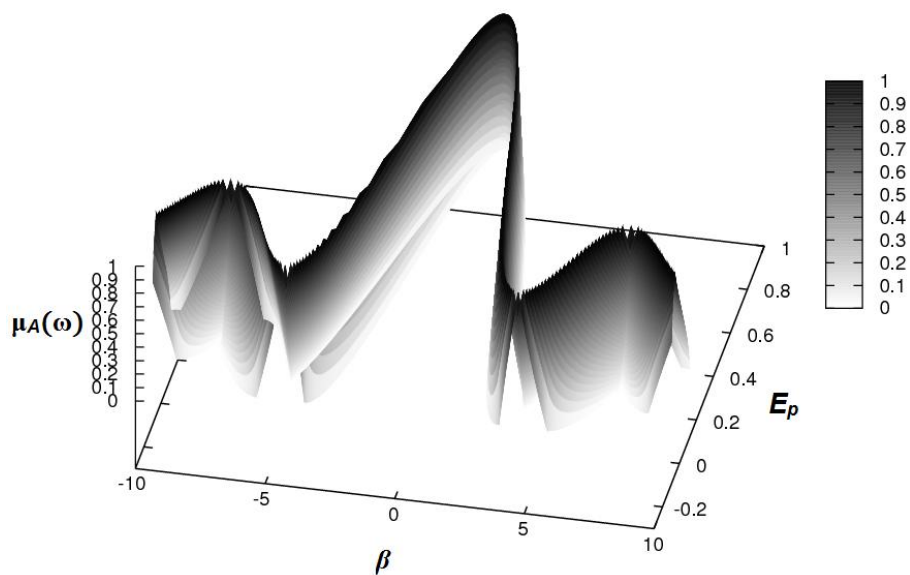


Gráfico 21 Visão tridimensional do Gráfico 20.

Entretanto, o objetivo de todos os sistemas baseados em lógica *fuzzy* é que exista um valor representativo como resposta. Para que se atinja este objetivo, é necessária a aplicação de um método de defuzzificação. O método centroide foi utilizado para a obtenção dos valores de E_p com parâmetro ω “próximo” de 1, conforme ilustra o Gráfico 22.

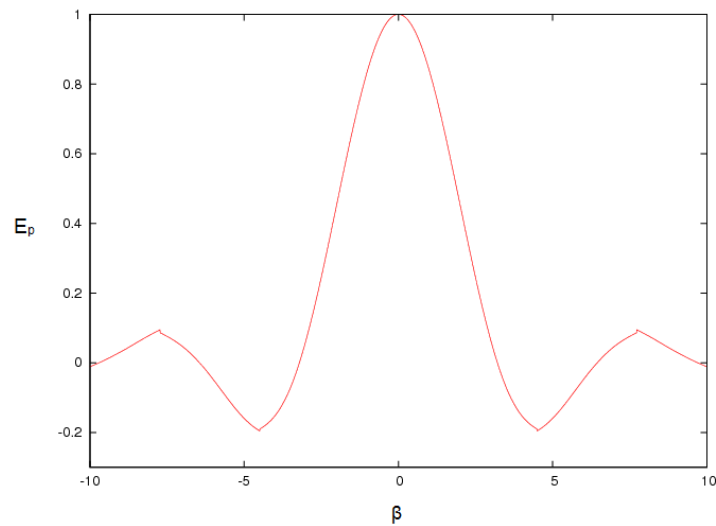


Gráfico 22 Resultado da defuzzificação pelo método centroide para $\alpha_s = 0,2$.

Também foi feita uma análise para $\alpha_s = 0,1$. Para este α_s , nota-se que o “borrão” é menor quando comparado com $\alpha_s = 0,2$, isto ocorre pelo fato de haver menos incerteza. O Gráfico 23 representa o resultado da fuzzificação para $\alpha_s = 0,1$.

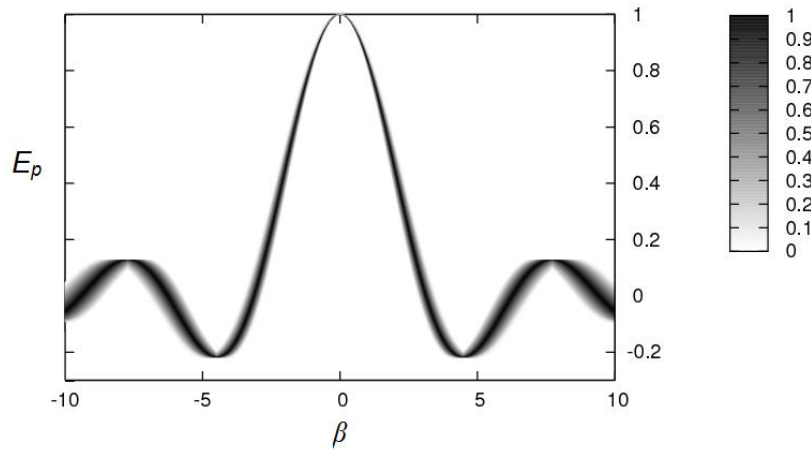


Gráfico 23 Resultado da fuzzificação para a amplitude com $\alpha_s = 0,1$.

A comparação entre a defuzzificação para $\alpha_s = 0,2$, para $\alpha_s = 0,1$ e o resultado clássico, com $\alpha_s = 0$, pode ser feita sobrepondo os três gráficos, como indica o Gráfico 24.

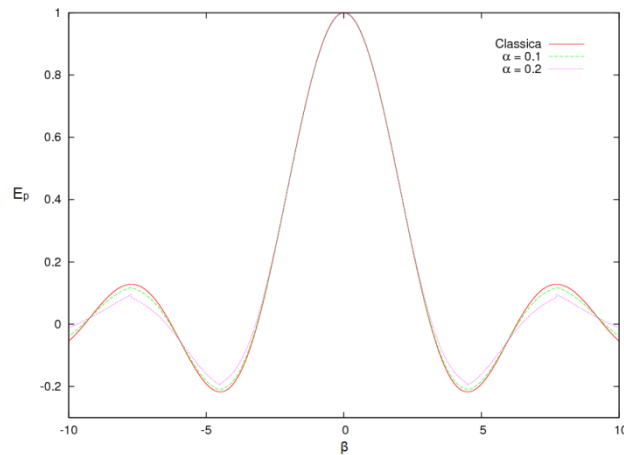


Gráfico 24 Sobreposição do resultado da defuzzificação para $\alpha_s = 0,2$, $\alpha_s = 0,1$ e função clássica.

Observa-se no Gráfico 24, que para incerteza $\alpha_s = 0,1$, o resultado do gráfico para este valor se aproxima do resultado clássico. Já para uma incerteza

maior, com $\alpha_s = 0,2$, o resultado fica mais distante dos valores clássicos. Essa análise leva ao indício que o processo de fuzzificação ficou bem estruturado.

Nota-se também que à medida que β se afasta de 0, a incerteza aumenta, isto se deve ao conjunto *fuzzy* triangular, onde a incerteza se torna mais relevante à medida que β se distancia de 0 e, quanto mais distante, maior se tornará a incerteza. É fácil perceber que a função com maior incerteza está mais amortecida, significando que a amplitude para esta função será inferior em relação às demais funções.

4.3.1.2 Aplicação do princípio de extensão na determinação da intensidade na figura de difração

A fenda de largura “ a ” infinita na direção longitudinal é iluminada por uma onda homogênea de intensidade I_0 . A distribuição de irradiâncias após a fenda em função do ângulo que o vetor posição do ponto de observação faz com a normal à fenda é dada pelo quadrado da amplitude, dada pela equação (47).

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2. \quad (53)$$

De modo análogo ao processo para obtenção da equação da amplitude (51), pode ser feito agora para determinar a equação da intensidade da figura de difração para ser aplicada ao algoritmo:

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{\pi 5 * 10^{-4} (a * \omega)}{6,33 * 10^{-7}} \right)}{\frac{\pi 5 * 10^{-4} (a * \omega)}{6,33 * 10^{-7}}} \right]^2. \quad (54)$$

Os Gráficos 25, A e B, mostram os gráficos da intensidade na função que descreve a figura de difração, acrescida de incerteza, cujos α_s são 0,1 e 0,2 respectivamente.

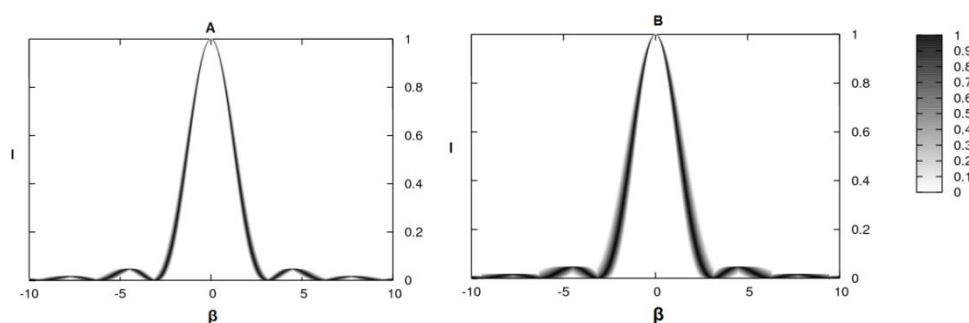


Gráfico 25 Resultado da fuzzificação da equação (54), para A: $\alpha_s = 0,1$ e B: $\alpha_s = 0,2$.

Analisando o Gráfico 25, observa-se que para um determinado ponto na coordenada β , quando comparado os Gráficos 25-A e 25-B, os “borrões” são maiores para uma incerteza maior, no caso para $\alpha_s = 0,2$. Esta observação leva a conclusão que os “borrões” diminuem à medida que diminui-se a incerteza, sendo que, para $\alpha_s = 0$, o resultado clássico é obtido. O resultado da defuzzificação pode ser observado no Gráfico 26.

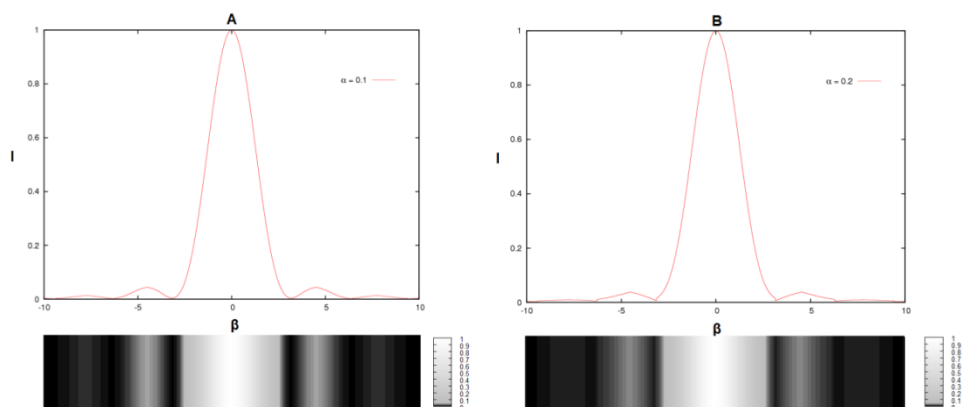


Gráfico 26 Resultado da defuzzificação pelo método centroide e distribuição de intensidade na figura de difração de fenda única para A: $\alpha_s = 0,1$ e B: $\alpha_s = 0,2$.

Para obtenção da figura de intensidade na difração de fenda única, é necessário aplicar ao algoritmo uma funcionalidade para que ajuste o resultado da defuzzificação. Essa funcionalidade consiste em replicar o valor de cada coordenada (I, β) em um número determinado de vezes e plotar o resultado utilizando tons de cinza para que seja representada a figura de difração.

Nota-se que as intensidades dos mínimos laterais nos Gráficos 26-A e 26-B diminuem rapidamente, como também indica no Gráfico 18, entretanto os Gráficos 26 foram obtidos com acréscimo de incerteza ao parâmetro abertura da fenda. Observa-se também que na difração, à medida que se afasta do centro as franjas que eram claras tendem a ficar escurecidas, uma vez que foi aplicada incerteza para obtenção desta figura, e quanto mais distante do centro, maior será a incerteza.

O aumento da incerteza no Gráfico 26-B, quando comparado ao Gráfico 26-A, leva a observar uma tonalidade mais escura no Gráfico 26-B. Isto se deve ao fato que à medida que aumenta o grau de incerteza, as tonalidades da figura de difração tendem a escurecer, fazendo com que as intensidades dos máximos da figura de difração diminuam. Desta forma, o aumento de incerteza leva a uma figura de difração de menor intensidade de luz, onde pode ser observado com maior nitidez a partir do máximo por volta de $\beta = 5$.

4.3.2 Difração produzida por fenda dupla

Um arranjo semelhante pode ser feito para se observar a difração de fenda dupla. O efeito da difração observado quando a luz passa por cada uma das fendas é o mesmo discutido na seção 4.3.1, mas o resultado final em qualquer direção depende da diferença de caminho entre as duas contribuições. Devido às fendas possuírem larguras finitas, os picos da figura de interferência

de fenda dupla são modulados pela figura de difração característica da largura de cada fenda. O Gráfico 27 representa a configuração formada pelas duas fendas de largura “ a ” separadas por uma distância “ $d=4*a$ ”, considerando as duas larguras das fendas finitas e iguais. A expressão para a intensidade nesta figura é dado por (55):

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[\frac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2. \quad (55)$$

Onde, como ocorre de modo similar a equação (47):

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \text{sen}(\theta). \quad (56)$$

$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \text{sen}(\theta). \quad (57)$$

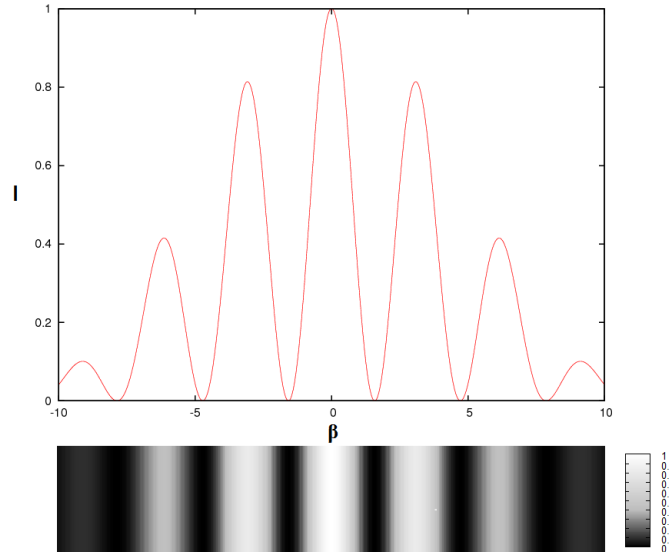


Gráfico 27 Espectro de difração de uma fenda dupla, considerando $d = 4*a$.

Nota-se no Gráfico 27 que, à medida que se afasta da franja brilhante central da figura formada pelas duas fendas, a intensidade dos máximos vai diminuindo. Quanto mais estreitas forem as fendas, mais largo será o máximo central da figura de difração da fenda dupla, como indica o Gráfico 19 (b) e mais lenta será a diminuição de intensidade de um máximo de interferência para o máximo seguinte.

4.3.2.1 Aplicação do princípio de extensão na determinação da intensidade na figura de difração de fenda dupla

A equação (55), complementada pelas equações (56) e (57), pode ser aplicada ao algoritmo implementado. Considerando também a o valor referente à distância entre as fendas igual a quatro vezes o valor da abertura da fenda, a equação a ser aplicada ao princípio de extensão, com parâmetro incerto ω , é descrita como:

$$I = I_0 \cos^2 \left[\frac{\pi (a * \omega)}{\lambda} \text{sen}(\theta) \right] \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{\pi (a * \omega)}{4 \lambda} \text{sen}(\theta) \right)}{\left(\frac{\pi (a * \omega)}{4 \lambda} \text{sen}(\theta) \right)} \right]^2. \quad (58)$$

Os dados do exemplo descrito na seção anterior foram utilizados nesta seção, desta vez, considerando a aplicação para uma fenda dupla.

O Gráfico 28 mostra o resultado da fuzzificação, onde, para cada instante, pode-se observar o parâmetro abertura da fenda com diferentes possibilidades na escala de 0 a 1. Nota-se que à medida que se afasta do centro o “borrão” aumenta, visto que a incerteza aumenta tanto para o caso A, quanto para o caso B. Os picos de interferência da intensidade de fenda dupla continuam nas mesmas posições em que se encontravam quando foi analisada a

difração de fenda única, porém, para fenda dupla, a intensidade de máximo é maior. É fácil de verificar observando a amplitude dos máximos.

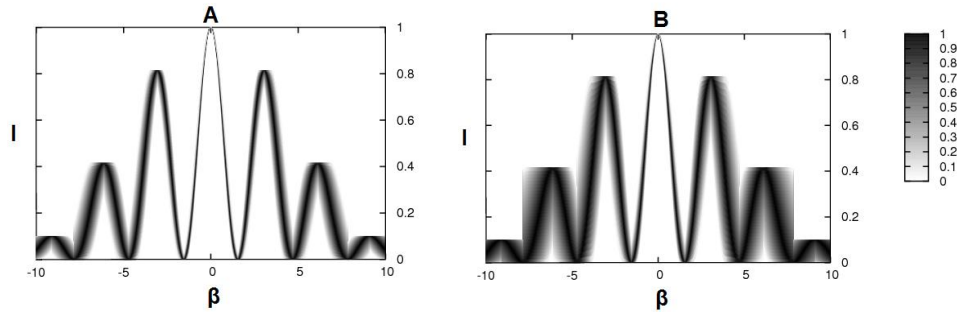


Gráfico 28 Resultado da fuzzificação da equação (55), para A: $\alpha_s = 0,1$ e B: $\alpha_s = 0,2$.

A fim de se encontrar uma curva representativa para as funções com os diferentes alfa-níveis, foi utilizado o método de defuzzificação centroide, cujos resultados são mostrados no Gráfico 29.

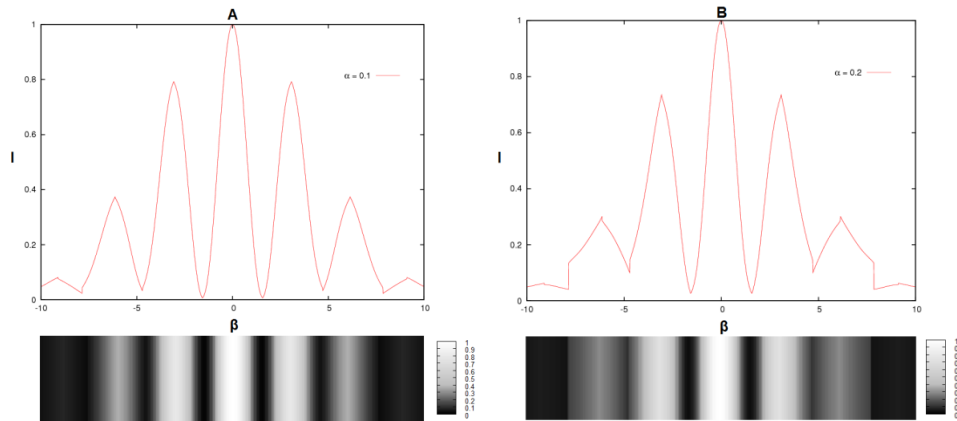


Gráfico 29 Resultado da defuzzificação e intensidade de difração da fenda dupla baseada no gráfico de difração, para A: $\alpha_s = 0,1$ e B: $\alpha_s = 0,2$.

A imagem obtida com fenda dupla mostra manchas de luz bastante largas, quando comparadas à fenda única. O acréscimo de incerteza à abertura da fenda permite notar que as manchas de luz vão escurecendo, e quanto maior o α_s ,

mais escura será a figura de difração. Sabendo-se que os máximos de luminosidade formam-se em pontos em que todas as ondas têm mesma fase, se existe incerteza na fase, logo se chega à conclusão observada no Gráfico 29, onde o Gráfico 29-B está com menos luminosidade que o Gráfico 29-A, por apresentar um α_s maior. A sobreposição dos gráficos 29, comparada com a função clássica pode ser observada no Gráfico 30.

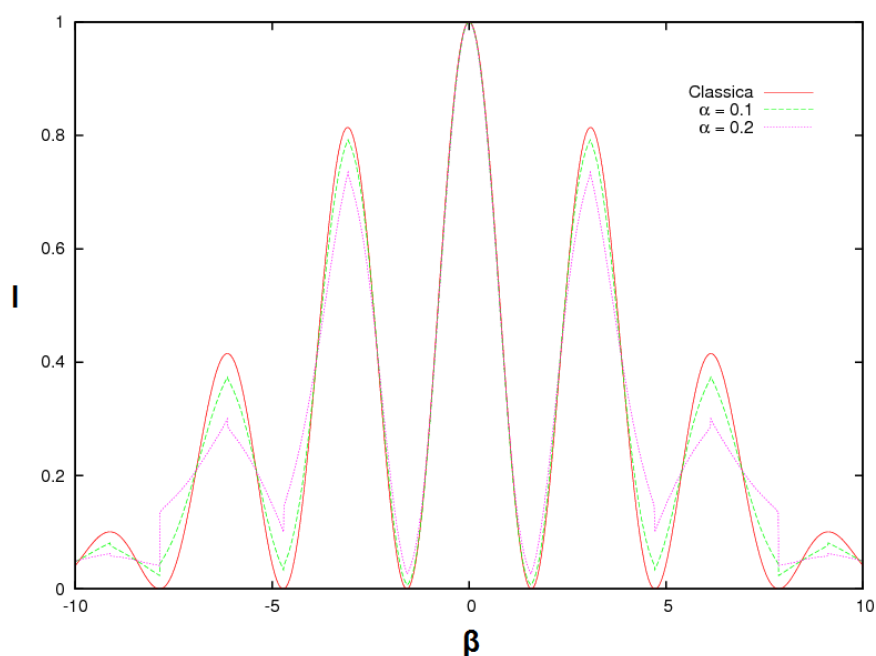


Gráfico 30 Comparação da função clássica com as defuzzificações para $\alpha_s = 0,1$ e $\alpha_s = 0,2$.

Percebe-se que quanto maior a incerteza aplicada à função, menor a intensidade de máximo, e também é menor a intensidade de mínimo, o que permite consolidar o fato da figura de difração com maior incerteza possuir menor luminosidade.

4.3.2.2 Comparação entre os métodos de defuzzificação centroide e *simpson rule*

Com a finalidade de verificar se o método de defuzzificação centroide foi adequado ao trabalho, foi realizada a defuzzificação utilizando o método *simpson rule* (regra de simpson).

Esta regra consiste na aproximação da função contínua $f(x)$, por exemplo, no intervalo $[a, b]$ por uma função de segunda ordem, ou seja, na aproximação de uma curva por uma parábola. A fórmula para a integral tem a forma:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (59)$$

Na notação utilizada, $x_0 = a$, $x_2 = b$ e x_1 é um ponto equidistante de x_0 e x_2 .

Analisando o Gráfico 31, pode-se observar que o resultado da defuzzificação, utilizando os dois métodos está próximo. Isso leva a concluir que o método centroide foi adequado na etapa de defuzzificação.

O Gráfico 32 mostra a diferença percentual entre os métodos de defuzzificação, baseando no método de simpson. Nota-se que nos picos de mínimo o percentual de maior diferença é referente ao método de simpson, chegando a um valor próximo de 5%, e nos pontos de máximo o percentual maior obtido pelo método centroide, com percentual chegando a 1,5%.

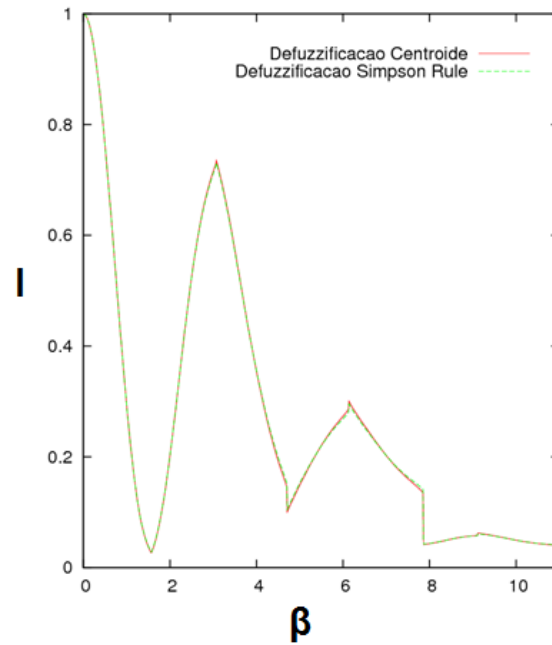


Gráfico 31 Comparação entre métodos de defuzzificação centroide e *simpson rule*.

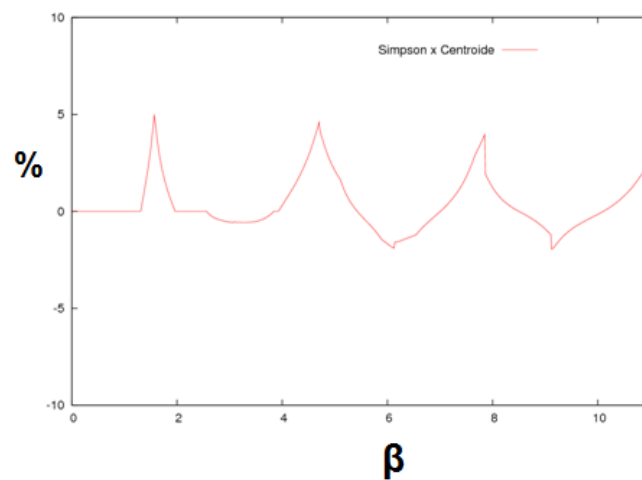


Gráfico 32 Diferenças percentuais comparando os métodos de defuzzificação centroide e *simpson rule*.

5 CONCLUSÕES

Para funções que descrevem oscilações, é possível implementar o princípio de extensão de forma analítica, utilizando métodos numéricos de obtenção de raízes de equações. Os resultados obtidos através da implementação desta ferramenta, permitem concluir que estes resultados são passíveis de serem aplicados em situações reais. A aplicação desta nova metodologia na obtenção da figura de difração da fenda dupla permite concluir que à medida que se diminui a incerteza, o resultado tende a se aproximar do resultado clássico. Desta forma, pode-se concluir que o processo de fuzzificação ficou bem estruturado, uma vez que para cada valor de abertura da fenda (valor clássico) é encontrado um número *fuzzy* correspondente.

Pode-se concluir também que a discretização dos conjuntos *fuzzy* na coordenada $f(x)$, e o fato de não haver operação de máximos possibilitaram uma significativa diminuição do ruído na etapa de defuzzificação.

Como trabalho futuro, pretende-se melhorar a ferramenta, por meio da criação de interface com o usuário. Também seria interessante aplicar esta ferramenta em outros processos físicos com funções que descrevam oscilações, como, por exemplo, o oscilador harmônico.

REFERÊNCIAS

- BANDO, F. M. **Sistemas Fuzzy e aproximação universal**. 2002. 70 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Campinas, Campinas, 2002.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Campinas: IMECC-UNICAMP, 2006. 354 p.
- BENISRAE, A. A newton-raphson method for solution of systems of equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 15, n. 2, p. 243-252, Aug. 1966.
- BOAVENTURA, I. A. G. **Números fuzzy em processamento de imagens digitais e suas aplicações na detecção de bordas**. 2010. 218 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009. 736 p.
- CAMPOS FILHO, P. **Método de apoio à decisão na verificação da sustentabilidade de uma unidade de conservação, usando lógica Fuzzy**. 2004. 211 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- CASTANHO, M. J. P. et al. Modelo matemático *fuzzy* para descrever o crescimento do câncer de próstata. **Revista de Biomatemática**, Campinas, v. 15, n. 15, p. 41-50, ago. 2005.
- HARTMANN, S. A remark on the application of the Newton-Raphson method in non-linear finite element analysis. **Computational Mechanics**, Berlin, v. 36, n. 2, p. 100-116, Feb. 2005.

JAFELICE, R. S. M. **Modelagem *fuzzy* para dinâmica de transferência de soropositivo para HIV em doença plenamente manifesta**. 2004. 187 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

KOH, C. S. Convergence acceleration of the Newton-Raphson method using successive quadratic function approximation of residual. **IEEE Transactions on Magnetics**, New York, v. 42, n. 4, p. 611-614, Aug. 2006.

LIMA, F. P. **Ferramenta computacional *fuzzy* para aplicações do princípio de extensão de Zadeh em funções aritméticas**. 2011. 93 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

MAMDANI, E. H. Applications of *Fuzzy* algorithms for control of a simple dynamic plant. **Proceedings of the IEEE**, New York, v. 121, n. 12, p. 1585-1588, 1974.

MELO, G. J. A. **Princípio de extensão de Zadeh aplicado a funções não monótonas com dois parâmetros *fuzzy***. 2009. 80 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2009.

OLIVEIRA JÚNIOR, H. A. **Lógica difusa: aspectos práticos e aplicações**. Rio de Janeiro: Interciência, 1999. 192 p.

ORTEGA, N. R. S. **Aplicação da teoria de conjuntos *fuzzy* a problemas da biomedicina**. 2001. 152 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to *Fuzzy sets***. Chicago: MIT, 1998. 295 p.

PIRES, D. M. **Implementação computacional do princípio de extensão de Zadeh**. 2010. 59 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.

REZNIK, L. **Fuzzy controllers**. Melbourne: Victoria University of Technology, 1997. 287 p.

SHAW, I. S.; SIMÕES, M. G. **Controle e modelagem Fuzzy**. São Paulo: E. Blücher, 1999. 200 p.

TANAKA, K. **An introduction to fuzzy logic for practical applications**. New York: Springer, 1997. 154 p.

YANG, X. et al. A study on *Fuzzy* reasoning mechanism based on extension principle. **IEEE Transactions on fuzzy Systems**, San Antonio, v. 1, p. 185-190, May 2000.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, A. R. **Física IV**. 10. ed. São Paulo: Pearson, 2004. 426 p.

ZADEH, L. A. *Fuzzy sets*. **Information and Control**, Berkeley, v. 8, n. 1, p. 338-353, 1965.