



**PATRICH FABRICIO GABRIEL**

**TEOREMAS DE STOKES E DE GREEN:  
APLICAÇÃO COM O PLANÍMETRO**

**LAVRAS - MG  
2024**

**PATRICH FABRICIO GABRIEL**

**TEOREMAS DE STOKES E DE GREEN:  
APLICAÇÃO COM O PLANÍMETRO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dra. Adriana Xavier Freitas  
Orientadora

**LAVRAS - MG  
2024**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca  
Universitária da UFLA, com dados informados pelo próprio autor.**

Gabriel, Patrich Fabricio

Teoremas de Stokes e de Green : aplicação com o planímetro / Patrich Fabricio Gabriel. – Lavras : UFLA, 2024.

78 p. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional)–Universidade Federal de Lavras, 2024.

Orientadora: Profa. Dra. Adriana Xavier Freitas.

Coorientadores: .

Bibliografia.

1. Teorema de Green. 2. Teorema de Stokes. 3. planímetro.  
I. Freitas, Adriana Xavier. II. Universidade Federal de Lavras.  
III. Título.

A reprodução e a divulgação total ou parcial deste trabalho são autorizadas, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

**PATRICH FABRICIO GABRIEL**

**TEOREMAS DE STOKES E DE GREEN: APLICAÇÃO COM O PLANÍMETRO  
STOKES' AND GREEN'S THEOREMS: APPLICATION WITH THE PLANIMETER**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 23 de Abril de 2024.

Prof. Dr. Gustavo Cipolat Colvero            UFLA  
Prof. Dra. Neila Mara Gomes de Oliveira   PUC-Minas

Prof. Dra. Adriana Xavier Freitas  
Orientadora

**LAVRAS - MG  
2024**

## AGRADECIMENTOS

Em especial, à Professora Dra. Adriana Xavier Freitas, por toda confiança, ajuda, atenção, apoio, dedicação, incentivo e pela excelente orientação durante a trajetória.

Aos professores examinadores da banca por aceitarem avaliar esse trabalho, contribuindo de forma pontual e benéfica.

À Universidade Federal de Lavras, por toda a infraestrutura, aos servidores e de maneira especial aos professores que fazem ou fizeram parte da grade de docentes do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, que se dedicaram na transmissão dos conteúdos.

Aos colegas do curso, por toda troca de conhecimentos e apoio mútuo durante o período, principalmente com as caronas compartilhadas para frequentar às aulas.

Aos meus pais, por me ensinarem o valor da educação e me apoiando sempre que possível.

Às escolas: Escola Municipal Doutor Vasconcelos Costa, Escola Municipal Pio XII e Escola Estadual Senador Bueno de Paiva, nas quais estive ou estou durante o período do curso, as quais me permitiram alterar os horários de aula para que eu pudesse frequentar o curso às sextas-feiras.

A toda minha família e amigos que torceram por mim, me incentivando a continuar e a finalizar a jornada.

A todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para que esse sonho se tornasse possível.

E à Adriana Cássia de Faria, minha noiva, agradeço pelos incentivos, pela compreensão e, principalmente, por ser meu porto seguro.

*A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou  
sobre aquilo que todo mundo vê.  
(Arthur Schopenhauer)*

## RESUMO

Esse trabalho versa sobre o Teorema de Green e o Teorema de Stokes, abordando uma breve história sobre os teoremas e os estudiosos que dão nome a eles. Para o estudo dos teoremas, se faz uma revisão de pré-requisitos necessários por meio de um capítulo específico antes de aprofundar nos dois teoremas em si. É utilizada uma metodologia qualitativa exploratória, por meio da qual levantam-se pontos importantes ao se aplicar os teoremas na educação básica, utilizando para isso o planímetro. E por fim, são propostas atividades que possam usar o planímetro na resolução de cálculo de áreas de figuras diversas.

Palavras-chave: Teorema de Green; Teorema de Stokes; planímetro.

## **ABSTRACT**

This work deals with Green's Theorem and Stokes' Theorem, covering a brief history of theorems and the scholars who give them their name. For the study of theorems, a review of necessary prerequisites is carried out through a specific chapter before delving into the two theorems themselves. An exploratory qualitative methodology is used, through which important points are raised when applying theorems in basic education, using the planimeter for this. And finally, Activities are proposed that can use the planimeter to solve the calculation of areas of different figures.

**Keywords:** Green's Theorem; Stokes' Theorem; planimeter

## **INDICADORES DE IMPACTO**

Este trabalho estudou o Teorema de Green e o Teorema de Stokes, abordando, inicialmente, aspectos cruciais para o entendimento desses teoremas; e, sequentemente, o uso do planímetro e sua funcionalidade. Além disso, o trabalho gerou, como produto educacional, uma sequência didática voltada para os professores de matemática da educação básica. A sequência didática sugere o uso do planímetro em sala de aula, com exemplos contextualizados, no formato de estudo dirigido. O intuito é mostrar uma maneira divergente das fórmulas para cálculo de áreas diversas, motivando a aprendizagem deste conteúdo.

## **IMPACT INDICATORS**

This work studied Green's Theorem and Stokes' Theorem, addressing, initially, crucial aspects for understanding these theorems; and, subsequently, the use of the planimeter and its functionality. Furthermore, the work generated, as an educational product, a teaching sequence aimed at basic education mathematics teachers. The teaching sequence suggests the use of the planimeter in the classroom, with contextualized examples, in the directed study format. The aim is to show a different way of calculating formulas for different areas, motivating the learning of this content.

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1.1 – George Green . . . . .  | 13 |
| Figura 1.2 – George Stokes . . . . .   | 14 |
| Figura 1.3 – William Thomson (Lord Kelvin) . . . . .                               | 15 |
| Figura 2.1 – Esboço do Exemplo 2.2 . . . . .                                       | 17 |
| Figura 2.2 – Esboço do Exemplo 2.3 . . . . .                                       | 17 |
| Figura 2.3 – Curva Suave por Partes . . . . .                                      | 20 |
| Figura 2.4 – Caso bidimensional . . . . .  | 25 |
| Figura 2.5 – Caso tridimensional . . . . .   | 25 |
| Figura 2.6 – Exemplo 2.19 . . . . .  | 28 |
| Figura 2.7 – Superfície de Revolução . . . . .                                     | 33 |
| Figura 2.8 – Planos Tangentes . . . . .  | 33 |
| Figura 2.9 – Superfície Parametrizada . . . . .                                    | 37 |
| Figura 2.10 – Vetores Normais Unitários . . . . .                                  | 40 |
| Figura 2.11 – Duas Orientações de uma Superfície Orientável . . . . .              | 40 |
| Figura 2.12 – Orientação de uma Superfície Fechada . . . . .                       | 41 |
| Figura 3.1 – Região $D$ com fronteira $C$ . . . . .                                | 45 |
| Figura 3.2 – Orientação positiva e orientação negativa . . . . .                   | 45 |
| Figura 3.3 – Exemplos de regiões do tipo I . . . . .                               | 46 |
| Figura 3.4 – Exemplos de regiões do tipo II . . . . .                              | 47 |
| Figura 3.5 – Curva $C$ - Tipo I . . . . .  | 48 |
| Figura 3.6 – Curva $C$ - Tipo II . . . . .   | 50 |
| Figura 3.7 – Ilustração do Exemplo 3.4 . . . . .                                   | 51 |
| Figura 3.8 – União Finita de Regiões Simples . . . . .                             | 53 |
| Figura 3.9 – Ilustração do Exemplo 3.5 . . . . .                                   | 54 |
| Figura 3.10 – Exemplo de região com furo . . . . .                                 | 55 |
| Figura 3.11 – Divisão de região com furo em duas partes . . . . .                  | 56 |
| Figura 4.1 – Superfície Orientada com Vetor Normal Unitário $\mathbf{n}$ . . . . . | 60 |
| Figura 4.2 – Caso Especial do Teorema de Stokes . . . . .                          | 61 |
| Figura 5.1 – Planímetro Polar Mecânico . . . . .                                   | 66 |
| Figura 5.2 – Receptáculo do planímetro e seus elementos . . . . .                  | 66 |
| Figura 5.3 – Receptáculo do planímetro utilizado . . . . .                         | 67 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 5.4 – Constantes de calibragem do planímetro utilizado . . . . . | 67 |
| Figura 5.5 – Exemplo 1 do planímetro . . . . .                          | 69 |
| Figura 5.6 – Aplicação do Teorema de Green no planímetro . . . . .      | 70 |
| Figura 5.7 – Aulas 2 e 3 (1ª Sugestão de Figura) . . . . .              | 74 |
| Figura 5.8 – Aulas 2 e 3 (2ª Sugestão de Figura) . . . . .              | 74 |
| Figura 5.9 – Exemplo (Área Desmatada) . . . . .                         | 75 |
| Figura 5.10 – Exemplo 2 do planímetro . . . . .                         | 75 |
| Figura 5.11 – Exemplo 2 do planímetro - Resolução . . . . .             | 76 |

## SUMÁRIO

|              |  |           |
|--------------|--|-----------|
| <b>1</b>     | <b>INTRODUÇÃO</b>                                | <b>11</b> |
| <b>1.1</b>   | <b>Contexto Histórico</b>                        | <b>12</b> |
| <b>1.1.1</b> | <b>George Green</b>                              | <b>13</b> |
| <b>1.1.2</b> | <b>George Stokes</b>                             | <b>14</b> |
| <b>1.1.3</b> | <b>William Thomson (Lord Kelvin)</b>             | <b>15</b> |
| <b>2</b>     | <b>PRÉ-REQUISITOS</b>                            | <b>16</b> |
| <b>2.1</b>   | <b>Campos Vetoriais</b>                          | <b>16</b> |
| <b>2.2</b>   | <b>Integrais de Linha</b>                        | <b>18</b> |
| <b>2.3</b>   | <b>Rotacional e Divergente</b>                   | <b>30</b> |
| <b>2.4</b>   | <b>Superfícies Parametrizadas e Suas Áreas</b>   | <b>32</b> |
| <b>2.5</b>   | <b>Integrais de Superfície</b>                   | <b>37</b> |
| <b>3</b>     | <b>TEOREMA DE GREEN</b>                          | <b>45</b> |
| <b>4</b>     | <b>TEOREMA DE STOKES</b>                         | <b>60</b> |
| <b>5</b>     | <b>PLANÍMETRO</b>                                | <b>65</b> |
| <b>5.1</b>   | <b>Desvendando o Funcionamento do Planímetro</b> | <b>70</b> |
| <b>6</b>     | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                      | <b>77</b> |
|              | <b>REFERÊNCIAS</b>                               | <b>78</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

O cálculo de áreas é uma das habilidades constantes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, Brasil. (2018)) e no Currículo Referência Minas Gerais (CRMG, Minas Gerais. (2018)) em praticamente todos os anos de ensino da educação básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio), conforme podemos observar nos quadros a seguir:

Quadro 1.1 – Habilidades que envolvem cálculo de áreas - Ensino Fundamental

| <b>ANO</b> | <b>HABILIDADE</b>   |
|------------|---|
| 3º Ano     | (EF03MA21) Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos.  |
| 4º Ano     | (EF04MA34MG) Construir a ideia de área a partir de recobrimento de superfícies (ladrilhagem) com figuras planas.  |
| 4º Ano     | (EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.  |
| 5º Ano     | (EF05MA36MG) Calcular perímetros e áreas de figuras desenhadas em malhas quadriculadas com o uso das unidades padronizadas.   |
| 5º Ano     | (EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.   |
| 5º Ano     | (EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.  |
| 6º Ano     | (EF06MA49MG) Realizar conversões entre unidades de medidas de área.   |
| 6º Ano     | (EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. |
| 7º Ano     | (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.  |
| 7º Ano     | (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.   |
| 8º Ano     | (EF08MA38MG) Calcular área de figuras planas: triângulos, quadriláteros e círculos ou figuras compostas por algumas dessas.   |
| 8º Ano     | (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.   |

Fonte: BNCC e CRMG (2023).

Quadro 1.2 – Habilidades que envolvem cálculo de áreas - Ensino Médio

| <b>ANO</b>      | <b>HABILIDADE</b>   |
|-----------------|---|
| 1º, 2º e 3º Ano | (EM13MAT307A): Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.).  |
| 1º, 2º e 3º Ano | (EM13MAT506). Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas |

Fonte: BNCC e CRMG (2023).

Conforme apresentado nos quadros 1.1 e 1.2, o estudo de áreas fica restrito a regiões circulares, retangulares, quadradas, triangulares ou, ainda, a regiões que podem ser decompostas em alguma das citadas anteriormente. Porém, fazendo uma relação com o cotidiano, nem sempre uma região a se determinar sua área possui um formato específico ou pode ser decomposta inteiramente em outras.

Sendo assim, o propósito dessa dissertação é apresentar uma maneira não constante nos currículos de educação básica consultados que nos permite levar aos estudantes uma forma de calcular áreas diversas. Para isso, faremos uso do Teorema de Green, do Teorema de Stokes e do Planímetro.

A dissertação está estruturada em 4 capítulos, sendo que no primeiro serão apresentadas algumas definições necessárias para a compreensão de alguns tópicos fundamentais no estudo do Teorema de Green e do Teorema de Stokes.

Nos capítulos 2 e 3 são abordados os temas principais da dissertação, que são o Teorema de Green e o Teorema de Stokes. Já no quarto capítulo, é apresentado o desenvolvimento e a criação do planímetro, bem como seu funcionamento e utilização e, por fim, sua aplicação no estudo do cálculo de áreas planas no contexto da educação básica.

## 1.1 Contexto Histórico

O Teorema de Green leva o nome de George Green, enquanto o Teorema de Stokes se refere a George Stokes. Além deles, uma terceira pessoa, no caso William Thomson, foi muito importante na formulação, disseminação e aplicação dos dois teoremas. Nas subseções a seguir, abordaremos um pouco mais o contexto histórico desses estudiosos.

### 1.1.1 George Green

Figura 1.1 – George Green



Fonte: Disponível em <https://knoow.net/cienciasexactas/fisica/green-george-biografia/>.(2023)

O Teorema de Green leva o nome do cientista inglês George Green, nascido na cidade inglesa de Nottingham em 1793 e vindo a falecer de gripe na mesma cidade em 1841. Segundo Medeiros, Menezes e Pinto (2003), “não é muito claro em que fontes ou conhecimentos Green poderia ter se baseado para desenvolver seus trabalhos; as evidências sugerem a obra de um gênio autodidata muito mais do que o esforço e a interlocução de um grupo de cientistas”.

Sua primeira publicação foi

*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (Um Ensaio na Aplicação de Análise Matemática para as Teorias de Eletricidade e Magnetismo, em tradução literal), em 1828. Contudo, somente foram impressas 100 cópias. Esse panfleto continha um teorema equivalente ao que conhecemos como Teorema de Green hoje, mas não se tornou conhecido na época. (STEWART, 2013)

Somente em 1833, aos 40 anos, que Green ingressou na Universidade de Cambridge como aluno de graduação. Seus escritos foram encontrados em 1846 por William Thomson, conhecido por Lord Kelvin, que, segundo Stewart (2013), percebeu sua importância e os reimprimiu. Os estudos de Green serviram de base para os trabalhos de teoria do eletromagnetismo subsequentes de Thomson, Stokes e outros.

### 1.1.2 George Stokes

Figura 1.2 – George Stokes



Fonte: Disponível em <https://www.engquimicasantosp.com.br/2013/11/george-gabriel-stokes.html>.  
(2023)

O Teorema de Stokes tem seu nome em homenagem ao físico e matemático irlandês sir George Gabriel Stokes (1819-1903). Ele foi professor na Universidade de Cambridge e se sobressaiu por seus estudos sobre vazão de fluidos e luz (STEWART, 2013).

De acordo com Buffoni (2011), desde adolescente Stokes mostrava aptidão para a matemática, tendo como uma de suas inspirações para entrar no campo de pesquisa da hidrodinâmica o trabalho de Green.

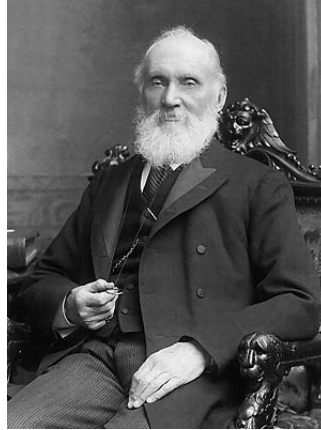
George Stokes fez uma colaboração com outro entusiasta de George Green, no caso, William Thomson (Lord Kelvin), compartilhando diversas cartas sobre eletricidade, magnetismo e escoamento em fluidos (BUFFONI, 2011).

Sendo que

O teorema que hoje chamamos de Teorema de Stokes foi descoberto por William Thomson. Stokes soube desse teorema por uma carta de Thomson em 1850 e pediu a seus estudantes que o demonstrassem em um exame em Cambridge, em 1854. Não se sabe se algum de seus estudantes foi capaz de fazê-lo. (STEWART, 2013)

### 1.1.3 William Thomson (Lord Kelvin)

Figura 1.3 – William Thomson (Lord Kelvin)



Fonte: Disponível em <https://rce.casadasciencias.org/rceapp/art/2015/247/>. (2023)

William Thomson nasceu na Irlanda do Norte, na cidade de Belfast, em 26 de junho de 1824. Segundo Buffoni (2011), em 1841 ele ingressou em Cambridge e publicou seus primeiros artigos; recebendo seu título de Bacharel em 1845 com honras máximas. Foi também nesse ano que Thomson recebeu uma cópia do trabalho de George Green.

George Green teve pouco reconhecimento público em vida. Foi William Thomson quem primeiro reconheceu o valor do trabalho de Green e o tornou de larga publicidade (BUFFONI, 2011).

Ainda de acordo com Buffoni (2011), em 1899, após 53 anos de uma associação proveitosa e feliz com a Universidade de Glasgow, ele se retirou da carreira acadêmica. William Thomson morreu em 17 de dezembro de 1907 em sua propriedade na Escócia.

## 2 PRÉ-REQUISITOS

Nesse capítulo serão apresentadas algumas definições necessárias para a compreensão de alguns tópicos referente ao estudo do Teorema de Green e do Teorema de Stokes.

### 2.1 Campos Vetoriais

Se a cada ponto  $\mathbf{P}$  do espaço ou de uma região do espaço (para efeito dessa dissertação tomaremos  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ ) associamos um vetor  $r = r(P)$  (em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ), então diremos que está definido um campo vetorial. Como exemplo, podemos citar campos vetoriais de velocidade (velocidade do vento, correntes oceânicas, fluxo passando por um aerofólio) e campos de força gravitacionais.

De modo geral, campo vetorial é uma função  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ )  $\rightarrow V_2$  (ou  $V_3$ ), sendo  $V_2$  e  $V_3$  espaço vetorial. Assim:

**Definição 2.1.** Seja  $D$  um subconjunto em  $\mathbb{R}^2$ . Nesse caso, um campo vetorial é uma função  $\mathbf{F}$  que associa a cada ponto  $(x, y)$  em  $D$  um vetor bidimensional  $\mathbf{F}(x, y)$ . De maneira análoga, seja  $E$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  é uma função  $\mathbf{F}$  que associa a cada ponto  $(x, y, z)$  em  $E$  um vetor tridimensional  $\mathbf{F}(x, y, z)$ .

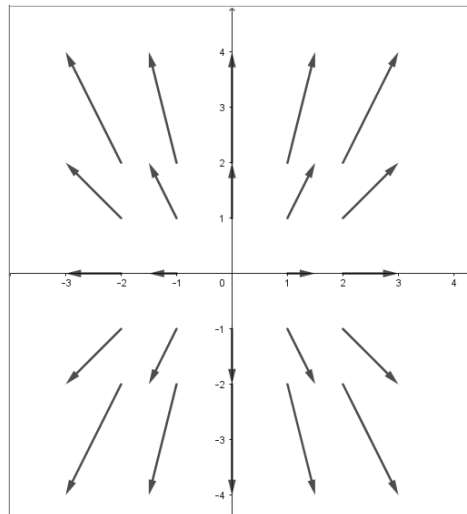
Em ambos os casos podemos escrever o vetor  $\mathbf{F}$ , seja ele bidimensional ou tridimensional, em termos de suas funções componentes, sendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y) &= P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \\ \mathbf{F}(x, y, z) &= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}\end{aligned}$$

**Exemplo 2.2.** Esboce o campo vetorial  $\mathbf{F}$  desenhando um diagrama para  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ .

Uma vez que  $\mathbf{F}(0, 1) = \mathbf{j}$ , desenhamos o vetor  $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$  começando no ponto  $(0, 1)$ . Como  $\mathbf{F}(2, 0) = \mathbf{i}$ , desenhamos o vetor  $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$  começando no ponto  $(2, 0)$ . Continuando desta maneira, podemos calcular vários outros valores representativos de  $\mathbf{F}(x, y)$ ; que estão ilustrados na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Esboço do Exemplo 2.2

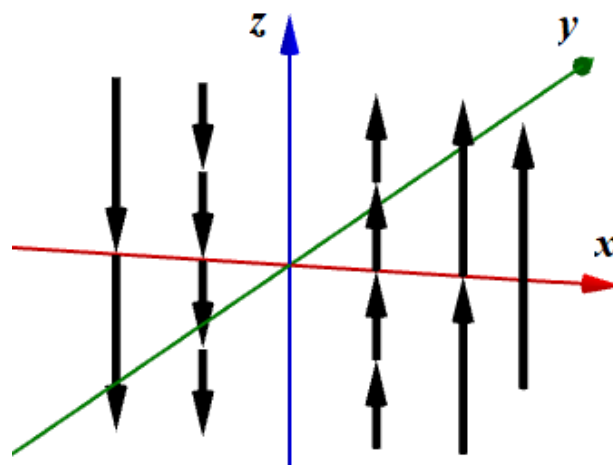


Fonte: Do Autor (2024)

**Exemplo 2.3.** Esboce o campo vetorial  $\mathbf{F}$  desenhando um diagrama para  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{k}$ .

O esboço está mostrado na Figura 2.2. Observe que todos os vetores são verticais, sendo que  $\mathbf{F}(x, y, z)$  é um vetor de comprimento igual a  $|x|$ . Desse modo, o comprimento dos vetores são maiores a medida que eles estão mais distantes do eixo  $z$ . Para  $x > 0$ , todos os vetores apontam na direção positiva do eixo  $z$ ; já para  $x < 0$ , os vetores apontam na direção negativa do eixo  $z$ .

Figura 2.2 – Esboço do Exemplo 2.3



Fonte: Do Autor (2024)

**Definição 2.4.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $D \subset \mathbb{R}^2$ , então o **gradiente** de  $f$  é a função vetorial  $\nabla f$ , que também pode ser chamada de campo vetorial gradiente, definido por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

Podemos reescrever a Definição 2.4 para o caso de uma função  $f$  de três variáveis.

**Definição 2.5.** Seja  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $E \subset \mathbb{R}^3$ , então o **gradiente** de  $f$  é a função vetorial  $\nabla f$  definida por

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

**Exemplo 2.6.** Determine o campo vetorial gradiente  $\nabla f$  de  $f(x, y) = xe^{xy}$ .

Utilizando a Definição 2.4 temos

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \\ \nabla f(x, y) &= (e^{xy} + xye^{xy}) \mathbf{i} + (x^2 e^{xy}) \mathbf{j} \end{aligned}$$

**Exemplo 2.7.** Determine o campo vetorial gradiente  $\nabla f$  de  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Utilizando a Definição 2.5 temos

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ \nabla f(x, y, z) &= \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Em seções futuras será importante sabermos se um campo vetorial  $\mathbf{F}$  é conservativo. Por isso segue a definição seguinte:

**Definição 2.8.** Um campo vetorial  $\mathbf{F}$  será conservativo se existir uma função  $f$  tal que  $\nabla f = \mathbf{F}$ .

## 2.2 Integrais de Linha

Segundo Stewart (2013), as integrais de linha foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Para podermos iniciar o estudo sobre as integrais de linha, é necessário o entendimento do que é uma curva suave.

**Definição 2.9.** Seja  $C$  uma curva plana dada pela equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , com  $t \in I$ . Dizemos que  $C$  é uma curva suave se  $\mathbf{r}'$  é contínua e  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$  em  $I$ .

Da definição do que é uma curva plana suave, podemos enunciar que:

**Definição 2.10.** Seja  $C$  uma curva plana suave dada por

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b,$$

Se  $f$  for uma função definida sobre essa curva, então a integral de linha de  $f$  sobre  $C$  é dada por

$$\int_C f(x,y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

se esse limite existir.

Se  $f$  é uma função contínua, temos que o limite na definição 2.10 sempre existe e podemos calcular a integral de linha da seguinte maneira:

$$\int_C f(x,y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (2.1)$$

O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que a curva seja percorrida uma única vez quando  $t$  cresce de  $a$  para  $b$ .

**Exemplo 2.11.** Calcule a integral de linha,  $\int_C y^3 ds$ , onde  $C$  é a curva  $x = t^3, y = t$  e  $0 \leq t \leq 2$ .

Da Equação 2.1 temos

$$\int_C y^3 ds = \int_0^2 t^3 \sqrt{(3t^2)^2 + 1^2} dt \quad (2.2)$$

$$= \int_0^2 t^3 \sqrt{9t^4 + 1} dt \quad (2.3)$$

Fazendo  $9t^4 + 1 = u$ , temos  $\frac{du}{dt} = 36t^3 \implies \frac{du}{36} = t^3 dt$ . Substituindo na integral 2.3 acima, temos

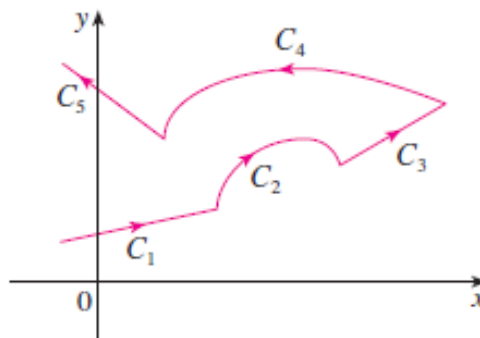
$$\begin{aligned} \int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{36} &= \\ \frac{1}{36} \int u^{\frac{1}{2}} du &= \\ \frac{1}{36} \left[ \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] &= \\ \frac{1}{54} \left[ (9t^4 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 &= \\ \frac{1}{54} (145\sqrt{145} - 1) & \end{aligned}$$

Logo,  $\int_C y^3 dS = \frac{1}{54} (145\sqrt{145} - 1)$ .

**Definição 2.12.** Seja  $C$  uma curva suave por partes; isto é,  $C$  é a união de um número finito de curvas suaves  $C_1, C_2, \dots, C_n$  onde, conforme visto na figura 2.3, o ponto inicial de  $C_{i+1}$  é o ponto final de  $C_i$ . Dessa forma, definimos a integral de  $f$  ao longo de  $C$  como a soma das integrais de  $f$  ao longo de cada parte suave de  $C$ :

$$\int_C f(x,y) dS = \int_{C_1} f(x,y) dS + \int_{C_2} f(x,y) dS + \dots + \int_{C_n} f(x,y) dS \quad (2.4)$$

Figura 2.3 – Curva Suave por Partes



Fonte: Stewart (2013)

**Exemplo 2.13.** Calcule a integral de linha  $\int_C (x + 2y) dS$  onde  $C$  consiste nos segmentos de reta de  $(0,0)$  a  $(2,1)$  e de  $(2,1)$  a  $(3,0)$ .

Da Equação 2.4, temos

$$\int_C (x+2y) dS = \int_{C_1} (x+2y) dS + \int_{C_2} (x+2y) dS \quad (2.5)$$

Para  $C_1$  e  $C_2$  temos

$$C_1 : x = t \quad y = \frac{t}{2} \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$C_2 : x = t \quad y = 3 - t \quad 2 \leq x \leq 3$$

Desse modo, segue que

$$\int_{C_1} (x+2y) dS = \int_0^2 2t \sqrt{\frac{5}{4}} dt \quad (2.6)$$

$$= 2\sqrt{\frac{5}{4}} \int_0^2 t dt \quad (2.7)$$

$$= 2\sqrt{\frac{5}{4}} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^2 \quad (2.8)$$

$$= 2\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot 2 \quad (2.9)$$

$$\int_{C_1} (x+2y) dS = 2\sqrt{5} \quad (2.10)$$

e

$$\int_{C_2} (x+2y) dS = \int_2^3 (6-t) \sqrt{2} dt \quad (2.11)$$

$$= \sqrt{2} \int_2^3 (6-t) dt \quad (2.12)$$

$$= \sqrt{2} \left[ 6t - \frac{t^2}{2} \right]_2^3 \quad (2.13)$$

$$\int_{C_2} (x+2y) dS = \frac{7\sqrt{2}}{2} \quad (2.14)$$

Substituindo as Equações 2.10 e 2.14 na Equação 2.5, temos que:

$$\int_C (x+2y) dS = \int_{C_1} (x+2y) dS + \int_{C_2} (x+2y) dS = 2\sqrt{5} + \frac{7\sqrt{2}}{2} \quad (2.15)$$

Portanto, a integral de linha  $\int_C f(x+2y) dS$ , onde  $C$  consistia nos segmentos de reta dados pelo enunciado é igual a  $2\sqrt{5} + \frac{7\sqrt{2}}{2}$ .

Utilizando ainda a Definição 2.10, temos que duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se  $\Delta s_i$  por  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ou  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$  nessa Definição 2.10. Elas são chamadas, respectivamente, de integrais de linha de  $f$  ao longo de  $C$  com relação a  $x$  e  $y$ . Logo,

$$\int_C f(x,y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \quad e \quad (2.16)$$

$$\int_C f(x,y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i \quad (2.17)$$

Se quisermos distinguir a integral de linha original  $\int_C f(x,y) dS$  das Equações 2.16 e 2.17, esta é chamada de integral de linha com relação ao comprimento do arco.

As integrais de linha com relação a  $x$  e  $y$ , dadas pelas Equações 2.16 e 2.17, podem ser calculadas escrevendo-se tudo em termos de  $t$ :

$$x = x(t), y = y(t), dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt \quad (2.18)$$

Dessa maneira,

$$\int_C f(x,y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt \quad e \quad (2.19)$$

$$\int_C f(x,y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt \quad (2.20)$$

Na sequência, apresentamos a definição de uma curva espacial suave:

**Definição 2.14.** Seja  $C$  uma curva espacial suave, no intervalo  $a \leq t \leq b$ , dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

A integral de linha de  $f$  ao longo de  $C$  é definida de modo semelhante ao caso anterior (curvas planas):

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i$$

E, também de maneira análoga ao caso anterior, essa integral pode ser calculada como

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (2.21)$$

**Exemplo 2.15.** Calcule  $\int_C (x + y + z) ds$ , onde  $C$  é a hélice  $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$  ao longo de  $0 \leq t \leq \pi$ .

Aplicando a Equação 2.21 temos:

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_0^\pi (\cos t + \sin t + t) \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1^2} dt \\ &= \int_0^\pi (\cos t + \sin t + t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \\ &= \int_0^\pi (\cos t + \sin t + t) \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^\pi (\cos t + \sin t + t) dt \\ &= \sqrt{2} \left[ \sin t - \cos t + \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi \\ &= \sqrt{2} \left[ \left(0 + 1 + \frac{\pi^2}{2}\right) - (0 - 1 + 0) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{2} + 1 \right] \\ &= 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Logo,  $\int_C (x + y + z) ds = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}$ .

Podemos também definir integrais de linha ao longo de  $C$  em relação à  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Observe que

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta z_i \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt\end{aligned}$$

Desse modo, podemos calcular integrais escrevendo tudo  $(x, y, z, dx, dy, dz)$  em termos do parâmetro  $t$ , como segue:

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (2.22)$$

**Exemplo 2.16.** Calcule a integral de linha  $\int_C z dx + x dy + y dz$ ,  $C : x = t^2, y = t^3, z = t^2$  e  $0 \leq t \leq 1$ .

Como  $x = t^2, y = t^3$  e  $z = t^2$ , então  $dx = 2t dt, dy = 3t^2 dt$  e  $dz = 2t dt$ . Desse modo, aplicando a Equação 2.22, temos

$$\begin{aligned}\int_C z dx + x dy + y dz &= \int_0^1 t^2 \cdot 2t dt + t^2 \cdot 3t^2 dt + t^3 \cdot 2t dt \\ &= \int_0^1 (2t^3 + 3t^4 + 2t^4) dt \\ &= \int_0^1 (5t^4 + 2t^3) dt \\ &= \left[ t^5 + \frac{t^4}{2} \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Logo,  $\int_C z dx + x dy + y dz = \frac{3}{2}$ .

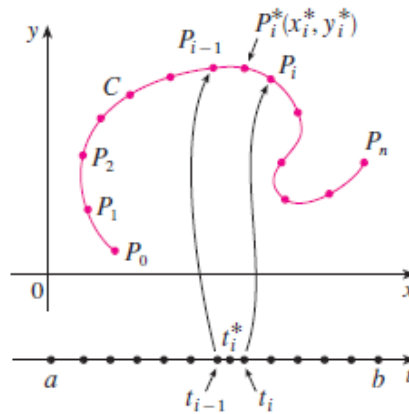
Em funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se considerarmos que  $f(x)$  é uma força variável que move uma partícula de  $a$  até  $b$  ao longo do eixo  $x$ , então o trabalho  $\mathbf{W}$  feito por essa força nesse deslocamento é dado por

$$\mathbf{W} = \int_a^b f(x) dx.$$

Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  for um campo de força contínuo em  $\mathbb{R}^3$ , como calcular o trabalho exercido por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave  $C$ ?

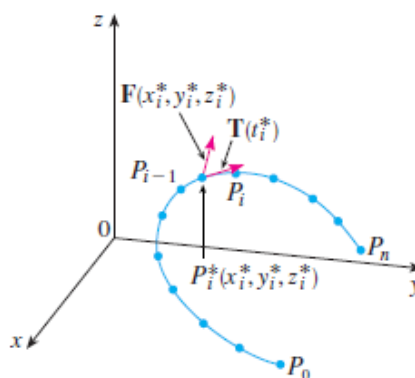
Dividiremos  $C$  em sub-arcos  $P_{i-1}P_i$  com comprimentos  $\Delta S_i$  através da divisão do intervalo de parâmetros  $[a, b]$  em sub-intervalos de igual largura. Veja a Figura 2.4 para o caso bidimensional e a Figura 2.5 para o caso tridimensional.

Figura 2.4 – Caso bidimensional



Fonte: Stewart (2013)

Figura 2.5 – Caso tridimensional



Fonte: Stewart (2013)

Depois, escolhemos um ponto  $P_i^* = (x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  no  $i$ -ésimo sub-arco correspondente ao valor do parâmetro  $t_i^*$ .

Se fizermos  $\Delta S_i$  pequeno, o movimento da partícula de  $P_{i-1}$  para  $P_i$  na curva ocorre aproximadamente na direção de  $\mathbf{T}(t_i^*)$ , em que  $\mathbf{T}(t_i^*)$  é o vetor tangente unitário a  $P_i^*$ . Logo, o

trabalho, denotado por  $\mathbf{W}$ , feito pela força  $\mathbf{F}$  para mover a partícula de  $P_{i-1}$  para  $P_i$  é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta S_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta S_i$$

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de  $C$  é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta S_i \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{T}(x, y, z)$  é o vetor tangente unitário no ponto  $(x, y, z)$  em  $C$ . Note que quanto maior for o valor de  $n$ , melhor é a aproximação na Equação 2.23.

Então, definimos o trabalho  $\mathbf{W}$  feito por um campo de força  $\mathbf{F}$  como o limite da soma de Riemann dada pela Equação 2.23.

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta S_i \quad (2.24)$$

A Equação 2.24 diz que o trabalho é a integral com relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força.

Se a curva  $C$  é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

e, pela Equação 2.21, podemos reescrever a Equação 2.24 como

$$W = \int_a^b \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (2.25)$$

A Equação 2.25 ocorre em outras áreas da física e é frequentemente abreviada como

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Dessa forma, em relação aos campos vetoriais contínuos, podemos definir a integral de linha sobre eles como:

**Definição 2.17.** Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave  $C$  dada pela função vetorial  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ . Logo, a integral de linha de  $\mathbf{F}$  ao longo de  $C$  é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds,$$

No caso da definição 2.17,  $\mathbf{F}(r(t))$  é equivalente à  $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$ .

**Exemplo 2.18.** Calcule a integral de linha  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j}$  e  $C$  é dada pela função vetorial

$$r(t) = 11t^4\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Temos  $\mathbf{F}(r(t)) = 11t^7\mathbf{i} + 3t^6\mathbf{j}$  e  $r'(t) = 44t^3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ , então, aplicando a Definição 2.17, encontramos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (484t^{10} + 9t^8) dt \\ &= [44t^{11} + t^9]_0^1 \\ &= 45 \end{aligned}$$

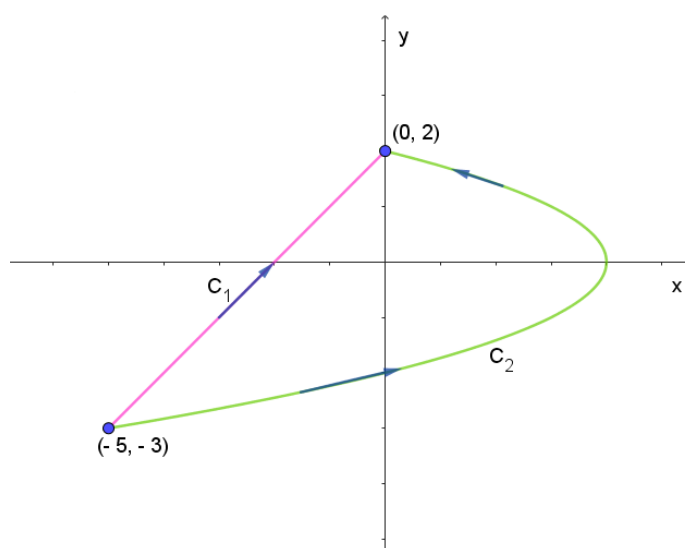
Desse modo,  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 45$ .

**Exemplo 2.19.** Calcule

$$\int_C y^2 dx + x dy$$

onde  $C = C_1$  é o segmento de reta de  $(-5, -3)$  a  $(0, 2)$  e  $C = C_2$  é o arco da parábola  $x = 4 - y^2$  de  $(-5, -3)$  a  $(0, 2)$ .

Figura 2.6 – Exemplo 2.19



Fonte: Do Autor (2024)

A Figura 2.6 apresenta as curvas  $C_1$  e  $C_2$  dadas pelo enunciado. Em relação à  $C_1$ , podemos parametrizar o segmento de reta como

$$x = 5t - 5 \quad y = 5t - 3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

Desse modo, temos

$$dx = 5 dt \quad e \quad dy = 5 dt$$

Logo, utilizando as Equações 2.19 e 2.20, segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} y^2 dx + x dy &= \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt + \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt \\
 &= \int_0^1 (5t - 3)^2 (5) dt + (5t - 5)(5) dt \\
 &= \int_0^1 (25t^2 - 30t + 9)(5 dt) + (25t - 25) dt \\
 &= \int_0^1 (125t^2 - 150t + 45) dt + (25t - 25) dt \\
 &= \int_0^1 (125t^2 - 125t + 20) dt \\
 &= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt \\
 &= 5 \left[ \frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t \right]_0^1 \\
 &= 5 \cdot \left( \frac{25}{3} - \frac{25}{2} + 4 \right) \\
 &= 5 \cdot \left( -\frac{1}{6} \right) \\
 &= -\frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

Já para o arco de parábola, como ele está em função de  $y$ , usamos a seguinte parametrização para  $C_2$ :

$$x = 4 - y^2 \quad y = y \quad -3 \leq y \leq 2$$

Dessa maneira temos que

$$dx = -2y dy$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_{C_2} y^2 dx + x dy &= \int_{-3}^2 y^2(-2y) dy + (4 - y^2) dy \\
 &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4) dy \\
 &= \left[ -\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y \right]_{-3}^2 \\
 &= -\frac{8}{3} + \frac{87}{2} = \frac{245}{6}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_C y^2 dx + x dy &= \int_{C_1} y^2 dx + x dy + \int_{C_2} y^2 dx + x dy \\
 &= -\frac{5}{6} + \frac{245}{6} \\
 &= 40
 \end{aligned}$$

### 2.3 Rotacional e Divergente

O rotacional e o divergente são duas operações que podemos aplicar em um campo vetorial. Essas operações são muito utilizadas na física. Cada uma delas lembra uma derivação, mas enquanto o rotacional produz um campo vetorial, o divergente gera um campo escalar. Essas duas operações serão utilizadas nos capítulos 3 e 4.

**Definição 2.20.** Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e as derivadas parciais de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  existem, então o rotacional de  $\mathbf{F}$  é o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\text{rot}\mathbf{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (2.26)$$

Podemos reescrever a Equação 2.26 usando notação de operadores. Introduzindo o operador diferencial vetorial  $\nabla$ , chamado “nabla”, como mostrado a seguir:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Quando “nabla” opera sobre uma função escalar, ele produz o gradiente de  $f$ :

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Se pensarmos em  $\nabla$  como um vetor de componentes  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  e  $\frac{\partial}{\partial z}$ , podemos também considerar o produto vetorial formal de  $\nabla$  pelo campo vetorial  $\mathbf{F}$  como

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

$$= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (2.28)$$

$$= \text{rot } \mathbf{F} \quad (2.29)$$

Desse modo, a maneira mais fácil de lembrar a Definição 2.20 é pela expressão simbólica a seguir:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \quad (2.30)$$

**Exemplo 2.21.** Determine o rotacional do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z \mathbf{i} + yze^x \mathbf{k}$ .

Sendo  $P(x, y, z) = xye^z$ ,  $Q(x, y, z) = 0$  e  $R(x, y, z) = yze^x$ , temos

$$\frac{\partial R}{\partial y} = ze^x, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = xye^z, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = yze^x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = xe^z. \text{ Desse modo,}$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = (ze^x - 0)\mathbf{i} + (xye^z - yze^x)\mathbf{j} + (0 - xe^z)\mathbf{k} \implies \text{rot } \mathbf{F} = ze^x\mathbf{i} + y(xe^z - ze^x)\mathbf{j} - xe^z\mathbf{k}.$$

Uma outra solução poderia ser usando a Equação 2.30, como segue:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xye^z & 0 & yze^x \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial(yze^x)}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial(xye^z)}{\partial z} \right) \mathbf{j} - \left( \frac{\partial(xye^z)}{\partial y} \right) \mathbf{k} - \left( \frac{\partial(yze^x)}{\partial x} \right) \mathbf{j} \\ &= \left( \frac{\partial(yze^x)}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial(xye^z)}{\partial z} - \frac{\partial(yze^x)}{\partial x} \right) \mathbf{j} - \left( \frac{\partial(xye^z)}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= ze^x \mathbf{i} + y(xe^z - ze^x) \mathbf{j} - xe^z \mathbf{k} \end{aligned}$$

**Definição 2.22.** Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  e  $\frac{\partial R}{\partial z}$  existem, então o divergente de  $\mathbf{F}$  é uma função de três variáveis definida por

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

**Exemplo 2.23.** Determine o divergente do mesmo campo vetorial dado no Exemplo 2.21.

O divergente de  $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z \mathbf{i} + yze^x \mathbf{k}$ , utilizando a Definição 2.22, é dado por

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = ye^z + 0 + ye^x = y(e^z + e^x).$$

## 2.4 Superfícies Parametrizadas e Suas Áreas

Para parametrizar uma superfície, podemos escrevê-la por uma função vetorial  $\mathbf{r}(u, v)$  de dois parâmetros  $u$  e  $v$ .

**Definição 2.24.** Seja

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (2.31)$$

uma função a valores vetoriais definida sobre uma região  $D$  do plano  $uv$ . Então:

$$x(u, v), y(u, v) \text{ e } z(u, v),$$

os componentes de funções de  $\mathbf{r}$ , serão funções das duas variáveis  $u$  e  $v$  com domínio  $D$ . O conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad (2.32)$$

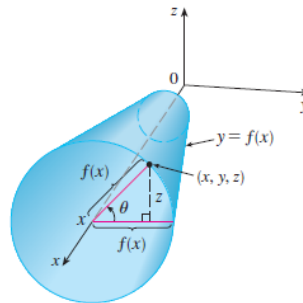
e  $(u, v)$  varia ao longo de  $D$ , é chamado de superfície parametrizada  $S$  e as Equações 2.32 são chamadas equações parametrizadas de  $S$ .

Cada escolha de  $u$  e  $v$  resulta um ponto em  $S$ ; fazendo todas as escolhas, temos todos os pontos de  $S$ . Ou seja, a superfície é traçada pela ponta do vetor posição  $\mathbf{r}(u, v)$  enquanto  $(u, v)$  se move ao longo da região  $D$ .

As superfícies de revolução podem ser representadas na forma parametrizada e, dessa maneira, seus gráficos podem ser traçados com o auxílio de *softwares* computacionais.

**Exemplo 2.25.** Considere a superfície  $S$  obtida pela rotação da curva  $y = f(x)$ , com  $a \leq x \leq b$ , sobre o eixo  $x$ , onde  $f(x) \geq 0$ . Seja  $\theta$  o ângulo de rotação, conforme visto na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Superfície de Revolução



Fonte: Stewart (2013).

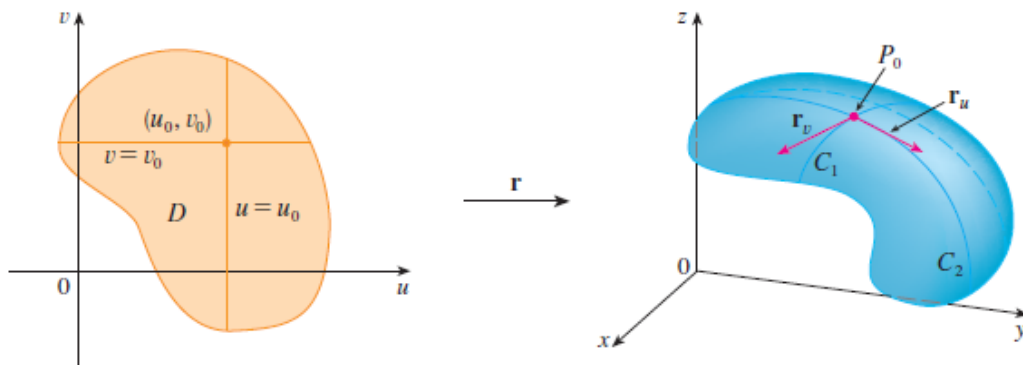
Se  $(x, y, z)$  é um ponto em  $S$ , então

$$x = x \quad y = f(x) \cos \theta \quad z = f(x) \sin \theta \quad (2.33)$$

Logo, tomamos  $x$  e  $\theta$  como parâmetros e visualizamos as Equações 2.33 como equações paramétricas de  $S$ . O domínio do parâmetro é dado por  $a \leq x \leq b$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Nosso próximo objetivo é determinar o plano tangente em um ponto  $P_0$  e uma superfície parametrizada descrita pela Equação 2.31. Se mantivermos  $u$  constante usando  $u = u_0$ , então  $\mathbf{r}(u_0, v)$  torna-se uma função vetorial de parâmetro único  $v$  e, portanto, define uma curva de grade  $C_1$  em  $S$ , conforme Figura 2.8.

Figura 2.8 – Planos Tangentes



Fonte: Stewart (2013).

O vetor tangente a  $C_1$  em  $P_0$  é obtido tomando-se a derivada parcial de  $\mathbf{r}$  em relação a  $v$ :

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_o, v_o)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_o, v_o)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_o, v_o)\mathbf{k} \quad (2.34)$$

Do mesmo modo, se mantivermos  $v$  constante usando  $v = v_o$ , então  $\mathbf{r}(u, v_o)$  torna-se uma função vetorial de parâmetro único  $u$  e, portanto, define uma curva de grade  $C_2$  em  $S$ , cujo vetor tangente em  $P_0$  é

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_o, v_o)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_o, v_o)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_o, v_o)\mathbf{k} \quad (2.35)$$

Se  $r_u \times r_v$  não for igual à zero, então a superfície  $S$  é chamada suave, isto é, não possui “bicos”. Para uma superfície suave, o plano tangente é o que contém os vetores tangente  $r_u$  e  $r_v$  e o vetor normal ao plano tangente é  $r_u \times r_v$ .

**Exemplo 2.26.** Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada

$$x = u + v \quad y = 3u^2 \quad z = u - v$$

no ponto  $(2, 3, 0)$ .

Inicialmente vamos calcular os vetores tangente usando as Equações 2.34 e 2.35

$$r_v = \mathbf{i} - \mathbf{k} \quad (2.36)$$

e

$$r_u = \mathbf{i} + 6u\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (2.37)$$

Sendo assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\begin{aligned} r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 6u & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -6u\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6u\mathbf{k} \end{aligned}$$

Observe que o ponto  $(2, 3, 0)$  corresponde aos valores dos parâmetros  $u = 1$  e  $v = 1$ , de modo que o vetor normal ali é

$$-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Logo, uma equação do plano tangente em  $(2, 3, 0)$  é

$$\begin{aligned} -6(x-2) + 2(y-3) - 6z &= 0 \\ -6x + 12 + 2y - 6 - 6z &= 0 \\ -6x + 2y - 6z &= -6 \end{aligned}$$

Iremos definir agora a área de uma superfície parametrizada geral dada inicialmente pela Equação 2.31, ou seja,

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

**Definição 2.27.** Se uma superfície parametrizada suave  $S$  é dada pela Equação 2.31 (reescrita logo acima), na qual  $(u, v) \in D$ ; e  $S$  é coberta uma única vez quando  $(u, v)$  abrange todo o domínio  $D$  dos parâmetros, então a área da superfície de  $S$  é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

onde

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

**Exemplo 2.28.** Determine a área da esfera de raio  $a$ .

Considere a seguinte representação parametrizada da esfera:

$$x = a \sin \phi \cos \theta \quad y = a \sin \phi \sin \theta \quad \text{e} \quad z = a \cos \phi$$

no qual os domínios dos parâmetros é o conjunto  $D$ ,

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Calcularemos primeiro  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \sin \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta) \mathbf{i} + (a^2 \sin^2 \phi \sin \theta) \mathbf{j} + (a^2 \sin \phi \cos \phi) \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

O que implica em

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + a^4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\
 &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\
 &= a^2 \sqrt{\sin^2 \phi} \\
 &= a^2 \sin \phi
 \end{aligned}$$

Como  $\sin \phi \geq 0$  para  $0 \leq \phi \leq \pi$ , temos, pela Definição 2.27 que a área  $A$  da esfera é

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi d\phi d\theta \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta [-\cos \phi]_0^\pi \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta (1 + 1) \\
 &= 2a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= 2a^2 [\theta]_0^{2\pi} \\
 &= 4\pi a^2
 \end{aligned}$$

Então a área da esfera de raio  $a$  é igual a  $4\pi a^2$ .

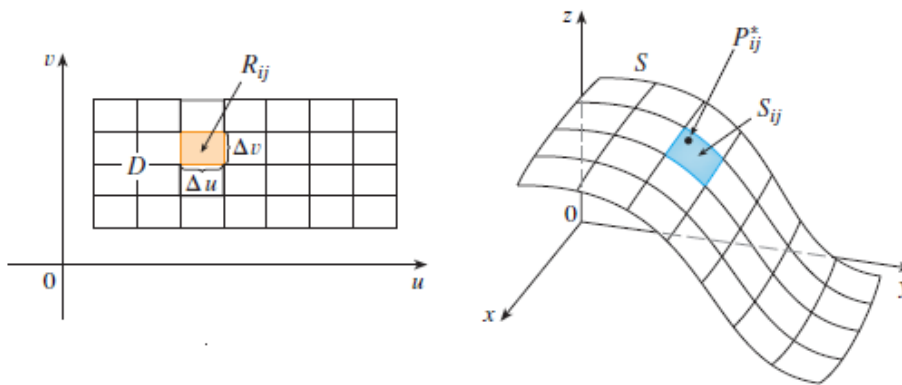
## 2.5 Integrais de Superfície

Suponha que a superfície  $S$  tenha equação vetorial conforme a Equação 2.31, ou seja,

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \text{ na qual } (u, v) \in D.$$

Admita inicialmente que o domínio dos parâmetros  $D$  seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos  $R_{ij}$  com dimensões  $\Delta u$  e  $\Delta v$ . Então a superfície  $S$  é dividida em retalhos correspondentes  $S_{ij}$ , como na Figura 2.9.

Figura 2.9 – Superfície Parametrizada



Fonte: Stewart (2013)

Seja  $f$  uma função de três variáveis cujo domínio inclui a superfície  $S$ . Calcularemos  $f$  em um ponto  $P_{ij}^*$  de cada retalho, multiplicando pela área  $\Delta S_{ij}$  do retalho e formando a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

Na sequência, tomamos o limite quando o número de retalhos aumenta e definimos a integral de superfície de  $f$  na superfície  $S$  como

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij} \quad (2.38)$$

Para calcularmos a integral de superfície na Equação 2.38, devemos aproximar a área do retalho  $\Delta S_{ij}$  pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente, no qual

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v,$$

onde

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}.$$

são os vetores tangentes em um canto de  $S_{ij}$ .

Se as componentes são contínuas e  $\mathbf{r}_u$  e  $\mathbf{r}_v$ , vetores tangentes em um canto de  $S_{ij}$ , são não nulos e não paralelos no interior de  $D$ , então podemos demonstrar a próxima igualdade.

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA \quad (2.39)$$

A Equação 2.39 nos permite calcular uma integral de superfície, transformando-a em uma integral dupla sobre o domínio dos parâmetros  $D$ .

**Exemplo 2.29.** Calcule a integral de superfície

$$\iint_S (x + y + z) dS$$

onde  $S$  é o paralelogramo com equações paramétricas  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ ,  $z = 1 + 2u + v$ ,  $0 \leq u \leq 2$  e  $0 \leq v \leq 1$ .

Temos que

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + (1 + 2u + v)\mathbf{k}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad \text{e} \quad (2.42)$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} \quad (2.43)$$

Substituindo as Equações 2.40 e 2.43 na Equação 2.39, temos:

$$\begin{aligned}
 \iint_S (x+y+z) dS &= \int_0^2 \int_0^1 (u+v+u-v+1+2u+v) \sqrt{14} dv du \\
 &= \sqrt{14} \int_0^2 \int_0^1 (4u+v+1) dv du \\
 &= \sqrt{14} \int_0^2 \left[ 4uv + \frac{v^2}{2} + v \right]_0^1 du \\
 &= \sqrt{14} \int_0^2 \left( 4u + \frac{3}{2} \right) du \\
 &= \sqrt{14} \left[ 2u^2 + \frac{3}{2}u \right]_0^2 \\
 &= 11\sqrt{14}
 \end{aligned}$$

Logo, a integral de superfície  $\iint_S (x+y+z) dS$ , com os parâmetros dados pelo enunciado, é igual a  $11\sqrt{14}$ .

Toda superfície que é gráfico de função pode ser parametrizada de um dos seguintes modos:

- 1)  $x = x \quad y = y \quad z = h(x, y)$
- 2)  $x = x \quad y = g(x, z) \quad z = z$
- 3)  $x = f(y, z) \quad y = y \quad z = z$

Para o caso 1) tem-se

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) \mathbf{k}; \quad \text{logo} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \text{e} \quad (2.45)$$

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1} \quad (2.46)$$

Dessa maneira, substituindo a Equação 2.46 na Equação 2.39 temos que

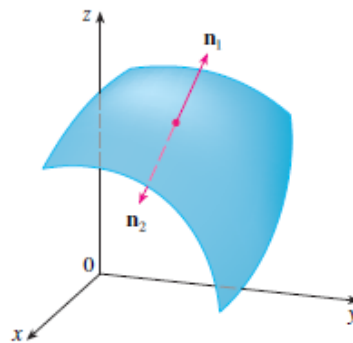
$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_D f(x,y,g(x,y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \quad (2.47)$$

Existem formas análogas para os casos 2) e 3).

Para definir integrais de superfície de campos vetoriais, precisa-se descartar superfícies não orientáveis. Portanto, iremos considerar apenas as superfícies orientáveis (aquelas com dois lados).

**Definição 2.30.** Considere uma superfície  $S$  que tenha um plano tangente em todos os pontos  $(x,y,z)$  em  $S$  (exceto nos pontos da fronteira). Existem dois vetores normais unitários  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$  em  $(x,y,z)$ , conforme Figura 2.10.

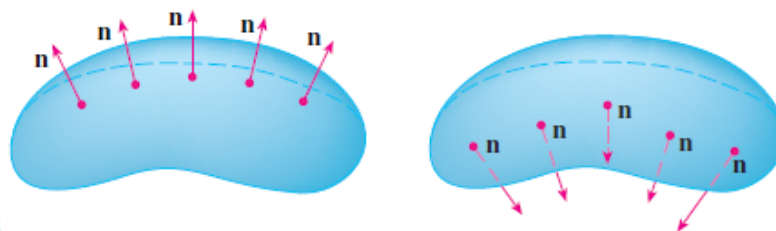
Figura 2.10 – Vetores Normais Unitários



Fonte: Stewart (2013)

Se for possível escolher um vetor normal  $\mathbf{n}$  em cada ponto  $(x,y,z)$  de modo que  $\mathbf{n}$  varie continuamente sobre  $S$ , então  $S$  é chamada superfície orientada e a escolha dada de  $\mathbf{n}$  fornece  $S$  com uma orientação. Existem dois tipos de orientações possíveis para qualquer superfície orientada, como pode ser visto na Figura 2.11.

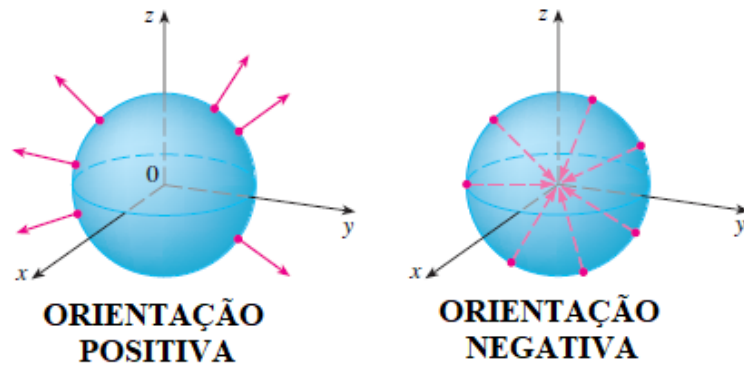
Figura 2.11 – Duas Orientações de uma Superfície Orientável



Fonte: Stewart (2013)

Para uma superfície fechada, ou seja, uma superfície que seja a fronteira de uma região sólida  $E$ , convencionou-se que a orientação positiva é aquela para a qual os vetores normais apontam para fora de  $E$ . Dessa forma, os vetores normais que apontam para dentro correspondem à orientação negativa, conforme visto na Figura 2.12.

Figura 2.12 – Orientação de uma Superfície Fechada



Fonte: Stewart (2013)

**Definição 2.31.** Se  $\mathbf{F}$  for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada  $S$  com vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , então a integral de superfície de  $\mathbf{F}$  sobre  $S$  é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.48)$$

Essa integral também é chamada de fluxo de  $\mathbf{F}$  através de  $S$ .

Em resumo, a Definição 2.31 diz que a integral de superfície de um campo vetorial sobre  $S$  é igual à integral de superfície de sua componente normal em  $S$ . Se  $S$  é uma função vetorial dada por  $\mathbf{r}(u, v)$ , então  $\mathbf{n}$  é dado por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad (2.49)$$

Substituindo a Equação 2.49 na Equação 2.48, temos que

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \, dS \\ &= \iint_D \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA \end{aligned}$$

Logo, a Equação 2.48 se torna

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA \quad (2.50)$$

**Exemplo 2.32.** Calcule a integral de superfície  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  para o campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^{xy} \mathbf{i} - 3ze^{xy} \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$  e a superfície orientada  $S$ , onde  $S$  é o paralelogramo do Exemplo 2.29 com orientação ascendente.

Do Exemplo 2.29 temos:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + (1 + 2u + v)\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 1$$

e

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Então

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) &= (1 + 2u + v)e^{(u+v)(u-v)} \mathbf{i} - 3(1 + 2u + v)e^{(u+v)(u-v)} \mathbf{j} + (u + v)(u - v) \mathbf{k} \\ &= (1 + 2u + v)e^{u^2 - v^2} \mathbf{i} - 3(1 + 2u + v)e^{u^2 - v^2} \mathbf{j} + (u^2 - v^2) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Como o componente  $z$  para  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  é negativo, nós usaremos  $-(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ . Sendo assim, usando a Equação 2.50, temos

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (-(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)) dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^2 \left[ (1+2u+v)e^{u^2-v^2} \mathbf{i} - 3(1+2u+v)e^{u^2-v^2} \mathbf{j} + (u^2-v^2) \mathbf{k} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot [-(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})] du dv \\
 &= \int_0^1 \int_0^2 \left[ -3(1+2u+v)e^{u^2-v^2} + 3(1+2u+v)e^{u^2-v^2} + 2(u^2-v^2) \right] du dv \\
 &= 2 \int_0^1 \int_0^2 (u^2-v^2) du dv \\
 &= 2 \int_0^1 \left[ \frac{u^3}{3} - uv^2 \right]_0^2 dv \\
 &= 2 \int_0^1 \left( \frac{8}{3} - 2v^2 \right) dv \\
 &= 2 \left[ \frac{8v}{3} - 2\frac{v^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= 2 \left( \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \right) \\
 &= 2 \cdot \frac{6}{3} = 4
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4$ .

Caso a superfície  $S$  seja dada por um gráfico  $z = g(x, y)$ , então podemos considerar  $x$  e  $y$  como parâmetros e usando a Equação 2.45 temos que

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \left( -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

Logo, a Equação 2.50 pode ser escrita como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left( -P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA \quad (2.51)$$

Essa Equação 2.51 será utilizada na demonstração do Teorema de Stokes.

**Exemplo 2.33.** Seja  $\sigma$  a porção da superfície  $z = 1 - x^2 - y^2$  acima do plano  $xy$ , e suponha que  $\sigma$  seja orientada para cima. Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  através de  $\sigma$ .

Pela Equação 2.51, o fluxo é dado por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left( -P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA \quad (2.52)$$

$$= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + z) dA \quad (2.53)$$

Como  $z = 1 - x^2 - y^2$ , substituindo na Equação 2.53, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2) dA \quad (2.54)$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA \quad (2.55)$$

Usando coordenadas polares, a Equação 2.55 se altera para

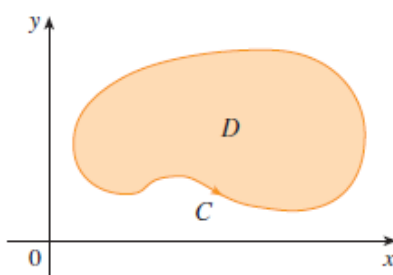
$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 + r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Logo, o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  é igual a  $\frac{3\pi}{2}$ .

### 3 TEOREMA DE GREEN

Nessa seção abordaremos um de nossos temas principais, o Teorema de Green. Esse teorema é uma importante ferramenta matemática que estabelece uma relação entre a integral de linha de um campo vetorial na fronteira  $C$  de uma dada região  $D$  com uma integral dupla sobre  $D$ , conforme pode ser visto na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Região  $D$  com fronteira  $C$

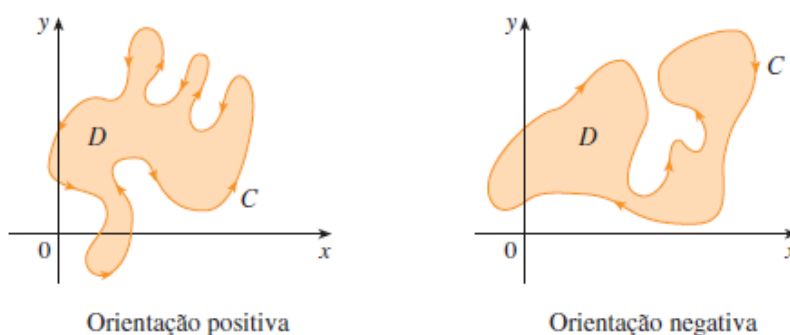


Fonte: Stewart (2013)

Será graças a esse teorema que conseguiremos justificar o funcionamento do planímetro, ou seja, quando percorrermos uma curva fechada que delimita uma região  $D$  com o planímetro, ao final, o que ele mede é justamente a área da região  $D$ .

Ao enunciarmos o Teorema de Green, utilizamos o termo orientação positiva de uma curva fechada simples  $C$  (quando uma curva não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades, dizemos que essa curva é simples), o qual se convencionou ser o sentido anti-horário de  $C$ , percorrido uma só vez. Dessa forma, se  $C$  é dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ , com  $a \leq t \leq b$ , então a região  $D$  está sempre do lado esquerdo quando  $\mathbf{r}(t)$  percorre  $C$ ; conforme observado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Orientação positiva e orientação negativa



Fonte: Stewart (2013)

**Teorema 3.1** (Teorema de Green). Seja  $C$  uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja  $D$  a região delimitada por  $C$ . Se  $P$  e  $Q$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha  $D$ , então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (3.1)$$

Também pode-se usar a notação

$$\oint P dx + Q dy$$

para indicar que a integral de linha é calculada usando a orientação positiva da curva fechada  $C$ .

As próximas definições irão nos auxiliar na demonstração do Teorema de Green.

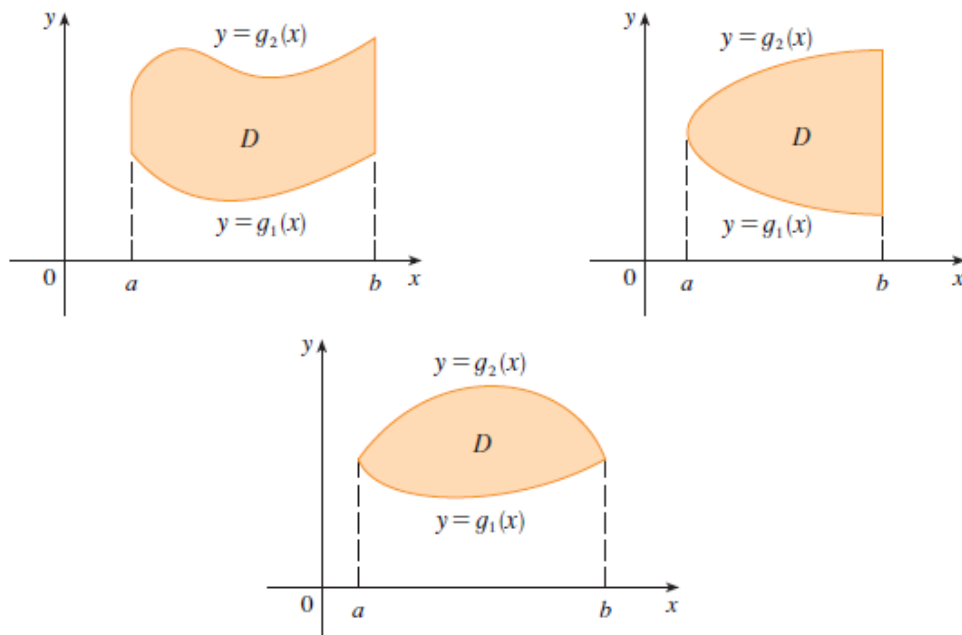
**Definição 3.2.** Uma região plana  $D$  é dita do tipo I se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de  $x$ , isto é,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde  $g_1$  e  $g_2$  são contínuas em  $[a, b]$ .

Veja na Figura 3.3 alguns exemplos de regiões do tipo I.

Figura 3.3 – Exemplos de regiões do tipo I



Fonte: Stewart (2013)

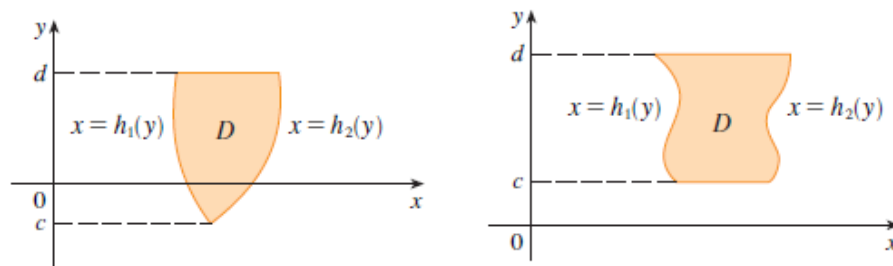
**Definição 3.3.** Uma região plana  $D$  é dita do tipo II se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de  $y$ , isto é,

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

onde  $h_1$  e  $h_2$  são contínuas em  $[c, d]$ .

Veja na Figura 3.4 alguns exemplos de regiões do tipo II.

Figura 3.4 – Exemplos de regiões do tipo II



Fonte: Stewart (2013)

As regiões dadas nas Definições 3.2 e 3.3 são chamadas de regiões simples.

**Demonstração do Teorema 3.1:** Faremos a demonstração para um caso particular, onde  $D$  é uma região simples, sendo que a demonstração para o caso geral pode ser encontrada em Lima (2006).

Primeiramente, desmembrando o segundo membro da igualdade da Equação 3.1, temos

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Sendo assim, basta mostrarmos que

$$\int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad \text{e} \quad \int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA. \quad (3.2)$$

Iremos demonstrar separadamente cada um dos casos anteriores. Para o caso em que

$$\int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad (3.3)$$

iremos exprimir  $D$  como uma região do tipo I, isso significa que, fixando  $x$  num intervalo  $[a, b]$ , teremos duas funções contínuas  $g_1$  e  $g_2$  que estarão variando em função de  $x$ . De forma mais simples,

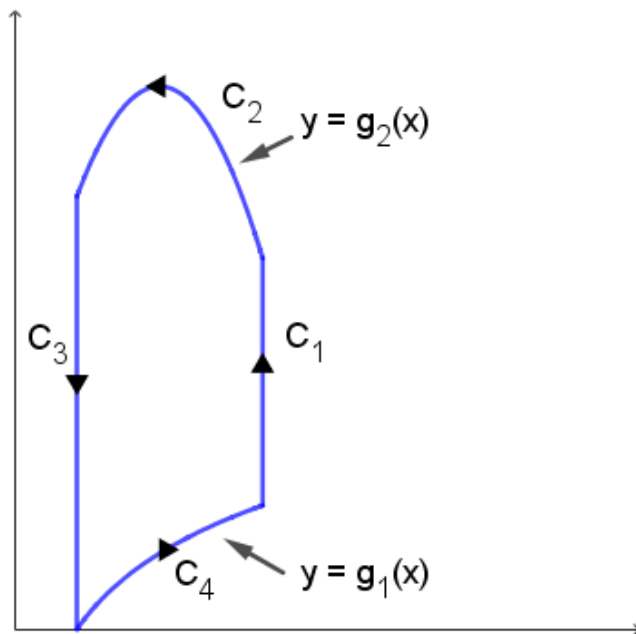
$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Logo, podemos calcular

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx \quad (3.4)$$

Decompondo  $C$  como a união das curvas  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , conforme mostrado na Figura 3.5,

Figura 3.5 – Curva C - Tipo I



Fonte: Do Autor (2024)

obtemos:

$$\int_C P(x, y) dx = \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \quad (3.5)$$

Tomando as curvas  $C_1$  e  $C_3$ , temos que  $x$  é constante e desse modo  $dx = 0$ ; portanto

$$\int_{C_1} P(x,y) dx = 0 = \int_{C_3} P(x,y) dx \quad (3.6)$$

Sobre a curva  $C_4$ , tomando  $x$  como parâmetro e escrevendo as equações paramétricas como  $x = x, y = g_1(x)$  e  $a \leq x \leq b$ , podemos calcular

$$\int_{C_4} P(x,y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx \quad (3.7)$$

Já  $C_2$  vai da direita para a esquerda, portanto, tomaremos  $-C_2$ , na qual sejam as equações paramétricas  $x = x, y = g_2(x)$  e  $a \leq x \leq b$ . Logo,

$$\int_{C_2} P(x,y) dx = - \int_{-C_2} P(x,y) dx = - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \quad (3.8)$$

Substituindo as Equações 3.6, 3.7 e 3.8 na Equação 3.5, obtemos

$$\int_C P(x,y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \quad (3.9)$$

Multiplicando ambos os membros da Equação 3.9 por  $-1$ , temos

$$- \int_C P(x,y) dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx \quad (3.10)$$

Desse modo, fica demonstrado, das Equações 3.4 e 3.10, que

$$\int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Já para a segunda parte da Equação 3.2, que é

$$\int_C Q dy = - \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA, \quad (3.11)$$

iremos exprimir  $D$  como uma região do tipo II, isso significa que, fixando  $y$  num intervalo  $[a, b]$ , teremos duas funções contínuas  $h_1$  e  $h_2$  que estarão variando em função de  $y$ . De forma mais simples,

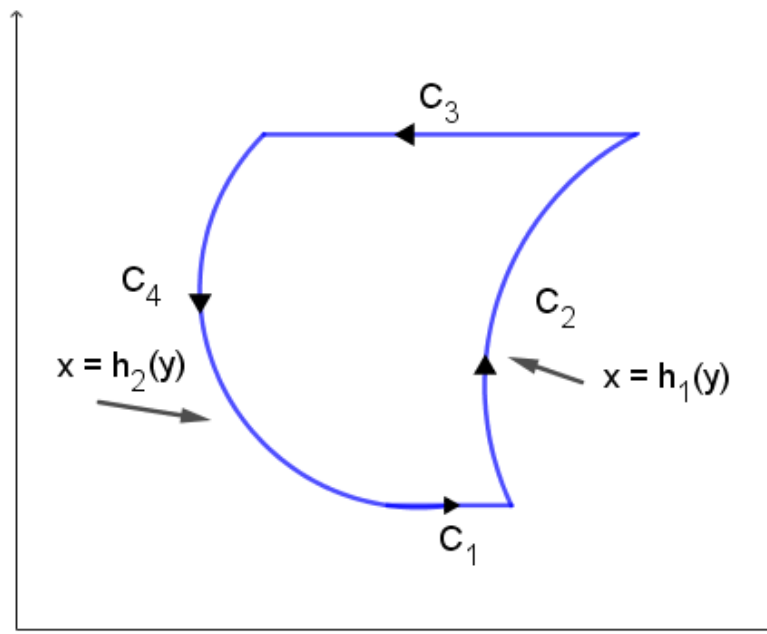
$$D = \{(x,y) | h_1(y) \leq x \leq h_2(y), a \leq y \leq b\}.$$

Logo, podemos calcular

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) dx dy = \int_a^b [Q(h_2(y),y) - Q(h_1(y),y)] dy \quad (3.12)$$

Decompondo  $C$  como a união das curvas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ , conforme mostrado na Figura 3.6,

Figura 3.6 – Curva  $C$  - Tipo II



Fonte: Do Autor (2024)

obtemos:

$$\int_C Q(x,y) dy = \int_{C_1} Q(x,y) dy + \int_{C_2} Q(x,y) dy + \int_{C_3} Q(x,y) dy + \int_{C_4} Q(x,y) dy \quad (3.13)$$

Tomando as curvas  $C_1$  e  $C_3$ , temos que  $y$  é constante e desse modo  $dy = 0$ ; portanto

$$\int_{C_1} Q(x,y) dy = 0 = \int_{C_3} Q(x,y) dy \quad (3.14)$$

Sobre a curva  $C_2$ , tomando  $y$  como parâmetro e escrevendo as equações paramétricas como  $x = h_1(y)$ ,  $y = y$  e  $a \leq y \leq b$ , podemos calcular

$$\int_{C_2} Q(x,y) dy = \int_a^b Q(h_1(y),y) dy \quad (3.15)$$

Já  $C_4$  vai de cima para baixo, portanto, tomaremos  $-C_4$ , na qual sejam as equações paramétricas  $x = h_2(y), y = y$  e  $a \leq y \leq b$ . Logo,

$$\int_{C_4} Q(x, y) dy = - \int_{-C_4} Q(x, y) dy = - \int_a^b Q(h_2(y), y) dy \quad (3.16)$$

Substituindo as Equações 3.14, 3.15 e 3.16 na Equação 3.13, obtemos

$$\int_C Q(x, y) dy = \int_a^b Q(h_1(y), y) dy - \int_a^b Q(h_2(y), y) dy \quad (3.17)$$

Fatorando a segunda parte da Equação 3.17 em uma única integral temos

$$- \int_C Q(x, y) dy = \int_a^b [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy \quad (3.18)$$

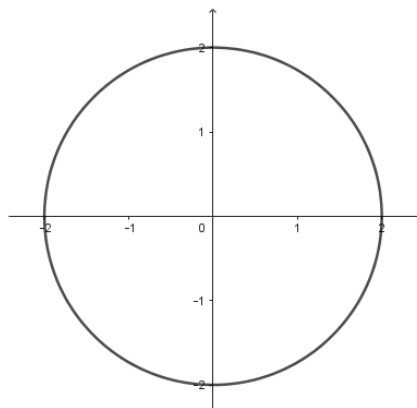
Desse modo, comparando as Equações 3.12 e 3.18, temos

$$\int_C Q dy = - \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA.$$

como queríamos demonstrar.

**Exemplo 3.4.** Calcule  $\oint_C (x - y) dx + (x + y) dy$ , onde  $C$  é o círculo com centro na origem e raio igual à 2, conforme visto na Figura 3.7; utilizando o Teorema de Green.

Figura 3.7 – Ilustração do Exemplo 3.4



Fonte: Do Autor (2024)

Tomando  $P(x, y) = x - y$  e  $Q(x, y) = x + y$ , temos

$$\begin{aligned} \oint_C (x - y) dx + (x + y) dy &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D (1 - (-1)) dA \\ &= \iint_D 2 dA \\ &= 2 \iint_D dA. \end{aligned}$$

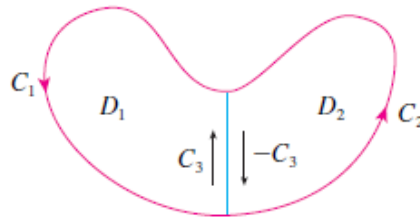
Utilizando a parametrização por coordenadas polares, temos  $dA = R dR d\theta$ , na qual os valores de  $\theta$  e  $R$  são  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq R \leq 2$ . Daí

$$\begin{aligned} \oint_C (x - y) dx + (x + y) dy &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 R dR d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{R^2}{2} \right]_0^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} 2 d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 4 [\theta]_0^{2\pi} \\ &= 4 \cdot 2\pi \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

Portanto,  $\oint_C (x - y) dx + (x + y) dy = 8\pi$ .

O Teorema 3.1 funciona somente para o caso particular onde  $D$  é uma região simples. Se  $D$  for uma união finita de regiões simples, podemos estender o Teorema de Green. Por exemplo, se  $D$  for uma região como a mostrada na Figura 3.8, então podemos escrever  $D = D_1 \cup D_2$ , onde  $D_1$  e  $D_2$  são ambas regiões simples.

Figura 3.8 – União Finita de Regiões Simples



Fonte: Stewart (2013)

A fronteira de  $D_1$  é  $C_1 \cup C_3$  e a fronteira de  $D_2$  é  $C_2 \cup (-C_3)$ ; desse modo, aplicando o Teorema de Green em  $D_1$  e  $D_2$  separadamente, obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_3} P dx + Q dy = \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (3.19)$$

e

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P dx + Q dy = \iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (3.20)$$

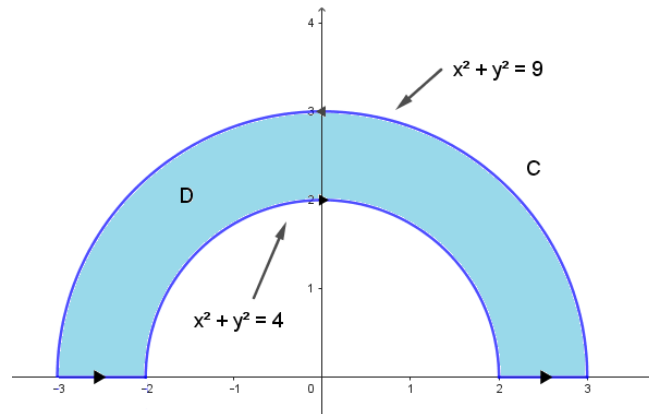
Somando as Equações 3.19 e 3.20, as integrais de linha sobre  $C_3$  e  $-C_3$  se cancelam, resultando em

$$\int_{C_1 \cup C_2} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (3.21)$$

que é o Teorema de Green para  $D = D_1 \cup D_2$ , na qual sua fronteira é  $C = C_1 \cup C_2$ . Esse mesmo argumento nos permite estabelecer o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples que não se sobreponham.

**Exemplo 3.5.** Calcule, usando o Teorema de Green,  $\int_C (1 - y^3) dx + (x^3 + e^{y^2}) dy$ , onde  $C$  é o limite da região semianular  $D$  contida no semiplano superior entre os círculos  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 = 9$ .

Figura 3.9 – Ilustração do Exemplo 3.5



Fonte: Do Autor (2024)

A Figura 3.9 mostra a situação apresentada no enunciado. Em coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 3 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Desse modo, substituindo os valores na Equação 3.21, temos que

$$\int_C (1 - y^3) dx + (x^3 + e^{y^2}) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (3.22)$$

$$= \iint_D (3x^2 + 3y^2) dA \quad (3.23)$$

$$= \int_0^\pi \int_2^3 [3(r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2] r dr d\theta \quad (3.24)$$

$$= \int_0^\pi \int_2^3 3r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r dr d\theta \quad (3.25)$$

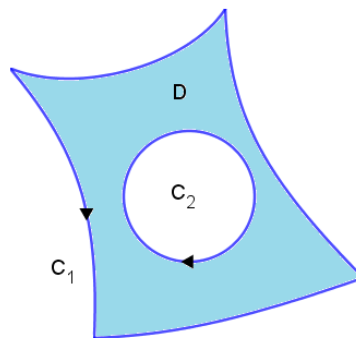
Como a relação trigonométrica fundamental diz que  $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ , substituindo na Equação 3.25, vamos obter

$$\begin{aligned} \int_C (1 - y^3) dx + (x^3 + e^{y^2}) dy &= 3 \int_0^\pi \int_2^3 r^3 dr d\theta \\ &= 3 \int_0^\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_2^3 d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^\pi 65 d\theta \\ &= \frac{195}{4} [\theta]_0^\pi \\ &= \frac{195\pi}{4}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\int_C (1 - y^3) dx + (x^3 + e^{y^2}) dy = \frac{195\pi}{4}$ .

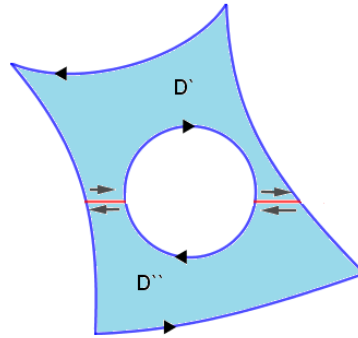
Outra extensão do Teorema de Green é que ele pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Observe que a fronteira  $C$  da região  $D$  na Figura 3.10 é constituída por duas curvas fechadas simples  $C_1$  e  $C_2$ . Nós assumimos que estas curvas de contorno são orientadas de modo que a região  $D$  está sempre do lado esquerdo enquanto a curva  $C$  é percorrida. Assim, o sentido anti-horário é positivo para a curva exterior  $C_1$ , mas no sentido horário para o interior da curva  $C_2$ .

Figura 3.10 – Exemplo de região com furo



Fonte: Do Autor (2024)

Figura 3.11 – Divisão de região com furo em duas partes



Fonte: Do Autor (2024)

Se dividirmos  $D$  em duas regiões  $D'$  e  $D''$ , pela introdução das retas mostradas na Figura 3.11, então, ao aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões  $D'$  e  $D''$ , obtemos

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \\ \iint_{D'} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \\ \int_{\partial D'} P dx + Q dy + \int_{\partial D''} P dx + Q dy \end{aligned}$$

Como as integrais de linha sobre as fronteiras comuns entre  $D'$  e  $D''$  são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy \quad (3.26)$$

Uma aplicação do Teorema de Green que será muito útil em seção futura é no cálculo de áreas. Como a área de uma região  $D$  é

$$\iint_D 1 dA,$$

queremos escolher  $P$  e  $Q$  tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Sendo assim, temos várias possibilidades:

$$1^{\text{a}} \rightarrow P(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad Q(x,y) = x \quad (3.27)$$

$$2^{\text{a}} \rightarrow P(x,y) = -y \quad \text{e} \quad Q(x,y) = 0 \quad (3.28)$$

$$3^{\text{a}} \rightarrow P(x,y) = -\frac{1}{2}y \quad \text{e} \quad Q(x,y) = \frac{1}{2}x \quad (3.29)$$

A partir das Equações 3.27, 3.28 e 3.29, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de  $D$ :

$$A = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \quad (3.30)$$

A Equação 3.30 pode ser usada para explicar como trabalham os planímetros. Essa explicação será dada em seção futura específica.

**Exemplo 3.6.** Use uma das fórmulas dadas nas Equações 3.27, 3.28 e 3.29 para achar a área sob um arco da cicloide  $x = t - \text{sent}$  e  $y = 1 - \text{cost}$ .

Vamos dividir a região em duas partes, sendo  $C_1$  o arco da cicloide de  $(0,0)$  a  $(2\pi,0)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , e  $C_2$  o segmento que liga os pontos  $(2\pi,0)$  e  $(0,0)$ . Desse modo,  $C_2$  é dado por  $x = 2\pi - t$ ,  $y = 0$  e  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Então  $C = C_1 \cup C_2$  é percorrido no sentido horário, logo  $-C$  é orientado positivamente. Por isso  $-C$  envolve a área sob um arco da cicloide; e da Equação 3.30 temos

$$\begin{aligned}
 A &= - \oint_{-C} y dx \\
 &= \int_{C_1} y dx + \int_{C_2} y dx \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt + \int_0^{2\pi} 0 \cdot (-dt) \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt + 0 \\
 &= \left[ t + 2\operatorname{sen}t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2t \right]_0^{2\pi} \\
 &= (2\pi + 0 + \pi + 0) - (0 + 0 + 0 + 0) \\
 A &= 3\pi.
 \end{aligned}$$

Os operadores divergente e rotacional, vistos na seção anterior, nos permitem escrever o Teorema de Green em uma versão que será útil na próxima seção, que será referente ao Teorema de Stokes.

Considere uma região plana  $D$ , sua curva fronteira  $C$  e funções  $P$  e  $Q$  que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Em seguida, considere o campo vetorial  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ . A sua integral de linha é

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy$$

e, considerando  $\mathbf{F}$  como um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  com terceira componente igual à zero, temos que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA \quad (3.31)$$

## 4 TEOREMA DE STOKES

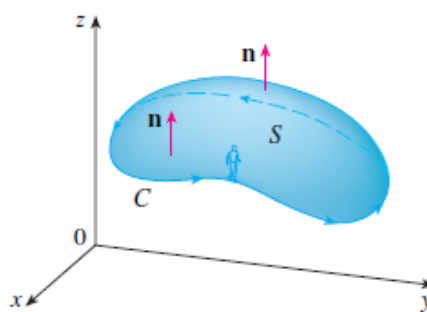
Estudaremos agora um teorema muito importante da geometria diferencial: o Teorema de Stokes. Esse teorema possui um enunciado geral em superfícies de dimensões maiores que envolve o conceito de integração de formas diferenciais; veja Lima (2006). Nesse trabalho nos restringiremos a superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

Apesar do teorema ser conhecido como Teorema de Stokes, nenhuma de suas versões se deve a Stokes (DAVIS, 2014). George Stokes soube desse teorema por meio de uma carta de William Thomson (cientista que ajudou a divulgar o trabalho de George Green).

O Teorema de Stokes pode ser interpretado como uma extensão do Teorema de Green para uma dimensão superior. Enquanto o Teorema de Green associa uma integral dupla sobre uma região plana  $D$  com uma integral de linha ao longo de sua fronteira plana, o Teorema de Stokes associa uma integral de superfície sobre uma superfície  $S$  com uma integral ao redor da curva da fronteira  $S$  (que é uma curva no espaço).

De acordo com a Definição 2.30, dada na sub-seção **2.6 - Integrais de Superfície**, ao termos uma superfície orientada com vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , conforme Figura 4.1, a orientação de  $S$  induz a orientação positiva da curva fronteira  $C$ . Ou seja, se andarmos na direção positiva ao redor da curva  $C$  com a cabeça na direção e sentido de  $\mathbf{n}$ , então a superfície estará sempre à nossa esquerda.

Figura 4.1 – Superfície Orientada com Vetor Normal Unitário  $\mathbf{n}$



Fonte: Stewart (2013)

Temos o seguinte teorema:

**Teorema 4.1** (Teorema de Stokes). Seja  $S$  uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva  $C$  fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $S$ . Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.1)$$

A curva da fronteira orientada positivamente da superfície orientada  $S$  é com frequência denotada por  $\partial S$ , de modo que o Teorema de Stokes pode ser escrito como

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

No caso especial em que a superfície  $S$  é plana e pertence ao plano  $xy$ , com orientação ascendente, o vetor normal unitário é  $\mathbf{k}$ , a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, dessa forma o Teorema 4.1 se transforma em

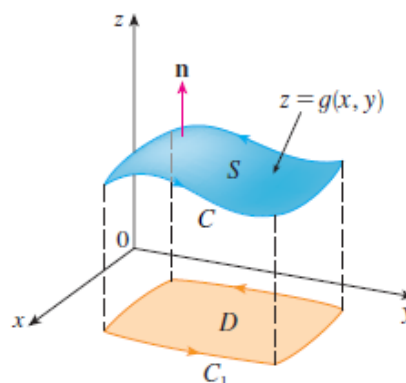
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA \quad (4.3)$$

Observe que a última parte da Equação 4.3 é a forma vetorial do Teorema de Green dada na Equação 3.31. Assim, podemos dizer que o Teorema de Green é um caso especial do Teorema de Stokes.

O Teorema de Stokes não é fácil de se demonstrar o caso geral. Vamos demonstrar um caso particular. Para o caso geral, veja Lima (2006) e Guidorizzi (2013).

**Demonstração:** Suponha que a equação de  $S$  seja  $z = g(x,y)$ ,  $(x,y) \in D$ , onde  $g$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e que  $D$  seja uma região plana simples cuja curva fronteira  $C_1$  corresponde a  $C$ . Se a orientação de  $S$  for ascendente, a orientação positiva de  $C$  corresponde à orientação positiva de  $C_1$ ; vide figura 4.2.

Figura 4.2 – Caso Especial do Teorema de Stokes



Fonte: Stewart (2013)

Sabemos que  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ , onde as derivadas parciais de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são contínuas. Como  $S$  é um gráfico de uma função, podemos aplicar a Equação 2.51; com  $\mathbf{F}$  substituído por  $\text{rot } \mathbf{F}$ , obtendo

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[ - \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA \quad (4.4)$$

onde as derivadas parciais de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são calculadas em  $(x, y, g(x, y))$ . Se

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

é a representação parametrizada de  $C_1$ , então a representação parametrizada de  $C$  é

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = g(x(t), y(t)) \quad a \leq t \leq b$$

Isso nos permite calcular a integral de linha tendo como auxílio a regra da cadeia:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left( P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt = \quad (4.5)$$

$$\int_a^b \left[ P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt = \quad (4.6)$$

$$\int_a^b \left[ \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt = \quad (4.7)$$

$$\int_{C_1} \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy = \quad (4.8)$$

$$\iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA \quad (4.9)$$

Da Equação 4.8 para a Equação 4.9 foi usado o Teorema de Green. Logo, usando novamente a regra da cadeia e lembrando que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são funções de  $x$ ,  $y$  e  $z$  e que  $z$  é, por sua vez, função de  $x$  e  $y$ , temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) dA \\ &\quad - \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) dA \end{aligned}$$

Portanto, como quatro termos da integral dupla se cancelam, podemos rearranjar os restantes para que coincidam com o lado direito da Equação 4.4. Então temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left[ -\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \right] dA \quad (4.10)$$

Desse modo, da Equação 4.4 e da Equação 4.10, concluímos que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.11)$$

**Exemplo 4.2.** Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + 4xy^3 \mathbf{j} + xy^2 \mathbf{k}$$

em uma partícula que percorre o retângulo  $C$  (cujos vértices são os pontos  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(1,3,3)$  e  $(0,3,3)$ ) no plano  $z = y$ .

Vamos usar a Equação 4.11 para expressar o trabalho  $\mathbf{W}$  como uma integral de superfície

$$\mathbf{W} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

na qual escolhemos uma orientação para baixo para a superfície plana  $S$  envolvida por  $C$ , a fim de tornar a orientação de  $C$  positiva, como requiere o Teorema de Stokes. Como a superfície  $S$  tem por equação  $z = y$  e

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & R(x,y) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 4xy^3 & xy^2 \end{vmatrix} \\ &= 2xy\mathbf{i} + 4y^3\mathbf{k} - y^2\mathbf{j} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (2xy\mathbf{i} + 4y^3\mathbf{k} - y^2\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\
 &= \int_0^1 \int_0^3 (-y^2 - 4y^3) dy dx \\
 &= - \int_0^1 \left[ \frac{y^3}{3} + y^4 \right]_0^3 dx \\
 &= - \int_0^1 90 dx \\
 &= -90 \int_0^1 dx \\
 &= -90
 \end{aligned}$$

Dessa forma, o trabalho realizado pelo campo de forças  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + 4xy^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$  é igual a  $-90$ .

## 5 PLANÍMETRO

O planímetro é um instrumento óptico usado para a determinação de áreas de superfícies planas limitadas quaisquer, tomando como base o contorno que a delimita (FERREIRA et al., 2020). Ele é muito utilizado no ensino superior, principalmente em disciplinas de engenharia, cartografia, arquitetura, desenho técnico, geologia, geografia e medicina.

A necessidade de se obter a área de figuras planas fechadas de traçado irregular, no início do século XIX, inspirou o desenvolvimento e a criação de vários projetos de instrumentos que pudessem sanar essa necessidade com resultados com certo grau de precisão (FERREIRA et al., 2020).

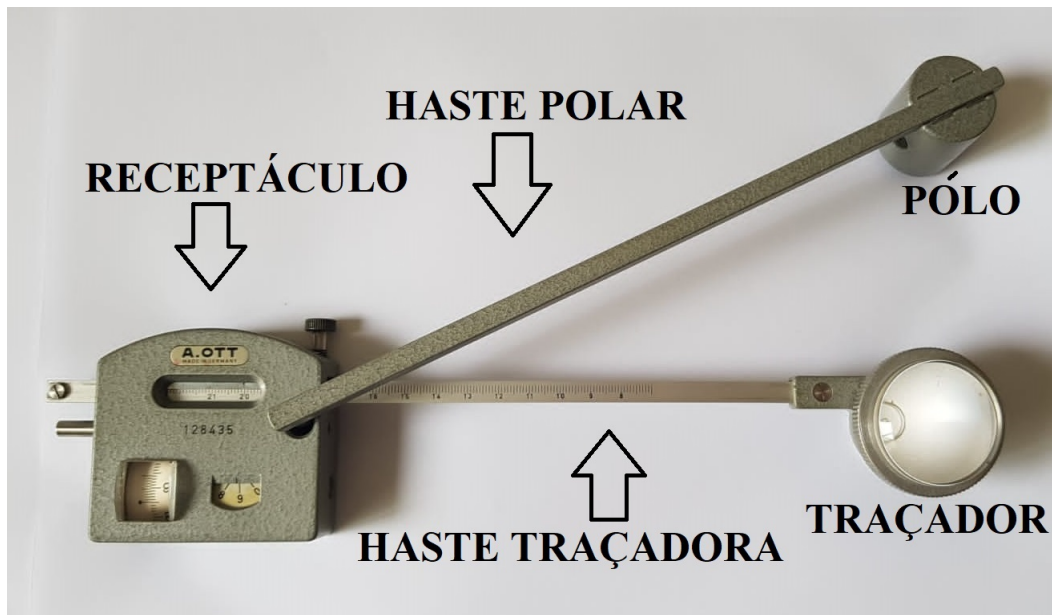
Podemos citar entre os projetos desenvolvidos o Planímetro de Cone, criado por Johann Martin Hermann em 1814, e o Planímetro Rotacional, elaborado em 1855 por James Clerk Maxwell. Entretanto, conforme aborda Ferreira et al. (2020), “os equipamentos não eram muito eficazes, pois tinham uma utilização pouco prática e, alguns, eram até imprecisos”.

Foi em 1854 que o suíço Jakob Amsler inventou o Planímetro Polar Mecânico, que será utilizado nesse trabalho. Apesar de uma aparência simples, ele faz cálculos de algumas integrais de superfícies para a determinação de áreas, que não são tão simples.

O Planímetro polar mecânico, ou somente planímetro, é formado por uma haste polar (na qual, em sua extremidade há o pólo) e uma haste traçadora (tendo uma lente circular em sua ponta). Essas duas hastes são unidas a um receptáculo, no qual podem formar ângulos que variam de 0 a 180 graus.

A haste traçadora possui ainda traços numerados, distantes 1 milímetro um do outro. Sua lente circular possui a marcação de um ponto ao centro, facilitando uma melhor visualização do trajeto a ser percorrido pelo equipamento. Podemos visualizar essas partes na Figura 5.1.

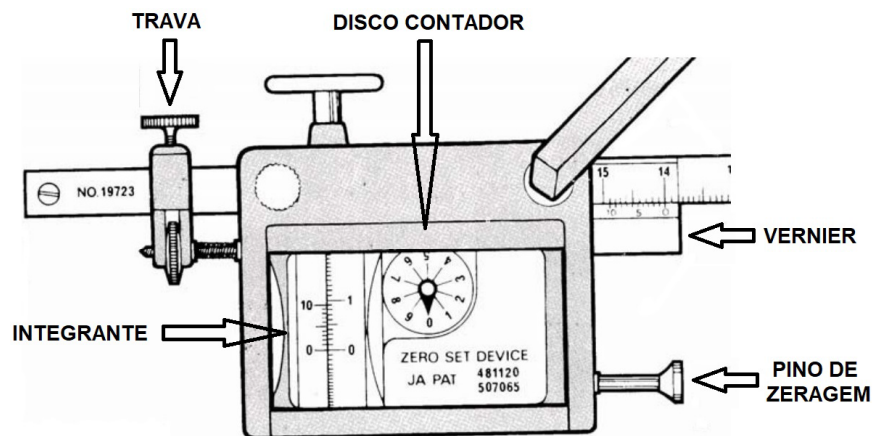
Figura 5.1 – Planímetro Polar Mecânico



Fonte: Do Autor (2024)

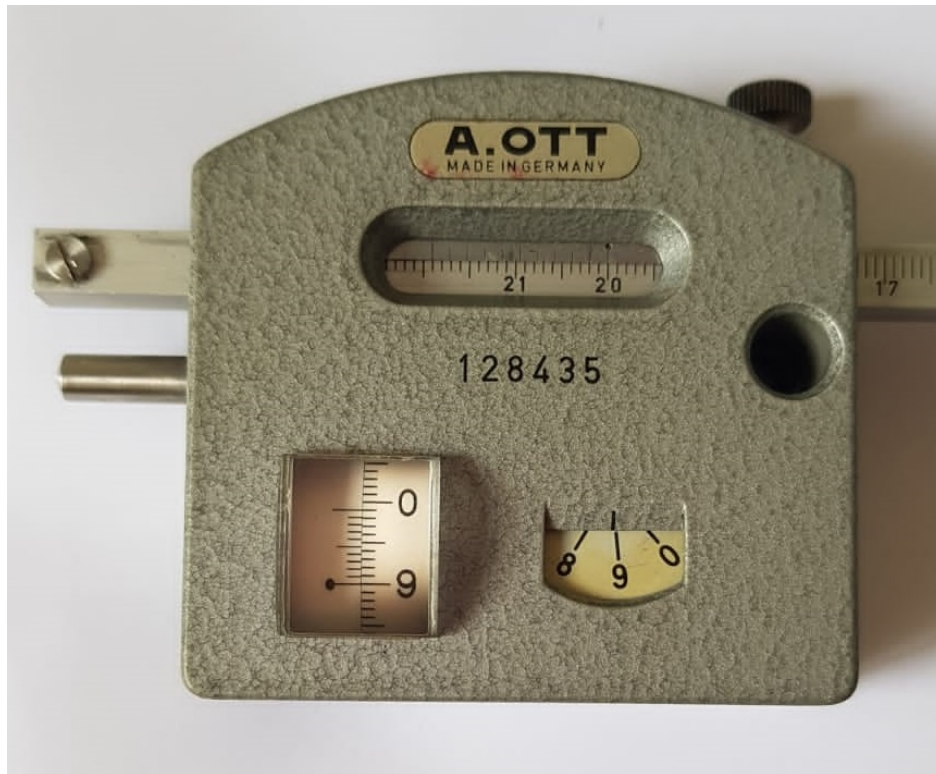
O Receptáculo, conforme Figuras 5.2 e 5.3, as quais abordam pequenas diferenças de design entre modelos, é uma caixa metálica que contém um espaço pelo qual passa a haste traçadora, um buraco onde é encaixada a haste polar, um vernier para o ajuste do coeficiente de calibragem (que é fornecida pelo fabricante do aparelho e, geralmente, é mostrada em uma tabela fixada no estojo do mesmo, conforme Figura 5.4), um pino de zeragem do contador e uma trava para a haste traçadora (FERREIRA et al., 2020).

Figura 5.2 – Receptáculo do planímetro e seus elementos



Fonte: Ferreira et al. (2020)

Figura 5.3 – Receptáculo do planímetro utilizado



Fonte: Do Autor (2024)

Figura 5.4 – Constantes de calibragem do planímetro utilizado

| OTT-<br>Planimeter | Maßstab-<br>verhältnis<br>1 : M | Fahrtab-<br>einstellung                  | Wert der Noniuseinheit<br>relativ V 1:M   absolut V 1:1            |                    | Konstante<br>(Pol innen)             | Kontrollfläche                                      |
|--------------------|---------------------------------|--|--|--------------------|--------------------------------------|---|
| Planimeter         | Scales<br>1 : M                 | Setting of<br>tracer arm                 | Value of vernier unit<br>relative V 1:M   absolute V 1:1           |                    | Constant<br>(pole inside)            | Area of circle<br>of test ruler                     |
| Planimètre         | Échelles<br>1 : M               | Réglage du<br>bras con-<br>ducteur       | Valeur de l'unité<br>de vernier<br>relative V 1:M   absolue V 1:1  |                    | Constante<br>(pôle à<br>l'intérieur) | Surface du cercle<br>de la règle de contrôle        |
| Planimetro         | Escala<br>1 : M                 | Ajuste de la<br>varilla explo-<br>radora | Valor de la unidad<br>del nonio<br>relativo V 1:M   absoluto V 1:1 |                    | Constante<br>(polo en<br>interior)   | Superficie del<br>circulo de la<br>regla de control |
| Type               | 1:1000                          | 200.00                                   | 40 mm <sup>2</sup>   | 10 mm <sup>2</sup> | 23789                                |   |
|                    | 1:500                           | 160.05                                   | 2 "  | 8 "                |                                      | 100.11 mm <sup>2</sup>                              |
|                    | 1:2500                          | 128.10                                   | 40 "   | 6.4 "              |                                      |   |
| Nr.                | 1:2000                          | 100.15                                   | 20 "   | 5 "                |                                      |   |
|                    | 1:5000                          | 80.20                                    | 100 "  | 4 "                |                                      |   |
|                    |                                 |  |  |                    |                                      |   |
| 21 PIT 30.100 mE   | 1" ≙ 25'                        | 206.40                                   | 40 sq. ft.   | .016 sq. in.       | 23694                                |   |
|                    | 1" ≙ 20'                        | 161.35                                   | 5 "  | .0125 "            |                                      | 15.517 sq. in.                                      |
|                    | 1" ≙ 40'                        |  | 20 "   | .0125 "            |                                      |   |
|                    | 1" ≙ 30'                        | 143.50                                   | 40 "   | .0111 "            |                                      |   |
|                    | 1" ≙ 60'                        |  | 40 "   | .0111 "            |                                      |   |
|                    | 1" ≙ 100'                       | 129.10                                   | 100 "  | .010 "             |                                      |   |

Fonte: Do Autor (2024)

O receptáculo também contém os elementos de registro: um tambor cilíndrico, chamado de integrante, que gira perpendicularmente à haste traçadora, e um disco contador conectado ao eixo de rotação do integrante, indicando o número de voltas conforme a ponta móvel do instrumento desliza sobre a superfície.

O disco contador, dividido em dez unidades, avança uma unidade a cada volta completa do integrante. Ao deslocar o traçador sobre uma curva plana fechada, o contador calculará a área delimitada por ela. Para se obter uma maior precisão no cálculo dessa área, é recomendável fixar o papel com a curva a ser medida em uma mesa plana horizontal para evitar deslizamentos e, ainda, fazer mais de uma leitura.

Após o planímetro montado e a folha fixada, Ferreira *et al.* (2020) apresenta um passo-a-passo de como utilizar o planímetro:

- a) escolha e marque um ponto sobre a curva limitadora da figura para iniciar a medição;
- b) coloque o ponto central da lupa da haste traçadora sobre o ponto escolhido no item anterior;
- c) fixe a agulha do pólo da haste polar em um ponto qualquer da mesa que seja, preferencialmente, fora da superfície a ser percorrida, de forma que o traçador consiga percorrer todo seu perímetro;
- d) zere o contador apertando o pino de zeragem do mesmo ou anote o valor da leitura inicial do contador, nesse caso, o resultado final será a diferença entre a leitura final e a leitura inicial;
- e) percorra o traçador ao longo do perímetro da figura, no sentido horário, até retornar a sua posição inicial.

Após a conclusão da contagem, inicia-se o processo de leitura, que é dividido em etapas. A interpretação do valor indicado no contador consiste em quatro leituras (dígitos):

O primeiro dígito corresponde à leitura direta do algarismo apresentado no disco do contador das voltas do componente; o segundo dígito é o número indicado no tambor que coincide com o zero da escala fixa; o terceiro dígito é a fração decimal apontada no tambor que coincide com o zero da escala fixa; e o quarto dígito é a fração determinada ao identificar qual marcação do componente coincide com uma marcação da escala fixa. Se em alguma das leituras o algarismo estiver entre dois números, será sempre escolhido o menor.

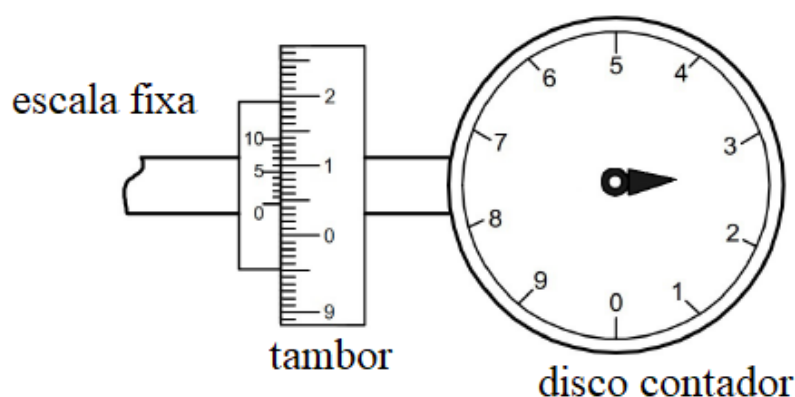
A constante de calibração é utilizada para determinar a posição da haste tracejada no receptáculo de acordo com a escala a ser empregada. Para isso, basta comparar o valor desejado

da constante de calibração, indicado na tabela da Figura 5.4, com a posição da haste tracejada e ajustá-la até coincidir com a extremidade da barra de ajuste do coeficiente de calibração fixada na caixa.

O resultado da leitura deve ser multiplicado pelo fator de multiplicação indicado na tabela referente à constante de calibração utilizada. O planímetro relaciona o percurso feito sobre uma curva fechada com a área da região delimitada por esta curva. O Teorema de Green é um dos recursos matemáticos utilizados para mostrar que a leitura feita pelo planímetro é realmente a área da região delimitada pela curva.

**Exemplo 5.1.** Determine a área de uma região plana fechada cuja leitura foi feita por um planímetro de acordo com a Figura 5.5, com haste traçadora ajustada para a escala 1 : 100 e a escala da figura é igual a 1 : 500.

Figura 5.5 – Exemplo 1 do planímetro



Fonte: Ferreira et al. (2020)

Inicialmente, faremos a leitura indicada no mostrador do instrumento. Como o ponteiro do disco contador está entre os números 2 e 3, o primeiro dígito da leitura é igual a 2 (por ser o de menor valor).

Na escala fixa, temos que o 0 se encontra entre os números 0 e 1 do tambor, dessa forma, o segundo dígito da leitura é igual a 0. Ainda observando o 0 da escala fixa, temos que o mesmo se encontra entre o 4 e o 5 da parte decimal, dessa forma, o terceiro dígito da leitura é igual a 4.

E o quarto dígito da leitura é igual a 7, devido ao fato de que os traços entre a escala fixa e a escala do tambor se coincidem nesse valor. Desse modo, a leitura final é 2047.

Como a haste traçadora foi ajustada para a escala 1 : 100, o fator de multiplicação para a medida é igual a 0,1. Daí, temos que a área  $A$  será

$$A = 2047 \cdot 0,1 = 204,7 \text{ cm}^2.$$

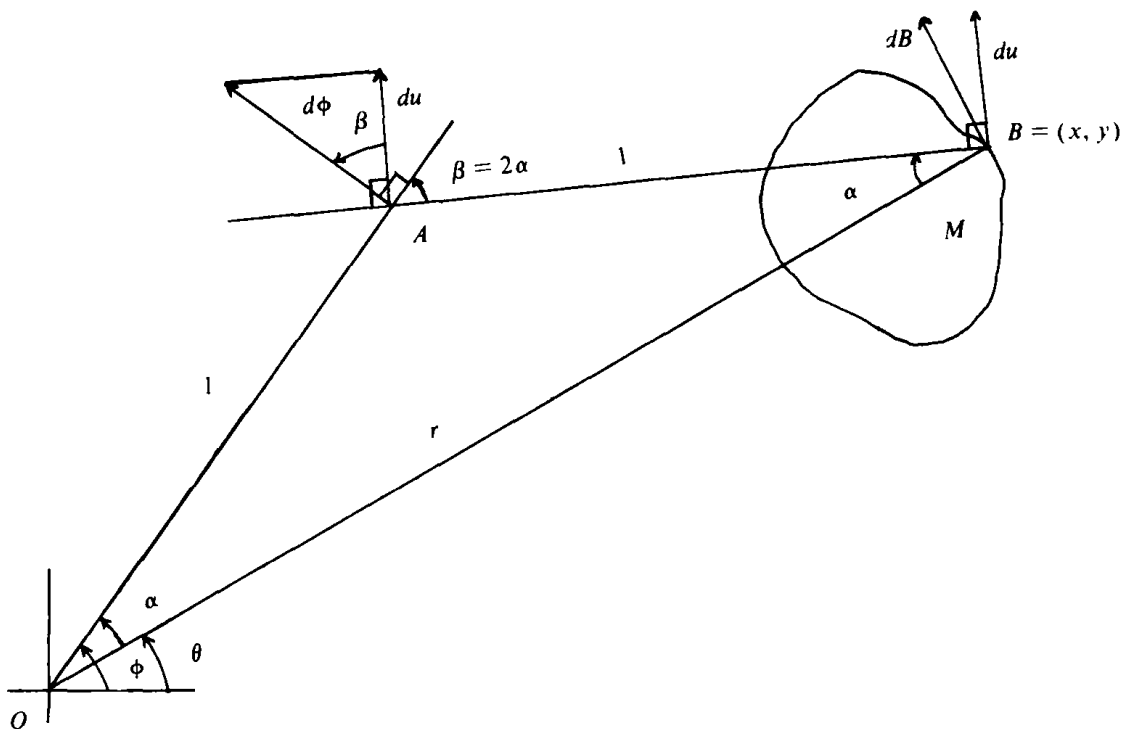
Fazendo a conversão de escalas, temos então que a área dessa região plana é

$$A = 0,02047 \text{ m}^2 \cdot 250000 \text{ m}^2 = 5117,5 \text{ m}^2.$$

### 5.1 Desvendando o Funcionamento do Planímetro

Agora veremos a explicação matemática do porque o planímetro calcula a área de figuras planas. Dentre os argumentos matemáticos utilizados está o Teorema de Green, da maneira apresentada na Figura 5.6 e descrito a seguir.

Figura 5.6 – Aplicação do Teorema de Green no planímetro



Fonte: Gatterdam (1981)

Na Figura 5.6 temos um esboço do planímetro, com alguns elementos que o constituem. Os segmentos  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  são fixos em um ponto de articulação  $A$  e representam, respectivamente, a haste polar e a haste traçadora. Para determinarmos a área da região  $M$ , o ponto  $O$  é fixo e o ponto  $B$  percorre a fronteira da região  $M$ .

Uma roda com o contador está presa à  $A$  de modo que ela rola perpendicularmente ao braço  $\overline{AB}$ .

O movimento de  $B$  em torno do limite de  $M$  causa um movimento de  $A$  ao longo do círculo unitário com centro  $O$ . A componente do movimento de  $A$  normal à  $\overline{AB}$  faz com que a roda role e o contador registre a distância percorrida.

A componente do movimento de  $A$  ao longo de  $\overline{AB}$  faz com que a roda deslize. Por isso, a distância percorrida na direção  $\overline{AB}$  não é registrada no contador. A distância total de rolamento da roda, conforme registrado pelo contador, será a área de  $M$ .

Suponha que  $B$  mova uma distância infinitesimal  $dB$  ao longo da fronteira de  $M$ , sendo  $du$  a componente de  $dB$  perpendicular à  $\overline{AB}$ . O infinitesimal resultante da distância de rolamento é então  $du$  e a distância total de rolamento é

$$\oint_{\partial M} du$$

onde  $\partial M$  denota a fronteira de  $M$ .

Considere um sistema de coordenadas fixas em  $O$ . Escreveremos  $du = Pdx + Qdy$  e aplicaremos o Teorema de Green para calcular

$$\oint_{\partial M} du = \oint_{\partial M} Pdx + Qdy = \iint_M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Então, mostrando  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ , teremos que

$$\oint_{\partial M} du = \iint_M dx dy = \text{área de } M$$

Para encontrarmos  $P$  e  $Q$ , denotaremos as coordenadas cartesianas de  $B$  por  $(x, y)$  e suas coordenadas polares por  $(r, \theta)$ . Lembrando ainda que

$$dr = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy \quad \text{e} \quad d\theta = \frac{-y}{r^2} dx + \frac{x}{r^2} dy$$

Aplicando a Lei dos cossenos ao triângulo  $OAB$ , temos:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + r^2 - 2r \cos \alpha \\ \alpha &= \cos^{-1} \left( \frac{r}{2} \right) \\ \phi &= \theta + \alpha = \theta + \cos^{-1} \left( \frac{r}{2} \right) \end{aligned}$$

Consequentemente

$$d\phi = d\theta - \frac{dr}{\sqrt{4-r^2}}$$

Ao usarmos a observação geométrica de que  $\beta = 2\alpha$ , temos

$$\begin{aligned} du &= \cos\beta d\phi = \cos 2\alpha d\phi = (2\cos^2\alpha - 1) d\phi = \left(\frac{r^2}{2} - 1\right) d\phi \\ &= \left(\frac{-y}{2} - \frac{rx}{2\sqrt{4-r^2}} + \frac{y}{r^2} + \frac{x}{r\sqrt{4-r^2}}\right) dx + \left(\frac{x}{2} - \frac{ry}{2\sqrt{4-r^2}} - \frac{x}{r^2} + \frac{y}{r\sqrt{4-r^2}}\right) dy \\ &= P(x,y) dx + Q(x,y) dy \end{aligned}$$

Os cálculos das derivadas parciais são facilitados ao observarmos que se  $f(r)$  for qualquer função diferenciável de  $r$ , então

$$y \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{df}{dr} \frac{x}{r} = \frac{xy}{r} \frac{df}{dr} = x \frac{\partial f}{\partial y}$$

Daí,

$$x \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{-r}{2\sqrt{4-r^2}} + \frac{1}{r\sqrt{4-r^2}} \right] = y \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-r}{2\sqrt{4-r^2}} + \frac{1}{r\sqrt{4-r^2}} \right]$$

Calculando de forma direta temos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{r^4} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{r^2} \right)$$

Por isso

$$\oint_M du = \iint_M \left( \frac{\partial \left(\frac{x}{2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(-\frac{y}{2}\right)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_M dx dy$$

e portanto é igual a área de  $M$ .

Como propósito final desse trabalho (aplicação do Teorema de Green na educação básica no contexto do cálculo de áreas de figuras planas) se elaborou uma sequência didática, conforme Quadro 5.1.

O intuito dessa sequência didática é auxiliar outros professores de matemática para que possam estar trabalhando com o tema em questão usando o planímetro.

Dessa forma, podemos estar levando uma forma distinta das tradicionais fórmulas e figuras conhecidas, permitindo aos estudantes manusearem o instrumento e, conseqüentemente, de forma prática, facilitar o aprendizado.

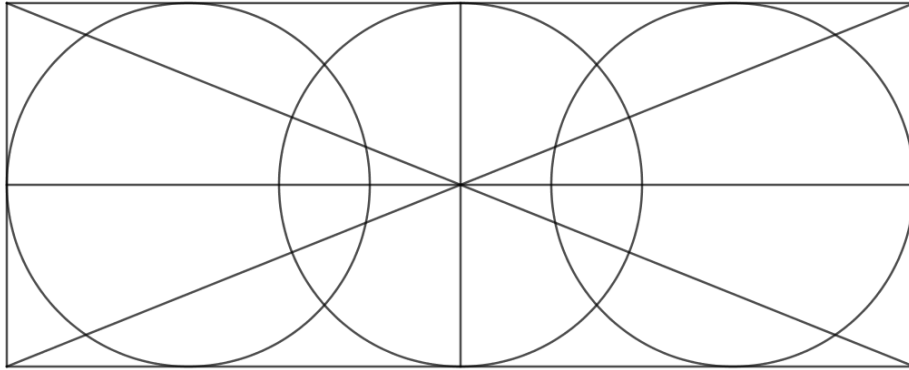
Quadro 5.1 – Sequência Didática - Uso do planímetro em sala de aula

|                         |   |
|-------------------------|---|
| Público-alvo            | Ensino médio e anos finais do ensino fundamental.   |
| Unidade temática        | Grandezas e medidas.  |
| Objetos de conhecimento | Área de figuras planas.<br>Área do círculo e comprimento de sua circunferência.   |
| Habilidades             | EF08MA38MG - calcular áreas de figuras planas: triângulos, quadriláteros e círculos ou figuras compostas por algumas dessas.<br>EF08MA19 - resolver problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medidas de terrenos. |
| Objetivos               | Resolver situações-problema envolvendo a medição de áreas diversas.<br>Utilizar a noção de escalas.<br>Comparar os resultados encontrados com o uso do planímetro com aqueles resultantes pelos meios tradicionais.   |
| Recursos didáticos      | Planímetro e material impresso com áreas diversas.  |
| Desenvolvimento         | Aula 1 - apresentação do planímetro e a maneira correta de se manusear e de se fazer a leitura dos dígitos após a medição concluída.<br>Aulas 2 e 3 - cálculo de áreas diversas utilizando o planímetro.<br>Aula 4 - comparação dos resultados encontrados por meio do planímetro com os valores encontrados pelos meios tradicionais.                |

Fonte: Do autor (2024).

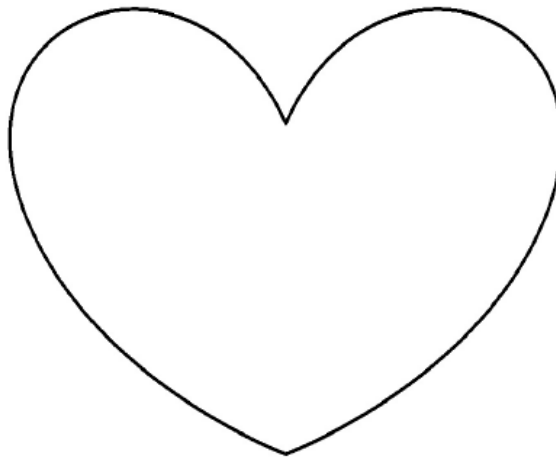
As Figuras 5.7 e 5.8 são exemplos que podem ser trabalhados durante as aulas 2 e 3 sugeridas na sequência didática. Outra maneira pode ser a resolução de questões de provas oficiais (olímpiadas, vestibulares e concursos públicos) envolvendo o conceito de cálculo de áreas, conforme apresentado no Exemplo 5.2 ou, ainda, trazer fatos atuais, como, por exemplo, calcular áreas desmatadas ou áreas reflorestadas, como na Figura 5.9.

Figura 5.7 – Aulas 2 e 3 (1ª Sugestão de Figura)



Fonte: Do Autor (2024).

Figura 5.8 – Aulas 2 e 3 (2ª Sugestão de Figura)



Fonte: Do Autor (2024).

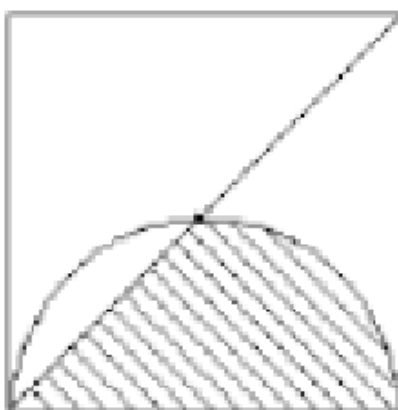
Figura 5.9 – Exemplo (Área Desmatada)



Fonte: <https://www.em.com.br/app/noticia/nacional/2020/12/03/internacional,1217289/desmatamento-as-imagens-de-satelite-que-apontam-ligacao-entre-grandes.shtml>. (2024)

**Exemplo 5.2.** Na Figura 5.10, estão representados um quadrado de lado 4, uma de suas diagonais e uma semicircunferência de raio 2. Então qual é a área da região hachurada?

Figura 5.10 – Exemplo 2 do planímetro

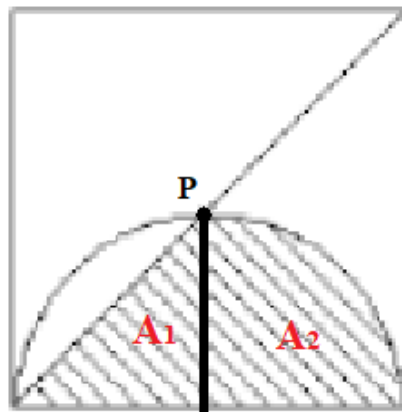


Fonte: Disponível em [https://acervo.fuvest.br/fuvest/2000/fuv2000\\_1fase\\_prova\\_T.pdf](https://acervo.fuvest.br/fuvest/2000/fuv2000_1fase_prova_T.pdf). (2024)

Para a resolução desse exemplo, utilizaremos o planímetro regulado para o fator de multiplicação igual a 0,1. Percorrendo o contorno da região hachurada, a leitura feita pelo instrumento foi de 0051. Então, a área  $A$  da região é igual a  $0,1 \cdot 51 = 5,1$ .

Se não tivéssemos o planímetro para a resolução desse exemplo, utilizaríamos do seguinte expediente: seja  $P$  o ponto de intersecção da semicircunferência com a diagonal do quadrado, conforme Figura 5.11. Dessa forma, ao traçarmos um segmento de reta de  $P$  até o centro da semicircunferência, dividiremos a área hachurada em duas áreas. Onde  $A_1$  é um triângulo de base e altura iguais ao raio  $r$  da semicircunferência e  $A_2$  é a quarta parte de uma circunferência de raio  $r$ .

Figura 5.11 – Exemplo 2 do planímetro - Resolução



Fonte: Do autor (2024)

Logo,

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 = \frac{r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{4} \\
 &= \frac{2^2}{2} + \frac{\pi 2^2}{4} \\
 &= 2 + \pi \\
 &\approx 5,14
 \end{aligned}$$

Note que o resultado do planímetro (5,1) é aproximado, uma vez que sua leitura abrange apenas quatro dígitos.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Stokes tem um papel fundamental no estudo de campos vetoriais, principalmente na análise do movimento de rotação de fluidos. Quando a superfície é plana, esse teorema cai em uma forma particular conhecido como Teorema de Green. Partindo da aplicação desse segundo teorema, podemos usá-lo para calcular área de figuras diversas.

De acordo com o apresentado no início do trabalho, os currículos de educação básica abordam em toda a estrutura da grade curricular matemática ao longo dos anos, o aprofundamento no cálculo de áreas de figuras geométricas planas, porém esse estudo fica restrito inicialmente à contagem de quadrículas ou triângulos e, depois, a fórmulas que devem ser memorizadas e guardadas.

Porém, nem sempre uma figura a ter sua área medida estará numa forma conhecida ou poderá ser decomposta em outras que conseguimos calcular por meio das fórmulas já citadas. Pensando nisso, o trabalho aborda a utilização de um instrumento, chamado de planímetro, como um possível aliado a despertar nos estudantes uma matemática que seja menos abstrata e mais prática.

Entretanto, essa dissertação tem como público-alvo outros professores de matemática da educação básica. Logo, se apresentou todo um conteúdo matemático que, muitas vezes, não é visto nos cursos de formação em licenciatura, abordando tópicos necessários que são primordiais nos teoremas que norteiam o trabalho.

Ao não conseguirmos aplicar em sala de aula o presente trabalho, o mesmo deixa como legado uma instigação para o autor, assim que possível, utilizar o planímetro no estudo de áreas nos mais diversos níveis (Ensino Fundamental II e Ensino Médio) da educação básica. O que pode tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, interessante e lúdico.

Por fim, a busca por novos recursos, independente de quais sejam, é fundamental para quê, unida a criatividade, a prática e o desejo do professor, o cenário educacional brasileiro seja aprimorado. Reitera-se a importância vital de os educadores terem a vontade de estimular e despertar a curiosidade dos alunos, permitindo que eles possam aplicar o conhecimento adquirido ao longo de sua trajetória.

## REFERÊNCIAS

- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 18 dez. 2023.
- BUFFONI, S. Três homens e dois teoremas. **Revista Matemática Universitária**, I, n. 50/51, p. 56–64, 2011. Disponível em: [https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n50\\_n51\\_Artigo02.pdf](https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n50_n51_Artigo02.pdf).
- DAVIS, A. B. **Cálculo - Volume 11**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2014.
- FERREIRA, F. d. A. P. d. S. d. A. *et al.* O planímetro polar de amsler no ensino de geometria. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 33–54, 2020. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v19a04-o-planimetro-polar-de-amsler-no-ensino.pdf>.
- GATTERDAM, R. W. The planimeter as an example of green's theorem. **The American Mathematical Monthly**, v. 88, n. 9, p. 701–704, nov. 1981. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00029890.1981.11995347>.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo - Volume 3**. 5. ed. Rio de Janeiro: Grupo Editorial Nacional, 2013.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise - Volume 2**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- MEDEIROS, H. B.; MENEZES, L. M.; PINTO, D. O. George green, o homem e o teorema. **Universidade Federal Fluminense**, p. 1–20, jul. 2003. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/salete/wp-content/uploads/sites/111/2017/08/HistoriaMat.pdf>.
- MINAS GERAIS. **Currículo Referência Minas Gerais**. Belo Horizonte, 2018. Disponível em: <https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/>. Acesso em: 18 dez. 2023.
- STEWART, J. **Cálculo - Volume 2**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.