



MARCELA DE MARILLAC CARVALHO

**DEPENDÊNCIA DE PORTFÓLIOS :
UMA ABORDAGEM MULTIESCALA VIA CÓPULAS
MULTIVARIADAS**

**LAVRAS – MG
2022**

MARCELA DE MARILLAC CARVALHO

DEPENDÊNCIA DE PORTFÓLIOS:

UMA ABORDAGEM MULTIESCALA VIA CÓPULAS MULTIVARIADAS

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

Prof. Dra. Thelma Sáfyadi
Orientadora

**LAVRAS – MG
2022**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Carvalho, Marcela M.

Dependência de portfólios : Uma abordagem multiescala
via cópulas multivariadas / Marcela de Marillac Carvalho. –
Lavras : UFLA, 2022.

104 p.: il.

Orientador(a): Prof. Dra. Thelma Sáfadi.

Tese (doutorado)- Universidade Federal de Lavras, 2022.

Bibliografia.

1. Mercado Financeiro. 2. Wavelets. 3. Dependência. I.
Sáfadi, Thelma. II. Título.

MARCELA DE MARILLAC CARVALHO

**DEPENDÊNCIA DE PORTFÓLIOS: UMA ABORDAGEM MULTIESCALA VIA
CÓPULAS MULTIVARIADAS
PORTFOLIO DEPENDENCE: A MULTI-SCALE APPROACH VIA MULTIVARIATE
COPULAS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 24 de Fevereiro de 2022.

Profa. DSc. Chang Chiann	USP
Prof. DSc. Ednilson Sebastião Ávila	UFLA
Prof. DSc. Gabriel Rodrigo Gomes Pessanha	UNIFAL
Prof. DSc. Paulo Henrique Sales Guimarães	UFLA

Prof. Dra. Thelma Sáfyadi
Orientadora

**LAVRAS – MG
2022**

AGRADECIMENTOS

Aos familiares e amigos pelo apoio e incentivo. Sobretudo, aos meus pais, Lucas e Isabel, por seu amor e apoio incondicional, nas minhas escolhas durante toda vida. Aos meus irmãos Rafael, Lucas e Rafaela, minhas primas Talita e Thaini, tia Maria e avó Cidoca com quem sempre pude contar. Ao meu namorado Allan pelo amor, carinho e compreensão em todos os momentos.

À minha orientadora professora Thelma, pela amizade, consideração, confiança e generosidade ao longo desta empreitada.

À todos os professores do programa de pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, pela dedicação e todo conhecimento transmitido durante o doutorado.

Aos funcionários da UFLA, principalmente a secretária do DES Nádia, pela simpatia e prestatividade.

Aos meus colegas e amigos de Lavras e da pós-graduação pela convivência e ensinamentos, especialmente à Luiz Otávio, Ana Cláudia, Lina, Mariana, Kelly e Felipe amigos queridos com quem pude contar em todos os momentos. À Iara, André e Cláudio pela convivência e amizade durante minha estadia em Lavras.

Às pessoas que me auxiliaram na elaboração deste trabalho, dentre elas, meu amigo Luiz Otávio e o professor Gabriel da UNIFAL.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo suporte financeiro para a realização desse projeto.

RESUMO

A dinâmica de variáveis econômicas e financeiras é um assunto recorrente nas pesquisas científicas. Especificamente no mercado financeiro, os movimentos dos preços dos ativos refletem várias estruturas de comportamento, cada uma ocorrendo em um horizonte de tempo diferente. Além disso, as séries temporais geradas por estes dados apresentam características peculiares que devem ser incorporadas na análise financeira. Neste contexto, para uma compreensão mais precisa e realista dessas questões em finanças este trabalho busca aplicar a metodologia *wavelet* para analisar estrutura de dependência entre ativos financeiros do mercado acionário brasileiro no domínio tempo-frequência. Esta tese, desenvolveu-se dois ensaios com o objetivo de auferir o comportamento nos componentes de frequência dos retornos de ações, com os impactos de ciclos de curto, médio e longo prazo. O presente trabalho foi dividido na aplicação de duas técnicas distintas de cópulas multivariadas em componentes de frequência das séries de retornos obtidos com filtros *maximal overlap discrete wavelet transform*. No primeiro ensaio a construção hierárquica de *pair copula D-Vine* de Bedford e Cooke (2002) com a função cópula Joe-Clayton (JOE, 1996) foi empregada em um portfólio intradiário com seis ações decompostas utilizando o filtro Daubechie com dois momentos nulos, no intuito de mensurar a dependência assimétrica multivariada em frequências de curto prazo referente a 15 min., 1 hora, 1 dia e 1 semana de negociação. Os resultados indicaram uma maior associação dos ativos durante as recuperações do mercado nos primeiros meses pós pandemia do COVID-19. Pequenos incrementos nas medidas de dependência de cauda foram evidenciados especialmente em frequências menores. À medida que a composição do portfólio é diversificada com ações de setores distintos, os níveis da dependência se reduzem consideravelmente, o que revela a importância de estratégias composição/seleção de portfólios a curto prazo. No segundo ensaio a técnica aplicada foi a de cópulas fatoriais de Oh e Patton (2012) em portfólio de maior dimensão, totalizando trinta retornos diários de ações reconstruídos pela decomposição com o filtro Haar, de modo a incorporar os efeitos de ciclos econômicos na estimação do risco por meio da métrica Value at Risk. Nessa análise as cargas fatoriais foram especificadas com base em segmentos de atuação das ações e de forma dinâmica com parâmetros de dependência conduzidos com a estrutura *Generalized Autoregressive Scores* (CREAL; KOOPMAN; LUCAS, 2013) revelando o comportamento a partir da crise do *subprime* em 2008 com a cópula *Skew t-t*. Os resultados demonstram que as estimativas do VaRs, obtidas fora da amostra, são consistentes considerando componentes de curto e médio prazo.

Palavras-chave: Mercado Financeiro. *Wavelets*. Dependência. Cópulas. Gerenciamento de Risco.

ABSTRACT

The dynamics of economic and financial variables is a recurring subject in scientific research. Specifically in the financial market, asset price movements reflect various structures of behavior, each occurring in a different time horizons. In addition, the time series generated by these data have peculiar characteristics that must be incorporated into the financial analysis. In this context, for a more accurate and realistic understanding of issues in finance, this work seeks to apply the wavelet methodology to analyze the structure of dependence between financial assets in the Brazilian stock market in the time-frequency domain. In this thesis, two essays were developed that explore the application of copula theory to obtain dependency structures in financial series wavelet with the objective of measuring the behavior in the frequency components of stock returns, with the impacts of cycles short, medium and long term. The present work was divided in the application of two distinct techniques of multivariate copulas in frequency components of the series of returns obtained with filters maximal overlap discrete wavelet transform. In the first essay the hierarchical construction of pair copula D-Vine of Bedford e Cooke (2002) was used in an intraday portfolio with six stocks decomposed using the Daubechie filter with two null moments, in order to measure the multivariate asymmetric dependence on short-term frequencies referring to 15 min., 1 hour, 1 day and 1 week of trading. The results indicated a greater association of assets during market recoveries in the first months after the COVID-19 pandemic. Small increments in measures of tail dependence were evidenced especially at lower frequencies. As the composition of the portfolio is diversified with stocks from different sectors, the levels of dependence are reduced considerably, which reveals the importance of strategies composition/selection of portfolios in the short term. In the second essay, the technique applied was the factor copulas of Oh e Patton (2012) in a larger portfolio, totaling thirty daily stock returns reconstructed by decomposition with the Haar filter, in order to incorporate the effects of economic cycles in risk estimation using the Value at Risk metric. In this analysis, the factor loadings were specified based on segments of action of the actions and dynamically with dependence parameters conducted with the structure Generalized Autoregressive Scores (CREAL; KOOPMAN; LUCAS, 2013) revealing the behavior since the subprime crisis in 2008 with the copula Skew t - t . The results demonstrate that the VaRs estimates, obtained out of the sample, are consistent considering short and short to medium term components.

Keywords: Financial Market. Wavelets. Dependence. Copulas. Risk Management.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Tendências Mercado Financeiro	18
Figura 2.2 – Séries dos preços intradiários ($\Delta = 1$ min.) das ações da Petrobras (PETR4) no período de 02 de janeiro de 2020 a 24 de março de 2021.	20
Figura 2.3 – Algoritmo Piramidal de Mallat	30
Figura 2.4 – <i>Wavelet</i> Haar	33
Figura 2.5 – <i>Wavelets</i> de Daubechies (dbN)	34
Figura 2.6 – <i>D-vine</i> com seis dimensões.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Interpretação econômica das decomposições de séries diárias	32
--	----

SUMÁRIO

	PRIMEIRA PARTE	11
1	INTRODUÇÃO	12
2	REFERENCIAL TEÓRICO	17
2.1	Trades, Cotações e Dinâmica de Mercado	17
2.2	Séries Temporais Financeiras	19
2.2.1	Retornos Financeiros	21
2.3	Análise Financeira no Domínio Tempo-Frequência	23
2.4	Wavelets	26
2.5	Transformada Wavelet	28
2.5.1	Transformada Discreta de Wavelets	28
2.5.2	Transformada não Decimada de Wavelet	31
2.6	Funções Wavelets	32
2.7	Cópulas	35
2.7.1	Conceitos iniciais	35
2.7.2	Cópulas Condicionais	37
2.7.2.1	Estimação	38
2.7.3	Pair Copula	40
2.7.4	Cópulas Fatoriais	42
2.7.4.1	Dependência de Cauda de Cópulas Fatoriais	45
2.7.4.2	Dinâmica para Cópulas Fatoriais	46
2.8	Gestão Quantitativa do Risco	48
2.8.1	Tipos de Risco	48
2.8.2	Value at Risk	49
3	CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
	REFERÊNCIAS	53
	SEGUNDA PARTE	58
	ARTIGO 1: ASYMMETRIC DEPENDENCE OF INTRADAY FREQUENCY COMPONENTS IN THE BRAZILIAN STOCK MARKET	58

ARTIGO 2: ANÁLISE ESPECTRAL DA DEPENDÊNCIA E VALUE AT RISK DE PORTFÓLIOS: UMA ABORDAGEM COM WAVELETS E CÓPULAS FATORIAIS APLICADA AO MERCADO FINANCEIRO BRASILEIRO 58

PRIMEIRA PARTE

1 INTRODUÇÃO

O mercado financeiro é um ambiente complexo, composto por agentes com objetivo central de obter uma combinação ótima de ativos de forma a alcançar um equilíbrio aceitável entre as condições de risco e retorno. Operações de mercado podem ser realizadas em frequência mensal, semanal, diária ou até em minutos (GALLEGATI; SEMMLER, 2014). Essa heterogeneidade está ligada às diferentes percepções em relação aos horizontes de investimento, impulsionadas pelas forças reais de oferta e demanda e outros fatores que interagem em um ciclo contínuo e intenso (IN; KIM,2013; PRING,2014).

As várias estruturas de comportamento evidenciadas no mercado financeiro refletem as expectativas futuras dos agentes, que podem levar a mudanças repentinas de tendência tanto no curto como no longo prazo. De acordo com Zivot e Wang (2013) essa dinâmica financeira está associada a formação de preços e efeitos de microestrutura de mercado. Como resultado, séries temporais geradas pelos preços de ativos podem conter várias estruturas complexas, altamente não-lineares e repletas de ruído (LI; KUO, 2008).

Em geral, as séries financeiras apresentam fatos estilizados que descrevem peculiaridades estatísticas presentes nesses dados: (i) caudas pesadas na distribuição nos retornos incondicional; (ii) agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo e memória longa; (iii) alta frequência; (iv) assimetria entre ganho e perda: há uma magnitude maior de perdas durante movimentos decrescentes do que de ganhos durante o aumento movimentos (LONGIN; SOLNIK, 2001; EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN,2002).

Essas características tornam a análise de dados financeiros um tópico de grande interesse, seja na seleção de portfólios e mensuração de risco, bem como no mecanismo de formação de preços de instrumentos financeiros. Um importante objeto de estudo refere-se à investigação das relações entre variáveis financeiras e sua evolução ao longo do tempo. Incorporada na gestão financeira com a Teoria Moderna do Portfólio de Markowitz (1952) com o modelo média-variância (MMV), a análise multivariada de ativos possibilita captar os efeitos da dinâmica de flutuações desse sistema complexo, e de seus elementos interagentes, de forma a embasar estratégias de diversificação e a otimização de investimentos.

Desde então, tradicionalmente, a estrutura de risco-retorno de muitos modelos financeiros envolve a maximização do retorno da carteira e minimização do risco utilizando otimização quadrática, usando os primeiros dois momentos da distribuição dos retornos. No MMV, por

exemplo, os parâmetros de entrada são a matriz de covariâncias clássica e o vetor de médias, que promovem resultados apropriados quando a distribuição dos retornos é normal multivariada. No entanto, há limitações inerentes dessa estrutura como mostraram Tobin (1958) e Chamberlain (1983). Especificamente, na análise financeira os parâmetros de entrada tornam-se incompatíveis dado as peculiaridades dos retornos dos ativos, que tendem a exibir dependência assimétrica. Além disso, esses modelos estudam a relação de risco e retorno apenas no domínio do tempo e muitas vezes ignoram o domínio da frequência, que podem conter informações adicionais sobre este relacionamento (MULVEY; PAULING; MADEY, 2003).

Diante dessas considerações iniciais, o principal objetivo deste estudo é auferir medidas de dependência e risco de portfólios em diferentes horizontes temporais, de modo a considerar as especificidades da dinâmica financeira. Para isso, recorre-se a decomposição de séries temporais financeiras no domínio tempo-frequência. Uma análise a partir da decomposição dos preços de mercado ao longo de vários períodos, escalas ou horizontes de investimento, revela vários aspectos heterogêneos da atividade dinâmica de mercado, o que para variáveis econômicas/financeiras implica em melhores resultados em casos como a ocorrência de oscilações pontuais ou mudanças abruptas, capturando tanto movimentos de longo prazo quanto detalhes de alta frequência (RAMSEY, 2014; JENSEN; WHITCHER; 2014).

A principal vantagem dessa proposta é estender os conceitos da diversificação de portfólio de Markowitz (1952) captando a estrutura presente na relação entre ativos de um portfólio com cópulas e em termos de frequências temporais (escalas) de curto, médio e longo prazo dos retornos financeiros, distinguindo flutuações dos ativos do ruído de mercado via métodos *wavelets*. Dessa forma, é possível auferir de forma mais acurada as possibilidades de perdas e ganhos em diferentes horizontes temporais, maximizando o retorno financeiro e melhorando a gestão dos riscos inerentes aos investimentos, principalmente na ocorrência de eventos extremos nos mercados.

Wavelets são bases locais que têm a capacidade de extrair cada componente de um sinal com uma resolução adequada à sua escala, o que permite examinar o comportamento de uma série temporal em várias escalas com janelas de tempo que variam (IN; KIM, 2013). O uso da metodologia de cópulas decorre de sua relevância no campo das finanças devido sua flexibilidade na construção de distribuições multivariadas para portfólios e suas marginais, de forma a captar a estrutura de dependência presente entre os ativos, permitindo derivar distribui-

ções multivariadas de suas distribuições marginais, mesmo quando as últimas não apresentam normalidade.

Nos últimos anos houve um crescimento significativo no desenvolvimento de técnicas relacionadas a cópulas. Introduzidas pelo teorema de Sklar (1959), existem diferentes métodos de cópulas multivariadas capazes de modelar padrões complexos de dependência. Joe (1996) propôs a modelagem *pair copula*, estendida por Bedford e Cooke (2001) e Bedford e Cooke (2002) com uma construção gráfica hierárquica de cópulas bivariadas denominadas *Vines*. Nessa abordagem uma cascata de cópulas bivariadas, que podem pertencer a uma variedade de famílias paramétricas, constituem juntas a distribuição multivariada que se busca modelar. Dado que há diferentes possibilidades de construção, Aas et al. (2009) propuseram as classes *canonical vine* (C-Vine) e *drawable vines* (D-Vine), que embasaram a construção *regular Vine* (R-Vine) de Dissmann et al. (2013). Quando comparadas a métodos alternativos de modelagem multivariada tradicional, Berg e Aas (2007) e Fischer et al. (2009) demonstram que a abordagem *Vine* apresentam bom desempenho e permitem uma modelagem flexível para um conjunto de variáveis de tamanhos moderados. Essa flexibilidade é adequada para estrutura de dependência de séries financeiras e portfólios de ativos (JOE; LI; NIKOLOULOPOULOS, 2010; MENDES; SEMERARO; LEAL, 2010; NIKOLOULOPOULOS; JOE; LI, 2012).

Para modelar conjuntos de dados de alta dimensão foram propostos os modelos de cópulas fatoriais a partir das pesquisas iniciais de Andersen e Sidenius (2004), Voort (2005), entre outros. Oh e Patton (2012) e Krupskii e Joe (2013) desenvolveram dois métodos distintos de cópulas fatoriais com o propósito de reduzir a dimensão dos dados com base no pressuposto da análise fatorial, de que fatores comuns podem representar bem o conjunto original de relações de dependência. As formas de dependência assumidas pelo método de Oh e Patton (2012) são: equidependência em que todas as séries dependem umas das outras igualmente; dependência por blocos que parte de um conjunto de séries temporais em grupos homogêneos em termos de dependência; e dependência heterogênea em que não supõe nenhuma relação entre as dependências entre as séries.

Neste trabalho são empregadas duas abordagens de cópulas multivariadas para modelar a dependência entre ativos de portfólios construídos a partir das séries de retornos das principais ações da Bolsa de Valores e mercadorias de São Paulo - [B]³, por meio da decomposição de *wavelets*. Concentra-se na alocação eficiente de um conjunto de ativos financeiros e sua gestão de curto prazo. Na primeira análise a construção *pair copula* D-Vine foi utilizada para analisar

o comportamento conjunto dos retornos do portfólio decompostos em frequências temporais referentes a minutos, horas, dias e semanas. A segunda análise recorreu ao método de cópulas fatoriais para obter medidas de risco, como o *Value-at-Risk* (VaR) para um portfólio de maior dimensão composto por ações do índice Ibovespa, o principal indicador do mercado financeiro brasileiro. A periodicidade utilizada aqui foi a diária, e as séries reconstruídas incorporando escalas de ciclos de curto, médio e longo prazo foram utilizadas.

Em cenários de incerteza, a elaboração de estratégias de investimentos e mensuração de risco se tornam ainda mais necessárias. Logo, a importância desse estudo reside em aplicar técnicas de forma a obter uma melhor caracterização dos dados financeiros, considerando seu comportamento heterogêneo e informações subjacentes à distribuição multivariada. Conforme demonstrado por Mendes e Marques (2012) estimativas apropriadas para a distribuição multivariada de ativos e portfólios propiciam alocações robustas que são resistentes a flutuações repentinas injustificadas do mercado, como a evidenciada no cenário global atual em que se concentram preocupações com a recente pandemia do COVID-19 e seus reflexos, aumentando as incertezas que pressionam os mercados financeiros mundiais. Além disso, mudanças econômicas e na política interna vêm acentuando o momento volátil no mercado brasileiro.

A estrutura do texto foi dividida em duas partes. Após essa introdução que apresentou o problema de pesquisa e descreveu brevemente os objetivos deste trabalho, na primeira parte é apresentado o referencial teórico composto por sete seções: na seção 2.1 tem-se uma breve descrição referente a estrutura financeira; na seção 2.2 são apresentados fundamentos técnicos relacionados às séries temporais de retornos de ativos; na seção 2.3 tem-se aplicações considerando o domínio tempo-frequência no campo das finanças; a seção 2.4 aborda sobre conceitos de *wavelets*; na seção 2.5 fundamentos necessários para a aplicação prática da transformada discreta são evidenciados; na seção 2.6 é apresentada conceitos básicos e metodológicos sobre as abordagens de cópulas exploradas nesse estudo; a seção 2.7 abrange aspectos da gestão de risco com o *VaR*. Por fim, são apresentadas as considerações finais ressaltando-se as contribuições do estudo. Na segunda parte são apresentados dois artigos científicos, em que o primeiro já foi publicado e o segundo está em processo de submissão.

A segunda parte é constituída por dois artigos científicos: o primeiro artigo com o título “*Asymmetric dependence of intraday frequency components in the Brazilian stock market*” foi publicado na revista *SN Business Economics* e o segundo artigo “Análise espectral da dependência e *Value at Risk* de portfólios: uma abordagem com *wavelets* e cópulas fatoriais aplicada

ao mercado financeiro brasileiro” que se encontra no processo de submissão na revista *BBR* – *Brazilian Business Review*. Por fim, no último capítulo são apresentadas as considerações gerais sobre o presente trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção são apresentados definições envolvendo mercados financeiros e séries temporais, alguns tópicos fundamentais de *wavelets*, bem como aplicações na área de finanças, e a transformada não decimada discreta de *wavelet* para séries temporais, conceitos básicos e metodológicos de análise de dependência em séries temporais com cópulas, descrição sobre os tipos de risco e a medida de risco *Value at Risk*.

2.1 Trades, Cotações e Dinâmica de Mercado

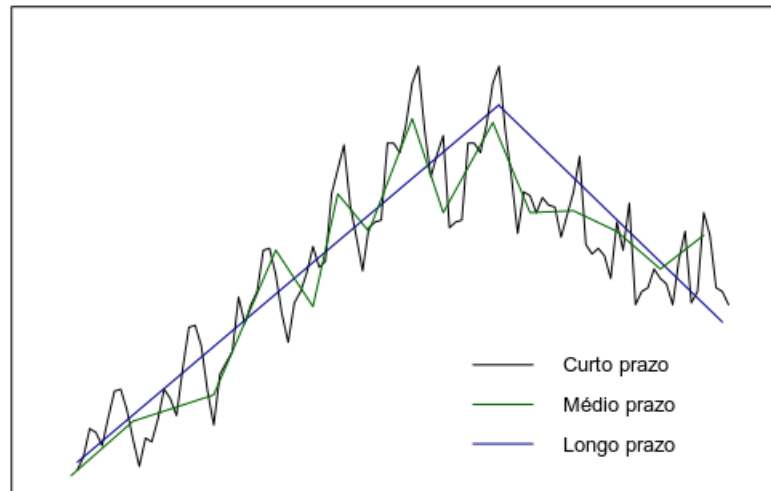
Os mercados financeiros fornecem vários tipos diferentes de dados, que podem vir de diferentes fontes, como mercado à vista, taxas de câmbio, taxa de juros, *commodities*, taxas futuras entre outros e estão disponíveis para uma ampla gama de bolsas de valores e mercados em todo o mundo. Conforme Campbell, Lo e MacKinlay (2012) os preços e retornos são tomados como os principais objetos de interesse sem referência explícita às estruturas institucionais em que são determinados.

O mecanismo básico de funcionamento dos mercados que gera essas informações é dado pelos movimentos de oferta e demanda: no lado de compra temos investidores, tomadores de empréstimos ou especuladores, e no lado da venda negociantes, corretores ou corretores-negociantes que representam firmas (HAUTSCH, 2011). As propostas para comprar ou vender uma determinada quantidade de um ativo a um determinado preço, são denominados dados de cotações e as quantidades realmente negociadas de dados de transações (CONT, 2011).

De forma geral, esses agentes estão interessados em oscilações de preços, sua volatilidade e oportunidades para obter lucros rápidos (PRING, 2014). Os negociantes buscam realizar suas transações nos termos que sejam mais favoráveis a seus interesses, podendo operar no mercado em semanas, dias ou até minutos, denominados *traders*, concentrando-se em flutuações de curto prazo, e aqueles que podem operar com um tempo horizonte maior dando uma atenção maior ao longo e médio prazo (GALLEGATI; SEMMLER, 2014; JENSEN; WHITCHER, 2014).

Pring (2014) discorre que esse comportamento resulta em uma estrutura de movimentações irregulares dos preços de forma persistente, em diferentes períodos como exemplificado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Tendências Mercado Financeiro



Fonte: Pring (2014)

Como resultado, as informações de preços estão disponíveis para os participantes do mercado em forma de bancos de dados em diferentes frequências. Dados de alta frequência fornecem uma visão detalhada do complexo processo dinâmico de oferta e demanda, refletindo a dinâmica de curto prazo dos preços, volume de negociação e liquidez (CONT, 2011). Dados de baixa frequência incorporam a noção de equilíbrio econômico, refletindo o comportamento de longo prazo dos preços ou retornos esperados (ZIVOT; WANG, 2013).

Logo, fatores como as interações de negociação entre compradores e vendedores, bem como sua frequência, influências do cenário econômico e as perspectivas para o futuro, têm importante relevância na formação e ajuste de preços de ativos financeiros descritos pela teoria da microestrutura de mercado ao longo do tempo (ZIVOT; WANG, 2013; JENSEN; WHITCHER, 2014). Conforme mostrado por Campbell, Lo e MacKinlay (2012) essa estrutura própria impacta de forma não trivial na correlação serial das oscilações de preço e, conseqüentemente, em propriedades estatísticas desses dados.

Diante as evidências apresentadas, Cont (2011) apresenta características inerentes da microestrutura do mercado:

- a) os participantes do mercado podem postar dois tipos: ordens de compra e venda. Uma ordem de mercado é uma ordem de compra/venda de uma determinada quantidade do ativo, ao melhor preço disponível no *book* de ordens limitadas;

- b) as mudanças de preços são discretas ("*tick-by-tick*") e não independentes. Este é um efeito típico de microestrutura que desaparece quando considera-se o retorno em escalas de tempo mais longas;
- c) as negociações ocorrem em intervalos irregulares, refletindo a intensidade da atividade de negociação. Elas são aleatórias e endógenas, ou seja, ligadas ao comportamento do preço e, possivelmente, ao histórico de negociação anterior;
- d) a atividade comercial está longe de ser uniforme durante o dia de negociação e exhibe um padrão em forma de U: a atividade é normalmente mais alta na abertura e no fechamento do mercado, e mais baixa na hora do almoço;
- e) quantidades relacionadas à volatilidade de preços e o volume de negócios também seguem fortes padrões de sazonalidade intradiária.

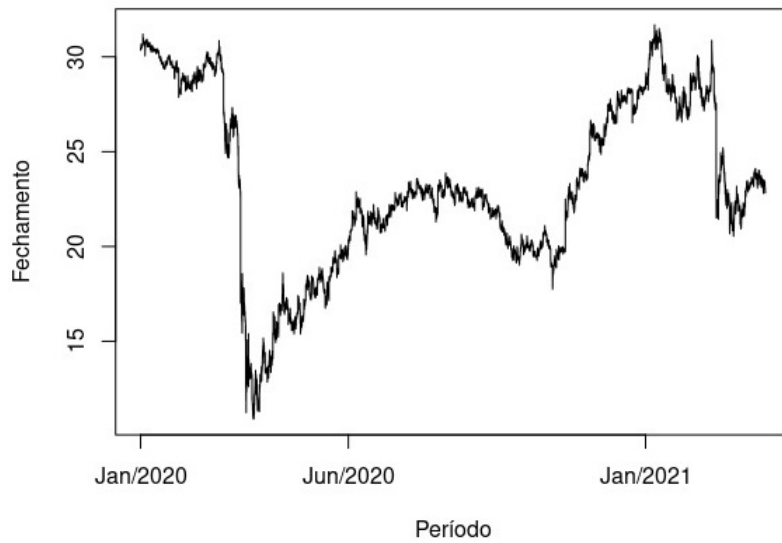
Nesta seção, uma visão geral da estrutura do funcionamento do mercado financeiro foi apresentada. Vários outros detalhes que se referem à estrutura de mercado e formação de preços podem ser visto em Campbell, Lo e MacKinlay (2012) e Pring (2014). A próxima seção apresenta definições de séries financeiras e fatos estilizados.

2.2 Séries Temporais Financeiras

A análise financeira de séries temporais preocupa-se com a teoria e a prática da avaliação de ativos ao longo do tempo. Nesta seção então apresenta-se de forma breve conceitos gerais de séries financeiras que embasam a gestão de ativos financeiros. Vários conceitos aqui introduzidos são baseados em Tsay (2010) e Morettin (2017).

Evidenciada a estrutura de funcionamento do mercado financeiro, dentro de um dia de negociação diferentes podem ser os movimentos de preços de ativos. Considere a Figura 2.2 que apresenta o gráfico de janeiro de 2020 a março de 2021 de observações dos preços das ações da Petrobras (PETR4) negociados na frequência de 1 minuto.

Figura 2.2 – Séries dos preços intradiários ($\Delta = 1$ min.) das ações da Petrobras (PETR4) no período de 02 de janeiro de 2020 a 24 de março de 2021.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Sobre esses dados destacamos algumas propriedades. Primeiro, eles são obtidos discretizando-se em diferentes intervalos possíveis de negociação no mercado. Segundo, sob diferentes cenários, é possível obter uma curva similar a da Figura 2.1, mas não a mesma. Dizemos que essas são trajetórias ou realizações ou, ainda, séries temporais de um mesmo processo estocástico.

Um processo estocástico é uma família $X = \{X(t), t \in T\}$, tal que, para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória. Consideraremos os momentos de primeira e segunda ordem dados por:

1. A função média, ou simplesmente média de $X(t)$, é dada por

$$\mu(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x; t).$$

2. A função de autocovariância

$$\gamma(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} - E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}, \quad t_1, t_2 \in T.$$

em que dado $t_1 = t_2 = t$ nos fornece a (função) variância do processo $X(t)$, e que será indicada por $\sigma^2(t)$

$$\gamma(t, t) = \text{Var}\{X(t)\} = E\{X^2(t)\} - E^2\{X(t)\}.$$

Nestas condições, denota-se uma série temporal financeira por $\{X_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, como os valores de negociação realizados para um ativo no mercado financeiro, em um determinado período de tempo t , dentre uma família de realizações definidas num mesmo espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. No exemplo, X_t denota o valor (em R\$) da cotação do ativo no instante t . Observemos também que, na prática, teremos que estimar as quantidades $\mu(t)$, $\sigma^2(t)$ e $\gamma(t_1, t_2)$ dessa trajetória.

Morettin (2017) aponta que além das características usuais de uma série temporal como a componente tendência, a série X_t apresenta outras peculiaridades relevantes em finanças como: heteroscedasticidade condicional (volatilidade) que corresponde a uma medida de variabilidade de preços de ativos; não-linearidade que trata-se das diferentes formas com que os preços reagem a choques positivos e negativos do mercado e podem apresentar alta frequência, ou seja, podem ser observados em intervalos muito pequenos de tempo e/ou em instantes de tempo irregularmente espaçados, caracterizado por flutuações e ruído.

Ainda, na prática séries financeiras tendem a ser não estacionárias. Um processo estocástico $X = \{X(t), t \in T\}$ diz-se fracamente estacionário ou estacionário de segunda ordem (ou em sentido amplo) se e somente se:

- a) $E\{X(t)\} = \mu(t) = \mu$, constante, para todo $t \in T$;
- b) $E\{X^2(t)\} < \infty$, para todo $t \in T$;
- c) $\gamma(t_1, t_2) = \text{Cov}\{X(t_1), X(t_2)\}$ é uma função de $|t_1 - t_2|$.

De acordo com Tsay (2010) a não estacionariedade em séries financeiras deve-se principalmente ao fato de que não há nível fixo para o preço, como se observa no comportamento da Figura 2.2, o que está relacionado à componente tendência. Em mercados financeiros a componente tendência compreende como o período em que um preço se move de forma irregular, mas persistente, em uma direção, refletindo todas as informações disponíveis sobre um ativo em diferentes horizontes de negociação (PRING, 2014). Comportamento que é reflexo de eventos exógenos do mercado e as oscilações no nível dos preços de ativos (GUJARATI; PORTER, 2011).

2.2.1 Retornos Financeiros

Dada a definição de séries de preços, estudos na área de finanças concentram-se na análise da série de variação relativa de preços dos ativos, denominada série de retornos financeiros.

O retorno simples de um ativo ou a taxa de retorno entre o instante $t - 1$ e t é calculado da seguinte forma:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}},$$

em que P_t é o preço do ativo no instante t e ΔP_t a variação de preços entre o instante $t - 1$ e t relativa ao período (um dia, um mês, um ano, etc).

Considerando a característica de alta frequência, seja um período m e dia d conforme Morettin (2017) define-se os retornos intradiários como:

$$r_{d,m} = p_{d,m} - p_{d,m-1}, \quad m = 2, \dots, M, d = 1, \dots, D \quad (2.1)$$

em que $p_{d,m}$ é o log-preço do ativo no período m ($m = 1, 2, \dots, M$) do dia d ($d = 1, 2, \dots, D$), com total de observações $T = M \times D$ e $t = M(d - 1) + m$, $t = 1, \dots, T$. Ademais, $r_{d,1} = p_{d,1} - p_{d-1,M}$ é denominado de retorno *overnight*.

Na prática, os preços dos ativos entre os instantes $t - 1$ e t são bem próximos assim $R_t \lll 1$. Define-se, assim, o log-retorno como:

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1},$$

sendo $p_t = \log P_t$. Os retornos simples e os log-retornos são, em geral, valores próximos, já que para um valor constante (h) pequeno têm-se que $\log(1 + h) \approx h$. Para mais detalhes sobre os retornos financeiros, ver em Tsay (2010) e Morettin (2017).

Assim, para gestão de ativos financeiros, é necessário considerar determinadas características peculiares presentes nas séries de retornos financeiros. Conforme Morettin (2017), além de algumas das peculiaridades usuais de séries financeiras os *fatos estilizados* apresentados pelos retornos são:

- a) de forma geral, os retornos não são autocorrelacionados;
- b) os quadrados dos retornos são autocorrelacionados, apresentando uma correlação pequena na primeira defasagem e depois uma queda lenta das demais;
- c) nas séries de retornos há agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo e memória longa;

- d) a distribuição dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que uma distribuição normal e, embora aproximadamente simétrica, é em geral, leptocúrtica.
- e) raramente apresentam tendências ou sazonalidades, com exceção eventualmente de retornos intradiários.

As propriedades de séries financeiras criam muitos desafios na modelagem. Em particular, a distribuição dos retornos e o comportamento de alta frequência abrem campo para abordagens multivariadas e distinção de sinal de ruído no campo de estratégias de negociação de ativos e detecção de mudanças abruptas. Diante destas questões, para uma análise mais ampla destas séries, considerando as diferentes escalas destes dados, a próxima seção abrange sobre recursos em multiescala com a abordagem de *Wavelets*.

2.3 Análise Financeira no Domínio Tempo-Frequência

Como visto anteriormente, o mercado financeiro é composto por participantes que têm um largo espectro de frequência de negociação, que reflete da existência de uma microestrutura com a presença de eventos irregulares como, inesperadas quedas, surpresas e interrupções políticas do mercado. Dessa forma, os dados econômicos ou financeiros geralmente exibem uma microestrutura com tendências que mudam lentamente ou oscilações pontuais e mudanças abruptas que muitas vezes são as partes mais interessantes dos dados, tanto perceptivamente quanto em termos das informações que fornecem (JENSEN; WHITCHER, 2014).

Para resolver problemas de alocação de ativos, gerenciamento de risco e precificação, abordagens vêm sendo desenvolvidas e aplicadas no campo acadêmico para a análise da relação entre o risco e o retorno esperado de investimentos sem as premissas assumidas pelos modelos clássicos. As considerações de normalidade vêm sendo substituídas por modelos mais robustos que incorporam distribuições assimétricas e caudas longas da distribuição dos retornos dos ativos. Ainda, o interesse pelo comportamento no domínio da frequência vem ganhando muitos adeptos na análise de séries temporais econômicas e financeiras, de modo a captar cada vez mais os detalhes sobre a trajetória do preço de um determinado ativo.

Ang e Bekaert (2002) evidenciaram que os movimentos assimétricos nos retornos dos ativos refletem alguma estrutura particular da macroeconomia ou interações de agentes econômicos em equilíbrio. Capturar a relação entre a alocação de portfólio e horizontes de investimento aprofunda a compreensão da verdadeira natureza desses relacionamentos em diferentes

escalas de tempo, o que implica em melhores resultados em casos de mudanças estruturais, capturando tanto movimentos de longo prazo, quanto detalhes de alta frequência (KIM; IN, 2010).

Nesse contexto, estudos de alocação de portfólio em várias escalas de tempo comumente têm como base na técnica *wavelet*. A relevância de aplicações da metodologia *wavelets* na análise e modelagem de séries financeiras refere-se principalmente a possibilidade de estudar a microestrutura de mercados financeiros, graças a sua capacidade de localizar informações em escala de tempo local dentro de uma série como, por exemplo, identificar as tendências de longo prazo e localizar os momentos de oscilações relevantes.

Berger (2015) aplicou a análise *wavelet* para estudar a dependência assimétrica de 29 ações dos EUA listadas no DJI (*Dow Jones Industrial Average*). Com base em séries temporais dos retornos decompostas, o objetivo foi de minimizar a volatilidade do portfólio obtendo a dependência de cauda para cada escala de tempo, em momentos de mercado calmos e turbulentos. O recorte foi o período antes e depois da crise do *subprime* eclodida em 2008. Recorrendo à medida de dependência de caudas, obteve-se que portfólios que minimizam a volatilidade de curto prazo superam composições de carteira que são baseadas em séries de retorno bruto. Outros trabalhos desse autor abordam a análise tempo-frequência na gestão de portfólios (BERGER, 2016; BERGER; GENÇAY, 2020) e mensuração de risco com o cálculo do *VaR* (BERGER; FIEBERG, 2016).

Najeeb, Bacha e Masih (2015) identificaram oportunidades de diversificação para investidores com horizontes de investimento heterogêneos em um estudo de caso com o mercado financeiro da Malásia. Usando diferentes abordagens *wavelet* nas séries de retornos de ações islâmicas, levando em conta a presença de caudas pesadas na distribuição dos retornos, auferiu-se que oportunidades de diversificação de portfólios existem principalmente para períodos *short holding*. Para horizontes mais longos, que excedam um ano, os mercados parecem estar altamente correlacionados, gerando benefícios mínimos de diversificação. No geral, os resultados destacaram a importância da heterogeneidade nos horizontes de investimento e suas implicações para estratégias de diversificação de portfólio, como também nos trabalhos de Khalfaoui e Boutahar (2012), Aloui e Hkiri (2014) e Rahim e Masih (2016).

Biage (2019) mensurou o risco dos retornos diários de carteiras com ações do Ibovespa e DJIA, considerando os componentes de frequências dos ativos, estimando a medida *VaR* pela decomposição *wavelet*. O modelo FIGARCH foi aplicado para prever a variância condicio-

nal, com distribuição a ser assumida para captar curtose e efeitos de assimetria. As bandas de frequências utilizadas na análise incorporam efeitos de ciclos semanais e mensais no risco respectivos mercados de ações, refletindo a influência dos “Efeitos de segunda-feira” e “Efeitos de virada de mês”. Os resultados mostraram que as ações do DJIA são mais eficientes que as do Ibovespa e que com a abordagem *wavelet* os *VaRs* estimados eram consistentes com os *VaRs* exatos.

A proposta multiescala de Chen, Sun e Yu (2018) para mensuração do risco foi implementada na seleção de portfólio usando dados de alta frequência de ações do DJIA e os resultados empíricos confirmaram uma significativa melhora no desempenho da avaliação dinâmica de risco e seleção de portfólio. Jammazi e Reboredo (2016), usando *wavelets* e cópulas, examinaram as implicações da estrutura de dependência em diferentes escalas de tempo para a gestão de risco no mercado de petróleo e evidenciaram benefícios da diversificação com a redução do risco para alguns portfólios mistos de ações de petróleo no curto prazo, já a longo prazo os ganhos são reduzidos.

Bortoluzzo, Minardi e Passos (2014) analisaram a relação entre risco e retorno prevista modelo CAPM - *Capital Asset Pricing Model*- no mercado brasileiro de ações em diferentes escalas de tempo, desde o curto prazo (2 a 4 dias) até o longo prazo (64 a 128 dias). No período analisado não se auferiu uma remuneração adequada pelo risco sistêmico no mercado brasileiro, já que não ocorreu uma relação positiva, ou seja, que um maior risco resultasse em um maior retorno. De forma geral, as escalas que apresentaram uma relação de risco e retorno mais significativa foram as correspondentes aos horizontes de curto prazo. Na análise de riscos macroeconômicos relativos à indústria com portfólios do mercado de ações dos EUA, baseado no CAPM em uma base de escala por escala, Bruzda (2019) descobriu mudanças de nível e certas tendências ao longo de um período de tempo mais longo, como, por exemplo, aumentando a exposição ao risco de consumo em frequências de ciclo de negócios ou diminuindo exposição ao fator prêmio de risco na escala correspondente às oscilações anuais, o que sugere que as quantidades examinadas pode não ser constante ao longo do tempo.

A próxima seção apresenta conceitos e definições importantes sobre a metodologia *Wavelets*. Algumas importantes referências utilizadas foram Percival e Walden (2000), Nason (2008) e Morettin (2014). Fundamentos da análise de *wavelet*, uma visão abrangente das propriedades matemáticas é fornecida por Daubechies (1992).

2.4 Wavelets

A análise de *Wavelets* corresponde a uma robusta ferramenta matemática empregada na análise numérica e manipulação de sinais discretos unidimensionais ou multidimensionais, estacionários e não estacionários. Esta metodologia vem sendo aplicada em diferentes áreas do conhecimento como estatística, matemática aplicada, engenharia e ciência.

Conforme Morettin (2014) as *wavelets* são funções matemáticas que representam ondas de curta duração, com crescimento e decaimento rápidos, em um período de tempo finito. A ideia básica da análise de *wavelets* é decompor os dados em várias escalas de tempo, o que permite examinar o comportamento de um sinal em várias escalas com janelas de tempo que variam (IN; KIM, 2013).

A análise *wavelet* é utilizada para representação de sinais, conduzida no domínio do tempo-escala. Com base em uma função protótipo $\psi(t)$, denominada *wavelet mãe*, no espaço integrável $L^2(\mathbb{R})$, uma família de *wavelets* pode ser definida da seguinte forma:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), b \in \mathbb{R}, a > 0, \quad (2.2)$$

em que uma *wavelet* $\psi_{a,b}(t)$ é obtida via translações e dilatações de $\psi(t)$, com os parâmetros a e b correspondentes a escala e translação, respectivamente. Ademais, o termo $|a|^{-1/2}$ é um fator de normalização da energia¹ do sinal.

Em termos gerais, o parâmetro de escala a refere-se ao processo de compreensão e dilatação do sinal, o que possibilita analisar aspectos locais e globais do sinal, sendo que altas escalas propiciam uma visão menos detalhada do sinal e baixas escalas uma visão mais detalhada. Já o parâmetro de translação está associado a informação de localização no tempo, sendo que a medida que o parâmetro varia um sinal é analisado localmente em torno de b .

A função *wavelet*-mãe $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ atende determinadas características:

(P1) Admissibilidade: apresentar característica ondulatória,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

¹ Define-se a “energia” em uma série temporal como:

$$\sum_{t=0}^{T-1} X^2(t)$$

(P2) A energia E_ψ é unitária,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1,$$

i.e. finita,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty.$$

(P3) Momentos nulos: torna possível a análise da regularidade local de um sinal,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0, \quad 0 \leq m \leq M$$

sendo que, de acordo com o número de momentos nulos as *wavelets* são classificadas em famílias. Se as *wavelets* têm m momentos nulos, então todos os coeficientes *wavelets* de qualquer polinômio de grau m ou menor serão exatamente zero (NASON, 2008).

A partir de (2.2) para o caso de sinais discretos temos que:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

em que para o caso discreto $\psi_{j,k}(t)$ é obtida por uma dilatação binária 2^j e uma translação diádica $k2^j$.

A base $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}$ não precisa ser necessariamente ortogonal, contudo considerar bases ortogonais possibilita a reconstrução perfeita do sinal original a partir dos coeficientes da transformada (MORETTIN, 2014). Logo, para qualquer $f(t)$ de quadrado integrável sobre \mathbb{R} ,

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (2.4)$$

em que a convergência em 2.4 deve ser entendida em média quadrática. Dizemos que 2.4 é uma série de *wavelet* de $f(t)$ com coeficientes,

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt.$$

A partir destes conceitos iniciais, a próxima seção conceitos relacionados a técnica de transformada *wavelet* (TW), uma ferramenta de análise multiresolução² (AMR), conhecida pela característica de decompor funções e de reconstruí-las, conservando a energia do sinal original são apresentados.

2.5 Transformada Wavelet

A TW é um método que possibilita analisar o sinal em escalas diferentes e se desloca analisando cada ponto do sinal. Os tamanhos de janelas para localização de frequências são ajustáveis a cada trecho do sinal, de forma que elas conseguem localizar altas e baixas frequências, simultaneamente, em um mesmo trecho temporal.

Tem-se duas formas da transformada, a contínua e a discreta. A transformada contínua é de grande interesse teórico, mas sua discretização é necessária para aplicações práticas, como por exemplo, ao descrever um sinal unidimensional em uma representação bidimensional, ou quando se tem a necessidade de se inverter a operação.

Conforme Percival e Walden (2000) e Morettin (2014), a seguir serão apresentados aspectos da transformada discreta de *wavelet* (TDW), com ênfase na *Maximal overlap discrete wavelet transform* (MODWT) que corresponde a Transformada não decimada discreta de *Wavelet* aplicada a séries temporais.

2.5.1 Transformada Discreta de Wavelets

A TDW é definida como uma aproximação ortogonal de uma série temporal $X_t \in L^2(\mathbb{R})$ que tem como base a soma de um conjunto finito de coeficientes de alta frequência e uma parte residual de baixa frequência até a escala J , ou seja:

$$X_t = \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(t) + \sum_k d_{2,k} \psi_{2,k}(t) + \cdots + \sum_k d_{J,k} \psi_{J,k}(t) + \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k}(t), \quad (2.5)$$

sendo $c_{J,k}$ e $d_{J,k}$ são os coeficientes da TDW de X_t e definidos como:

$$c_{J,k} = \int \phi_{J,k}(t) X_t dt \quad \text{e} \quad d_{j,k} = \int \psi_{j,k}(t) X_t dt, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

² Para mais detalhes sobre a análise multirresolução ver Nason (2008).

em que J é o número de escalas e k varia de 1 ao número de coeficientes no componente especificado. O vetor de coeficientes *wavelets* da transformada é dado por $\mathbf{w} = (d_1, d_2, \dots, d_J, c_J)$ para $n = 2^J$, com $d_{j,k}$ representando o detalhamento do sinal e $c_{j,k}$ referem-se aos coeficientes de aproximação do sinal que capturam a tendência.

A função $\psi_{J,k}(t)$ corresponde à *wavelet*-mãe e $\phi_{J,k}(t)$ à função escala, também chamada de *wavelet*-pai, que contêm informações de aproximação do sinal em cada nível e tem sua forma dada como:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) = 2^{j/2} \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right), \quad (2.6)$$

em que o termo 2^j , fator de escala, corresponde a uma sequência de escalas.

A equação em (2.5) representa a aproximação da série *wavelet* da série temporal original X_t a partir da soma do sinal suave $c_{J,k}$, e os sinais de detalhe $d_{j,k}$ com $j = 1, 2, \dots, J$. No processo de transformada para cada índice j , uma função de resolução maior ou mais precisa é adicionada. Matematicamente (2.5) é equivalente à multiplicação por uma matriz ortogonal \mathbf{W} :

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{x},$$

e, supondo-se condições apropriadas, a transformada é ortogonal e podemos invertê-la na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}'\mathbf{w}.$$

A implementação da TDW na prática é realizada por meio do algoritmo piramidal de Mallat (1989). Este algoritmo apresenta complexidade $O(n)$ e consiste numa sequência de filtros passa-baixo, os quais produzem os coeficientes de aproximação do sinal l_k , e de passa-alto, que produzem os coeficientes de detalhamento do sinal h_k . Nestas condições tem-se que ψ pode se obtida de ϕ por:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k),$$

sendo

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k \ell_k \phi(2t - k),$$

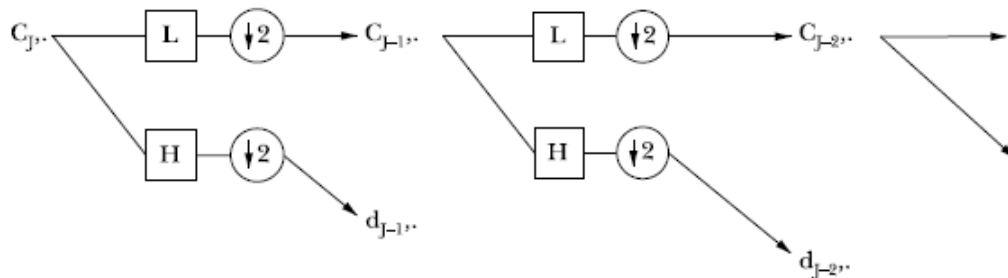
em que $h_k = (-1)^k \ell_{1-k}$ a *quadrature mirror filter relation*. Os filtros passa-baixo l_k e passa-alto h_k podem ser obtidos com as *wavelets* pai e mãe a partir dos seguintes relacionamentos:

$$\begin{aligned} l_k &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\phi(2t - k)dt \\ h_k &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\phi(2t - k)dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Os filtros l_k e h_k satisfazem propriedades úteis na decomposição de um sinal. Pode-se mostrar que $\sum_k l_k = \sqrt{2}$, $\sum_k h_k = 0$, $\sum_k l_k^2 = 1$ e $\sum_k l_k h_{k-2m} = 0$, se $m \neq 0$, e igual a zero, caso contrário. O filtro h_k apresenta propriedades de soma zero, tem energia unitária e ortogonalidade (MORETTIN, 2014).

A Figura 2.3 apresenta uma exemplificação do algoritmo, sendo que $\downarrow 2$ indica a operação de decimação por 2, ou seja, a cada duas saídas do filtro, desprezamos uma (MORETTIN, 2014).

Figura 2.3 – Algoritmo Piramidal de Mallat



Fonte: Morettin (2014)

Observa-se que em cada etapa, processando os coeficientes de aproximação L novamente como dados de entrada, com o mesmo banco de filtros, gera-se outro conjunto de coeficientes de aproximação e de detalhe, com um nível de resolução inferior. No passo j , $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ são calculados pelo algoritmo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \sum_n l_{n-2k} c_{j+1,n} \\ d_{j,k} &= \sum_n h_{n-2k} c_{j+1,n} \end{aligned}$$

em que $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ são obtidos pela decimação do passo anterior de $c_{j+1,n}$ via médias móveis amostradas nos inteiros pares. No nível j , teremos metade do número de coeficientes do nível $j - 1$.

2.5.2 Transformada não Decimada de Wavelet

Como visto anteriormente, a TDW seleciona os valores filtrados pares, de modo que em cada escala o número de coeficientes é a metade do número de coeficientes da escala anterior (MORETTIN, 2014). Em contraste, a transformada discreta não decimada de *wavelets*, a denominada TNDW ou MODWT, é não ortogonal e redundante e invariante à translação, em que se a série temporal X_t contiver n observações cada um dos vetores de coeficientes *wavelet* também conterá n elementos, o que torna possível o alinhamento dos recursos em multiescala com a série temporal original (PERCIVAL; WALDEN, 2000).

Para a análise multiescala de séries temporais a transformada não decimada, ou MODWT, é mais apropriada. Conforme In e Kim (2013) a MODWT possibilita uma análise em escala de séries temporais com métodos análogos aos usuais que são adaptados e indexados por escala. Dessa forma, é possível analisar informações de ativos financeiros ao longo do tempo e em várias escalas de resolução.

O MODWT também segue o mesmo algoritmo de pirâmide que o TDW, embora utilize os filtros redimensionados de (2.7) expressos como:

$$\tilde{l}_k = l_k/2^j$$

$$\tilde{h}_k = h_k/2^j.$$

Nesse caso, o algoritmo apresenta complexidade $O(\log_2 n)$ permitindo a translação para qualquer posição definida pelas *wavelets* de resolução mais fina. O processo de filtragem seguido pela decimação diádica preserva ambos os elementos (pares e ímpares), e mantém esse procedimento ao longo do algoritmo piramidal (MORETTIN, 2014). Dessa forma, no total, o número de coeficientes de *wavelets* em ambas decimações na escala mais fina é n (NASON, 2008).

Em cada escala, os coeficientes MODWT descrevem variações da série original em níveis cada vez mais grosseiros de resolução, de maneira não agregada no tempo. Ou seja, a MODWT permite uma interpretação temporal em relação aos detalhes $\tilde{d}_{j,k}$, com um alinhamento dos detalhes da decomposição com a série temporal original (IN; KIM, 2013). No contexto da análise financeira, Berger e Gencay (2018) apresenta a interpretação econômica das séries de retornos diários reconstruídas em cada horizonte de tempo, com $j = 1, \dots, 8$, como verifica-se na Tabela ??.

Tabela 2.1 – Interpretação econômica das decomposições de séries diárias

Nível	Frequência	Escala de Tempo
\tilde{d}_1	2 – 4 dias	Curto Prazo
\tilde{d}_2	4 – 8 dias	Curto Prazo
\tilde{d}_3	8 – 16 dias	Curto Prazo
\tilde{d}_4	16 – 32 dias	Médio Prazo
\tilde{d}_5	32 – 64 dias	Médio Prazo
\tilde{d}_{6i}	64 – 128 dias	Médio Prazo
\tilde{d}_7	128 – 256 dias	Longo Prazo
\tilde{d}_8	256 – 512 dias	Tendência

Fonte: Berger e Gencay (2018)

Utilizando sua saída filtrada em cada escala, uma série temporal X_t também pode ser decomposta em seus detalhes de *wavelet* e suavizada como em (2.5) da seguinte forma:

$$X_t = \sum_{j=1}^J \tilde{d}_j + \tilde{c}_J.$$

2.6 Funções Wavelets

Há uma grande variedade e formatos de *wavelets*, características estas que podem ser mais adequadas para determinadas aplicações. De acordo com Gençay et al. (2001), para escolher uma *wavelet* apropriada, há três aspectos a serem considerados: comprimento dos dados, complexidade da função de densidade espectral e a forma subjacente de recursos em os dados. Quanto mais curto o filtro *wavelet*, menos coeficientes *wavelet* produzidos.

Essas funções podem ter a propriedade de suporte compacto, relacionada ao fato da localização de *wavelets* no tempo, e algumas geram sistemas ortogonais. Algumas das principais são: Haar, Daubechies, Symlets, Coiflets, Morlet e Gaussianas. *Wavelets* ortogonais e de suporte compacto, frequentemente utilizadas, são as *wavelets* de Daubechies, Symlets e Coiflets. As *wavelets* que não têm suporte compacto são de Shannon, Morlet, Chapéu Mexicano e Meyer (MORETTIN, 2014).

A *wavelet* mais antiga e simples é a função de Haar (1910), apresentada na Figura 2.4 com forma analítica dada por:

$$\psi^{(H)}(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para a qual a função escala é $\phi^{(H)}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1$ e

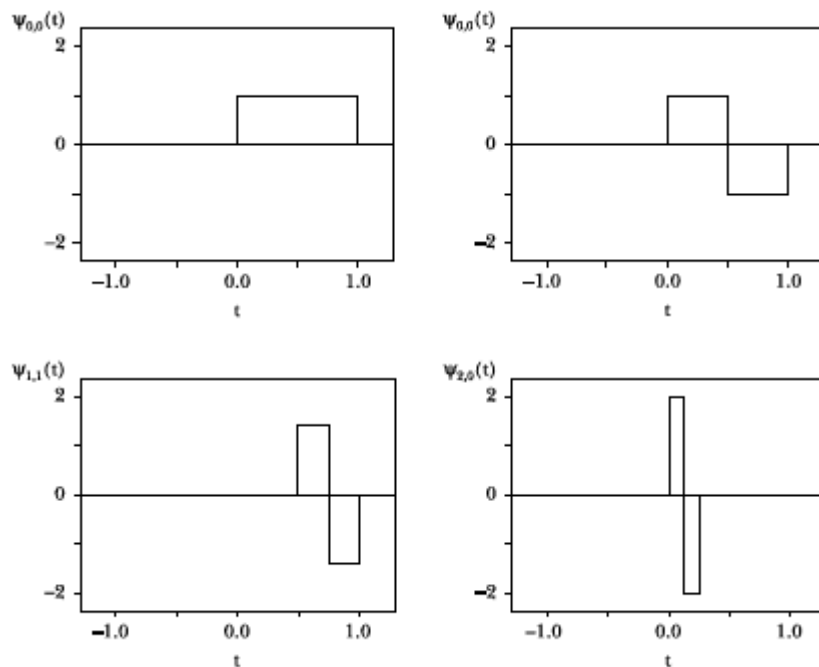
$$\psi_{j,k}^{(H)}(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & 2^{-j}k \leq t < 2^{-j}(k+1/2) \\ -2^{j/2}, & 2^{-j}(k+1/2) \leq t < 2^{-j}(k+1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para a *wavelet* de Haar a equação de dilatação é dada por:

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2t-1),$$

em que $\ell_0 = \ell_1 = 1/\sqrt{2}$. Do mesmo modo, $h_0 = -h_1 = 1/\sqrt{2}$.

Figura 2.4 – Wavelet Haar



Fonte: Morettin (2014)

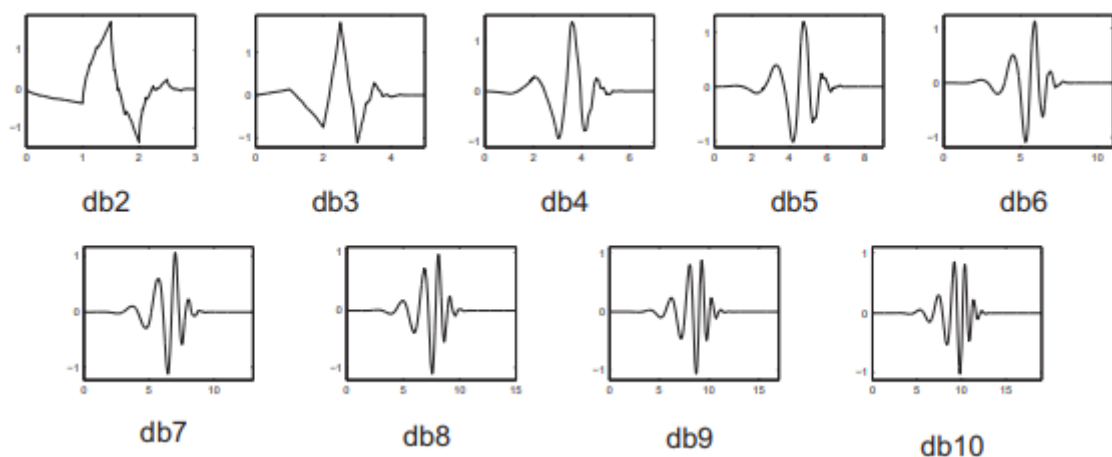
As *wavelets* de Daubechies foram introduzidas por Daubechies (1992) e constituem uma família de *wavelets* comumente usada em aplicações práticas. Essa família são denominadas *extremal phase* (daublets), *least asymmetric* (symmmlets) e as coiflets. Todas foram introduzidas por Daubechies e são não simétricas.

Em geral, as daublets são ortonormais, de suporte compacto e dependem de um parâmetro N que controla a regularidade de ϕ e ψ . Se tivermos $2N$ coeficientes do filtro não nulos (db1, db2, ..., dbN) então ψ terá suporte em $[-N + 1, N]$ e N momentos nulos. Quanto mais momentos nulos, mais suaves são as funções, sendo que db1 equivale à ondaleta de Haar e possui um momento nulo. Na Figura 2.5, pode-se observar o comportamento de $N = 2, \dots, 10$ membros dessa família.

Estas *wavelets* não têm uma forma explícita, e são calculadas de forma iterativa. Para essa família de funções é definida por Daubechies (1992), dado todo r inteiro, a base ortonormal $\psi_r(x)$ apresenta importantes propriedades: (i) $\psi_r(x)$ tem o intervalo de suporte compacto $[0, 2r + 1]$; (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_r(x)dx = \dots = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \psi_r(x)dx = 0$. Por exemplo, a *wavelet* db2 (daublet) é obtida pelas equações:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t - 1) + h_2\phi(2t - 2) + h_3\phi(2t - 3), \\ \psi(t) &= h_3\phi(2t) - h_2\phi(2t - 1) + h_1\phi(2t - 2) - h_0\phi(2t - 3).\end{aligned}$$

Figura 2.5 – *Wavelets* de Daubechies (dbN)



Fonte: Atlas e Gupta (2014)

A próxima seção então apresenta aspectos sobre a metodologia de cópulas em séries temporais conforme Patton (2013), e as abordagens multivariadas de *pair copula* de Joe (1996) e o modelo de cópulas fatoriais de Oh e Patton (2012).

2.7 Cópulas

Na área das finanças a análise multivariada de retornos de ativos tem como o intuito de explorar a dinâmica das relações comerciais e financeiras, captando a estrutura de dependência existente entre mercados, portfólios e gerenciamento/mensuração de risco. Nesse campo de análise, a metodologia de cópulas tem sido usada frequentemente para analisar a interdependência de séries financeiras e fatores de risco, como verifica-se nos trabalhos de Ghorbel e Trabelsi (2013), Righi e Ceretta (2013), Filho, Ziegelmann e Dueker (2014), Bartels e Ziegelmann (2016), Bucio, Cabello e Ortiz (2016) e Brechmann, Heiden e Okhrin (2018).

A relevância de sua aplicação é a flexibilidade na modelagem da estrutura de dependência de séries financeiras, permitindo a criação de distribuições multivariadas que possuam marginais que não apresentem distribuição normal, levando em consideração as características destes dados. Uma revisão das questões de estruturas de dependência e derivações de distribuições multivariadas em finanças pode ser vista em Cherubini, Gobbi e Mulinacci (2016).

As próximas seções apresentam fundamentos importantes de cópulas utilizados nesse estudo.

2.7.1 Conceitos iniciais

A ideia de cópula é introduzida por Sklar (1959). Para uma distribuição conjunta n -dimensional F de um vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ com marginais $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$, existe uma função cópula C tal que:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad (2.8)$$

sendo que se F_1, \dots, F_n são todas contínuas, a função C é única, caso contrário, é determinada somente em $ImF_1 \times \dots \times ImF_n$.

A partir do resultado na Equação 2.8, ao realizar a transformação integral de probabilidade em cada distribuição marginal, $\forall \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ obtêm-se a função cópula C :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^-(u_1), \dots, F_n^-(u_n)), \quad (2.9)$$

em que, a função F_i^- é a inversa generalizada³.

Uma cópula é então uma função de distribuição conjunta definida no cubo unitário $[0, 1]^n$, com distribuições marginais uniformes distribuídas no intervalo $[0, 1]$, tal que:

- i. $C(\mathbf{u}) = 0$, para algum u_i com valor nulo e $C(\mathbf{u}) = u_k$ se todos os componentes de \mathbf{u} são 1, exceto u_k ;
- ii. para cada \mathbf{a} e \mathbf{b} pertencente a $[0, 1]^n$, com $a_i \leq b_i$, para todo i , $V_c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$, em que V_c é o C -volume.

A distribuição multivariada das variáveis transformadas é, então, chamada de cópula. Em relação às formas de dependências empíricas utilizam-se cópulas das famílias elípticas e arquimedianas que refletem diferentes tipos de dependência. Nas cópulas elípticas, isto é, cópulas Normal e *t-Student*, a dependência é capturada por uma matriz de correlação. Nas cópulas arquimedianas diferentes parametrizações parcimoniosas governam a dependência. Para mais detalhes sobre especificações de funções cópulas ver Nelsen (2006).

A densidade associada a uma cópula é definida pelas derivadas parciais em relação a \mathbf{u} da função $C(u_1, \dots, u_n)$:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial C^n(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}.$$

A densidade do vetor aleatório \mathbf{X} pode, assim, ser escrita da seguinte forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (2.10)$$

em que $u_1 = F_1(x_1; \theta_1), \dots, u_n = F_n(x_n; \theta_n)$ sendo θ_i os vetores de parâmetros das marginais, $i = 1, 2, \dots, n$.

³ Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F a sua função inversa generalizada (ou "quase-inversa") é dada por:

$$F^-(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\} \quad \forall u \in [0, 1]$$

em que $F^-(u)$ é contínua e não decrescente sobre $u \in [0, 1]$.

2.7.2 Cópulas Condicionais

A abordagem de cópulas pode ser estendida às distribuições condicionais, partindo da teoria de cópulas condicionais de Patton (2006), a partir do caso condicional do Teorema de Sklar.

Seja $\mathbf{X}|\mathbf{W}$ com (X_1, \dots, X_n) e \mathbf{W} com suporte em Ω , e as variáveis aleatórias X_i com distribuições condicionais $F_i(x_i|\mathbf{w})$ e distribuição conjunta condicional F . Então existe uma função cópula C tal que:

$$F(x_1, \dots, x_n|\mathbf{w}) = C(F_1(x_1|\mathbf{w}), \dots, F_n(x_n|\mathbf{w})|\mathbf{w}),$$

em que se F é contínua, a função $C(\cdot)$ é única, caso contrário, é determinada somente em $ImF_1 \times \dots \times ImF_n$. Análogo a (2.9) a função cópula C , é obtida como:

$$C(u_1, \dots, u_n|\mathbf{w}) = F(F_1^{-1}(u_1|\mathbf{w}), \dots, F_n^{-1}(u_n|\mathbf{w})|\mathbf{w}),$$

com a densidade da conjunta condicional dada por:

$$f(x_1, \dots, x_n|\mathbf{w}) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n|\mathbf{w})}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f_1(x_1|\mathbf{w}) \dots f_n(x_n|\mathbf{w}) \cdot c(u_1, \dots, u_n|\mathbf{w}),$$

em que $u_1 = F_1(x_1|\mathbf{w}), \dots, u_n = F_n(x_n|\mathbf{w})$.

Esta abordagem é utilizada, na análise da estrutura e comportamento de séries temporais. Conforme Patton (2013) para $X_{it}|W \sim F_i(\cdot|\mathbf{W})$, têm-se que:

$$F(x_{1t}, \dots, x_{nt}|\mathbf{w}) = C(F_1(x_{1t}|\mathbf{w}), \dots, F_n(x_{nt}|\mathbf{w})|\mathbf{w}),$$

em que de forma geral, $\mathbf{W} = \{X_{1t-1}, X_{2t-1}, X_{1t-2}, X_{2t-2}, \dots, X_{2t-T} \dots\}$, com $t \in 1, \dots, T$, e as distribuições marginais dadas por:

$$X_{it} = \mu_i(\mathbf{Z}_{t-1}) + \sigma_i(\mathbf{Z}_{t-1}) \varepsilon_{it}, \text{ for } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

em que ε_{it} é o resíduo padronizado tal que $\varepsilon_{it}|\mathbf{W} \sim F_i(0, 1) \forall t$, utilizado na estimação da cópula e o subconjunto $\mathbf{Z}_{t-1} \in \mathbf{W}$ refere-se as informações passadas relevantes para cada série. Para mais detalhes ver Patton (2013).

2.7.2.1 Estimação

Na abordagem de cópulas condicionais de Patton (2006), um método paramétrico usual de estimação é a Inferência pelas Marginais (MIM) de Joe e Xu (1996).

Para o caso bivariado, seja a função log-verossimilhança da densidade condicional conjunta das séries temporais X_{it} , com $i = 1, 2$, dada por:

$$\begin{aligned} l(x_{1t}, x_{2t} | \mathbf{w}; \theta_{\mathbf{h}}) &= \\ &= \sum_{t=1}^T \ln f_{1t}(x_{1t} | \mathbf{w}; \theta_1) + \sum_{t=1}^T \ln f_{2t}(x_{2t} | \mathbf{w}; \theta_2) + \sum_{t=1}^T \ln c_t(u_1, u_2 | \mathbf{w}; \theta_c), \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que $\theta_{\mathbf{h}} = [\theta'_1, \theta'_2, \theta'_c]$ é o vetor de parâmetros da densidade conjunta.

O estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (2.12) é definido como:

$$\hat{\theta}_{\mathbf{h}MLE} = \max_{\theta \in \Theta} l(x_{1t}, x_{2t} | \mathbf{w}; \theta_{\mathbf{h}}),$$

em que no MIM é estimado em dois passos da seguinte forma:

1º. estimação dos parâmetros das marginais:

$$\hat{\theta}_i = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_{it}(x_{it} | \mathbf{w}; \theta_i), i = 1, 2.$$

Dada as características dos retornos financeiros e com base na definição das marginais em (2.11), para a média μ_i recorre-se aos modelos da classe ARMA (*Autoregressive Moving Average*) e ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*). O modelo ARMA(p, q) é apropriado para descrever séries temporais estacionárias, e pode ser dado de forma geral por:

$$X_{it} = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (2.13)$$

em que o termo ε_t é o resíduo que constitui variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid), ϕ representa os p coeficientes da componente auto-regressiva e θ os q coeficientes da componente de média móvel. A partir de (2.7) se X_{it} for uma série

temporal não estacionária, aplica-se o modelo $ARIMA(p, d, q)$ em que d é o número de diferenças tomadas na série.

Para a variância σ_t^2 aplica-se processos heterocedásticos condicionais. Um modelo usual desta classe aplicada em cópulas é GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). O modelo GARCH(r, s) de Bollerslev (1986) dado por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

em que ω corresponde ao nível médio de variância condicional, $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ e $\beta_i \geq 0$ retratam juntos a persistência da volatilidade tal que $\sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) < 1$, $q = \max(r, s)$.

Como uma alternativa à distribuição normal dos resíduos Bollerslev (1986) propõe o uso da distribuição t - *skewed*(ν_i, ξ_i). A função densidade de probabilidade de uma distribuição t - *skewed* com ν graus de liberdade é dada por:

$$f_K(k) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{k^2}{(\nu-2)}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}.$$

em que $f_K(k)$ é simétrica, mas possui caudas mais pesadas que a distribuição normal, com curtose igual a $6/(\nu-4)$ para $\nu > 4$.

2º. estimação dos parâmetros da cópula nos resíduos padronizados obtidos das marginais:

$$\hat{\theta}_c = \arg \max \sum_{i=1}^T \ln c(u_1, u_2 | \mathbf{w}; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \theta_c).$$

Uma cópula utilizada na área de finanças, por captar a dependência de cauda⁴ é Joe Clayton (JC) que tem forma funcional dada por:

$$C_{JC}(u, v | \tau_U, \tau_L) = 1 - \left(1 - \left\{[1 - (1 - u_1)^\varepsilon]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\varepsilon]^{-\gamma} - 1\right\}^{-1/\gamma}\right)^{-1/\varepsilon},$$

⁴ Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias contínuas com funções de distribuição F_1 e F_2 , respectivamente. Diz-se que X_1 e X_2 apresentam dependência caudal superior (τ_U) ou inferior (τ_L) se:

$$\begin{aligned} \tau_U &= \lim_{t \rightarrow 1^-} P[X_1 > F_1^{-1}(t) | X_2 > F_2^{-1}(t)] \\ \tau_L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} P[X_1 \leq F_1^{-1}(t) | X_2 \leq F_2^{-1}(t)] \end{aligned}$$

com $\kappa = 1/\log_2(2 - \tau_U)$ e $\gamma = -1/\log_2(\tau_L)$ com $\tau_L, \tau_U \in (0, 1)$, os parâmetros relacionados aos coeficientes de dependência da cauda inferior τ_U e superior τ_L .

Como os coeficientes de dependência de caudas caracterizam o aumento de dependência entre duas variáveis em eventos extremos, então essas medidas são importantes para descrever se o relacionamento entre os pares de retornos se intensificou mais nos momentos de alta ou de baixa dos preços dos ativos.

2.7.3 Pair Copula

Considere a densidade do vetor aleatório \mathbf{X} fatorada como:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_n(x_n) f(x_{n-1} | x_n) f(x_{n-2} | x_{n-1}, x_n) \dots f(x_1 | x_2, \dots, x_n),$$

em que, aqui, para n variáveis em $t = 1, \dots, T$ pontos de tempo, assume-se que as observações de cada variável são independentes ao longo do tempo.

Com base no Teorema de Sklar (1959), o resultado anterior pode ser generalizado para (2.10) utilizando-se a seguinte equação:

$$f(x | \mathbf{v}) = c_{xv_j | \mathbf{v}_{-j}} \{F(x | \mathbf{v}_{-j}), F(v_j | \mathbf{v}_{-j})\} \cdot f(x | \mathbf{v}_{-j}), \quad (2.14)$$

para um vetor \mathbf{v} d -dimensional. Note que v_j é um componente escolhido arbitrariamente de \mathbf{v} e que \mathbf{v}_{-j} é um vetor \mathbf{v} sem o componente v_j . Exemplificando para $n = 3$:

$$f(x_1 | x_2, x_3) = c_{13|2}(F(x_1 | x_2), F(x_3 | x_2)) \cdot f(x_1 | x_2),$$

e

$$f(x_2 | x_3) = c_{23}(F(x_2), F(x_3)) \cdot f(x_2).$$

Expressando todas as densidades condicionais por meio de (2.14), nós derivamos uma decomposição para $f(x_1, \dots, x_n)$ que consiste apenas em distribuições marginais univariadas e cópulas bivariadas o que resulta na decomposição *pair copula* como uma fatoração de uma cópula n -dimensional $c_{1\dots n}$ baseada apenas em cópulas bivariadas.

A distribuição marginal condicional é dada na forma $F(x | \mathbf{v})$. Para cada j , Joe (1996) mostrou que:

$$F(x | \mathbf{v}) = \frac{\partial C_{x,v_j | \mathbf{v}_{-j}} \{F(x | \mathbf{v}_{-j}), F(v_j | \mathbf{v}_{-j})\}}{\partial F(v_j | \mathbf{v}_{-j})},$$

em que $C_{ij|\mathbf{v}}$ é uma função de distribuição de uma cópula bivariada. As distribuições condicionais envolvidas em um nível da construção são sempre calculados como derivados parciais das cópulas bivariadas no nível anterior (AAS et al., 2009).

A construção *pair copula* (*pair copula construction* - PPC) é hierárquica por natureza, o que é uma maneira muito flexível e natural de construir uma cópula de dimensão superior (MENDES; SEMERARO; LEAL, 2010). Dada uma fatoração específica, há muitas reparametrizações possíveis. Bedford e Cooke (2001) e Bedford e Cooke (2002) introduziram o modelo chamado de *Regular Vine* expandido por Aas et al. (2009). Os principais tipos são as *canonical vines* (C-*vines*) e as *drawable vines* (D-*vines*). Cada variável na D-*vine* está conectada a não mais que duas outras diferentes variáveis, enquanto que na C-*vine*, cada nível do modelo possui uma variável central, em que estão ligadas todas as demais variáveis aleatórias.

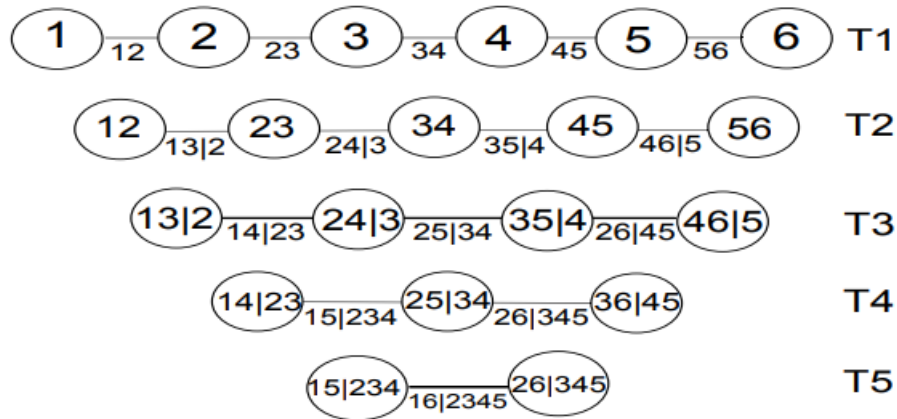
Para $d \geq 5$ uma decomposição D-*vine* específica pode ser escolhida. A função de densidade do D-*vine* é expressa por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} C_{i,i+j | i+1, \dots, i+j-1}(F(x_i | x_{i+1}, \dots, x_{i,j-1}) - F(x_{ij} | x_{i+1}, \dots, x_{ij-1})),$$

em que o índice j identifica as árvores, enquanto i percorre as arestas de cada árvore. Em um D-*vine*, nenhum nó em qualquer árvore T_j está conectado a mais de duas arestas. Há $n(n-1)/2$ densidade de cópulas bivariadas nas árvores $n-1$. A árvore T_j da D-*vine* tem $n-j$ cópulas bivariadas, $j = 1, \dots, (n-1)$. Aqueles na árvore $T = 1$ são incondicionais e todos os outros são condicionais (AAS et al., 2009).

A Figura 2.6 mostra a decomposição D-*vine* para $n = 6$. Nesse caso são 5 árvores aninhadas, sendo que a árvore T_j possui $7-j$ nós e $6-j$ arestas correspondentes a *pair copula*.

Figura 2.6 – D-vine com seis dimensões.



Fonte: Mendes, Semeraro e Leal (2010)

Além disso, as cópulas bivariadas envolvidas podem pertencer a diferentes famílias de forma a refletir várias formas de dependência (JOE; LI; NIKOLOULOPOULOS, 2010). O que dá uma maior flexibilidade na construção da distribuição multivariada, de forma a representar adequadamente os dados, captando estruturas de dependência mais complexas e formas não lineares de dependência, incluindo dependência de cauda, ou podem ser unidas independentemente. Por exemplo, pode-se combinar os seguintes tipos de cópulas bivariadas: Gaussiana (sem dependência da cauda, elíptica); *t-Student* (dependência da cauda inferior e superior igual, elíptica); Clayton (dependência da cauda inferior, Arquimediana); Gumbel (superior dependência da cauda, Arquimediana); BB7 (dependência diferente da cauda inferior e superior) (MENDES; SEMERARO; LEAL, 2010). Conforme Aas et al. (2009), os parâmetros são estimados na PCC com o procedimento de estimativa de máxima verossimilhança, como apresentado na seção 2.5.2.1.

2.7.4 Cópulas Fatoriais

Dado as definições de cópulas condicionais, é possível auferir que uma função cópula C multivariada é dada a partir de uma combinação de um conjunto de marginas univariadas X_1, \dots, X_d transformadas em variáveis aleatórias uniformes. Assume-se então que $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ é um vetor aleatório com $U_i \sim U(0, 1)$. Seja $F_{j|V_1, \dots, V_p}$ a distribuição conjunta de U_j dado variáveis latentes V_1, \dots, V_p , Krupskii e Joe (2013) definem o modelo p -cópula fatorial como:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_{[0,1]^p} \prod_{j=1}^d F_{j|V_1, \dots, V_p}(u_j | v_1, \dots, v_p) dv_1 \cdots dv_p, \quad (2.15)$$

em que U_1, \dots, U_d é condicionalmente independente, dado V_1, \dots, V_p e sem perda de generalidade, assume-se que V_i são i.i.d. $U(0, 1)$. O modelo em (2.14) é expresso adequadamente em termos de uma sequência de cópulas bivariadas que vinculam as variáveis observadas U_j às variáveis latentes V_k (KRUPSKII; JOE, 2013).

Para o caso de $p = 1$ variável latente, tem-se:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^1 \prod_{j=1}^d F_{j|V_1}(u_j | v_1) dv_1 = \int_0^1 \prod_{j=1}^d C_{j|V_1}(u_j | v_1) dv_1, \quad j = 1, \dots, d,$$

sendo que como $U_1, V_j \sim U(0, 1)$, $F_{j|V_1}$ corresponde a uma derivada parcial de C_{j,V_1} em relação ao segundo argumento, ou seja, $F_{j|V_1}(u_j | v_1) = C_{j|V_1}(u_j | v_1) = \partial C_{j,V_1}(u_j, v_1) / \partial v_1$.

Neste caso a respectiva densidade é dada por:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} = \int_0^1 \prod_{j=1}^d c_{j,V_1}(u_j, v_1) dv_1.$$

Conforme Krupskii e Joe (2013) a principal vantagem deste modelo em finanças é que ele permite diferentes tipos de estrutura de dependência de cauda. Se todas as cópulas de ligação bivariadas são dependentes da cauda inferior (superior), todas as marginas bivariadas de U também são dependentes da cauda inferior (superior), respectivamente. Assim, com cópulas de ligação apropriadamente escolhidas, a estrutura de dependência assimétrica e a dependência da cauda podem ser facilmente modeladas.

Na literatura financeira, existem vários modelos de cópulas fatoriais. Oh e Patton (2012) propõem uma abordagem que possibilita um grau aceitável de flexibilidade com um número não muito alto de parâmetros. O modelo de cópula fatorial com um fator é dado por:

$$Y_{it} = \lambda_{it} Z_t + \epsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

em que $Z_t \sim F_Z(\gamma_Z)$, $\epsilon_{it} \sim F_\epsilon(\gamma_\epsilon)$, $Z \perp \epsilon_i, \forall i$, γ_Z e γ_ϵ são vetores de parâmetros das distribuições do fator comum Z e do erro idiossincrático ϵ , respectivamente, λ_{it} é o i -ésimo fator de carga no tempo t e \mathbf{Y} é um vetor latente de variáveis cuja cópula é igual à de \mathbf{X} , ou seja,

$$X_t \sim F_X(x_{1t}, \dots, x_{nt} | \mathbf{w}) = C(F_{1t}(x_{1t} | \mathbf{w}), \dots, F_{nt}(x_{nt} | \mathbf{w}) | \mathbf{w})$$

e

$$Y_t \sim F_Y(y_{1t}, \dots, y_{nt}) = C(F_{Y_{1t}}(y_{1t}), \dots, F_{Y_{nt}}(y_{nt})).$$

À medida que aumenta o número de séries temporais, aumenta também o número de parâmetros a serem estimados pelo modelo, assim como o número de complexidade do processo de otimização. Oh e Patton (2012) buscam três níveis diferentes de estruturas de dependência entre as séries para alcançar um equilíbrio entre o número estimado de parâmetros do modelo e a flexibilidade. São eles, equidependência, dependência heterogênea e dependência de bloco:

- a) equidependência: assume que todas as séries temporais dependem umas das outras da mesma maneira. Apresenta um fator único de carga para todas as séries, o que é um pouco restritivo demais;
- b) dependência heterogênea: prevê que cada série temporal tenha cargas fatoriais independentes das cargas de outras séries temporais. Esse tipo de estrutura possui muitos parâmetros referentes as cargas fatoriais, o que pode se tornar computacionalmente muito caro à medida que o número de séries temporais aumenta;
- c) dependência de bloco: divide a priori o conjunto de séries temporais em grupos homogêneos em termos de dependência, ou seja, presume-se que séries de dois grupos diferentes são conectadas entre si da mesma maneira que outras duas séries temporais dos mesmos dois grupos. Essa abordagem pode reduzir drasticamente o número de parâmetros, pois cada grupo possui um conjunto de cargas fatoriais.

Assim, em geral, o modelo cópula fatorial de Oh e Patton (2012) é definido como:

$$Y_{it} = \lambda_{g(i),t}(\gamma_\lambda) Z_t + \epsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

em que $g(i) \in 1, \dots, G$ é o grupo ao qual a i -ésima série temporal pertence, G é o número de grupos nos quais as séries temporais são divididas e γ_λ é o conjunto de parâmetros conectados a λ . Observe que os níveis de dependência são dados como: $G = 1$ que é um caso especial de equidependência, $G = n$ um caso particular de dependência heterogênea e $1 < G < n$ um caso de dependência de bloco (OH; PATTON, 2012).

A abordagem de cópulas fatoriais possibilita obter resultados de uma avaliação da dependência assimétrica comumente apresentada por retornos financeiros. A cópula implícita pela equação 2.16, geralmente não têm forma fechada. Os autores então propõem os modelos Normal-Normal, a t-t e *Skew* t-t, estabelecidos com base em combinações particulares de escolhas de F_z e F_ϵ . No modelo *Skew* t-t, por exemplo, o primeiro termo refere-se ao fator comum com distribuição t-*skewed* e o segundo ao erro que apresenta distribuição t-*Student*.

Para estimação, Oh e Patton (2012) propõem um método que se baseia na maximização de uma aproximação numérica da função de verossimilhança, como na seção 2.5.2.1. Essa abordagem é baseada no método simulado de momentos (SMM) que consiste em comparar os momentos de dados observados com momentos de séries simuladas (para mais detalhes veja Oh e Patton (2012)). Para $f_{Y_t}(y_{1t}, \dots, y_{nt})$ a densidade $c_t(u_{1t}, \dots, u_{nt})$ é dada por:

$$c_t(u_{1t}, \dots, u_{nt}) = \frac{f_{Y_t} \left(F_{Y_{1t}}^{(-1)}(u_{1t}), \dots, F_{Y_{nt}}^{(-1)}(u_{nt}) \right)}{g_{1t} \left(F_{Y_{1t}}^{(-1)}(u_{1t}) \right) \times \dots \times g_{nt} \left(F_{Y_{nt}}^{(-1)}(u_{nt}) \right)},$$

em que,

$$g_{it}(y_{it}) = \int_0^1 f_\epsilon \left(y_{it} - \lambda_{it} F_Z^{(-1)}(m) \right) dm,$$

$$F_{Y_{it}}(y_{it}) = \int_0^1 F_\epsilon \left(y_{it} - \lambda_{it} F_Z^{(-1)}(m) \right) dm,$$

e

$$f_{Y_t}(y_{1t}, \dots, y_{nt}) = \int_0^1 \prod_{i=1}^n f_\epsilon \left(y_{it} - \lambda_{it} F_Z^{(-1)}(m) \right) dm.$$

Portanto, temos o log da função de verossimilhança da cópula, para aplicação do método de Joe e Xu (1996):

$$l_c \left(\theta_C \mid \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n, \mathbf{w} \right) = \sum_{t=1}^T \ln \left(c \left(F_1 \left(x_{1t} \mid \hat{\theta}_1, \mathbf{w} \right), \dots, F_n \left(x_{nt} \mid \hat{\theta}_n, \mathbf{w} \right) \mid \mathbf{w}, \theta_C \right) \right),$$

em que $\theta_C = [\gamma_Z, \gamma_\epsilon, \gamma_\lambda]'$ é o vetor de parâmetros de cópula a serem estimados.

2.7.4.1 Dependência de Cauda de Cópulas Fatoriais

Embora a maioria das cópulas fatoriais não tenham uma expressão de forma fechada, usando resultados da teoria de valores extremos é possível obter analiticamente resultados so-

bre a dependência da cauda implícita. Dado a definição de dependência de cauda para duas variáveis, Oh e Patton (2012) apresentam os resultados para um modelo geral de cópula fatorial em 2.16 com um único fator; Suponha que F_z e F_ε tenham caudas que variam regularmente com um índice de cauda comum $\alpha > 0$, ou seja,

$$\Pr[Z > s] \sim A_z^U s^{-\alpha} \text{ e } \Pr[\varepsilon_i > s] \sim A_\varepsilon^U s^{-\alpha}, s \rightarrow \infty,$$

$$\Pr[Z < -s] \sim A_z^L s^{-\alpha} \text{ e } \Pr[\varepsilon_i < -s] \sim A_\varepsilon^L s^{-\alpha}, s \rightarrow \infty,$$

em que $A_z^L, A_z^U, A_\varepsilon^L$ e A_ε^U são constantes positivas, e escreve-se $x_s \sim y_s$ se $x_s/y_s \rightarrow 1$ e $s \rightarrow \infty$.

Logo, se $\lambda_i, \lambda_j > 0$ os coeficientes de cauda inferior e superior, são dados respectivamente por:

$$\tau_{ij}^L = \frac{\min(\lambda_i, \lambda_j)^\alpha A_z^L}{\min(\lambda_i, \lambda_j)^\alpha A_z^L + A_\varepsilon^L}, \quad \tau_{ij}^U = \frac{\min(\lambda_i, \lambda_j)^\alpha A_z^U}{\min(\lambda_i, \lambda_j)^\alpha A_z^U + A_\varepsilon^U}.$$

Se $\lambda_i, \lambda_j < 0$ as definições dos coeficientes são:

$$\tau_{ij}^L = \frac{\min(|\lambda_i|, |\lambda_j|)^\alpha A_z^U}{\min(|\lambda_i|, |\lambda_j|)^\alpha A_z^U + A_\varepsilon^L}, \quad \tau_{ij}^U = \frac{\min(|\lambda_i|, |\lambda_j|)^\alpha A_z^L}{\min(|\lambda_i|, |\lambda_j|)^\alpha A_z^L + A_\varepsilon^U}.$$

Caso $\lambda_i \lambda_j = 0$ ou se $\lambda_i \lambda_j < 0$, os coeficientes de cauda inferior e superior são iguais a zero.

Estes resultados demonstram que quando os coeficientes do fator comum têm o mesmo sinal e o fator comum e as variáveis idiossincráticas têm o mesmo índice de cauda, a cópula fatorial gera dependência de cauda superior e inferior. Estas proposições consideram o cenário em que o fator comum e as variáveis idiossincráticas possuem o mesmo índice de cauda. Se o índice da cauda de Z é estritamente maior que o de ε e $\lambda_i \lambda_j > 0$ então a dependência da cauda é zero, enquanto se o índice da cauda de Z é estritamente menor que o de ε então a cauda dependência é um. Se Z ou ε é distribuído assimetricamente os coeficientes de dependência da cauda superior e inferior podem diferir, o que fornece a este modelo a capacidade de capturar diferenças nos momentos de alta ou de baixa no mercado (OH; PATTON, 2012).

2.7.4.2 Dinâmica para Cópuas Fatoriais

Vários estudos vêm explorando a estrutura de dependência dinâmica entre séries temporais, com modelos que permitem a mudança ao longo do tempo (PATTON, 2006; FILHO; ZIE-

GELMANN; DUEKER,2012; ALMEIDA; CZADO,2012; CREAL; KOOPMAN; LUCAS,2013). A dinâmica no modelo de cópula fatorial em 2.16 é incorporada por Oh e Patton (2012) ao permitir que as cargas do fator comum variem ao longo do tempo, e/ou permitindo que as distribuições do fator comum e as variáveis idiossincráticas mudam ao longo do tempo.

Para tanto, Oh e Patton (2012) aplicam a modelagem GAS (*Generalized Autoregressive Score*) de Creal, Koopman e Lucas (2013) para incluir a dinâmica temporal nas cargas fatoriais do modelo de cópula fatorial. A especificação para a evolução de um parâmetro variável no tempo da modelagem GAS de Creal, Koopman e Lucas (2013) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t | \mathcal{F}_{t-1} &\sim \mathbf{C}(\delta_t(\gamma)) \\ \delta_t &= \boldsymbol{\omega} + B\delta_{t-1} + A\mathbf{s}_{t-1} \\ \mathbf{s}_{t-1} &= S_{t-1} \nabla_{t-1} \\ \nabla_{t-1} &= \frac{\partial \log \mathbf{c}(\mathbf{u}_{t-1}; \delta_{t-1})}{\partial \delta_{t-1}} \end{aligned}$$

em que S_t é uma *scaling matrix*, δ_t é o parâmetro variante no tempo de uma cópula C governado por um parâmetro fixo γ . Por meio de sua escolha de S_t o modelo GAS permite flexibilidade adicional, pois cada escolha diferente para a matriz de escala resulta em um modelo GAS diferente baseado em uma variedade de modelos como o GARCH para variância condicional e os modelos de durações de negociação ACD, para mais detalhes veja Creal, Koopman e Lucas (2013).

Empregando essa abordagem no modelo de cópula fatorial para possibilitar a variação temporal nas cargas fatoriais na cópula fatorial com base em (2.17), com $S_t = I$, Oh e Patton (2012) definem a estrutura tempo-variante como:

$$\ln \lambda_{g,t} = \omega_g + \beta \ln \lambda_{g,t-1} + \alpha s_{g,t-1}, \quad g = 1, \dots, G \quad (2.18)$$

em que $s_{g,t} = \partial \ln c(\mathbf{u}_t; \lambda_t, \gamma_2, \gamma_\epsilon) / \partial \lambda_{g,t}$, $\lambda_t = [\lambda_{1,t}, \dots, \lambda_{G,t}]'$. O vetor de parâmetros é dado por $\gamma_\lambda = [\omega_g, \beta, \alpha]'$, com ω_g de dimensão G , o que implica em $G+2$ parâmetros a serem estimados. Os parâmetros α e β nessa especificação dos modelos GAS desempenham o mesmo papel que no modelo GARCH(1,1), ou seja, valores de β próximos a 1 denotam forte persistência temporal.

2.8 Gestão Quantitativa do Risco

Em finanças existe um *trade-off* entre risco e retorno: buscar maiores retornos implica, quase sempre, em estar disposto a correr mais risco nos investimentos financeiros e nas decisões financeiras como um todo (SIEGEL, 2015). Assim, o risco pode ser visto como uma medida de incerteza em relação à rentabilidade de um investimento, o que torna sua mensuração essencial para todo processo de otimização na gestão financeira.

Dentro desse espectro, existem inúmeros tipos de riscos distintos que podem impactar a mais diversa gama de investimentos. Nessa seção abrange uma descrição dos tipos de riscos existentes na gestão financeira e conceitos pontuais da medida empírica de risco, *Value at Risk* (*VaR*) é apresentada.

2.8.1 Tipos de Risco

Conforme Alexander (2008), o risco está presente em qualquer operação no mercado financeiro que pode cobrir os seguintes grupos: risco de mercado, risco de liquidez, risco operacional e risco de crédito. Ainda, o risco é sistêmico quando afeta a economia de uma forma geral e não sistêmico quando refere-se a uma empresa ou setor em específico. Os principais tipos de risco segundo a autora são:

- a) risco de mercado: é proveniente de movimentos nos preços de mercado, como índices, taxas e *commodities*, que afetam determinado portfólio financeiro. Por este motivo, é imprescindível analisar as flutuações do mercado para tomar as decisões da melhor forma possível;
- b) risco de liquidez: é advindo das transações de mercados de baixa liquidez, ou seja, baixo volume de negociações que geram altos *spreads* de compra e venda. E em momentos de crise, os investimentos de alta liquidez se saem melhor do que os de baixa;
- c) risco operacional: está relacionado a possíveis perdas como resultado de sistemas e/ou controles inadequados, falhas de gerenciamento e erros humanos. As operações são feitas com base em gestão, custódia e administração, logo é prudente conhecer bem o emissor do ativo, para evitar principalmente problemas operacionais;
- d) risco de crédito: está relacionado a possíveis perdas quando um dos contratantes não honra seus compromissos. As perdas aqui estão relacionadas aos recursos que não mais

serão recebidos. Para investidores, o mais importante é se atentar para a qualidade do emissor do ativo.

2.8.2 Value at Risk

A gestão do risco financeiro é um campo amplo com diversos componentes em estágio de evolução. Existem algumas formas de quantificar o risco. Medidas estatísticas, como volatilidade e correlação, podem ser entendidas como medidas de incerteza sobre as variações dos preços (CAETANO,2017;DEBASTIANI,2017). Já medidas específicas de risco financeiro, relacionados às potenciais perdas associadas ao comportamento do mercado, podem também ser obtidas, inclusive, a partir destas estatísticas.

Volatilidades e correlações de retornos de ativos financeiros são variantes no tempo, com dinâmicas persistentes (CHRISTOFFERSEN, 2009). Sob essa ótica, Alexander (2008) enfatiza que modelos econométricos e financeiros de incerteza e métricas de risco vem sendo desenvolvidos.

Uma métrica usual é o *VaR* que quantifica o grau de incerteza sobre retornos líquidos futuros. Na prática o *VaR* é uma medida de perda associada a um evento extremo, sob condições normais de mercado. Ele reflete a perda máxima esperada de um ativo (ou carteira de ativos) em um período de tempo dada uma probabilidade (MORETTIN, 2017). A representação do *VaR* de um ativo ou de uma carteira, dado um nível de significância α e um horizonte temporal t é dada por:

$$VaR(\alpha)_t = \inf_s \{s : F_{P,t}(s) \geq \alpha\} \quad (2.19)$$

em que $F_{P,t}$ corresponde a função distribuição do ativo ou da carteira. A estimativa $\hat{VaR}(\alpha)_t$ quantifica quanto se pode perder com $\alpha\%$ de probabilidade com um horizonte de tempo t pré-definido. As áreas de risco usuais são 1%, 5% e 10%.

Observa-se que para obter o *VaR* é necessário levar em consideração $F_{P,t}$, e então observar o quantil α . Assim, abordagens usuais para a estimação do *VaR* geralmente baseiam-se na construção da distribuição conjunta de uma carteira de investimentos e na distribuição marginal de cada um dos ativos que a compõem (ALEXANDER, 2008).

Conforme Caetano (2017) o cálculo do *VaR* pode ser obtido via técnicas paramétricas e não paramétricas. O *VaR* paramétrico baseia-se no conhecimento prévio de uma distribuição de probabilidade, o que não é necessário no *VaR* não paramétrico que utiliza dos próprios dados

históricos dos retornos para gerar as perdas. Metodologias para a obtenção do *VaR* são apresentadas em detalhes Alexander (2008) como variância-covariância, cópulas e simulação histórica e de Monte Carlo.

Morettin (2017) apresenta uma forma geral para calcular o *VaR* paramétrico de um ativo como:

$$VaR_t(\alpha\%) = \exp(\sigma_t z_\alpha \%) - 1,$$

em que σ_t é uma estimativa da volatilidade de hoje e z_α corresponde ao quantil da normal padronizada cuja área sob a curva de sua densidade à sua direita. Nesse caso, admite-se que os distúrbios aleatórios da série são normalmente distribuídos.

Conforme Alexander (2008) cópulas, apresentadas na seção anterior, são uma das melhores alternativas no cálculo do *VaR*, pois, ao levar em conta os fatos estilizados dos retornos financeiros, possibilitam a construção de distribuições heterogêneas, sem a premissa de normalidade. O procedimento consiste em simular conjuntos de dados da distribuição conjunta mais provável por meio da estimativa cópula subjacente e modelos marginais para cada t fixo, com base em Nelsen (2006). Assim, é possível obter dados simulados dos retornos da carteira para cada t do $VaR_t(\alpha\%)$. Exemplificando para o caso bivariado, dado um vetor aleatório (X_{1t}, X_{2t}) com a respectiva cópula bivariada $C(u, v)$ a geração de vetores aleatórios por meio de cópulas usando a distribuição condicional de V dado U , que é dado por:

$$P(V \leq v | U = u) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = C_u(v),$$

em que $C_u(v)$ é a derivada parcial da função de cópula com respeito a u .

O algoritmo de simulação começa com a geração de variáveis aleatórias uniformes independentes, u e t . Subsequentemente, a cópula condicional inversa é aplicada para obter realizações de variáveis uniformes dependentes, $v = C_u^{-1}(t)$, que correspondem a inversa generalizado de C_u . Finalmente, as realizações uniformes dependentes (u, v) são transformadas em simulações dos retornos da carteira aplicando a função de distribuição marginal inversa a cada realização; ou seja, $X_{1t} = F_1^{(-1)}(u)$ e $X_{2t} = F_2^{(-1)}(v)$.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No campo da análise financeira, dada as especificidades inerente do mercado financeiro, o objetivo deste trabalho foi incorporar os efeitos de determinados ciclos ou frequências específicas na análise da dependência multivariada e risco de portfólios compostos por ações do mercado financeiro brasileiro, com a aplicação da metodologia *wavelet*. Sob a relevância prática desses aspectos na gestão de investimento é central a modelagem adequada da distribuição dos retornos e perdas de um portfólio. Para tanto, métodos de cópulas multivariadas foram utilizados pela sua relevância na área de finanças, devido ao fato de que a função cópula pode assumir diversas formas, considerando a estrutura particular desses dados.

Na primeira análise explora-se a dinâmica de curto prazo mercado financeiro com o uso de dados intradiários de retornos de ações. Foram isolados os efeitos de cada frequência com a utilização de séries decompostas pelo filtro Daubechie com dois momentos nulos, para auferir a assimetria na estrutura de dependência de retornos financeiros evidenciada em problemas de alocação de portfólios, estratégias de hedge e precificação de ativos. Com a construção pair copula foi possível obter coeficientes de dependência de cauda e entender as relações entre ativos nos momentos de baixa e alta diante à mudanças no horizonte temporal do investimento. Essa compreensão leva a decisões de alocação de ativos significativamente melhores, principalmente em negociações de curto prazo.

A segunda análise utilizando as séries reconstruídas de retornos diários, de forma a incorporar os ciclos econômicos/financeiros, são utilizadas para previsões do risco. Com a abordagem de cópulas fatoriais a estrutura de dependência em bloco, estática e dinâmica, foi auferida em séries de retorno com componentes de curto, médio e longo prazo considerando o período de janeiro de 2008 a outubro de 2021. Essa foi a base para as previsões fora da amostra do risco com a métrica *VaR*. Os resultados fornecem informações relevantes quanto ao impacto das decomposições sobre a dependência e mensuração do risco que pode auxiliar tanto no processo de seleção/diversificação de portfólios quanto no controle e gerenciamento de riscos de mercado.

Essas duas abordagens representam formas de agregar no campo de análise financeira que apresenta grande complexidade e demanda de instrumentos acurados de análise conjunta de ativos e mercados. A mensuração precisa da relação entre ativos tende a aumentar significativamente os benefícios da diversificação, podendo levar a portfólios mais eficientes e avaliações

precisas das exposições de riscos pela consideração dos eventos extremos de mercado e os horizontes de negociação, que retratam a dinâmica financeira.

REFERÊNCIAS

- AAS, K. et al. Pair-copula constructions of multiple dependence. **Insurance: Mathematics and economics**, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 182–198, 2009.
- ALEXANDER, C. (Ed.). **Market risk analysis, practical financial econometrics, Volume IV**. London: John Wiley & Sons, 2008.
- ALMEIDA, C.; CZADO, C. Efficient bayesian inference for stochastic time-varying copula models. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 56, n. 6, p. 1511–1527, 2012.
- ALLOUI, C.; HKIRI, B. Co-movements of gcc emerging stock markets: New evidence from wavelet coherence analysis. **Economic Modelling**, Elsevier, v. 36, p. 421–431, 2014.
- ANDERSEN, L.; SIDENIUS, J. Extensions to the gaussian copula: Random recovery and random factor loadings. **Journal of Credit Risk Volume**, Citeseer, v. 1, n. 1, p. 05, 2004.
- ANG, A.; BEKAERT, G. International asset allocation with regime shifts. **The review of financial studies**, Oxford University Press, v. 15, n. 4, p. 1137–1187, 2002.
- ATTLAS, N.; GUPTA, S. Wavelet based techniques for speckle noise reduction in ultrasound images. **International Journal of Engineering Research and Applications (ijera) vol**, v. 4, p. 508–513, 2014.
- BARTELS, M.; ZIEGELMANN, F. A. Market risk forecasting for high dimensional portfolios via factor copulas with gas dynamics. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 70, p. 66–79, 2016.
- BEDFORD, T.; COOKE, R. M. Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. **Annals of Mathematics and Artificial intelligence**, Springer, v. 32, n. 1, p. 245–268, 2001.
- BEDFORD, T.; COOKE, R. M. Vines—a new graphical model for dependent random variables. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 30, n. 4, p. 1031–1068, 2002.
- BERG, D.; AAS, K. Models for construction of multivariate dependence. **Preprint series. Statistical Research Report** <http://urn.nb.no/URN:NBN:no-23420>, Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo, 2007.
- BERGER, T. A wavelet based approach to measure and manage contagion at different time scales. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 436, p. 338–350, 2015.
- BERGER, T. Forecasting based on decomposed financial return series: A wavelet analysis. **Journal of Forecasting**, Wiley Online Library, v. 35, n. 5, p. 419–433, 2016.
- BERGER, T.; FIEBERG, C. On portfolio optimization: Forecasting asset covariances and variances based on multi-scale risk models. **The Journal of Risk Finance**, Emerald Group Publishing Limited, 2016.
- BERGER, T.; GENCAY, R. Improving daily value-at-risk forecasts: The relevance of short-run volatility for regulatory quality assessment. **Journal of Economic Dynamics and Control**, Elsevier, v. 92, p. 30–46, 2018.

- BERGER, T.; GENÇAY, R. Short-run wavelet-based covariance regimes for applied portfolio management. **Journal of Forecasting**, Wiley Online Library, v. 39, n. 4, p. 642–660, 2020.
- BIAGE, M. Analysis of shares frequency components on daily value-at-risk in emerging and developed markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 532, p. 121798, 2019.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.
- BORTOLUZZO, A. B.; MINARDI, A. M. A. F.; PASSOS, B. C. F. Analysis of multi-scale systemic risk in brazil's financial market. **Revista de Administração**, v. 49, n. 2, p. 240–250, 2014.
- BRECHMANN, E. C.; HEIDEN, M.; OKHRIN, Y. A multivariate volatility vine copula model. **Econometric Reviews**, v. 37, n. 4, p. 281–308, 2018.
- BRUZDA, J. Complex analytic wavelets in the measurement of macroeconomic risks. **The North American Journal of Economics and Finance**, v. 50, p. 100988, 2019.
- BUCIO, C.; CABELLO, A.; ORTIZ, E. Dependence and value at risk in the stock markets from the americas: A copula approach. **Economics and Management**, v. 5, n. 5, p. 761–780, 2016.
- CAETANO, M. A. L. **Análise de risco em aplicações financeira**. São Paulo: Blucher, 2017.
- CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. **The econometrics of financial markets**. [S.l.]: princeton University press, 2012.
- CHAMBERLAIN, G. A characterization of the distributions that imply mean—variance utility functions. **Journal of Economic Theory**, Elsevier, v. 29, n. 1, p. 185–201, 1983.
- CHEN, Y.-T.; SUN, E. W.; YU, M.-T. Risk assessment with wavelet feature engineering for high-frequency portfolio trading. **Computational Economics**, Springer, v. 52, n. 2, p. 653–684, 2018.
- CHERUBINI, U.; GOBBI, F.; MULINACCI, S. **Convolution copula econometrics**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2016.
- CHRISTOFFERSEN, P. Value-at-risk models. In: **Handbook of financial time series**. [S.l.]: Springer, 2009. p. 753–766.
- CONT, R. Statistical modeling of high-frequency financial data. **IEEE Signal Processing Magazine**, IEEE, v. 28, n. 5, p. 16–25, 2011.
- CREAL, D.; KOOPMAN, S. J.; LUCAS, A. Generalized autoregressive score models with applications. **Journal of Applied Econometrics**, Wiley Online Library, v. 28, n. 5, p. 777–795, 2013.
- DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. Philadelphia: Siam, 1992.
- DEBASTIANI, C. A. **Análise Técnica de Ações: identificando oportunidades de compra e venda**. São Paulo: Novatec, 2017.

- DISSMANN, J. et al. Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 59, p. 52–69, 2013.
- EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A.; STRAUMANN, D. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. **Risk management: value at risk and beyond**, New York, v. 1, p. 176–223, 2002.
- FILHO, O. C. da S.; ZIEGELMANN, F. A.; DUEKER, M. J. Modeling dependence dynamics through copulas with regime switching. **Insurance: Mathematics and Economics**, Elsevier, v. 50, n. 3, p. 346–356, 2012.
- FILHO, O. C. S.; ZIEGELMANN, F. A.; DUEKER, M. J. Assessing dependence between financial market indexes using conditional time-varying copulas: applications to value at risk (var). **Quantitative Finance**, v. 14, n. 12, p. 2155–2170, 2014.
- FISCHER, M. et al. An empirical analysis of multivariate copula models. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 9, n. 7, p. 839–854, 2009.
- GALLEGATI, M.; SEMMLER, W. (Ed.). **Wavelet applications in economics and finance**. Switzerland: Springer, 2014.
- GENÇAY, R. et al. **An introduction to high-frequency finance**. [S.l.]: Elsevier, 2001.
- GHORBEL, A.; TRABELSI, A. The impact of global financial crisis on the dependence structure of equity markets and on risk management. **International Journal of managerial and financial accounting**, v. 5, n. 1, p. 1–32, 2013.
- GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. **Econometria Básica**. 5. ed. Porto Alegre: Amgh, 2011.
- HAAR, A. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. **Mathematische annalen**, v. 69, n. 3, p. 331–371, 1910.
- HAUTSCH, N. **Econometrics of financial high-frequency data**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- IN, F.; KIM, S. **An Introduction to Wavelet Theory in Finance: A Wavelet Multiscale Approach**. Singapore: World scientific, 2013.
- JAMMAZI, R.; REBOREDO, J. C. Dependence and risk management in oil and stock markets. a wavelet-copula analysis. **Energy**, Elsevier, v. 107, p. 866–888, 2016.
- JENSEN, M. J.; WHITCHER, B. Measuring the impact intradaily events have on the persistent nature of volatility. In: **Wavelet Applications in Economics and Finance**. New York: Springer, 2014. p. 103–129.
- JOE, H. Families of m-variate distributions with given margins and m (m-1)/2 bivariate dependence parameters. **Lecture Notes-Monograph Series**, JSTOR, p. 120–141, 1996.
- JOE, H.; LI, H.; NIKOLOULOPOULOS, A. K. Tail dependence functions and vine copulas. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 101, n. 1, p. 252–270, 2010.
- JOE, H.; XU, J. **The estimation method of inference functions for margins for multivariate models**. Vancouver, 1996. 199-213 p.

- KHALFAOUI, R.; BOUTAHAR, M. Portfolio risk evaluation: An approach based on dynamic conditional correlations models and wavelet multi-resolution analysis. 2012.
- KIM, S.; IN, F. Portfolio allocation and the investment horizon: a multiscaling approach. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 10, n. 4, p. 443–453, 2010.
- KRUPSKII, P.; JOE, H. Factor copula models for multivariate data. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 120, p. 85–101, 2013.
- LI, S.; KUO, S. Knowledge discovery in financial investment for forecasting and trading strategy through wavelet-based som networks. **Expert Systems with applications**, v. 34, n. 2, p. 935–951, 2008.
- LONGIN, F.; SOLNIK, B. Extreme correlation of international equity markets. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 56, n. 2, p. 649–676, 2001.
- MALLAT, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 11, p. 674–693, 1989.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MENDES, B. V. d. M.; SEMERARO, M. M.; LEAL, R. P. C. Pair-copulas modeling in finance. **Financial Markets and Portfolio Management**, Springer Nature BV, v. 24, n. 2, p. 193, 2010.
- MENDES, B. V. de M.; MARQUES, D. S. Choosing an optimal investment strategy: The role of robust pair-copulas based portfolios. **Emerging Markets Review**, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 449–464, 2012.
- MORETTIN, P. A. **Ondas e ondaletas: da análise de fourier à análise de ondaletas de séries temporais**. São Paulo: EDUSP, 2014.
- MORETTIN, P. A. **Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2017.
- MULVEY, J. M.; PAULING, W. R.; MADEY, R. E. Advantages of multiperiod portfolio models. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 29, n. 2, p. 35–45, 2003.
- NAJEEB, S. F.; BACHA, O.; MASIH, M. Does heterogeneity in investment horizons affect portfolio diversification? some insights using m-garch-dcc and wavelet correlation analysis. **Emerging Markets Finance and Trade**, Taylor & Francis, v. 51, n. 1, p. 188–208, 2015.
- NASON, G. P. **Wavelet methods in statistics with R**. [S.l.]: Springer Science Business Media, 2008.
- NELSEN, R. **An introduction to copulas**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2006.
- NIKOLOULOPOULOS, A. K.; JOE, H.; LI, H. Vine copulas with asymmetric tail dependence and applications to financial return data. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 56, n. 11, p. 3659–3673, 2012.
- OH, D. H.; PATTON, A. Modelling dependence in high dimensions with factor copulas. **Working Paper, Duke University**, 2012.

PATTON, A. Modeling asymmetric exchange rate dependence. **International Economic Review**, v. 2, n. 47, p. 527–556, 2006.

PATTON, A. J. Copula methods for forecasting multivariate time series. In: _____. **Handbook of economic forecasting**. 2. ed. [S.l.]: Elsevier, 2013. p. 899–960.

PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. T. **Wavelet methods for time series analysis**. [S.l.]: Cambridge university press, 2000. v. 4.

PRING, J. M. **Technical analysis explained: the successful investor's guide to spotting investment trends and turning points**. 5. ed. New York: McGraw-Hill, 2014.

RAHIM, A. M.; MASIH, M. Portfolio diversification benefits of islamic investors with their major trading partners: Evidence from malaysia based on mgarch-dcc and wavelet approaches. **Economic Modelling**, Elsevier, v. 54, p. 425–438, 2016.

RAMSEY, J. B. Functional representation, approximation, bases and wavelets. In: **Wavelet applications in economics and finance**. Switzerland: Springer, 2014. p. 1–20.

RIGHI, M. B.; CERETTA, P. S. Analyzing the dependence structure of various sectors in the brazilian market: A pair copula construction approach. **Economic Modelling**, v. 35, p. 199–206, 2013.

SIEGEL, J. J. **Investindo em Ações no Longo Prazo**. 5. ed. São Paulo: AMGH, 2015.

SKLAR, M. Functions de répartition à n dimensions et 50 leurs marges. **Publ. inst. statist. univ. Paris**, v. 8, p. 229–231, 1959.

TOBIN, J. Liquidity preference as behavior towards risk. **The review of economic studies**, JSTOR, v. 25, n. 2, p. 65–86, 1958.

TSAY, R. S. **Analysis of Financial Time Series**. 3. ed. New Jersey: John Wiley Sons, 2010.

VOORT, M. van der. Factor copulas: totally external defaults. Citeseer, 2005.

ZIVOT, E.; WANG, J. **Modeling Financial Time Series with S-PLUS**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 191.

SEGUNDA PARTE

ARTIGO 1**ASYMMETRIC DEPENDENCE OF INTRADAY FREQUENCY COMPONENTS IN
THE BRAZILIAN STOCK MARKET**

Redigido conforme as normas da revista *SN Business Economics* (versão publicada)



Asymmetric dependence of intraday frequency components in the Brazilian stock market

Marcela de Marillac Carvalho¹  · Luiz Otávio de Oliveira Pala¹ · Gabriel Rodrigo Gomes Pessanha² · Thelma Sáfadi¹

Received: 21 August 2020 / Accepted: 22 April 2021 / Published online: 26 May 2021
© The Author(s), under exclusive licence to Springer Nature Switzerland AG 2021

Abstract

The multivariate dependence plays an important role in financial instrument management. Due to the inherent characteristics in the financial market, such as heavy tails in the returns unconditional distribution and asymmetry between gain and loss, we obtained the asymmetric dependence structure in different short-term variation scales based on the wavelet technique MODWT. The study sought to capture the relations between financial returns represented by its frequency components. Intraday returns series was used in the 15-min sampling interval from stocks and applied the D-Vine pair-copula to decompose in trade frequencies of 15 min, 1 h, 1 day, and 1 week with margin adjustments of ARIMA-APARCH class and BB7 copula function, responsible for measuring the dependence on tails. The results indicated the prevalence of a high dependence during market upturns, rising over the analyzed frequencies. Being an important tool in financial management and allowing short-term strategies of diversification.

Keywords Multivariate dependence · Financial returns · Copulas · Wavelets · High frequency

JEL Classification C22 · C58 · G10

✉ Marcela de Marillac Carvalho
marcela.carvalho2@estudante.ufla.br

Luiz Otávio de Oliveira Pala
luiz.pala@estudante.ufla.br

Gabriel Rodrigo Gomes Pessanha
gabriel.pessanha@unifal-mg.edu.br

Thelma Sáfadi
safadi@ufla.br

¹ Department of Statistics, Federal University of Lavras, Lavras, Brazil

² Institute of Applied Social Sciences, Federal University of Alfenas, Alfenas, Brazil

Introduction

The behavior of the multivariate dependence structure of financial markets configures a relevant point on funding instruments management. Since Modern Portfolio Theory (Markowitz 1952) a general discussion of this topic, including other aspects as risk and return, expected return, measures of risk and volatility, and diversification, has been in the current literature. Several studies such as Ergen (2014), Jondeau (2016) and Caldeira et al. (2017) have shown that the measuring of dependence existing among the returns of a portfolio is essential to investment strategy development, mainly in the diversification context, which consists of the efficient allocation of distinct assets to minimize risks.

Specifically, in risk management, portfolio selecting, and asset pricing, there are important aspects such as non-linearity, asymmetrical dependence, and also heavy tails of the marginal and joint probability distribution (Wang and Xie 2016). To deal with these questions, inferences based on tail multivariate probabilities are necessary. Tail dependence refers to asset returns that exhibit greater dependence during market downturns or during market upturns and has long been an issue of interest to academics, fund managers, and traders, as it has important implications for portfolio allocation and asset pricing. Patton (2004), Malevergne and Sornette (2006) and Hatherley and Alcock (2007) demonstrated that incorporate the effects of asymmetric asymmetrical dependence in asset allocation proved to be better for protect portfolios and minimize risk. Besides that, Cherubini et al. (2004) and Chollete et al. (2011) showed that most economic policies of systemic risk involve tail dependence.

The evidences raised above have been widely reported over the years, principally the marginal distribution skewness and dependence structure asymmetry. According to Peng and Ng (2012) and Patton (2001), an inappropriate dependence model can lead to inefficient portfolios and imprecise evaluations of risks expositions. To deal with these problems, the application of the copulas approach is proposed. Copulas are functions that connect multivariate distribution functions to their marginal distributions (Cherubini et al. 2004). They contain all the relevant information about the dependence structure among the variables, for both symmetric and asymmetric correlation structures. In financial data, the copulas form an ideal tool for analyzing extreme dependence movements without the restrictions imposed by the classic multivariate models, reflecting the dependence between assets (Embrechts et al. 2003).

There are different copulas approach applications for the optimization of returns of assets seen on Righi and Ceretta (2013), Kakouris and Rustem (2014), Bartels and Ziegelmann (2016) and Abbara and Zevallos (2017). One of these methods is the multivariate pair-copula models of Joe (1997), extended by Bedford and Cooke (2001) and Bedford and Cooke (2002) with a hierarchic graphic construction of bivariate copulas called *regular vines* copulas. According to Joe et al. (2010), the modeling of dependence with multivariate copulas, such as the Vine approach, enables to development of appropriate parametric families for multivariate financial data with different dependence structures. Joe and

Kurowicka (2011) provides an extensive review of Vine copulas, including applications of this methodology in financial.

The purpose of the present paper is to provide the behavior of asymmetrical relation between financial returns in the domain time–frequency. Frequency is a relevant factor in assets analysis, relating to the changes in the investment horizons of the players of the market, ranging from short-run to long-run. The significance of this analysis lies in considering the impact of the time horizons of investment rules on the portfolio analysis, measuring asymmetric dependence in different timescales. The time horizons of economic decisions are related to the stock price changes, then different temporal frequencies (scales) of a returns series are useful to capture subjacent financial information from these data, as seen by Jammazi and Reboredo (2016), Shah et al. (2018), Biage (2019) and Berger and Gençay (2019). This multiscale financial behavior can be captured applying the wavelet decomposition, which enables to identify the trend in different periods of time and to locate the relevant oscillation moments (Crowley 2007; Gallegati 2014).

The portfolio analyzed in this study was composed of stocks traded in the Brazilian financial market (B3). We consider the 15-min sampling interval as the regularly spaced time for the 7 h of continuous negotiation in the B3 from February 17th to May 8th of 2020 of six relevant stocks: PETR4 (Petrobras), AZUL4 (Azul), USIM5 (Usiminas), BBDC4 (Bradesco), WEG3 (Weg) e MGLU3 (Magazine Luiza). The period analyzed reflects the negative effects of the COVID-19 pandemic on the financial markets, reinforcing the importance of modeling this event, providing tools for decision making. The stock choice was based on different economic segments to generate a diverse portfolio, and Chang et al. (2008) showed that high-frequency horizons are important to investigate the effects of short market trade activities, which reflect changes in an asset trajectory at many different scale levels (Crowley 2007).

The decomposed series for each intraday stock returns sample was obtained, applying the wavelet technique by Percival and Walden (2000) using the Daubechies wavelet filter of length 2 (two null moments) by Daubechies (1992). The short-term trade frequencies are the variations scale series regarding 15 min, 1 h, 1 day and 1 week. To carry out the analysis of asymmetric multivariate dependence analysis, we applied the D-Vine pair-copula constructions according to Joe (1997) and Bedford and Cooke (2002) in the decomposed series. The marginal distributions were specified as the process from ARIMA and ARIMA-APARCH classes by Ding et al. (1993), to capture important characteristics evidenced in these series. The pair-copula analysis proceeds with the standardized residuals. The BB7 copula function is estimated for its property of capturing asymmetrical dependence in financial data as shown by Nikoloulopoulos et al. (2012).

Background

Wavelet analysis

The maximal overlap discrete wavelet transformation (MODWT) is a modification of discrete wavelet transformation (DWT), proposed by Percival and Walden

(2000). Both the DWT and the MODWT draw on multiresolution analysis to decompose a signal into different levels of resolution. At each level, weighted moving average values (smooths) and the information to reconstruct the signal (details) from the averages are obtained describing the original signal at coarser and coarser levels of resolution.

In contrast to the DWT, the MODWT not is characterized by a data reduction (to the half) by each decomposition, keeping the data length constant. Actually, the MODWT presents essential proprieties in the time series decomposition: the translation is non-orthogonal and invariant, conserving the original series variation. This enables the impact of any event to be analyzed over specific timescales, so this method will be used in this paper. Percival and Walden (2000) presented an extensive revision of the MODWT characteristics in time series.

The MODWT follows the same pyramid algorithm (Mallat 1989) as the DWT (see Percival and Walden 2000). Letting $j = 1, \dots, J$ be the scale numbers and the initial series entrance $s_{0,t} = X_{t=0}^{N-1}$. The decomposition process occurs with the successive filtering of a time series X_t with low-pass filters $\{\tilde{g}_{j,l}\}$ and high-pass $\{\tilde{h}_{j,l}\}$ given by

$$\tilde{s}_{j,t} \equiv \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{g}_{j,l} X_{t-l \bmod N} \quad (1)$$

and

$$\tilde{d}_{j,t} \equiv \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} X_{t-l \bmod N}, \quad (2)$$

where $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ correspond to filter size associated to each scale j and $\bmod N$ is the modulus operator. In Eqs. (1) and (2) the MODWT filters $\tilde{h}_{j,l} = h_{j,l}/2^j$ and $\tilde{g}_{j,l} = g_{j,l}/2^j$, respectively, are expressed in terms of DWT rescaled filters $g_{j,l}$ and $h_{j,l}$ that satisfies useful proprieties in the decomposition of a sign: (1) $\sum_{l=0}^{L-1} h_l = 0$; (2) $\sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 = \frac{1}{2}$; (3) $\sum_{i=0}^{L-1} h_i h_{i+2N} = 0$, similarly for the $g_{j,l}$.

Several wavelet filters do exist and the choice of the adequate filter heavily depends on the purpose of its application. Thus, considering that intraday series present non-stationary and drastic fluctuations the Daubechies wavelet filter by Daubechies (1992) was employed in this paper. With the compact support advantage and orthogonality the general form of Daubechies filters is given by $h_{l,j} = (-1)^{l-L_j} g_{L_j-1-l}$. Applications with Daubechies filters in multiscale analyzes as intraday financial series can be seen in Sun et al. (2011), Xue et al. (2014), and Xu (2018).

At each scale, the MODWT coefficients $\tilde{s}_{j,t}$ and $\tilde{d}_{j,t}$ constitute a time series describing X_t in non-aggregated over time way, such that $X_t = \sum_{j=1}^J (\tilde{d}_{j,t} + \tilde{s}_{j,t})$. At the levels $j = 1, \dots, J$ and in the time t , the scale coefficients $\tilde{s}_{j,t}$ represent the smooth coefficients that capture the trend of X_t , while the detail coefficients $\tilde{d}_{j,t}$ capture the short oscillations, as structural changes, representing the detailing of X_t . Taking into account these brief description of properties of the MODWT, we

estimated the asymmetric dependence of portfolios using the detail series obtained from the decomposition.

Copulas and pair-copulas

The concept of copula is introduced in the statistical literature by Sklar (1959). Let the random variables X_1, \dots, X_d with joint distribution function H , such as $(x_1, \dots, x_d) \in [-\infty, \infty]^d$, where X_1, \dots, X_d , $d = 1, \dots, 6$, represent the details series obtained from the MODWT decomposition in the intraday log-returns. The dependence between X_1, \dots, X_d can be completely described by a d -dimensional copula function C , such as $H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$. Conversely, $C(u_1, \dots, u_d) = H(F_1^-(u_1), \dots, F_d^-(u_d))$, where F_i^- correspond to the inverse generalized of F_i , $i = 1, \dots, d$.

Then, according to Sklar (1959), a C is defined as a function of joint distribution in $[0, 1]^d$ with Uniform marginals. Assuming C is absolutely continuous, and by taking the partial derivatives, one obtains:

$$h(x_1, \dots, x_d) = c(u_1, \dots, u_d) \prod_{i=1}^d f_i(x_i), \quad (3)$$

where c represents the copula density.

For the multivariate case modeling, Aas et al. (2009) explained that a pair-copula decomposition is a flexible alternative and easily implemented. The pair-copulas is a hierarchical construction, based on bivariate copulas chosen between any parametric family. The variables are sequentially incorporated into the conditioning sets as one moves from the first modeling level d until the last level $d - 1$. The pair-copula factorization, according to Joe (1997), is obtained from the following decomposition of h :

$$h(x_1, \dots, x_d) = f_d(x_d) \cdot f(x_{d-1}|x_d) \cdot f(x_{d-2}|x_{d-1}, x_d) \cdot f(x_1|x_2, \dots, x_d), \quad (4)$$

where for d variables at T time points, assumed that the observations of each variable are independent over time.

Based on the joint density in Eq. (3), all conditional densities in Eq. (4) can be expressed from only univariate marginal distributions and bivariate copulas by means:

$$h(x|\mathbf{v}) = c_{xv_j|v_{-j}} \{F(x|\mathbf{v}_{-j}), F(v_j|\mathbf{v}_{-j})\} \cdot f(x|\mathbf{v}_{-j}), \quad (5)$$

where $c_{xv_j|v_{-j}(c)}$ corresponds to the density of a bivariate copula, and \mathbf{v}_{-j} denotes the vector \mathbf{v} excluding the j th component.

For the representation of Eq. (5) there is different pair-copulas construction (PCC). Then Bedford and Cooke (2001) and Bedford and Cooke (2002) introduced the systematic model called *regular vines* that involves the construction of hierarchic graphic models. Each of these models provides a specific way of decomposing

the d -dimensional h density. The main types are the hierarchical canonical vines (C-vines) and the drawable vines (D-Vines).

In this paper, the h density was estimated from the D-Vine PCC, which is written as

$$h(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d f(x_k) \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{i,i+j|i+1, \dots, i+j-1}(F(x_i|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}) \cdot F(x_{i+j}|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1})), \quad (6)$$

where index j identifies the trees, while i runs over the edges in each tree. In a D-vine, no node in any tree T_j is connected to more than two edges. There are $d(d-1)/2$ bivariate copulas density in the $d-1$ trees. The tree T_j of the D-vine has $d-j$ bivariate copulas, $j = 1, \dots, (d-1)$. Those in tree 1 are unconditional, and all others are conditional (Aas et al. 2009).

In the inference process of the D-Vine PCC, it is necessary to obtain the respective functions of conditional distribution $F(x|\mathbf{v})$ in a sequential way, this is

$$h(x|\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}) = F(x|\mathbf{v}) = \frac{\partial C_{x,v_j|\mathbf{v}_{-j}}(F(x|\mathbf{v}_{-j}), F(v_j|\mathbf{v}_{-j}))|\boldsymbol{\theta}}{\partial F(v_j|\mathbf{v}_{-j})}, \quad (7)$$

where $\boldsymbol{\theta}$ is the vector parameters of the $C_{x,v_j|\mathbf{v}_{-j}}$ specified in the j tree.

The bivariate copulas involved can belong to different families in a way of reflecting various ways of dependence, including tail dependence (see Joe 1997). The concept of tail dependence refers to the amount of dependence on the right higher quadrant tail or on the left lower quadrant tail of a bivariate distribution (Embrechts et al. 2003).

This feature enables construct h estimating different margins independently. In the presence of temporal dependence, univariate time series models for the conditional mean and the conditional variance can be fitted to the margins and the analysis could henceforth proceed with the residuals standardized. The standardized residual vectors are converted to uniform variables using the empirical distribution functions before further modeling (Nikoloulopoulos et al. 2012).

Methodological procedure

The data and context

The high-frequency data used were the log-return stocks of B3 and covers the 55 working days from February 17th of 2020 to May 8th of 2020, presented in Fig. 1. In the analyzed period, it is needed to emphasize the expressive influence of COVID-2019 in the worldwide financial markets. According to Laurini and Chaim (2020), the COVID-19 pandemic drop in prices in March 2020 has spurred volatility increases with levels faster. Along with the phenomenon, the Brazilian stock market has been suffering an impact on internal political instability.

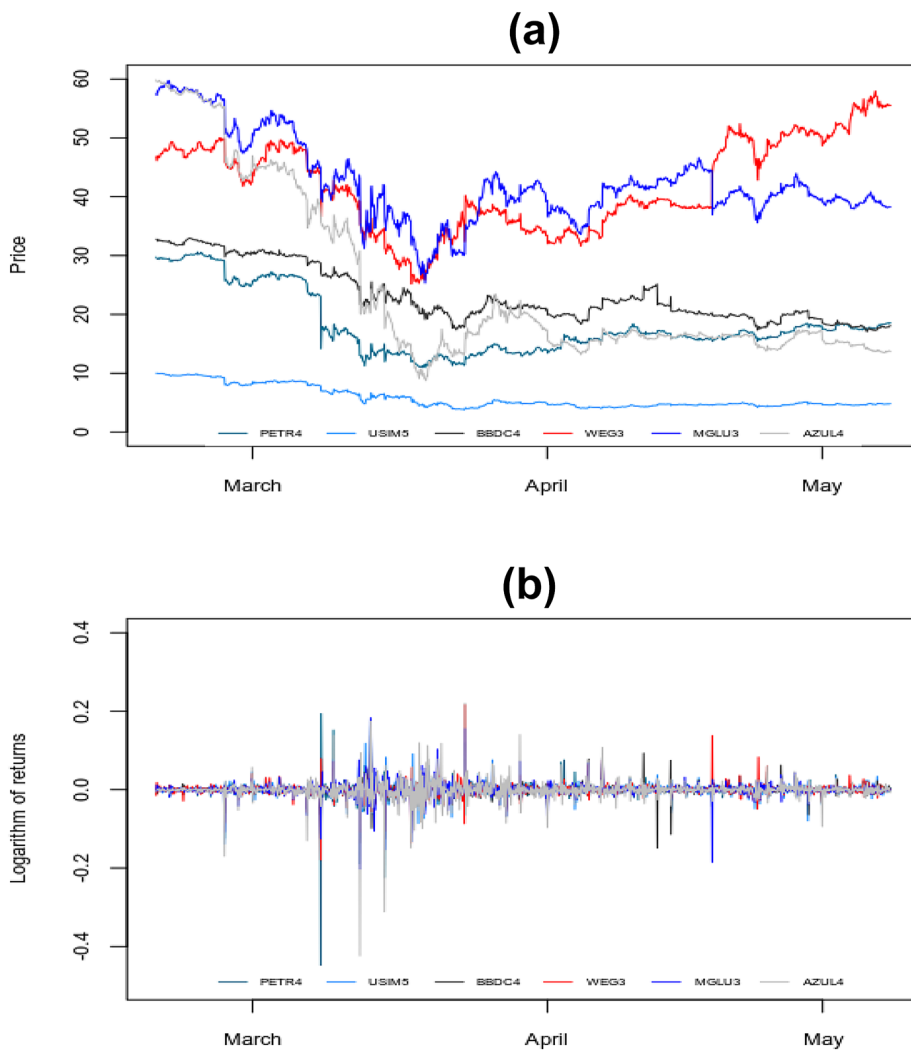


Fig. 1 Series behavior in the analyzed period for the series: **a** quotes and **b** log-returns

The sampling interval regarded was of $\Delta = 15$ min as the spaced time for 7 h of continuous trading. The number of sampled observations per trading session is $m = 28$ interval/day with a total of $N = 1497$ observations. The data filtering process was made according to Morettin (2017), keeping the circuit-breakers in the final sample. Plots in Fig. 1a, b indicate the intraday prices and log-returns behavior in the period.

General information about the data classification with the base on the sector and action segment is presented in Table 1.

The MODWT constructed by the Daubechies wavelet filter with length 2 (two moments null) $D2$ was applied to the intraday series using the methodology

Table 1 Classification data

Company	Stock's code	Sector/business segment
Azul	AZUL4	Air transport
Bradesco	BBDC4	Financial
Magazine Luiza	MGLU3	Cyclic consumption
Petrobras	PETR4	Oil, gas and biofuels
Usiminas	USIM5	Steel industry
Weg	WEGE3	Industrial

Table 2 Impact and interpretation of the variances of the decomposition components MODWT on scales $j = 1, 3, 6$ e 8 of the intraday log-returns ($\Delta = 15$ min)

Frequency	\tilde{d}_j	Memory
15 min	\tilde{d}_1	Stochastic noise
60 min	\tilde{d}_3	Stochastic noise
480 min \approx 1 day	\tilde{d}_6	Short-term
1920 min \approx 5 day	\tilde{d}_8	Trend of short-term

submitted in Sect. 2.1, obtaining $J = 10$ decomposition levels. Once the variance of the original returns series is preserved, we can measure the dependence using the series from the decomposition. Thus, the D-Vine PCC was obtained four details series for each original series in four dyadic scales of variation: 15 min, 1 h, 1 day and 1 week. The frequencies are measured according to Table 2, conform to the 7 h of B3 trading, and Fig. 2 illustrate the series generated by the MODWT decomposition in levels $j = 1, 3, 6, 8$.

Dependence estimation

Since we are mainly interested in the dependence structure between wavelet series obtained, the estimation process of copulas was made through the methods of maximum likelihood in two steps according to the inference function for margins approach by Joe and Xu (1996), they are (1) univariate adjustment of margins and (2) adjustment of the copula with the standardized residues of margins under pseudo-observations.

As stated in Sect. 2.2, the observations of each variable must be independent over time. Hence, in the first stage, the margin distributions were estimated by models of the conditional mean and variance. The ARIMA(p, d, q)-APARCH(1, 1) process by Ding et al. (1993) was used. That is, for details series j in time $t = 1, \dots, N$, we have the following model:

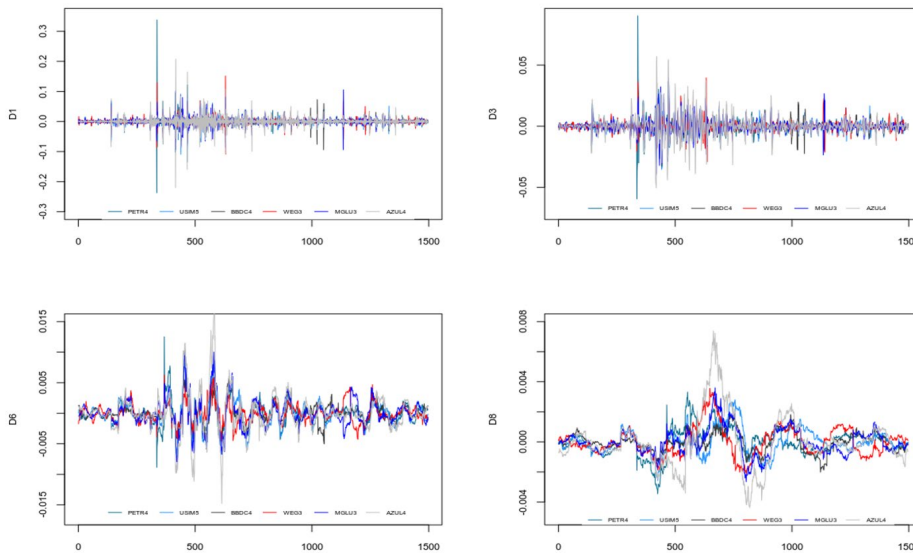


Fig. 2 Decomposition intraday log-returns series at the levels: **a** \tilde{d}_1 , **b** \tilde{d}_3 , **c** \tilde{d}_6 and **d** \tilde{d}_8

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{j,t} &= \sum_{i=1}^p \phi \tilde{d}_{j,t-i} + \sum_{i=1}^q \theta \varepsilon_{j,t-i} + \varepsilon_{j,t} \\ \varepsilon_{j,t} &= \sigma_{j,t} z_{j,t} \\ \sigma_{j,t}^\delta &= \omega + \alpha_1 \left(\left| \varepsilon_{j,t-1} \right| - \gamma_1 \varepsilon_{j,t-1} \right) + \beta_1 \sigma_{j,t-1}^\delta, \end{aligned} \tag{8}$$

where the standardized residual $z_{j,t} \sim t - \text{skewed}(v_j, \xi_j)$ to consider the conditional heteroscedastic heavy-tailed behavior of the financial assets. For the mean equation, ϕ represents the p autoregressive components and θ the q moving average components. In the variance equation, ω corresponds to the unconditional variance, δ allows to estimate of other powers to the standard conditional deviation, through a Box–Cox transformation, γ_1 captures the leverage effects, α_1 and β_1 together depict the volatility persistence. We use the modified Q -statistic (Ljung and Box 1979) to validate the modeling.

For the second adjustment stage, initially defined the PCC order estimation. The originals series were ordered by the non-linear dependence, measured through Kendall’s tau. After, adjustment the D-Vine PCC with the BB7 copula function performed on the standardized residuals of margins ($z_{j,t}$). The standardized residual vectors are converted to uniform variables u_1 and u_2 using the empirical distribution functions before the adjust. The BB7 bivariate copula captures the tail dependence and has representation given by Joe (1997):

$$C_{BB7}(u_1, u_2 | \tau_U, \tau_L) = 1 - \left(1 - \left\{ [1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1 \right\}^{-1/\gamma} \right)^{-1/\varepsilon}, \tag{9}$$

with $\kappa = 1/\log_2(2 - \tau_U)$ and $\gamma = -1/\log_2(\tau_L)$ the parameters related to dependence coefficients of the higher and lower tails, respectively $\tau_U, \tau_L \in (0, 1)$.

These measures were used to quantify the asymmetric dependence, i.e, determine if the relationship between the intraday log-returns, in the different timescales, has intensified in periods of market downward (τ_L) or during the market upward (τ_U).

The results were obtained with the software (Team 2019). The data were provided by *alphavantage* package by Dancho and Vaughan (2019). The analysis was performed with the packages *wtmsa* by Constantine and Percival (2017) for the MODWT application, *fgarch* by Wuertz et al. (2019) for margins adjustment, and *Vine-copula* by Nagler et al. (2019) for D-Vine PCC with the BB7 copula.

Results

Modelling of marginal distributions

The univariate margin models were defined with ARIMA($p, 0, q$)-APARCH(1, 1) in the 15-min, 1-h and 1-day scales, which presented stochastic noise and short variations. As the 1-week frequency case reflects the trend of the short term, just the conditional mean was adjusted appealed to ARIMA($p, 1, q$) class models. The specification of margins is according to the results of Table 3.

The estimate results of the coefficients are found in Tables 4, 5, 6 and 7. In general, the results corroborating statistical characteristics commonly present in financial time series. In the μ equation, it became evident that stock returns price movements to become more persistent (Schulmeister 2009) and the presence of intraday seasonality (Morettin 2017). And, the σ results reflect volatility persistence, heavy-tails, and asymmetry (Patton 2004). In some cases were evidenced significant leverage effects ($\gamma_1 > 0$), the phenomenon that arises when periods of falling prices are followed by significant volatility (Ding et al. 1993).

Copula modelling

Subsequent to this marginal specification, we obtained matrix of dependence through Kendall's tau to select the order in PCC estimation. The criterion adopted was the absolute sum of dependence between each index with all others. The D-vine

Table 3 Margin distributions for levels $j = 1, 3, 6, 8$

Stock	ARIMA(p,d,q) - APARCH(1, 1)			
	\tilde{d}_1	\tilde{d}_3	\tilde{d}_6	\tilde{d}_8
PETR4	(2,0,0)(1,1)	(0,0,7)(1,1)	(4,0,3)(1,1)	(2,1,1)(0,0)
MGLU3	(0,0,1)(1,1)	(0,0,7)(1,1)	(4,0,3)(1,1)	(1,1,1)(0,0)
WEGE3	(1,0,1)(1,1)	(0,0,7)(1,1)	(1,0,4)(1,1)	(3,1,5)(0,0)
USIM5	(1,0,1)(1,1)	(0,0,7)(1,1)	(4,0,3)(1,1)	(2,1,4)(0,0)
AZUL4	(0,0,1)(1,1)	(0,0,7)(1,1)	(5,0,2)(1,1)	(4,1,4)(0,0)
BBDC4	(1,0,1)(1,1)	(0,0,7)(1,1)	(4,0,2)(1,1)	(9,1,2)*(0,0)

*model with specific lags.

Table 4 Estimated parameters and diagnostics of residuals of the ARIMA-APARCH models for d_i series

Parameters	PETR4	MGLU3	WEGE3	USIM5	AZUL4	BBDC4
ϕ_1	-0.6402 (0.0220)		-0.0528 (0.0211)	-0.0982 (0.0245)		-0.0590 (0.0009)
ϕ_2	-0.3129 (0.0232)					
θ_1		-0.9840 (0.0028)	-0.9570 (0.0064)	-0.9979 (0.0013)	-0.9743 (0.0036)	-0.9972 (0.0016)
ω	0.0006 (0.0001)	0.0009 (0.0004)	0.0019 (0.0007)	0.0019 (0.0011)	0.0015 (0.0007)	0.0035 (0.0014)
α_1	0.7338 (0.1846)	0.2669 (0.0804)	0.2684 (0.0615)	1.0000 (0.3956)	0.3436 (0.1258)	0.2920 (0.0860)
γ_1	-0.0517 (0.0728)	0.1499 (0.0937)	0.0544 (0.0905)	-0.0161 (0.1026)	0.0469 (0.0874)	-0.0325 (0.0994)
β_1	0.5552 (0.0457)	0.8342 (0.0399)	0.7954 (0.0419)	0.8750 (0.0558)	0.8164 (0.0460)	0.7919 (0.0415)
δ	1.1154 (0.1960)	0.7800 (0.1228)	0.7090 (0.1179)	0.9074 (0.1777)	0.7181 (0.1373)	0.5482 (0.1024)
ξ	0.9847 (0.0252)	0.9990 (0.0232)	1.0022 (0.0239)	0.9639 (0.0216)	0.9582 (0.0213)	0.9944 (0.0243)
ν	2.4164 (0.1733)	2.2855 (0.1467)	2.3715 (0.1590)	2.0071 (0.0015)	2.1900 (0.1374)	2.334 (0.1760)
$Q(20)$	0.83	0.96	0.99	0.96	0.99	0.99

PCC order result was USIM5, PETR4, MGLU3, BBDC4, AZUL4, and WEGE3. The results are verified in Table 8. It is observed a moderate positive association between all stocks analyzed (34% in mean). The result shows that some stocks pairs can move together, emphasizing the diversification question. The greatest magnitude of dependence was related to the pair PETR4 and USIM5, reaching 41%. Moreover, we noted that the stocks with a higher dependency are associated with the sectors that are sensitive to the actual world economic situation due to COVID-19 impacts, for example, the commodity sector.

With order among log-returns established, the D-Vine PCC was adjusted with standardized residuals of the marginal distributions. The dependence parameters of BB7 copula were converted in the measures of the lower tail (τ_L) and upper tail (τ_U) presented in Table 9.

As demonstrated in the literature, the asymmetry pattern is captured in the majority of relationships between the stock's returns, in the different time frequencies analyzed. The general pattern of association between these stocks is more intense during the market upward ($\tau_U > \tau_L$) in all scales. It means that a rising in B3 prices tends to occur simultaneously in the period (de Melo Mendes and Accioly 2012). This may also suggest an asymmetry to the right in the multivariate distribution as indicated (Silva Filho et al. 2014). Some left asymmetry ($\tau_L > \tau_U$) between pairs of stocks has been observed in variations intraday (15 min and 1 h) in the first trees.

Table 5 Estimated parameters and diagnostics of residuals of the ARIMA-APARCH models for d_2 series

Parameters	PETR4	MGLU3	WEGE3	USIM5	AZUL4	BBDC4
θ_1	0.9457 (0.0059)	0.9333 (0.0060)	0.9306 (0.0112)	0.9450 (0.0076)	0.9722 (0.0082)	0.9170 (0.0089)
θ_2	0.8563 (0.0094)	0.9425 (0.0077)	0.9121 (0.0110)	0.9531 (0.0038)	0.8839 (0.0141)	0.8293 (0.0095)
θ_3	0.8163 (0.0098)	0.8753 (0.0075)	0.8215 (0.0136)	0.8978 (0.0048)	0.8588 (0.0139)	0.7573 (0.0087)
θ_4	-0.9770 (0.0031)	-0.9679 (0.0026)	-0.9876 (0.0027)	-0.9814 (0.0042)	-0.9813 (0.0020)	-0.9705 (0.0039)
θ_5	-0.9284 (0.0063)	-0.9069 (0.0059)	-0.9271 (0.0116)	-0.9300 (0.0104)	-0.9578 (0.0076)	-0.8984 (0.0069)
θ_6	-0.8500 (0.0141)	-0.9130 (0.0077)	-0.9095 (0.0115)	-0.9365 (0.0054)	-0.8780 (0.0130)	-0.8196 (0.0088)
θ_7	-0.8153 (0.0102)	-0.8516 (0.0070)	-0.8237 (0.0133)	-0.8882 (0.0066)	-0.8566 (0.0127)	-0.7602 (0.0075)
ω	0.00008 (0.00004)	0.0002 (0.0001)	0.00002 (0.00001)	0.0004 (0.0008)	0.0001 (0.00005)	0.0001 (0.00005)
α_1	0.1770 (0.0348)	0.1351 (0.0297)	0.1761 (0.0335)	0.1710 (0.0419)	0.1783 (0.0399)	0.2069 (0.0442)
γ_1	0.1696 (0.1065)	0.2597 (0.1170)	0.0832 (0.0922)	0.0197 (0.2198)	0.0072 (0.0964)	0.1002 (0.0992)
β_1	0.8870 (0.0203)	0.9038 (0.0191)	0.8794 (0.0204)	0.8701 (0.0714)	0.8801 (0.0259)	0.8592 (0.0230)
δ	0.8526 (0.1583)	0.7029 (0.1419)	1.0730 (0.1856)	0.7131 (1.1797)	0.8475 (0.1400)	0.8290 (0.1568)
ξ	1.0240 (0.0277)	1.0472 (0.0278)	0.9755 (0.0296)	1.0108 (0.0262)	0.9926 (0.0276)	0.9951 (0.0271)
ν	2.5050 (0.1925)	2.5757 (0.2406)	2.7570 (0.2167)	2.4776 (0.1914)	2.6440 (0.2016)	2.6420 (0.2723)
$Q(20)$	0.99	0.94	0.71	0.98	0.98	0.95

Note that in all scales, in the trees with USIM5,AZUL4|PETR4,MGLU3,BBDC4 and PETR4,WEGE3|MGLU3,BBDC4,AZUL4 have concerned $\tau_L = 0$, indicating independence of the lower tail. This condition indicates that, in general, the adjusted BB7 D-vine has multivariate dependence of the higher tail (Joe et al. 2010).

The results of the magnitude of dependence in the trees demonstrate that the estimates of τ_U and, mainly, τ_L have presented decreasing behavior due to the nature of the hierarchical construction, as indicated by Joe et al. (2010). These results highlight the importance of asset diversification in the way that (Markowitz 1952) had intended. The decrease in the joint probability obtained in tails indicates that it possibilities to minimize portfolio risk based on asset allocation in these stocks, especially in times of negative innovations, such as the scenario

Table 6 Estimated parameters and diagnostics of residuals of the ARIMA-APARCH models for d_6 series

Parameters	PETR4	MGLU3	WEGE3	USIM5	AZUL4	BBDC4
ϕ_1	-0.0311 (0.0032)	0.1628 (0.0212)	0.9855 (0.0060)	0.5851 (0.0556)	1.0000 (0.0040)	0.9412 (0.0085)
ϕ_2	0.8560 (0.0041)	-0.1316 (0.0187)		-0.4684 (0.0530)	0.3275 (0.0152)	-0.5431 (0.0072)
ϕ_3	0.0928 (0.0036)	0.9325 (0.0199)		0.3279 (0.0554)	-0.3301 (0.0151)	0.5555 (0.0120)
ϕ_4	-0.5389 (0.0035)	0.7720 (0.0185)		0.4860 (0.0470)	0.1012 (0.0044)	0.0283 (0.0087)
ϕ_5					-0.1172 (0.0045)	
θ_1	1.0000 (0.0019)	0.7929 (0.0223)	-0.0240 (0.0059)	0.3442 (0.0062)	-0.0216 (0.0015)	0.0310 (0.0082)
θ_2	1.137 (0.0035)	0.9671 (0.0108)	0.0540 (0.0016)	0.8551 (0.0443)	-0.04021 (0.0168)	0.5684 (0.0084)
θ_3	-0.5636 (0.0017)	0.7949 (0.0017)	-0.0286 (0.0033)	0.4247 (0.0053)		0.0957 (0.0040)
θ_4	0.01840 (0.0067)		0.1383 (0.0012)			-0.0053 (0.0004)
ω	0.000002 (0.0000006)	0.00002 (0.000001)	0.00005 (0.000004)	0.0000006 (0.0000004)	0.000004 (0.000004)	0.0001 (0.00009)
α_1	0.0486 (0.0123)	0.0622 (0.0128)	0.0718 (0.0192)	0.0747 (0.0174)	0.0794 (0.0227)	0.1210 (0.0330)
γ_1	0.1437 (0.2192)	-0.1920 (0.1465)	-0.1813 (0.1798)	0.1939 (0.1305)	-0.0160 (0.0160)	0.0941 (0.1472)
β_1	0.9769 (0.0056)	0.9607 (0.0062)	0.9585 (0.0098)	0.9566 (0.0074)	0.9552 (0.0123)	0.9326 (0.0171)
δ	1.0470 (0.1527)	0.9884 (0.1001)	0.9384 (0.1623)	1.1450 (0.1505)	0.9132 (0.1271)	0.5901 (0.1083)
ξ	1.0020 (0.0230)	1.0010 (0.0252)	1.0220 (0.0244)	0.9911 (0.0248)	0.9915 (0.0241)	1.0140 (0.0215)
ν	2.2850 (0.1745)	2.6850 (0.2045)	2.4070 (0.1706)	2.5940 (0.0206)	2.4840 (0.1794)	2.1750 (0.1238)
$Q(20)$	0.08	0.25	0.43	0.99	0.87	0.99

of the COVID-19 pandemic. Among the scales, increments at the magnitude of dependence measures were noticed in the majority of trees in lower frequencies, which can reflect the effects of continuous changes in the movements of the prices of the assets in time horizons of minutes and hour (Billio et al. 2012; Xu 2018).

Table 7 Estimated parameters and diagnostics of residuals of the ARIMA models for d_8 series

Coefficients	PETR4	MGLU3	WEGE3	USIM5	AZUL4	BBDC4
ϕ_1	0.2058 (0.0880)	-0.5241 (0.2365)	0.2139 (0.0165)	0.7484 (0.1554)	0.7835 (0.0992)	0.5515 (0.1024)
ϕ_2	-0.2000 (0.0284)		-0.2109 (0.0138)	-0.4771 (0.1255)	-1.2786 (0.1209)	-0.6018 (0.0868)
ϕ_3			0.9343 (0.0153)		0.3726 (0.1159)	
ϕ_4					-0.5488 (0.0712)	
ϕ_5						
ϕ_6						
ϕ_7						
ϕ_8						0.0705 (0.0210)
ϕ_9						-0.1189 (0.0206)
θ_1	-0.3171 (0.0886)	0.5561 (0.2291)	-0.3290 (0.0300)	-0.8574 (0.1542)	-0.8185 (0.1114)	-0.6370 (0.1078)
θ_2			0.1635 (0.0285)	0.5126 (0.1376)	1.1179 (0.1361)	0.5351 (0.0942)
θ_3			-0.9714 (0.0160)	-0.1208 (0.0380)	-0.2419 (0.1297)	
θ_4			0.0890 (0.0276)	0.1276 (0.1298)	0.3439 (0.0790)	
θ_5			0.1235 (0.0259)		0.3440 (0.0840)	
Q(20)	0.46	0.33	0.03	0.09	0.23	0.07

Table 8 Kendall's tau dependence matrix of the intraday log-returns ($\Delta = 15$ minutos)

	PETR4	MGLU3	USIM5	AZUL4	WEGE3	BBDC4
PETR4	1.00	0.35	0.41	0.35	0.31	0.38
MGLU3	0.35	1.00	0.36	0.35	0.34	0.35
USIM5	0.41	0.36	1.00	0.33	0.32	0.38
AZUL4	0.35	0.35	0.33	1.00	0.30	0.31
WEGE3	0.31	0.34	0.32	0.30	1.00	0.29
BBDC4	0.38	0.35	0.38	0.31	0.29	1.00

Final remarks

In the relevance's face of multivariate analysis in the financial area, in this paper, we explored the asymmetric dependence from intraday frequency components of

Table 9 D-Vine PCC results for the levels $d_1, d_3, d_6 \in d_8$

Stocks	d_1		d_3		d_6		d_8	
	τ_L	τ_U	τ_L	τ_U	τ_L	τ_U	τ_L	τ_U
USIM5 PETR4	0.31	0.32	0.40	0.40	0.39	0.44	0.41	0.50
PETR4 MGLU3	0.30	0.31	0.36	0.31	0.31	0.42	0.39	0.45
MGLU3 BBDC4	0.35	0.27	0.30	0.25	0.22	0.40	0.34	0.43
BBDC4 AZUL4	0.32	0.24	0.24	0.37	0.28	0.37	0.33	0.42
AZUL4 WEGE3	0.31	0.33	0.35	0.28	0.25	0.40	0.28	0.41
USIM5.MGLU3 PETR4	0.10	0.26	0.10	0.23	0.15	0.22	0.10	0.17
PETR4.BBDC4 MGLU3	0.11	0.18	0.14	0.35	0.16	0.22	0.07	0.27
MGLU3.AZUL4 BBDC4	0.08	0.34	0.14	0.22	0.17	0.25	0.10	0.24
BBDC4.WEGE3 AZUL4	0.04	0.17	0.08	0.07	0.03	0.17	0.06	0.19
USIM5.BBDC4 PETR4.MGLU3	0.07	0.18	0.05	0.11	0.02	0.20	0.04	0.19
PETR4.AZUL4 MGLU3.BBDC4	0.02	0.10	0.08	0.16	0.02	0.10	0.01	0.13
MGLU3.WEGE3 BBDC4.AZUL4	0.10	0.13	0.09	0.24	0.02	0.21	0.09	0.21
USIM5.AZUL4 PETR4.MGLU3.BBDC4	0.02	0.07	0.01	0.09	0.00	0.12	0.01	0.07
PETR4.WEGE3 MGLU3.BBDC4.AZUL4	0.00	0.09	0.00	0.09	0.00	0.12	0.01	0.11
USIM5.WEGE3 PETR4.MGLU3.BBDC4.AZUL4	0.00	0.01	0.00	0.03	0.00	0.06	0.00	0.08

financial assets. For the portfolios formed by intraday series of log-returns of the Brazilian stock market: PETR4 (Petrobras), AZUL4 (Azul), USIM5 (Usiminas), BBDC4 (Bradesco), WEGE3 (Weg) e MGLU3 (Magazine Luiza), we compute the asymmetric dependence in the domain of time–frequency. The scenario analyzed reflected the COVID-19 pandemic effects and the Brazilian economics policies.

The evidence about financial markets like non-linearity, kurtosis excess, asymmetry dependence structures, and high-frequency was considered. We quantified the higher and lower tail dependence through the D-Vine PCC by Bedford and Cooke (2002) at intraday, daily, and weekly scales. The D-Vine PCC method reflects the dependence on extremes with the construction of a multivariate distribution, estimating different marginal without normality presupposition. For this purpose, the estimation process was based on the MODWT details series which reflects the financial market variations, capturing the effects of the trade activity in the different time horizons. The frequencies analyzed were related to short-term trade: 15 min, 1 h, 1 day and 1 week.

The univariate marginal distributions were specified as ARIMA($p, 0, q$)-APARCH(1, 1) and ARIMA($p, 1, q$) models by Eq. (8). We can see that all the scales the information passed of series affect the conditional mean and conditional variance of returns, reflecting the dynamic of stock price movements and seasonality intraday. In addition, asymmetric and heavy tails were evidenced for scales related to minutes, hour, and day. The asymmetric dependence was captured based on BB7 copula parameters, present in Eq. (9), that quantified the dependence on extremes with the tail dependence coefficients. The upper tail dependence exceeded the absolute and lower tail ones in many cases, which

indicates the presence of asymmetry in many relationships and a market upward pattern. It was observed also a decreasing magnitude of the dependence in all cases, due to the nature of the D-Vine PCC.

These results reflecting important practical aspects, regarding financial management. First, the importance of skewness and asymmetric dependence in stock returns for asset allocation. We conclude that a portfolio constructed based on the distribution model that allowed for asymmetric dependence can lead to significantly better asset allocation decisions in time horizons analyzed. Based on the traditional mean-variance analysis by Markowitz (1952), studies such as Patton (2004), Hatherley and Alcock (2007), Jondeau (2016) and Wang and Xie (2016), and others have indicated that these benefits are results of more flexibility specifying the dependence structure on the portfolio. The measurement of asymmetric dependence allows diversifying the allocation of resources in portfolios, providing a balance between risks and returns.

A second point is the performance with changes in the investment time horizon. The attention to the horizon to be employed in investment analysis is evidenced by papers as Gunthorpe and Levy (1994). Considering the frequency dynamics enabled us to study the different degrees of behaviors of stock returns of the B3 market and its relations stemming from heterogeneous shocks. We show that the different investment planning horizons can change the portfolio strategies as Ibragimov et al. (2011) and Chakrabarty et al. (2015). A view that focuses on short fluctuations, with the use of dealing strategies in short-term scales, can also result in a portfolio with considerable profits as Zhang et al. (2016), Baralis et al. (2017) and Berger and Gençay (2019) suggests.

When incorporating the effects of asymmetric correlations in asset allocation, in different time frequencies, this study contributes to emphasizes the importance of statistics applications about financial analysis, principally in the short-term. A multiscale multivariate financial analysis through wavelet techniques allows obtaining specific information of certain periods, which jointly with the flexibility of copulas methods for measuring the asymmetrical dependence of non-aggregated way over time has the potential of assisting as in the strategies process of selection/diversification of investment portfolios, as in the control and management of risks.

Acknowledgements This work was supported by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Finance Code 001.

Data availability The data that support the findings of this study are available from the corresponding author, upon a reasonable request.

Declarations

Conflict of interest The authors declare that there is no conflict of interest.

Ethical approval This article does not contain any studies with human participants or animals performed by any of the authors.

References

- Aas K, Czado C, Frigessi A, Bakken H (2009) Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insur Math Econ* 44(2):182–198
- Abbara O, Zevallos M (2017) Portfolio risk decomposition through pair-copula models. *Commun Stat Case Stud Data Anal Appl* 3(1–2):29–40
- Baralis E, Cagliero L, Cerquitelli T, Garza P, Pulvirenti F (2017) Discovering profitable stocks for intraday trading. *Inf Sci* 405:91–106
- Bartels M, Ziegelmann FA (2016) Market risk forecasting for high dimensional portfolios via factor copulas with gas dynamics. *Insur Math Econ* 70:66–79
- Bedford T, Cooke RM (2001) Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. *Ann Math Artif Intell* 32(1–4):245–268
- Bedford T, Cooke RM (2002) Vines: a new graphical model for dependent random variables. *Ann Stat* 20:1031–1068
- Berger T, Gençay R (2019) Short-run wavelet-based covariance regimes for applied portfolio management. *J Forecast* 9(4):642–60
- Biage M (2019) Analysis of shares frequency components on daily value-at-risk in emerging and developed markets. *Phys A* 532:121798
- Billio M, Getmansky M, Lo AW, Pelizzon L (2012) Econometric measures of connectedness and systemic risk in the finance and insurance sectors. *J Financ Econ* 104(3):535–559
- Caldeira JF, Moura GV, Perlin MS, Santos AA (2017) Portfolio management using realized covariances: evidence from brazil. *Economia* 18(3):328–343
- Chakrabarty A, De A, Gunasekaran A, Dubey R (2015) Investment horizon heterogeneity and wavelet: overview and further research directions. *Phys A* 429:45–61
- Chang SC, Chen SS, Chou RK, Lin YH (2008) Weather and intraday patterns in stock returns and trading activity. *J Bank Financ* 32(9):1754–1766
- Cherubini U, Luciano E, Vecchiato W (2004) *Copula methods in finance*. Wiley, Oxford
- Chollete L, De la Pena V, Lu CC (2011) International diversification: a copula approach. *J Bank Financ* 35(2):403–417
- Constantine W, Percival D (2017) WMTSA: wavelet methods for time series analysis. <https://CRAN.R-project.org/package=wmtsa>, r package version 2.0-3
- Crowley PM (2007) An intuitive guide to wavelets for economists. *J Econ Surv* 21(2):207–267
- Dancho M, Vaughan D (2019) alphavantage: lightweight R interface to the alpha vantage API. <https://CRAN.R-project.org/package=alphavantage>, r package version 0.1.1
- Daubechies I (1992) *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia
- Ding Z, Granger CW, Engle RF (1993) A long memory property of stock market returns and a new model. *J Empir Financ* 1(1):83–106
- Embrechts P, Lindskog F, McNeil A (2003) *Modelling dependence with copulas and applications to risk management*, 2nd edn. Elsevier, New York, pp 329–384
- Ergen I (2014) Tail dependence and diversification benefits in emerging market stocks: an extreme value theory approach. *Appl Econ* 46(19):2215–2227
- Gallegati M, Semmler W (eds) (2014) *Wavelet applications in economics and finance*. Springer, Switzerland
- Gunthorpe D, Levy H (1994) Portfolio composition and the investment horizon. *Financ Anal J* 50(1):51–56
- Hatherley A, Alcock J (2007) Portfolio construction incorporating asymmetric dependence structures: a user's guide. *Account Financ* 47(3):447–472
- Ibragimov R, Jaffee D, Walden J (2011) Diversification disasters. *J Financ Econ* 99(2):333–348
- Jammazi R, Reboredo JC (2016) Dependence and risk management in oil and stock markets. A wavelet-copula analysis. *Energy* 107:866–888
- Joe H (1997) *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press, Boca Raton
- Joe H, Kurowicka D (2011) *Dependence modeling: vine copula handbook*. World Scientific, Singapore
- Joe H, Xu J (1996) The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Department of Statistics, University of British Columbia, Vancouver, Tech. rep
- Joe H, Li H, Nikoloulopoulos AK (2010) Tail dependence functions and vine copulas. *J Multivar Anal* 101(1):252–270

- Jondeau E (2016) Asymmetry in tail dependence in equity portfolios. *Comput Stati Data Anal* 100:351–368
- Kakouris I, Rustem B (2014) Robust portfolio optimization with copulas. *Eur J Oper Res* 235(1):28–37
- Laurini MP, Chaim P (2020) Brazilian stock market bubble in the 2010s. *SN Bus Econ* 1(1):1–19
- Ljung T, Box G (1979) The likelihood function for a stationary autoregressive moving average process. *Biometrika* 66:265–170
- Malevergne Y, Sornette D (2006) *Extreme financial risks: from dependence to risk management*. Springer, Berlin
- Mallat SG (1989) A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 11(7):674–693
- Markowitz H (1952) Portfolio selection. *J Financ* 7(1):77–91
- de Melo Mendes BV, Accioly VB (2012) On the dependence structure of realized volatilities. *Int Rev Financ Anal* 22:1–9
- Morettin PA (2017) *Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras*, 3rd edn. Blucher, São Paulo
- Nagler T, Schepsmeier U, Stoeber J, Brechmann EC, Graeler B, Erhardt T (2019) VineCopula: statistical inference of vine copulas. <https://CRAN.R-project.org/package=VineCopula>, r package version 2.3.0
- Nikoloulopoulos AK, Joe H, Li H (2012) Vine copulas with asymmetric tail dependence and applications to financial return data. *Comput Stat Data Anal* 56(11):3659–3673
- Patton AJ (2001) On the importance of skewness and asymmetric dependence in stock returns for asset allocation. Manuscript, UCSD
- Patton AJ (2004) On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *J Financ Econom* 2(1):130–168
- Peng Y, Ng WL (2012) Analysing financial contagion and asymmetric market dependence with volatility indices via copulas. *Ann Financ* 8(1):49–74
- Percival DB, Walden AT (2000) *Wavelet methods for time series analysis*, vol 4. Cambridge University Press, Cambridge
- R Core Team (2019) R: a language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>
- Righi MB, Ceretta PS (2013) Analyzing the dependence structure of various sectors in the Brazilian market: a pair copula construction approach. *Econ Model* 35:199–206
- Schulmeister S (2009) Profitability of technical stock trading: has it moved from daily to intraday data? *Rev Financ Econ* 18(4):190–201
- Shah A, Tali A, Farooq Q (2018) Beta through the prism of wavelets. *Financ Innov* 4(1):18
- Silva Filho OC, Ziegelmann FA, Dueker MJ (2014) Assessing dependence between financial market indexes using conditional time-varying copulas: applications to value at risk (var). *Quant Financ* 14(12):2155–2170
- Sklar M (1959) Functions de répartition à n dimensions et 50 leurs marges. *Publ Inst Stat Univ Paris* 8:229–231
- Sun EW, Rezanian O, Rachev ST, Fabozzi FJ (2011) Analysis of the intraday effects of economic releases on the currency market. *J Int Money Financ* 30(4):692–707
- Wang GJ, Xie C (2016) Tail dependence structure of the foreign exchange market: a network view. *Expert Syst Appl* 46:164–179
- Wuertz D, Setz T, Chalabi Y, Boudt C, Chausse P, Miklovac M (2019) fGarch: Rmetrics - Autoregressive Conditional Heteroskedastic Modelling. <https://CRAN.R-project.org/package=fGarch,rpackageversion3042.83.1>
- Xu X (2018) Intraday price information flows between the csi300 and futures market: an application of wavelet analysis. *Empir Econ* 54(3):1267–1295
- Xue Y, Gencay R, Fagan S (2014) Jump detection with wavelets for high-frequency financial time series. *Quant Financ* 14(8):1427–1444
- Zhang W, Lin S, Zhang Y (2016) Intraday market-wide ups/downs and returns. *J Manag Sci Eng* 1(1):28–57

ARTIGO 2**ANÁLISE ESPECTRAL DA DEPENDÊNCIA E VALUE AT RISK DE PORTFÓLIOS:
UMA ABORDAGEM COM WAVELETS E CÓPULAS FATORIAIS APLICADA AO
MERCADO FINANCEIRO BRASILEIRO**

Redigido conforme as normas da revista BBR – Brazilian Business Review (versão em processo de submissão)

Análise espectral da dependência e Value at Risk de portfólios: uma abordagem com wavelets e cópulas fatoriais aplicada ao mercado financeiro brasileiro

Marcela de Marillac Carvalho¹, Luiz Otávio de Oliveira Pala², Thelma Sáfiadi³

¹Departamento de Estatística, Universidade Federal de Lavras, Lavras, Brasil

²Departamento de Estatística, Universidade Federal de Lavras, Lavras, Brasil

³Departamento de Estatística, Universidade Federal de Lavras, Lavras, Brasil

Resumo

Análise de dependência e risco de portfólios têm sido um dos principais temas estudados e discutidos nos últimos anos na gestão financeira. De modo a tratar as peculiaridades inerentes do mercado financeiro, o objetivo do presente estudo é caracterizar os efeitos cíclicos na estrutura de dependência e risco ao longo de horizontes de investimento com a decomposição *wavelet* de retornos diários dos ativos financeiros, filtrando componentes de frequências. Para tanto, a estrutura de dependência multivariada em blocos e o *Value at Risk* foram obtidas com a aplicação da cópula fatorial *Skew t-t*, com parâmetros variantes no tempo de Oh e Patton (2012), de forma a captar melhor características dos retornos de ativos e os impactos de níveis de memórias de curto, médio e longo prazo. O portfólio analisado apresenta alta dimensão, constituído por ações do mercado financeiro brasileiro. Os resultados indicam presença de assimetria nos movimentos conjuntos nos retornos das ações, sendo que estes não são correlacionados no curto a médio prazo. Na estimação do risco auferem-se que efeitos de longo prazo afetam as previsões do *VaR* diário.

Palavras-chave: Cópulas, *Value at Risk*, Decomposição *Wavelet*, Ciclos Financeiros, Bolsa de Valores.

1 Introdução

Em mercados financeiros, a análise de fatores de risco é um campo amplo e representa um aspecto fundamental para a gestão racional e eficiente de portfólios. Cenários atípicos e mudanças sistêmicas que governam esse ambiente enfatizam ainda mais a necessidade da mensuração e avaliação correta do comportamento de ativos financeiros. O resultado é uma forte demanda por mecanismos de seleção/proteção e medidas quantitativas de risco em nível de portfólio, relacionados às potenciais perdas associadas ao comportamento do mercado, de modo a prover uma avaliação de risco do ativo financeiro, bem como uma previsão razoável de sua movimentação futura.

A gestão moderna e modelagem de portfólios tem início com a Teoria Moderna do Portfólio de Markowitz (1952) e vem se intensificando com a crise financeira global do *subprime* em 2008, a medida que a negociação de portfólios internacionais e a estrutura do mercado tornam-se mais complexas (CERRATO, 2012). Mecanismos de formação de preços, preferências individuais e momentos de instabilidade, desempenham papéis críticos nos ajustes do mercado e desafiam a tomada de decisão de investidores e instituições financeiras em relação a alocação de recursos Hautsch (2011), Campbell, Lo e MacKinlay (2012), Jensen e Whitcher (2014). Na atual crise do COVID-19, por exemplo, houve uma busca pela liquidez com vendas de ativos de risco por dinheiro e compras de ativos menos arriscados, impactando em uma queda simultânea dos mercados de ações mundiais no final de fevereiro de 2020 (GROS, 2020). Conforme Wójcik e Ioannou

¹marcela.mcarvalho12@gmail.com

²luizotavio.oliveira@gmail.com

³safadi@ufla.br

(2020) as perdas acumuladas nas semanas seguintes precederam em ritmo mais acentuado do que em 1929, sendo que em 9 de março um disjuntor em todo o mercado na NYSE (New York Stock Exchange) foi acionado devido a grande magnitude das perdas de mercado.

A estrutura de risco-retorno de muitos modelos financeiros é baseada nas seguintes suposições (i) mudanças nos fatores de risco apresentam distribuição condicional multivariada normal ao longo de um horizonte temporal; (ii) o valor do portfólio muda linearmente com as mudanças nos fatores de risco (GLASSERMAN; HEIDELBERGER; SHAHABUDDIN, 2002). A distribuição normal, no entanto, é limitada no que diz respeito ao comportamento de variáveis financeiras, que apresentam características como caudas pesadas na distribuição incondicional e assimetria entre ganho e perda (LONGIN; SOLNIK, 2001; EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002). Os retornos financeiros ainda exibem diferentes comportamentos por frequência, refletindo tanto movimentos de longo prazo quanto detalhes de alta frequência (GENÇAY et al., 2001; RAMSEY, 2014; GALLEGATI; SEMMLER, 2014) que retratam tendências que mudam lentamente ou oscilações transientes, como os efeitos de dias de semana e de virada do mês (BRUSA; LIU, 2004; DOYLE; CHEN, 2009; KHALED; KEEF, 2012).

Para tratar os fatos estilizados inerente dos ativos é necessário recorrer a métodos robustos com uma capacidade de modelar adequadamente a distribuição multivariada e perdas de portfólios, embasando a definição de limites de posição e realização de avaliações de desempenho. A proposta desse artigo é a analisar a estrutura de dependência e auferir o risco de um portfólio multivariado em termos da decomposição da frequência temporal, aplicando a técnica de decomposição *wavelet* na série temporal de retornos. O objetivo é identificar os efeitos dos diferentes ciclos econômicos/financeiros geradores de processo estocástico das séries de retornos no comportamento conjunto dos ativos do portfólio e no desempenho das estimativas de risco com a obtenção do *Value at Risk (VaR)*, métrica usual que quantifica a perda máxima esperada de uma posição financeira para um determinado período de tempo e nível de confiança (GLASSERMAN; HEIDELBERGER; SHAHABUDDIN, 2002; ALEXANDER, 2008).

Este trabalho, portanto, emprega as técnicas de *wavelets* e cópulas devido a aderência em aplicações da área financeira, pois enquanto as decomposições permitem analisar diferentes processos estocásticos formadores da série original, as cópulas permitem auferir diversas formas de dependência. A transformada de *wavelets* apresenta propriedades que permitem capturar informações relevantes subjacentes do comportamento da relação dos ativos como, por exemplo, os efeitos de longo prazo ou impactos de tendência de curto prazo em séries temporais financeiras na ausência de outras escalas, ou na ausência de ruído estocástico (GALLEGATI; SEMMLER, 2014; RAMSEY, 2014). Por sua vez, a metodologia de cópulas é adequada para tratar a complexidade de séries financeiras e estimar o risco, por refletir apenas a estrutura da relação do portfólio com a construção de distribuições marginais realistas que capturam características empíricas essenciais encontradas na gestão de risco, como assimetrias e caudas pesadas (ROSENBERG; SCHUERMANN, 2006; HATHERLEY; ALCOCK, 2007).

Dessa maneira, com as séries reconstruídas com informações de ciclos de curto, médio ou longo prazo, são revelados os efeitos de tendências ou momentos de oscilação relevantes na dependência multivariada e estimação do *VaR* de um portfólio. Conforme Chi e Kai-jian (2006) a análise de *wavelets* é uma solução para modelar estrutura heterogênea dos mercados financeiros, de modo a aumentar a compreensão na gestão de risco com estimativas de perdas adaptadas aos investidores, dado suas estratégias e nível de risco desejado. Essa relevância vem sendo demonstrada na literatura, como nos estudos de (BERGER; FIEBERG, 2016; BERGER; GENÇAY, 2018; BIAGE, 2019; BU et al., 2019; BIAGE; NELCIDE, 2020). Os resultados das análises de risco de ativos e portfólios evidencia a importância de isolar os componentes de informação cíclica dos ativos para auferir um melhor desempenho da previsão de risco de portfólios. A técnica *maximal overlap discrete wavelet transform (MODWT)* de Percival e Walden (2000) apresenta propriedades essenciais

na decomposição séries temporais de retornos de ativos financeiros: é não ortogonal e invariante a translação, conservando a variação da série original.

Métodos baseados em cópulas têm sido amplamente aplicados para investigar a estrutura de correlação dos mercados financeiros e a mensuração de risco, permitindo estimar o risco financeiro com maior precisão. Em relação a estrutura multivariada de dependência, existem várias abordagens como os modelos de Andersen e Sidenius (2004), Aas et al. (2009), Creal e Tsay (2015), Salvatierra e Patton (2015), entre outros. Neste campo, os modelos de cópulas fatoriais possibilitam modelar a dependência e o risco de portfólios de alta dimensão, apresentando precisão em suas previsões de medidas de risco como demonstrado em (BARTELS; ZIEGELMANN, 2016; OH; PATTON, 2018; SONG; LIU; SRIBOONCHITTA, 2019). O método de Oh e Patton (2012) pressupõem a representação da dependência de um conjunto de dados a partir de fatores comuns, considerando os aspectos referentes a estrutura de dependência das séries e seu comportamento ao longo do tempo. Três são as estruturas podem ser especificadas de acordo com a proposta dos autores: equidependência, dependência heterogênea e dependência em blocos, considerando a dependência de grupos homogêneos dados pelas séries. A estrutura de dependência também pode ser não estática, desenvolvendo-se ao longo do tempo (MENDES, 2005; PATTON, 2006; ALMEIDA; CZADO, 2012; FILHO; ZIEGELMANN; DUEKER, 2012). Assim, para inclusão no modelo uma dinâmica temporal nas cargas fatoriais a modelagem GAS (Generalized Autoregressive Score) de Creal, Koopman e Lucas (2013) é utilizada pelos autores.

A aplicação concentrou-se na construção e análise de um portfólio com 30 das principais ações da Bolsa de Valores e mercadorias de São Paulo - [B]³. Além da posição importante do Brasil entre os mercados acionários emergentes, Biage (2019) discorre que mercados como estes estão mais sujeitos aos efeitos de crises e apresentam dificuldades para superar os impactos desses momentos. Nesse cenário, a elaboração de estratégias de investimentos e mensuração de risco se tornam ainda mais necessárias. O período de análise compreende de 02 de janeiro de 2008 a 29 de outubro de 2021, em que incorreram inúmeros momentos de instabilidades graves, como a recente crise financeira ocasionada pela pandemia do COVID-19. A MODWT utilizando o filtro Haar foi aplicada para obter as séries reconstruídas de cada amostra dos retornos das ações para gerar séries com informações de ciclos de curto prazo e séries agregando componentes de médio e longo prazo, respectivamente. Nas séries reconstruídas, o modelo de cópula fatorial aplicado foi o *Skew t-t* de Oh e Patton (2012) com estrutura de dependência dinâmica em blocos para estabelecer estimativas do *VaR* fora da amostra via simulação de Monte Carlo.

2 Métodos

Dado o problema apresentado, inicialmente decompõem-se as séries dos retornos financeiros no domínio tempo-frequência com o processo de filtragem de Mallat (1989) e obtém-se o objeto desta análise que são as séries de detalhes que retratam o comportamento dos ativos em horizontes temporais de curto a longo prazo. Foram utilizados retornos de 30 ações da Bolsa de Valores e mercadorias de São Paulo - [B]³, no período de 02 de janeiro de 2008 a 29 de outubro de 2021, correspondendo a 3419 observações para cada série temporal. Da amostra total, o período de 17 janeiro de 2021 a 29 de outubro de 2021 é destinado para o ajuste e avaliação do *VaR*.

Segue-se com a estimativa do modelo de cópula fatorial *Skew t-t* de Oh e Patton (2012), considerando parâmetros estáticos e variantes no tempo com estrutura de dependência em bloco, referente à classificação setorial da [B]³ para estes ativos, como em Bartels e Ziegelmann (2016). As fases do ajuste consistem em: (i) modelar as distribuições marginais das séries em cada escala de tempo com processos da classe ARMA-GARCH; (ii) com as pseudo-observações dos resíduos padronizados, que seguem as distribuições

uniformes $[0, 1]$, ajustam-se as cópulas para a análise de dependência. Quanto ao *VaR* após o ajuste das cópulas conduzimos 300 simulações para cada período de tempo, obtendo estimativas *Out-of-Sample* para o portfólio com pesos iguais para cada um dos ativos que compõem o portfólio. As violações para cada modelo foram testados pelo teste de (KUPIEC, 1995).

Nesta seção, são apresentados brevemente conceitos metodológicos utilizados nesse estudo de decomposição *wavelet*, a abordagem da cópula fatorial para modelar a distribuição conjunta e obter parâmetros de dependência e estimativas de *VaR* para o portfólio. A análise de dados é realizada com o auxílio do software R (R Core Team, 2022) e MATLAB (MATLAB, 2010).

2.1 Wavelets

A implementação prática da MODWT é realizada com o algoritmo piramidal de Mallat (1989), resultando em coeficientes de aproximação e detalhe que descrevem os dados de maneira não agregada no tempo, em bandas de frequência específicas $j = 1, \dots, J$. O processo de decomposição decorre com a filtragem sucessiva de uma série temporal com filtros passa-baixa $\{\tilde{g}_{j,t}\}$ e passa-alta $\{\tilde{h}_{j,t}\}$ dados por:

$$\tilde{h}_{j,t} = h_{j,t}/2^j \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{j,t} = g_{j,t}/2^j$$

em que $g_{j,t}$ e $h_{j,t}$ são os filtros da transformada discreta de *wavelet* e apresentam propriedades úteis na decomposição de um sinal: i) $\sum_{l=0}^{L-1} h_l = 0$; ii) $\sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 = \frac{1}{2}$; iii) $\sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2N} = 0$ e iv) $g_l = -1^l h_l$, para todo N inteiro e comprimento L .

Para o propósito da análise, a escolha foi pelo filtro Haar. Com $L = 2$, temos:

$$\tilde{h}_0 = h_0/\sqrt{2}, \tilde{h}_1 = h_1/\sqrt{2},$$

e o respectivo filtro passa-baixa é dado como

$$\tilde{g}_0 = g_0/\sqrt{2}, \tilde{g}_1 = g_1/\sqrt{2}.$$

Logo, seja Y_t uma série temporal de tamanho N e entrada inicial dada por $c_{0,t} = Y_{t=0}^{N-1}$ obtêm-se:

$$\tilde{c}_{j,t} \equiv \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{g}_{j,l} Y_{t-l \bmod N} \quad (1)$$

e

$$\tilde{d}_{j,t} \equiv \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} Y_{t-l \bmod N}, \quad (2)$$

em que $\bmod N$ é um operador de módulo e $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ corresponde ao tamanho do filtro associado a cada escala j , sendo 2^j o denominador fator de dilatação que controla o comprimento da *wavelet*.

Os coeficientes de escala $\tilde{c}_{j,t}$ referem-se a aproximação de Y_t que capturam a tendência ou oscilações mais longas, e os coeficientes de *wavelet* $\tilde{d}_{j,t}$ captam oscilações curtas e rápidas, como mudanças estruturais, representando o detalhamento de Y_t . Em cada escala j temos:

$$\tilde{c}_j = \tilde{\mathcal{V}}_j Y_t, \quad \tilde{d}_j = \tilde{\mathcal{W}}_j Y_t,$$

sendo,

$$\tilde{\mathcal{V}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{j,0} & \tilde{g}_{j,N-1} & \tilde{g}_{j,N-2} & \cdots & \tilde{g}_{j,2} & \tilde{g}_{j,1} \\ \tilde{g}_{j,1} & \tilde{g}_{j,0} & \tilde{g}_{j,N-1} & \cdots & \tilde{g}_{j,3} & \tilde{g}_{j,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{g}_{j,N-1} & \tilde{g}_{j,N-2} & \tilde{g}_{j,N-3} & \cdots & \tilde{g}_{j,1} & \tilde{g}_{j,0} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathcal{W}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{j,0} & \tilde{h}_{j,N-1} & \tilde{h}_{j,N-2} & \cdots & \tilde{h}_{j,2} & \tilde{h}_{j,1} \\ \tilde{h}_{j,1} & \tilde{h}_{j,0} & \tilde{h}_{j,N-1} & \cdots & \tilde{h}_{j,3} & \tilde{h}_{j,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{h}_{j,N-1} & \tilde{h}_{j,N-2} & \tilde{h}_{j,N-3} & \cdots & \tilde{h}_{j,1} & \tilde{h}_{j,0} \end{bmatrix}.$$

de modo que as decomposição de frequência \tilde{d}_j de Y_t , com periodicidade diária, $j, \dots, 8$, refletem diferentes ciclos de tempo. A Tabela 1 contém a interpretação econômica detalhada de cada componente de frequência e escala de tempo, de acordo com Berger e Fieberg (2016).

Tabela 1: Interpretação econômica das decomposições de séries diárias

Nível	Frequência	Escala de Tempo
\tilde{d}_1	2-4 dias	Curto Prazo
\tilde{d}_2	4-8 dias	Curto Prazo
\tilde{d}_3	8-16 dias	Curto Prazo
\tilde{d}_4	16-32 dias	Médio Prazo
\tilde{d}_5	32-64 dias	Médio Prazo
\tilde{d}_6	64-128 dias	Médio Prazo
\tilde{d}_7	128-256 dias	Longo Prazo
\tilde{d}_8	256-512 dias	Tendência

Dada as propriedades da MODWT, e as relações obtidas a partir dos filtros em 1 e 2, reconstrução de Y_t podem ser obtidas da seguinte forma:

$$Y_t = \sum_{j=1}^J \left(\tilde{\mathcal{W}}_j^T \tilde{d}_j + \tilde{\mathcal{V}}_j^T \tilde{c}_j \right) = \sum_{j=1}^J \tilde{D}_j + \tilde{C}_J. \quad (3)$$

em que $Y_{1:i,t} = \sum_{i=1}^j \tilde{D}_{i,t}$ compreende os componentes de informação até i que se aproximam da série original à medida que J aumenta, com $i = 2, \dots, J$ e $Y_{1,t} = \tilde{D}_{1,t}$ (BERGER; FIEBERG, 2016).

2.2 Cópulas Condicionais

O conceito de cópula é introduzido na literatura estatística pelo Teorema de Sklar (1959). Cópulas são definidas como funções de distribuição conjunta, com distribuições marginais Uniformes[0,1], que ligam funções de distribuição multivariada a suas respectivas distribuições marginais e contêm todas as informações relevantes sobre a estrutura de dependência entre as variáveis (NELSEN, 2006).

Para séries temporais recorre-se a teoria de cópulas condicionais de Patton (2006). Seja o vetor aleatório $\mathbf{Y}|\mathbf{W}$ onde (Y_1, \dots, Y_N) e \mathbf{W} tem suporte em Ω , com distribuição conjunta condicional H e distribuições marginais condicionais $F_i(Y_i|\mathbf{w})$. Existe uma função cópula C tal que para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{w} \in \Omega$:

$$H(y_1, \dots, y_N | \mathbf{w}) = C(F_1(y_1 | \mathbf{w}), \dots, F_N(y_N | \mathbf{w}) | \mathbf{w}) \quad (4)$$

em que,

$$C(u_1, \dots, u_N | \mathbf{w}) = H(F_1^{-1}(u_1 | \mathbf{w}), \dots, F_N^{-1}(u_N | \mathbf{w}) | \mathbf{w}) \quad (5)$$

com $\mathbf{W} = (Y_{1,t-1}, \dots, Y_{N,t-1}, Y_{1,t-2}, \dots, Y_{N,t-2}, \dots)$ e $u_1 = F_1(y_1 | \mathbf{w}), \dots, u_N = F_N(y_N | \mathbf{w})$, com u_1, \dots, u_N variáveis aleatórias $U[0, 1]$ geradas pela transformação integral de probabilidade.

A densidade da conjunta condicional é obtida como:

$$\begin{aligned} h(y_1, \dots, y_N | \mathbf{w}) &= \frac{\partial^N H(y_1, \dots, y_N | \mathbf{w})}{\partial y_1 \dots \partial y_N} \\ &= f_1(y_1 | \mathbf{w}) \dots f_N(y_N | \mathbf{w}) \cdot c(u_1, \dots, u_N | \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (6)$$

sendo que para $Y_{it} | \mathbf{W} \sim F_{it}(\cdot | \mathbf{W})$, $i = 1, \dots, N$, as distribuições marginais f_i condicionais são dadas por:

$$f_{it} = \mu_i(\mathbf{Z}_{t-1}) + \sigma_i(\mathbf{Z}_{t-1}) \varepsilon_{it}, \text{ for } i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

em que ε_{it} é o resíduo padronizado tal que $\varepsilon_{it} | \mathbf{W} \sim F_i(0, 1) \forall t$, utilizado na estimação da cópula e o subconjunto $\mathbf{Z}_{t-1} \in \mathbf{W}$ refere-se as informações passadas relevantes para cada série.

2.3 Cópulas Fatoriais

Em um ambiente de dados de alta dimensão, métodos baseados em redução de dimensionalidade como análise fatorial e componentes principais, são comumente aplicados. No contexto a análise da dependência multivariada de séries temporais, Oh e Patton (2012) propuseram a abordagem de cópulas fatoriais considerando diferentes níveis de estruturas de dependência entre as séries.

Dado o i -ésimo fator de carga no tempo t , $\lambda_{g(i),t}$, o modelo de cópula fatorial para N séries temporais é dado por:

$$X_{it} = \lambda_{g(i),t}(\gamma_\lambda) Z_t + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

em que \mathbf{X} é um vetor latente de variáveis cuja cópula é igual à de \mathbf{Y} , Z é o fator comum e ε o erro idiossincrático. O grupo ao qual a i -ésima série temporal pertence é dado por $g(i) \in 1, \dots, G$ sendo G é o número de grupos nos quais as séries temporais são divididas e γ_λ é o conjunto de parâmetros conectados a λ . Observe que os níveis de dependência são dados como: $G = 1$ que é um caso especial de equidependência, $G = N$ um caso particular de dependência heterogênea e $1 < G < N$ um caso de dependência de bloco (OH; PATTON, 2012).

De modo a captar características dos dados financeiros, este trabalho considera a estrutura de dependência em bloco e o modelo cópula fatorial *Skew t-t*. Nessa especificação o fator comum tem distribuição t-Student assimétrica e o erro segue uma distribuição t-Student. Logo, os vetores de parâmetros das distribuições do fator comum Z e do erro idiossincrático ε são respectivamente, dadas por $Z_t \sim F_z(\gamma_z)$ e $\varepsilon_i \sim F_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)$, tal que:

$$\begin{aligned} Z_t &\sim \text{Skew } -t(v_z, \psi_z) \\ \varepsilon_{it} &\sim \text{iid } t(v_\varepsilon), \text{ e } \varepsilon_i \perp Z \forall i \end{aligned}$$

$$[X_{1t}, \dots, X_{Nt}]' \sim \mathbf{H}_x = \mathbf{C}(F_{x_{1t}}, \dots, F_{x_{Nt}}),$$

em que v_ε e v_z são os respectivos parâmetros de liberdade, que refletem evidências caudas pesadas, e ψ_z o parâmetro de assimetria para o fator comum associada as modificações no relacionamento entre os ativos mediante movimentos extremos no mercado.

Se $\psi_z > 0$ afeere-se que cópula fatorial não é Normal, sendo nesse caso a presença de maior dependência nos movimentos ascendentes conjuntos é evidenciada. Oh e Patton (2012) ainda mostram que quando v_ε difere-se de v_z a dependência da cauda implícita esta na fronteira apresentando valor 0 ($v_z > v_\varepsilon$) ou 1 ($v_z < v_\varepsilon$). Valores de dependência de cauda iguais a 0 mostram que movimentos extremos evidenciados nos ativos não são correlacionados. A dependência da cauda fica entre (0,1) se $v_\varepsilon = v_z$.

Além disso, para captar a dinâmica inerente aos movimentos do mercado financeiro, obtemos parâmetros variantes no tempo com a estrutura *generalized autoregressive score* (GAS) de Creal, Koopman e Lucas (2013) proposta para o modelo fatorial por Oh e Patton (2012) como:

$$\ln \lambda_{g,t} = \omega_g + \beta \ln \lambda_{g,t-1} + \alpha s_{g,t-1}, \quad g = 1, \dots, G \quad (8)$$

em que $s_{g,t} = \partial \ln c(\mathbf{u}_t; \lambda_t, \gamma_2, \gamma_\varepsilon) / \partial \lambda_{g,t}, \lambda_t = [\lambda_{1,t}, \dots, \lambda_{G,t}]'$. O vetor de parâmetros é dado por $\gamma_\lambda = [\omega_g, \beta, \alpha]'$, com ω_g de dimensão G , o que implica em $G + 2$ parâmetros a serem estimados. Os parâmetros α e β nos modelos GAS desempenham o mesmo papel que no modelo GARCH(1,1), ou seja, valores de β próximos a 1 forte persistência temporal.

2.3.1 Estimação

Na abordagem de cópulas condicionais de Patton (2006), um método paramétrico usual de estimação é a Inferência pelas Marginais (MIM) de Joe e Xu (1996), maximizando a função log-verossimilhança de (2) em dois passos. Primeiro, procede-se com a estimação dos parâmetros das marginais para posteriormente realizar a estimação dos parâmetros da cópula nos resíduos padronizados obtidos das marginais.

A função log-verossimilhança da densidade condicional conjunta em (1) é obtida como:

$$\begin{aligned} l(\theta_1, \dots, \theta_N, \theta_C | \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ln(f_i(y_{it} | \mathbf{w}, \theta_i)) \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \ln(c(u_{1t}, \dots, u_{Nt} | \mathbf{w}, \theta_C)) \\ &= l_{f_1}(\theta_1 | \mathbf{w}) + \dots + l_{f_N}(\theta_N | \mathbf{w}) \\ &\quad + l_c(\theta_C | \theta_1, \dots, \theta_N, \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (9)$$

em que θ_i é o vetor de parâmetros da distribuição marginal de Y_{it} , $i = 1, \dots, N$ e θ_C é o vetor de parâmetros da cópula.

Para modelos de cópulas fatoriais, Oh e Patton (2012) propõem uma aproximação numérica das funções de verossimilhança para estimar os parâmetros das cópulas via MIM, pois esta abordagem não apresenta forma fechada da função de verossimilhança. O procedimento para o caso com parâmetros que variam com o tempo é realizado com a maximização de uma aproximação numérica da função de verossimilhança obtida a partir da densidade da cópula da cópula fatorial de Y_t :

$$c_t(u_{1t}, \dots, u_{Nt}) = \frac{f_{X_t}(F_{X_{1t}}^{(-1)}(u_{1t}), \dots, F_{X_{Nt}}^{(-1)}(u_{Nt}))}{g_{1t}(F_{1t}^{(-1)}(u_{1t})) \times \dots \times g_{Nt}(F_{Nt}^{(-1)}(u_{Nt}))},$$

em que,

$$g_{it}(x_{it}) = \int_0^1 f_{\varepsilon}(x_{it} - \lambda_{it} F_Z^{(-1)}(m)) dm,$$

$$F_{X_{it}}(x_{it}) = \int_0^1 F_{\varepsilon}(x_{it} - \lambda_{it} F_Z^{(-1)}(m)) dm,$$

e

$$f_{X_t}(x_{1t}, \dots, x_{Nt}) = \int_0^1 \prod_{i=1}^N f_{\varepsilon}(x_{it} - \lambda_{it} F_Z^{(-1)}(m)) dm.$$

Portanto, temos o log da função de verossimilhança da cópula, para aplicação do método de Joe e Xu (1996):

$$l_c(\theta_C | \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N, \mathbf{w}) = \sum_{t=1}^T \ln(c(F_1(y_{1t} | \hat{\theta}_1, \mathbf{w}), \dots, F_N(y_{Nt} | \hat{\theta}_N, \mathbf{w}) | \mathbf{w}, \theta_C)),$$

em que $\theta_C = [\gamma_Z, \gamma_{\varepsilon}, \gamma_{\lambda}]'$ é o vetor de parâmetros de cópula a serem estimados por meio dos resíduos das distribuições marginais especificadas em (7) que nesse trabalho são dadas por modelos da classe ARMA(p, d, q)-GARCH(r, s), apresentados na próxima seção. Cópulas estáticas são estimadas da mesma maneira que as dinâmicas, mas restringindo seus parâmetros α e β na expressão (8) a zero.

2.3.2 Distribuições Marginais

Dada as características dos retornos financeiros e com base na definição das marginais em (2), para a média μ_i recorre-se à modelos da classe ARMA. O modelo ARMA(p, q) é apropriado para descrever séries temporais estacionárias, e pode ser dado de forma geral por:

$$\mu_{it} = \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (10)$$

em que o termo ε_t é o resíduo que constitui variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid), ϕ representa os p coeficientes da componente autoregressiva e θ os q coeficientes da componente de média móvel.

Para a variância σ_t^2 aplica-se processos heterocedásticos condicionais da classe GARCH, sendo o GARCH(1, 1) de Bollerslev (1986) definido como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sigma_t v_t \\ \sigma_t^2 &= \omega_1 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (11)$$

em que v_t são os resíduos padronizados i.i.d, independentes de ε_{t-l} com $l \geq 1$, ω corresponde ao nível médio de variância condicional, $\alpha_1 \geq 0$ e $\beta_1 \geq 0$ retratam juntos a persistência da volatilidade tal que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Os resíduos padronizados, utilizados no ajuste da cópula, neste trabalho apresentam distribuição t -skewed(v, ξ) e são dados por:

$$v_t = \frac{X_t - \mathbb{E}(Y_t | \mathbf{W}_{t-1})}{\sigma_t},$$

em que $\mathbf{W}_{t-1} = \{Y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}, Y_{t-2}, \varepsilon_{t-2}, \dots\}$

2.4 Value at Risk

Medidas específicas de risco financeiro são relacionados às potenciais perdas associadas ao comportamento do mercado. Uma métrica usual é o *VaR* que quantifica o grau de incerteza sobre retornos líquidos futuros. Na prática o *VaR* é uma medida de perda associada a um evento extremo, sob condições normais de mercado. Ele reflete a perda máxima esperada de um ativo (ou carteira de ativos) em um período de tempo dada uma probabilidade (MORETTIN, 2017). A representação do *VaR* de um ativo ou de uma carteira, dado um nível de significância α e um horizonte temporal t é dada por:

$$VaR(\alpha)_t = \inf_s \{F_{P_t}(s) \geq \alpha\} \quad (12)$$

em que F_{P_t} corresponde a função distribuição do ativo ou da carteira. A estimativa $\hat{VaR}(\alpha)_t$ quantifica quanto se pode perder com $\alpha\%$ de probabilidade com um horizonte de tempo t pré-definido. As áreas de risco usuais são 1%, 5% e 10%.

Para obtenção do *VaR*, a distribuição conjunta do portfólio H deve ser conhecida de forma a escolher um quantil α associado. Ao possibilitar a construção de distribuições heterogêneas sem a premissa de normalidade a cópula obtida é utilizada. Entretanto, como a distribuição não pode ser calculada teoricamente para cópulas fatoriais os quantis são estimados via simulação de H . O procedimento que consiste em simular conjuntos de dados da distribuição conjunta do portfólio via Monte Carlo, por meio das estimativas da cópula subjacente e modelos marginais para cada t fixo. Assim, é possível obter dados simulados dos retornos da carteira para cada t do $VaR_t(\alpha\%)$.

A avaliação das estimativas do *VaR* foi feita por meio do teste de Kupiec (KT), também conhecido como cobertura incondicional (KUPIEC, 1995), que é um teste de razão de verossimilhança. É definido como:

$$LR_K = -2 \ln[(1 - \alpha)^{(T-N)} - \alpha^N] + 2 \ln[(1 - N/T)^{T-N} (N/T)^N],$$

com $LR_K \sim \chi^2(1)$. O número de vezes que o *VaR* excede seu valor estimado é dado por N , T é o tamanho da amostra e α é o nível de significância.

Esse teste fornece conclusões que tornam possível evidenciando as dúvidas sobre os riscos de classificar os modelos de *VaR* como precisos ou imprecisos. A razão estimada por ultrapassar o *VaR* (N/T) é denominada $\hat{P}^\alpha = N/T$. Sob a hipótese nula, $\hat{P}^\alpha = \alpha$, em que, se as distribuições marginais e a cópula forem bem especificadas, essa relação deve ser próxima de α .

3 Resultados e Discussões

3.1 Descrição dos Dados

Na análise os log-retornos obtidos como $r_{it} = \ln(P_{it}) - \ln(P_{it-1})$, em que r_{it} é o i -ésimo retorno no tempo t , e P_{it} é o preço do ativo i no tempo t . O portfólio usado para estimativa do *VaR* tem pesos iguais para todos os ativos, apresentando retorno aproximado de $r_t \approx \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^N \exp(r_{it})}{N}\right)$, onde N é o número de ativos que o compõem. O comportamento das ações que compõem o portfólio são apresentadas nas Figuras 9, 10 e 11 no Apêndice 1.

Os retornos do portfólio são mostrados na Figura 1. Os resultados das estatísticas descritivas, evidenciam um retorno médio do portfólio ativos positivo no período ($\bar{r}_t = 0,00001$) e assimetria positiva (0,47) mesmo com momentos de incerteza e crashes evidenciados na amostra. Observa-se que os retornos negativos se concentram no período do crise do *subprime*, dado que o primeiro quartil no valor de -0,000484 indica que

até 25% do portfólio auferiram retornos negativos. Outras propriedade em destaque é o valor da curtose apresentado de 12,47 que indica presença de caudas pesadas nas distribuições desses retornos.

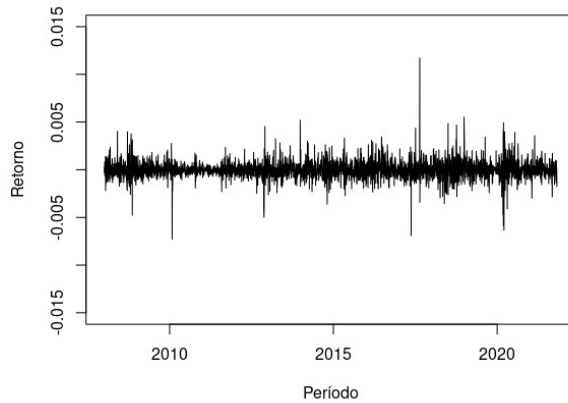


Figura 1: Série de retornos diários do portfólio, baseado nas séries de retornos de ações da [B]³, no período de janeiro de 2008 a outubro de 2021.

3.2 Séries Wavelet

A decomposição MODWT nas séries r_{it} construídas pelo filtro *wavelet* Haar, usando a metodologia apresentada na Seção 2.1, resultou em $J = 11$. Considerando o retorno do portfólio, a Figura 2 ilustra as séries geradas em cada nível de decomposição e a Tabela 2 mostra os resultados da decomposição da energia (variação) para cada nível de detalhe da MODWT. É possível observar nos níveis comportamentos bem distintos, como demonstrando por Chiann e Morettin (1998) que as decomposições *wavelets* permitem lidar com séries contaminadas com ruídos, uma vez que possui a capacidade de extrair informações em diferentes níveis de tempo e escala simultaneamente. Conforme se aumenta o nível da decomposição (reduzindo a frequência temporal), são obtidas séries mais suaves que caracterizam as tendências e efeitos de memórias mais longas presentes nas séries originais dos retornos.

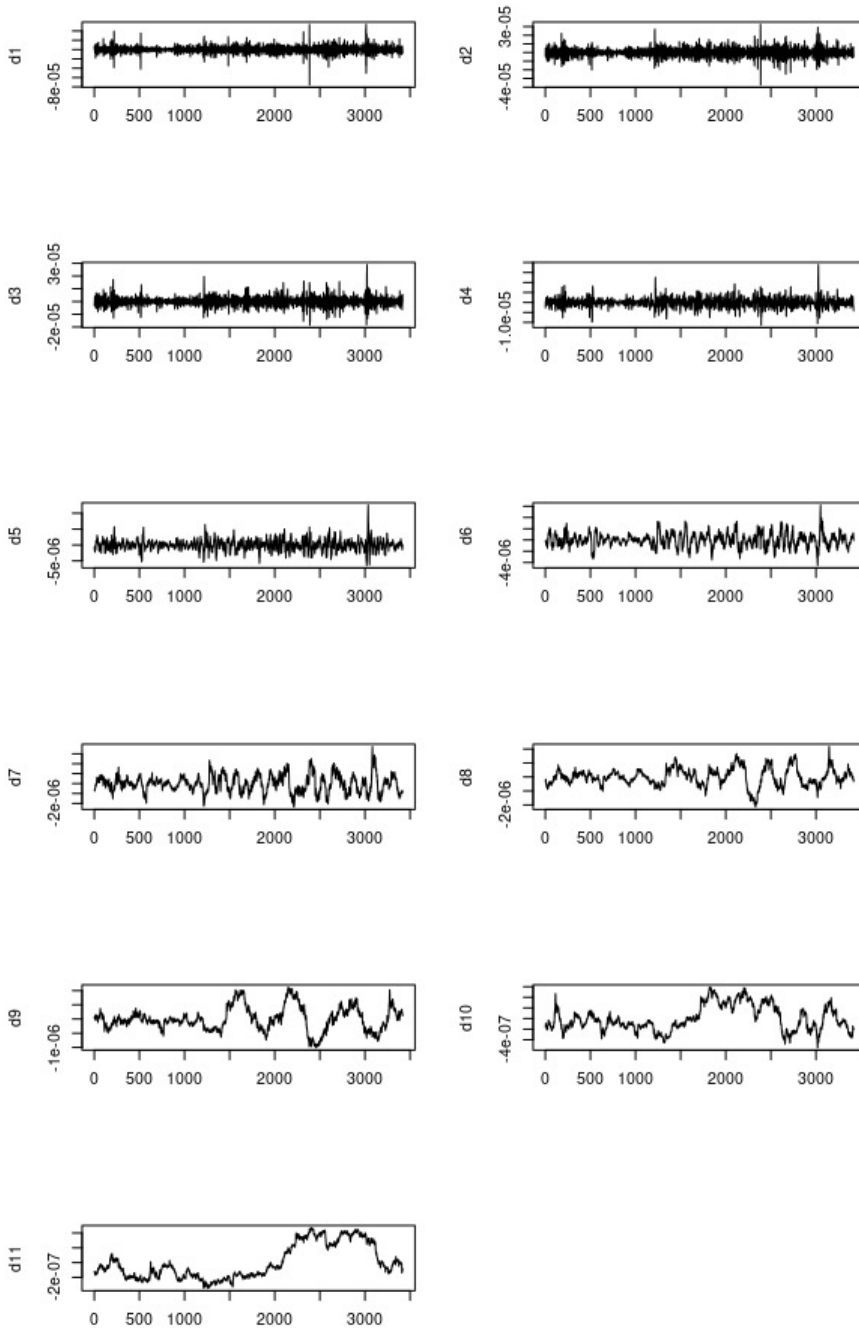


Figura 2: Resultado das séries decompostas do portfólio de retornos diários da $[B]^3$ no período de 02 de janeiro de 2008 a 29 de outubro de 2021.

Decomposições de curto prazo e médio prazo, com oscilações e ruídos estocásticos, geram a maior parte da variação do retorno do portfólio. A soma das decomposições de variância dos níveis é aproximadamente 100%, sendo que níveis mais baixos (frequências mais altas) mantêm a partes mais significativas das energia, e esta contribuição diminui à medida que o nível de decomposição adicionado aumenta tornando-se praticamente nula nos últimos níveis.

Tabela 2: Impacto das variâncias dos componentes da decomposição do retorno do portfólio

Nível de Detalhe	\tilde{d}_1	\tilde{d}_2	\tilde{d}_3	\tilde{d}_4	\tilde{d}_5	\tilde{d}_6	\tilde{d}_7	\tilde{d}_8	\tilde{d}_9	\tilde{d}_{10}	\tilde{d}_{11}
Energia (%)	49,56	24,72	13,35	6,17	3,06	1,54	0,82	0,43	0,19	0,06	0,06

Evidencia-se que ciclos de prazos menores e componentes de médio prazo refletem sazonalidades específicas de ativos, como efeitos de dia de semana e virada do mês, e os ciclos de prazos maiores têm pouco efeito sobre a variabilidade das séries de retornos diário. Estes resultados são corroborados por (BERGER; GENCAI, 2018). Dessa forma, utilizamos as séries reconstruídas de forma a caracterizar os impactos de ciclos diários, semanais e mensais com a reconstrução da série de retornos r_{it} de acordo com a equação 3. Os cenários utilizados nesse estudo são descritos por $r_{1,t} = \tilde{D}_{1,t}$, que apresenta a série de retorno reconstruída exclusivamente com as informações de curto prazo, uma série de retorno reconstruída com componentes de curto prazo e médio prazo:

$$r_{1:5,t} = \sum_{j=1}^5 \tilde{D}_{j,t},$$

e por uma série de retorno sem componentes de tendência, dada por:

$$r_{1:7,t} = \sum_{j=1}^7 \tilde{D}_{j,t}.$$

Denotaremos as séries reconstruídas como $\tilde{d}_{1,t}$, $\tilde{d}_{1:5,t}$ e $\tilde{d}_{1:7,t}$ que compreendem, respectivamente compreendem os primeiro, quinto e sétimo componentes de frequência, representando o curto, médio e longo prazo das séries de retornos diários original e retratando variações diárias, semanais e mensais.

3.3 Distribuições Marginais

As distribuições marginais foram ajustadas com modelos ARMA(0,1)-GARCH(1,1) para todas as escalas temporais. As estimativas especificação das marginais, bem como os erros-padrão em parênteses, está de acordo com os resultados da Tabela 3, Tabela 4 e Tabela 5, para os ciclos de curto, médio e longo prazo respectivamente. Os modelos estimados foram validados por meio do diagnóstico de correlação serial nos resíduos padronizados pela estatística Box-Pierce $Q(20)$ dos resíduos padronizado que indica ausência de dependência com informações anteriores.

De forma geral, características estatísticas comumente presentes em séries temporais financeiras são evidenciadas. Os resultados refletem alta persistência da volatilidade em todos os níveis, sendo que casos em que de $\alpha_1 + \beta_1 > 1$ indica a permanência dos choques na volatilidade séries por longo período. Além disso, a escala todos os ciclos exibiram baixa volatilidade condicional. A significância dos valores de v e ξ indicam que a importância de não considerar a suposição de normalidade e usar uma distribuição de cauda pesada para os resíduos.

Tabela 3: Resultados das marginais para a série \tilde{d}_1

Ações	Coeficientes						$Q(20)$
	θ_1	ω	α_1	β_1	ξ	ν	
VALE3	-0,9969 (0,001)	0,000002 (0,000001)	0,0686 (0,010)	0,9190 (0,011)	1,0036 (0,023)	6,8592 (0,779)	0,02
PETR4	-0,9901 (0,002)	0,000003 (0,000001)	0,0974 (0,013)	0,8895 (0,013)	0,9829 (0,023)	6,8601 (0,759)	0,53
BRAP3	-0,9894 (0,003)	0,000006 (0,000002)	0,0845 (0,017)	0,8849 (0,024)	0,9945 (0,022)	5,8723 (0,588)	0,12
BBDC4	-0,9881 (0,002)	0,000003 (0,000001)	0,0661 (0,010)	0,9111 (0,013)	1,0440 (0,026)	8,0221 (0,986)	0,34
BRML3	-0,9846 (0,003)	0,000006 (0,000002)	0,0931 (0,014)	0,8675 (0,020)	1,0786 (0,026)	7,3097 (0,878)	0,16
SULA11	-0,9849 (0,003)	0,000013 (0,000004)	0,0935 (0,023)	0,8078 (0,050)	1,0372 (0,024)	5,7274 (0,520)	0,78
BBSA3	-0,9910 (0,002)	0,000004 (0,000001)	0,0961 (0,012)	0,8808 (0,014)	1,0520 (0,025)	7,6921 (0,950)	0,55
IGTA3	-0,9883 (0,002)	0,000005 (0,000001)	0,0911 (0,016)	0,8685 (0,024)	1,0502 (0,024)	6,3145 (0,671)	0,24
CYRE3	-0,9975 (0,001)	0,000003 (0,000001)	0,0963 (0,013)	0,8895 (0,014)	1,0237 (0,025)	8,6369 (1,141)	0,63
MRVE3	-0,9982 (0,003)	0,000003 (0,000001)	0,0803 (0,012)	0,9057 (0,014)	1,0099 (0,025)	9,9936 (1,505)	0,24
JHSF3	-0,9739 (0,005)	0,000007 (0,000002)	0,1075 (0,017)	0,8751 (0,019)	1,1531 (0,025)	4,5930 (0,386)	0,05
GOLL4	-0,9749 (0,004)	0,000020 (0,000005)	0,1139 (0,020)	0,8396 (0,029)	1,1286 (0,027)	5,8293 (0,549)	0,61
RAIL3	-0,9909 (0,002)	0,000013 (0,000003)	0,1631 (0,022)	0,7836 (0,026)	1,0373 (0,024)	5,8227 (0,543)	0,60
EZTC3	-0,9963 (0,001)	0,000005 (0,000001)	0,1074 (0,016)	0,8642 (0,019)	1,0189 (0,024)	6,5460 (0,720)	0,06
AMER3	-0,9751 (0,004)	0,000014 (0,000004)	0,1128 (0,017)	0,8517 (0,022)	1,0928 (0,025)	5,9521 (0,599)	0,01
NTCO3	-0,9970 (0,001)	0,000003 (0,000001)	0,0609 (0,010)	0,9146 (0,014)	1,0689 (0,025)	7,0455 (0,800)	0,05
RENT3	-0,9803 (0,003)	0,000004 (0,000001)	0,0929 (0,012)	0,8855 (0,014)	1,0585 (0,026)	8,2362 (1,070)	0,10
JBSS3	-0,9920 (0,002)	0,000009 (0,000003)	0,0892 (0,014)	0,8747 (0,021)	1,0238 (0,025)	6,1089 (0,604)	0,62
VIIA3	-1,0000 (0,003)	0,000008 (0,0000006)	1,0000 (0,050)	0,3308 (0,018)	0,9953 (0,008)	2,2834 (0,017)	0,98
RADL3	-0,9863 (0,003)	0,000008 (0,000003)	0,0790 (0,015)	0,8482 (0,033)	1,0465 (0,023)	6,8269 (0,814)	0,36
CSNA3	-0,9829 (0,004)	0,000003 (0,000001)	0,0722 (0,009)	0,9214 (0,019)	1,0837 (0,026)	8,1623 (1,996)	0,60
GGBR4	-0,9829 (0,003)	0,000003 (0,000001)	0,0649 (0,009)	0,9224 (0,010)	1,0720 (0,027)	10,0000 (1,557)	0,39
USIM5	-0,9905 (0,003)	0,000012 (0,000003)	0,1043 (0,016)	0,8627 (0,019)	1,0855 (0,024)	5,4509 (0,500)	0,78
EMBR3	-0,9827 (0,003)	0,000003 (0,000001)	0,0571 (0,012)	0,9236 (0,015)	1,0426 (0,024)	4,9011 (0,399)	0,21
TASA4	-0,9663 (0,007)	0,000028 (0,000005)	0,2990 (0,043)	0,7049 (0,030)	1,0740 (0,021)	3,2482 (0,200)	0,98
CMIG4	-0,9948 (0,001)	0,000004 (0,000001)	0,1002 (0,016)	0,8794 (0,017)	0,9872 (0,024)	5,8216 (0,532)	0,67
CSMG3	-0,9922 (0,002)	0,000014 (0,000004)	0,2037 (0,042)	0,7340 (0,052)	0,9939 (0,019)	3,9864 (0,309)	0,04
SBSP3	-0,9838 (0,003)	0,000006 (0,000002)	0,0864 (0,017)	0,8755 (0,026)	0,9698 (0,023)	6,9100 (0,793)	0,56
ENEV3	-0,9987 (0,006)	0,000073 (0,0000021)	0,8014 (0,021)	0,5366 (0,045)	0,9528 (0,014)	2,4388 (0,129)	0,98
ELET3	-0,9948 (0,001)	0,000006 (0,000002)	0,1226 (0,021)	0,8676 (0,022)	1,0608 (0,024)	4,4722 (0,352)	0,54

Tabela 4: Resultados das marginais para a série $\tilde{d}_{1:5}$

Ações	Coeficientes						$Q(20)$
	θ_1	ω	α_1	β_1	ξ	ν	
VALE3	0,0069 (0,002)	0,000009 (0,00003)	0,0672 (0,010)	0,9201 (0,011)	1,0100 (0,024)	7,0656 (0,816)	0,09
PETR4	-0,0336 (0,002)	0,000013 (0,00003)	0,0945 (0,013)	0,8909 (0,014)	1,0025 (0,024)	6,8057 (0,747)	0,11
BRAP3	-0,0609 (0,002)	0,000023 (0,00007)	0,0835 (0,015)	0,8866 (0,022)	0,9880 (0,022)	6,2418 (0,648)	0,04
BBDC4	0,0006 (0,002)	0,000010 (0,00003)	0,0679 (0,011)	0,9091 (0,014)	1,0558 (0,026)	8,3328 (1,050)	0,21
BRML3	-0,0030 (0,002)	0,000023 (0,00006)	0,0919 (0,015)	0,8722 (0,020)	1,0915 (0,024)	7,6262 (0,942)	0,09
SULA11	-0,0168 (0,018)	0,000044 (0,000016)	0,0885 (0,024)	0,8233 (0,052)	1,0491 (0,026)	5,8063 (0,536)	0,08
BBSA3	0,0332 (0,002)	0,000016 (0,00004)	0,0930 (0,012)	0,8853 (0,014)	1,0662 (0,025)	7,8242 (0,970)	0,35
IGTA3	-0,0392 (0,002)	0,000018 (0,00005)	0,0955 (0,017)	0,8641 (0,025)	1,0654 (0,025)	6,4804 (0,708)	0,46
CYRE3	0,0015 (0,018)	0,000012 (0,00003)	0,0947 (0,012)	0,8924 (0,013)	1,0310 (0,026)	8,8562 (1,183)	0,45
MRVE3	-0,0021 (0,002)	0,000013 (0,00004)	0,0768 (0,012)	0,9093 (0,014)	1,0239 (0,025)	10,0000 (1,502)	0,08
JHSF3	-0,0381 (0,002)	0,000023 (0,00006)	0,1023 (0,016)	0,8821 (0,017)	1,1396 (0,027)	4,6818 (0,400)	0,17
GOLL4	0,0073 (0,002)	0,000062 (0,00018)	0,1036 (0,020)	0,8590 (0,027)	1,1266 (0,016)	5,8074 (0,549)	0,56
RAIL3	-0,0110 (0,019)	0,000043 (0,00009)	0,1456 (0,069)	0,8083 (0,025)	1,0501 (0,025)	5,8942 (0,552)	0,55
EZTC3	0,0261 (0,002)	0,000017 (0,00005)	0,1054 (0,021)	0,8697 (0,018)	1,0235 (0,024)	7,0610 (0,837)	0,08
AMER3	0,0633 (0,002)	0,000052 (0,00013)	0,1070 (0,015)	0,8571 (0,021)	1,0795 (0,025)	6,1067 (0,630)	0,09
NTCO3	-0,0180 (0,019)	0,000013 (0,00004)	0,0615 (0,016)	0,9148 (0,014)	1,0801 (0,025)	7,1226 (0,822)	0,07
RENT3	-0,0282 (0,015)	0,000015 (0,00004)	0,0924 (0,010)	0,8842 (0,014)	1,0608 (0,026)	8,5381 (1,138)	0,11
JBSS3	-0,0644 (0,019)	0,000031 (0,00008)	0,0813 (0,012)	0,8870 (0,018)	1,0408 (0,025)	6,0741 (0,598)	0,31
VIIA3	0,0595 (0,018)	0,000000 (0,00004)	1,0000 (0,013)	0,7151 (0,021)	1,0076 (0,012)	2,2106 (0,624)	1,00
RADL3	-0,0273 (0,002)	0,000028 (0,00008)	0,0732 (0,013)	0,8617 (0,028)	1,0476 (0,023)	6,7483 (0,801)	0,07
CSNA3	0,0307 (0,018)	0,000009 (0,00003)	0,0680 (0,009)	0,9260 (0,009)	1,0877 (0,026)	8,1022 (1,073)	0,70
GGBR4	0,0084 (0,017)	0,000010 (0,00003)	0,0619 (0,008)	0,9263 (0,010)	1,0766 (0,027)	10,0000 (1,438)	0,24
USIM5	0,0561 (0,019)	0,000039 (0,00009)	0,0935 (0,085)	0,8775 (0,020)	1,1002 (0,025)	5,5856 (0,516)	0,93
EMBR3	-0,0589 (0,002)	0,000010 (0,00003)	0,0547 (0,014)	0,9286 (0,016)	1,0316 (0,023)	4,8639 (0,398)	0,04
TASA4	-0,0436 (0,002)	0,000092 (0,00018)	0,2724 (0,011)	0,7344 (0,020)	1,0746 (0,021)	3,2092 (0,200)	0,94
CMIG4	-0,0286 (0,002)	0,000014 (0,00003)	0,0966 (0,041)	0,8851 (0,014)	0,9773 (0,024)	6,0576 (0,566)	0,31
CSMG3	-0,0229 (0,018)	0,000021 (0,00005)	0,1118 (0,015)	0,8616 (0,028)	0,9718 (0,020)	4,3281 (0,345)	0,02
SBSP3	-0,0764 (0,018)	0,000020 (0,00006)	0,0777 (0,019)	0,8869 (0,016)	0,9754 (0,022)	6,5412 (0,728)	0,10
ENEV3	0,0034 (0,002)	0,000050 (0,00009)	0,2553 (0,015)	0,7908 (0,014)	1,0171 (0,017)	2,8874 (0,165)	0,99
ELET3	0,0287 (0,002)	0,000017 (0,00006)	0,1123 (0,020)	0,8815 (0,020)	1,0642 (0,024)	4,6731 (0,380)	0,39

Tabela 5: Resultados das marginais para a série $\tilde{d}_{1:7}$

Ações	Coeficientes						$Q(20)$
	θ_1	ω	α_1	β_1	ξ	ν	
VALE3	0,0053 (0,018)	0,000009 (0,00003)	0,0683 (0,010)	0,9195 (0,011)	0,9960 (0,023)	6,8671 (0,785)	0,02
PETR4	-0,0285 (0,018)	0,000014 (0,00004)	0,0986 (0,013)	0,8877 (0,014)	0,9804 (0,023)	6,7359 (0,742)	0,33
BRAP3	-0,0618 (0,018)	0,000021 (0,00007)	0,0771 (0,015)	0,8974 (0,021)	0,9762 (0,021)	5,8415 (0,582)	0,21
BBDC4	0,0055 (0,018)	0,000011 (0,00006)	0,0676 (0,011)	0,9090 (0,014)	1,0462 (0,026)	8,2057 (1,032)	0,40
BRML3	-0,0037 (0,019)	0,000025 (0,00016)	0,0937 (0,015)	0,8672 (0,021)	1,0756 (0,025)	7,3980 (0,900)	0,16
SULA11	-0,0118 (0,018)	0,000046 (0,00004)	0,0845 (0,022)	0,8259 (0,049)	1,0440 (0,024)	5,6212 (0,507)	0,77
BBSA3	0,0388 (0,018)	0,000017 (0,00004)	0,0977 (0,013)	0,8793 (0,015)	1,0575 (0,025)	7,7967 (0,974)	0,83
IGTA3	-0,0343 (0,018)	0,000019 (0,00005)	0,0920 (0,017)	0,8665 (0,025)	1,0552 (0,024)	6,2079 (0,657)	0,36
CYRE3	0,0038 (0,019)	0,000014 (0,00004)	0,0967 (0,013)	0,8889 (0,014)	1,0292 (0,025)	8,5242 (1,114)	0,65
MRVE3	-0,0006 (0,019)	0,000014 (0,00004)	0,0812 (0,012)	0,9047 (0,014)	1,0166 (0,025)	9,9611 (1,501)	0,22
JHSF3	-0,0290 (0,018)	0,000027 (0,00008)	0,1009 (0,017)	0,8806 (0,019)	1,1276 (0,024)	4,5393 (0,378)	0,01
GOLL4	0,0095 (0,018)	0,000080 (0,0002)	0,1142 (0,020)	0,8383 (0,029)	1,1329 (0,027)	5,6695 (0,528)	0,45
RAIL3	-0,0116 (0,019)	0,000050 (0,00010)	0,1576 (0,021)	0,7904 (0,016)	1,0454 (0,024)	5,8065 (0,541)	0,58
EZTC3	0,0317 (0,019)	0,000021 (0,00015)	0,1094 (0,016)	0,8613 (0,020)	1,0137 (0,024)	6,7052 (0,755)	0,24
AMER3	0,0672 (0,019)	0,000058 (0,00013)	0,1119 (0,017)	0,8490 (0,023)	1,0785 (0,025)	6,0438 (0,614)	0,53
NTCO3	-0,0114 (0,018)	0,000013 (0,00004)	0,0616 (0,010)	0,9147 (0,014)	1,0766 (0,025)	7,1503 (0,821)	0,06
RENT3	-0,0229 (0,020)	0,000015 (0,00004)	0,0902 (0,012)	0,8864 (0,014)	1,0479 (0,025)	8,0069 (1,010)	0,10
JBSS3	-0,0664 (0,019)	0,000036 (0,00010)	0,0871 (0,014)	0,8779 (0,020)	1,0265 (0,024)	6,0972 (0,605)	0,77
VIIA3	0,0600 (0,011)	0,000000 (0,00004)	0,3395 (0,017)	0,6652 (0,019)	0,9933 (0,013)	3,8907 (0,019)	0,99
RADL3	-0,0239 (0,019)	0,000032 (0,00010)	0,0781 (0,015)	0,8496 (0,033)	1,0361 (0,023)	6,7801 (0,802)	0,33
CSNA3	0,0413 (0,018)	0,000010 (0,00003)	0,0735 (0,010)	0,9200 (0,010)	1,0752 (0,026)	8,2927 (1,127)	0,29
GGBR4	0,0141 (0,018)	0,000011 (0,00003)	0,0638 (0,009)	0,9231 (0,011)	1,0655 (0,027)	10,0000 (1,522)	0,49
USIM5	0,0630 (0,019)	0,000047 (0,00003)	0,1060 (0,016)	0,8599 (0,019)	1,0840 (0,024)	5,5422 (0,513)	0,99
EMBR3	-0,0596 (0,017)	0,000011 (0,00011)	0,0556 (0,012)	0,9253 (0,016)	1,0214 (0,023)	4,7670 (0,383)	0,28
TASA4	-0,0342 (0,019)	0,000164 (0,00018)	0,3836 (0,058)	0,6312 (0,036)	1,0844 (0,020)	3,0799 (0,188)	0,79
CMIG4	-0,0276 (0,019)	0,000015 (0,00004)	0,0968 (0,023)	0,8830 (0,017)	0,9748 (0,024)	5,8369 (0,535)	0,52
CSMG3	-0,0221 (0,018)	0,000047 (0,00031)	0,1797 (0,015)	0,7658 (0,049)	0,9831 (0,019)	4,0226 (0,316)	0,03
SBSP3	-0,0827 (0,018)	0,000019 (0,00004)	0,0769 (0,019)	0,8897 (0,025)	0,9646 (0,022)	6,2179 (0,663)	0,62
ENEV3	0,0300 (0,018)	0,000086 (0,00015)	0,4155 (0,015)	0,6962 (0,030)	1,0092 (0,017)	2,8223 (0,162)	0,99
ELET3	0,0290 (0,018)	0,000024 (0,00008)	0,1255 (0,020)	0,8644 (0,020)	1,0713 (0,024)	4,5027 (0,357)	0,72

3.4 Cópulas

Para modelagem das cópulas aplica-se a transformação integral de probabilidade nos resíduos de modo que tenham distribuições Uniformes $[0, 1]$. A cópula fatorial “*Skew t-t*” é estimada com as transformadas dos resíduos de forma estática, com parâmetros que não variam no tempo, e dinâmica com a abordagem GAS nos parâmetros conforme Oh e Patton (2012). As cópulas estáticas são estimadas da mesma maneira que as dinâmicas, mas restringindo seus parâmetros a $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Neste estudo, considera-se a estrutura de dependência em bloco, pois empresas de mesmo segmento de operação tendem a apresentar estrutura de dependência, conforme demonstram Bartels e Ziegelmann (2016). Em cada ciclo de tempo analisado, os retornos reconstruídos foram agrupados em 6 blocos de acordo com o setor/segmento de mercado em que operam, com base na classificação setorial da [B]³. Informações gerais sobre a classificação dos dados com base no setor de atuação são apresentadas na Tabela 8 no Apêndice 2.

Os parâmetros estimados das cópulas para cada nível são apresentados nas Tabela 6. Resultados similares foram auferidos para as reconstruções. Os valores do parâmetro β na cópula dinâmica é próximo de 1 indicando forte persistência temporal na estrutura de dependência. A estimativa inversa dos graus de liberdade para o fator comum ($1/v_Z$) e do erro ($1/v_\varepsilon$), são maiores que zero indicando a adequabilidade da cópula não Normal. O parâmetro de assimetria ψ_z é negativo, indicando maior dependência para movimentos descendentes conjuntos nos retornos das ações, o que retrata o fato estilizado de que ativos financeiros tendem a estar mais correlacionados em momentos de baixa dos mercados (*bear markets*) do que nos mercados de alta (*bull markets*) como demonstrado por Ang e Bekaert (2002), Patton (2004) e Hatherley e Alcock (2007), que aumenta a medida que considera-se ciclos maiores de variação sendo o curto prazo o valor com menor magnitude.

Os resultados sugerem presença de relação nos movimentos extremos de mercado a curto prazo e a longo prazo, já que para as séries \tilde{d}_1 e $\tilde{d}_{1:7}$ $v_z < v_\varepsilon$. Nos ciclos de médio prazo, dada por $\tilde{d}_{1:5}$, esse comportamento é diferente dado que $v_z > v_\varepsilon$. Logo, os movimentos extremos nos retornos são correlacionados no curto prazo, que descrevem informações cruciais da dinâmica do mercado conforme Berger e Gencay (2018), e a e curto a longo prazo. No problema de alocação dinâmica de ativos em que retornos das ações tendem a exibir maiores variações em frequências de negociação menores, mas com reversão a longo prazo, a compreensão desse comportamento desempenha um papel importante na elaboração de estratégias para otimizar a rentabilidade de portfólio (CONRAD; KAUL, 1998; CHRISTOFFERSEN et al., 2008; KOIJEN; RODRIGUEZ; SBUELZ, 2009).

Tabela 6: Estimativas dos Parâmetros da Dependência Fatorial de Bloco

Parâmetros	\tilde{d}_1		$\tilde{d}_{1:5}$		$\tilde{d}_{1:7}$	
	Estático	Dinâmico	Estático	Dinâmico	Static	Dinâmico
ω_1	-0,2994	-0,0004	-0,2991	-0,0013	-0,2465	-0,0013
ω_2	-0,2991	-0,0006	-0,2998	-0,0014	-0,2402	-0,0009
ω_3	-0,0613	-0,00003	-0,2991	-0,0006	-0,0146	-0,0004
ω_4	-0,2999	-0,0013	-0,2986	-0,0026	-0,2951	-0,00025
ω_5	-0,2543	-0,0008	-0,3000	-0,0015	-0,2052	-0,0013
ω_6	-0,2999	-0,0012	-0,3000	-0,0018	-0,2821	-0,0013
α	-	0,0159	-	0,0115	-	0,0123
β	-	0,9996	-	0,9988	-	0,9990
$1/v_Z$	0,4200	0,2152	0,1400	0,0315	0,4198	0,1754
$1/v_\varepsilon$	0,1552	0,1381	0,1767	0,1362	0,1614	0,1237
ψ_z	-0,0495	-0,1114	-0,0355	-0,1101	-0,0356	-0,1808

Em todos os cenários analisados, a evolução dinâmica das cargas fatoriais dos blocos em cada escala, apresentadas nas Figuras 3, 4 e 5, exibem um nível médio de variação ao longo do tempo de 0,2 a 0,7. O valor da carga fatorial estática foi de 0,74, exceto para \tilde{d}_1 no bloco 3 que auferiu o valor estático de 0,94. Conforme Bartels e Ziegelmann (2016), grupos com maiores cargas fatoriais apresentam maiores correlações. Tanto a curto como a médio e longo prazo, o bloco de materiais básicos e construção e transporte apresentaram em média maiores magnitudes, enquanto consumo os menores. No longo prazo o setor de materiais básicos e produção industrial e construção e transporte também apresentaram valores maiores de dependência. Além disso, especificamente nos grandes momentos de incerteza mundial, incorridos no período, afe-re-se que o setor que apresentou maior carga fatorial com a crise do *subprime* foi o de mineração e petróleo e no impacto do COVID-19 empresas de construção e transporte. De fato, nesses momentos esses grupos foram o que mais sofreram impactos o que resultou nas maiores correlações.

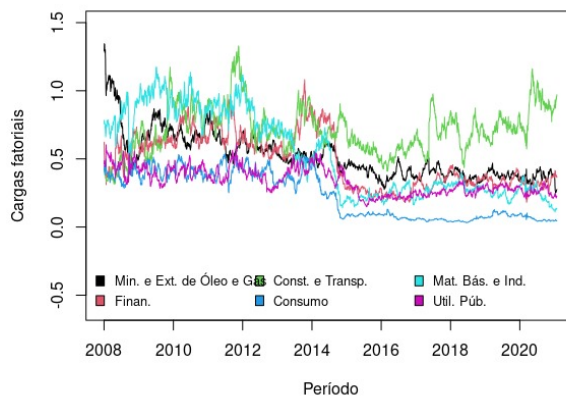


Figura 3: Cargas fatoriais em bloco para \tilde{d}_1 de acordo com o modelo fatorial dinâmico *Skew t-t*

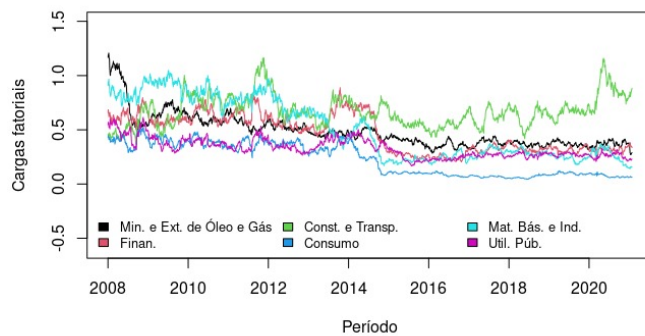


Figura 4: Cargas fatoriais em bloco para $\tilde{d}_{1,5}$ de acordo com o modelo fatorial dinâmico *Skew t-t*

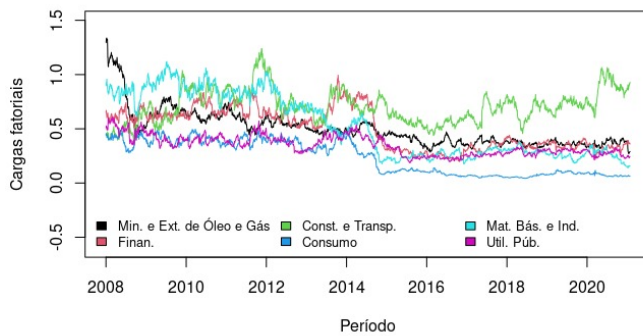


Figura 5: Cargas fatoriais em bloco para $\tilde{d}_{1,7}$ de acordo com o modelo fatorial dinâmico *Skew t-t*

3.5 Risco

A partir das cópulas fatoriais dinâmicas o *VaR* fora da amostra foi estimado com base no método da seção 2.4, nas diferentes decomposições da série original. Realizou-se 300 simulações de cada modelo para cada período de tempo t . Os percentuais de perdas devem estar próxima essa do valor de $\alpha\%$ estabelecido. Os resultados são apresentados em Tabela 7 com seus respectivos p-valores do teste de Kupiec (1995). Para ilustrar o comportamento do *VaR* as Figuras 6, 7 e 8, mostram os retornos do portfólio e os valores previstos para cada escala de tempo.

Tabela 7: Proporção de violações de *VaR* ($N=T$) e resultados do teste de Kupiec

Séries	α	N/T	p-valor
\tilde{d}_1	0,01	0,0106	0,97
	0,05	0,0426	0,52
	0,10	0,0691	0,16
$\tilde{d}_{1,5}$	0,01	0,0372	0,01
	0,05	0,0957	0,02
	0,10	0,1649	0,01
$\tilde{d}_{1,7}$	0,01	0,0319	0,05
	0,05	0,1170	< 0,0001
	0,10	0,1882	< 0,0001

Observa-se que as escalas de curto prazo e as que incorporam os ciclos de curto, médio e longo prazo apresentam todos os resultados não significativos. Por sua vez, para o longo prazo a 5% e 10% a hipótese nula é rejeitada. Ao longo dos ciclos, observamos mudanças nas proporções de falhas. Logo, decomposições referentes as oscilações de médio prazo, com as oscilações de curto prazo, apresentaram maior impacto na qualidade da previsão do risco, permitem estimativas mais precisas do *VaR* do portfólio de ações (BERGER; FIEBERG, 2016; BERGER; GENCA Y, 2018). Segundo os autores, o impacto maior no risco advém dos movimentos de frequências mais alta por caracterizarem os efeitos estocásticos exógenos e sazonalidades inerentes do sistema financeiro, o que no caso específico de mercados financeiro como o brasileiro se

intensificam com crises domésticas e internacionais (BIAGE, 2019; BIAGE; NELCIDE, 2020). Além disso, Bu et al. (2019) afirma que excluir a componente de longo prazo do retorno pode reduzir amplamente as previsões do risco de curto prazo sem afetar a qualidade regulatória da avaliação de risco.

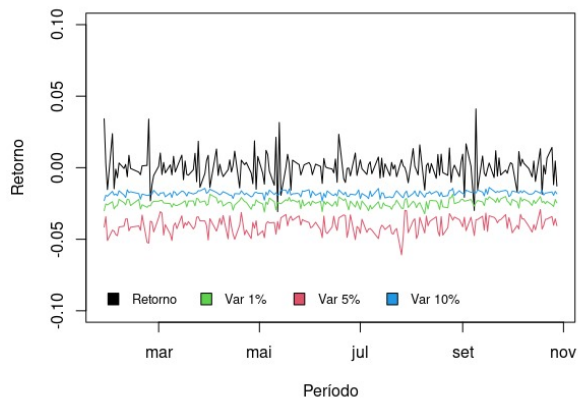


Figura 6: Previsões do VaR para \tilde{d}_1

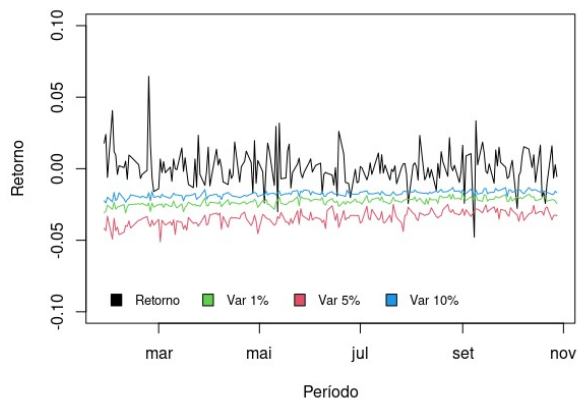


Figura 7: Previsões do VaR para $\tilde{d}_{1,5}$

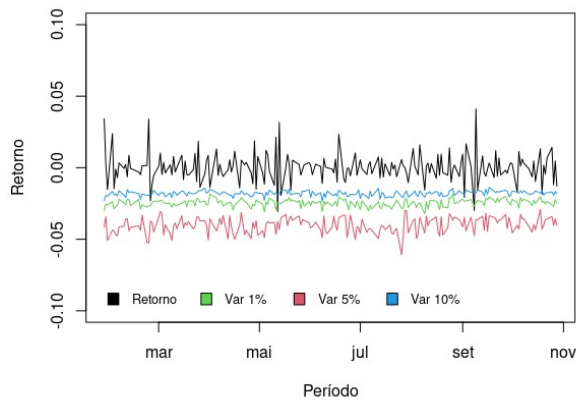


Figura 8: Previsões do VaR para $\tilde{d}_{1:7}$

4 Considerações Finais

Neste artigo, para análise da dependência risco, a abordagem de cópulas fatoriais foi adotada para obter a estrutura de dependência em bloco dinâmica e prever *VaR* para um portfólio composto por ações do mercado brasileiro considerando os impactos de ciclos de curto, médio e longo prazo por meio da decomposição espectral de *wavelets*.

Agregando componentes de médio e longo prazo às variações de curto prazo dos retornos subjacentes, auferem-se evidências de que os componentes de longo prazo contribuem na análise da dependência de portfólios, mas prejudicam a acurácia das previsões de *VaR*. Portanto, evidencia-se duas implicações dos resultados. Em primeiro lugar, auferem-se assimetria e persistência temporal na estrutura de dependência de bloco em todas as escalas analisadas, em que o segmento de materiais básicos, compostos por indústrias e siderúrgicas, e segmento de construção e transporte apresentam as maiores correlações. Além disso, a relação de movimentos extremos nos retornos não são correlacionados no curto a médio prazo. Em segundo lugar, o isolamento da componente de informação de curto prazo que consiste na maior parte da variação histórica do retorno diário do portfólio, resulta em previsões diárias acuradas do *VaR*. Os resultados sugerem que incluir os componentes de escalas maiores, como as informações de médio e longo prazo, impacta significativamente na mensuração das perdas.

Realizando a análise financeira em componentes de frequência foi possível performar a gestão de portfólio, com cálculo de dependência e risco, de modo a considerar os impactos de inovações estocásticas inerentes de ciclos econômicos e mudanças no horizonte de negociação, relacionados com os fundamentos do mercado financeiro. Portanto, filtrar esses impactos pode levar a um aperfeiçoamento nas estratégias de alocação de ativos, propiciando um melhor equilíbrio entre risco e retorno.

Referências

AAS, K.; CZADO, C.; FRIGESSI, A.; BAKKEN, H. Pair-copula constructions of multiple dependence.

Insurance: Mathematics and economics, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 182–198, 2009.

ALEXANDER, C. (Ed.). *Market risk analysis, practical financial econometrics, Volume IV*. London: John Wiley & Sons, 2008.

ALMEIDA, C.; CZADO, C. Efficient bayesian inference for stochastic time-varying copula models. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 56, n. 6, p. 1511–1527, 2012.

ANDERSEN, L.; SIDENIUS, J. Extensions to the gaussian copula: Random recovery and random factor loadings. *Journal of Credit Risk Volume*, Citeseer, v. 1, n. 1, p. 05, 2004.

ANG, A.; BEKAERT, G. International asset allocation with regime shifts. *The review of financial studies*, Oxford University Press, v. 15, n. 4, p. 1137–1187, 2002.

BARTELS, M.; ZIEGELMANN, F. A. Market risk forecasting for high dimensional portfolios via factor copulas with gas dynamics. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 70, p. 66–79, 2016.

BERGER, T.; FIEBERG, C. On portfolio optimization: Forecasting asset covariances and variances based on multi-scale risk models. *The Journal of Risk Finance*, Emerald Group Publishing Limited, 2016.

BERGER, T.; GENCAY, R. Improving daily value-at-risk forecasts: The relevance of short-run volatility for regulatory quality assessment. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, v. 92, p. 30–46, 2018.

BIAGE, M. Analysis of shares frequency components on daily value-at-risk in emerging and developed markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 532, p. 121798, 2019.

BIAGE, M.; NELCIDE, P. J. Effects of asset frequency components on value-at-risk in emerging and developed markets. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 40, n. 1, p. 145–207, 2020.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.

BRUSA, J.; LIU, P. The day-of-the-week and the week-of-the-month effects: An analysis of investors' trading activities. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Springer, v. 23, n. 1, p. 19–30, 2004.

BU, D.; LIAO, Y.; SHI, J.; PENG, H. Dynamic expected shortfall: A spectral decomposition of tail risk across time horizons. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, v. 108, p. 103753, 2019.

CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. *The econometrics of financial markets*. [S.l.]: princeton University press, 2012.

CERRATO, M. *The mathematics of derivatives securities with applications in MATLAB*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.

CHI, X.; KAI-JIAN, H. Wavelet denoised value at risk estimate. In: IEEE. *2006 International Conference on Management Science and Engineering*. [S.l.], 2006. p. 1552–1557.

CHIANN, C.; MORETTIN, P. A. A wavelet analysis for time series. *Journal of Nonparametric Statistics*, v. 10, n. 1, p. 1–46, 1998.

CHRISTOFFERSEN, P.; JACOBS, K.; ORNTHANALAI, C.; WANG, Y. Option valuation with long-run and short-run volatility components. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 90, n. 3, p. 272–297, 2008.

CONRAD, J.; KAUL, G. An anatomy of trading strategies. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 11, n. 3, p. 489–519, 1998.

- CREAL, D.; KOOPMAN, S. J.; LUCAS, A. Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 28, n. 5, p. 777–795, 2013.
- CREAL, D. D.; TSAY, R. S. High dimensional dynamic stochastic copula models. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 189, n. 2, p. 335–345, 2015.
- DOYLE, J. R.; CHEN, C. H. The wandering weekday effect in major stock markets. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 33, n. 8, p. 1388–1399, 2009.
- EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A.; STRAUMANN, D. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond*, New York, v. 1, p. 176–223, 2002.
- FILHO, O. C. da S.; ZIEGELMANN, F. A.; DUEKER, M. J. Modeling dependence dynamics through copulas with regime switching. *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, v. 50, n. 3, p. 346–356, 2012.
- GALLEGATI, M.; SEMMLER, W. (Ed.). *Wavelet applications in economics and finance*. Switzerland: Springer, 2014.
- GENÇAY, R.; DACOROGNA, M.; MULLER, U. A.; PICTET, O.; OLSEN, R. *An introduction to high-frequency finance*. [S.l.]: Elsevier, 2001.
- GLASSERMAN, P.; HEIDELBERGER, P.; SHAHABUDDIN, P. Portfolio value-at-risk with heavy-tailed risk factors. *Mathematical Finance*, Wiley Online Library, v. 12, n. 3, p. 239–269, 2002.
- GROS, D. The west's covid-19 learning curve. *Project Syndicate*, v. 30, 2020.
- HATHERLEY, A.; ALCOCK, J. Portfolio construction incorporating asymmetric dependence structures: a user's guide. *Accounting & Finance*, Wiley Online Library, v. 47, n. 3, p. 447–472, 2007.
- HAUTSCH, N. *Econometrics of financial high-frequency data*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- JENSEN, M. J.; WHITCHER, B. Measuring the impact intradaily events have on the persistent nature of volatility. In: *Wavelet Applications in Economics and Finance*. New York: Springer, 2014. p. 103–129.
- JOE, H.; XU, J. *The estimation method of inference functions for margins for multivariate models*. Vancouver, 1996. 199-213 p.
- KHALED, M. S.; KEEF, S. P. A note on the turn of the month and year effects in international stock returns. *The European Journal of Finance*, Taylor & Francis, v. 18, n. 6, p. 597–602, 2012.
- KOIJEN, R. S.; RODRIGUEZ, J. C.; SBUELZ, A. Momentum and mean reversion in strategic asset allocation. *Management science*, INFORMS, v. 55, n. 7, p. 1199–1213, 2009.
- KUPIEC, P. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The J. of Derivatives*, v. 3, n. 2, 1995.
- LONGIN, F.; SOLNIK, B. Extreme correlation of international equity markets. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 56, n. 2, p. 649–676, 2001.
- MALLAT, S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Transactions of the American mathematical society*, New York, v. 315, n. 1, p. 69 – 87, 1989.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

- MATLAB. *version 7.10.0 (R2010a)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2010.
- MENDES, B. V. de M. Computing conditional var using time-varying copulas. *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 3, n. 2, p. 251–265, 2005.
- MORETTIN, P. A. *Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2017.
- NELSEN, R. *An introduction to copulas*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2006.
- OH, D. H.; PATTON, A. Modelling dependence in high dimensions with factor copulas. *Working Paper, Duke University*, 2012.
- OH, D. H.; PATTON, A. J. Time-varying systemic risk: Evidence from a dynamic copula model of cds spreads. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 36, n. 2, p. 181–195, 2018.
- PATTON, A. Modeling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, v. 2, n. 47, p. 527–556, 2006.
- PATTON, A. J. On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 130–168, 2004.
- PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. T. *Wavelet methods for time series analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000. v. 4.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2022. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RAMSEY, J. B. Functional representation, approximation, bases and wavelets. In: *Wavelet applications in economics and finance*. Switzerland: Springer, 2014. p. 1–20.
- ROSENBERG, J. V.; SCHUERMAN, T. A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks. *Journal of Financial economics*, Elsevier, v. 79, n. 3, p. 569–614, 2006.
- SALVATIERRA, I. D. L.; PATTON, A. J. Dynamic copula models and high frequency data. *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 30, p. 120–135, 2015.
- SKLAR, M. Fonctions de répartition à n dimensions et 50 leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, v. 8, p. 229–231, 1959.
- SONG, Q.; LIU, J.; SRIBOONCHITTA, S. Risk measurement of stock markets in brics, g7, and g20: vine copulas versus factor copulas. *Mathematics*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 7, n. 3, p. 274, 2019.
- WÓJCIK, D.; IOANNOU, S. Covid-19 and finance: market developments so far and potential impacts on the financial sector and centres. *Tijdschrift voor economische en sociale geografie*, Wiley Online Library, v. 111, n. 3, p. 387–400, 2020.

Apêndice 1

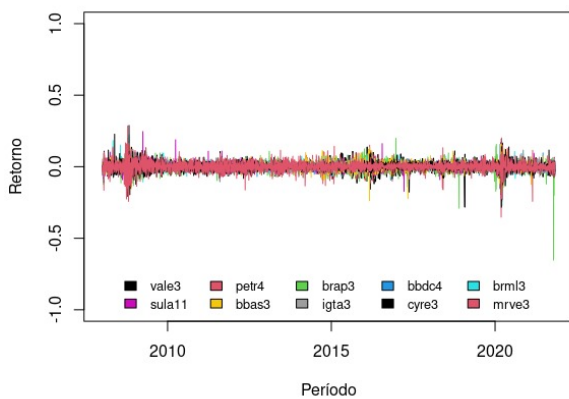


Figura 9: Séries de retornos diários de ações da [B]³ (parte 1)

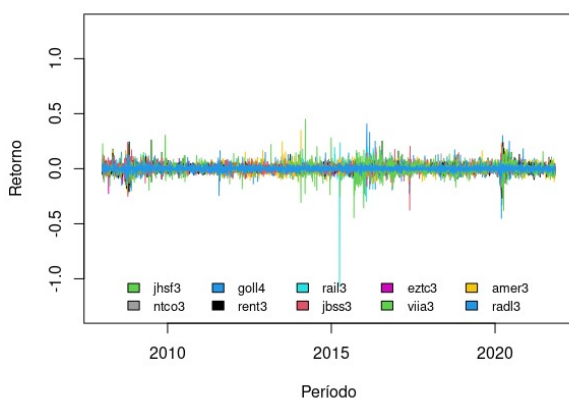


Figura 10: Séries de retornos diários de ações da [B]³ (parte 2)

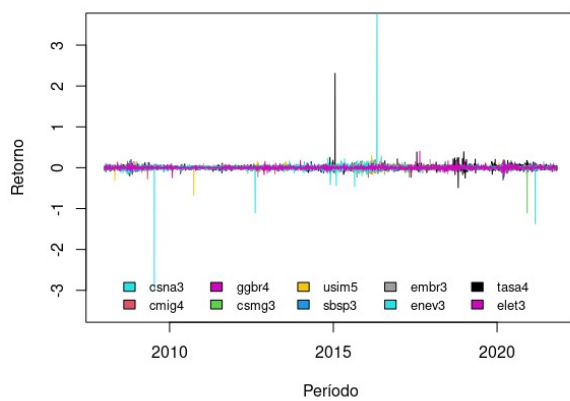


Figura 11: Séries de retornos diários de ações da [B]³ (parte 3)

Tabela 8: Classificação das séries diárias de retornos r_{it} , $i = 1, \dots, 30$

Ticker	Ação	Setor/Segmento de Atuação	Bloco
VALE3	Vale	Mineração e Extração de Óleo e Gás	1
PETR4	Petrobrás	Mineração e Extração de Óleo e Gás	1
BRAP3	Bradespar	Mineração e Extração de Óleo e Gás	1
BBDC4	Bradesco	Financeiro	2
BRML3	brMalls	Financeiro	2
SULA11	Sul América	Financeiro	2
BBSA3	Banco do Brasil	Financeiro	2
IGTA3	Iguatemi	Financeiro	2
CYRE3	Cyrela Real	Construção e Transporte	3
MRVE3	MRV	Construção e Transporte	3
JHSF3	JHSF Part	Construção e Transporte	3
GOLL4	Gol	Construção e Transporte	3
RAIL3	Rumo	Construção e Transporte	3
EZTC3	Eztec	Construção e Transporte	3
AMER3	B2W Digital	Consumo	4
NTCO3	Natura	Consumo	4
RENT3	Localiza	Consumo	4
JBSS3	JBS	Consumo	4
VIAA3	Via Varejo	Consumo	4
RADL3	RaiaDrogasil	Consumo	4
CSNA3	Siderúrgica Nacional	Materiais Básicos e Indústria	5
GGBR4	Gerdau	Materiais Básicos e Indústria	5
USIM5	Usiminas	Materiais Básicos e Indústria	5
EMBR3	Embraer	Materiais Básicos e Indústria	5
TASA4	Tauros	Materiais Básicos e Indústria	5
CMIG4	Cemig	Utilidade Pública	6
CSMG3	Copasa	Utilidade Pública	6
SBSP3	SABESP	Utilidade Pública	6
ENEV3	Eneva	Utilidade Pública	6
ELET3	Eletrobrás	Utilidade Pública	6