

RAFAEL AUGUSTO DE MELO

**ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS *LATTICE* PARA PRECIFICAÇÃO DE
OPÇÕES DO MERCADO FINANCEIRO**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do curso de Ciência da Computação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador

Prof. Msc. Rudini Menezes Sampaio

Co-Orientador

Prof. Dr. Luiz Gonzaga de Castro Junior

Lavras
Minas Gerais - Brasil
2005

RAFAEL AUGUSTO DE MELO

**ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS *LATTICE* PARA PRECIFICAÇÃO DE
OPÇÕES DO MERCADO FINANCEIRO**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de
Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras
como parte das exigências do curso de Ciência da Compu-
tação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da
Computação.

Áreas de Concentração
Derivativos, Métodos *Lattice*

Orientador
Prof. Msc. Rudini Menezes Sampaio

Co-Orientador
Prof. Dr. Luiz Gonzaga de Castro Junior

Lavras
Minas Gerais - Brasil
2005

RAFAEL AUGUSTO DE MELO

**ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS *LATTICE* PARA PRECIFICAÇÃO DE
OPÇÕES DO MERCADO FINANCEIRO**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de
Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras
como parte das exigências do curso de Ciência da Compu-
tação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da
Computação.

Aprovada em 28 de Junho de 2005

Prof. Msc. Luciano Mendes dos Santos

Prof. Dr. André Luiz Zambalde

Prof. Msc. Rudini Menezes Sampaio
(Orientador)

Prof. Dr. Luiz Gonzaga de Castro Junior
(Co-Orientador)

Lavras
Minas Gerais - Brasil

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	CONCEITOS PRELIMINARES	3
2.1	Derivativos	3
2.2	Retorno	3
2.3	Volatilidade	4
2.4	Opções	4
2.5	Prêmio	4
2.6	Data de Vencimento	5
2.7	Preço de Exercício	5
2.8	Valor Intrínseco	5
2.9	Fatores que afetam os preços das Opções	5
3	MODELO DE BLACK E SCHOLES	7
3.1	Análise	7
3.2	Solução da equação de Black e Scholes	9
4	MÉTODO BINOMIAL	10
4.1	Determinação de p , u , e d	11
4.2	Árvore de Preços de Ações	12
4.3	Determinando o Preço das Opções	12
4.4	Opções Européias	13
4.5	Opções Americanas	14
4.6	Exemplos	14
5	MÉTODO TRINOMIAL	16
5.1	Construindo a Árvore de Preços de Ações	17
5.2	Determinando o Preço das Opções	17
5.3	Exemplos	18
6	OPÇÕES COM BARREIRAS	20
6.1	Opções com barreiras	20
6.2	Cálculo de Opções Americanas com Barreiras Através do Método Binomial	20
6.2.1	Barreiras Simples (<i>cap</i> ou <i>floor</i>)	20
6.2.2	Barreiras <i>knock-out</i>	21
6.2.3	Barreiras <i>knock-in</i>	22
6.3	Cálculo de Opções Americanas com Barreiras Através do Método Trinomial	23
6.3.1	Barreiras Simples (<i>cap</i> ou <i>floor</i>)	23

6.3.2	Barreiras <i>knock-out</i>	23
6.3.3	Barreiras <i>knock-in</i>	24
6.4	Cálculo de Opções Europeias com Barreira	25
6.5	Ajuste dos nós sobre as barreiras	25
7	METODOLOGIA	27
8	RESULTADOS E DISCUSSÃO	29
8.1	Opções Europeias	29
8.2	Opções Americanas	29
8.3	Opções com barreiras	30
8.3.1	Cap ou Floor	30
8.3.2	knock-out	30
8.3.3	knock-in	30
8.3.4	Gráficos	31
9	CONCLUSÃO	38
10	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	39

Lista de Figuras

4.1	Oscilação do preço da ação no intervalo δt , sob o modelo binomial	10
4.2	Árvore utilizada para precificar uma opção	13
4.3	Árvore binomial com preços do ativo-objeto	15
4.4	Árvore binomial com preços da <i>put</i> europeia	15
4.5	Árvore binomial com preços da <i>put</i> americana	15
5.1	Oscilação do preço da ação no intervalo δt , utilizando o modelo trinomial	16
5.2	Árvore Trinomial utilizada para determinar os preços do ativo-objeto	17
5.3	Árvore trinomial com preços do ativo-objeto	19
5.4	Árvore trinomial com os preços da opção europeia	19
5.5	Árvore trinomial com os preços da opção americana	19
8.1	Opção europeia avaliada pelos métodos binomial e trinomial, avaliando convergência para o resultado de Black e Scholes	31
8.2	Opção europeia avaliada pelos métodos binomial e trinomial	31
8.3	Opção americana avaliada pelos métodos binomial e trinomial	32
8.4	Opção americana avaliada pelos métodos binomial e trinomial	32
8.5	Opção americana com barreira <i>Cap</i> avaliada pelos métodos binomial e trinomial	33
8.6	Opção americana com barreira <i>Cap</i> avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.41	33
8.7	Opção americana com barreira <i>Cap</i> avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.42	34
8.8	Opção americana com barreira <i>Knock-Out</i> avaliada pelos métodos binomial e trinomial	34
8.9	Opção americana com barreira <i>Knock-Out</i> avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.41	35
8.10	Opção americana com barreira <i>Knock-Out</i> avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.42	35
8.11	Opção americana com barreira <i>Knock-In</i> avaliada pelos métodos binomial e trinomial	36
8.12	Opção americana com barreira <i>Knock-In</i> avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.41	36
8.13	Opção americana com barreira <i>Knock-In</i> avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.42	37

Dedico este trabalho a Deus, que sempre esteve ao meu lado, mesmo nos momentos em que falhei com Ele. À minha família, que me deu a oportunidade de chegar até aqui.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado sabedoria, forças e paciência para finalizar não somente este trabalho, mas todo o curso de graduação.

Aos meus pais, Antônio Carlos e Maria da Aparecida, e ao meu irmão, Gabriel, pelo apoio incondicional durante todos os momentos do curso. Independentemente da situação lá estavam eles me incentivando. Agradecimento este extensivo a todos os familiares.

Aos professores Rudini e Luiz Gonzaga, pela amizade e pela orientação.

Aos amigos de república, que foram minha família durante este período como "forasteiro" na cidade de Lavras.

Aos professores do Departamento de Ciência da Computação da UFLA, por tudo o que aprendi durante o curso.

A todos aqueles, que de alguma forma, foram especiais para mim. Alguns amigos ajudaram transmitindo conhecimento, outros através de orações ao Deus Todo Poderoso, outros, apenas a amizade já os tornou pessoas marcantes em minha vida.

Minhas considerações a todos vocês, e que Deus os abençoe.

Abstract

The concept of option comes from the negotiable right of buying or selling an asset with a predetermined future price. The option pricing, which consists in determining the premium (price), is a crucial problem the option theory tackles with. In an attempt to solve this problem, one of the most used models in Finance was developed, the Black and Scholes model. However, this method is inefficient in pricing options where there is dependence of the way followed by the asset price. This work aimed to implement the lattice based models (binomial and trinomial) and verify their utilization in pricing european, american and barrier options.

Resumo

O conceito de opção nasce como um direito negociável de compra ou venda de um ativo a um preço futuro predeterminado. A precificação de opções, que consiste na determinação do prêmio (preço), é um problema crucial abordado pela teoria das opções. Com a finalidade de resolver esse problema, foi desenvolvido um dos modelos mais utilizados em Finanças, o modelo de Black e Scholes. Porém, este método demonstra-se ineficiente na precificação das opções onde há uma dependência do caminho percorrido pelo preço do ativo. Este trabalho objetivou implementar os modelos baseados em *lattice* (binomial e trinomial) e verificar sua utilização na precificação de opções européias, americanas e com barreiras.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O Mercado de Opções negocia direitos de compra ou de venda, mas não os ativos diretamente. Uma opção de compra só deverá ser exercida quando o preço de mercado for superior ao preço de exercício da opção. Neste caso, diz-se que a opção tem um valor intrínseco. Mas, apenas o valor intrínseco não justifica o exercício, pois deve ser levado em conta o valor atual do prêmio pago quando da aquisição da opção.

Este Mercado possui como excelente característica a possibilidade de se usar o *hedge* apenas no cenário favorável, e não ser obrigado a usá-lo num cenário que lhe seja desfavorável. Por exemplo, caso o investidor tenha uma posição comprada, ele poderá comprar o ativo pelo preço predefinido se o cenário for de preços em alta e poderá abrir mão de seu direito de comprá-lo no mercado de opções para comprá-lo a preços de mercado no mercado à vista, se o cenário for de preços em baixa.

Observa-se, então, que as opções dão ao investidor o melhor dos mundos: a possibilidade de evitar apenas os cenários que acarretem resultados negativos, desfrutando, todavia, dos cenários que lhe trazem resultados favoráveis. Nesse sentido pode-se afirmar que as opções são um instrumento especial de *hedge*.

Para obter esta vantagem, ele deverá pagar antecipadamente o prêmio, que, na prática, representa o custo de eliminação do cenário desfavorável.

Quando se trata de opções, o comprador tem apenas direitos e não obrigações, enquanto o vendedor tem apenas obrigações.

A precificação de opções (ou determinação do prêmio) é tarefa importante para a definição do comportamento do mercado de opções, exercendo influência sobre as operações de *hedge*, especulação e arbitragem. Por essa razão, a precificação de opções tornou-se um dos problemas cruciais abordados pela teoria de opções, tornando-se foco de estudo em várias pesquisas.

Muitos modelos matemáticos que descrevem o comportamento dos ativos-objeto e suas opções resultam em equações diferenciais parciais e estocásticas que não possuem solução elementar, ou, para se obter uma solução, é necessária a elaboração de premissas que não condizem com a realidade do mercado. Um exemplo é a fórmula de Black e Scholes, que possui como ativo-objeto opções que não pagam dividendos. Esta fórmula possui uma premissa que não tem sido satisfeita na prática, que é a volatilidade do retorno do ativo-objeto ser constante.

Para que as opções possam ser precificadas de maneira satisfatória, atualmente, utilizam-se métodos numéricos, que são conjuntos de regras escritas sob a forma de uma sequência de operações elementares que levam à solução de um problema.

A presente monografia tem como objetivos apresentar os métodos baseados em *lattice* (binomial e trinomial) utilizados para a avaliação de opções, e aplicá-los a opções européias, americanas e com barreiras, comparando os resultados obtidos.

Ela está organizada em 10 capítulos. O Capítulo 1 é a Introdução. No Capítulo 2, são definidos alguns dos conceitos envolvendo opções. O Capítulo 3 descreve o modelo de Black e Scholes. No Capítulo 4, é apresentado o método binomial. O Capítulo 5 mostra o método trinomial. O Capítulo 6 utiliza os métodos binomial e trinomial para a precificação de opções com barreiras. O Capítulo 7 demonstra como foi realizado o projeto. No Capítulo 8 são descritos os resultados encontrados no desenvolvimento da monografia. O Capítulo 9 apresenta as conclusões do projeto. O Capítulo 10 indica uma possível proposta de trabalho futuro. E, por último, são mencionadas as Referências Bibliográficas.

Capítulo 2

CONCEITOS PRELIMINARES

2.1 Derivativos

De acordo com [HULL (2003)], derivativo é um instrumento financeiro cujo valor depende (ou deriva) dos valores de outras variáveis mais básicas. Muitas vezes estas variáveis são os preços dos ativos comercializados. Uma opção de ação, por exemplo, é um derivativo que possui seu valor dependente do preço da ação. Entretanto, derivativos podem depender de praticamente qualquer tipo de variável, desde a cotação do dólar até a quantidade de chuva precipitada em determinada região agrícola.

Para [RUBINSTEIN (1999)], um derivativo é um contrato entre duas partes que especifica condições - em particular, datas e os valores resultantes das variáveis relacionadas - sobre os quais pagamentos, ou *payoffs*, são para serem feitos entre as partes.

2.2 Retorno

O retorno de um investimento é medido entre duas datas. Sem *payouts*, o retorno é simplesmente a mudança do valor (preço) final do investimento (S^*) dividido pelo valor inicial (S). Desta forma, o retorno é:

$$\frac{S^*}{S}$$

o que leva a

$$\frac{S_T - S}{S}$$

onde S_T é o valor do investimento no tempo T . De maneira mais geral, em um intervalo de tempo $\delta t = t - (t - 1)$, o retorno pode ser calculado como representado na equação 2.1.

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \tag{2.1}$$

2.3 Volatilidade

A volatilidade de uma ação é a medida de incerteza quanto aos retornos proporcionados pela ação. Segundo HULL (1996), a volatilidade do preço de uma ação pode ser precisamente definida como o desvio padrão do retorno por ela fornecido em um ano, quando tal retorno é expresso com capitalização contínua. Assim, [RUBINSTEIN (1999)] define volatilidade como o desvio padrão anual do logaritmo natural do retorno do ativo. [COSTA (1999)] diz que ela é uma medida de dispersão de preços futuros e, na prática, mede o nível de oscilação de um mercado: um mercado calmo possui baixa volatilidade; um mercado agitado, nervoso, incerto, possui alta volatilidade.

2.4 Opções

Uma opção é um direito negociável de compra ou venda de um ativo-objeto a um preço futuro predeterminado. Por ser um direito, fica a critério de seu titular exercê-la ou não. Em [HULL (1996)], encontra-se que as opções são negociadas sobre ações, índices de ações, moedas, contratos futuros e títulos e notas do Tesouro.

Uma opção possui um ativo-objeto associado, o qual possui um preço corrente. O *payoff* de uma opção é o dinheiro adquirido pelo seu titular no fim do tempo de vida da mesma.

Existem dois tipos básicos de opções: *call* e *put*. Uma opção de compra (*call*) proporciona a seu titular o direito de comprar um ativo em determinada data a certo preço. Em [ASNBACHER (2000)], encontra-se que uma *call* é o direito de comprar 100 ações de certo fundo ou índice de fundo a um preço determinado em um dado período de tempo. Por exemplo, uma *call* pode ser o direito de comprar 100 ações de fundo na *Ford Motor Company* pelo preço de U\$ 60,00 por ação com uma data de vencimento determinada. Sendo assim, uma *call* é uma opção comprada pelas pessoas quando elas acham que o preço de um ativo tende a subir.

Uma opção de venda (*put*) garante a seu titular o direito de vender um ativo em certa data a um determinado preço. De acordo com [ASNBACHER (2000)], uma *put* é o que os investidores compram quando pensam que o preço do ativo tende a cair.

As opções podem ser do estilo americano ou europeu, o que não diz respeito à localização geográfica das mesmas. Uma opção americana pode ser exercida a qualquer momento, até a data de vencimento, enquanto as européias só podem ser exercidas na data de vencimento. Em [HULL (2003)], encontra-se que a maior parte das opções negociadas em bolsa é do estilo americano. Entretanto, as opções européias são mais facilmente analisadas do que as americanas e o titular da opção não necessita se preocupar diariamente se a opção é melhor caso seja exercida ou não [RUBINSTEIN (1999)]. Algumas das propriedades das opções americanas derivam das européias [HULL (2003)].

2.5 Prêmio

Segundo [ASNBACHER (2000)], o prêmio é o preço que o comprador paga por um contrato de opção. O prêmio de uma opção pode ser entendido como o preço da opção. Uma vez que opções são derivativos, espera-se que se possa encontrar uma fórmula para o prêmio justo de uma opção em função do preço primitivo dentre outras coisas, o que demanda praticamente todo o esforço em modelar as opções [COSTA (1999)].

2.6 Data de Vencimento

A data de vencimento especifica o período de validade da opção. Ela é a data em que a opção se torna nula, ou seja, perde seu valor [ASNBACHER (2000)]. Desta forma, uma opção de compra para determinado mês tem vencimento em algum dia do mês em questão. A data exata de vencimento é o sábado imediatamente posterior à terceira sexta-feira do mês de vencimento, até às 22h59min. O último dia em que se podem negociar as opções é a terceira sexta-feira do mês de vencimento. Um investidor com posição comprada numa opção tem normalmente até às 16h30min daquela sexta-feira para dar a ordem de exercício a seu corretor. Este, por sua vez, tem até às 22h59min do próximo dia para emitir aviso à bolsa de que a posição de seu cliente será exercida [HULL (1996)].

2.7 Preço de Exercício

Segundo [ASNBACHER (2000)], o preço de exercício é o preço pelo qual o titular de uma *call* pode comprar um ativo-objeto durante o tempo de vida da *call*, e o preço pelo qual o titular de uma *put* pode vender o ativo-objeto durante o tempo de vida da *put*, caso a opção seja do tipo americana.

Quando se trata de opções européias, preço de exercício é o valor pelo qual o titular de uma *call* pode comprar o ativo-objeto ou o proprietário de uma *put* pode vender o ativo, mas somente na data de vencimento.

2.8 Valor Intrínseco

O valor intrínseco de uma opção é a porção de seu preço que se deve à vantagem real que o preço do ativo-objeto proporciona em relação ao preço de exercício. Considerando o valor intrínseco, uma opção pode estar *in-the-money*, *at-the-money* ou *out-of-the-money*.

[WILLMOTT et. al. (1995)] define os conceitos apresentados da seguinte maneira: *in-the-money* se refere a uma opção cujo preço de exercício está próximo ao valor atual do ativo em questão; *at-the-money* é quando uma *call* (*put*) possui um valor menor (maior) que o valor atual do ativo (desta forma, considera-se a opção contendo um componente intrínseco significativo); e *out-of-the-money*, o que significa uma opção sem valor intrínseco.

As situações dessas opções geram aos seus titulares, respectivamente, fluxos de caixa nulo, positivo e negativo, caso sejam exercidas imediatamente [HULL (2003)].

2.9 Fatores que afetam os preços das Opções

De acordo com [HULL (2003)], há seis fatores que afetam o preço de uma opção: o preço atual do ativo, o preço de exercício, o tempo para o vencimento, a volatilidade do preço do ativo, a taxa de juro livre de risco e os dividendos esperados durante a vida da opção. A Tabela 2.1 resume o efeito do aumento dessas variáveis sobre o preço da opção.

Considerando uma opção de compra, o retorno é a quantia pela qual o preço da ação excede o preço de exercício, portanto, ela possui mais valor quando aumenta o preço da ação ou diminui o preço de exercício. Uma opção de venda tende a ter um comportamento

Tabela 2.1: Efeito do aumento das variáveis sobre o preço de uma opção

Variável	<i>Call</i> Européia	<i>Put</i> Européia	<i>Call</i> Americana	<i>Put</i> Americana
Preço atual da ação	Aumento	Diminuição	Aumento	Diminuição
Preço de exercício	Diminuição	Aumento	Diminuição	Aumento
Tempo para o vencimento	?	?	Aumento	Aumento
Volatilidade	Aumento	Aumento	Aumento	Aumento
Taxa de juro livre de risco	Aumento	Diminuição	Aumento	Diminuição
Dividendos	Diminuição	Aumento	Diminuição	Aumento

contrário, possuindo maior valor quando aumenta o preço de exercício ou diminui o preço da ação.

Como mostrado na Tabela 2.1, um aumento no tempo para o vencimento gera um aumento nos preços das *put* e *call* americanas. Isto ocorre porque quanto maior o prazo, maiores são as oportunidades de exercício. Opções de compra e venda europeias não se tornam necessariamente mais valiosas à medida que aumenta o tempo para o vencimento. Isso porque, segundo [HULL (1996)], não é verdade que o titular de uma opção europeia de longa duração tenha as mesmas oportunidades de exercício que o titular de uma de curta duração, ele só pode exercê-la no vencimento. Esta é a razão de a Tabela 2.1 possuir pontos de interrogação.

De acordo com a Tabela 2.1, o aumento da volatilidade gera um acréscimo no preço de uma opção, seja ela americana ou europeia. Isto porque, segundo [HULL (1996)], quanto maior a volatilidade, maior a possibilidade de a ação ter um desempenho tanto bom quanto ruim. Mas independente da variação do preço da ação, o máximo que o titular de uma opção poderá perder é o preço da opção. Mas ele terá um grande retorno caso o preço da ação tenha um grande aumento, caso seja detentor de uma *call*, ou se for detentor de uma *put*, terá um grande retorno caso o preço da ação sofra uma considerável queda. Assim, os preços das opções de compra e venda crescem à medida que aumenta a volatilidade.

A expansão das taxas de juro na economia tende a aumentar a taxa de crescimento esperada para o preço da ação, entretanto, diminui o valor atual de quaisquer fluxos de caixa a serem recebidos pelo seu titular. Segundo [HULL (1996)], esses dois efeitos tendem a desvalorizar uma opção de venda. No caso de uma opção de compra, o primeiro efeito tende a aumentar seu preço, prevalecendo sobre o segundo, que tende a diminuir seu preço.

A Tabela 2.1 mostra que os dividendos têm o efeito de reduzir o preço das ações. Isto gera um aumento no preço das opções de venda e uma desvalorização das opções de compra.

Capítulo 3

MODELO DE BLACK E SCHOLES

No início dos anos 70, Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton fizeram uma descoberta importante na precificação de opções [HULL (2003)]. Isto envolveu o desenvolvimento do que se chama modelo de Black e Scholes.

3.1 Análise

Black e Scholes partiram das seguintes premissas para derivarem a fórmula de precificação de opções [HULL (1996)]:

- o comportamento do preço da ação corresponde ao modelo lognormal, com taxa de retorno esperado e volatilidade constantes;
- não há custos operacionais nem impostos. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
- a ação não receberá dividendos durante a vida da opção;
- não há oportunidades de arbitragem sem risco;
- a negociação com títulos é contínua;
- os investidores podem tomar emprestado ou emprestar à mesma taxa de juro livre de risco;
- a taxa de juro livre de risco de curto prazo é constante.

Supondo uma opção cujo valor $V(S, t)$ depende somente de S e t , não é necessário, neste estágio, especificar se V é uma *call* ou *put*. Na verdade, V pode ser o valor de uma carteira de diferentes opções [WILLMOTT et. al. (1995)].

O processo do preço da ação é o seguinte:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.1)$$

Utilizando-se o lema de Itô, pode-se escrever

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dz \quad (3.2)$$

Isto dá o caminho aleatório seguido por V . As versões discretas das equações 3.1 e 3.2 são:

$$\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \delta z \quad (3.3)$$

e

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \delta z \quad (3.4)$$

onde δS e δV são as mudanças em S e V em um pequeno intervalo de tempo δt . Os processos de Wiener relacionados a V e S são os mesmos. Isto significa que δz nas equações 3.3 e 3.4 são o mesmo. Assim, escolhendo-se uma carteira de ações e o derivativo, o processo de Wiener pode ser eliminado.

A carteira apropriada é a seguinte:

$$- 1: \text{derivativo} \quad (3.5)$$

$$+ \frac{\delta V}{\delta S}: \text{ações} \quad (3.6)$$

O valor desta carteira é:

$$\Pi = -V + \frac{\delta V}{\delta S} S \quad (3.7)$$

A mudança $\delta \Pi$ no valor da carteira em um intervalo de tempo δt é dada por:

$$\delta \Pi = -\delta V + \frac{\delta V}{\delta S} \delta S \quad (3.8)$$

Substituindo-se as equações 3.3 e 3.4 em 3.8, tem-se:

$$\delta \Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t \quad (3.9)$$

Segundo [WILLMOTT et. al. (1995)], são necessários, agora, os conceitos de arbitragem e oferta e procura, com o fato de assumir que não há custos de transação. O retorno sobre uma quantidade Π investida em ações sem risco teria um acréscimo de $r\Pi dt$ em um tempo dt . Se o lado direito da equação 3.9 fosse maior do que esta quantidade, um arbitrador poderia obter um lucro sem risco tomando por empréstimo uma quantidade Π para investir na carteira. O retorno para esta estratégia livre de risco seria maior do que o custo do empréstimo. Pelo contrário, se o lado direito da equação fosse menor do que $r\Pi dt$, o arbitrador lançaria a carteira e investiria Π no banco. De qualquer maneira, o arbitrador teria um lucro instantâneo, sem risco e custo. Isto segue que:

$$r\Pi \delta t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t \quad (3.10)$$

E, portanto, tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV = 0 \quad (3.11)$$

A equação 3.11 é a equação diferencial parcial de Black-Scholes. Ela possui várias soluções, correspondendo a todos os diferentes derivativos que podem ser definidos com S como variável relacionada [HULL (2003)].

3.2 Solução da equação de Black e Scholes

As fórmulas de Black e Scholes para os preços de opções de compra e venda européias de ações sem dividendos são([HULL (1996)]):

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rt}N(d_2) \quad (3.12)$$

$$p = Xe^{-rt}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (3.13)$$

Onde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma T$$

e $N(x)$ é a função de probabilidade cumulativa de uma variável normal padronizada, dada por:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (3.14)$$

A função $N(x)$ pode ser calculada através de uma aproximação polinomial, dada pelas equações:

$$\begin{aligned} x &\geq 0, N(x) = 1 - (a_1k + a_2k^2 + a_3k^3)N'(x) \\ x &< 0, 1 - N(-x) \end{aligned}$$

onde:

$$k = \frac{1}{1 + \alpha x}$$

$$\alpha = 0,33267$$

$$a_1 = 0,4361836$$

$$a_2 = -0,1201676$$

$$a_3 = 0,9373980$$

e

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Segundo [HULL (1996)], isso fornece valores para $N(x)$, cuja aproximação é sempre de 0,0002.

Capítulo 4

MÉTODO BINOMIAL

Uma técnica útil e muito popular para a precificação de opções envolve a construção de uma árvore binomial. Este modelo é um diagrama que representa os possíveis diferentes caminhos que podem ser seguidos pelo preço da ação durante o período de validade da opção. Tal método foi desenvolvido praticamente na mesma época, mas independentemente, por [BARTTER e RENDLEMAN (1979)] e [COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979)].

Considerando-se a avaliação de uma opção de uma ação sem dividendos, primeiramente, divide-se a vida da opção em um número maior de pequenos intervalos de tempo de extensão δt . A cada intervalo de tempo, o preço da ação sai de seu valor inicial (S_0) para um ou dois novos valores (S_0u e S_0d). A Figura 4.1 mostra este modelo. A mudança de S_0 para S_0u é um movimento ascendente, com probabilidade p , e a de S_0 para S_0d é descendente, com probabilidade $1 - p$.

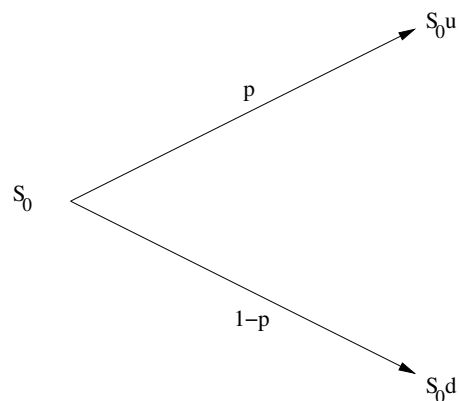


Figura 4.1: Oscilação do preço da ação no intervalo δt , sob o modelo binomial

De acordo com [WILLMOTT et. al. (1995)], há duas idéias principais relacionadas aos métodos binomiais. A primeira é que o caminho aleatório contínuo pode ser modelado por um caminho aleatório discreto com as seguintes propriedades:

- o preço da ação S muda apenas em tempos discretos $\delta t, 2\delta t, 3\delta t, \dots, M\delta t = T$, a data de expiração do derivativo. É usado δt para representar um intervalo de tempo pequeno, mas não infinitesimal entre movimentos no preço da ação;
- se o preço da ação é S_m no tempo $m\delta t$, então no tempo $(m + 1)\delta t$ ele pode ter apenas um dos dois possíveis valores, $uS_m > S_m$ ou $dS_m < S_m$;

- a probabilidade (p) de S mover-se ascendentemente para uS é conhecida, assim como é a probabilidade ($1 - p$) de S mover-se descendentemente para dS

O segundo fator a ser assumido é o de mundo neutro de risco, isto é, um onde as preferências de risco de um investidor são irrelevantes para a avaliação do derivativo. Deve-se assumir isto sempre que é possível *hedgear* uma carteira perfeitamente e torná-la sem risco. Diante disto, assume-se que o retorno do ativo é a taxa de interesse livre de risco.

Assumindo-se um mundo de risco-neutro, observa-se que o valor (V_m) do derivativo no passo de tempo $m\delta t$ é o valor esperado do mesmo no passo de tempo $(m + 1)\delta t$ descontado pela taxa de interesse livre de risco (r):

$$V_m = \xi[e^{-r\delta t}V_{m+1}] \quad (4.1)$$

Em um método binomial, constrói-se primeiramente uma árvore com os possíveis valores dos preços das ações e suas probabilidades, dando um preço inicial para a ação, então, usa-se esta árvore para determinar os possíveis preços da ação na data de vencimento e as probabilidades desses preços serem alcançados. Os possíveis valores para a opção no vencimento podem então ser calculados, e, retrocedendo na árvore, a opção pode ser precificada. Uma consequência útil é que pode-se facilmente tratar a possibilidade de exercício antecipado.

4.1 Determinação de p , u , e d

De acordo com [HULL (2003)], os parâmetros p , u , e d devem fornecer valores corretos para a média e variância das mudanças no preço da ação durante um intervalo de tempo δt . Trabalhando-se em um mundo de risco neutro, o retorno esperado de uma ação é a taxa de interesse livre de risco. Assim, o valor esperado para o preço de uma ação ao fim de um intervalo de tempo δt é $Se^{r\delta t}$, onde S é o preço da ação no início de um intervalo de tempo. Segue-se que:

$$Se^{r\delta t} = pSu + (1 - p)Sd \quad (4.2)$$

ou

$$e^{r\delta t} = pu + (1 - p)d \quad (4.3)$$

A variância da quantidade de mudança no preço da ação em um pequeno intervalo de tempo δt é igual a $\sigma^2\delta t$. Devido ao fato de a variância de uma variável Q ser definida por $E(Q^2) - [E(Q)]^2$, segue-se que:

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + 1 - pd]^2 = \sigma^2\delta t \quad (4.4)$$

Substituindo por p da equação 4.3, isto se reduz a:

$$e^{r\delta t}(u + d) - ud - e^{2r\delta t} = \sigma^2\delta t \quad (4.5)$$

As equações 4.3 e 4.5 impõem duas condições em p , u , e d . Uma terceira condição utilizada por [COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979)] é:

$$u = \frac{1}{d}$$

Estas três condições implicam:

$$p = \frac{a - d}{u - d} \tag{4.6}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \tag{4.7}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \tag{4.8}$$

Onde

$$a = e^{r\delta t} \tag{4.9}$$

e termos de ordem maior que δt são ignorados. A variável a é, algumas vezes, dita como um *fator de crescimento*.

4.2 Árvore de Preços de Ações

A Figura 4.2 ilustra uma árvore de preços de ações completa, considerando-se um modelo binomial.

No tempo zero ($t = 0$), o preço da ação (S_0) é conhecido. Então, no próximo passo de tempo δt há dois preços de ação possíveis, S_0u e S_0d ; no tempo $2\delta t$, há três preços possíveis, a saber S_0u^2 , S_0 e S_0d^2 ; e assim por diante. No tempo $m\delta t$, $(m + 1)$ possíveis valores da ação são considerados, os quais são:

$$S_0u^j d^{m-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m$$

4.3 Determinando o Preço das Opções

Determina-se o preço das opções iniciando-se no fim da árvore (tempo T), e percorrendo-a de trás para frente. Assumindo que a função *payoff* do derivativo é conhecida, e que ela depende somente dos valores do ativo relacionado na data de expiração, é possível avaliá-lo na data de vencimento, isto é, no tempo T . Por exemplo, quando se considera uma *put*, seu valor é:

$$V_n^M = \max(S_n^M - K, 0), \quad n = 0, 1, \dots, M. \tag{4.10}$$

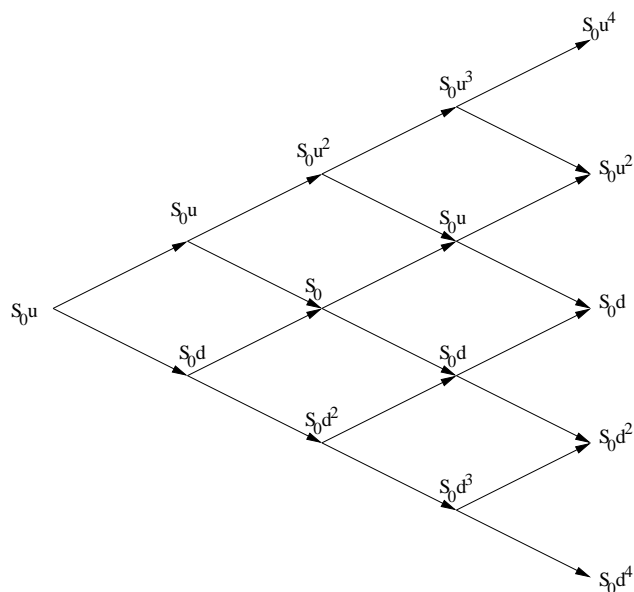


Figura 4.2: Árvore utilizada para precificar uma opção

onde K é o preço de exercício e V_n^M denota o n -ésimo valor possível da *put* no passo de tempo M e o n -ésimo valor possível do ativo S_n^M . Para uma *call*, encontra-se que:

$$V_n^M = \max(S_n^M - K, 0), \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (4.11)$$

Pode-se encontrar o valor esperado do derivativo no passo de tempo anterior à expiração, $(M - 1)\delta t$, e para o possível preço do ativo S_n^{M-1} , $n = 0, 1, \dots, M - 1$, uma vez que é conhecido que a probabilidade de um ativo com preço determinado em S_n^{M-1} mover para S_{n+1}^M durante um passo de tempo é p , e a probabilidade dele mover para S_n^M é $(1 - p)$. Utilizando o argumento do risco-neutro, pode-se calcular o valor do derivativo a cada possível preço do ativo para o passo de tempo $(M - 1)$. Similarmente, isto permite encontrar o valor do derivativo no passo de tempo $(M - 2)$, e assim sucessivamente, até o passo de tempo 0. Isto dá o valor do derivativo na data atual.

4.4 Opções Europeias

Seja V_n^m o valor da opção no passo de tempo $m\delta t$ e o preço do ativo S_n^m (onde $0 \leq n \leq m$). Calcula-se o valor esperado da opção no passo de tempo $m\delta t$ dos valores no passo de tempo $(m + 1)\delta t$ e desconta-se ele para obter o valor presente usando a taxa de interesse livre de risco r ,

$$e^{r\delta t} V_n^m = pV_{n+1}^{m+1} + (1 - p)V_n^{m+1}$$

Chega-se a:

$$V_n^m = e^{-r\delta t} (pV_{n+1}^{m+1} + (1 - p)V_n^{m+1}) \quad (4.12)$$

Como o valor de V_n^M ($n = 0, 1, \dots, M$) da função *payoff*, pode-se determinar recursivamente os valores de V_n^m para cada $n = 0, 1, \dots, m$ para $m < M$ para se chegar ao valor atual da opção (V_0^0).

4.5 Opções Americanas

É possível incorporar facilmente a possibilidade de exercício antecipado de uma opção no modelo binomial.

Considerando a situação no passo de tempo m e no preço do ativo S_n^m . A opção pode ser exercida antes do vencimento para render um lucro determinado pela função *payoff*.

Para *puts*, ela é:

$$\max(E - S_n^M, 0)$$

Para *calls*:

$$\max(S_n^M - E, 0)$$

E para *cash-or-nothing calls*:

$$\begin{array}{ll} 0 & , \quad S_n^M < E \\ B & , \quad S_n^M \geq E \end{array}$$

Se a opção é retida, seu valor V_n^m é, como no caso europeu

$$V_n^m = e^{-r\delta t} (pV_{n+1}^{m+1} + (1-p)V_n^{m+1})$$

Desta forma, para uma put, tem-se

$$V_n^m = \max(\max(K - S_n^m, 0), e^{-r\delta t} (pV_{n+1}^{m+1} + (1-p)V_n^{m+1})) \quad (4.13)$$

e para uma call

$$V_n^m = \max(\max(S_n^m - K, 0), e^{-r\delta t} (pV_{n+1}^{m+1} + (1-p)V_n^{m+1})) \quad (4.14)$$

4.6 Exemplos

Considere uma opção de venda (*put*) com seis meses para o vencimento ($T = 0.5$), com preço atual da ação R\$100,00 ($S = 100$), preço de exercício R\$95,00 ($K = 95$), a taxa de juros livre de risco anual de 8% ($r = 0.08$) e volatilidade de 30% ao ano ($\sigma = 0.3$). Para uma árvore binomial de 5 passos ($n = 5$), tem-se $\delta t = 0.1$, $u = 1.0995$, $d = 0.9095$ e $p = 0.5186$.

Mostra-se na Figura 4.3 a árvore binomial com preços do ativo-base. A Figura 4.4 mostra os preços da *put* europeia, enquanto a Figura 4.5 mostra os preços da *put* americana. As setas nas figuras mostram em que sentido percorre-se a árvore para que sejam efetuados os cálculos. Pode-se observar que o valor da opção europeia é R\$4,63, enquanto o da americana é R\$4,92.

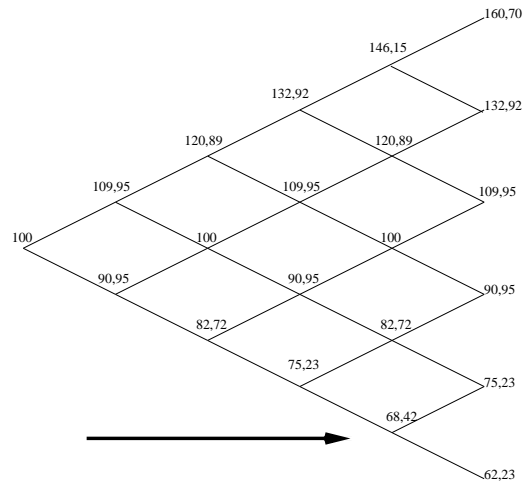


Figura 4.3: Árvore binomial com preços do ativo-objeto

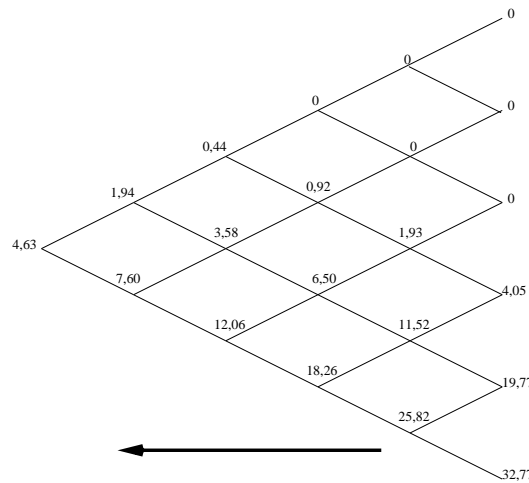


Figura 4.4: Árvore binomial com preços da *put* europeia

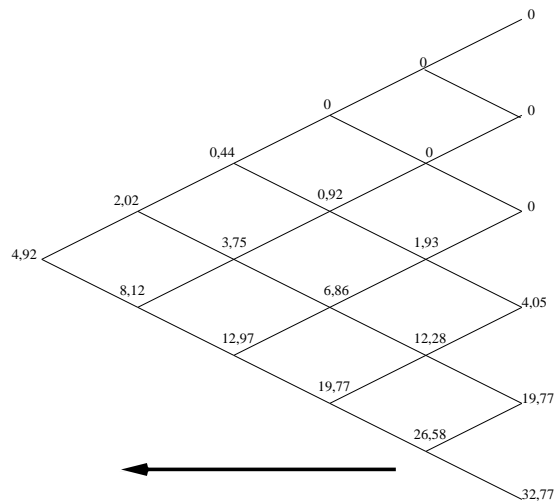


Figura 4.5: Árvore binomial com preços da *put* americana

Capítulo 5

MÉTODO TRINOMIAL

O modelo trinomial, conhecido também como *three-jump model*, foi inicialmente desenvolvido por [PARKINSON (1977)] como uma maneira de resolver numericamente uma integral que representava o valor de uma opção de venda americana. Posteriormente, [BOYLE (1986)] formalizou o modelo trinomial, utilizando a técnica de avaliação risco-neutra ao invés da estratégia de replicação da carteira de hedging de [COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979)]. O motivo desta mudança de estratégia é a impossibilidade da formação da carteira de hedging (composta pelo ativo-objeto e títulos livres de risco) que forneça os mesmos proventos da opção.

Este método diferencia-se do modelo binomial pois possui, para cada nó da árvore, três novos caminhos a seguir: aumento do preço do ativo-objeto (S_{p_u}), manutenção do preço do ativo-objeto (S) e a redução do mesmo (S_{p_d}). O modelo simples de um passo é ilustrado na Figura 5.1.

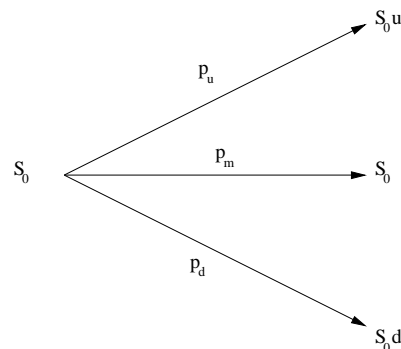


Figura 5.1: Oscilação do preço da ação no intervalo δt , utilizando o modelo trinomial

De acordo com [HULL (2003)], os valores de u , d , p_d , p_m e p_u são:

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\delta t}} \quad (5.1)$$

$$d = \frac{1}{u} \quad (5.2)$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\delta t}{12\sigma^2}} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \frac{1}{6} \quad (5.3)$$

$$p_m = \frac{2}{3} \tag{5.4}$$

$$p_u = \sqrt{\frac{\delta t}{12\sigma^2}} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \frac{1}{6} \tag{5.5}$$

5.1 Construindo a Árvore de Preços de Ações

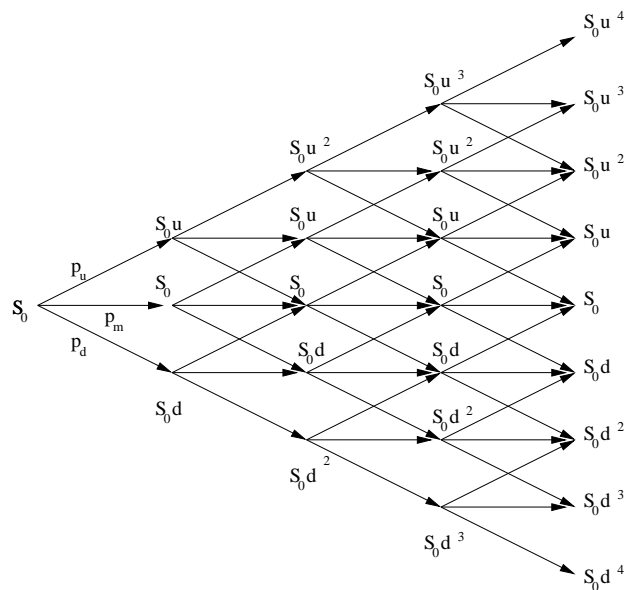


Figura 5.2: Árvore Trinomial utilizada para determinar os preços do ativo-objeto

No tempo zero ($t = 0$), o preço da ação (S_0) é conhecido. Então, no próximo passo de tempo δt há três preços de ação possíveis, S_0p_d , S_0 e S_0p_u ; no tempo $2\delta t$, há cinco preços possíveis, a saber S_0d^2 , S_0d , S_0 , S_0u e S_0u^2 ; e assim por diante. No tempo $m\delta t$, consideram-se os $(2m + 1)$ possíveis valores da ação representados pela Equação 5.6.

$$S_0u^j d^{m-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2m + 1 \tag{5.6}$$

5.2 Determinando o Preço das Opções

O processo de determinação do preço das opções em um modelo trinomial é similar ao do modelo binomial. Determina-se o preço das opções iniciando-se no fim da árvore, e percorrendo-a partindo dos nós folha em direção ao nó raiz. Uma vez que a função *payoff* do derivativo é conhecida, e que ela depende somente dos valores do ativo relacionado na data

de expiração, é possível avaliá-lo na data de vencimento. Por exemplo, quando se trata de uma *put*, seu valor é:

$$V_n^M = \max(S_n^M - K, 0), \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (5.7)$$

onde K é o preço de exercício e V_n^M denota o n -ésimo valor possível da *put* no passo de tempo M e S_n^M , o n -ésimo valor possível do ativo no passo de tempo M . Para uma *call*, encontra-se que:

$$V_n^M = \max(S_n^M - K, 0), \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (5.8)$$

Pode-se encontrar o valor esperado do derivativo no passo de tempo anterior à expiração, $(M - 1)\delta t$, e para o possível preço do ativo S_n^{M-1} , $n = 0, 1, \dots, M - 1$, já que é conhecida a probabilidade de um ativo com preço determinado em S_n^{M-1} mover para S_n^M durante um passo de tempo é p_d , a probabilidade dele mover para S_{n+1}^M é p_m , e a probabilidade dele mover para S_{n+2}^M é p_u . Utilizando o argumento do risco-neutro, pode-se calcular o valor do derivativo a cada possível preço do ativo para o passo de tempo $(M - 1)$. Similarmente, isto permite encontrar o valor do derivativo no passo de tempo $(M - 2)$, e assim sucessivamente, até o passo de tempo 0. Desta maneira, chega-se ao valor do derivativo na data atual.

A partir do tempo $(M - 1)$, o valor das *put* ou *call*, caso sejam européias é:

$$V_n^m = (p_d V_n^{m+1} + p_m V_{n+1}^{m+1} + p_u V_{n+2}^{m+1}) e^{-r\delta t} \quad (5.9)$$

Considerando-se opções americanas, deve-se considerar a possibilidade de exercício antecipado, portanto, para uma *put* americana tem-se:

$$V_n^m = \max(\max(S_n^m - K, 0), (p_d V_n^{m+1} + p_m V_{n+1}^{m+1} + p_u V_{n+2}^{m+1}) e^{-r\delta t}) \quad (5.10)$$

e para uma *call* americana:

$$V_n^m = \max(\max(K - S_n^m, 0), (p_d V_n^{m+1} + p_m V_{n+1}^{m+1} + p_u V_{n+2}^{m+1}) e^{-r\delta t}) \quad (5.11)$$

5.3 Exemplos

Considere uma opção de venda (*put*) com seis meses para o vencimento ($T = 0.5$), com preço atual da ação R\$100,00 ($S = 100$), preço de exercício R\$95,00 ($K = 95$), a taxa de juros livre de risco anual de 8% ($r = 0.08$) e volatilidade de 30% ao ano ($\sigma = 0.3$). Para uma árvore trinomial com 4 passos ($n = 4$), tem-se $u = 1.2017$, $d = 0.8322$, $p_d = 0.1547$, $p_m = 0.6667$, $p_u = 0.1786$ e $\delta t = 0.125$.

A Figura 5.3 mostra a árvore com os preços do ativo-objeto. A Figura 5.4 mostra os preços da *put* européia, enquanto a Figura 5.5 mostra os preços da opção americana. As setas nas figuras mostram em que sentido percorre-se a árvore para que sejam efetuados os cálculos. Observa-se que o valor da opção européia é R\$4,49, enquanto o da americana é R\$4,57.

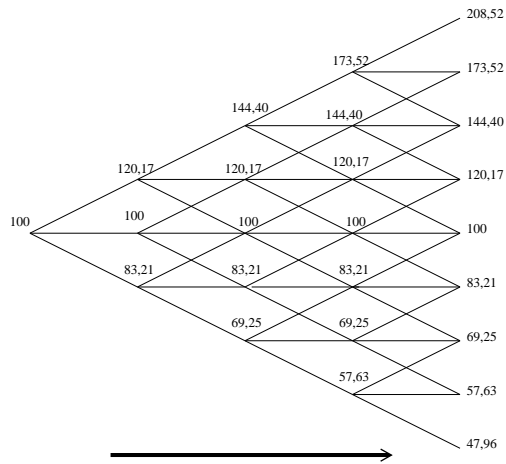


Figura 5.3: Árvore trinomial com preços do ativo-objeto

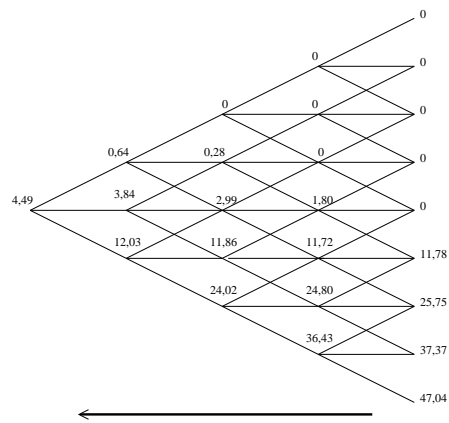


Figura 5.4: Árvore trinomial com os preços da opção europeia

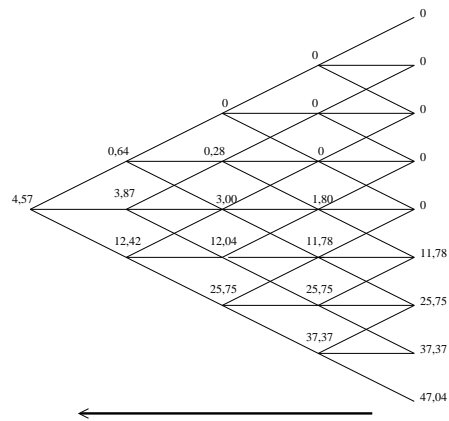


Figura 5.5: Árvore trinomial com os preços da opção americana

Capítulo 6

OPÇÕES COM BARREIRAS

6.1 Opções com barreiras

[WILLMOTT et. al. (1995)] cita opções com barreiras como opções fracamente dependentes do caminho pelo fato de poderem ser avaliadas utilizando apenas os valores correntes de S e t , sem a necessidade de variáveis que representem a quantidade de dependência do caminho. Elas são atrativas para alguns participantes do mercado porque são menos caras do que as opções regulares correspondentes [HULL (2003)]. Estas opções com barreiras podem ser classificadas como opções *knock-out* ou opções *knock-in*. Uma opção *knock-out* deixa de existir quando o preço do ativo-objeto alcança determinada barreira; já uma opção *knock-in* vem à existência apenas quando o preço do ativo-objeto alcança a barreira. De acordo com [WILLMOTT et. al. (1995)], podendo ser *calls* ou *puts*, as opções com barreira são categorizadas como *up-and-in*, *down-and-in*, *up-and-out*, *down-and-out*.

Uma opção com barreira *up-and-in* expira sem valor a menos que a barreira seja alcançada por baixo antes de expirar. Uma *down-and-in* expira sem valor a menos que a barreira seja alcançada por cima antes de seu vencimento. Uma *up-and-out* expira sem valor caso a barreira seja alcançada por baixo antes do vencimento. Uma *down-and-out* expira sem valor se a barreira for alcançada por cima antes do vencimento. Algumas opções podem oferecer um valor de rebate caso expire sem valor.

É possível também haver combinações de barreiras, como por exemplo *up-and-in and up-and-out*, *up-and-in and down-and-out*, *down-and-in and down-and-out*, e *down-and-in and up-and-out*.

6.2 Cálculo de Opções Americanas com Barreiras Através do Método Binomial

6.2.1 Barreiras Simples (*cap* ou *floor*)

Os valores possíveis nos estados de natureza n de uma *call* no instante final $m = M$ são dados por:

$$c_m^n = \max [0; \min (S_m^n - K; H - K)] \quad (6.1)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *call* americana é dado por:

$$c_m^n = \max \left\{ e^{-r\delta t} [pc_{m+1}^{n+1} + (1-p)c_{m+1}^n]; \min(S_m^n - K; H - K) \right\} \quad (6.2)$$

Os valores possíveis nos estados de natureza n de uma *put* no instante final $m = M$ são dados por:

$$\max[0; \min(K - S_m^n; K - H)] \quad (6.3)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *put* é dado por:

$$p_m^n = \max \left\{ e^{-r\delta t} [pp_{m+1}^{n+1} + (1-p)p_{m+1}^n]; \min(K - S_m^n; K - H) \right\} \quad (6.4)$$

6.2.2 Barreiras *knock-out*

Para o cálculo das opções, executa-se o procedimento de definir a variável $x = 1$, caso a barreira seja *knock-out-and-up* ($S_0 < H$), ou $x = -1$, no caso de *knock-out-and-down*.

O valor da *call* no instante final em cada um dos estados da natureza é dado por, caso a barreira seja atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$c_m^n = K \quad (6.5)$$

Caso contrário:

$$c_m^n = \max(0; S_m^n - K) \quad (6.6)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *call* é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$c_m^n = K \quad (6.7)$$

Caso contrário:

$$c_m^n = \max \left\{ e^{-r\delta t} [pc_{m+1}^{n+1} + (1-p)c_{m+1}^n]; S_m^n - K \right\} \quad (6.8)$$

Os valores da *put* no instante final ($m = M$) em cada um dos estados da natureza n é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$p_m^n = K \quad (6.9)$$

Caso contrário:

$$p_m^n = \max(0; K - S_m^n) \quad (6.10)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *put* é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$p_m^n = K \quad (6.11)$$

Caso contrário:

$$p_m^n = \max \left\{ e^{-r\delta t} [pp_{m+1}^{n+1} + (1-p)p_{m+1}^n]; S_m^n - K \right\} \quad (6.12)$$

6.2.3 Barreiras *knock-in*

Para precificar essas opções, constrói-se a árvore binomial duas vezes. A primeira precifica a opção sem barreira (*plain vanilla*), enquanto a segunda se baseia na primeira para precificar a opção com *knock-in*.

Sejam c_m^{n*} e p_m^{n*} , respectivamente, os preços da *call* e da *put* sem barreira no instante m , estado de natureza n .

De forma análoga às opções com barreira *knock-out*, verifica-se o rompimento da barreira em cada um dos pontos intermediários da árvore. Caso a barreira seja realmente rompida, o prêmio da opção naquele ponto será igual ao prêmio da *plain vanilla* e, caso contrário, será dado pelo valor presente da expectativa do *payoff* no instante seguinte, conforme demonstrado a seguir.

Define-se a variável auxiliar $x = 1$ caso a barreira seja *knock-in-and-up* ($S_0 < H$); já no caso de *knock-in-and-down*, define-se $x = -1$.

O valor da *call* no instante final ($m = M$) em cada um dos estados da natureza n é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$c_m^n = c_m^{n*} \quad (6.13)$$

Caso contrário:

$$c_m^n = K \quad (6.14)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *call* é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$c_m^n = c_m^{n*} \quad (6.15)$$

Caso contrário:

$$c_m^n = e^{-r\delta t} [pc_{m+1}^{n+1} + (1-p)c_{m+1}^n] \quad (6.16)$$

O valor da *put* no instante final ($m = M$) em cada um dos estados da natureza n é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$p_m^n = p_m^{n*} \quad (6.17)$$

Caso contrário:

$$p_m^n = K \quad (6.18)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *put* é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$p_m^n = p_m^{n*} \quad (6.19)$$

Caso contrário:

$$p_m^n = e^{-r\delta t} [pp_{m+1}^{n+1} + (1-p)p_{m+1}^n] \quad (6.20)$$

6.3 Cálculo de Opções Americanas com Barreiras Através do Método Trinomial

As opções com barreiras são avaliadas pelo método trinomial de maneira similiar à do método binomial, exceto pelo fato de ao se efetuar a indução para trás, considerar-se as três possibilidades p_d , p_m e p_u . As fórmulas são descritas nas subseções seguintes.

6.3.1 Barreiras Simples (*cap ou floor*)

Os valor possíveis nos estados de natureza n de uma *call* no instante final $m = M$ são dados por:

$$c_m^n = \max [0; \min (S_m^n - K; H - K)] \quad (6.21)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *call* é dado por:

$$c_m^n = \max \left\{ e^{-r\delta t} [p_d c_{m+1}^n + p_m c_{m+1}^{n+1} + p_u c_{m+1}^{n+2}] ; \min (S_m^n - K; H - K) \right\} \quad (6.22)$$

Os valor possíveis nos estados de natureza n de uma *put* no instante final $m = M$ são dados por:

$$\max [0; \min (K - S_m^n; K - H)] \quad (6.23)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *put* é dado por:

$$p_m^n = \max \left\{ e^{-r\delta t} [p_d p_{m+1}^n + p_m p_{m+1}^{n+1} + p_u p_{m+1}^{n+2}] ; \min (K - S_m^n; K - H) \right\} \quad (6.24)$$

6.3.2 Barreiras *knock-out*

Para o cálculo das opções, executa-se o procedimento de definir a variável $x = 1$, caso a barreira seja *knock-out-and-up* ($S_0 < H$), ou $x = -1$, no caso de *knock-out-and-down*.

O valor da *call* no instante final em cada um dos estados da natureza é dado por, caso a barreira seja atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$c_m^n = K \quad (6.25)$$

Caso contrário:

$$c_m^n = \max (0; S_m^n - K) \quad (6.26)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *call* é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$c_m^n = K \quad (6.27)$$

Caso contrário:

$$c_m^n = \max \left\{ e^{-r\delta t} [p_d c_{m+1}^n + p_m c_{m+1}^{n+1} + p_u c_{m+1}^{n+2}] ; S_m^n - K \right\} \quad (6.28)$$

O valor da *put* no instante final ($m = M$) em cada um dos estados da natureza n é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$p_m^n = K \quad (6.29)$$

Caso contrário:

$$p_m^n = \max (0; K - S_m^n) \quad (6.30)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *put* é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$p_m^n = K \quad (6.31)$$

Caso contrário:

$$p_m^n = \max \left\{ e^{-r\delta t} [p_d p_{m+1}^n + p_m p_{m+1}^{n+1} + p_u p_{m+1}^{n+2}] ; S_m^n - K \right\} \quad (6.32)$$

6.3.3 Barreiras *knock-in*

Deve-se construir a árvore binomial duas vezes, como no caso das opções americanas, da forma descrita em 6.2.3.

Sejam c_m^{n*} e p_m^{n*} , respectivamente, os preços da *call* e da *put* sem barreira no instante m , estado de natureza n .

Define-se a variável auxiliar $x = 1$ caso a barreira seja *knock-in-and-up* ($S_0 < H$); já no caso de *knock-in-and-down*, define-se $x = -1$.

O valor da *call* no instante final ($m = M$) em cada um dos estados da natureza n é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$c_m^n = c_m^{n*} \quad (6.33)$$

Caso contrário:

$$c_m^n = K \quad (6.34)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *call* é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$c_m^n = c_m^{n*} \quad (6.35)$$

Caso contrário:

$$c_m^n = e^{-r\delta t} [p_d c_{m+1}^n + p_m c_{m+1}^{n+1} + p_u c_{m+1}^{n+2}] \quad (6.36)$$

O valor da *put* no instante final ($m = M$) em cada um dos estados da natureza n é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$p_m^n = p_m^{n*} \quad (6.37)$$

Caso contrário:

$$c_m^n = K \quad (6.38)$$

Nos instantes intermediários ($m < M$), o valor da *put* é dado por, se a barreira for atingida ($(S_m^n - H)x > 0$):

$$p_m^n = p_m^{n*} \quad (6.39)$$

Caso contrário:

$$p_m^n = e^{-r\delta t} [p_d p_{m+1}^n + p_m p_{m+1}^{n+1} + p_u p_{m+1}^{n+2}] \quad (6.40)$$

6.4 Cálculo de Opções Européias com Barreira

No caso do cálculo de opções européias com barreira, o valor da opção no último intervalo de tempo ($m = M$) é calculado como no caso das opções americanas, apresentado na seção 6.2, caso o método utilizado seja o binomial, ou de acordo com a maneira apresentada na seção 6.3, quando da utilização do método trinomial.

Para se determinar os valores nos intervalos de tempo anteriores ($m < M$), o processo é o mesmo utilizado para a precificação das opções *plain vanilla*.

6.5 Ajuste dos nós sobre as barreiras

Em um artigo, [BOYLE e LAU (1994)] identificaram um método de melhoramento do lattice binomial em casos onde a barreira não coincide com os nós da árvore.

Para uma árvore de [COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979)] (árvore CRR) com N períodos para vencimento, uma barreira no nível B do ativo cai exatamente m nós de distância do preço corrente do ativo S quando:

$$S e^{m\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} = B$$

ou

$$N = \left\lceil \frac{(m^2 \sigma^2 T)}{\left| \ln \frac{B}{S} \right|} \right\rceil \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.41)$$

Este argumento conta com o fato de que as localizações dos nós do ativo de uma árvore CRR são independentes da taxa de interesse livre de risco, e caem nos mesmos níveis do ativo todas as vezes.

É também possível ajustar a largura da árvore de tal forma que a barreira coincida com os vértices seguindo a equação:

$$N = \left[\frac{(m^2 \sigma^2 T)}{\left(\ln \frac{S}{B}\right)^2} \right] \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.42)$$

Capítulo 7

METODOLOGIA

Este capítulo tem como finalidade apresentar a metodologia utilizada para a concretização do projeto.

Primeiramente foi realizada uma pesquisa exploratória, a fim de adquirir material e conhecimento necessários para uma boa realização do projeto.

Com o intuito de utilizar os métodos binomial e trinomial, apresentados nos capítulos anteriores, para precificar as opções, tornou-se necessário modelar os métodos de forma a utilizar recursos computacionais para a realização da tarefa.

Os métodos foram implementados utilizando-se a linguagem Java. O programa foi compilado pelo `jdk1.5.0_02`, utilizando-se o ambiente de desenvolvimento *Eclipse Platform* versão 3.0.2, em um sistema operacional Windows XP SP2.

O computador utilizado possuía processador Athlon XP 1700+, 384 Mb de memória e disco rígido de 15 Gigabytes.

Primeiramente foi implementada a resolução da equação de Black e Scholes. Após verificar que estava calculando os valores de maneira correta, de acordo com exemplos apresentados em livros, passou-se para o passo da implementação dos métodos.

Para a implementação do modelo binomial utilizou-se a estrutura de dados matriz pelo fato da facilidade de ser fácil percorrê-la, possibilitando os cálculos da maneira adequada e correta. A ordem da matriz foi determinada pelo número de passos da árvore binomial, ou seja, pelo valor $T/\delta t$. Desta maneira, para uma árvore com m passos, criou-se uma matriz $(m + 1) \times (m + 1)$. Para a utilização em opções européias, houve a possibilidade de se construir apenas um vetor unidimensional com $(m + 1)$ posições, devido ao fato de o caminho percorrido pelo valor do ativo-objeto ser irrelevante. Desta forma, foi possível realizar todos os cálculos no mesmo vetor, podendo, a cada passo, desprezar os resultados do passo anterior.

O modelo trinomial foi implementado utilizando-se também a estrutura de dados matriz, também pelo fato de permitir uma indexação que possibilitou o cálculo tanto dos preços dos ativos quanto dos preços das opções. Para uma árvore com m passos de tempo, foi construída uma matriz $(m + 1) \times (2m + 1)$. Como no caso do modelo binomial, para a precificação de opções européias também foi possível construir apenas um vetor unidimensional com $2m + 1$ posições, representando o último passo de tempo, já que, a cada novo passo, os valores dos passos anteriores poderiam ser desprezados.

O programa foi implementado em 10 classes, a saber, `AmBinBarreiraSimples.java`, `AmericanBinomial.java`, `AmericanTrinomial.java`, `AmTrinBarreiraSimples.java`, `BinBarreiraSimples.java`, `EuroBinomial.java`, `EuroBlackScholes.java`, `EuroTrinomial.java`, `No.java`, e `Gene-`

rateGraphics.java.

Um exemplo de como a árvore é percorrida é demonstrado no Algoritmo 1, mostrando-se o cálculo da árvore de preços do ativo.

Algoritmo 1 Exemplo de cálculo da árvore de preços de ação no método trinomial

```
for (int m=0;m<M+1;m++) do  
  for (int n=0;n<2*m+1;n++) do  
    americanTrin[m][n].setPrecoAcao(So*Math.pow(u,n)*Math.pow(d,m));  
  end for  
end for
```

Capítulo 8

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este Capítulo apresenta os resultados obtidos pelas simulações dos métodos, feitas no computador, sobre alguns exemplos de opções. Para a apresentação dos resultados foram criados gráficos, demonstrando a variação do valor da opção (eixo y) de acordo com a mudança no número de passos das árvores (eixo x). Primeiramente são apresentados os resultados da aplicação dos métodos em opções *vanilla*, e posteriormente em opções com barreiras.

8.1 Opções Europeias

Um exemplo quando se tem uma opção europeia com preço inicial de R\$110,00, preço de exercício R\$100,00, taxa de juros livre de risco de 9% ao ano, volatilidade de 30% ao ano, e um tempo para vencimento de 0.70 anos, é demonstrado na Figura 8.1. Observa-se que tanto o método binomial quanto o método trinomial convergem para a solução analítica de Black e Scholes, independente de se analisar uma opção de compra ou uma opção de venda. Pode ser identificado o fato de ao utilizar-se árvores com pequenos números de passos, o valor da opção apresenta uma maior distância do valor analítico.

Utilizando-se uma opção com preço inicial R\$126,80,00, preço de exercício R\$130,00, taxa de juros livre de risco de 21,92% ao ano, volatilidade de 22,13% ao ano e tempo para vencimento de 0,1627 ano, obtém-se o gráfico exibido na Figura 8.2. Como no caso anterior, os dois métodos (binomial e trinomial) convergiram para o resultado analítico apresentado pela resolução da equação de Black e Scholes.

8.2 Opções Americanas

Utilizando o exemplo de uma opção americana onde o preço inicial do ativo é R\$126,80, o preço de exercício é R\$130,00, a taxa de interesse livre de risco é 21,92% ao ano, a volatilidade é 22,13% ao ano, e o período para vencimento é de 0.1627 ano, a Figura 8.4 mostra o resultado da utilização dos métodos binomial e trinomial para precificá-la.

Quando analisa-se uma opção americana com preço inicial do ativo R\$110,00, preço de exercício R\$100,00, taxa de juros livre de risco de 9% ao ano, volatilidade de 30% ao ano, e um tempo para vencimento de 0,1627 ano, observa-se o resultado demonstrado na Figura 8.3.

8.3 Opções com barreiras

Esta seção mostra resultados da utilização dos métodos em opções com os diferentes tipos de barreiras (*cap or floor*, *knock-in* e *knock-out*).

Considera-se uma opção com preço do ativo-objeto inicial R\$126,80, preço de exercício R\$130,00, taxa de interesse livre de risco 21,92% ao ano, volatilidade de 22,13% ao ano e tempo para vencimento de 0,1627 ano. Quando da utilização das equações para ajuste dos nós sobre as barreiras, o valor apresentado no eixo x diz respeito ao valor passado como parâmetro para as Equações 6.41 e 6.42.

Utilizando-se os métodos de ajuste dos nós para caírem nas barreiras, os valores de m (número de passos), só puderam chegar a 138, uma vez que o número de passos da árvore analisada era de 1532 passos, considerando a equação 6.41. Ao utilizar-se a equação 6.42, o valor de m só pode chegar a 42, devido ao fato de analisar-se uma árvore com 1502 passos.

8.3.1 Cap ou Floor

Uma opção, com as características descritas no início desta seção, acrescida de uma barreira *cap* com valor 140 ($H = 140$), apresenta-se como mostrado na Figura 8.5, quando utiliza-se os métodos binomial e trinomial.

Um comparativo entre a precificação ajustando-se os nós para caírem em cima da barreira, utilizando-se a equação 6.41, e o método binomial tradicional pode ser visto na Figura 8.6.

A Figura 8.7, mostra um comparativo entre a precificação ajustando-se os nós para caírem em cima da barreira, utilizando-se a equação 6.42, e o método binomial tradicional.

8.3.2 knock-out

Uma opção, com as características descritas no início desta seção, acrescida de uma barreira *knock-out* com valor 140 ($H = 140$), apresenta-se como mostrado na Figura 8.8, quando utiliza-se os métodos binomial e trinomial.

Já a Figura 8.9, mostra um comparativo entre a precificação ajustando-se os nós para caírem em cima da barreira *knock-out* ($H = 140$), utilizando-se a equação 6.41, e o método binomial tradicional.

Um comparativo entre a precificação ajustando-se os nós para caírem em cima da barreira *knock-out* ($H = 140$), utilizando-se a equação 6.42, e o método binomial tradicional pode ser visto na Figura 8.10.

8.3.3 knock-in

Uma opção, com as características descritas no início desta seção, acrescida de uma barreira *knock-in* com valor 140 ($H = 140$), apresenta-se como mostrado na Figura 8.11, quando utiliza-se os métodos binomial e trinomial. Pode-se observar que não há uma convergência uniforme.

Já a Figura 8.12, mostra um comparativo entre a precificação ajustando-se os nós para caírem em cima da barreira *knock-in* ($H = 140$), utilizando-se a equação 6.41.

A Figura 8.13, mostra um comparativo entre a precificação ajustando-se os nós para caírem em cima da barreira *knock-in* ($H = 140$), utilizando-se a equação 6.42.

8.3.4 Gráficos

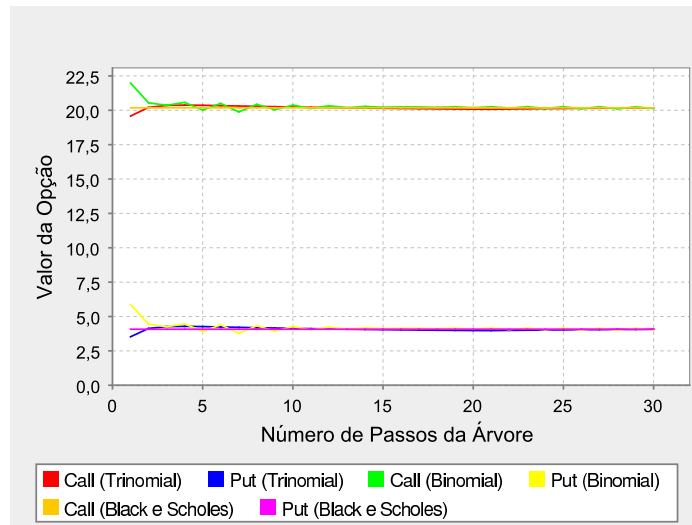


Figura 8.1: Opção europeia avaliada pelos métodos binomial e trinomial, avaliando convergência para o resultado de Black e Scholes

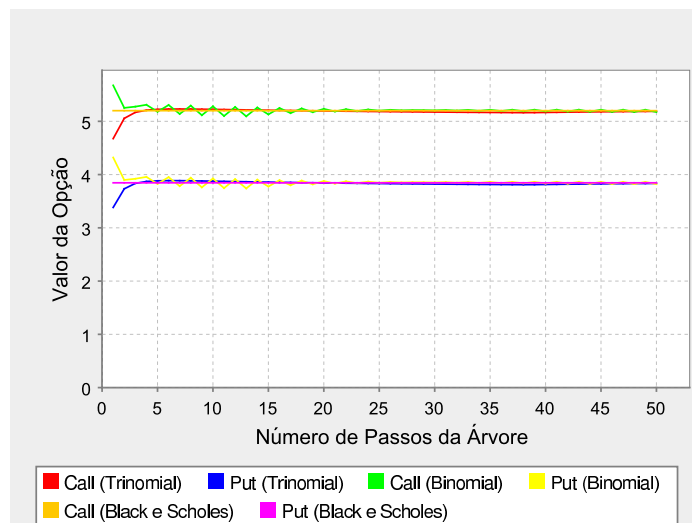


Figura 8.2: Opção europeia avaliada pelos métodos binomial e trinomial

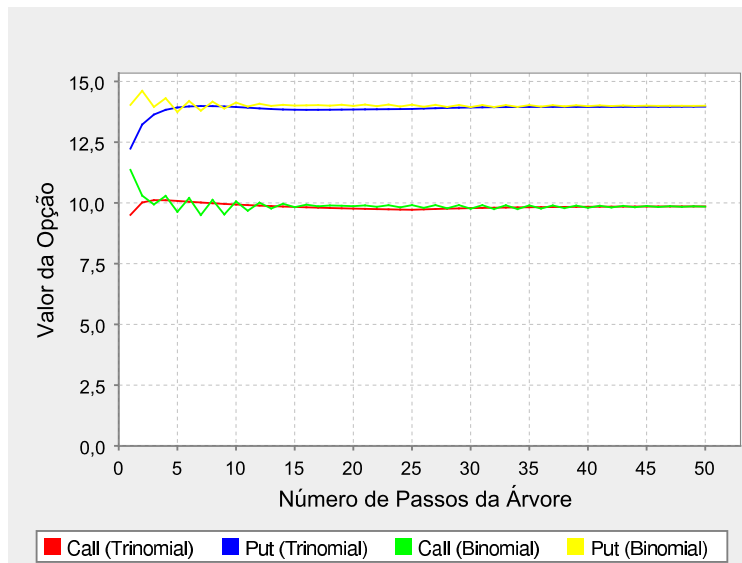


Figura 8.3: Opção americana avaliada pelos métodos binomial e trinomial

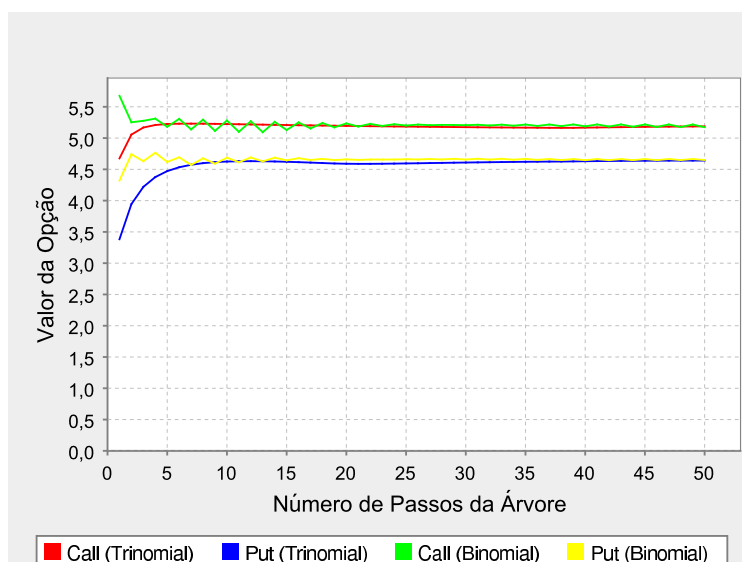


Figura 8.4: Opção americana avaliada pelos métodos binomial e trinomial

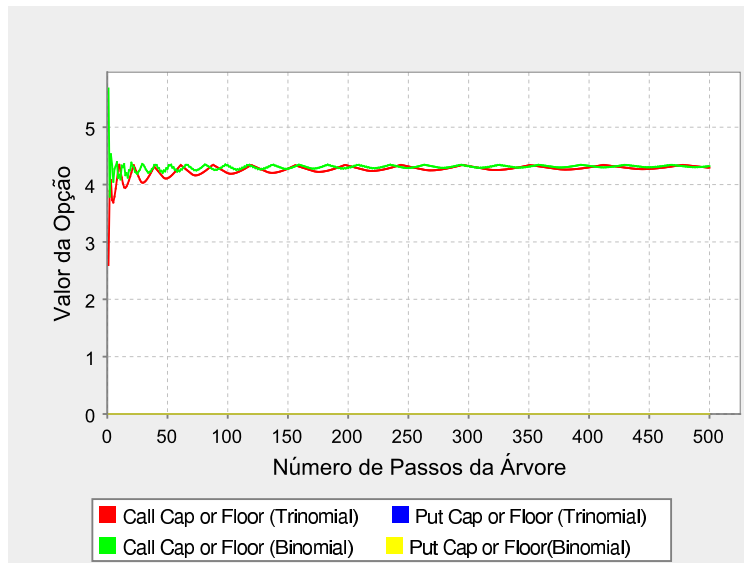


Figura 8.5: Opção americana com barreira *Cap* avaliada pelos métodos binomial e trinomial

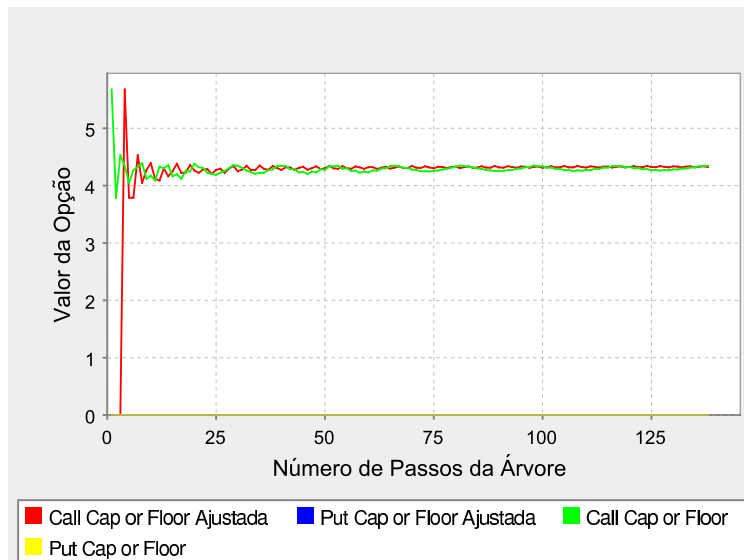


Figura 8.6: Opção americana com barreira *Cap* avaliada pelos métodos binomial e trinomial com ajuste obedecendo a equação 6.41

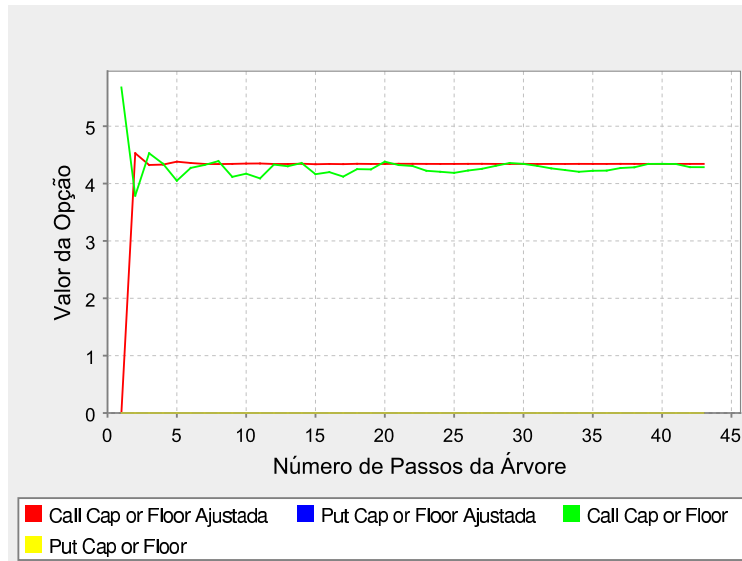


Figura 8.7: Opção americana com barreira *Cap* avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.42

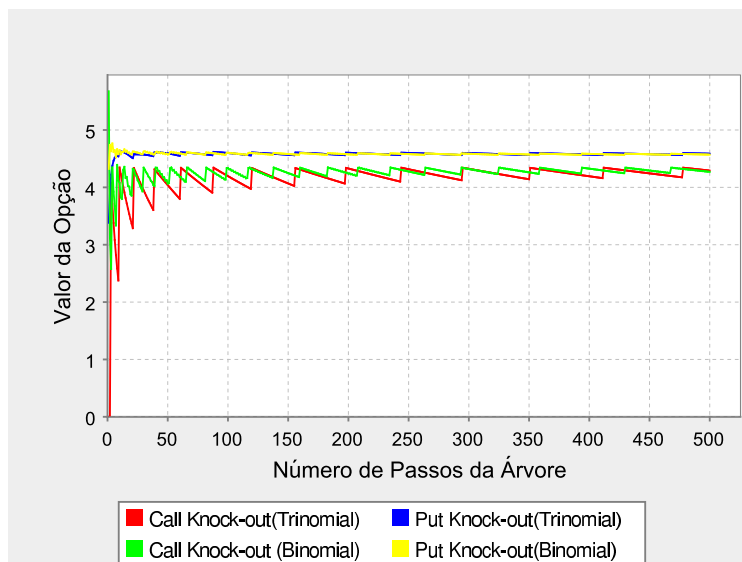


Figura 8.8: Opção americana com barreira *Knock-Out* avaliada pelos métodos binomial e trinomial

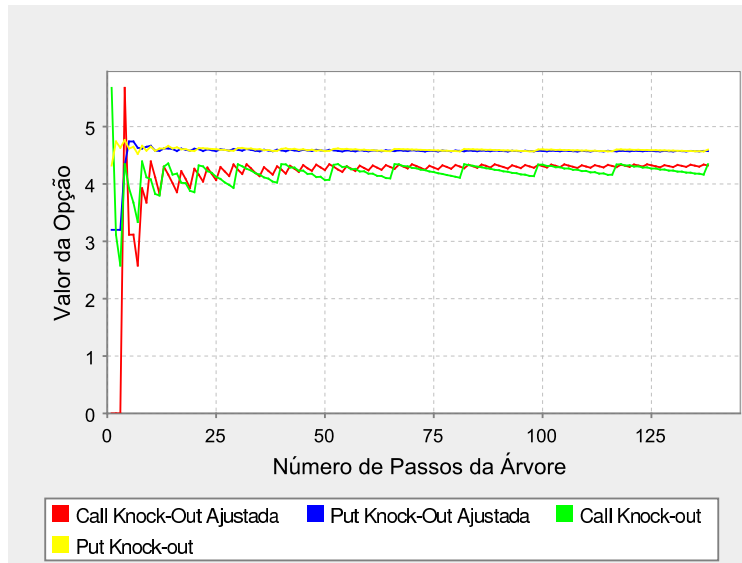


Figura 8.9: Opção americana com barreira *Knock-Out* avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.41

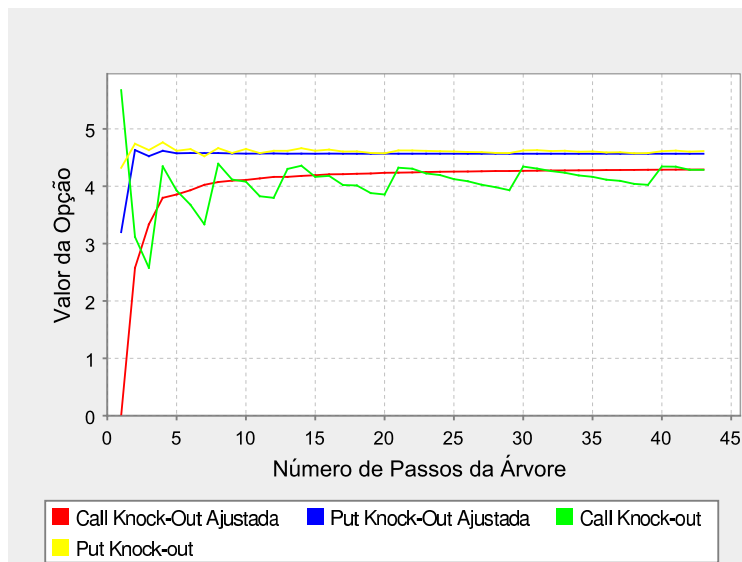


Figura 8.10: Opção americana com barreira *Knock-Out* avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.42

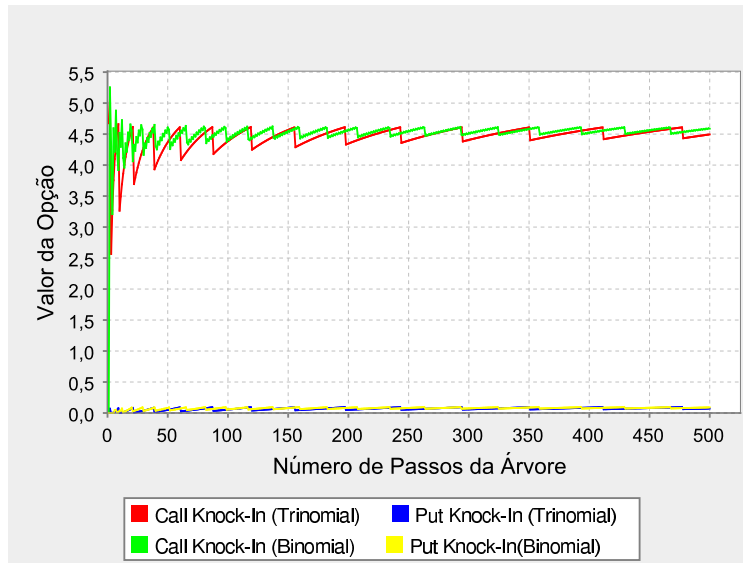


Figura 8.11: Opção americana com barreira *Knock-In* avaliada pelos métodos binomial e trinomial

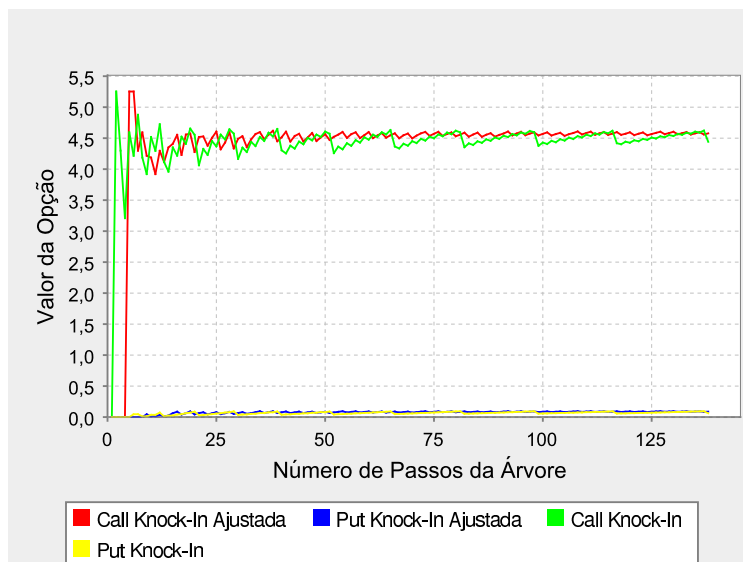


Figura 8.12: Opção americana com barreira *Knock-In* avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.41

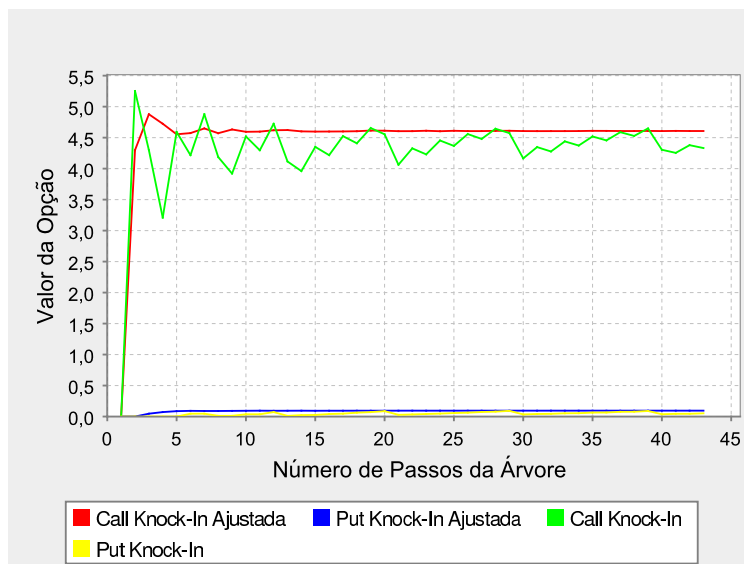


Figura 8.13: Opção americana com barreira *Knock-In* avaliada pelos métodos binomial e binomial com ajuste obedecendo a equação 6.42

Capítulo 9

CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou a aplicação de simulação computacional na área de Mercado de Capitais.

Com os resultados obtidos nas simulações dos métodos, como os demonstrados nos gráficos do capítulo anterior, tornou-se possível realizar uma comparação entre os métodos binomial e trinomial.

Os métodos binomial e trinomial, ao avaliarem as opções vanilla européias e americanas, apresentaram uma boa convergência, mostrando-se eficientes para a execução da mesma. O método trinomial converge mais rapidamente ao avaliar tais opções, embora a diferença para o binomial seja pouca.

Para a análise das opções americanas com barreiras, a convergência dos métodos não é tão satisfatória. O método binomial oferece bons valores quando ajusta-se os nós para que caiam sobre as barreiras. Utilizando-se a equação 6.42, obtém-se uma excelente aproximação. Observou-se que o método binomial, embora pouco convergente, apresenta convergência melhor que o método trinomial para opções com barreiras.

Capítulo 10

PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Como proposta para um trabalho futuro, pode-se efetuar a avaliação das opções através do método dos caminhos em árvores binomiais, utilizando-se também a técnica da interpolação de barreiras, tanto nas árvores binomiais como trinomiais.

Há também diferentes métodos que podem ser analisados, como a utilização do método de Monte Carlo, redes neurais, entre outros.

Poderia, também, ser criada uma calculadora de opções do agronegócio.

Referências Bibliográficas

- [ASNBACHER (2000)] ASNBACHER, M. The New Options Market. 4 th ed. New York: J. Wiley, 2000.
- [BARTTER e RENDLEMAN (1979)] BARTTER, B., RENDLEMAN, R. Two State Option Pricing. *Journal of Finance*, n.34, p. 1093-1119, 1979.
- [BOYLE (1986)] BOYLE P. P. Option Valuation Using a Three Jump Process. *International Options Journal*, n.3, p. 7-12, 1986.
- [BOYLE e LAU (1994)] BOYLE P. P., LAU S. H. Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method, *Journal of Derivatives 1*, pp. 6-14, 1994.
- [CASTRO et. al. (2002)] CASTRO JUNIOR, L. G. ; FONTES, R. E. ; AZEVEDO, A. F. . Base e risco de base da cafeicultura no sul de Minas Gerais. In: I Congresso de Administração, 2002, Alfenas. Anais do I Congresso de Administração, 2002.
- [COSTA (1999)] COSTA, C.L. da. Opções: Operando a Volatilidade. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros e Cultura Editores Associados, 1999.
- [COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979)] COX, J.C., ROSS, S.A., RUBINSTEIN, M. Option Pricing: a Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, n.7, p.229-263, 1979.
- [DERMAN et. al. (1995)] DERMAN E., KANI, I. ERGENER, D. BARDHAN, I. Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers. *Quantitative Strategies Research Notes*, Goldman Sachs, 1995.
- [FORTUNA (1999)] FORTUNA E. Mercado Financeiro: produtos e serviços. 13^a ed. Rio de Janeiro: QualityMark Ed., 1999.
- [HULL (1996)] HULL, John. Introdução aos Mercados Futuros e de Opções. 2a. ed., São Paulo: Cultura Editores Associados e Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1996.
- [HULL (2003)] HULL, J.C. Options, Futures, and Other Derivative Securities. 5th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2003.
- [MERTON (1973)] MERTON R. C. Theory of Rational Option Pricing, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141-183, 1973.
- [MONTEIRO et. al. (2002)] MONTEIRO, V. R.; VIEIRA NETO, C. A.; PANECZKO, R. T.; OLIVEIRA, A. S. "Limites de Preço para Opções Flexíveis: Cap, Floor, Knock-in, Knock-out e Rebate", *Resenha BM&F n. 152*, São Paulo, 2002.

- [PARKINSON (1977)] PARKINSON, M. Option Pricing: The American Put. *Journal of Business*, v.50, p. 21-36, jan. 1977.
- [RUBINSTEIN (1999)] RUBINSTEIN, M. Rubinstein on Derivatives. Berkeley: Risk Books, 1999.
- [RUDINI (2005)] SAMPAIO, R. M. BIGNOTTO E. C. Precificação de Opções Flexíveis com Barreiras por meio de Árvores Binomiais, *BM&F* v. 162, p. 69-75, São Paulo, 2005
- [SAITO (1998)] SAITO, R.; ROCHMAN, R. Análise de Métodos Numéricos para Precificação de Opções. Relatório do NPP, EAESP/FGV, 1998.
- [WILLMOTT et. al. (1995)] WILLMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.