

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO  
PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH**

**DANILO MACHADO PIRES**

**2010**

**DANILO MACHADO PIRES**

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PRINCÍPIO DE  
EXTENSÃO DE ZADEH**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras,  
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Sistemas, área de concentração em Modelagem e  
Avaliação de Sistemas, para obtenção do título de “Mestre”.

Orientador

Prof. Onofre Rojas Santos

LAVRAS

MINAS GERAIS-BRASIL

2010

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da  
Biblioteca Central da UFLA**

Pires, Danilo Machado.

Implementação computacional do princípio de extensão de  
Zadeh / Danilo Machado Pires. – Lavras : UFLA, 2010.

59 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2010.

Orientador: Onofre Rojas Santos.

Bibliografia.

1. Lógica fuzzy. 2. Parâmetro incerto. 3. Equação de  
difusão. 4. Termodinâmica fuzzy. I. Universidade Federal de  
Lavras. II. Título.

CDD – 003.3

**DANILO MACHADO PIRES**

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PRINCÍPIO DE  
EXTENSÃO DE ZADEH**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras,  
como parte das exigências do Curso de Mestrado em Engenharia  
de Sistemas, área de concentração em Modelagem e Avaliação  
de Sistemas, para obtenção do título de “Mestre”.

APROVADA em 23 de fevereiro de 2010

Prof. Samuel Maier Kurcbart	UFSJ
Prof. Lucas Monteiro chaves	UFLA
Prof. Onofre Rojas Santos	UFLA

Prof. Onofre Rojas Santos  
UFLA  
(Orientador)

LAVRAS  
MINAS GERAIS-BRASIL

*“A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original”*

*(Albert Einstein)*

*A Deus,*

*A minha família,*

*Aos meus irmãos,*

*Aos meus pais,*

*Aos meus avós,*

*Aos meus amigos,*

***Ofereço.***

*A minha Mãe, Lecy, ao meu pai, Orécio, aos meus irmãos, Daniel e Daniele, aos*

*meus avós, Itacy e Leonides*

***Dedico.***

## AGRADECIMENTOS

Ao longo da vida buscamos superar obstáculos, conquistar vitórias e realizar sonhos, mas sozinhos nada realizamos. Durante nossa caminhada, contamos com a colaboração, apoio, incentivo, compreensão e torcida de várias pessoas, às quais seremos eternamente gratos.

Agradeço aos professores por sua contribuição fundamental em minha formação e sem a qual eu não poderia se quer, almejar essa conquista.

Aos meus orientadores Onofre Rojas e Sérgio Martins, pela ajuda, pelo empenho e, especialmente, pela paciência. Mais do que mestres foram meus amigos, cujas lições de vida, profissionalismo e amizade, levarei comigo.

À banca examinadora, composta por Solange Gomes Faria Martins, Samuel Maier Kurcbarat e Lucas Monteiro Chaves que aceitaram o convite que lhes foi feito e, dessa forma, colaboraram para a conclusão deste projeto.

Ao professor Júlio Sílvio de Sousa Bueno Filho e à professora Iraziet Charret, pelos livros emprestados, pela ajuda nas disciplinas e na correção da dissertação.

A todos os amigos de Paracatu e, em especial aos meus amigos Max José, Leandro Silva, Robson Araújo e Danilo Salgado com quem sempre pude contar, e no momento em que mais precisei deixaram de ser meus amigos para serem meus irmãos, ajudando-me a superar mais um obstáculo.

Aos amigos que fiz em Lavras, que compartilharam comigo momentos que serão lembrados com nostalgia pelo resto da minha vida, em especial a Crysttian Arantes Paixão, um grande amigo que me ajudou em um momento de grande dificuldade e continua ajudando; cuja contribuição para a realização deste trabalho foi muito importante, senão fundamental.

A Christiane Faleiro Sidney, por ter me acolhido com muito amor e carinho a todo instante, por estar comigo nos momentos de dificuldade e por ser a responsável por muitos dos melhores momentos da minha vida.

“ *Mesmo antes de nascer, já tinha alguém torcendo por você...*” declarou Carlos Drummond de Andrade ao se referir a nossa família, pessoas que não escolhemos conhecer, mais estamos destinados a amar.

Assim agradeço a minha avó, Itaci, pelas orações dispensadas a mim, pela torcida, por estar sempre presente e por ser um exemplo a ser seguido.

Ao meu avô, Leonides, (*in memorian*), a quem sempre considerei um segundo pai, cujos conselhos foram vitais para minha formação.

A minha tia, Fausta, por todo apoio e carinho.

A minha irmã Daniele, e ao meu irmão Daniel, pela amizade, confiança e força nas minhas realizações. Pela torcida, pelo apoio e por serem essas pessoas especiais das quais tenho enorme orgulho e admiração. Agradeço por sempre estarem a meu lado.

Agradeço a minha mãe, Lecy, que lutou por toda a vida para que eu trilhasse meu caminho. Agradeço por sua paciência, pelo incentivo, por todo apoio e dedicação demonstrados ao primar pelo bem estar e educação dos seus filhos, mesmo que seja ao custo do seu próprio bem estar, e principalmente por acreditar em mim, dando-me coragem para que pudesse lutar por meus sonhos.

Em especial, agradeço ao meu pai Orécio Franscico Pires (*in memorian*), pelo exemplo de caráter, honestidade e sabedoria. Por sempre ter estado ao meu lado nos momentos de alegria e de tristeza, por ter proporcionado a mim e toda a minha família uma vida digna e honrada. Agradeço por todo investimento feito em mim, por compartilhar meus problemas e comemorar minhas conquistas, pelos conselhos e ensinamentos que considero vitais para minha formação. Por sempre

ter estado pronto a me ajudar em qualquer dificuldade e nunca ter me desamparado, por comemorar comigo as vitórias, e não me deixar abater pelas derrotas. Por motivos que só Deus pode explicar, não está mais entre nós, mais sei que em espírito comemora comigo mais essa realização.

Agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior), pelas bolsas concedidas para auxiliar no desenvolvimento deste projeto.

Aos funcionários dos departamentos onde desenvolvi minhas atividades, pelo auxílio, ajuda e apoio.

Ao Departamento de Engenharia, pela oportunidade no curso de Mestrado em Engenharia de Sistemas, possibilitando a realização desse trabalho.

Ao Departamento de Ciências Exatas, que através de sua estrutura, disciplinas e professores, também contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

À Universidade Federal de Lavras, pela estrutura e oportunidade de desenvolver esse projeto.

Meus sinceros agradecimentos a todos participaram desta fase importante da minha vida.

A Deus, pela inspiração, pela força, pelos momentos concedidos para fazer com que essa vitória pudesse ser valorizada, eu agradeço eternamente.

## SUMÁRIO

RESUMO . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	ii
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 LÓGICA FUZZY . . . . .	4
2.1 Conjuntos Fuzzy . . . . .	6
2.2 Operações lógicas com conjuntos <i>fuzzy</i> . . . . .	10
2.3 Princípio de Extensão de <i>Zadeh</i> . . . . .	12
2.4 Números <i>fuzzy</i> . . . . .	14
2.4.1 Operações aritméticas com números <i>fuzzy</i> . . . . .	15
2.5 Inferência Fuzzy . . . . .	17
2.6 Lógica Fuzzy na Física . . . . .	19
2.7 Implementação Computacional do Princípio de Extensão . . . . .	19
3 APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DE EXTENSÃO . . . . .	27
3.1 Aplicação do princípio de extensão a equação de Difusão . . . . .	27
3.2 Aplicação da lógica <i>fuzzy</i> a grandezas termodinâmicas . . . . .	39
4 CONCLUSÃO . . . . .	55
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	57

## LISTA DE FIGURAS

1	Conjuntos crisps versus <i>fuzzy</i> . . . . .	5
2	Tipos de funções de pertinência. . . . .	9
3	Interseção de Conjuntos <i>fuzzy</i> $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ . . . . .	10
4	União de Conjuntos <i>fuzzy</i> $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ . . . . .	11
5	Conjunto Complementar <i>fuzzy</i> ( Ortega, 2001). . . . .	11
6	$\alpha$ -nível. . . . .	12
7	Princípio de Extensão. . . . .	14
8	Somadas dos números <i>fuzzy</i> A e B. . . . .	17
9	Função pertinência Triangular. . . . .	20
10	Diferentes funções triangulares. . . . .	21
11	Conjuntos <i>fuzzy</i> mapeados com N=5 e N=9, respectivamente. . . . .	22
12	$f(x) = \text{sen}(x.d)$ com <i>d fuzzy</i> sem operação dos máximos. . . . .	23
13	$f(x) = \text{sen}(x.d)$ com <i>d fuzzy</i> após operação dos máximos. . . . .	24
14	$f(x) = \text{sen}(x.d)$ com <i>d fuzzy</i> sem operação dos máximos. . . . .	25
15	$f(x) = \text{sen}(x.d)$ com <i>d fuzzy</i> após operação dos máximos. . . . .	25
16	$f(x) = \text{sen}(x.d)$ com parâmetro $d=1$ (clássico), e $f(x)$ com parâmetro $d = \text{"próximo"}$ de 1 após a defuzzificação. . . . .	26
17	Fluxo de calor através da seção transversal (área rachurada) de uma haste delgada. . . . .	29
18	Temperatura em função da posição na haste, em diversos instantes para $\gamma = 1$ . . . . .	31
19	Temperatura em função do tempo em diferentes pontos $\gamma = 1$ . . . . .	32
20	Gráfico da temperatura $u(x, t)$ em função de $x$ e $t$ , para $\gamma = 1$ . . . . .	32
21	Temperatura em função do tempo em determinados pontos, para $\gamma = 0.5, \gamma = 1$ e $\gamma = 1.5$ . . . . .	34

22	Temperatura em função da posição na haste, em diversos instantes para $\gamma = 0.5$ , $\gamma = 1$ e $\gamma = 1.5$ . . . . .	34
23	Solução da equação de ‘difusão <i>fuzzy</i> ’ com parâmetro $\gamma =$ ”próximo de 1” com $\alpha_s = 0.5$ . . . . .	36
24	Imagem tridimensional dos gráficos da Figura 23. . . . .	37
25	Solução da equação de ‘difusão <i>fuzzy</i> ’ com parâmetro $\gamma =$ ”próximo de 1” com $\alpha_s = 0.2$ . . . . .	37
26	Diferença percentual da temperatura em função do tempo no ponto $x = 0.8$ , para $\alpha_s = 0.5$ e $\alpha_s = 0.2$ . . . . .	38
27	Sistema Ladder com ligações do Tipo Ising. . . . .	40
28	Energia Livre <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ ”próximo”de 0, para $\alpha_s = 0.35$ . . . . .	42
29	Energia Livre <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ ”próximo”de 0, para $\alpha_s = 0.15$ . . . . .	43
30	Energia Livre <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ ”próximo”de 0, para $\alpha_s = 0.05$ . . . . .	43
31	Energias Livres <i>fuzzy</i> obtidas após os processos de defuzzificação para cada $\alpha_s$ utilizado, e a Energia Livre clássica( Crisp). . . . .	44
32	Energias Livres <i>fuzzy</i> observadas em uma escala menor. . . . .	44
33	Diferença percentual das Energias livres obtidas com valores de $\alpha_s$ diferentes, em função da temperatura. . . . .	45
34	Energia Média <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ ”próximo”de 0, para $\alpha_s = 0.35$ . . . . .	46
35	Energia Média <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ ”próximo”de 0, para $\alpha_s = 0.15$ . . . . .	46

36	Energia Média <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ "próximo"de 0, para $\alpha_s = 0.05$ . . . . .	47
37	Energias Médias <i>fuzzy</i> obtidas após o processo de defuzzificação para cada $\alpha_s$ utilizado, e a Energia Média clássica (crisp). . . . .	47
38	Energias Médias <i>fuzzy</i> observadas em uma escala menor. . . . .	48
39	Diferença percentual entre Energias Médias defuzzificadas com valores de $\alpha_s$ diferentes e a clássica, em função da temperatura. . . . .	48
40	Entropia <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ "próximo"de 0, para $\alpha_s = 0.35$ . . . . .	49
41	Entropia <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ "próximo"de 0, para $\alpha_s = 0.15$ . . . . .	49
42	Entropia <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ "próximo"de 0, para $\alpha_s = 0.05$ . . . . .	50
43	Entropias <i>fuzzy</i> obtidas após o processo de defuzzificação para cada $\alpha_s$ utilizado e a Entropia clássica(crisp). . . . .	50
44	Entropias <i>fuzzy</i> observadas em uma escala menor. . . . .	51
45	Diferença percentual das Entropias obtidas com valores de $\alpha_s$ diferentes, em função da temperatura. . . . .	51
46	Calor Específico <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ "próximo"de 0, para $\alpha_s = 0.35$ . . . . .	52
47	Calor Específico <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ "próximo"de 0, para $\alpha_s = 0.15$ . . . . .	52
48	Calor específico <i>fuzzy</i> com $J = 1$ e $J' =$ "próximo"de 0, para $\alpha_s = 0.05$ . . . . .	53
49	Calores Específicos <i>fuzzy</i> obtidos após o processo de defuzzificação para cada $\alpha_s$ utilizado e o Calor específico clássico( Crisp). . . . .	53
50	Calores específicos <i>fuzzy</i> observados em uma escala menor. . . . .	54
51	Diferença percentual Calores específicos com valores de $\alpha_s$ diferentes, em função da temperatura. . . . .	54

## LISTA DE TABELAS

1	Operações aritméticas com números <i>fuzzy</i> baseado no princípio de extensão. . . . .	16
---	--	----

## RESUMO

PIRES, Danilo Machado. **Implementação computacional de princípio de extensão de Zadeh**. 2010. 59 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

Neste trabalho, será apresentada uma metodologia computacional que permite aplicar a lógica fuzzy a funções matemáticas gerais, por meio do princípio de Extensão de Zadeh. Este princípio é utilizado para estender os conceitos da teoria clássica para a teoria dos conjuntos fuzzy, que permite tratar expressões matemáticas com acréscimo de incerteza em seus parâmetros. As funções testadas estão relacionadas a processos físicos com diferentes propriedades. Desta forma, ao final da implementação, há condições de avaliar o comportamento das funções mediante o acréscimo de incerteza em seus parâmetros. Logo em seguida, confrontam-se estes resultados com os resultados clássicos, permitindo uma nova opção de análise destas funções.

**Palavras-chave:** Lógica fuzzy, Parâmetro incerto, Equação de difusão, Termodinâmica *fuzzy*.

## ABSTRACT

PIRES, Danilo Machado **Computational impementation of Zadeh's extension principle**. 2010. 59 p. Dissertation (Master in Systems Engineering) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.\*

In this work it will be presented a computational method, that allows to apply the fuzzy logic to the general mathematical functions, through the extension principle. This principle is used to extend the concepts of the classical theory for the theory of the fuzzy sets, that allow to treat mathematical expressions including uncertain quantity in their parameters. The tested functions are related to the physical processes with different properties. In this sense, at the end of implementation, there are enough condition to evaluate the behaviour of the function through the uncertain parameters. Finally is compared the classical results with their fuzzy results, giving a new option to analyse this kind of functions.

**Keywords:** Fuzzy Logics, Uncertain parameter, Diffusion equation, thermodynamics.

---

Guidance Committee: Onofre Rojas Santos - UFLA (Major Professor), Sérgio Martins de Souza - UFLA

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos séculos, o avanço matemático vem possibilitando por meio de diversas ferramentas, a modelagem e simulação de vários fenômenos do mundo real.

A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar, entender; enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.

A busca de ferramentas capazes de auxiliar a modelagem de fenômenos do mundo real teve um grande avanço no século XVII. Pela primeira vez, foram usadas equações diferenciais para descrever os fenômenos reais. A linguagem oferecida pelas equações diferenciais é fundamental para o entendimento da linguagem “natural”, uma vez que a palavra-chave variação aparece quase sempre em situações reais.

Mas somente no século XVIII, com Lagrange, as equações diferenciais foram vistas como ferramentas fundamentais, uma vez que ele foi o primeiro a dispor de conhecimento teórico e ferramentas suficientes para ser considerado um verdadeiro analista de equações diferenciais (Bassanezi & Ferreira Júnior, 1998). Desde então, essas equações passaram a ser as principais ferramentas matemáticas usadas por diversos ramos da ciência, como é o caso da engenharia de sistemas, que é um campo interdisciplinar da engenharia, cujo objetivo é o desenvolvimento e organização de sistemas complexos.

A exigência de se construir modelos que descrevam sistemas reais por vezes leva o engenheiro de sistemas a situações desconfortáveis, pois um problema real não pode ser representado de maneira exata e em toda sua complexidade por uma equação matemática ou um sistema de equações. Assim, ele é obrigado a selecionar variáveis definidas por ele como essenciais para caracterizar o fenômeno

observado, para que, através de um modelo matemático, simular tal fenômeno e conseguir soluções próximas daquelas observadas na realidade.

Embora o processo de simulação tenha sido aprimorado com o advento dos computadores, que possibilitaram aproximações numéricas antes impossíveis devido à alta demanda de cálculos, ainda existem situações que mesmo os computadores mais modernos não são suficientes para uma solução completa, pois não só na resolução do problema pode haver dificuldades, mas também na elaboração e análise do modelo.

Uma categoria de equações extremamente importantes para a engenharia e que geralmente se enquadra nessa situação de complexidade, é composta por aquelas que descrevem processos de difusão, que são processos de propagação presente na natureza. Devido ao amplo espectro de aplicações, são intensamente estudadas por várias áreas do conhecimento. Sua análise geralmente é um desafio conforme a complexidade aumenta, pois elas são equações diferenciais agregadas de parâmetros cuja obtenção tanto do ponto de vista macroscópico quanto microscópico é carregada de incertezas. Em geral, essas incertezas são devidas à dificuldades de quantificação desses parâmetros. Isso tem influência direta no resultado dessas equações.

De uma forma geral, o processo de modelagem de um sistema real por um modelo matemático passa pelas etapas de estudo do fenômeno de forma qualitativa, explicação de forma quantitativa, por meio de equações que visam descrever matematicamente a experiência, previsões que possam ser verificadas através de outras experiências. Todo esse processo de elaboração dá margem a situações de imprecisão, principalmente quanto ao tratamento de problemas qualitativos de forma quantitativa, uma vez que diversos elementos desses modelos são grandezas que têm seus valores estabelecidos através de processos com certo grau de in-

certeza.

Em vista do exposto, a motivação deste trabalho baseou-se na utilização de uma técnica flexível, de fácil compreensão, capaz de lidar com situações de imprecisão de maneira formal e consistente. Uma alternativa é o uso da lógica *fuzzy*, uma vez que os parâmetros podem ser tratados como variáveis *fuzzy*. Os parâmetros que antes eram tratados como clássicos, podem ser incluídos nas funções de pertinência dos conjuntos *fuzzy*, permitindo assim uma nova análise dos resultados obtidos pelo modelo. Outras características que motivam a aplicação da lógica *fuzzy* estão relacionadas à flexibilidade da técnica, a facilidade de compreensão dos conceitos e o fato de que para considerar as incertezas e ambigüidades existentes nos problemas de engenharia, a lógica *fuzzy* tem provado ser uma ferramenta efetiva quanto a considerar o impreciso (Klir & Yuan, 1995; Tanaka, 1997).

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia computacional que permita aplicar o princípio de extensão a funções matemáticas gerais, de forma a permitir uma análise dessas funções acrescidas de incertezas em seus parâmetros, e assim avaliar o grau de conformidade entre os valores obtidos pelo modelo *fuzzy* e os valores obtidos pelos modelos clássicos; verificando a viabilidade do modelo *fuzzy* em relação aos modelos clássicos já consagrados.

Para validar a nossa metodologia de implementação do Princípio de Extensão, usaremos um conjunto de funções relacionadas a processos físicos com diferentes propriedades, como a difusão de calor ao longo de uma haste delgada sujeita à incerteza no coeficiente de difusão e à “termodinâmica *fuzzy*” de uma Ladder com interações tipo Ising. Devo ressaltar que “termodinâmica *fuzzy*” é a termodinâmica considerando o parâmetro das grandezas como incertos.

## 2 LÓGICA FUZZY

A lógica *fuzzy* é uma teoria matemática que combina conceitos matemáticos a inteligência computacional para que se possa representar o pensamento humano. Foi criada por *Lofti Zadeh*, professor de Engenharia e Ciência da Computação da Universidade da Califórnia, e pode ser entendida como uma generalização da lógica booleana, que admite infinitos valores lógicos entre a falsidade e a verdade. Ela possibilita tratar de um modo mais adequado expressões verbais, imprecisas e qualitativas que são inerentes da comunicação humana.

A lógica criada por *Zadeh* pode sistematicamente traduzir os termos difusos da comunicação humana em valores compreensíveis por computadores. Já a lógica clássica possui uma fragilidade ao lidar com situações rodeadas de imprecisão, pois utiliza o conceito binário do princípio da não contradição em que só são aceitos dois valores, verdadeiro ou falso, não permitindo que ao mesmo tempo uma declaração seja parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa. Para lidar com isso de forma matemática, a lógica *fuzzy*, é uma lógica em que o enfoque em relação aos valores foi modificado de forma a permitir tratar matematicamente os níveis de incerteza e ambigüidade (*Zadeh*, 1965).

O conceito de dualidade que estabelecendo que algo pode e deve coexistir com seu oposto faz a lógica *fuzzy* parecer natural, até mesmo inevitável.

Para *Nagamine* (2001), a proposta de um modelo *fuzzy* é capturar o funcionamento de um sistema, cuja construção podendo ser vista como um processo em que uma coleção de objetos chamados variáveis ou parâmetros do modelo, que carregam as características do modelo, são relacionados a outros objetos ditos conectivos ou operadores do modelo.

Dois grupos de modelos são distinguidos pelo tipo de conectivo que usam no seu processo de modelagem. No primeiro grupo, estão os modelos lógicos

que usam conectivos do tipo lógico, tais como E, OU e SE-ENTÃO. No segundo grupo, estão representados os modelos matemáticos que fazem uso de operações aritméticas e são conhecidas como clássicos ou ‘crisps’.

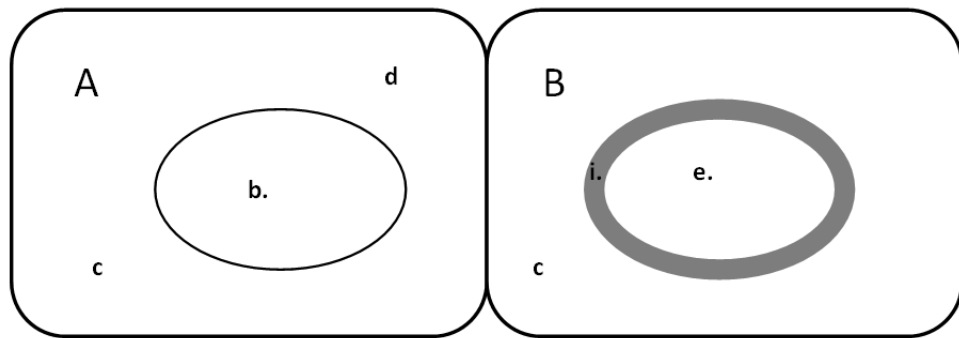


FIGURA 1 Conjuntos crisps versus *fuzzy*.

A Figura 1 ilustra a diferença entre os conjuntos clássicos e *fuzzy*. Ao observá-la vimos que no conjunto ‘crisps’ (clássicos) as únicas possibilidades para um elemento são pertencer (elemento b) e não pertencer (elementos ‘d’ e ‘c’) ao conjunto A. Já no caso de um conjunto *fuzzy*, as fronteiras do conjunto B são mais suaves, o que possibilita que um elemento pertença parcialmente ao conjunto (elemento i).

A lógica *fuzzy* ou difusa como também é conhecida, vem tornando possível, cada vez mais, aproximar a máquina do raciocínio humano. E propondo soluções cada vez mais realistas para problemas que antes só o cérebro humano era capaz de interpretar e resolver. Ela vem se consagrando com diversas novas aplicações surgindo a cada dia. Seu grande potencial para tratar problemas considerando incertezas de forma sistemática, é um dos grandes responsáveis pela sua popularidade.

A incerteza é vista pela lógica *fuzzy* não como uma variabilidade, que corresponde a variação inerente ao sistema físico a ser modelado onde os valores dentro de um intervalo são conhecidos e as variações ocorrem por fatores também conhecidos. Por outro lado ela é entendida como uma potencial deficiência em algumas fases da modelagem de um sistema, consequência da falta de conhecimento causada por informações incompletas devido, por exemplo, às evidências conflitantes que descrevem o mesmo fenômeno.

Essa nova técnica tem sido apresentada na literatura como uma das tecnologias de inteligência computacional, efetivamente resolvendo com sucesso certas classes de problemas devido a sua propriedade de extração (representação) de informações vagas e a sua capacidade de realizar inferências, via processamento lingüístico. Isso faz com que a lógica *fuzzy* também tenha encontrado grandes aplicações em áreas como: sistemas especialistas, computação com palavras, raciocínio aproximado, linguagem natural, controle de processos, robótica, modelagem de sistemas parcialmente abertos, reconhecimento de padrões, processos de tomada de decisão (decision making), dentre outras.

Nas próximas seções, daremos início à apresentação de alguns conceitos da teoria *fuzzy* que são fundamentais para um melhor entendimento da mesma.

## **2.1 Conjuntos Fuzzy**

Os conjuntos da teoria clássica ou conjuntos ordinários, também chamados de “crisps”, são rígidos. Um determinado elemento pertence ao conjunto se satisfaz totalmente suas características, seguindo o princípio da não contradição. Caso contrário, está fora do conjunto. Esses conjuntos são definidos por funções características.

Dado um conjunto  $A$  em um universo  $X$ , os elementos deste universo sim-

plesmente pertencem ou não pertencem àqueles conjuntos. Isto pode ser expresso pela função característica  $f_A(x)$ :

$$f_A(x) = \begin{cases} 1; & \text{se } x \in A \\ 0; & \text{se } x \notin A. \end{cases} \quad (1)$$

Por sua vez, os conjuntos *fuzzy* são caracterizados por funções de pertinência (membership functions) de cada elemento ao conjunto.

Zadeh (1965) propôs uma caracterização mais ampla, generalizando a função característica de modo que ela pudesse assumir um número infinito de valores no intervalo  $[0,1]$ . Ele introduziu os conjuntos *fuzzy* com a principal intenção de dar tratamento matemático a certos termos lingüísticos subjetivos, como “aproximadamente”, “em torno de”, dentre outros.

Um conjunto *fuzzy*  $A$  em um universo  $X$  contínuo ou discreto é definido por uma função de pertinência dada por:

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]. \quad (2)$$

Onde  $\mu_A(x)$  indica o quanto  $x$  é compatível com o conjunto  $A$  (Klir & Yuan, 1995; Tanaka, 1997).

A proposta de Zadeh (1965) foi flexibilizar a pertinência de elementos aos conjuntos, criando a idéia de grau de pertinência. Assim, um elemento poderia pertencer parcialmente a um dado conjunto.

O conjunto *fuzzy* é representado por um conjunto de pares ordenados do tipo:

$$A = \{\mu_A(x)/x\}, x \in X. \quad (3)$$

Onde o conjunto *fuzzy* ‘ $A$ ’ é formado por todos os elementos de  $X$  e suas

respectivas pertinências. De uma forma geral, os elementos que têm pertinência zero não pertencem ao conjunto ‘A’ e portanto limitamos o seu conjunto suporte a todos os elementos que têm pertinência acima de zero .

Se o universo for discreto e finito, o conjunto é normalmente representado por meio da seguinte notação.

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x. \quad (4)$$

Se o universo X for contínuo, emprega-se muitas vezes a notação:

$$A = \int \mu_A(x)/x. \quad (5)$$

O símbolo “/” é apenas um separador entre a função *fuzzy* e a variável  $x$  e os símbolos  $\sum$  e  $\int$  são usados para representar a operação de união lógica, não representam, todavia os operadores de somatório e de integração no senso comum. Para conjuntos *fuzzy*, a definição só estará completa com o conhecimento do grau de pertinência de cada elemento.

Quanto mais perto de 1 for o  $\mu_A(x)$ , maior o grau de pertinência do elemento  $x$  com o conjunto. Um determinado elemento pode pertencer a mais de um conjunto *fuzzy* com diferentes graus de pertinência.

Dessa forma conseguimos tratar as variáveis lingüísticas que são representadas por um ou mais conjuntos *fuzzy* ordenados conforme sua relevância.

Assim como as funções de pertinência, as variáveis lingüísticas podem ser definidas a partir da experiência e da perspectiva de um especialista no fenômeno analisado, por meio de métodos de agrupamentos, sendo também comum o uso de funções de pertinência padrão.

Na literatura (Gomide & Pedrycz, 1998). As principais funções de perti-

nência utilizadas são: triangulares, trapezoidais, Gaussianas ( Figura 2).

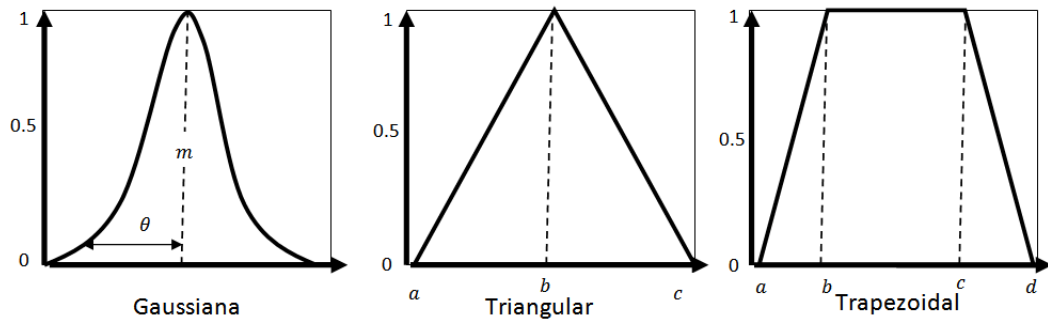


FIGURA 2 Tipos de funções de pertinência.

As formas básicas e as representações de cada uma destas funções são apresentadas a seguir (ver funções 6, 7 e 8) e Figura 2.

- Função Triangular:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0; & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}; & \text{se } x \in [a, b] \\ \frac{c-x}{c-b}; & \text{se } x \in [b, c] \\ 0; & \text{se } x \geq c. \end{cases} \quad (6)$$

- Função Trapezoidal:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0; & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}; & \text{se } x \in [a, b] \\ 1; & \text{se } x \in [b, c] \\ \frac{c-x}{c-b}; & \text{se } x \in [c, d] \\ 0; & \text{se } x \geq d. \end{cases} \quad (7)$$

- Função Gaussiana:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} e^{-\theta(x-m)^2}; & \text{se } \theta > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Onde  $\theta$  representa o desvio padrão dos dados e  $m$ , a média.

## 2.2 Operações lógicas com conjuntos *fuzzy*

A exemplo das operações com conjuntos clássicos, os conjuntos *fuzzy* realizam operações de união, interseção e complementar.

Embora a interseção (Figura 3) e a união (Figura 4) possam ser descritas também por meio de outros operadores, *Zadeh* estendeu a descrição com operadores  $\min(\wedge)$  e  $\max(\vee)$  para representação de interseção e união *fuzzy*.

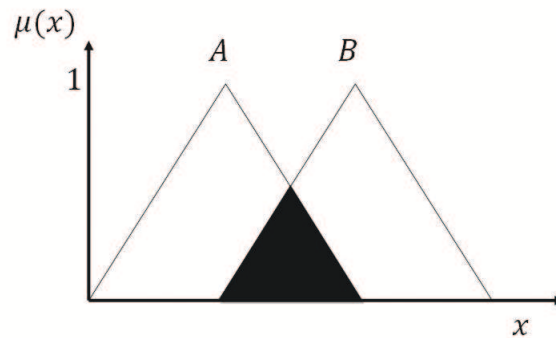


FIGURA 3 Interseção de Conjuntos *fuzzy*  $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ .

Na interseção de dois conjuntos *fuzzy*, caracterizados por duas funções de pertinência (Figura 3), a nova função de pertinência toma o mínimo valor entre as funções dos dois conjuntos,  $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$  para todo  $x$ . Já na operação de união (Figura 4), o valor tomado para formar a nova função de pertinência é o valor máximo entre as funções de pertinência,  $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$  para todo  $x$  (Tanaka, 1997).

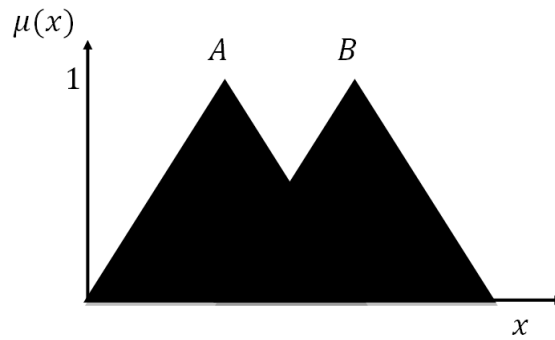


FIGURA 4 União de Conjuntos *fuzzy*  $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ .

O valor da função de pertinência na operação de complemento é  $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ , para todo  $x$ , como pode ser observado na Figura 5.

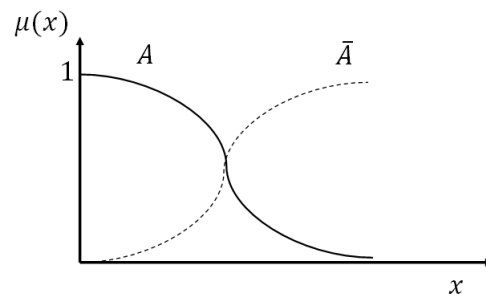


FIGURA 5 Conjunto Complementar *fuzzy*( Ortega, 2001).

As definições referentes à estrutura dos conjuntos é relevante para o entendimento dos conjuntos *fuzzy* e suas operações, as definições referentes à estrutura dos conjuntos (Ortega, 2001; Jafelice et al., 2008).

**Definição 2.1** O conjunto suporte,  $\text{supp}(A)$  ou  $S(A)$  de um conjunto *fuzzy*  $A$  é o conjunto clássico de todos os elementos  $x \in U$ , cuja função de pertinência tem valor diferente de zero.

$$S(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (9)$$

**Definição 2.2** Seja um conjunto *fuzzy* A de U e  $\alpha \in [0, 1]$ . O  $\alpha$ -nível de A é o subconjunto clássico de U definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \mu_A \geq \alpha\}. \quad (10)$$

para  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Assim, fica válida a relação  $[A]^0 = S(A)$ . Na Figura (6), temos uma exemplo de um  $\alpha$ -nível dentro de um conjunto *fuzzy* A.

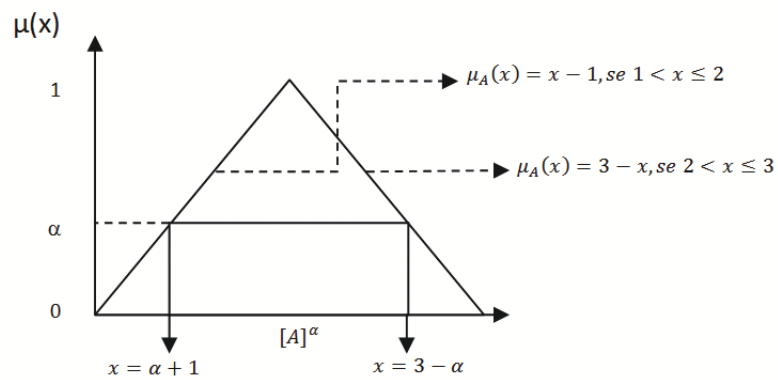


FIGURA 6  $\alpha$ -nível.

### 2.3 Princípio de Extensão de Zadeh

Em muitas situações, sistemas do mundo real precisam manipular dados quantitativos de forma imprecisa. Uma solução para isso é o princípio de extensão de Zadeh que, como ferramenta, é indispensável para a estruturação matemática quando se modelam fenômenos envolvendo incertezas.

Essencialmente, o princípio de extensão é utilizado para obter a imagem de conjuntos *fuzzy* através de uma função clássica, pois estender os conceitos da teoria de conjuntos clássicos para a teoria de conjuntos *fuzzy* é uma necessidade constante, quando se pretende utilizá-los em modelos matemáticos clássicos (Barros, 1997; Jafelice, 2004).

Jafelice (2004) define o princípio da extensão da seguinte forma:

“O grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré-imagem.

Quando um valor do contradomínio é mapeado por vários valores do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo *sup* dos graus de pertinência dos valores da entrada.”

Sejam  $X$  e  $Y$  dois universos de discurso distintos e seja  $f$  uma função de  $X$  em  $Y$ , portanto,  $f : X \rightarrow Y$  tal que para cada  $x \in X$ ,  $f(x) = y \in Y$ . Seja  $A$  um conjunto *fuzzy* em  $X$ , a imagem de  $A$  pela função  $f(x)$  é um conjunto  $B = f(A)$  em  $Y$ , cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x). \quad (11)$$

Como podemos verificar na Figura (7).

O princípio de extensão pode ser facilmente generalizado para funções de muitas variáveis. Sejam  $A$  e  $B$  dois intervalos de  $\mathfrak{R}$  e  $\oplus$ , uma das operações aritméticas entre números reais, Então:

$$\mu(A \oplus B)(x) = \sup_{\{(y,z):y \oplus z = x\}} (\min[\mu_A(y), \mu_B(z)]). \quad (12)$$

Pode-se dizer que o princípio de extensão permite “estender” qualquer operação pontual para operações envolvendo conjuntos *fuzzy*.

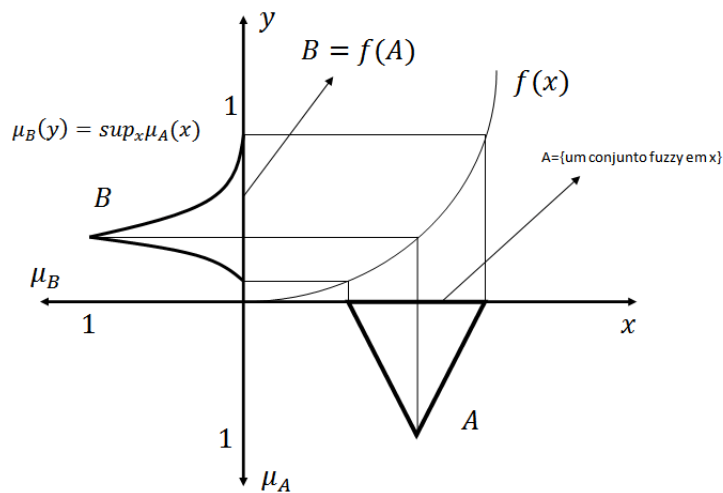


FIGURA 7 Princípio de Extensão.

## 2.4 Números fuzzy

De um modo geral, em problemas concretos, muitos números são idealizados a partir de informações imprecisas, envolvendo valores numéricos. Esses números que contêm uma carga de imprecisão podem ser tratados de acordo com a lógica *fuzzy*, como números *fuzzy*.

Os conjuntos dos números *fuzzy* têm um significado especial. Assim, como no caso clássico, estes conjuntos foram construídos com o objetivo de fazer contas. A diferença é que aqui se pretende calcular quantidades imprecisas (Klir & Yuan, 1995).

Um conjunto *fuzzy*  $A$  é chamado número *fuzzy* quando o conjunto universo  $X$ , onde  $A$  está definido, é o conjunto dos números reais  $\Re$  e a função de pertinência  $\mu_A : \Re \rightarrow [0, 1]$  é tal que:

- $\mu_A(x)$  é normal. É importante salientar que o termo “normal” utilizado na teoria de conjuntos fuzzy diz respeito àqueles conjuntos onde existe pelo

menos um valor que atinge a pertinência máxima 1;

- $[A]^\alpha$  é um intervalo fechado,  $\forall \alpha \in (0, 1]$ ;
- O suporte de  $A$  é limitado.

Assim, observa-se que todo número real  $r$  é um caso particular de número *fuzzy*, cuja função de pertinência é sua função característica (*Fuzzy singleton*).

$$\mu_r(x) = \begin{cases} 1; & \text{se } x \in A \\ 0; & \text{se } x \notin A. \end{cases} \quad (13)$$

Conclui-se que os números *fuzzy* são conjuntos *fuzzy* com a especificidade de ter seus cálculos aritméticos facilitados.

#### 2.4.1 Operações aritméticas com números *fuzzy*

Operações aritméticas podem ser vistas como casos particulares do princípio de extensão, tanto para funções de uma como de duas variáveis.

A operação binária dos números reais pode ser estendida para números *fuzzy*  $A$  e  $B$  no universo  $X$ , como

$$\mu_{A \odot B}(z) = \sup_{x \odot y} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]. \quad (14)$$

Que reescrita, usando a nomenclatura aplicada a conjuntos *fuzzy*, resulta em

$$A \odot B(z) = \int_{X \times X} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] / (x \times y), \quad (15)$$

onde  $z = x \odot y$  e  $x, y, z \in X$ .

A operação binária  $\odot$ , pode ser qualquer uma das operações aritméticas vistas na Tabela 1.

TABELA 1 Operações aritméticas com números *fuzzy* baseado no princípio de extensão.

Operação	Definição
Adição	$\mu(A + B)(Z) = \sup \min_{(x,y):x+y=z} [\mu_A(x), \mu_B(y)]$
Subtração	$\mu(A - B)(Z) = \sup \min_{(x,y):x-y=z} [\mu_A(x), \mu_B(y)]$
Multiplicação	$\mu(A.B)(Z) = \sup \min_{(x,y):x.y=z} [\mu_A(x), \mu_B(y)]$
Divisão	$\mu(A/B)(Z) = \sup \min_{(x,y):x/y=z} [\mu_A(x), \mu_B(y)]$
Multiplicação por escalar $\Omega$	$\mu_{\Omega.A}(Z) = \sup [\mu_A(x)]_{\{x:\Omega x=z\}} = \begin{cases} \mu_A(\Omega^{-1}z); & \text{se } \Omega \neq 0 \\ 0; & \text{se } \Omega = 0 \end{cases}$

Ex.: Seja  $f : \Re \times \Re \rightarrow \Re$  a função dada por  $f(x, y) = x + y$ .

Considere dois números *fuzzy*  $C$  em  $X$  e  $D$  em  $Y$  :

$$C(x) = 0.3/1 + 0.6/2 + 0.9/3 + 1/4 + 0.9/5 + 0.6/6 + 0.3/7 + 0/8.$$

$$D(y) = 0/6 + 0.4/7 + 0.8/8 + 1/9 + 0.2/10.$$

Desejamos efetuar a operação aritmética soma entre  $C$  e  $D$ . Começaremos encontrando o grau de pertinência de  $f(x, y) = 8$ . A partir da operação de adição dada na Tabela 1, obtemos:

$$\mu_{f(A+B)}(8) = \sup \min_{\{(x,y):x+y=8\}} [\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

$$\mu_{f(A+B)}(8) = \max\{\min[\mu_C(1), \mu_D(7)]; \min[\mu_C(2), \mu_D(6)]\}$$

$$\mu_{f(A+B)}(8) = \max\{0.3; 0\} = 0.3$$

E assim sucessivamente para todos os resultados de  $f(x, y) = x + y$ .

Portanto:

$$C + D = 0/7 + 0.3/8 + 0.4/9 + 0.6/10 + 0.8/11 + 0.9/12 + 1/13 + 0.9/14 + 0.6/15 + 0.3/16 + 0.2/17 + 0/18.$$

Que corresponde a um número *fuzzy*, obtido a partir da soma entre dois outros números *fuzzy*.

Outro exemplo do uso do princípio de extensão na soma de dois números A e B pode ser visto na Figura 8. Neste exemplo, A vale “aproximadamente 3” e B “aproximadamente 4”, resultando em  $A + B$  = “aproximadamente 7”.

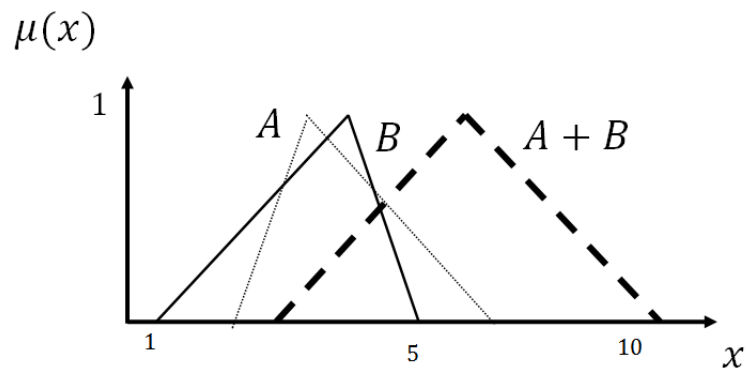


FIGURA 8 Somas dos números *fuzzy* A e B.

## 2.5 Inferência Fuzzy

A inferência *fuzzy* é a etapa na qual as proposições ou regras são definidas e depois examinadas paralelamente. Esta etapa engloba a definição das proposições, a análise das regras e a criação dos conjuntos *fuzzy* resultantes. As regras utilizadas

na inferência *fuzzy* são expressas no formato SE-ENTÃO. A inferência engloba todo o processo, desde a fuzzificação até a defuzzificação (Mamdani, 1974).

Este trabalho não tem por objetivo lidar com sistemas *fuzzy* mediante análise de regras para inferir possíveis resultados. Contudo, a compreensão desta etapa é necessária para um maior entendimento do poder da lógica *fuzzy*.

As regras *fuzzy* formam a parte da estrutura de conhecimento em um sistema *fuzzy* de inferência. O método Mamdani e Takagi-Sugeno corresponde aos métodos diretos de inferência, onde a diferença básica entre esses dois modelos recai no tipo do conseqüente ou da solução *fuzzy* e no procedimento de defuzzificação (Jafelice, 2004).

A defuzzificação é a etapa de representação de um conjunto resultante *fuzzy* por um número real. Em sistemas, em geral, a saída é um conjunto *fuzzy*. Assim se faz necessário a conversão desse conjunto resultante em um valor exato de saída. Nessa etapa ocorre a ligação entre as regras *fuzzy* e o valor esperado. Esse processo de obtenção do valor real é conhecido como método de defuzzificação.

Existem diversos métodos de defuzzificação. Dentre eles, os mais comuns são: Centróide, Bissetor, Média dos máximos, Maior dos máximos e Menores dos máximos (Mamdani, 1974).

O método de defuzzificação usado nesse trabalho é o centro de Gravidade também chamado de Centróide ou média ponderada (16). Ele consiste na técnica de defuzzificação mais comumente usada. O procedimento é similar ao usado para calcular o centro de gravidade em física, se considerarmos a função de pertinência  $\mu_A$  como a densidade de massa de  $x$  (Klir & Yuan, 1995; Ortega, 2001; Yen & Langari, 1999).

$$C(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)} \quad (16)$$

## 2.6 Lógica Fuzzy na Física

A lógica *fuzzy* ainda é uma teoria estranha e desconhecida para a grande maioria dos físicos e são relativamente poucos os trabalhos em física que utilizam essa teoria (Ortega, 2001). Devido ao fato de as incertezas serem tratadas rigorosamente como quantidades probabilísticas.

Inicialmente, tentou-se associar conjuntos *fuzzy* à mecânica quântica e a lógica *fuzzy* à com lógica quântica. Em 1976, foi proposta uma representação da mecânica quântica no espaço de fase *fuzzy*. Assumir a atitude de que a imprecisão experimental envolvida nos processos de medida é em si mesma um fato da realidade física, impulsionou alguns pesquisadores a buscar a incorporação dessas incertezas as teorias físicas (Ali & Doebner, 1976). Ao final da década de noventa, uma dinâmica *fuzzy* foi proposta como alternativa para a mecânica estatística. Isto permitiu tratar sistemas passíveis de incerteza de forma mais coerente. Como o caso de sistemas biológicos, políticos econômicos e outros.

## 2.7 Implementação Computacional do Princípio de Extensão

Nesta seção, apresentamos um método que permite implementar computacionalmente o princípio de extensão.

Vale ressaltar que o algoritmo de implementação não é único, pois existem diversas possibilidades que se pode utilizar para a implementação computacional do princípio de extensão de *Zadeh*. Aqui, optamos pela utilização da linguagem de programação C++ por se tratar de uma linguagem livre, ter um custo computacional relativamente baixo, e ser uma linguagem de “fácil” entendimento. Também foi utilizado o software *gnuplot* (Williams & Kelley, 1998) para gerar os gráficos apresentados nas análises feitas no decorrer deste trabalho.

Como o objetivo desse estudo era a análise de várias funções, a implemen-

tação utilizada foi feita de forma a permitir, mediante simples ajustes, a adequação do programa a diferentes funções.

Dessa forma, implementamos uma função de pertinência triangular  $A$ , como pode ser vista na Figura 9, cujas entradas são: o limite inferior ( $a$ ), o valor de pertinência máxima ( $b$ ), o limite superior ( $c$ ) da função. Esses limites são necessários para se determinar as bases da função ( $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ), onde  $\alpha_1 = b - a$  e  $\alpha_2 = c - b$ . Em caso de funções triangulares simétricas, usaremos  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_s$  e os valores ( $d$ ) pertencentes ao domínio do conjunto *fuzzy* (o parâmetro incerto), será chamado de “ $d$ ” para evitar que se confunda com a variável  $x$ . A função então retorna o valor da pertinência  $\mu_A(d)$ .

$$\mu_A(d) = \begin{cases} 0; & \text{se } d \leq a \\ \frac{d-a}{b-a}; & \text{se } d \in [a, b] \\ \frac{c-d}{c-b}; & \text{se } d \in [b, c] \\ 0; & \text{se } d \geq c \end{cases} \quad (17)$$

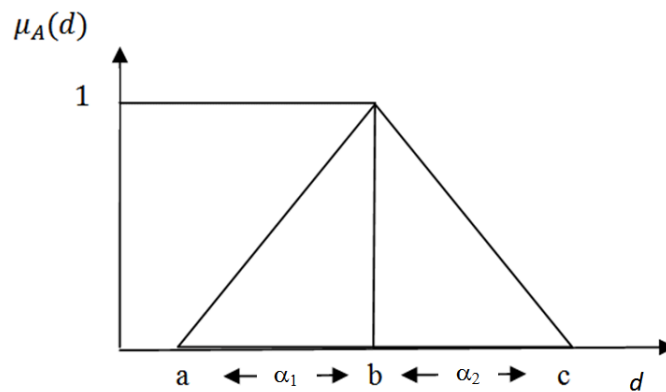


FIGURA 9 Função pertinência Triangular.

Essa escolha dos parâmetros de entrada da função de pertinência possi-

bilita “diversos” testes com números *fuzzy* de domínios diferentes e  $\alpha_s$  diferentes. Com isso, diversas funções de pertinências triangulares são consideradas, como podemos ver na Figura10.

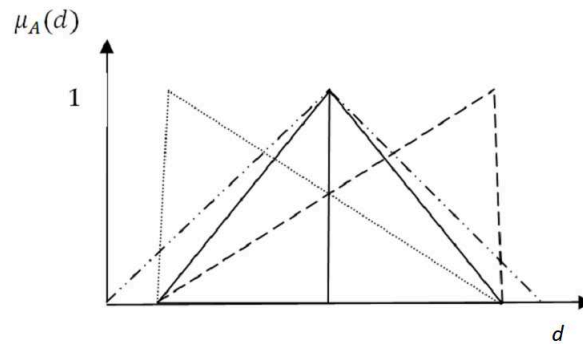


FIGURA 10 Diferentes funções triangulares.

O usuário também tem a opção de escolher o número de pontos usados na discretização do conjunto *fuzzy*, determinando assim o número de pontos que terá o intervalo  $[a,c]$  que corresponde ao conjunto suporte  $S(A)$  do número *fuzzy*  $A$ . O número de pontos utilizados é determinado por:

$$N = \frac{(c - a)}{\Delta}. \quad (18)$$

Onde  $N$  é o número de pontos em que foi discretizado o conjunto *fuzzy* e  $\Delta$  é o intervalo entre um ponto e seu adjacente (ver Figura 11). Esse tratamento é necessário, pois no caso de um mapeamento numérico, a quantidade de pontos trabalhados determina o aparecimento de problemas numéricos, gerando “ruídos” nos conjuntos *fuzzy*. Portanto, quanto maior  $N$ , melhor será a construção do número *fuzzy*.

**Exemplo 2.6:** Considere a função,  $f(x) = \text{sen}(x.d)$ . Sabemos que se

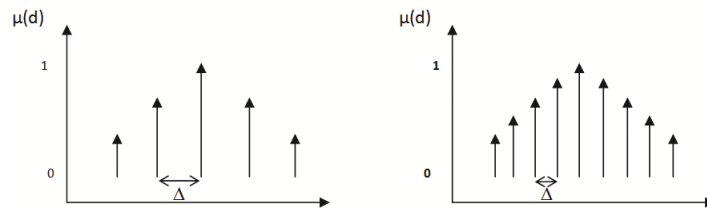


FIGURA 11 Conjuntos *fuzzy* mapeados com  $N=5$  e  $N=9$ , respectivamente.

$x = 15$  e  $d = 1$ ,  $f(15) = \text{sen}(15.1) = 0,6502$ .

Agora, para a situação de incerteza do tipo  $d = \text{“próximo de 1”}$ , o princípio de extensão fornece o resultado,  $f(15) = \text{sen}(15. \text{“próximo” de } 1) = \text{“próximo de” } 0,6502$ .

Esse exemplo ilustra como através do princípio de extensão consegue-se estender a incerteza do domínio à imagem. Assim, um valor que antes era pontual passa a ser incerto, ou seja, para um mesmo valor de  $x$  temos  $N$  valores de  $f(x)$  obtidos pela variação dos valores do parâmetro incerto ( $d$ ). Os valores de  $f(x)$  obtidos cada qual com sua pertinência passam a representar um novo número *fuzzy*.

Os procedimentos executados pelo algoritmo desenvolvido nesse programa são simples. Uma vez que temos a função a ser fuzzificada, definimos o parâmetro incerto, que no caso é o parâmetro ( $d$ ) e a amplitude dessa incerteza determinado pelo valor de  $\alpha_s$ . Em seguida, estabelecemos o número de pontos com que iremos discretizar nosso conjunto *fuzzy* para então definir os  $\alpha$ -níveis desse conjunto. Feito isso, os valores obtidos são armazenados em uma matriz de  $m$  linhas e 3 colunas, onde  $m$  é determinado por  $N$  e pelo números de valores desejados para  $x$  e as colunas correspondem respectivamente a:  $x$ ,  $f(x)$  e  $\mu_A(d)$ .

$$A_{m,3} = \begin{bmatrix} x_1 & f_0 & \mu_0 \\ x_1 & f_0 & \mu_0 \\ x_1 & f_0 & \mu_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (19)$$

A forma matricial é utilizada propositalmente para facilitar as operações necessárias ao princípio de extensão.

Retornando aos dados do exemplo 2.6, obtemos para  $x = 15$  e  $d$  fuzzy, dado pela função de pertinência (17) com entradas  $a = 0.8$ ,  $b = 1$  e  $c = 1.2$ , que resulta em  $\alpha_s = 0.2$ , o conjunto apresentado na Figura 12.

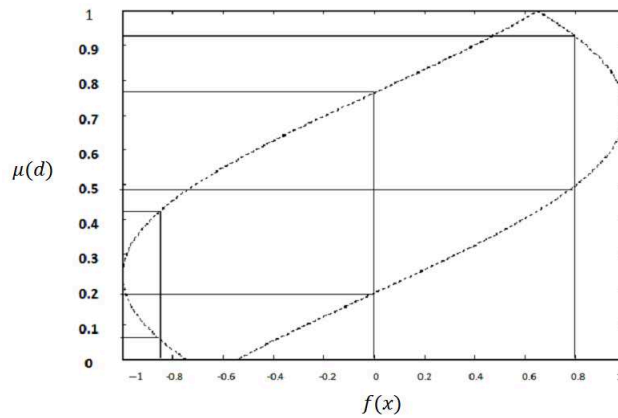


FIGURA 12  $f(x) = \text{sen}(x.d)$  com  $d$  fuzzy sem operação dos máximos.

Após essa primeira etapa do nosso algoritmo (Melo, 2009), que consistiu na obtenção de uma seqüência de conjuntos fuzzy como o da Figura 12, isto é, um conjunto para cada valor de  $x$  utilizado em  $f(x)$ , resta-nos ainda uma etapa do processamento dos dados. Como podemos ver para diversos valores de  $f(x)$  temos dois valores de pertinência e isso não está de acordo com o princípio de extensão que afirma que o conjunto imagem resultante do princípio de extensão é outro

número *fuzzy*. Cada valor de  $f(x)$  terá uma única pertinência que corresponde ao valor máximo entre as pertinências de um mesmo  $f(x)$ , conforme seções 2.3 e 2.4.

Foi implementado uma rotina computacional capaz de selecionar as pertinências máximas de cada  $f(x)$  e descartar as pertinências mínimas para que assim tenhamos de fato executada a operação do princípio de extensão de *Zadeh* como poderemos ver na Figura 13.

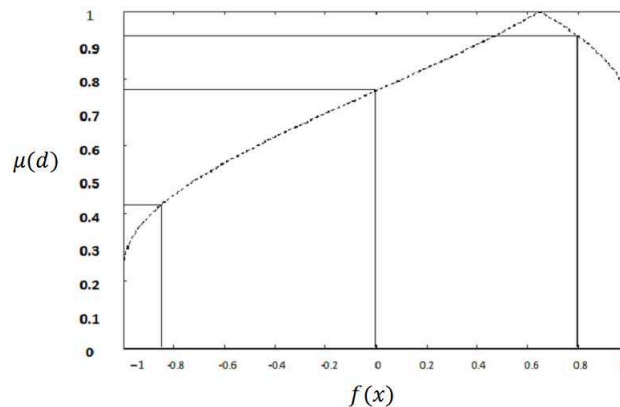


FIGURA 13  $f(x) = \text{sen}(x.d)$  com  $d$  *fuzzy* após operação dos máximos.

Construímos assim uma nova matriz que irá conter todos os números *fuzzy* resultantes da extensão da incerteza do parâmetro  $d$  a cada valor  $f(x)$ .

As Figuras 14 e 15 são resultantes do agrupamento dos conjuntos *fuzzy* obtidos para todos os valores de  $f(x)$ . Notamos uma reconstrução da solução do problema na formulação original baseada em conjuntos *fuzzy*. Essas figuras possuem uma escala entre 0 e 1 que representa os graus de pertinência de todos os conjuntos *fuzzy* ao longo de  $f(x)$ . A linha mais escura representa os valores de  $f(x)$  com pertinência máxima igual a 1.

A Figura 14 somente é mostrada para que se tenha idéia da configuração do  $f(x) = \text{sen}(x.d)$  *fuzzy* antes da operação final do princípio de extensão, pois a

solução que interessa é a mostrada na Figura 15.

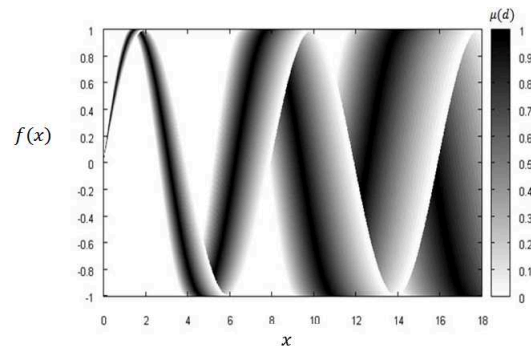


FIGURA 14  $f(x) = \text{sen}(x.d)$  com  $d$  fuzzy sem operação dos máximos.

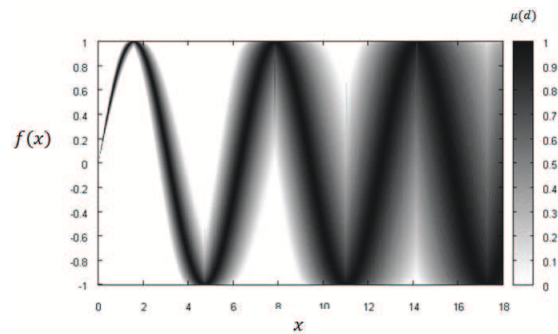


FIGURA 15  $f(x) = \text{sen}(x.d)$  com  $d$  fuzzy após operação dos máximos.

Nota-se que, para cada valor de  $x$ , existem diferentes valores de  $f(x)$ , cada qual com sua respectiva pertinência  $\mu(f(x))$  que representa o quanto de  $f(x)$  é compatível ao conjunto dos valores esperados de  $f(x)$  sujeitos a incertezas no parâmetro  $d$ .

Finalmente, a etapa de defuzzificação. Como já foi mencionado na seção 2.5, esta etapa não é exclusiva do princípio de extensão. Na verdade, é a etapa final de todos os sistemas baseados em lógica fuzzy onde exista a necessidade de um valor representativo no campo dos números reais como resposta.

A partir da defuzzificação pelo método Centróide, conseguimos obter os valores de  $f(x)$  estimados com o parâmetro  $d$  “próximo” de 1, ver Figura 16.

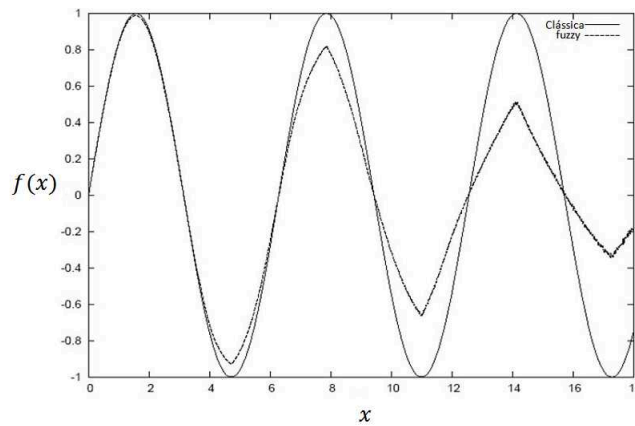


FIGURA 16  $f(x) = \text{sen}(x.d)$  com parâmetro  $d=1$  (clássico), e  $f(x)$  com parâmetro  $d = \text{"próximo"}$  de 1 após a defuzzificação.

De imediato, é possível notar a diferença de comportamento das equações com e sem incertezas. A função  $f(x)$  com acréscimo de incerteza ao parâmetro  $d$ , sofreu um “amortecimento” em relação à função  $f(x)$  clássica.

A análise da equação 2.6 foge ao escopo desse trabalho, pois ela foi dada como uma relação qualquer sem nenhum contexto físico. Contudo, uma análise de função periódica envolvida no contexto físico de osciladores harmônicos pode ser vista na referência Melo (2009).

### 3 APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DE EXTENSÃO

Vale a pena ressaltar que não faz parte do objetivo dessa dissertação o estudo aprofundado em equações diferenciais e seus métodos de resolução. Tão pouco o aprofundamento nos sistemas físicos, pois muitos dos trabalhos nessa área são extremamente complexos e demandariam um projeto específico de pesquisa. Logo, a minha intenção neste capítulo é mostrar algumas aplicações da lógica *fuzzy* através da aplicação do princípio de extensão a funções que envolvam fenômenos físicos e que tenham propriedades variadas, possibilitando avaliar o comportamento dessas funções submetidas a incertezas em determinados parâmetros.

#### 3.1 Aplicação do princípio de extensão a equação de Difusão

As equações de difusão são exemplos de equações diferenciais parciais extremamente importantes na engenharia. Recebem esse nome porque descrevem processos de difusão.

Lembrando que as equações diferenciais parciais são aquelas que envolvem as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes. A seguir apresentamos uma equação diferencial com duas variáveis.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0. \quad (20)$$

A difusão é um processo que ocorre em uma enorme variedade de sistemas naturais e artificiais. Sistemas biológicos macroscópicos e microscópicos estão sujeitos aos efeitos da difusão. Desde a movimentação de substâncias químicas em tecidos ao movimento de população em seus *habitats*.

A difusão é responsável pelo transporte de poluentes no meio ambiente,

bem como pelo transporte de soluções em amostras de alimentos. Também é o processo que descreve a penetração de líquidos no solo, a irrigação, a prospecção de petróleo, difusão de calor, entre outros. Devido ao seu amplo espectro de aplicações potenciais, processos difusivos são intensamente estudados, teoricamente e experimentalmente. São equações de segunda ordem, classificadas na categoria básica de equações parabólicas. Essa classificação não é meramente acadêmica, uma vez que cada categoria de equações existente está associada a uma categoria de fenômenos físicos (Berg, 1993; Crank, 1992).

Na maioria dos casos, as equações de difusão podem ser escritas na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}) \right) + q(x, t)u + f(x, t, u), \quad (21)$$

no qual  $u(x, t)$  é a densidade, que depende de uma dimensão espacial e do tempo;  $\theta = k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}$  é o fluxo, supondo uma relação constitutiva linear análoga às Leis de Newton-Fourier e Fick,  $f(x, t, u)$  é uma função de fonte (geralmente não linear) e  $q(x, t)$  é um termo também de fonte, em geral referente a fenômenos de absorção ou reatividade. Para maiores detalhes, consulte Bassanezi & Ferreira Júnior (1998).

A modelagem tradicional de processos difusivos é baseada em equações diferenciais que descrevem a concentração da substância de interesses, como função do tempo e da posição  $u(x, t)$ .

Nessa seção, é apresentada a modelagem e análise de uma equação de difusão de calor ao longo de uma haste circular delgada (Figura 17), problema extraído de Zill & Cullen (2007), com o acréscimo de incerteza ao coeficiente de difusão.

Por motivos de praticidade, a equação aqui discutida é um caso simples de equação de difusão de calor em uma haste ou fio delgado de comprimento  $L$ , onde

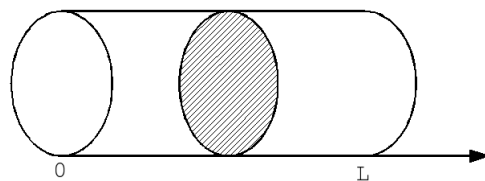


FIGURA 17 Fluxo de calor através da seção transversal (área rachurada) de uma haste delgada.

são descartados os chamados modificadores que são responsáveis pelas produções internas e externas de calor, que atuam sobre o sistema físico. Sendo assim nos resta uma equação do tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (22)$$

Essa equação também chamada de equação unidimensional do calor (ou equação clássica da difusão de calor) descreve a propagação de calor em uma dimensão. Ela segue algumas hipóteses, que são:

- O fluxo de calor dentro da haste se verifica apenas na direção  $x$ ;
- A superfície lateral, ou curva, da haste é isolada, isto é, nenhum calor escapa dessa superfície;
- Nenhum calor é gerado dentro da haste;
- A haste é homogênea, isto é, sua massa por unidade de volume  $\rho$  é constante;
- O calor específico  $c$  e a condutividade térmica  $K$  do material da haste são constantes.

Para estabelecer a equação de derivadas parciais que é satisfeita pela temperatura  $u(x, t)$ , necessita-se de leis empíricas da condução de calor, ver (Zill & Cullen, 2007).

Então, chegamos à equação de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (23)$$

É usual fazer  $\gamma = \frac{K}{c\rho}$  e designar essa constante como difusividade térmica. É nessa constante que se concentra nossa incerteza, uma vez que ela depende de parâmetros básicos que são grandezas físicas das quais um valor aproximado não é suficiente para a obtenção de um resultado coerente com a realidade, muitas vezes essa aproximação é feita sobre situações de incerteza (Incropera & Witt, 2003; Zill & Cullen, 2007).

Consideremos as condições de contorno;

$$0 < x < L, t > 0, \quad (24)$$

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, t > 0, \quad (25)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (26)$$

Dadas as condições de contorno 24, 25 e 26, concluímos que uma solução para a equação de difusão é dada pela série infinita (27).

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} dx \right) \right) e^{-\gamma \left( \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right). \quad (27)$$

No caso especial  $u(x, 0) = 100$ ,  $L = \pi$  e  $\gamma = 1$ , (isso corresponde a uma haste feita com um material cujas propriedades térmicas estão entre o cobre e o alumínio) (Incropera & Witt, 2003), a solução obtida é:

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 - (-1)^n}{n} \right] e^{-n^2 t^2} \text{sen}(nx) \quad (28)$$

As expressões para temperatura (27) e (28) são complexas, mas o fator exponencial com potência negativa em cada termo das séries faz com elas convirjam rapidamente, exceto para valores pequenos de  $t$  ou  $\gamma$ . Portanto, resultados precisos podem ser obtidos, em geral usando-se apenas alguns poucos termos da série (Boyce & Dprima, 2006).

Por meio do algoritmo implementado nesse trabalho, foram obtidos os gráficos das Figuras 18, 19 e 20, onde se pode ver o comportamento da solução para diversos valores de  $t$ .

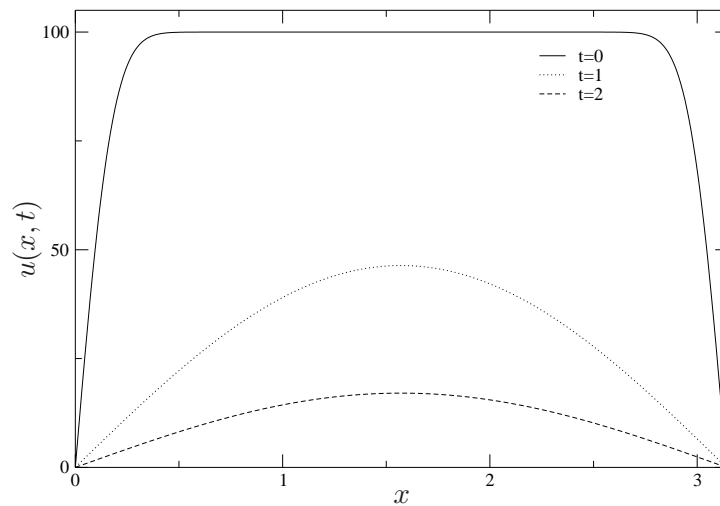


FIGURA 18 Temperatura em função da posição na haste, em diversos instantes para  $\gamma = 1$ .

Os gráficos confirmam o comportamento da difusão de temperatura ao longo da haste. É possível notar que com  $t \rightarrow \infty$ ,  $u(x, t) \rightarrow 0$ , ou seja, à medida em que a haste “perde” calor pelas extremidades e a temperatura tende a 0. O modo pelo qual a temperatura decai em determinados pontos da haste está in-

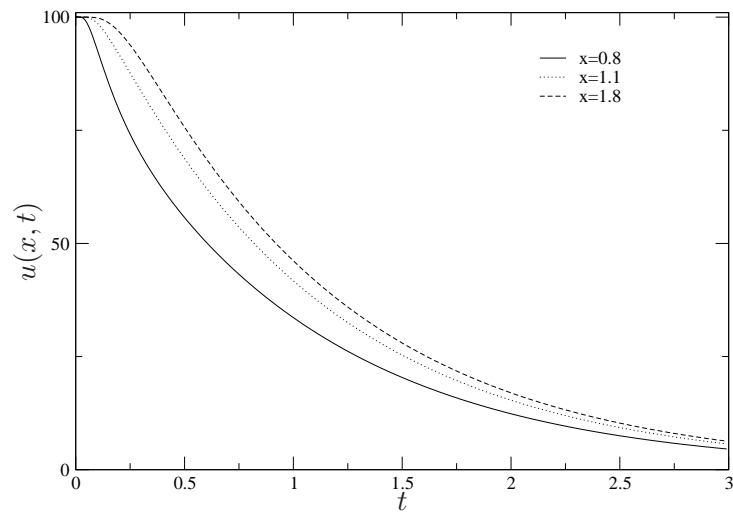


FIGURA 19 Temperatura em função do tempo em diferentes pontos  $\gamma = 1$

dicado na Figura 19, onde aparecem os gráfico das temperaturas em função do tempo para os pontos  $x = 0.8$ ,  $x = 1.1$  e  $x = 1.8$ . Por fim, a Figura 20 mostra um gráfico tridimensional da temperatura em função de  $x$  e do tempo.

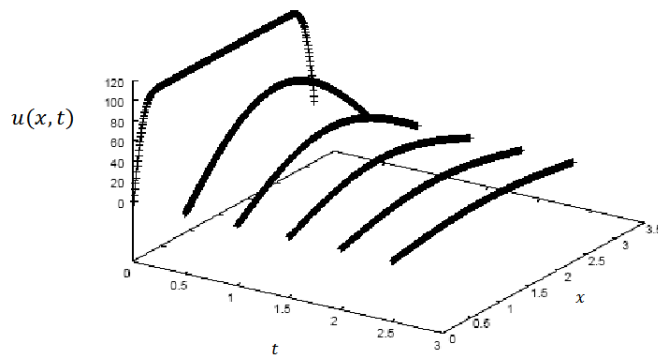


FIGURA 20 Gráfico da temperatura  $u(x, t)$  em função de  $x$  e  $t$ , para  $\gamma = 1$ .

A difusividade térmica  $\gamma$  é uma grandeza importante, pois mede a capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade

de armazená-la.

A precisão dos cálculos de engenharia depende da exatidão com que são conhecidos os valores das propriedades termofísicas da matéria, isto é, as propriedades de transporte que incluem a condutividade térmica  $K$  e as propriedades termodinâmicas que dizem respeito ao estado de equilíbrio de um sistema. A densidade  $\rho$  e o calor específico  $c$ , são duas dessas propriedades muito usadas na análise termodinâmica.

Poderiam ser citados numerosos exemplos de defeitos em equipamentos e no projeto de processos, ou então de não atendimento às especificações de desempenho, que poderiam ser atribuídos a informações erradas associadas à seleção de valores de propriedades-chaves utilizadas na análise inicial do sistema. A seleção de dados confiáveis para as propriedades é uma parte importante de qualquer análise criteriosa em engenharia. O uso ocasional de dados que não foram bem caracterizados ou avaliados como os encontrados em algumas literaturas e em manuais deve ser evitado (Incropera & Witt, 2003; Zill & Cullen, 2007).

Para ilustrar a influência de uma variação no coeficiente de difusividade, refazemos os gráficos da equação (28) com uma leve variação de 0.5 unidades para mais e 0.5 unidades para menos no coeficiente de difusividade  $\gamma$ .

A Figura 21 deixa claro que uma variação de 0.5 unidades no  $\gamma$ , causa uma mudança na temperatura em cada ponto da haste. Nos gráficos da Figura 21 notamos que para o ponto  $x = 0.8$  da haste com  $\gamma = 0.5$  no tempo  $t = 0.6$ , ocorre a mesma temperatura do ponto  $x = 1.4$  na haste com  $\gamma = 1$  no mesmo tempo. Este dado ilustra como a queda de temperatura é afetada em razão do menor valor de coeficiente de difusão. Pode-se observar também uma aceleração da queda de temperatura quando diminuirmos 0.5 unidades no  $\gamma$ .

A Figura 22 vem corroborar os resultados verificados na Figura 21. Mate-

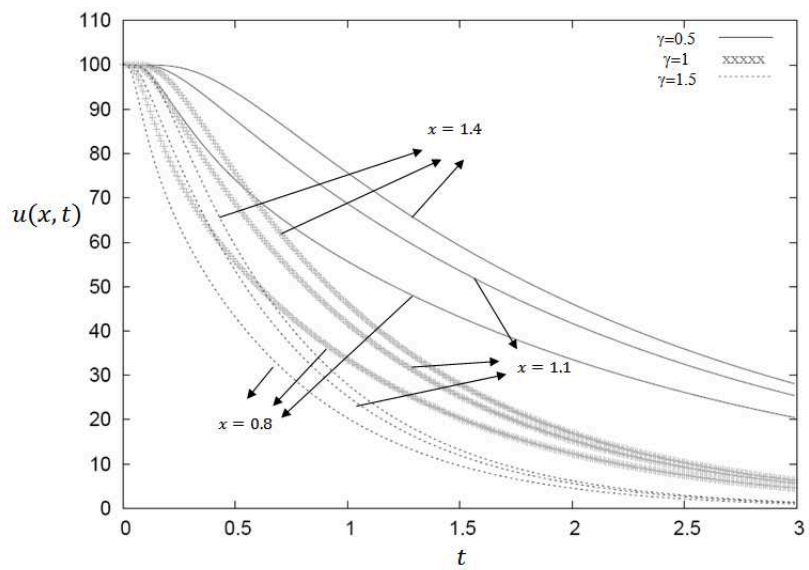


FIGURA 21 Temperatura em função do tempo em determinados pontos, para  $\gamma = 0.5$ ,  $\gamma = 1$  e  $\gamma = 1.5$ .

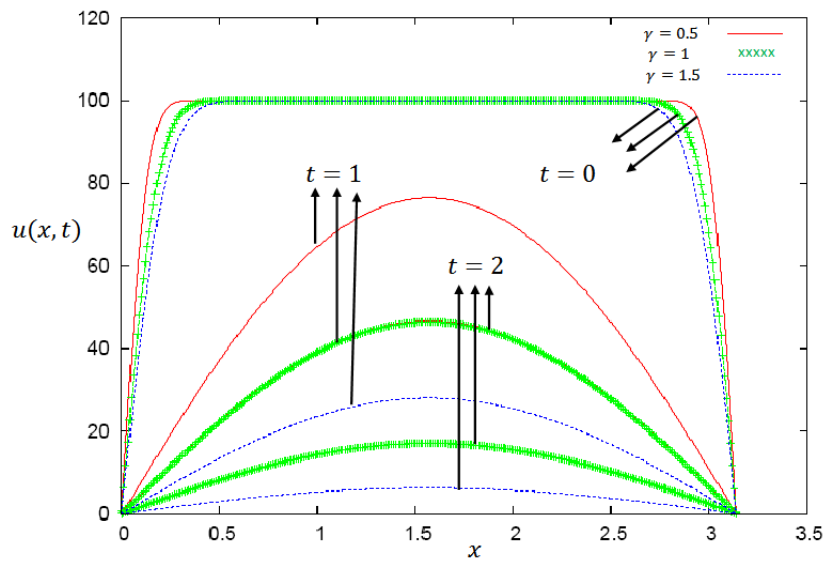


FIGURA 22 Temperatura em função da posição na haste, em diversos instantes para  $\gamma = 0.5$ ,  $\gamma = 1$  e  $\gamma = 1.5$ .

riais com elevado valor de  $\gamma$  responderam rapidamente a mudanças nas condições térmicas a eles impostas, enquanto materiais com reduzidos  $\gamma$  responderam mais lentamente, levando mais tempo para atingir uma nova condição de equilíbrio. Fato verificado ao notar-se que a temperatura na haste com  $\gamma = 0.5$  no tempo  $t = 1$  se sobrepõem à temperatura na haste de  $\gamma = 1.5$  no tempo  $t = 2$ .

A mudança de comportamento é tão grande que pode comprometer completamente o resultado quando se tem incerteza quanto ao parâmetro  $\gamma$ .

Como mencionado anteriormente, a difusividade térmica é um parâmetro passível de incerteza, pois ele depende dos parâmetros básicos  $c$ ,  $K$ ,  $\rho$ , que são grandezas determinadas em um nível macroscópico de forma experimental. Essas grandezas são medidas que têm incertezas próprias, pois dependem das características dos equipamentos utilizados na sua determinação, do operador e também de outros parâmetros que por sua vez carregam uma cota de incerteza. Diante disso, dados conflitantes podem ser obtidos, gerando uma situação de imprecisão. Portanto, dependendo da precisão necessária a uma dada aplicação, os resultados obtidos podem ser incoerentes em relação aos resultados observados.

Embora tenhamos determinado um intervalo onde reside o valor de  $\gamma$ , sabemos que à medida em que nos aproximamos das fronteiras do intervalo o resultado tem uma diminuição de compatibilidade com o resultado esperado. Da mesma forma, à medida em que se aproxima de  $\gamma = 1$  o valor tem seu grau de pertinência aumentado. Portanto, em caso de dúvidas, não basta simplesmente substituímos os valores de  $\gamma$  no cálculo de  $u(x, t)$ . Usamos a lógica *fuzzy* para tratar essa incerteza de uma forma mais coerente.

Utilizando as técnicas já mencionadas no capítulo 2, o princípio de extensão aqui é tratado de forma a acrescentar uma incerteza ao parâmetro  $\gamma = 1$  para torná-lo um número *fuzzy* triangular de base  $\alpha_s = 0.5$  seguindo a função:

$$\mu(d) = \begin{cases} 0; & \text{se } d \leq 0.5 \\ \frac{d-0.5}{0.5}; & \text{se } d \in [0.5, 1] \\ \frac{1.5-d}{0.5}; & \text{se } d \in [1, 1.5] \\ 0; & \text{se } d \geq 1.5. \end{cases} \quad (29)$$

Assim, conseguimos uma imagem que descreve  $u(x, t)$ , como conjuntos *fuzzy*, conforme podemos ver na Figura 23.

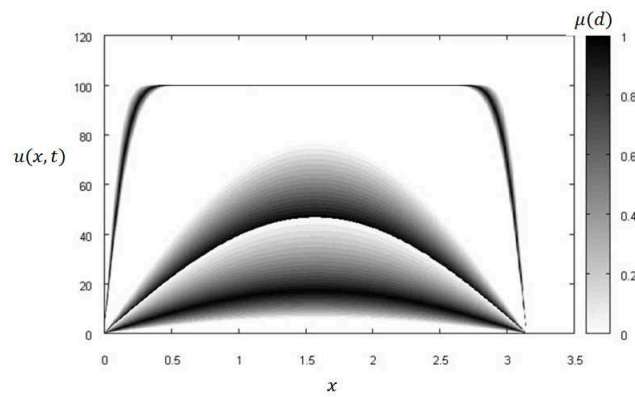


FIGURA 23 Solução da equação de ‘difusão *fuzzy*’ com parâmetro  $\gamma =$  ‘próximo de 1’ com  $\alpha_s = 0.5$ .

Devido à proximidade das curvas, para uma maior legibilidade do gráfico, faz-se necessária uma imagem vista de um ângulo diferente, como na Figura 24, onde é possível ver a amplitude dos conjuntos *fuzzy* de uma forma mais clara.

É possível observar que em determinados momentos existem vários valores para a temperatura mostrando que a incerteza se propaga de formas diferentes para cada valor de  $t$  (tempo).

A partir do método de defuzificação centróide, obtemos os valores reais, possibilitando assim um resultado representativo para a  $u(x, t)$ , com  $\gamma$  *fuzzy*.

Também foi feita a análise para um  $\gamma$  *fuzzy*, ao redor de  $\gamma = 1$ , com

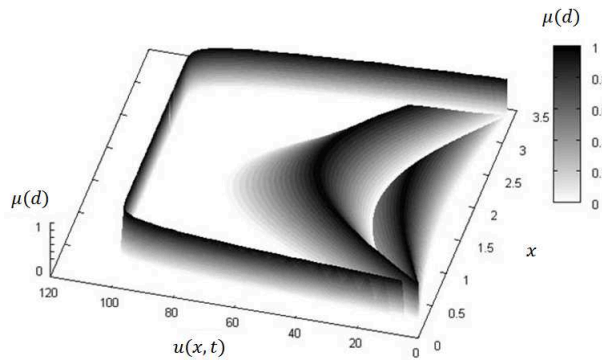


FIGURA 24 Imagem tridimensional dos gráficos da Figura 23.

$\alpha_s = 0.2$ , ver Figura 25.

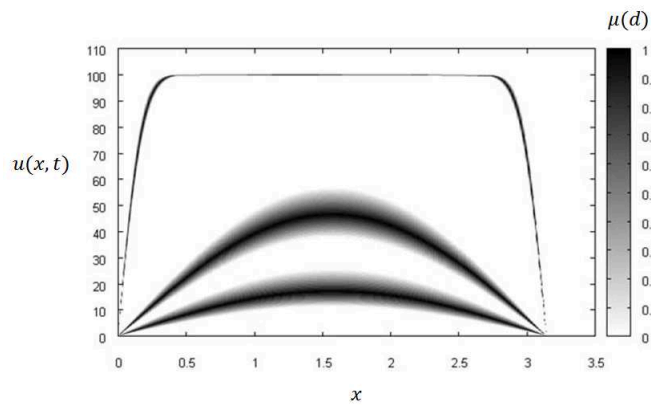


FIGURA 25 Solução da equação de ‘difusão *fuzzy*’ com parâmetro  $\gamma =$ ”próximo de 1” com  $\alpha_s = 0.2$ .

Devido à escala dos valores da temperatura, é de difícil visibilidade a diferença entre as curvas dos gráficos clássicos e os obtidos após o método de defuzzificação dos conjuntos observados nas Figuras 23 ou 24 e 25. As curvas dos gráficos clássicos e *fuzzy* parecem sobrepostas. Para contornar esse problema, faz-se uso dos gráficos de diferença percentual dado por (30):

$$\Delta A(\%) = 100 \cdot \left| \frac{A_c - A_{df}}{A_c} \right|, \quad (30)$$

onde  $A_c$  e  $A_{df}$  são respectivamente os valores da função clássica e o valor correspondente obtido pela defuzzificação da função *fuzzy*.

A diferença percentual dada por 30 será utilizada nas demais funções discutidas nesse trabalho.

Conseguimos assim, as diferenças percentuais em cada ponto avaliado. Por praticidade, optamos por apresentar os gráficos de  $\Delta u(\%)$  em relação a  $t$  para  $x = 0$

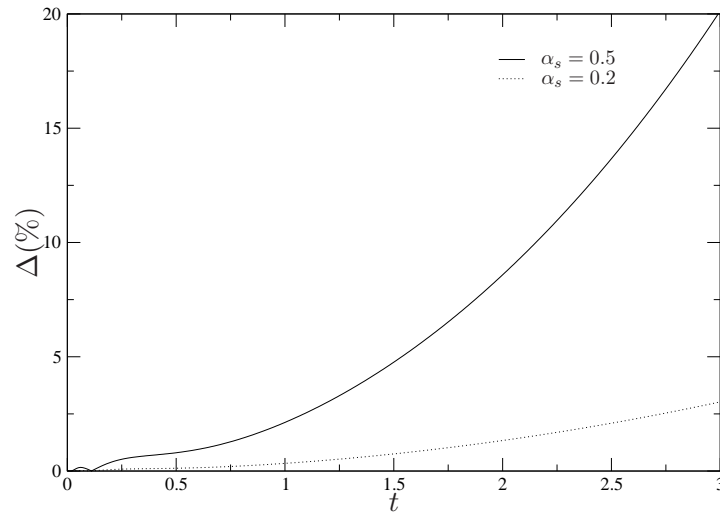


FIGURA 26 Diferença percentual da temperatura em função do tempo no ponto  $x = 0.8$ , para  $\alpha_s = 0.5$  e  $\alpha_s = 0.2$ .

Como era de se esperar, à medida em que a incerteza diminui os valores defuzzificados se aproximam dos valores clássicos, “indício” de que o processo de fuzzificação ficou bem estruturado. Esse fato é comprovado pelos gráficos das Figuras 23, 24, 25 e 26, pois segundo a teoria *fuzzy*, a certeza deve ser estabelecida pelo limite da incerteza tendendo a 0.

Também é possível notar que a incerteza aumenta com o passar do tempo, de tal forma que as maiores influências estão nos resultados defuzzificados da temperatura para um  $t \geq 1$ .

Um problema com possível aplicação prática é a determinação do instante  $t$  no qual a haste inteira esfria a uma determinada temperatura. Isso é importante, por exemplo, no caso de tubulações que transportam fluidos aquecidos, onde é necessário saber como se dá a difusão de calor ao longo de toda a haste e qual o comportamento da temperatura em cada ponto da mesma.

A presença da incerteza faz com que a difusão de calor tenha comportamento diferente do esperado para um valor exato de  $\gamma$ . A lógica *fuzzy* possibilita uma determinação da difusão coerente para o caso de dúvida no parâmetro, servindo assim de auxílio a uma tomada de decisão sobre uma possível aplicação. Para esse caso, verificou-se, por exemplo, que para o conjunto *fuzzy* triangular de base  $\alpha_s = 0.5$  com a pertinência máxima em  $\gamma = 1$ , ocorre uma diferença percentual de 0,02% nas extremidades da haste e de 2% no centro para  $t = 1.01$ . Da mesma forma, também é possível verificar a diferença percentual no ponto  $x = 0.8$  que atinge uma variação de 20% no instante  $t = 3$ . Com isso, é possível ter uma maior compreensão de possíveis problemas que possam ocorrer ao usar esse material.

### 3.2 Aplicação da lógica *fuzzy* a grandezas termodinâmicas

Um outro exemplo de aplicação do princípio de extensão de Zadeh pode ser na obtenção de grandezas “termodinâmicas *fuzzy*” onde uma vez determinados os parâmetros incertos, somos capazes de obter essas grandezas como grandezas *fuzzy*.

A termodinâmica é a “ciência” que lida com a temperatura e todos os fenô-

menos associados a ela. Entre as principais quantidades termodinâmicas utilizadas estão a energia livre de Helmholtz, energia média, calor específico e entropia.

Vale ressaltar que este estudo é de grande relevância para o entendimento de vários fenômenos físicos e é a partir de resultados deste tipo de pesquisa que se tem a base para o desenvolvimento de novas tecnologias (Chaves, 2001; Horiguchi, 1993). Dentre os diversos sistemas termodinâmicos existentes, o escolhido para esse trabalho foi uma Ladder formado por interações do tipo Ising, onde suas grandezas termodinâmicas serão acrescidas de incertezas e depois analisadas.

A Hamiltoniana associada ao sistema ladder (Figura 27) é descrita por:

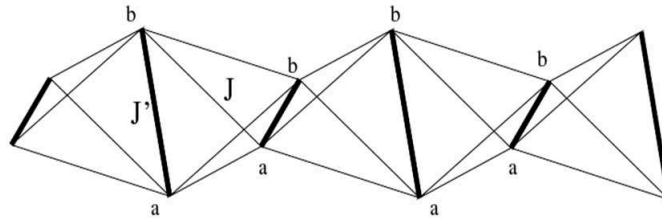


FIGURA 27 Sistema Ladder com ligações do Tipo Ising.

$$H = \sum_{i=1}^N H_{i,i+1} \quad (31)$$

em que  $H_{i,i+1}$  é dado por:

$$H_{i,i+1} = J(s_{i,a} + s_{i,b})(s_{i+1,a} + s_{i+1,b}) + 2J'(s_{i,a}s_{i,b} + s_{i+1,a}s_{i+1,b}) \quad (32)$$

Sendo  $J$  e  $J'$  os parâmetros de interações.

A energia livre desse sistema é obtida a partir do maior autovalor da matriz de transferência (Salinas, 2005), dada por:

$$T = \begin{bmatrix} xy & 1 & 1 & \frac{y}{x} \\ 1 & \frac{1}{y} & \frac{1}{y} & 1 \\ 1 & \frac{1}{y} & \frac{1}{y} & 1 \\ \frac{y}{x} & 1 & 1 & yx \end{bmatrix}, \quad (33)$$

em que  $x = e^{-\beta J}$  e  $y = e^{-\beta J'}$ , onde  $\beta = \frac{1}{kT}$ ,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura absoluta do sistema.

A partir de (33), obtemos o maior autovalor.

$$\Lambda = \frac{2x + x^2y^2 + y^2 + \sqrt{4x^2 - 4x^3y^2 - 4xy^2 + y^4x^4 + 2x^2y^4 + y^4 + 16x^2y^2}}{2xy}, \quad (34)$$

conseqüentemente, podemos obter a energia livre de Helmholtz, clássica, normalizada no grau de liberdade, que é dado por (35):

$$W = \frac{-1}{\beta} \ln\left(\frac{\Lambda}{4}\right). \quad (35)$$

com isso, podemos então gerar as grandezas termodinâmicas clássicas e estudar a termodinâmica do modelo.

As demais grandezas termodinâmicas que descrevem a escada (Ladder) são todas funções obtidas a partir da energia livre, como podemos ver descritas nas expressões a seguir:

- Energia média

$$E_m = \frac{\partial(\beta W)}{\partial \beta}. \quad (36)$$

- Entropia

$$S = \beta^2 \frac{\partial(W)}{\partial\beta}. \quad (37)$$

- Calor Específico

$$C = -\beta^2 \frac{\partial^2(\beta W)}{\partial\beta^2}. \quad (38)$$

Analisaremos primeiramente a energia livre ( $W$ ) em função da temperatura ( $T$ ), com o parâmetro  $J = 1$  e  $J' =$  “próximo de 0”, para diferentes valores de  $\alpha_s$  (base da função de pertinência triangular, ver seção 2.7).

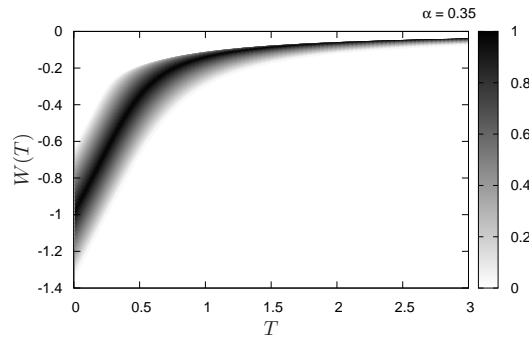


FIGURA 28 Energia Livre *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  “próximo” de 0, para  $\alpha_s = 0.35$ .

Nas Figuras 28, 29 e 30, temos os gráficos das energias livres com  $J'$  *fuzzy* triangulares próximo de 0 com base simétrica, cujos  $\alpha_s$  são 0.35, 0.15 e 0.05 respectivamente.

Na Figura 31, temos a energia livre clássica  $W(T)$ , com  $J' = 0$  e as energias livres defuzzificadas para os diferentes  $\alpha_s$ .

Somente com uma modificação na escala, é possível verificar a diferença entre a energia livre clássica e a energia livre defuzzificada com  $\alpha$  diferentes, fato

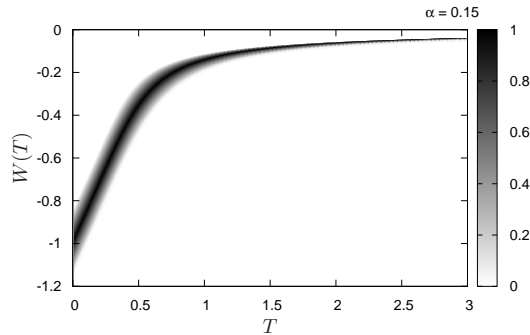


FIGURA 29 Energia Livre *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.15$ .

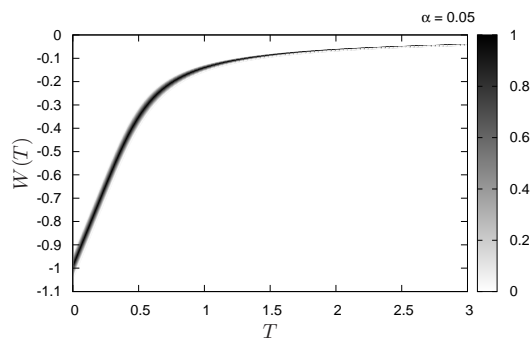


FIGURA 30 Energia Livre *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.05$ .

esse que ocorre devido à proximidade numérica entre as funções como podemos ver na Figura 31. Nos gráficos da Figura 33 temos a diferença percentual entre as quantidades clássicas e as quantidades defuzzificadas para diferentes valores de  $\alpha$ . O gráfico de diferença percentual permite avaliar melhor as diferenças entre as grandezas e reforçar as conclusões obtidas nos gráficos anteriores de que as amplitudes dos conjuntos *fuzzy* resultantes "borrões" diminuem à medida em que diminuimos a incerteza ( $\alpha$ ), levando-nos a concluir que no limite da incerteza

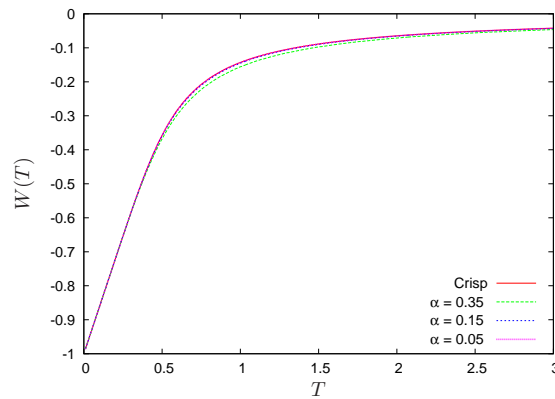


FIGURA 31 Energias Livres *fuzzy* obtidas após os processos de defuzzificação para cada  $\alpha_s$  utilizado, e a Energia Livre clássica( Crisp).

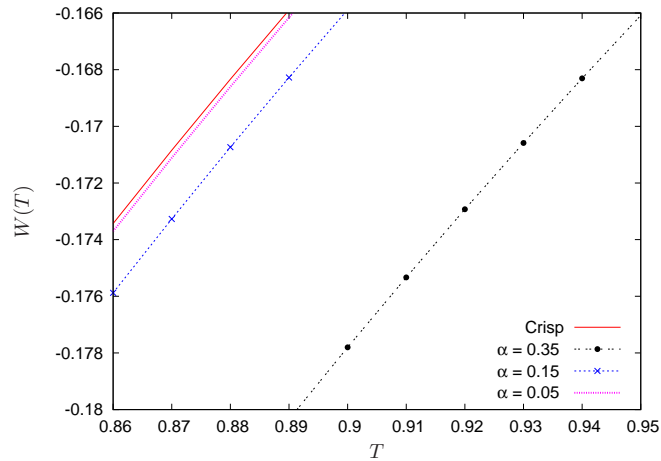


FIGURA 32 Energias Livres *fuzzy* observadas em uma escala menor.

tender a zero, o resultado clássico é obtido. Outra importante constatação é que embora os borrões diminuam com o aumento da temperatura, ou seja, o domínio da incerteza diminua com o aumento da temperatura, a diferença percentual aumenta até a temperatura  $T = 1.3$  e então converge para um valor em torno de 9.6% para  $\alpha_s = 0.35$ , 1.53%, para  $\alpha_s = 0.15$  e 0.17% e para  $\alpha_s = 0.05$ , conforme pode ser visto na Figura 33.

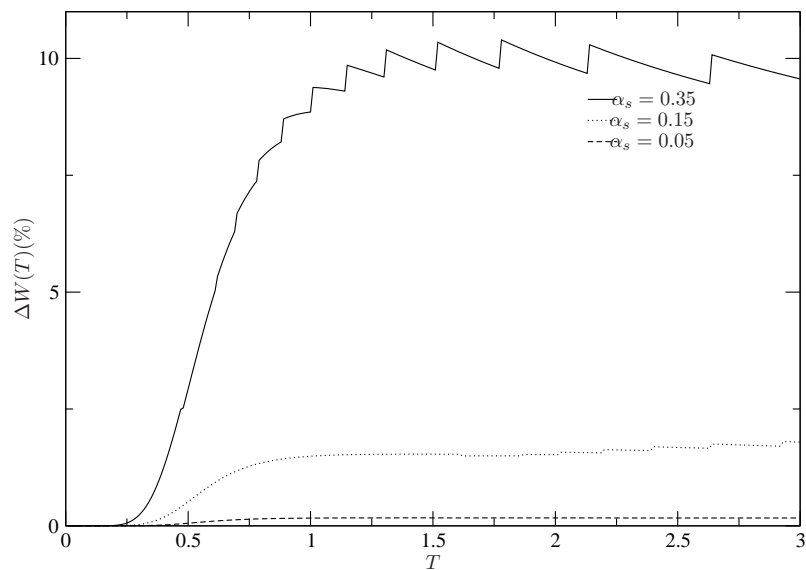


FIGURA 33 Diferença percentual das Energias livres obtidas com valores de  $\alpha_s$  diferentes, em função da temperatura.

Para a energia livre e as próximas grandezas, valem as mesmas considerações, que são:

- Todas as grandezas estão em função da temperatura ( $T$ ).
- Todas serão *fuzzificadas* para conjuntos *fuzzy* triangulares com as mesmas bases  $\alpha_s = 0.35$ ,  $\alpha_s = 0.15$  e  $\alpha_s = 0.05$ .
- E a necessidade do gráfico de diferenças percentuais entre os valores defuzzificados e os clássicos, para todas as grandezas analisadas.

A energia Média ( $E_m$ ) dada pela equação 36 é a segunda grandeza analisada.

Podemos notar a partir das Figuras 34, 35 e 36 que os “borrões” diminuem à medida em que diminuimos as incertezas ( $\alpha_s$ ), induzindo-nos a concluir que no limite de a incerteza tender a zero o resultado clássico é obtido, como é

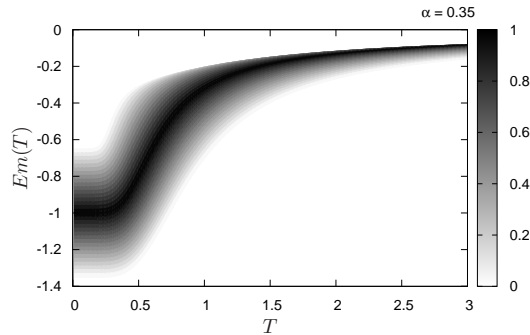


FIGURA 34 Energia Média *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.35$ .

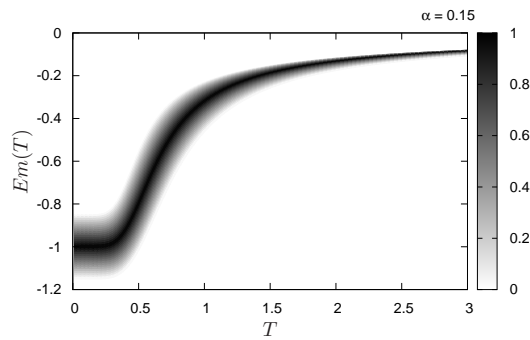


FIGURA 35 Energia Média *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.15$ .

de se esperar a partir dos preceitos da teoria *fuzzy*. Sendo assim, temos um indicio de que a implementação do princípio de extensão foi bem estruturada. Nesse sentido, temos a maior diferença percentual em torno de 10.19% para os valores de temperatura a partir de  $T = 1.5$ . Após esse valor, a diferença percentual entre os valores clássicos e os valores obtidos da defuzzificação da energia média *fuzzy* com ( $\alpha = 0.35$ , tendem a convergir para a margem de 9% a 10% de diferença.

Analisaremos agora a Entropia ( $S$ ) em função da temperatura ( $T$ ), grandeza

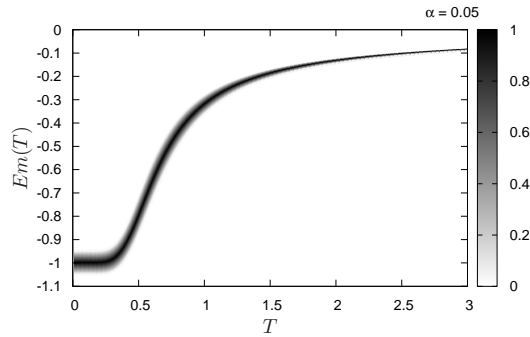


FIGURA 36 Energia Média *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.05$ .

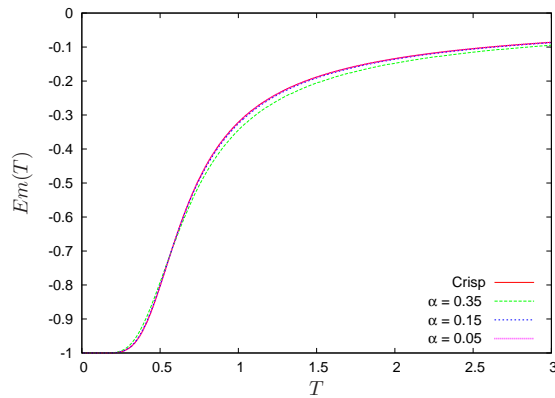


FIGURA 37 Energias Médias *fuzzy* obtidas após o processo de defuzzificação para cada  $\alpha_s$  utilizado, e a Energia Média clássica (crisp).

termodinâmica geralmente associada ao grau de desordem do sistema.

A partir dos gráficos das Figuras 40, 41 e 42, podemos estudar o comportamento da Entropia sujeita à incerteza no parâmetro  $J'$ . De início, notamos que ao contrário das outras grandezas analisadas até aqui, os pontos onde os borrões são maiores estão concentrados no intervalo de  $T = 0.2$  a  $T = 1$ . No intervalo de  $T = 0$  a  $T = 0.2$  e a partir de  $T = 1$ , os borrões parecem convergir para

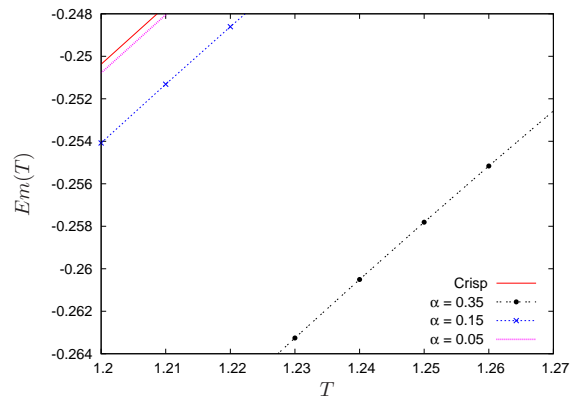


FIGURA 38 Energias Médias *fuzzy* observadas em uma escala menor.

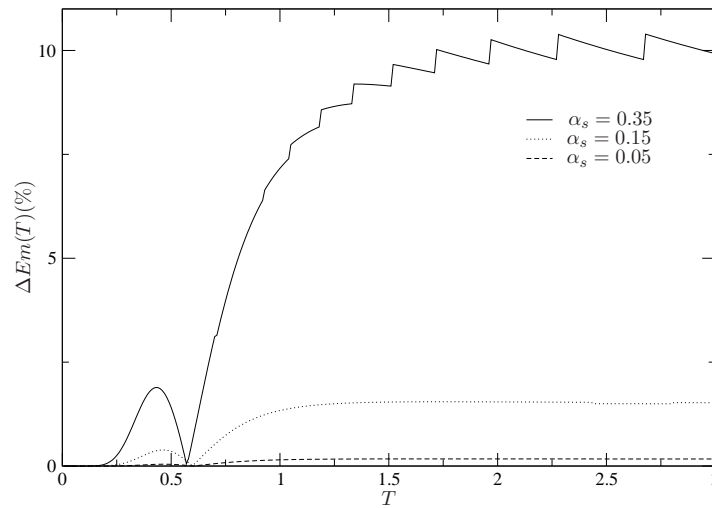


FIGURA 39 Diferença percentual entre Energias Médias defuzzificadas com valores de  $\alpha_s$  diferentes e a clássica, em função da temperatura.

conjuntos de pequena amplitude. Um comportamento que leva a concluir que para uma temperatura ( $T$ ) muito grande e uma temperatura ( $T$ ) muito pequena a entropia não manifesta as características *fuzzy*. Os borrões diminuem à medida em que diminuimos a incerteza ( $\alpha_s$ ), mais uma vez induzindo à conclusão de que se o limite da incerteza tender a zero, o resultado clássico é obtido.

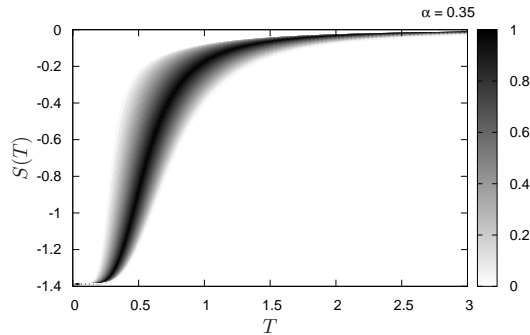


FIGURA 40 Entropia *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.35$ .

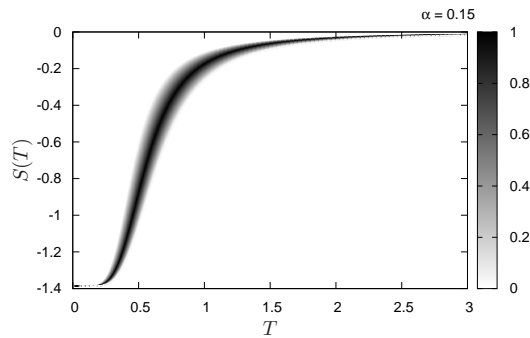


FIGURA 41 Entropia *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.15$ .

Finalmente, analisaremos o calor específico ( $C$ ) em função da temperatura ( $T$ ).

A exemplo das demais grandezas termodinâmicas analisadas até agora, à medida em que a incerteza diminui, o calor específico *fuzzy* tende ao calor específico clássico. Outra característica que podemos observar é o fato de ocorrer uma distorção bem acentuada na região de incerteza contida no intervalo que vai de  $T = 0.1$  a  $T = 0.55$ . Essa distorção é mais sentida para a incerteza de  $\alpha_s = 0.35$  (Figura 46) onde ocorre a maior diferença percentual entre o valor *defuzzificado*

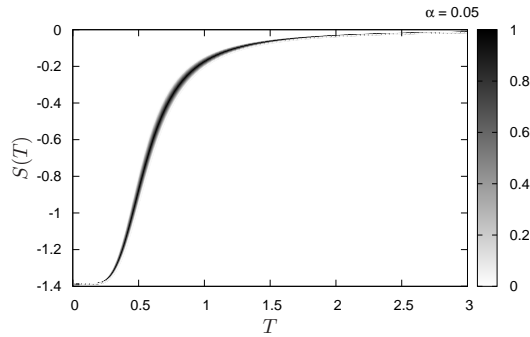


FIGURA 42 Entropia *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.05$ .

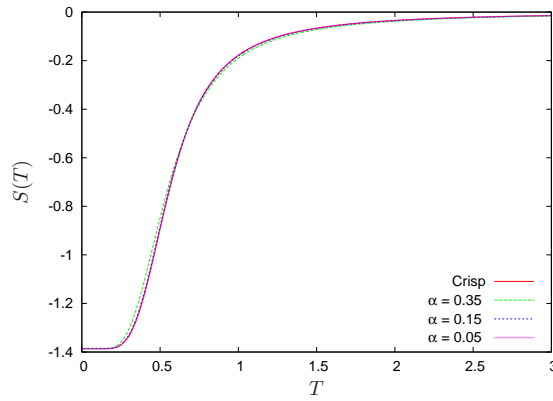


FIGURA 43 Entropias *fuzzy* obtidas após o processo de defuzzificação para cada  $\alpha_s$  utilizado e a Entropia clássica (crisp).

da grandeza *fuzzy* e o valor clássico, que chega a 958,20% em  $T = 0.1$ . Imediatamente após essa temperatura, a diferença percentual sofre uma queda brusca, chegando a 0.42% em  $T = 0.57$ . Logo após sofre uma pequena elevação, voltando a cair em  $T = 0.9$ , chegando a 0.037%. Em seguida a diferença percentual converge para a porcentagem de 10% (Figura 51).

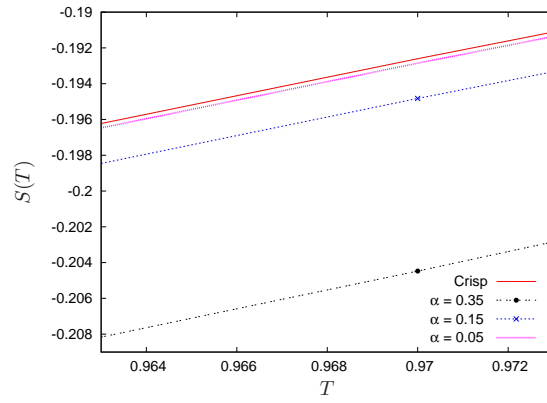


FIGURA 44 Entropias *fuzzy* observadas em uma escala menor.

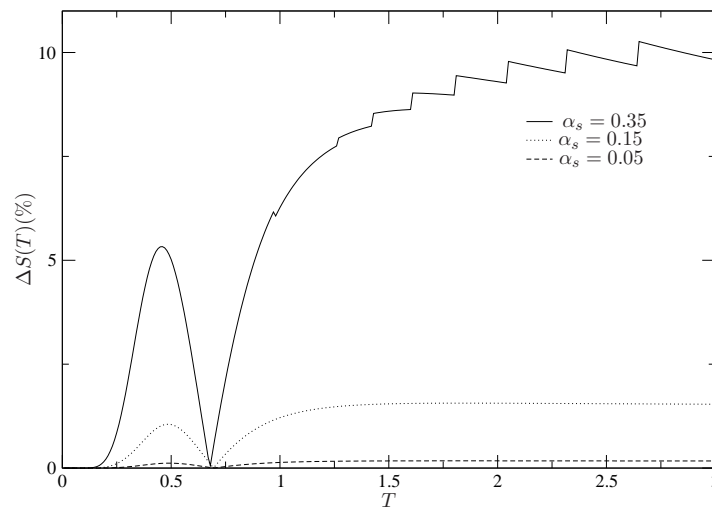


FIGURA 45 Diferença percentual das Entropias obtidas com valores de  $\alpha_s$  diferentes, em função da temperatura.

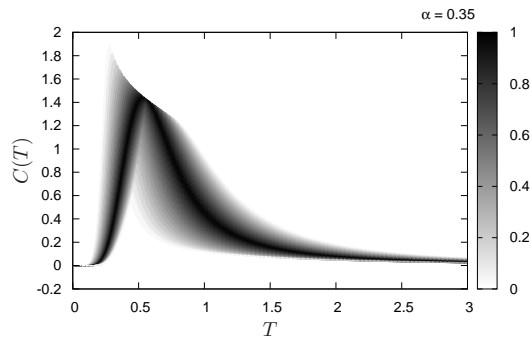


FIGURA 46 Calor Específico *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.35$ .

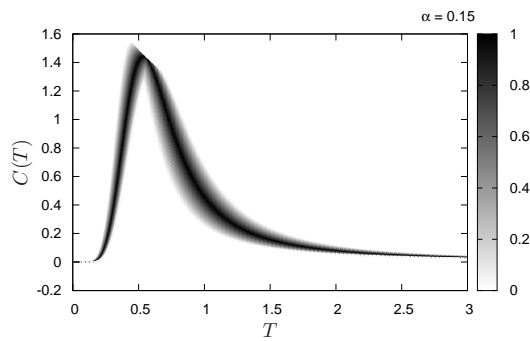


FIGURA 47 Calor Específico *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.15$ .

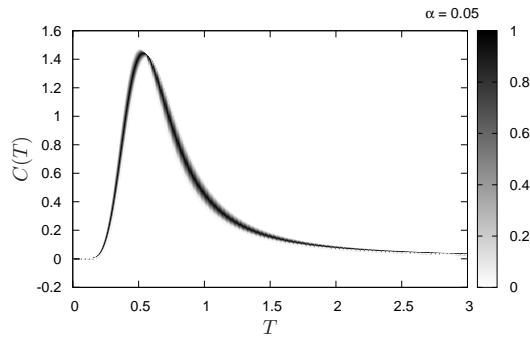


FIGURA 48 Calor específico *fuzzy* com  $J = 1$  e  $J' =$  "próximo" de 0, para  $\alpha_s = 0.05$ .

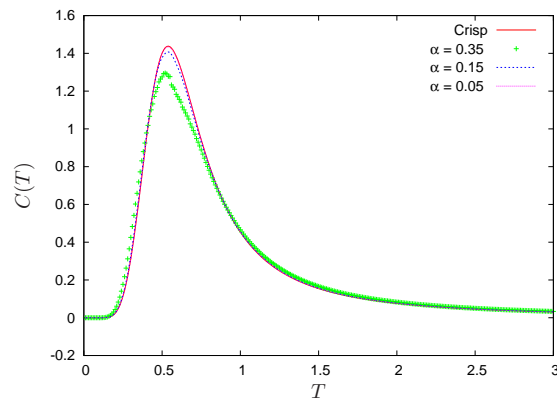


FIGURA 49 Calores Específicos *fuzzy* obtidos após o processo de defuzzificação para cada  $\alpha_s$  utilizado e o Calor específico clássico( Crisp).

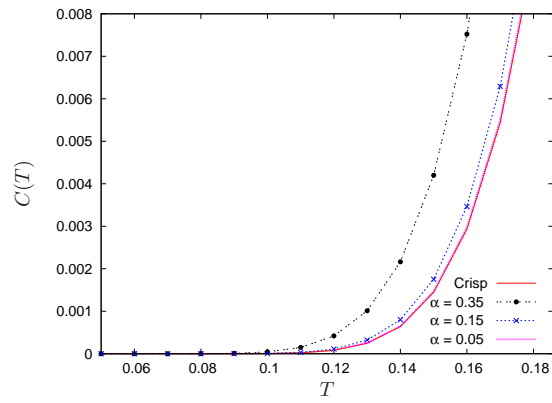


FIGURA 50 Calores específicos *fuzzy* observados em uma escala menor.

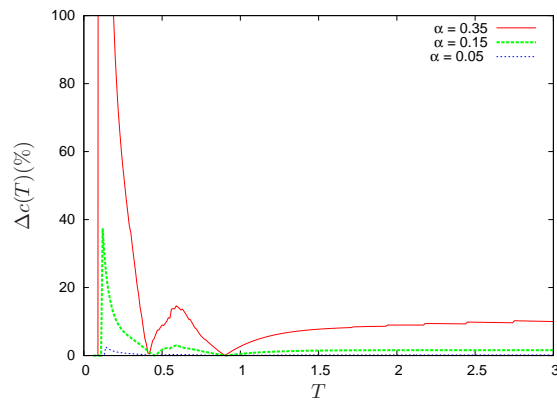


FIGURA 51 Diferença percentual Calores específicos com valores de  $\alpha_s$  diferentes, em função da temperatura.

## 4 CONCLUSÃO

É possível implementar computacionalmente e validar o princípio de extensão, desde que sejam levados em consideração os problemas de natureza numérica que possam vir a surgir mediante a complexidade das funções envolvidas. Tanto as funções de pertinência quanto as funções que serão fuzzificadas devem ter restrições bem definidas para evitar problemas como divisões impossíveis e aproximações incoerentes. Diante dessas ressalvas, a ferramenta criada e apresentada nessa dissertação permite a aplicação do princípio de extensão a qualquer função de uma forma geral, visto que as funções estudadas são de alto nível de complexidade, como no caso das grandezas termodinâmicas e uma série no caso do processo de difusão.

Para os exemplos escolhidos, verificou-se que os valores tendiam a resultados clássicos à medida em que a incerteza diminuía. Este fato nos permite concluir que o processo de fuzzificação está bem estruturado, pois evidencia uma propriedade da lógica *fuzzy* citada na seção 2.4, a de que todo número real (valor clássico) pode ser considerado um caso particular de um número *fuzzy* cuja função de pertinência é sua própria função característica, chamada de *fuzzy singleton* (ver equação 13). Isto é, uma função de pertinência que apresenta o grau de pertinência igual a '1' apenas em um ponto de seu domínio e o grau '0' nos demais.

Verificou-se que para o caso da Difusão, a implementação se fez de forma satisfatória, mesmo em se tratando de uma fuzzificação de uma série. No caso das grandezas termodinâmicas, não foi diferente. Conseguimos executar todas as operações necessárias ao princípio de extensão, mesmo se tratando de funções extremamente grandes, chegando a 183 linhas de código para uma única função.

Em trabalhos futuros, pretendemos melhorar a ferramenta criada por meio de um estudo maior da linguagem de programação e dos critérios numéricos do

compilador utilizado. Por meio de um software, esperamos também implementar as ferramentas criadas para ampliar sua aplicabilidade, tornando mais usual esta técnica estabelecendo uma interface com o usuário. Cabe aqui ainda, a interpretação física detalhada do problema da “termodinâmica *fuzzy*”. Essa é uma linha incipiente, com muitas perspectivas, possibilidades e interpretações a serem feitas. Outro ponto interessante é a possibilidade de usar essa ferramenta para aplicar a processos de difusão reais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADILEA, W. **Extração de conhecimentos a partir de redes neurais aplicada ao problema da cinemática inversa na robótica**. 2003. 120 p. Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Porto Alegre.
- ALI, T. S.; DOEBNER, H. D. On the equivalence of nonrelativistic quantum mechanics based upon sharp and fuzzy measurements. **Journal of Mathematical Physics**, New York, v. 17, n. 7, p. 1105-1111, jan. 1976.
- BARROS, L. C. **Sobre sistemas dinâmicos fuzzy: teoria e aplicação**. 1997. 102 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Campinas: IMECC / UNICAMP, 2006. 354 p.
- BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JÚNIOR, W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. Campinas: IMECC / UNICAMP, 1998. 572 p.
- BERG, H. C. **Random walks in biology**. New Jersey: Princeton University, 1993.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- CHAVES, A. **Sistemas complexos e outras fronteiras**. Rio de Janeiro: Reichmann & Affonso Editores, 2001.
- CRANK, J. **The mathematics of diffusion**. Oxford: Oxford Science, 1992.
- HORIGUCHI, T. Spin model with fuzzy ising spin. **Physics Letters**, Amsterdam, v. 176, n. 314, p. 179-183, 1993.

GOMIDE, F.; PEDRYCZ, W. **An introduction to fuzzy analysis and design**. New York: MIT, 1998. 475 p.

INCROPERA, F. P.; WITT, D. P. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Sobre sistemas dinâmicos fuzzy com retardo: uma aplicação na dinâmica do HIV com tratamento. **Revista de Biomatemática**, Campinas, v. 18, n. 4, p. 113-148, set. 2008.

JAFELICE, R. S. M. **Modelagem fuzzy para dinâmica de transferência de soropositivo para HIV em doença plenamente manifesta**. 2004. 187 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

KLIR, G. J.; YUAN, B. **Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications**. New Jersey: Prentice Hall, 1995. 574 p.

MAMDANI, E. H. Applications of Fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant. **Proceedings of the IEEE**, New York, v. 121, n. 12, p. 1585-1588, 1974.

MELO, G. J. A. **Princípio de extensão de Zadeh aplicado a funções não monótonas com dois parâmetros fuzzy**. 2009. 80 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras.

NAGAMINE, R. K. **Lógica difusa para controle não convencional de uma viga inteligente**. 2001. 113 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ORTEGA, N. R. S. **Aplicação da teoria de conjuntos fuzzy a problemas de biomedicina**. 2001. 152 p. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SALINAS, S. R. A. **Introdução à física estatística**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2005.

TANAKA, K. **An Introduction to fuzzy logic for practical applications**. New York: Springer, 1997 .

WILLIAMS, T.; KELLEY, D. **An interactive plotting program**. New Jersey: Prentice-Hall, 1998.

YEN, J.; LANGARI, R. **Fuzzy logic: intelligence, control, and information**. EUA: Prentice Hall, 1999. 547 p.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, Berkely, v. 8. n. 1, p. 338-353, 1965.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2007. v. 1, 471 p.