



ÍCARO VITERBRE DEBIQUE SOUSA

**SEMIVARIOGRAMAS MÉDIOS PARA KRIGAGEM DE
BLOCOS**

LAVRAS – MG

2025

ÍCARO VITERBRE DEBIQUE SOUSA

SEMIVARIOGRAMAS MÉDIOS PARA KRIGAGEM DE BLOCOS

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística, para a obtenção do título de Doutor.

Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

**Ficha Catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração
de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com
dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Sousa, Ícaro Viterbre Debique.

Semivariogramas médios para krigagem de blocos / Ícaro Viterbre Debique
Sousa. - 2025.

119 p. : il.

Orientador: Renato Ribeiro de Lima

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Lavras, 2025.
Bibliografia.

1. krigagem de blocos. 2. semivariância média. 3. média espacial. I. de Lima,
Renato Ribeiro. II. Universidade Federal de Lavras. III. Título.

ÍCARO VITERBRE DEBIQUE SOUSA

SEMIVARIOGRAMAS MÉDIOS PARA KRIGAGEM DE BLOCOS

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 16 de abril de 2025.

Prof. Dr. Marcelo Silva de Oliveira	UFLA
Prof. Dr. João Domingos Scalon	UFLA
Prof. Dr. Douglas Mateus da Silva	UFLA
Prof. Dr. Marcelo Lemos de Medeiros	CEFET - MG

Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima
Orientador

LAVRAS – MG
2025

A Deus, a meus pais Helton e Carmita e a meu irmão Heron.

AGRADECIMENTOS

A Deus, o Fundamento e a Razão do Universo, do Alfa ao Ômega, o Princípio e o Fim. Agradeço pela vida, por prevalecer Seus planos diante aos meus.

Aos meus pais, Helton e Carmita, pelo apoio e incentivo ao longo da minha vida; vocês são minha maior inspiração.

A meu irmão Heron, meu porto seguro em meio a qualquer caos que me ocorra.

À Larissa Antunes, pela companhia, pelo afeto e pelo apoio. Seu amor fortaleceu-me e tornou o fim da jornada mais leve e significativo.

O amor por vocês faz com que eu não desanime nessa árdua caminhada e o apoio de vocês foi essencial para a realização deste sonho.

Agradeço a Universidade Federal de Lavras (UFLA) e o Departamento de Estatística (DES), pela oportunidade de cursar o mestrado e o doutorado.

Ao Grupo de Pesquisa em Estatística Espacial (GPS), cujo apoio de todos os membros foi fundamental para enfrentar os desafios do aprendizado.

Também agradeço aos amigos inseparáveis desde a época do mestrado, Alexandre Oliveira, Pedro Nunes e Rogério Menezes que dividiram moradia e lutas em Lavras.

Os amigos Antonio Mendes e Iuri Santos, fomos inseparáveis em todo esse processo, vocês também são merecedores desse momento, vocês são os melhores.

Aos amigos Kennedy Washington e Sabrina Andrade, que foram essenciais em todas as etapas desta caminhada.

A todas as amigadas que fizeram parte desta jornada.

À Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG), pelo acolhimento e pela oportunidade de realizar o sonho da docência, em especial aos professores e verdadeiros amigos, Alessandro Leonardo, Marcelo Robert, Thaís Prado, Ivana Prado, Tiago Novais e Tânia Nogueira, por sempre me apoiarem e serem peças fundamentais na construção da minha carreira.

Aos professores membros da banca Dr. João Scalon, Dr. Marcelo Lemos e Dr. Douglas Mateus. À professora Dra. Izabela Cardoso pelo início do processo de caminhada no doutorado. Obrigado por cada ensinamento, sugestão e crítica.

Aos professores Dr. Marcelo Oliveira e Dr. Renato Ribeiro, pela orientação durante o mestrado e doutorado, por participarem e serem peça fundamental da minha estabilidade na construção de todo esse trabalho.

Ao professor Dr. Denilson do Carmo, por ser inspiração e meu apoio e da minha família na construção desse momento.

Um agradecimento especial ao professor Dr. Marcelo Lemos (professor Paraná). Obrigado por nunca me abandonar nessa trajetória nos últimos doze anos, esse trabalho é fruto do aluno que você apoiou no primeiro período de graduação, você mudou a minha vida.

Ao povo brasileiro, por confiar em minhas mãos a possibilidade de realizar este estudo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

A todos que, de alguma forma, tornaram este sonho possível.

“Se o erro não existisse, deveria ser inventado.”

Savielly Grigorievich Tartakower (1887-1956)

RESUMO

Em várias áreas da ciências, tais como biológicas, ambientais, epidemiológicas, agropecuárias, entre outras possuem dados com variações no espaço. Grande parte dos estudos, mensuram-se somente as variações utilizando métodos estatísticos que não consideram as interações existentes entre as dimensões do espaço. Ao abordar a espacialidade em dados contínuos tem-se a existência da Geoestatística, que com o uso do semivariograma é capaz de detectar a dependência espacial com a utilização do semivariograma. Comumente, a Geoestatística utiliza-se de um preditor pontual, são os casos típicos da sua utilização. Neste trabalho é tratado um sistema de predição para a média da variável aleatória do fenômeno para uma região retangular em um sistema bidimensional, denominado krigagem de blocos. A principal complexidade desta técnica é a modelagem da semivariância média entre os pontos e o bloco retangular em análise. Atualmente existem apenas métodos numéricos para se obter esse valor e limitado a fenômenos do modelo esférico. Assim, contendo erros de aproximação e limitação a diversos fenômenos. Apresenta-se então a construção analítica dos semivariogramas médios utilizados para a krigagem de blocos em regiões retangulares, considerando modelos usuais de semivariogramas. Assim cria-se a possibilidade de se aplicar a técnica em diversas situações práticas antes não possíveis. Toda a técnica para se construir os semivariogramas médios de maneira analítica é apresentada e posteriormente aplicada em um aplicativo desenvolvido em *Shiny App*, com intuito de facilitar ao usuário final a aplicação da técnica. O avanço da krigagem de blocos pode solucionar problemas de predição de média para diversos fenômenos, como produção agrícola, quantitativos de blocos de mineração ou qualquer outra necessidade de se obter valores médios da variável aleatória, considerando a espacialidade do fenômeno.

Palavras-chave: krigagem de blocos; semivariância média; média espacial.

ABSTRACT

In several areas of science, such as biological, environmental, epidemiological, agricultural sciences, among others, data often exhibit spatial variations. In most studies, only the variations are measured using statistical methods that do not take into account the existing interactions between the dimensions of space. When addressing spatiality in continuous data, geostatistics emerges, which, through the use of the semivariogram, is capable of detecting spatial dependence. Commonly, geostatistics is used with a point predictor, which is the typical case of its application. This work addresses a prediction system for the mean of the random variable of the phenomenon over a rectangular region in a two-dimensional system, known as block kriging. The main complexity of this technique lies in modeling the average semivariance between the points and the rectangular block under analysis. Currently, there are only numerical methods available to obtain this value, and they are limited to phenomena following the spherical model. Thus, they present approximation errors and limitations for various types of phenomena. This study presents the analytical construction of the average semivariograms used for block kriging in rectangular regions, considering commonly used semivariogram models. This enables the application of the technique to various practical situations that were previously not possible. The entire method for analytically constructing the average semivariograms is presented and subsequently implemented in a *Shiny App*, aiming to facilitate the application of the technique by end users. The advancement of block kriging may solve problems related to mean prediction for various phenomena, such as agricultural production, mining block estimation, or any other need to obtain average values of a random variable while considering the spatiality of the phenomenon.

Keywords: block kriging; average semivariograms; space averages.édios

INDICADORES DE IMPACTO

O estudo apresenta uma abordagem voltada a construção analítica de semivariâncias médias para krigagem de blocos e suas aplicações. A metodologia permite a utilização da técnica para qualquer região e qualquer modelo de semivariância. A interface gráfica possibilita o uso por pessoas com diferentes níveis de conhecimento técnico, sem exigir domínio teórico de alta complexidade. Embora já existirem técnicas, todas previstas na literatura são obtidas de forma numérica, o que possibilita erros e limitações, o que os resultados apresentados neste trabalho, por serem analíticos e para diversos modelos, retira esse erro computacional existente em outros trabalhos. A automação torna o processo mais acessível, podendo reduzir custos operacionais e minimizar erros da validação manual, promovendo resultados mais eficientes, confiáveis e escaláveis.

IMPACT INDICATORS

The study introduces an approach centered on the analytical construction of average semivariances for block kriging and its applications. The methodology enables the technique to be applied to any region and any semivariance model. A graphical interface allows users with varying levels of technical expertise to operate the tool without needing deep theoretical knowledge. Although existing techniques are available, those reported in the literature are derived numerically, which can introduce errors and limitations. Because the results presented here are analytical and cover multiple models, they eliminate the computational inaccuracies found in previous work. Automation further makes the process more accessible, potentially lowering operational costs and minimizing mistakes in manual validation, thereby delivering more efficient, reliable, and scalable outcomes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Campo aleatório em um plano $\mathbb{R}^2$	24
Figura 3.2 – Fenômeno anisotrópico (a) e fenômeno isotrópico (b)	25
Figura 3.3 – Distância entre dois pontos em um espaço bidimensional	26
Figura 4.1 – Semivariograma estimado, teórico e empírico	33
Figura 6.1 – Média em um espaço unidimensional	41
Figura 6.2 – Função $f(x)$ e área A_T abaixo do gráfico	42
Figura 6.3 – Função $f(x,y)$, volume V_Z e região B abaixo do gráfico	44
Figura 6.4 – Sólido com alturas $h's$ e área da base B	44
Figura 6.5 – Sólido com altura $\bar{h}$ e área da base B	45
Figura 7.1 – Região B de lados P e Q	47
Figura 7.2 – Associação ponto a ponto	49
Figura 7.3 – Associação ponto a área	50
Figura 7.4 – Semivariância média de um ponto s_1 e um bloco utilizando um ponto	51
Figura 7.5 – Semivariância média de um ponto s_1 e um bloco utilizando oito pontos	51
Figura 7.6 – Semivariância média de um ponto s_1 e um bloco utilizando trinta e dois pontos	51
Figura 7.7 – Semivariograma médio entre um ponto e uma área	53
Figura 7.8 – Curva $M(h)$ para $h \leq P$ (primeira etapa)	54
Figura 7.9 – Curva $M(h)$ para o intervalo $P < h \leq Q$ (segunda etapa)	54
Figura 7.10 – Curva $M(h)$ para o intervalo $Q < h \leq \sqrt{P^2 + Q^2}$ (terceira etapa)	55
Figura 7.11 – Curva $M(h)$ deixa de existir para $h > \sqrt{P^2 + Q^2}$	56
Figura 8.1 – Esquema de funcionamento da aplicação em <i>shiny</i>	59
Figura 9.1 – Região B de lados P e Q	60
Figura 9.2 – Interface do aplicativo - Calculadora de semivariância média	75
Figura 9.3 – Locais de inserção dos lados dos retângulo em análise - Calculadora de semivariância média	75
Figura 9.4 – Locais de inserção dos modelos de semivariograma - Calculadora de semivariância média	76

Figura 9.5 – Resultado para semivariância média entre um ponto e um bloco retangular -	
Calculadora de semivariância média	77
Figura 9.6 – Resultado obtido - Calculadora de semivariância média	78
Figura 9.7 – Comparação com a utilização das tabelas auxiliares	79
Figura 10.1 – Definição do bloco e duas amostras amostras coletadas	81
Figura 10.2 – Divisão do bloco e a amostra s_1	83
Figura 10.3 – Divisão do bloco e a amostra s_2	84
Figura 10.4 – Definição do bloco e cinco amostras coletadas	87
Figura 10.5 – Divisão do bloco e a amostra s_1	90
Figura 10.6 – Divisão do bloco e a amostra s_2	91
Figura 10.7 – Divisão do bloco e a amostra s_3	92
Figura 10.8 – Divisão do bloco e a amostra s_4	94
Figura 10.9 – Divisão do bloco e a amostra s_5	95
Figura 1 – Tabela de semivariância obtida por Clark (1979)	113
Figura 2 – Semivariância média entre o ponto s_1 e o sub-bloco B_1	114
Figura 3 – Semivariância média entre o ponto s_1 e o sub-bloco B_2	114
Figura 4 – Semivariância média entre o ponto s_1 e o sub-bloco B_3	115
Figura 5 – Semivariância média entre o ponto s_1 e o sub-bloco B_4	115
Figura 6 – Semivariância média entre o ponto s_2 e o sub-bloco B_1	116
Figura 7 – Semivariância média entre o ponto s_2 e o sub-bloco B_2	116
Figura 8 – Semivariância média entre o ponto s_2 e o sub-bloco B_3	117
Figura 9 – Semivariância média entre o ponto s_2 e o sub-bloco B_4	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 9.1 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo linear	70
Tabela 9.2 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo esférico com alcance e contribuição unitária	70
Tabela 9.3 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo pentaesférico com alcance e contribuição unitária	71
Tabela 9.4 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo cúbico com al- cance e contribuição unitária	71
Tabela 9.5 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo exponencial com alcance e contribuição unitária	72
Tabela 9.6 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo gaussiano com alcance e contribuição unitária	72
Tabela 10.1 – Tipos de indexação e a variável em um processo espacial	81
Tabela 10.2 – Distância entre os pontos e semivariância para krigagem	82
Tabela 10.3 – Tipos de indexação e a variável em um processo espacial	87
Tabela 10.4 – Pares de distância entre os pontos e semivariância para krigagem	88

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Tipos de indexação e da variável em um processo espacial	20
Quadro 8.1 – Outros pacotes utilizados no desenvolvimento do trabalho	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	ESTATÍSTICA ESPACIAL	19
3	GEOESTATÍSTICA	21
3.1	Dependência espacial	22
3.1.1	Campo aleatório	23
3.1.2	Pressuposições	24
3.1.2.1	Isotropia	25
3.1.2.2	Estacionaridade de segunda ordem	27
3.1.2.3	Hipótese intrínseca	28
4	DEPENDÊNCIA ESPACIAL E A UTILIZAÇÃO DO SEMIVARIOGRAMA	30
4.1	Parâmetros do semivariograma	33
4.2	Modelos sem patamar	34
4.3	Modelos com patamar	35
5	KRIGAGEM	37
5.1	Krigagem ordinária	38
6	A MÉDIA EM UM CONTEXTO ESPACIAL	41
6.1	Média espacial em um sistema unidimensional	41
6.2	Média espacial em um sistema bidimensional	42
6.3	Média espacial em um sistema tridimensional	43
7	KRIGAGEM DE BLOCOS	46
7.1	Semivariância média entre um ponto e uma região	49
7.1.1	Construção numérica da semivariância média entre um ponto e um bloco	51
7.1.2	Equação para a semivariância média entre um ponto e uma região	52
8	MATERIAIS E MÉTODOS	58
8.1	Pesquisa bibliográfica	58
8.2	<i>Softwares</i> utilizados	58
9	RESULTADOS	60
9.1	Resultados obtidos anteriormente para os modelos linear, esférico e pen- taesférico	62
9.1.1	Semivariograma médio para o modelo linear	62
9.1.2	Semivariograma médio para o modelo esférico	63

9.1.3	Semivariograma médio para o modelo pentaesférico	64
9.2	Resultados para os modelos cúbico, exponencial e gaussiano	65
9.2.1	Semivariograma médio para o modelo cúbico	65
9.2.2	Semivariograma médio para o modelo exponencial	67
9.2.3	Semivariograma médio para o modelo gaussiano	68
9.3	Tabelas auxiliares para semivariância média	69
9.3.1	Utilização das tabelas auxiliares	73
9.4	Aplicação em <i>Shiny App</i>	74
9.4.1	Calculadora de semivariância média	74
10	EXEMPLOS PRÁTICOS	80
10.1	Exemplo prático 1	80
10.1.1	Semivariância média entre s_1 e o bloco B	82
10.1.2	Semivariância média entre s_2 e o bloco B	84
10.1.3	Valor médio da variável aleatória no bloco B para o exemplo 1	85
10.2	Exemplo prático 2	86
10.2.1	Semivariância média entre s_1 e o bloco B	89
10.2.2	Semivariância média entre s_2 e o bloco B	91
10.2.3	Semivariância média entre s_3 e o bloco B	92
10.2.4	Semivariância média entre s_4 e o bloco B	93
10.2.5	Semivariância média entre s_5 e o bloco B	95
10.2.6	Valor médio da variável aleatória no bloco B para o exemplo 2	96
11	CONCLUSÃO	99
	REFERÊNCIAS	100
	APÊNDICES	104

1 INTRODUÇÃO

A variabilidade de fenômenos espaciais, especialmente no solo, tem sido uma preocupação há muito tempo para pesquisadores nas Ciências Agrárias. Por exemplo, Smith (1907) estudou a disposição de parcelas em um campo de milho, em um experimento de rendimento, tentando eliminar os efeitos da variação do solo. Já Montgomery (1913) estudou o efeito do nitrogênio no rendimento de trigo. Estes são exemplos da importância de estudar a variabilidade espacial.

Com isso, surge a estatística espacial, ramo da estatística que é focado em análises de dados espaciais. Dados espaciais são aqueles que possuem uma componente geográfica, ou seja, são relacionados a um lugar ou região específica no espaço. A estatística espacial é utilizada em diversas áreas, incluindo ciências ambientais, ciências agrárias, ciências da saúde e ciência dos dados. Ela permite a análise de dados espaciais de maneira mais eficiente, possibilitando a identificação de padrões e tendências espaciais, a predição de resultados futuros e a tomada de decisões baseadas em informações espaciais. A estatística espacial é uma ferramenta valiosa para entender e responder a questões complexas relacionadas fenômenos espaciais.

Um dos primeiros a observar de maneira profunda a necessidade de se explorar os dados com uma análise espacial foi Daniel Krige (1951). Enquanto trabalhava nas minas de ouro da África do Sul, percebeu que não havia o entendimento do fenômeno se não considerasse a distância entre as amostras, ou seja, se não considerasse a variação espacial. Posteriormente, os estudos de Georges Matheron (1971) desenvolveram os conceitos básicos da Geoestatística, ferramenta utilizada para a predição de fenômenos contínuos no espaço por meio de um interpolador próprio denominado krigagem, nome dado em homenagem a Daniel Krige.

Um preditor de uma variável em um ponto no espaço, chamado krigagem pontual, é a ideia mais difundida sobre a Geoestatística. Este tipo de krigagem é muito utilizado, pois, com diversos pontos em uma determinada área, é possível obter um sistema de mapeamento daquela variável. Outra ferramenta da Geoestatística é a krigagem de blocos, menos utilizada em comparação ao método de predição pontual, mas que possui grande valor, em que o sistema de mapeamento não é o fundamental e sim valores totais da variável na região.

A krigagem de blocos é uma técnica utilizada para estimar valores médios da variável aleatória de um fenômeno em regiões específicas. No entanto, um dos principais fatores que contribui para a pouca difusão da técnica é sua complexidade na obtenção dos pesos de kriga-

gem. Ao contrário da krigagem pontual, que utiliza apenas a semivariância entre os pontos, a krigagem de blocos também leva em consideração a semivariância média entre os pontos e a região, o que a torna mais complexa.

O principal objetivo deste trabalho é a construção do método analítico para se obter a semivariância média entre um ponto e um bloco para modelos de semivariogramas cúbicos, exponencial e gaussiano. Posteriormente, com os resultados obtidos, apresentar a implementação em linguagem R de um aplicativo construído em *Shiny App*, com intuito de facilitar a utilização dos resultados analíticos obtidos. A apresentação das semivariâncias médias para esses modelos é um complemento e avanço em relação a resultados apresentados por outros autores como Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976) e uma continuação do trabalho iniciado em Sousa (2020) que, junto da implementação em um aplicativo, se solidifica a modelagem da semivariância média entre um ponto e um bloco retangular para os principais modelos da literatura. Ao final, apresentar a utilização das técnicas em exemplos reais, com intuito de fortalecer ao leitor como são implementados os resultados apresentados.

Com a realização dos objetivos é possível construir semivariogramas médios para regiões retangulares de qualquer valor de lados, diferentes dos principais autores. Também é possível definir o caminho de cálculo a ser trabalhado para qualquer modelo de semivariograma, visto que nesta tese, se apresenta o raciocínio, as equações, os métodos e exemplos práticos para essa realização.

2 ESTATÍSTICA ESPACIAL

A área da Estatística que integra informações espaciais à análise de dados é conhecida como Estatística Espacial, cujo desenvolvimento passou a ter maior expressão durante a segunda metade do século XX (Diggle, 2013). De acordo com Andrade *et al.* (2007), a estatística espacial é o ramo da estatística que permite analisar a localização espacial dos fenômenos e, ao identificar, localizar e visualizar a manifestação da variável, é possível modelar sua ocorrência por meio dessas técnicas, incorporando ao modelo fatores determinantes, como a estrutura de distribuição espacial, gerando a possibilidade de identificar ou não padrões espaciais do fenômeno.

De acordo com Almeida (2012), os dados espaciais possuem duas características importantes: a primeira, referente ao valor observado ou medido; e a segunda, de natureza espacial, que fornece a coordenada da posição dos dados, transparecendo como estão arranjados no espaço. Dessa forma, os dados espaciais, além de possuírem o valor da variável, sofrem a influência de sua posição na região em análise e, como reforça Scalón (2024) o que difere a Estatística Espacial é o uso explícito dessas localizações.

Assim como numa análise estatística, Bailey, Gatrell *et al.* (1995) abordam que uma análise espacial inclui métodos de visualização e descrição dos dados, investigação do padrão espacial, escolha de um modelo estatístico e a estimação dos parâmetros do modelo. Complementando com a abordagem de Cressie (1993b), podemos compreender a Estatística Espacial como um conjunto de métodos, conceitos e técnicas que considera, explicitamente, as coordenadas espaciais, como a longitude e latitude, que são relevantes para a análise, podendo assim ser modelada como um processo estocástico espacial.

Cressie (1993b) define o processo estocástico espacial como a equação 2.1:

$$\left\{ Z(s) : s \in A \subset \mathbb{R}^d \right\} \quad (2.1)$$

em que $Z(s)$ representa uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto $s \in A$ correspondente à coordenadas no espaço $\mathbb{R}^d$ com dimensão d , sendo $d \in \mathbb{Z}_+^*$.

Cressie (1993b) apresenta a definição clássica da Estatística Espacial em três grandes áreas, denominadas Processos Pontuais (ou Padrões de Pontos), Dados de Área e Geoestatística. O Quadro 2.1 apresenta um breve resumo sobre as variáveis em cada tipo de processo espacial.

Quadro 2.1 – Tipos de indexação e da variável em um processo espacial

Processo Espacial	Tipo de Indexação	Tipo de Variável
Processos Pontuais	Contínua	Contínua ou discreta
Dados de Área	Discreta	Contínua ou discreta
Geoestatística	Contínua	Contínua ou discreta

Fonte: Oliveira *et al.* (2018)

Neste trabalho serão abordados somente temas relacionados a Geoestatística, que é o processo fundamental para o desenvolvimento da pesquisa.

3 GEOESTATÍSTICA

A Geoestatística é uma subárea da Estatística Espacial que se concentra na análise de dados espaciais. Ela é amplamente utilizada em aplicações científicas e industriais, incluindo a análise de dados de sensores remotos, a modelagem de fenômenos geofísicos, a gestão de recursos naturais, a avaliação de riscos ambientais, entre outros.

A Goestatística se baseia no uso de métodos estatísticas para modelar e analisar dados espaciais, incluindo a análise de autocorrelação espacial, a modelagem de campos aleatórios e a inversão geofísica. Ela também inclui o uso de ferramentas computacionais para visualizar e analisar dados espaciais.

Uma das principais características da Geoestatística é a sua capacidade de lidar com a variabilidade espacial dos dados. A análise de dados espaciais é complexa devido às interações entre os elementos espaciais, como a influência de um elemento sobre outro. A Geoestatística fornece uma série de técnicas para lidar com essas interações e para modelar a variabilidade espacial dos dados de maneira eficiente.

Sendo fundamental para a análise de dados espaciais em uma ampla variedade de aplicações científicas e industriais, a Geoestatística permite a modelagem e análise eficiente da variabilidade espacial dos dados, fornecendo uma série de técnicas para lidar com as interações entre os elementos espaciais (Cressie, 1993a). Em diversas áreas do conhecimento são estudados os processos de variação espacial e/ou temporal (Cressie, 1990). Muitos desses estudos têm como princípio de análise a utilização da Geoestatística.

Essa ciência surge quando Daniel Krige (1951), trabalhando nas minas de ouro na África do Sul, concluiu ao analisar suas amostras de concentração de material, que as covariâncias de duas amostras estavam relacionadas à distância entre elas. Assim, começaram a surgir os primeiros estudos do que mais tarde seria denominado Geoestatística. Na França, George Matheron (1971) desenvolveu, com base nas análises de Daniel Krige, a Teoria das Variáveis Regionalizadas. Este termo foi substituído posteriormente por Geoestatística, mas é de fato um registro histórico, os primeiros conceitos explorados por Daniel Krige e George Matheron.

Ainda segundo Matheron (1971), uma variável regionalizada é uma função $f(s)$ do ponto s , mas também é uma função irregular na qual se têm dois aspectos contraditórios ou complementares: um aspecto aleatório, cuja irregularidade não permite prever variações de um

ponto a outro; e um aspecto estruturado, que reflete as características estruturais do fenômeno regionalizado.

Análises apresentadas por George Matheron são os primeiros métodos que, posteriormente, seriam denominados como sistema de krigagem e tais técnicas foram inicialmente utilizadas na mineração. Daniel Krige foi homenageado por George Matheron com o nome krigagem, uma vez que ele foi o pioneiro nos estudos na área. Após, os conhecimentos desenvolvidos passaram a ser utilizados em dados relacionados ao ambiente. Segundo Vieira *et al.* (2000), nessa fase também foi introduzido o tempo como uma quarta coordenada, adicionada às três dimensões espaciais.

Pode-se enunciar a terceira etapa da Geoestatística com a sua aplicação ao setor petrolífero. Com essa gama de aplicações, verificou-se o potencial das ferramentas desenvolvidas por Matheron em diferentes análises de fenômenos espaciais.

A Geoestatística teve suas primeiras aplicações em mineração, como tratado por Blais & Carlier (1968), David (1970), Ugarte (1972), Olea (1975) e Journel & Huijbregts (1976); depois em hidrologia por Delhomme (1978); ciências do solo em Hajrasuliha *et al.* (1980), Vauclin *et al.* (1982) e Vieira, Lombardi & Burrows (1991); em extração de petróleo por Hohn (1998); em sensoriamento remoto por Vauclin *et al.* (1982) e Vieira *et al.* (1983); em tempos mais atuais, em aplicações para inventários florestais por Melo (2004); no controle de pragas em culturas orgânicas por Scalón *et al.* (2011); na agricultura de precisão por Oliveira, Grego & Brandão (2015); para auxiliar na avaliação de ambiência de animais em confinamento por Ferraz *et al.* (2017); em trabalhos voltados para o estudo da precipitação como em Silvestre, Flores & NETO (2016) ou mesmo na construção civil para análises de solos por Alves *et al.* (2024). A Geoestatística tem sua evolução constante ao longo do século XX e com continuidade de aplicações no século XXI. Nas seções posteriores são apresentados conceitos fundamentais da Geoestatística, como o processo da localização das amostras e do fenômeno e as pressuposições necessárias para sua utilização.

3.1 Dependência espacial

Uma característica específica de alguns fenômenos é a dependência espacial. De acordo com Matheron (1971) e Cressie (1988), dada uma variável aleatória indexada pela posição

espacial $Z(s)$, o modelo estocástico pode ser modelado em três principais componentes, como apresentado na equação (3.1).

$$Z(s) = \mu(s) + \varepsilon'(s) + \varepsilon''(s) \quad (3.1)$$

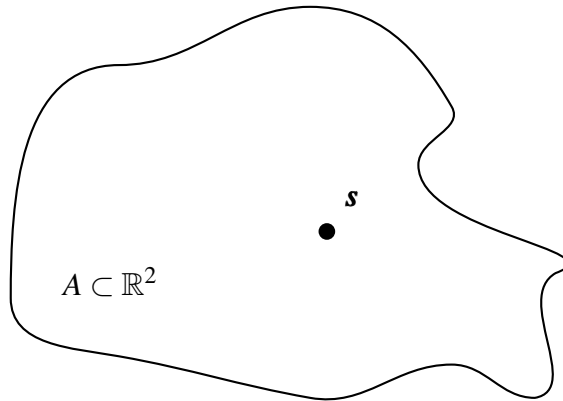
em que $\mu(s)$ é uma função que representa a variação de larga escala, ou a tendência espacial, $\varepsilon'(s)$ é uma função estocástica que representa a variação local espacialmente correlacionada $\varepsilon''(s)$ é a representa o erro (ruído) não correlacionado, em geral, com distribuição normal com média zero e variância constante. O fenômeno é o conjunto de todos os valores possíveis da variável de interesse, que define a distribuição e variabilidade espaciais dessa variável em um domínio.

3.1.1 Campo aleatório

Matheron (1971) apresenta a Teoria das Variáveis Regionalizadas como uma função espacial numérica que apresenta variações de um ponto a outro no espaço, distribuída de forma contínua no espaço. Se trata de uma variável aleatória que assume valores no espaço $\mathbb{R}^d$, que é d -dimensional, sendo $d \geq 1$ e possui valores em cada ponto nesse espaço. Cressie (1988) define a Geoestatística como um ramo da Estatística Espacial que estuda a relação de uma variável regionalizada com ela mesma em outra posição. Já Oliveira (2003) apresenta que a localização ou o suporte geométrico é uma das características da variável regionalizada e está diretamente ligada à estrutura do fenômeno espacial.

Para definir a situação em estudo, seja então $Z(s)$ uma variável aleatória medida na localização $s \in \mathbb{R}^d$ em uma região A , a Figura 3.1 ilustra um campo aleatório em um espaço em que $\mathbb{R}^2$, sendo a representação visual mais simples de ser exemplificada. Define-se então o modelo geoestatístico fundamental conforme a equação 3.2.

Figura 3.1 – Campo aleatório em um plano $\mathbb{R}^2$



Fonte: o autor.

$$\{Z(s) : s \in A \subset \mathbb{R}^d\} \quad (3.2)$$

Uma realização da variável aleatória $Z(s)$ é denotada por $\{z(s) : s \in A\}$.

De acordo com Oliveira (1991), para casos em que $d = 1$, têm-se variações unidimensionais, como as utilizadas em estudos de séries temporais; para $d = 2$, os dados estão localizados em um plano; para $d = 3$ no espaço tridimensional ou um espaço bidimensional com a associação do tempo (espaço-tempo bidimensional); e para $d = 4$, consideram-se as variações em um espaço tridimensional com a associação do tempo (espaço-tempo tridimensional), a Geoestatística possui suporte matemático para atuar em dimensões acima se for necessário. Nesta tese, o subconjunto A será denominado de região e estará sempre contido em um plano bidimensional, ou seja em $\mathbb{R}^2$, $d = 2$. Os pontos s coletados são vetores de duas coordenadas, passando a ser destacados neste trabalho como $\mathbf{s}$. Considerando somente uma variável $Z(\mathbf{s})$ em cada ponto $\mathbf{s}$, define-se para toda essa análise as observações sendo $\{z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in A \subset \mathbb{R}^2\}$.

3.1.2 Pressuposições

Uma vez determinado o espaço de trabalho utilizado pela Geoestatística, é necessário compreender pressuposições iniciais antes da utilização das técnicas. Vieira *et al.* (2000) e Scallion (2024) enunciam que podemos definir duas hipóteses de estacionaridade para uma função

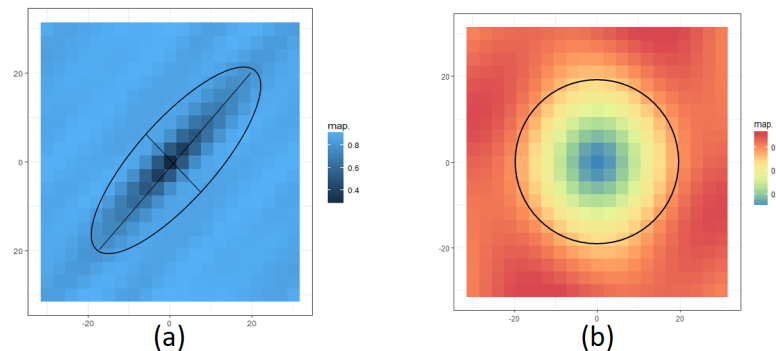
aleatória $Z(\mathbf{s})$, além da condição de isotropia do fenômeno. Nos itens 3.1.2.1, 3.1.2.2 e 3.1.2.3 são apresentados os detalhes relacionados as pressuposições necessárias para que seja possível a utilização da Geoestatística.

3.1.2.1 Isotropia

Em Geoestatística, a covariância demonstra a relação entre pontos separados por um vetor de distância $\mathbf{h}$. Uma das pressuposições mais comuns para uma análise geoestatística é que essa medida não se modifique para um mesmo vetor $\mathbf{h}$, mas em direções diferentes. Em outras palavras, a variabilidade é a mesma em todas as direções, bastando considerar a distância para caracterizar a correlação espacial.

Para situações em que a covariância não se modifica em direções diferentes, denominamos de isotropia; para uma análise geoestatística é considerada a existência da isotropia do fenômeno. Na Figura 3.2 apresentada por Yamamoto & Landim (2015) é possível observar e comparar de maneira visual as diferenças entre um fenômeno anisotrópico e um fenômeno isotrópico.

Figura 3.2 – Fenômeno anisotrópico (a) e fenômeno isotrópico (b)



Fonte: Yamamoto & Landim (2015)

Observe que na Figura 3.2, a Figura (a) é representada a anisotropia com um comportamento distinto em cada direção, mas, a Figura (b) temos um fenômeno isotrópico, que possui comportamento semelhante em todas as direções. Ressalta-se a importância em destacar que neste trabalho serão construídas todas as análises sob a hipótese de isotropia do fenômeno. De acordo com Haining (2003), na maioria dos casos, os métodos de análise para dados espaciais assumem que a estrutura de covariância espacial seja isotrópica. Assumir isotropia facilita a construção dos modelos que serão abordados nas seções seguintes.

De acordo com Yamamoto & Landim (2015), para detectar se o fenômeno espacial apresenta isotropia ou não, a covariância é calculada para várias direções. Em fenômenos isotrópicos, não se tem a necessidade de considerar a direção do vetor $\mathbf{h}$ mas somente a sua distância h , que é a distância entre os pontos.

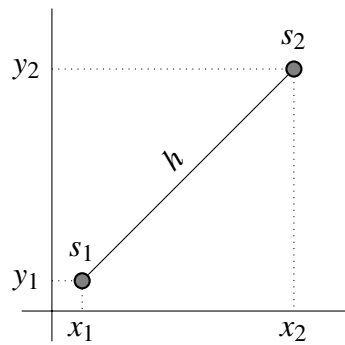
Ao utilizar a distância h entre os pontos e um plano bidimensional, ou seja, $\mathbb{R}^2$, se temos um ponto $\mathbf{s}_1$ que possui coordenadas (x_1, y_1) e um ponto $\mathbf{s}_2$ que possui coordenadas (x_2, y_2) , existe uma distância h entre eles que é determinada por:

$$h = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (3.3)$$

em que h é a distância entre dois pontos, x_1 e y_1 as coordenadas do ponto $\mathbf{s}_1$ e x_2 e y_2 as coordenadas do ponto $\mathbf{s}_2$. A definição da distância h apresentada na equação (3.3) é a definição clássica da distância euclidiana.

Os conceitos fundamentais para se obter tal resultado podem ser estudados em Bicudo (2009). Scalón (2024) reforça que ao adotar a distância euclidiana, estamos assumindo que todas as regiões de estudo são essencialmente planas. A Figura 3.3 é uma representação visual da equação (3.3).

Figura 3.3 – Distância entre dois pontos em um espaço bidimensional



Fonte: o autor.

Diante disso, Yamamoto & Landim (2015) e também Vieira *et al.* (2000) apresentam a definição para a covariância de duas variáveis regionalizadas para pontos separados por uma distância h do vetor $\mathbf{h}$, por:

$$C(\mathbf{h}) = E \{ [Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - \mu(\mathbf{s} + \mathbf{h})] \cdot [Z(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{s})] \} \quad (3.4)$$

em que $C(\mathbf{h})$ é a covariância para uma distância h , $Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})$ é a variável aleatória $Z(\mathbf{s})$ acrescido do vetor $\mathbf{h}$. Uma vez que a distância h é nula, a covariância será igual à variância de $Z(\mathbf{s})$.

Podemos concluir então que um fenômeno é dito isotrópico quando sua covariância depende somente do tamanho do vetor $\mathbf{h}$, ou seja, somente da distância h , dado pela equação (3.4), e não de sua direção ou sentido; caso contrário, denominamos de anisotropia.

3.1.2.2 Estacionaridade de segunda ordem

Na Geoestatística, a maioria das técnicas de interpolação e de análise espacial baseia-se em propriedades estatísticas das variáveis em estudo. Para que essas técnicas sejam aplicáveis de maneira consistente, costuma-se assumir a condição de estacionaridade de segunda ordem.

A definição de Vieira *et al.* (2000) para estacionaridade de segunda ordem é especialmente adequada para a utilização neste texto. Para que uma variável aleatória seja estacionária de segunda ordem, ela deve, inicialmente, ser estacionária de primeira ordem. Define-se então que uma variável aleatória $Z(\mathbf{s})$ é estacionária de primeira ordem, se:

$$E[Z(\mathbf{s})] = \mu \quad (3.5)$$

ou seja, o valor esperado $E[Z(\mathbf{s})]$ deve existir e não depender da posição $\mathbf{s}$ dentro da área A .

Para que então ela seja estacionária de segunda ordem, deve também, para cada par de variáveis aleatórias, a função covariância $C(\mathbf{h})$ existir e for somente em função da distância h , sendo para qualquer $\mathbf{s}$ dentro da região A , ou seja:

$$C(\mathbf{h}) = E[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})]^2 - \mu^2 \quad (3.6)$$

A existência de estacionaridade dá a oportunidade de repetir um experimento mesmo que as amostras devam ser coletadas em pontos diferentes, porque todas são consideradas per-

tencentos a populações com os mesmos momentos estatísticos. Se a variabilidade dependesse da posição do ponto exato, teríamos infinitas funções de covariâncias, o que tornaria o processo de ajustes de modelo com grande complexidade.

3.1.2.3 Hipótese intrínseca

A hipótese de estacionaridade de segunda ordem implica a existência de uma variância finita dos valores medidos. Esta hipótese pode não ser satisfeita para alguns fenômenos como nas concentrações de ouro em minas da África do Sul (Krige, 1951), no movimento browniano (Journel; Huijbregts, 1976) e em algumas cadeias de Markov (Bartlett, 1966), de acordo com Vieira *et al.* (2000), a hipótese intrínseca pode ser aplicada nesses casos. Nessas situações, uma hipótese menos restritiva surge, a hipótese intrínseca, que requer apenas a existência e estacionaridade do variograma, sem nenhuma restrição quanto à existência de variância finita.

Um campo aleatório é intrínseca quando além de satisfazer a equação (3.5), a estacionaridade do primeiro momento estatístico, e também o incremento $Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})$, existe somente em função de $\mathbf{h}$. Isso pode ser apresentado conforme a equação (3.7).

$$\text{Var}[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] = E[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})]^2 = 2 \cdot \gamma(\mathbf{h}) \quad (3.7)$$

em que $\mathbf{s}$ está dentro da região A e $\gamma(\mathbf{h})$ é a função variograma.

A hipótese intrínseca sustenta a definição de um único variograma capaz de descrever a variabilidade espacial, garantindo a simplicidade e robustez à modelagem, ao reduzir a complexidade de possíveis variações locais.

A definição do variograma é fundamental para a Geoestatística porque descreve quantitativamente como a variabilidade espacial de uma variável regionalizada evolui com a distância entre pontos amostrais. Ele permite identificar padrões de dependência espacial que são informações cruciais para a modelagem, pois fornecem a base para métodos de interpolação e para a estimativa da incerteza de maneira objetiva. Dessa forma, o variograma viabiliza a construção de modelos que representem de forma consistente as correlações espaciais, sendo indispensável na caracterização e no mapeamento de fenômenos naturais em áreas como mineração, petróleo e meio ambiente.

Para este trabalho adota-se que todos os fenômenos satisfazem a hipótese intrínseca e a isotropia.

4 DEPENDÊNCIA ESPACIAL E A UTILIZAÇÃO DO SEMIVARIOGRAMA

A análise de dados espaciais inicialmente era feita sob a hipótese de distribuição espacial aleatória ou independência estatística, de modo a permitir o uso de métodos como análise de variância. A Geoestatística surgiu para modificar a análise nessas situações. São exemplos os estudos de Harradine *et al.* (1950) e Ball & Williams (1968). A mudança se inicia com os conceitos elaborados por Matheron (1971), momento que passamos a ter condições de trabalhar com a dependência espacial.

De acordo com Scalon (2024), a dependência espacial surge, pois espera-se que em uma superfície contínua, duas amostras vizinhas estejam mais propensas a apresentarem valores mais próximos do que duas amostras distantes. Ainda segundo Scalon (2024), por razões históricas, a dependência espacial é modelada pela semivariância, ao invés da covariância ou correlação. Sendo assim, o semivariograma é uma medida da dependência espacial de um atributo em um conjunto de dados. O semivariograma é definido como metade da variância entre os valores de um atributo em dois pontos separados por uma determinada distância h (Hengl *et al.*, 2014). Ele é geralmente plotado como uma função da distância entre os pontos e pode ser usado para descrever a estrutura espacial dos dados. As diferenças quadráticas entre os valores permitem então a construção do semivariograma que, segundo Isaaks & Srivastava (1989), é a ferramenta base da Geoestatística. Oliveira (1991) complementa que a construção do semivariograma é parte crucial para toda a modelagem Geoestatística e, naturalmente, para a concepção da krigagem.

Antes de apresentar o semivariograma, é importante ressaltar que consideramos as abordagens de Yamamoto & Landim (2015) sobre isotropia, em que podemos considerar isotrópicos aqueles fenômenos que não dependem de todo vetor $\mathbf{h}$ e sim somente da distância h entre os pontos. Como este trabalho aborda somente fenômenos isotrópicos, todas as representações de semivariograma utilizadas serão somente em função de h , ou seja, a distância entre os pontos.

O semivariograma é um parâmetro populacional que, sob a hipótese intrínseca, é apresentado por Matheron (1971) pela equação (4.1):

$$\gamma(|\mathbf{h}|) = \gamma(h) = \frac{E [Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})]^2}{2} \quad (4.1)$$

O ponto $\mathbf{s}$ é um ponto no espaço e $|\mathbf{h}| = h$ é a norma do vetor $\mathbf{h}$, logo, $\mathbf{s} + \mathbf{h}$ é o mesmo ponto deslocado em uma distância h em uma direção genérica, ou seja, o semivariograma em função somente de h .

Assumindo as suposições de estacionariedade intrínseca, o semivariograma pode ser estimado por meio do semivariograma experimental, obtido pelo estimador clássico de Matheron (1971), definido na equação (4.2), ou seja,

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2 \cdot N(h)} \cdot \sum_{\forall(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) \mid |\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j| = h}^{N(h)} [z(\mathbf{s}_i) - z(\mathbf{s}_j)]^2 \quad (4.2)$$

em que $\{z(\mathbf{s}_1), z(\mathbf{s}_2), \dots, z(\mathbf{s}_n)\}$ é uma amostra espacial, $N(h)$ é o número de pares de valores medidos $z(\mathbf{s}_i)$ e $z(\mathbf{s}_j)$, separados por uma distância h . O estimador é somente em função da distância h entre os pontos. Scalon (2024) reforça que em muitas situações o termo variograma é, em geral, utilizado como sinônimo de semivariograma, mesmo sabendo que, na verdade, trata-se do semivariograma.

De acordo com Scalon (2024), o estimador clássico apresentado na equação 4.2, possui sensibilidade a *outliers*, uma vez que suas ordenadas são calculadas a partir da soma de quadrados das diferenças dos valores dos dados entre pares amostrais. Uma alternativa é apresentada por Cressie & Hawkins (1980), um novo estimador para o semivariograma, enunciado pela equação (4.3), proposto para situações em que os dados apresentam *outliers*, sendo um estimador menos sensível a presença desses tipos de dados. Uma vez que se calcula a raiz quadrada das diferenças, o estimador é menos afetado por valores discrepantes do que a média das quadrados de diferenças do estimador de Matheron.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\left[\frac{1}{N(h)} \cdot \sum_{\forall(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) \mid |\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j| = h}^{N(h)} \sqrt{z(\mathbf{s}_i) - z(\mathbf{s}_j)} \right]^4}{0,457 + \frac{0,494}{N(h)}} \right\} \quad (4.3)$$

em que $N(h)$ é o número de pares de valores medidos $z(\mathbf{s}_i)$ e $z(\mathbf{s}_j)$, separados por uma distância h .

Segundo Cressie (1988), da sua própria definição, é possível apresentar as seguintes propriedades de $\gamma(h)$.

A semivariância será sempre um valor positivo.

$$\gamma(h) \geq 0 \quad (4.4)$$

O valor da semivariância não sofre interferência se a análise é do ponto $\mathbf{s}_i$ para um ponto $\mathbf{s}_j$ ou de $\mathbf{s}_j$ para o ponto $\mathbf{s}_i$.

$$\gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = \gamma(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i) \quad \forall \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^d \quad (4.5)$$

Se a semivariância é um função da distância h entre dois pontos, ela será nula quando o valor da distância for nulo. Dessa forma,

$$\gamma(0) = 0 \quad (4.6)$$

Oliveira (1991) afirma que o sentido físico do semivariograma $\gamma(h)$ pode ser percebido quando se analisa sua definição: ele mede a variabilidade das diferenças entre as realizações da variável aleatória de interesse, de tal maneira que quanto menor a semivariância, menor a variação dessas diferenças, ou seja, pontos com menor semivariância possuem maior dependência espacial entre si.

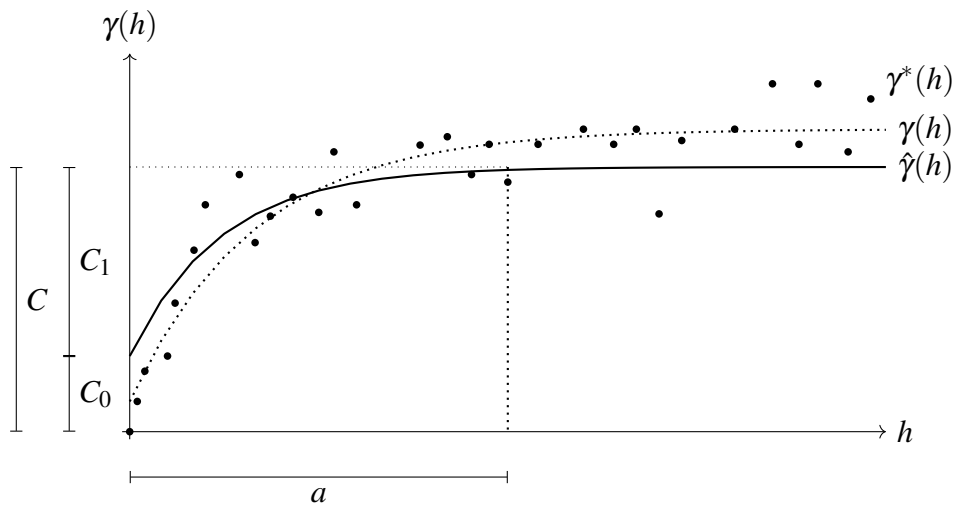
A importância do semivariograma para a Geoestatística está no fato de ele ser a principal ferramenta de análise da dependência espacial dos dados. É por meio dele que se modela a variação de uma variável ao longo do espaço e se constrói a base para estimativas mais confiáveis em áreas não amostradas, bem como para o entendimento aprofundado da variabilidade e continuidade espacial de fenômenos naturais e industriais. O gráfico do semivariograma experimental $\gamma(h)$ é obtido utilizando a equação (4.2), que mostra um conjunto de pontos de maneira discreta ($\gamma^*(h)$) e tem-se a necessidade de ajustar uma função contínua ($\hat{\gamma}(h)$) sobre esse conjunto de pontos.

4.1 Parâmetros do semivariograma

Existem vários modelos utilizados que podem ser encontrados em Clark (1979), Yamamoto (2001), Chiles & Delfiner (2009), Yamamoto & Landim (2015), Schabenberger & Gotway (2017) e Scalón (2024), mas que neste trabalho serão apresentados apenas os presentes nas Seções 4.2 e 4.3.

A Figura 4.1 é uma ilustração de semivariograma com patamar, com seus parâmetros C , C_0 , C_1 e a , denominados, respectivamente, de patamar, efeito pepita, contribuição e alcance. Têm-se também $\gamma^*(h)$ representando a nuvem de pontos, ou seja, os valores estimados pontualmente da semivariância para cada distância h existente; $\gamma(h)$ o semivariograma paramétrico, sempre desconhecido, que é o que se pretende estimar; e $\hat{\gamma}(h)$ que representa o semivariograma teórico ou ajustado, sobre a nuvem de pontos, que é o estimador final do semivariograma paramétrico.

Figura 4.1 – Semivariograma estimado, teórico e empírico



Fonte: o autor.

Nos semivariogramas com patamar, com o aumento do valor de h , $\gamma(h)$ também aumenta até um valor máximo no qual se estabiliza. Esse valor no qual $\gamma(h)$ se estabiliza chama-se patamar (C) o qual, de acordo Vieira *et al.* (2000), é aproximadamente igual à variância dos dados. A distância na qual $\gamma(h)$ atinge o patamar é chamada de alcance (a) e é a distância limite da dependência espacial, ou seja, faz parte do campo estruturado do fenômeno.

É esperado que medições localizadas próximas sejam mais parecidas entre si do que aquelas separadas com grande distância. Dessa maneira, $\gamma(h)$ cresce com a distância h . Alguns fenômenos apresentam descontinuidade na origem de seu semivariograma, denominado de efeito pepita (C_0). Para Oliveira (1991), o mesmo expressa limitação na estimação do semivariograma em pequenos espaçamentos e, de acordo com Cressie (1988), sua ocorrência pode estar associada ao aumento acentuado na dependência espacial entre pares de pontos próximos. Por definição, $\gamma(0) = 0$, que pode ser visto pela equação (4.2) e a propriedade descrita em (4.6), quando $h = 0$. Entretanto, na prática, à medida que h tende a zero, $\gamma(h)$ se aproxima do valor do efeito pepita (C_0).

O semivariograma apresenta a dependência espacial do fenômeno. Conhecendo essa característica, é possível obter previsões da variável aleatória naquela região. O ajuste ideal do semivariograma é extremamente importante (Cressie, 1988). Neste trabalho não serão apresentados os métodos para o ajuste do semivariograma ao fenômeno, para isso, o texto de Scalon (2024) se torna ideal, abordando a modelagem dos semivariogramas a diversas situações utilizando em linguagem R Core Team (2025).

Neste trabalho serão apresentados alguns exemplos dos dois grupos existentes que satisfazem as condições necessárias, modelos sem patamar e modelos com patamar.

4.2 Modelos sem patamar

Olea (1975), Chiles & Delfiner (2009), Yamamoto & Landim (2015) e Scalon (2024) apresentam alguns modelos sem patamar que estimam a função $\gamma(h)$, satisfazendo as exigências (4.4), (4.5) e (4.6). Para este trabalho iremos citar somente alguns modelos, denominados como modelo potência (4.7) e modelo linear (4.8), dados por:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + a \cdot h^\alpha, & \text{para } h > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + a \cdot h, & \text{para } h > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

em que $\hat{\gamma}(h)$ representa o semivariograma teórico ou ajustado, C_0 é o efeito pepita, a fator de angulação da curva com o eixo das abcissas e h a distância entre os pontos. Observe que o modelo linear é um caso particular do modelo potência quando $\alpha = 1$.

4.3 Modelos com patamar

Olea (1975), Chiles & Delfiner (2009), Yamamoto & Landim (2015) e Scalón (2024) apresentam alguns modelos com patamar que estimam a função $\gamma(h)$, satisfazendo as exigências (4.4), (4.5) e (4.6). Para este trabalho iremos citar somente alguns modelos, denominados como modelo esférico (4.9), modelo pentaesférico (4.10), modelo cúbico (4.11), modelo exponencial (4.12) e modelo gaussiano (4.13), dados por:

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot \left[1,5 \cdot \left(\frac{h}{a}\right) - 0,5 \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^3 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot \left[1,875 \cdot \left(\frac{h}{a}\right) - 1,25 \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^3 + 0,375 \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^5 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot \left[7 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^2 - 8,75 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^3 + 3,5 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^5 - 0,75 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^7 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{h}{a} \right)} \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{h}{a} \right)^2} \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (4.13)$$

em que $\hat{\gamma}(h)$ representa o semivariograma teórico ou ajustado, C_0 é o efeito pepita, C_1 é a contribuição, a o alcance do fenômeno e h a distância entre os pontos.

Olea (1975) e Yamamoto (2020) ressaltam que os modelos esférico, pentaesférico, cúbico, exponencial e gaussiano contemplam a grande parte dos fenômenos espaciais. Existem outros modelos que podem ser utilizados e que seguem as pressuposições necessárias. Neste trabalho serão tratados somente esses modelos, uma vez que apresentam capacidade de se adequar a grande parte dos fenômenos.

5 KRIGAGEM

Em uma situação hipotética, o estudo de variáveis espaciais seria realizado sem incertezas se fosse possível coletar as infinitas amostras na região estudada. Naturalmente, esta é uma situação impossível de se realizar. A alternativa que pesquisadores possuem é a coleta de amostras que, posteriormente, podem ser usadas como base da predição dos valores não amostrados naquela região. Diversas maneiras são possíveis para obter tais predições e Yamamoto (2020) exemplifica alguns desses métodos, sendo um deles a krigagem.

Denomina-se krigagem o método que utiliza os conceitos da Teoria das Variáveis Regionalizadas, ou seja, a Geoestatística, para a interpolação de valores em qualquer posição no espaço em análise. O nome krigagem foi dado por George Matheron, em homenagem ao Engenheiro de Minas e Matemático sul-africano Daniel Krige, o primeiro a realizar estudos da variabilidade espacial utilizando-se de considerações mais avançadas.

Journel & Huijbregts (1976) enunciam que existem vários métodos de krigagem, em que todos os preditores são variantes do preditor básico de regressão linear $\hat{Z}(\mathbf{s})$. Ainda de acordo com Journel & Huijbregts (1976), para que o preditor seja ótimo, ele não pode ser tendencioso e possuir variância mínima, ou seja,

$$E [\hat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)] = 0 \quad (5.1)$$

$$Var [\hat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)] = E \left\{ [\hat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)]^2 \right\} \Rightarrow \text{mínima} \quad (5.2)$$

As equações (5.1) e (5.2) representam as condições de não tendenciosidade e de variância mínima, respectivamente. Essas devem ser satisfeitas, logo, são a base para a dedução para qualquer sistema de krigagem, como a krigagem simples, universal e indicadora. Para se introduzir os conceitos, utilizamos a krigagem ordinária. Seu entendimento é a base para, posteriormente, a apresentação da krigagem de blocos.

5.1 Krigagem ordinária

O objetivo mais habitual da Geoestatística é prever valores da variável aleatória $Z(\mathbf{s})$ em pontos não amostrados, denominados $\mathbf{s}_0$ (Oliveira, 1991). A krigagem ordinária é o método mais utilizado, pela simplicidade e resultados que proporciona (Yamamoto; Landim, 2015). A krigagem ordinária é fundamental na Geoestatística por sua capacidade de gerar estimativas espacialmente coerentes, minimizar erros de predição e fornecer uma avaliação quantitativa da incerteza associada.

Suponha que se queira prever os valores da variável aleatória $Z(\mathbf{s})$ para qualquer valor $\mathbf{s}_0$, onde não se tem valores medidos. Conhecido o semivariograma da variável e havendo dependência espacial entre as amostras, como mostra o semivariograma, Isaaks & Srivastava (1989), Schabenberger & Gotway (2017), Chiles & Delfiner (2009), Vieira *et al.* (2000), Diggle, Tawn & Moyeed (1998) e Yamamoto & Landim (2015) definem então o preditor para a variável aleatória no ponto $\mathbf{s}_0$:

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot z(\mathbf{s}_i) \quad (5.3)$$

em que N é o número de valores observados $z(\mathbf{s}_i)$; λ_i são os pesos associados a cada valor. Os valores dos pesos λ_i para satisfazer (5.1) e (5.2) devem possuir $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$. Em Vieira *et al.* (2000) é apresentado a dedução para a equação (5.3).

A krigagem possui os pesos como variáveis que expressam a variabilidade espacial que é determinada com auxílio do semivariograma. O preditor corresponde a uma média móvel ponderada e, ao satisfazer as equações (5.1) e (5.2) sob a hipótese intrínseca, torna a krigagem um interpolador ótimo. Existem vários métodos de interpolação, mas somente a krigagem possui as condições de variância mínima e não-tendenciosidade, sendo assim o sistema com mais credibilidade e utilizado.

Para a interpolação é necessário satisfazer a variância mínima (5.2). Para o caso da krigagem ordinária, Burgess & Webster (1980a) mostram que (5.2) implica que

$$E \left\{ [Z(\mathbf{s}_0) - \hat{Z}(\mathbf{s}_0)]^2 \right\} = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \gamma(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_i) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) \quad (5.4)$$

Vieira *et al.* (2000) apresentam a demonstração para a equação (5.4). Perceba que, para a variância tem-se o valor $Z(\mathbf{s}_0)$ desconhecido, mas segundo Isaaks & Srivastava (1989), a solução para esse problema é baseado em um modelo probabilístico, de tal forma que os valores desconhecidos são considerados realizações de um processo aleatório.

Para encontrar os pesos ótimos satisfazendo as condições necessárias, utiliza-se a técnica dos multiplicadores de Lagrange, da qual se obtém a lagrangiana, isto é, a função das coordenadas generalizadas (Yamamoto, 2001). Oliveira (1991) ressalta que, ao determinar um preditor, procura-se um *Best Linear Unbiased Predictor* (BLUP), que se trata do melhor estimador linear.

Isaaks & Srivastava (1989), Schabenberger & Gotway (2017), Chiles & Delfiner (2009), Vieira *et al.* (2000), Diggle, Tawn & Moyeed (1998) e Yamamoto & Landim (2015) e outros autores apresentam que os pesos são obtidos a partir da solução da equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n) & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_0) \\ \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

em que $\gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ é a semivariância entre todos os pontos amostrados, $\gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_0)$ é a semivariância entre os pontos amostrados e ponto $\mathbf{s}_0$ que se deseja obter, λ_i são pesos de krigagem que serão utilizados na equação 5.3.

A equação (5.6) é a simplificação da equação (5.5).

$$A^{-1} \cdot \mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda} \quad (5.6)$$

em que A^{-1} é a inversa da matriz de semivariância entre os pontos observados, $\mathbf{b}$ é o vetor de semivariâncias entre os pontos observados e o ponto que se deseja estimar e o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor

dos pesos de krigagem, acrescido de μ que é um multiplicador de Lagrange que possibilita a adequação de não tendência.

A Geoestatística utiliza os conceitos de dependência espacial, que são mensurados por meio do semivariograma que, com a krigagem, se obtém o preditor ótimo e que possui uma medida de qualidade, a variância de krigagem. Cressie (1990) afirma que todos os fatores citados são os que posicionam a krigagem como um método em vantagem sobre outros.

Quando se tem a necessidade de prever pontos não amostrados em uma determinada região, a krigagem ordinária é a melhor opção. Oliveira (1991) ressalta que a principal característica da Geoestatística e, naturalmente, da krigagem, é a obtenção de mapas da região em estudo e que com a predição de uma grande quantidade de pontos é possível mapear todo o fenômeno. Os sistemas de krigagem têm algumas particularidades que facilitam os cálculos e a solução do sistema, utilizando como ferramenta para gerar mapas da variável na região de estudo.

A seguir será apresentado o conceito fundamental para se compreender outro sistema de krigagem que apresenta outro tipo de informação: a predição de uma média espacial.

6 A MÉDIA EM UM CONTEXTO ESPACIAL

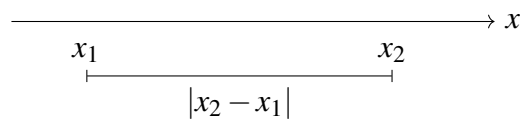
Sendo uma medida de posição bastante utilizada, a média tem seu conceito de maneira familiar e bastante intuitiva. Valores médios, muitas vezes, são um grande auxílio em decisões industriais ou mesmo em pesquisas. Para uma região de extração de minério, em uma análise de dados, pode ser importante obter o valor médio da quantidade de minério a ser extraído, pois os custos da extração devem ser menores do que as vendas do material, tornando a média uma informação importante nesse momento.

A média aritmética simples como conhecemos não considera a dependência espacial dos dados. Podemos imaginar que em dados que possuem dependência espacial, a média pode sofrer alterações em seu resultado de acordo com a posição no espaço. Nos itens 6.1, 6.2 e 6.3 são apresentados conceitos básicos relacionados à média espacial para funções. Essas abordagens serão essenciais para o entendimento das médias espaciais e sua obtenção por meio da krigagem de blocos.

6.1 Média espacial em um sistema unidimensional

Suponhamos uma reta com valores que variam de x_1 até x_2 em um domínio $D = \{x \in \mathbb{R}\}$, como na Figura 6.1.

Figura 6.1 – Média em um espaço unidimensional



Fonte: o autor.

É possível obter a média dos dois valores conforme a equação (6.1):

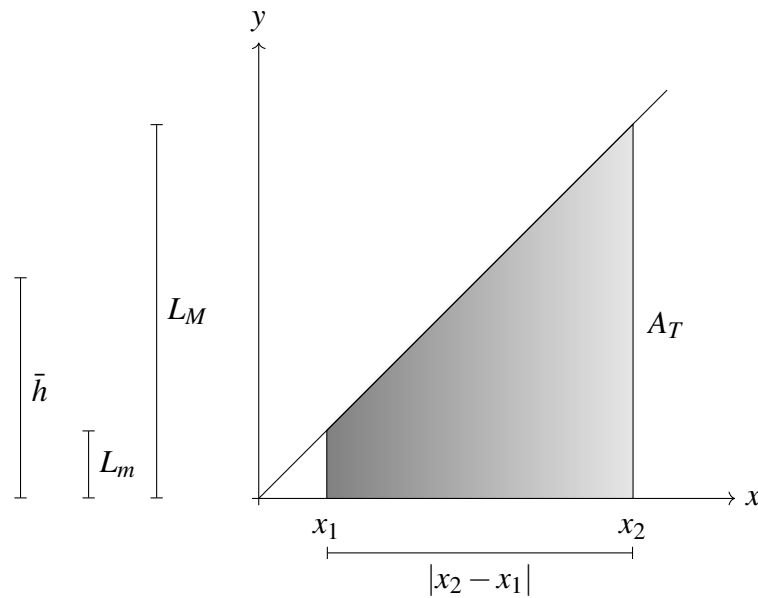
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (6.1)$$

Ferreira (2005) enuncia que este é o conceito da média entre dois valores. A seguir teremos a evolução do cálculo da média para uma situação bidimensional e, posteriormente, em uma hipótese tridimensional.

6.2 Média espacial em um sistema bidimensional

Seja uma função $f(x) = x$ em um domínio $D = \{x \in \mathbb{R}\}$ e suponha também que temos a necessidade de encontrar o valor médio da função entre os pontos $[x_1, x_2]$, ou seja, o valor médio de um sistema bidimensional, em um plano x, y . Ao calcularmos a área A_T , como demonstrado na Figura 6.2, tem-se que este será o ponto de partida para obtermos o valor médio da função que denomina-se $\bar{h}$.

Figura 6.2 – Função $f(x)$ e área A_T abaixo do gráfico



Fonte: o autor.

A área de uma função em determinado trecho pode ser obtida utilizando métodos de integração (Stewart, 2001). No caso da área definida na Figura 6.2, a área A_T pode ser obtida conforme na equação (6.2).

$$A_T = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \quad (6.2)$$

Observamos na Figura 6.2 a marcação de cotas de três elementos, os valores L_m , L_M e $\bar{h}$, sendo este último o valor médio das duas primeiras marcações. Com este valor médio, é possível obter a área A_T utilizando a equação geral da área de um trapézio. Então podemos obter a área, conforme os cálculos a seguir:

$$A_T = \frac{(L_m + L_M) \cdot Base}{2} = \frac{(L_m + L_M) \cdot |x_2 - x_1|}{2} = \bar{h} \cdot |x_2 - x_1| \quad (6.3)$$

em que a “Base” é o intervalo em que estamos calculando a área; L_M o lado maior do trapézio e L_m é o lado menor do trapézio, todos apresentados na Figura 6.2.

Com manipulações algébricas na equação (6.3), temos a conclusão que, para um sistema bidimensional, a altura média, ou seja, o valor médio da função pode ser obtida pela equação (6.4).

$$\bar{h} = \frac{A_T}{|x_2 - x_1|} \quad (6.4)$$

As equações (6.2) e (6.3) nos auxiliam a obter o valor médio da função $f(x)$, que pode ser definido conforme equação (6.5).

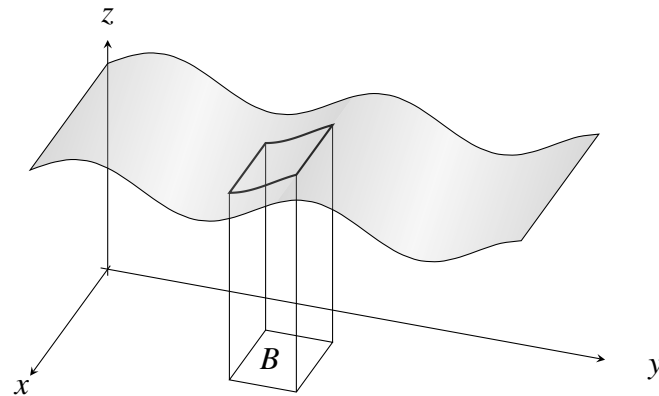
$$\bar{h} = \bar{f}(x) = \frac{1}{|x_2 - x_1|} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (6.5)$$

A equação (6.5) é a representação de um exemplo de uma média espacial em duas dimensões. Os conceitos utilizados serão abordados em um sistema tridimensional, de maneira análoga aos apresentados em 6.1 e 6.2 e apresentados na seção 6.3.

6.3 Média espacial em um sistema tridimensional

Com os conceitos apresentados nas seções 6.1 e 6.2, é possível observar que é aplicável também em outras dimensões. Para introduzir a ideia de média espacial em um sistema tridimensional, considere uma função $f(x, y)$ em um domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ e dada uma região B abaixo da superfície da função $f(x, y)$, conforme ilustrado na Figura 6.3.

Figura 6.3 – Função $f(x,y)$, volume V_Z e região B abaixo do gráfico



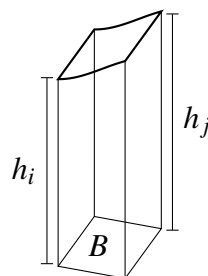
Fonte: o autor.

Podemos utilizar o volume do sólido definido como V_Z e representado na Figura 6.3 para iniciar o conceito do valor médio da função em um espaço tridimensional, Stewart (2001) apresenta que pode ser obtido pela integral (6.6) abaixo dessa região, ou seja, a integral da função no domínio da região estudada. Assim,

$$V_z = \int \int_B f(x,y) dx dy \quad (6.6)$$

Na Figura 6.4, o sólido abaixo do gráfico da função possui variações em sua altura, ou seja, possui diversas alturas h ao longo de toda área B ; sendo infinitas alturas. Essa característica impede que utilizemos equações comumente conhecidas para cálculo de volumes. O sólido não é uma geometria comum.

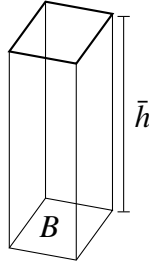
Figura 6.4 – Sólido com alturas h' s e área da base B



Fonte: o autor.

Suponha que seja possível somar todas as alturas deste sólido e obter a altura média ($\bar{h}$). Assim, teríamos um sólido uniforme, conforme apresentado na Figura 6.5. Com este sólido podemos definir a equação do volume V_Z (6.6) de uma nova maneira, como apresentado na equação (6.7), que tem como princípio as ideias abordadas nas seções 6.1 e 6.2.

Figura 6.5 – Sólido com altura $\bar{h}$ e área da base B



Fonte: o autor.

Assim,

$$V_z = \int \int_B f(x,y) dx dy = \bar{h} \cdot |B| \quad (6.7)$$

em que $|B|$ é a área da região abaixo da superfície, ou seja, o volume é a altura média multiplicada pela região. Um exemplo semelhante foi obtido na equação (6.3) para o modelo bidimensional na Seção 6.2.

Podemos definir a altura média ($\bar{h}$), ou seja, o valor médio da função $f(x,y)$, dado por:

$$\bar{h} = \bar{f}(x,y) = \frac{V_Z}{|B|} = \frac{1}{|B|} \cdot \int \int_B f(x,y) dx dy \quad (6.8)$$

Assim, a equação (6.8) representa o valor médio de uma função f de duas variáveis em um retângulo B contido em seu domínio, ou seja, o valor $\bar{h}$. Os conceitos de média de uma função são essenciais para compreendermos, posteriormente, a krigagem de blocos. Devido às limitações físicas de representação, foram abordados somente os modelos unidimensional, bidimensional e tridimensional, mas o mesmo princípio se aplicaria em dimensões espaciais superiores.

7 KRIGAGEM DE BLOCOS

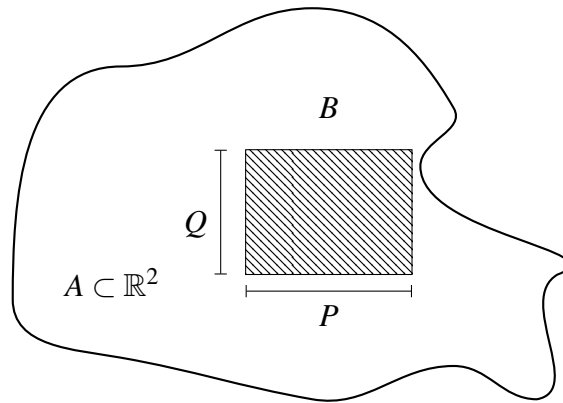
Como visto nas seções anteriores, para uma função em um espaço unidimensional, bi-dimensional ou tridimensional, os valores médios das funções estão relacionados ao quociente da integral daquela função pela região onde ela ocorre. Essa ideia é construída para qualquer função e é naturalmente observável. Todas essas integrais apresentadas nos itens anteriores são sempre possíveis de se calcular com conhecimentos de cálculo Stewart (2001) sendo definidas como integrais de Riemann. O questionamento inicial que pode surgir é que, se fenômenos espaciais são caracterizados por uma variável aleatória, o que iria ocorrer se, em um espaço n -dimensional, ao invés de termos uma função f , tivéssemos uma variável aleatória.

A krigagem de blocos surge na mineração, quando ao dividir uma região a ser minerada em diversos blocos, é necessário estimar a quantidade de material em cada bloco. Por esta demanda surge o nome krigagem de blocos. Em planos de duas dimensões também pode ser chamada de krigagem de área. Essa demanda implica em calcular a média de variáveis aleatórias no espaço. É sempre importante ressaltar que a utilização desse método resulta em uma média espacial sem viés, já que também se trata de uma krigagem que apresenta as propriedades de variância mínima e não tendenciosidade (Schabenberger; Gotway, 2017). A krigagem de blocos é uma ferramenta poderosa para converter dados pontuais em estimativas médias espaciais, auxiliando no planejamento e na tomada de decisão em diversos campos.

Com a Geoestatística pode-se estimar a média do bloco de cubagem por meio da discretização do bloco em pontos, que podem ser avaliados individualmente e depois compostos para o bloco, ou então diretamente, calculando-se os vetores médios dos sistemas de equação.

Suponha o processo $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in A \subset \mathbb{R}^2\}$ que possui uma sub-região retangular B de lados P e Q , conforme apresentado na Figura 7.1 . Possuímos as amostras $\{z(\mathbf{s}_1), \dots, z(\mathbf{s}_n)\}$ e não estamos interessados em prever um ponto $z(\mathbf{s}_0)$ (como na Seção 5.1), mas sim um valor médio da região B , ou seja, o valor médio da variável aleatória na região B , dado por $\bar{Z}(B)$.

Figura 7.1 – Região B de lados P e Q



Fonte: o autor.

Chiles & Delfiner (2009) e Schabenberger & Gotway (2017) definem $\bar{Z}(B)$ como:

$$\bar{Z}(B) = \frac{1}{|B|} \cdot \int_B Z(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (7.1)$$

em que $|B|$ representa a área da região B .

A equação (7.1) se assemelha às equações que foram construídas nos itens 6.1, 6.2 e 6.3. Ainda na equação (7.1) temos que nos atentar que o integrando é uma variável aleatória, neste caso, possuímos uma integral estocástica cuja convergência se dá por média quadrática e não por uma integral de Riemann. A integração de uma variável aleatória, apesar de apresentar notação igual a integral de Riemann, é um conhecimento específico do estudo de cálculo estocástico.

Chiles & Delfiner (2009) e Schabenberger & Gotway (2017) apresentam o preditor para a krigagem de blocos, que é construído de forma análoga à krigagem pontual (5.5) e é dado por:

$$\hat{\bar{Z}}(B) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot z(\mathbf{s}_i) \quad (7.2)$$

Assim como na krigagem pontual, N é o número de valores coletados $z(\mathbf{s}_i)$ e λ_i são os pesos associados a cada valor.

Na krigagem de blocos, os valores dos pesos λ_i também devem possuir $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$. Assim, como na krigagem ordinária, é necessário suprir a condição de não-tendenciosidade (5.1) e variância mínima (5.2).

Burgess & Webster (1980b), Schabenberger & Gotway (2017) e Journel & Huijbregts (1976) apresentam a equação matricial para se obter os pesos λ_i que é dada por:

$$\begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n) & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(\mathbf{s}_1, B) \\ \bar{\gamma}(\mathbf{s}_2, B) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}(\mathbf{s}_n, B) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

em que $\gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ é a semivariância entre todos os pontos amostrados, $\bar{\gamma}(\mathbf{s}_i, B)$ é a semivariância média entre os pontos amostrados e o bloco B que se deseja obter o valor médio da variável aleatória, λ_i são pesos de krigagem que serão utilizados na equação 7.3.

Podemos simplificar a equação (7.3) na equação (7.4).

$$A^{-1} \cdot \mathbf{c} = \boldsymbol{\lambda} \quad (7.4)$$

em que A^{-1} é a matriz inversa de semivariância entres os pontos observados, $\mathbf{c}$ é o vetor de semivariâncias média entre os pontos observados e o bloco B que se deseja estimar o valor médio da variável aleatória e o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor dos pesos de krigagem.

É notável que a única diferença entre o sistema da equação 7.3 apresentada para a krigagem de blocos e a equação 5.5 apresentada para a krigagem ordinária é o vetor que multiplica a matriz inversa de semivariância. Enquanto na krigagem ordinária se utiliza a semivariância entre os pontos amostrados e o ponto $\mathbf{s}_0$, na krigagem de blocos se utiliza a semivariância média entre os pontos $\mathbf{s}_0$ e o bloco B . A obtenção da semivariância média é a principal complexidade da krigagem de blocos e tema principal deste trabalho.

Seria muito comum imaginar uma krigagem pontual e, posteriormente, utilizando os pontos preditos, obter a média dessa variável. Esse pensamento possui fundamentos, mas perde em comparação com a krigagem de blocos, pois a krigagem de blocos utiliza-se de um estimador sem viés, enquanto a média pela krigagem pontual possuirá um erro, pois não seria possível utilizar os infinitos pontos daquela região, falha essa corrigida pela krigagem de blocos. Um exemplo utilizando a média dos valores amostrados e preditos pode ser observado em Mello *et al.* (2006).

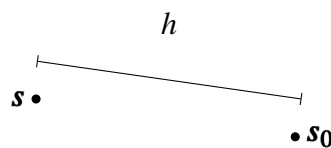
A equação (7.3) para os pesos da krigagem de blocos se assemelha com o método utilizado na krigagem ordinária (5.5). Na Seção 7.1 tem-se a diferenciação dos dois métodos de maneira mais clara.

7.1 Semivariância média entre um ponto e uma região

Na equação matricial (7.4), o vetor $\mathbf{c}$ apresenta a semivariância entre os pontos $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ e a região B - $\bar{\gamma}(\mathbf{s}_i, B)$, que se deseja estimar a média da variável aleatória, diferentemente da krigagem ordinária, em que na equação matricial (5.6) o vetor $\mathbf{b}$ apresenta a semivariância entre os pontos coletados e o ponto a ser predito - $\gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_0)$. Para a krigagem de blocos, deve-se então estimar o semivariograma para os pontos em relação a região. Essa se apresenta como a maior dificuldade da krigagem de blocos. Faz-se então a necessidade da construção do semivariograma médio entre um ponto e todos os pontos dentro da área, chamado de semivariograma médio para o ponto $\mathbf{s}_i$ e a região B , ou seja, $\bar{\gamma}(\mathbf{s}_i, B)$.

A construção do semivariograma médio é a maior complexidade e diferencial da krigagem de blocos em relação aos outros modelos de krigagem. Se associarmos ao semivariograma construído na krigagem ordinária, na qual existia a associação de ponto a ponto representado pela Figura 7.2, considerava-se somente a distância euclidiana entre eles.

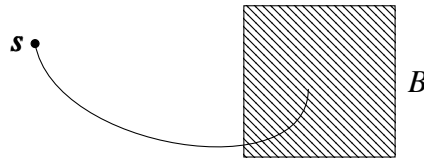
Figura 7.2 – Associação ponto a ponto



Fonte: o autor.

Agora, o semivariograma na krigagem de blocos é entre um ponto e uma área e não existe maneira de se utilizar somente uma distância, conforme pode ser observado na Figura 7.3.

Figura 7.3 – Associação ponto a área



Fonte: o autor.

A semivariância entre um ponto e uma área é apresentada de maneira numérica em tabelas por Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976), somente para o modelo esférico. Em Oliveira (1991), apresenta-se as definições do semivariograma médio e a maneira para se obter os resultados analiticamente, sendo que essa definição possibilita a aplicação para qualquer modelo de semivariograma. Este trabalho tem como principal objetivo demonstrar a construção do semivariograma médio para os modelos cúbico, exponencial e gaussiano, utilizando a técnica desenvolvida por Oliveira (1991). Ainda em Oliveira (1991) é apresentado somente o modo teórico de como se obter as semivariâncias média entre um ponto e um bloco. Este trabalho complementa esse trabalho, apresentando a obtenção da semivariâncias médias com a técnica apresentada por Oliveira (1991).

Também se complementa os textos apresentados por Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976), que apresentam apenas valores numéricos para a semivariância média para o modelo esférico. Este trabalho é um processo de continuidade que foi iniciado em Sousa (2020), em que foram apresentados os modelos linear, esférico e pentaesférico.

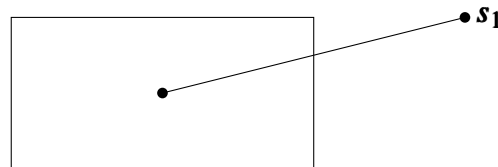
Ao final deste texto tem-se um avanço da técnica apresentada por Oliveira (1991) e evoluindo os métodos utilizados por Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976).

No item 7.1.2 demonstra-se o método proposto por Oliveira (1991) para a obtenção da semivariância média. Ressalta-se que Oliveira (1991) apresenta o conceito fundamental, que é adequado para a construção deste trabalho.

7.1.1 Construção numérica da semivariância média entre um ponto e um bloco

Muitos autores, como podemos ver nos trabalhos de Yamamoto (2001), Yamamoto & Landim (2015), Yamamoto (2020) e Journel & Huijbregts (1976), utilizam a krigagem de blocos mas calculam a semivariância média entre o ponto e o bloco de tal forma que não consideram os infinitos pontos do bloco, por meio de uma aproximação numérica. Na Figura 7.4, associa-se o ponto coletado s_1 com um único ponto do bloco e determina-se a semivariância média do bloco como sendo esse valor obtido.

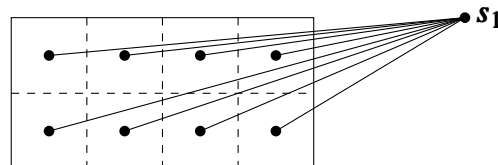
Figura 7.4 – Semivariância média de um ponto s_1 e um bloco utilizando um ponto



Fonte: o autor.

Se aumentar a quantidade de pontos dentro do bloco como na Figura 7.5 e determinar-se a semivariância de todos os pontos com o ponto s_1 e realizar a média das semivariâncias obtidas, se obtém uma semivariância média do bloco com maior precisão.

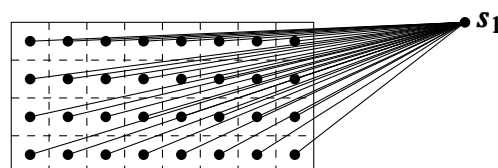
Figura 7.5 – Semivariância média de um ponto s_1 e um bloco utilizando oito pontos



Fonte: o autor.

Se mais uma vez aumentar-se o número de pontos no bloco, como na figura 7.6, a média das semivariâncias dos pontos do bloco com o ponto s_1 se aproxima mais da semivariância média real.

Figura 7.6 – Semivariância média de um ponto s_1 e um bloco utilizando trinta e dois pontos



Fonte: o autor.

Em uma situação em que os pontos dentro de um bloco tendem ao infinito, a média de todas as semivariâncias calculadas para esses pontos representaria a semivariância média real do bloco em relação ao ponto $\mathbf{s}_1$. No entanto, é evidente que a coleta de um número infinito de pontos é inviável e tão complexo quanto é se determinar a quantidade de pontos ideais para se ter uma precisão adequada da semivariância média. Yamamoto & Landim (2015) apresentam uma aplicação utilizando apenas quatro pontos dentro do bloco e reforça que a utilização de poucos pontos não é a ideal, mas é utilizada por limitações computacionais. Não se tem uma resposta definida da quantidade de pontos ideais para se obter a semivariância média, a hipótese ideal seriam os infinitos pontos. Para lidar com essa limitação, torna-se necessário modelar um sistema capaz de determinar a semivariância média entre o ponto e o bloco de forma eficiente e com maior precisão para qualquer modelo de semivariograma. Essa é a proposta apresentada inicialmente por Oliveira (1991) e complementada em Sousa (2020), e neste trabalho, ou seja, a construção da semivariância média de um bloco de forma a se utilizar conceitos de cálculo integral para mapear os infinitos pontos da região.

7.1.2 Equação para a semivariância média entre um ponto e uma região

A etapa mais importante da krigagem de blocos é a construção do semivariograma médio da região. Essa etapa é o que difere a krigagem de blocos da krigagem ordinária e é a etapa de maior complexidade.

Seja um processo estocástico que satisfaz a hipótese intrínseca, com semivariograma isotrópico e efeito pepita C_0 . Se considerar-se uma subregião B retangular de lados P e Q , então o semivariograma médio entre o ponto $\mathbf{s}$ localizado no vértice da região B e a própria região B , apresentado por Oliveira (1991), é dado na equação (7.5).

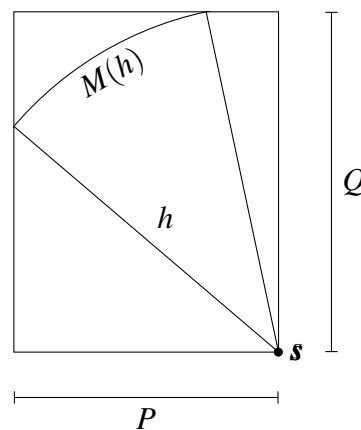
$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) = \frac{1}{P \cdot Q} \cdot \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} M(h) \cdot \gamma(h) dh \quad (7.5)$$

em que P e Q são os lados do retângulo que se deseja obter a semivariância média, $M(h)$ é o comprimento do arco formado pelo círculo no entorno do ponto, sendo que esteja contido somente dentro da região de estudo e $\gamma(h)$ o semivariograma estimado para os pontos amostrados.

A Figura 7.7, apresentada por Oliveira (1991), demonstra visualmente o conceito do valor de $M(h)$.

A construção do semivariograma médio é apresentada por Oliveira (1991) com base nas definições e posteriormente na Figura 7.7. Ao obter esse resultado, é possível solucionar a semivariância média de um bloco de qualquer dimensão e qualquer modelo de semivariograma, diferente dos resultados obtidos por Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976), que apresentam apenas valores numéricos para blocos de alguns valores definidos e somente para o modelo esférico.

Figura 7.7 – Semivariograma médio entre um ponto e uma área

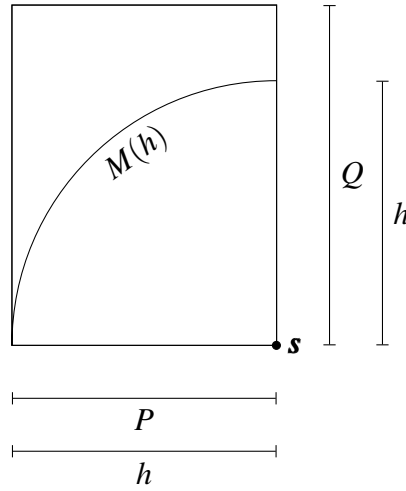


Fonte: Oliveira (1991)

Em Oliveira (1991), o resultado da semivariância média é obtido quando se soluciona todos os valores possíveis de $M(h)$ para cada modelo. O comprimento de $M(h)$ depende do valor de h , $\forall 0 \leq h \leq \sqrt{P^2 + Q^2}$, sendo P e Q os lados do retângulo onde se deseja estimar a média da variável aleatória. Considera-se sempre P como o menor lado do retângulo e Q o maior lado do retângulo. Em casos onde $Q = P$, considera-se, arbitrariamente, qual lado receberá a denominação P e Q , sendo que essa escolha não interfere no uso das equações apresentadas a seguir. A concepção do valor de $M(h)$ será dividida em três etapas.

Exemplificando todas as dimensões de $M(h)$, temos a primeira etapa, se $h \leq P$. Nesse caso o valor de $M(h)$ não extrapola as dimensões do retângulo de lados P e Q , então $M(h) = \frac{\pi \cdot h}{2}$, que é apresentado na Figura 7.8.

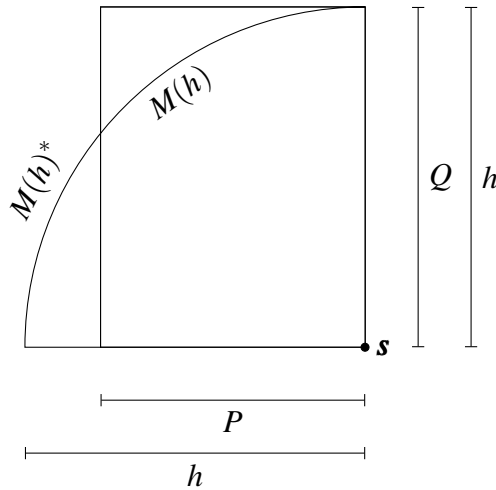
Figura 7.8 – Curva $M(h)$ para $h \leq P$ (primeira etapa)



Fonte: o autor.

Na segunda etapa, se $P < h \leq Q$, o valor de $M(h)$ extrapola as dimensões do retângulo de lados P e Q , mas somente em sua base P , gerando assim a parte da curva denominada $M(h)^*$ e, assim, nessa segunda etapa, $M(h) = \frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h$, conforme apresentado na Figura 7.9.

Figura 7.9 – Curva $M(h)$ para o intervalo $P < h \leq Q$ (segunda etapa)

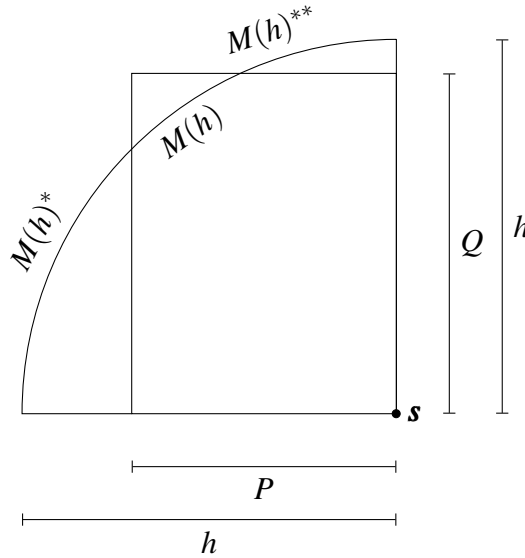


Fonte: o autor.

Na terceira etapa, quando $Q < h \leq \sqrt{P^2 + Q^2}$, o valor de $M(h)$ extrapola as dimensões do retângulo de lados P e Q em ambas direções, gerando assim as partes da curva $M(h)^*$ e

$M(h)^{**}$. Então $M(h) = \frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h$, conforme apresentado na Figura 7.10.

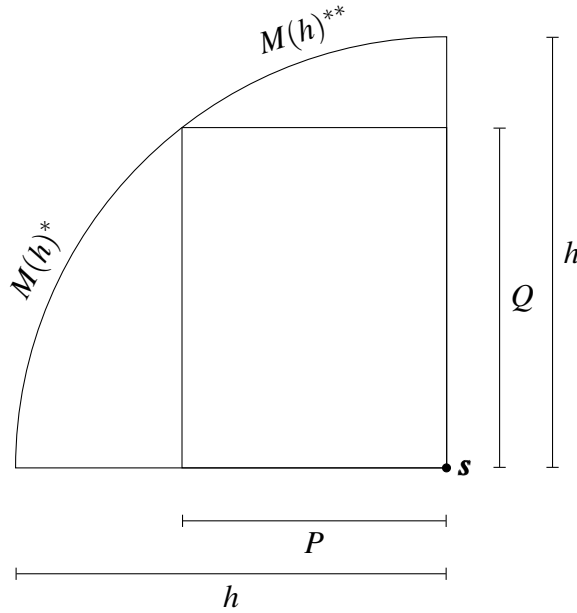
Figura 7.10 – Curva $M(h)$ para o intervalo $Q < h \leq \sqrt{P^2 + Q^2}$ (terceira etapa)



Fonte: o autor.

O valor do arco $M(h)$ cresce até atingir o último ponto do retângulo, a Figura 7.11 demonstra o último estágio do crescimento do arco, nesse ponto o valor de $M(h)$ deixa de existir, pois nenhum trecho do arco estará dentro do bloco.

Figura 7.11 – Curva $M(h)$ deixa de existir para $h > \sqrt{P^2 + Q^2}$



Fonte: o autor.

Com os estudos de Oliveira (1991), podemos notar que a construção da curva $M(h)$ acontece somente dentro do retângulo P e Q e em algumas etapas essa curva pode extrapolar essas dimensões, gerando assim o que foi denominado de $M(h)^*$ e $M(h)^{**}$. Ressalta-se nas Figuras 7.8, 7.9 e 7.10 que $M(h) = \frac{\pi \cdot h}{2}$, $M(h)^* = \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h$ e $M(h)^{**} = \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h$.

Então, tem-se o valor de $M(h)$ em cada uma das etapas: na primeira etapa $M(h) = \frac{\pi \cdot h}{2}$, na segunda etapa $M(h) = \frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h$ e na terceira etapa $M(h) = \frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h$.

Logo, a equação (7.5) pode ser desmembrada na soma das equações (7.6), (7.7) e (7.8).

$$\int_0^P \frac{\pi \cdot h}{2} \cdot \gamma(h) dh \quad (7.6)$$

$$\int_P^Q \left[\frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \gamma(h) dh \quad (7.7)$$

$$\int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \gamma(h) dh \quad (7.8)$$

Assim, toda a construção do semivariograma médio para krigagem de blocos, apresentada por Oliveira (1991), pode ser resumida na equação (7.9), ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) = & \frac{1}{P \cdot Q} \cdot \int_0^P \frac{\pi \cdot h}{2} \cdot \gamma(h) dh + \\ & + \frac{1}{P \cdot Q} \cdot \int_P^Q \left[\frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \gamma(h) dh + \\ & + \frac{1}{P \cdot Q} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \gamma(h) dh \end{aligned} \quad (7.9)$$

em que $\gamma(h)$ é o modelo de semivariograma do fenômeno, P e Q os lados do bloco B .

Dessa maneira, é possível obter a semivariância média entre um ponto situado no vértice do bloco e o bloco retangular de lados P e Q . A mesma ideia pode ser abordada para outras geometrias. Neste trabalho, todos os blocos de krigagem serão retangulares. De fato, como, na prática, todas as geometrias podem ser aproximadas por uma soma de blocos, justifica-se essa escolha da geometria de blocos, pelo seu apelo simplificador e generalizador.

Todo fenômeno possui um semivariograma que mapeia a dependência espacial. Com essa informação é possível, com a equação (7.9), obter o semivariograma médio para qualquer região de lados P e Q do fenômeno e para qualquer modelo de semivariograma. A Seção 7.1.1 apresenta a atual problemática na obtenção da semivariância média entre um ponto e um bloco e a forma com que diversos autores executam essa técnica, bem como as falhas nessas situações.

8 MATERIAIS E MÉTODOS

Esta seção é dedicada à descrição dos materiais e métodos utilizados ao longo do desenvolvimento do trabalho.

8.1 Pesquisa bibliográfica

O método de pesquisa utilizado nesta tese foi a pesquisa bibliográfica. A pesquisa bibliográfica utilizou referências no ramo da Geoestatística, Probabilidade, Cálculo Integral e Cálculo Estocástico para a base estatística deste trabalho. A pesquisa bibliográfica foi feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, dissertações, teses e páginas de *web sites*.

Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém, pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas, com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (Fonseca, 2002). Para Gil *et al.* (2002), os exemplos mais característicos desse tipo de pesquisa são sobre investigações sobre ideologias ou aquelas que se propõem à análise das diversas posições teóricas acerca de um problema.

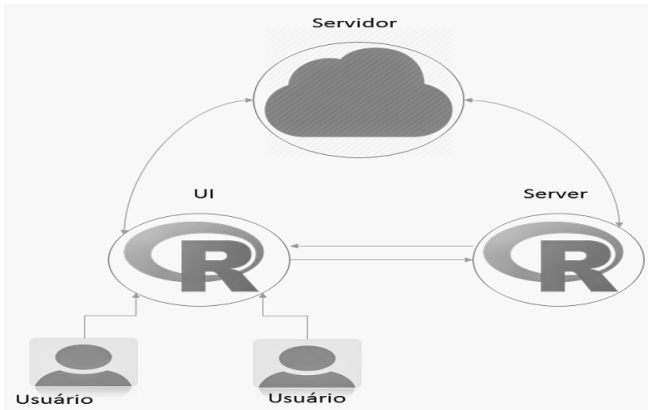
8.2 Softwares utilizados

As funções computacionais foram elaboradas em linguagem R (R Core Team, 2025) e apresentadas em interface utilizando o *Shiny* (Chang *et al.*, 2024), o qual se destaca por permitir o desenvolvimento de interfaces gráficas por meio de aplicações *web*. O pacote utiliza a linguagem R para simplificar comandos que normalmente seriam utilizados em linguagens voltadas ao desenvolvimento *web*.

As aplicações desenvolvidas em *shiny* são baseadas em dois *scripts* que se complementam em uma execução, o *ui* e o *server*. O *script ui* é responsável pela aplicação gráfica, nele é possível especificar dentro de várias hipóteses como botões, ícones ou modos de seleção que farão a interação com o usuário. Já o *server* é o núcleo da aplicação e nele ficam armazenados

os códigos em R que responderão às iterações do usuário retornando os resultados. Na Figura 8.1 exemplifica-se de forma resumida e ilustrativa, o funcionamento de uma aplicação em *shiny*.

Figura 8.1 – Esquema de funcionamento da aplicação em *shiny*



Fonte: Chang *et al.* (2024)

Para este trabalho, a aplicação desenvolvida por meio do *shiny* foi disponibilizada por acesso virtual, de forma que qualquer usuário possa acessá-la sem necessidade de instalação de programas, evitando assim problemas de compatibilidade em relação a diversos sistemas operacionais. Para isso, ela foi hospedada no servidor do *R Studio* que fornece o serviço de hospedagem e toda a estrutura necessária para seu funcionamento.

Outros pacotes foram utilizados e são apresentados no quadro 8.1. Constituem parte importante do produto final aqui apresentado, pois é, por meio deles, que são realizados grande parte dos cálculos que compõe as análises.

Quadro 8.1 – Outros pacotes utilizados no desenvolvimento do trabalho

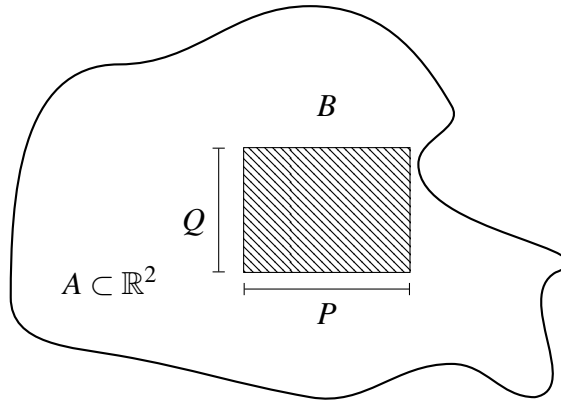
Pacote	Uso
automap (Hiemstra <i>et al.</i> , 2008)	Funções para a modelagem do semivariograma
gstat (Graler; Pebesma; Heuvelink, 2016)	Funções para ajuste de coordenadas espaciais
MASS (Venables; Ripley, 2002)	Funções para cálculo de inversas generalizadas
shinythemes (Chang, 2021)	Funções para modificar a aparência do aplicativo
sp (Bivand; Pebesma; Gomez-Rubio, 2013)	Funções para ajuste de coordenadas espaciais

Fonte: o autor.

9 RESULTADOS

Reforçando os conceitos sobre a krigagem de blocos, ela tem o intuito de se obter o valor médio de uma variável aleatória em uma região B , ou seja, o valor de $\bar{Z}(B)$. Se considerarmos a região B retangular, de lados P e Q , conforme representado na Figura 9.1.

Figura 9.1 – Região B de lados P e Q



Fonte: o autor.

Ao utilizarmos o interpolador da krigagem de blocos expresso pela equação 9.1, surge a necessidade de se obter os pesos de krigagem denominados por λ_i , uma vez que os valores de $z(\mathbf{s}_i)$ são as amostras coletadas do fenômeno em análise.

$$\hat{\bar{Z}}(B) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot z(\mathbf{s}_i) \quad (9.1)$$

Os valores de λ_i são obtidos ao solucionar o sistema matricial descrito pela equação 9.2.

$$\begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n) & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(\mathbf{s}_1, B) \\ \bar{\gamma}(\mathbf{s}_2, B) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}(\mathbf{s}_n, B) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

em que $\gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ é a semivariância entre todos os pontos amostrados, $\bar{\gamma}(\mathbf{s}_i, B)$ é a semivariância média entre os pontos amostrados e o bloco B que se deseja obter o valor médio da variável aleatória, λ_i são pesos de krigagem que serão utilizados na equação 9.1.

Como apresentado anteriormente, a grande complexidade da krigagem de blocos é obter a semivariância média entre os pontos amostrados e o bloco, ou seja, os valores de $\bar{\gamma}(\mathbf{s}_i, B)$. O objetivo deste trabalho é apresentar, em complemento e adição ao trabalho iniciado em Sousa (2020), as fórmulas semivariâncias médias entre pontos e blocos para modelos usuais na Geoestatística, como o linear, esférico, pentaesférico, cúbico, exponencial e gaussiano.

Autores como Clark (1979) apresentam um sistema de aproximação numérica para a semivariância média de um ponto e um bloco, definindo como função auxiliar para a krigagem de blocos. Clark (1979) possui a limitação de obter o sistema somente para o modelo esférico, o qual denomina-se como função $H(l, b)$. Já em Journel & Huijbregts (1976), os autores apresentam um sistema de ábacos que modelam a semivariância média entre um ponto e um bloco para os modelos linear e esférico, e denominam as funções como $H(L, B)$. As duas representações apresentam limitações, pois obtêm os resultados de forma numérica e somente para dois modelos de semivariograma. Yamamoto & Landim (2015) e Yamamoto (2001), devido à complexidade ou mesmo restrição dos modelos, utilizam técnicas de aproximação numérica para obter a média espacial de um fenômeno, como apresentado na Seção 7.1.1, técnicas essas que não possuem as condições precisas estabelecidas para a krigagem de blocos e, assim, não são um estimador exatamente ótimo. Os exemplos citados acima possuem limitações, pois trabalham com poucos modelos de semivariograma e apresentam resultados numéricos e limitados de geometria da região de trabalho.

Como citado, este trabalho é um complemento ao realizado em Sousa (2020), onde foram apresentados os modelos analíticos para a semivariância média em sistemas lineares, esféricos e pentaesférico. Tais resultados e a continuidade neste trabalho são importantes pois possibilitam ao usuário da krigagem de blocos obter a semivariância média para blocos retangulares de qualquer dimensão e não sofrem das limitações geométricas apresentadas nos autores citados anteriormente. Os modelos linear, esférico, pentaesférico, cúbico, exponencial e gaussiano, são, segundo Yamamoto (2020), os principais modelos utilizados na Geoestatística. Os resultados obtidos neste trabalho são a evolução e aperfeiçoamento das limitações dos trabalhos de Clark (1979), Journel & Huijbregts (1976) e Yamamoto & Landim (2015), eliminando o erro numérico e a limitação geométrica do retângulo em análise.

Outro importante resultado é a implementação das equações obtidas em aplicação *shiny app*, possibilitando o uso rápido e prático dos resultados deste trabalho. A necessidade de uma aplicação desse modelo é essencial para facilitar ao pesquisador a utilização das técnicas da krigagem de blocos e se trata de uma inovação quando comparado aos métodos apresentados por Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976), que utilizam tabelas e ábacos que possuem limitações de utilização.

9.1 Resultados obtidos anteriormente para os modelos linear, esférico e pentaesférico

Os itens 9.1.1, 9.1.2 e 9.1.3 apresentam os resultados obtidos anteriormente em Sousa (2020). É importante apresentar novamente os resultados anteriores com o intuito de reforçar e condensar todos os resultados em um único trabalho.

9.1.1 Semivariograma médio para o modelo linear

O semivariograma linear foi apresentado na Seção 4 e é mais uma vez descrito pela equação (9.3).

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + a \cdot h, & \text{para } h > 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

Ao aplicarmos o modelo linear (9.3) na equação (7.9), temos que a semivariância média do modelo linear, que está apresentado na equação (9.4).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Lin} = C_0 + \frac{a}{6} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{P^2 + Q^2} + \frac{P^2}{Q} \cdot \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{Q^2}{P} \cdot \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right) \quad (9.4)$$

A demonstração de como obter o resultado da equação 9.4 pode ser obtida nos apêndices de Sousa (2020).

9.1.2 Semivariograma médio para o modelo esférico

O semivariograma esférico foi apresentado na Seção 4 e é mais uma vez descrito pela equação (9.5).

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot \left[1,5 \cdot \left(\frac{h}{a} \right) - 0,5 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (9.5)$$

Ao aplicarmos o modelo esférico (9.5) na equação (7.9), temos que a semivariância média do modelo esférico, que está apresentado na equação (9.6).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Esf} = C_0 + \frac{0,25 \cdot C_1}{a} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{P^2 + Q^2} + \frac{P^2}{Q} \cdot \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \right. \\ \left. + \frac{Q^2}{P} \cdot \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right) +$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{0,5 \cdot C_1}{a^3} \cdot \left[\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{40} \cdot (7 \cdot P^2 + 7 \cdot Q^2) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3 \cdot P^4}{40 \cdot Q} \cdot \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{3 \cdot Q^4}{40 \cdot P} \cdot \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right] \quad (9.6)
\end{aligned}$$

A demonstração de como obter o resultado da equação 9.4 pode ser obtida nos apêndices de Sousa (2020).

9.1.3 Semivariograma médio para o modelo pentaesférico

O semivariograma pentaesférico foi apresentado na Seção 4 e é mais uma vez descrito pela equação (9.7).

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot \left[1,875 \cdot \left(\frac{h}{a} \right) - 1,25 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^3 + 0,375 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^5 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (9.7)$$

Ao aplicarmos o modelo pentaesférico (9.7) na equação (7.9), temos que a semivariância média do modelo esférico, que está apresentado na equação (9.8).

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{B})_{Pent} = C_0 + \frac{0,25 \cdot C_1}{a} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{P^2 + Q^2} + \frac{P^2}{Q} \cdot \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| \right. \\
\quad \left. + \frac{Q^2}{P} \cdot \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1,25 \cdot C_1}{a^3} \cdot \left[\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{40} \cdot (7 \cdot P^2 + 7 \cdot Q^2) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3 \cdot P^4}{40 \cdot Q} \cdot \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{3 \cdot Q^4}{40 \cdot P} \cdot \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right] + \\
& \quad + \frac{0,375 \cdot C_1}{a^5} \cdot \left[\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{336} \cdot (41 \cdot Q^4 + 41 \cdot P^4 + 24 \cdot P^2 \cdot Q^2) \right] + \\
& \quad + \frac{0,375 \cdot C_1}{a^5} \cdot \left[\frac{5 \cdot P^6}{112 \cdot Q} \cdot \ln \left| \frac{Q + \sqrt{P^2 + Q^2}}{P} \right| + \frac{5 \cdot Q^6}{112 \cdot P} \cdot \ln \left| \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} \right| \right] \quad (9.8)
\end{aligned}$$

A demonstração de como obter o resultado da equação 9.4 pode ser obtida nos apêndices de Sousa (2020).

Os resultados apresentados nos itens 9.1.1, 9.1.2 e 9.1.3 foram obtidos em Sousa (2020) e já são um avanço em relação à construção da semivariância média em krigagem de blocos. Com as equações (9.4), (9.6) e (9.8) é possível obter a semivariância média entre um ponto e um bloco retangular de qualquer dimensão de forma precisa e analítica.

9.2 Resultados para os modelos cúbico, exponencial e gaussiano

Os itens 9.2.1, 9.2.2 e 9.2.3 apresentam os resultados para a semivariância média entre um ponto e um bloco para os modelos cúbicos, exponencial e gaussiano, que são parte dos objetivos descritos inicialmente nesse trabalho.

9.2.1 Semivariograma médio para o modelo cúbico

O semivariograma cúbico foi apresentado na Seção 4 e é mais uma vez descrito pela equação (9.9).

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot \left[7 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^2 - 8,75 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^3 + 3,5 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^5 - 0,75 \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^7 \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (9.9)$$

Ao aplicarmos o modelo cúbico (9.9) na equação (7.9), temos como resultado a semivariância média do modelo cúbico, que está apresentada na equação (9.10).

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{B})_{Cub} = & C_0 + \frac{\pi \cdot C_1}{2} \cdot \left[\frac{7}{4} \cdot \frac{\left(\sqrt{P^2 + Q^2} \right)^4}{a^2} - \frac{7}{4} \cdot \frac{\left(\sqrt{P^2 + Q^2} \right)^5}{a^3} \right] + \\ & + \frac{\pi \cdot C_1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{P^2 + Q^2} \right)^7}{a^5} - \frac{1}{12} \cdot \frac{\left(\sqrt{P^2 + Q^2} \right)^9}{a^7} \right] + \\ & - \frac{7 \cdot C_1 \pi}{2} \cdot \frac{(P^2 + Q^2)^2}{4 \cdot P \cdot Q \cdot a^2} + \frac{7 \cdot C_1}{12 \cdot a^2} \cdot (4 \cdot Q^2 + 4 \cdot P^2) + \\ & + \frac{7 \cdot C_1 \pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{(P^2 + Q^2)^5}}{4 \cdot P \cdot Q \cdot a^3} - \frac{7 \cdot C_1}{32 \cdot a^3} \cdot \sqrt{P^2 + Q^2} \cdot (5 \cdot P^2 + 5 \cdot Q^2) + \\ & + \frac{21 \cdot C_1 \cdot Q^4}{32 \cdot P \cdot a^3} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + Q}{Q} \right| + \frac{21 \cdot C_1 \cdot P^4}{32 \cdot Q \cdot a^3} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + Q}{P} \right| + \\ & - \frac{15 \cdot C_1 \pi}{28} \cdot \frac{\sqrt{(P^2 + Q^2)^7}}{P \cdot Q \cdot a^5} + \frac{15 \cdot C_1}{224} \cdot \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} (7 \cdot P^2 + 7 \cdot Q^2)}{a^5} + \\ & + \frac{45 \cdot C_1 \cdot P^4}{224 \cdot Q \cdot a^5} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + Q}{P} \right| + \frac{45 \cdot C_1 \cdot Q^4}{224 \cdot P \cdot a^5} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + P}{Q} \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_1 \cdot \pi}{12} \cdot \frac{\sqrt{(P^2 + Q^2)^9}}{P \cdot Q \cdot a^7} - \frac{C_1}{576} \cdot \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} \cdot (18 \cdot Q^4 + 18 \cdot P^4 + 20 \cdot P^2 \cdot Q^2)}{a^7} + \\
& - \frac{5 \cdot C_1 P^6}{192 \cdot Q \cdot a^7} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + Q}{P} \right| - \frac{5 \cdot C_1 \cdot Q^6}{192 \cdot P \cdot a^7} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + P \cdot Q}{Q} \right| \quad (9.10)
\end{aligned}$$

A demonstração não será apresentada por ser extensa, de exemplo somente será apresentada a demonstração para o modelo exponencial.

9.2.2 Semivariograma médio para o modelo exponencial

O semivariograma exponencial foi apresentado na Seção 4 e é mais uma vez descrito pela equação (9.11).

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (9.11)$$

Ao aplicarmos o modelo exponencial (9.11) na equação (7.9), temos como resultado a semivariância média do modelo exponencial, que está apresentada na equação (9.12).

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Exp} = C_0 + C_1 + \frac{\pi \cdot C_1}{4 \cdot P \cdot Q} \cdot \left[\frac{P^2 + Q^2}{2} - a^2 + \left(a^2 + a \cdot \sqrt{P^2 + Q^2} \right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{a}} \right] + \\
- \frac{\pi \cdot (P^2 + Q^2)}{4 \cdot P \cdot Q} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m! \cdot a^{2 \cdot m}} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}} \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h^{m+1} dh + \\
& + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m! \cdot a^{2 \cdot m}} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h^{m+1} dh
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Observa-se que a equação 9.12 ainda apresenta uma limitação na resolução de parte das integrais do sistema, levando à necessidade de aproximá-las em determinado trecho. É natural supor que essa aproximação mantenha um componente numérico na solução do problema o que de fato ocorre. Entretanto, trata-se de um resultado que não se encontra descrito em outras literaturas. Ademais, ao implementar esse modelo em um aplicativo *Shiny App*, obtém-se com precisão os valores decorrentes da aproximação numérica, possibilitando o cálculo da semivariância média entre um ponto e um bloco retangular de qualquer dimensão para o modelo exponencial.

A demonstração de como obter o resultado da equação 9.12 pode ser vista no apêndice A. Somente é apresentado neste trabalho a demonstração da semivariância média entre um ponto e um bloco para o modelo exponencial, por se tratar da demonstração mais simples dentre as três apresentadas neste trabalho. O apêndice tem intuito somente de demonstrar o conceito da aplicação da técnica.

9.2.3 Semivariograma médio para o modelo gaussiano

O semivariograma gaussiano foi apresentado na Seção 4 e é mais uma vez descrito pela equação (9.13).

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{h}{a}\right)^2} \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \tag{9.13}$$

Ao aplicarmos o modelo gaussiano (9.13) na equação (7.9), temos como resultado a semivariância média do modelo gaussiano, que está apresentada na equação (9.14).

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Gau} = & C_0 + C_1 + \frac{\pi \cdot C_1}{4 \cdot P \cdot Q} \cdot \left[(P^2 + Q^2) - a^2 + a^2 \cdot e^{-\frac{P^2 + Q^2}{a^2}} \right] - \frac{\pi \cdot (P^2 + Q^2)}{4 \cdot P \cdot Q} + \\
 & + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m! \cdot a^{2 \cdot m}} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h^{2 \cdot m + 1} dh + \\
 & + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m! \cdot a^{2 \cdot m}} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h^{2 \cdot m + 1} dh
 \end{aligned} \tag{9.14}$$

Observe-se que a equação 9.14 ainda apresenta uma limitação na resolução de parte das integrais do sistema, levando à necessidade de aproximá-las em determinado trecho. É natural supor que essa aproximação mantenha um componente numérico na solução do problema o que de fato ocorre. Entretanto, trata-se de um resultado que não se encontra descrito em outras literaturas. Ademais, ao implementar esse modelo em um aplicativo *Shiny App*, obtém-se com precisão os valores decorrentes da aproximação numérica, possibilitando o cálculo da semivariância média entre um ponto e um bloco retangular de qualquer dimensão para o modelo gaussiano.

A demonstração não será apresentada por ser extensa. De exemplo somente será apresentada a demonstração para o modelo exponencial.

9.3 Tabelas auxiliares para semivariância média

De forma semelhante a apresentada por Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976), que apresentam tabelas e ábacos para limitados modelos, utilizando as equações encontradas para cada um dos modelos, é possível obter as tabelas auxiliares para cada modelo. Estas são apresentadas as tabelas 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5 e 9.6. Ressalta-se que em Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976) se encontram somente a tabela auxiliar para o modelo esférico.

Tabela 9.1 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo linear

P/Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,0765	0,1186	0,1646	0,2122	0,2605	0,3092	0,3583	0,4075	0,4569	0,5064
0,2	0,1186	0,1531	0,1936	0,2373	0,2827	0,3293	0,3765	0,4243	0,4725	0,5209
0,3	0,1646	0,1936	0,2296	0,2695	0,3119	0,3559	0,4012	0,4472	0,4939	0,5411
0,4	0,2122	0,2373	0,2695	0,3061	0,3456	0,3872	0,4304	0,4746	0,5197	0,5655
0,5	0,2605	0,2827	0,3119	0,3456	0,3826	0,4219	0,4629	0,5054	0,5489	0,5932
0,6	0,3092	0,3293	0,3559	0,3872	0,4219	0,4591	0,4983	0,5389	0,5809	0,6238
0,7	0,3583	0,3765	0,4012	0,4304	0,4629	0,4983	0,5356	0,5747	0,6151	0,6566
0,8	0,4075	0,4243	0,4472	0,4746	0,5054	0,5389	0,5747	0,6122	0,6511	0,6913
0,9	0,4569	0,4725	0,4939	0,5197	0,5489	0,5809	0,6151	0,6511	0,6887	0,7276
1,0	0,5064	0,5209	0,5411	0,5655	0,5932	0,6238	0,6566	0,6913	0,7276	0,7652

Fonte: o autor.

Tabela 9.2 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo esférico com alcance e contribuição unitária

P/Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,1144	0,1766	0,2431	0,3097	0,3744	0,4360	0,4936	0,5462	0,5930	0,6333
0,2	0,1766	0,2270	0,2851	0,3455	0,4056	0,4636	0,5181	0,5682	0,6128	0,6511
0,3	0,2431	0,2851	0,3358	0,3902	0,4452	0,4989	0,5498	0,5968	0,6386	0,6744
0,4	0,3097	0,3455	0,3902	0,4390	0,4891	0,5385	0,5856	0,629	0,6677	0,7007
0,5	0,3744	0,4056	0,4452	0,4891	0,5346	0,5792	0,6230	0,6628	0,6982	0,7280
0,6	0,4360	0,4636	0,4989	0,5385	0,5798	0,6209	0,6602	0,6965	0,7284	0,7550
0,7	0,4936	0,5181	0,5498	0,5856	0,6230	0,6602	0,6958	0,7285	0,7570	0,7803
0,8	0,5462	0,5682	0,5968	0,6290	0,6628	0,6965	0,7285	0,7576	0,7827	0,8026
0,9	0,5930	0,6128	0,6386	0,6677	0,6982	0,7284	0,7570	0,7827	0,8044	0,8209
1,0	0,6333	0,6511	0,6744	0,7007	0,7280	0,7550	0,7803	0,8026	0,8209	0,8342

Fonte: o autor.

A tabela apresentada por Clark (1979) pode ser encontrada no apêndice B, sendo essa a única modelagem de semivariância média presente na literatura. É importante comparar os resultados da tabela 9.2 e se observar a igualdade dos resultados obtidos por Clark (1979).

Tabela 9.3 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo pentaesférico com alcance e contribuição unitária

P/Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,1139	0,1748	0,2376	0,2976	0,3520	0,3994	0,4387	0,4694	0,4919	0,5068
0,2	0,1748	0,2233	0,2774	0,3308	0,3802	0,4235	0,4594	0,4874	0,5075	0,5204
0,3	0,2376	0,2774	0,3236	0,3704	0,4142	0,4526	0,4844	0,5088	0,5258	0,5359
0,4	0,2976	0,3308	0,3704	0,4109	0,4491	0,4826	0,5100	0,5304	0,5439	0,5511
0,5	0,3520	0,3802	0,4142	0,4491	0,4820	0,5106	0,5335	0,5499	0,5598	0,5637
0,6	0,3994	0,4235	0,4526	0,4826	0,5106	0,5346	0,5531	0,5656	0,5718	0,5726
0,7	0,4387	0,4594	0,4844	0,5100	0,5335	0,5532	0,5676	0,5762	0,5790	0,5767
0,8	0,4694	0,4874	0,5088	0,5304	0,5499	0,5656	0,5762	0,5813	0,5809	0,5758
0,9	0,4919	0,5075	0,5258	0,5439	0,5598	0,5718	0,5790	0,5809	0,5777	0,5701
1,0	0,5068	0,5204	0,5359	0,5511	0,5637	0,5726	0,5767	0,5758	0,5701	0,5606

Fonte: o autor.

Tabela 9.4 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo cúbico com alcance e contribuição unitária

P/Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,0412	0,0943	0,1688	0,2542	0,3416	0,4249	0,5005	0,5676	0,6278	0,6847
0,2	0,0943	0,1435	0,2135	0,2942	0,3772	0,4565	0,5286	0,5927	0,6506	0,7058
0,3	0,1688	0,2135	0,2776	0,3519	0,4287	0,5023	0,5694	0,6294	0,6841	0,7369
0,4	0,2542	0,2942	0,3519	0,4192	0,4889	0,5559	0,6174	0,6727	0,7238	0,7740
0,5	0,3416	0,3772	0,4287	0,4889	0,5516	0,6119	0,6676	0,7184	0,7661	0,8140
0,6	0,4249	0,4565	0,5023	0,5559	0,6119	0,6663	0,7167	0,7635	0,8084	0,8547
0,7	0,5005	0,5286	0,5694	0,6174	0,6676	0,7167	0,7623	0,8066	0,8497	0,8952
0,8	0,5676	0,5927	0,6294	0,6727	0,7184	0,7635	0,8066	0,8484	0,8906	0,9361
0,9	0,6278	0,6506	0,6841	0,7238	0,7661	0,8084	0,8497	0,8906	0,9328	0,9788
1,0	0,6847	0,7058	0,7369	0,7740	0,8140	0,8547	0,8952	0,9361	0,9788	1,0252

Fonte: o autor.

Tabela 9.5 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo exponencial com alcance e contribuição unitária

P/Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,0733	0,1107	0,1492	0,1865	0,2221	0,2558	0,2877	0,3178	0,3462	0,3729
0,2	0,1107	0,1405	0,1736	0,2071	0,2399	0,2716	0,3018	0,3305	0,3577	0,3835
0,3	0,1492	0,1736	0,2022	0,2321	0,2620	0,2913	0,3196	0,3467	0,3726	0,3972
0,4	0,1865	0,2071	0,2321	0,2588	0,2860	0,3130	0,3394	0,3649	0,3893	0,4127
0,5	0,2221	0,2399	0,2620	0,2860	0,3109	0,3357	0,3602	0,3841	0,4072	0,4293
0,6	0,2558	0,2716	0,2913	0,3130	0,3357	0,3587	0,3815	0,4038	0,4255	0,4465
0,7	0,2877	0,3018	0,3196	0,3394	0,3602	0,381	0,4027	0,4236	0,4441	0,4639
0,8	0,3178	0,3305	0,3467	0,3649	0,3841	0,4038	0,4236	0,4436	0,4625	0,4812
0,9	0,3462	0,3577	0,3726	0,3893	0,4072	0,4255	0,4441	0,4625	0,4806	0,4983
1,0	0,3729	0,3835	0,3972	0,4127	0,4293	0,4465	0,4639	0,4812	0,4806	0,5150

Fonte: o autor.

Tabela 9.6 – Tabela auxiliar para semivariâncias médias de um modelo gaussiano com alcance e contribuição unitária

P/Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,0066	0,01646	0,0324	0,0540	0,0805	0,1110	0,1448	0,1807	0,2179	0,2557
0,2	0,01646	0,0262	0,0419	0,0634	0,08996	0,1198	0,1532	0,1887	0,2256	0,2630
0,3	0,0324	0,0262	0,0419	0,0634	0,0896	0,1198	0,1532	0,1887	0,2256	0,2630
0,4	0,0540	0,0419	0,0634	0,0991	0,1244	0,1534	0,1855	0,2197	0,2552	0,2912
0,5	0,0805	0,0634	0,0896	0,1244	0,1489	0,1771	0,2083	0,2416	0,2761	0,3110
0,6	0,1110	0,08996	0,1198	0,1534	0,1771	0,2045	0,2346	0,2668	0,3001	0,3339
0,7	0,1448	0,1198	0,1532	0,1855	0,2083	0,2346	0,2636	0,2946	0,3266	0,3591
0,8	0,1807	0,1532	0,1887	0,2197	0,2416	0,2668	0,2946	0,3242	0,3549	0,3860
0,9	0,2179	0,1887	0,2256	0,2552	0,2761	0,3001	0,3266	0,3549	0,3842	0,4139
1,0	0,2557	0,2256	0,2630	0,2912	0,3110	0,3339	0,3591	0,3860	0,4139	0,4423

Fonte: o autor.

As tabelas 9.1 a 9.6 são então resultados que se acrescentam ao trabalho de Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976). A seguir, no item 9.3.1, com intuito de compreensão, são apresentadas a utilização dessas tabelas auxiliares.

9.3.1 Utilização das tabelas auxiliares

Nesse caso, será apresentado a utilização especificamente da tabela 9.2. Utiliza-se um fenômeno fictício apresentado por Clark (1979). Vamos supor um fenômeno esférico, com efeito pepita igual a 100, contribuição igual a 700 e alcance igual a 100, e o bloco que iremos trabalhar possui 40 por 30 metros. As tabelas são ponderadas por contribuição e alcance unitário. Sendo assim, deve-se transformar os dados de entrada para se utilizar a tabela.

$$\frac{P}{a} = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$\frac{Q}{a} = \frac{40}{100} = 0,4$$

Logo, os valores utilizados para a inserção na tabela é de 0,3 e 0,4. Utilizando a tabela do modelo esférico 9.2, o valor da semivariância média é de 0,3902. Assim consegue-se então calcular a semivariância média desse modelo para esse bloco, representada na equação (9.15).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) = C_0 + C_1 \cdot H(P, Q) \quad (9.15)$$

Sendo P e Q os lados do bloco, C_0 o efeito pepita e C_1 a contribuição do semivariograma do fenômeno, a semivariância média entre o ponto e o bloco B é dado pela equação (9.16).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) = 100 + 700 \cdot 0,3902 \quad (9.16)$$

Nesse exemplo, ao utilizarmos as tabelas auxiliares, tem-se a semivariância média entre um ponto e o bloco apresentado pela equação (9.17), ou seja,

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) = 373,14 \quad (9.17)$$

A obtenção de novas tabelas auxiliares é um avanço em relação aos trabalhos de Clark (1979) e Journel & Huijbregts (1976). São resultados que aumentam a possibilidade para a uti-

lização de novos modelos na krigagem de blocos. Ao utilizarmos as tabelas auxiliares, mesmo que com esses resultados se possa obter a semivariância média para modelos antes não obtidos, existe a limitação da utilização dessas tabelas para dimensões de blocos específicos. Na Seção 9.4 é apresentado a evolução das tabelas auxiliares para a obtenção da semivariância média entre um ponto e um bloco, para quaisquer dimensões de blocos.

9.4 Aplicação em *Shiny App*

A obtenção das equações da semivariância média são de grande validade para o cálculo de médias espaciais. O entendimento dessa necessidade possibilita a utilização da krigagem de blocos de forma precisa. Duas hipóteses de utilização são as tabelas auxiliares descritas por Clark (1979) e os ábacos apresentados por Journel & Huijbregts (1976). Porém, estes possuem limitações pois não apresentam diversidade de dimensões em seu cálculo e de modelos de semivariogramas.

As equações encontradas para os modelos linear, esférico, pentaesférico, cúbico, exponencial e gaussiano são equações extensas e, assim, surge a necessidade de facilitar a utilização desses resultados pelo usuário em seu cotidiano. A utilização de aplicações em *Shiny App* para análise estatística traz diversas vantagens, tanto para profissionais de dados quanto para pesquisadores e estudantes. A plataforma permite a criação de interfaces web interativas e dinâmicas que facilitam a exploração dos resultados obtidos. Na Seção 9.4.1 é apresentada a Calculadora de Semivariância Média para os modelos determinados neste trabalho.

9.4.1 Calculadora de semivariância média

As equações (9.4), (9.6), (9.8), (9.10), (9.12) e (9.14) são resultados precisos para a obtenção da semivariância média entre um ponto e um bloco retangular, mas possuem a complexidade de serem extensas, criando uma situação laboriosa em aplicações cotidianas. Utilizando a linguagem de programação R Core Team (2025) e a aplicação em *Shiny App* Chang *et al.* (2024) é possível construir para o usuário uma interface que facilita o uso dos resultados obtidos neste trabalho.

A figura 9.2 apresenta a interface que o usuário recebe ao executar o aplicativo em seu navegador.

Figura 9.2 – Interface do aplicativo - Calculadora de semivariância média

Semivariância média de um bloco

Semivariância média Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q :

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Linear

Valor do efeito pepita (C_0):

Valor da contribuição (C_1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

Fonte: o autor.

Na Figura 9.2, é possível observar que se tem uma interface simples para o usuário, apresentando cada etapa da utilização do aplicativo desenvolvido. Já na Figura 9.3 é possível observar destacado em vermelho o local em que o usuário irá inserir a dimensão do bloco retangular, independente de posição do bloco. O aplicativo não faz distinção se a dimensão P ou Q é maior, basta inserir os dois lados do retângulo.

Figura 9.3 – Locais de inserção dos lados dos retângulo em análise - Calculadora de semivariância média

Semivariância média de um bloco

Semivariância média Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q :

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Linear

Valor do efeito pepita (C_0):

Valor da contribuição (C_1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

Fonte: o autor.

Já na Figura 9.4 o usuário irá determinar os parâmetros do modelo de semivariograma daquele fenômeno, podendo selecionar os modelos linear, esférico, pentaesférico, cúbico, exponencial e gaussiano. Após selecionar os modelos, preencher os parâmetros do modelo com os valores do efeito pepita (C_0), da contribuição (C_1) e do alcance (a). Pode-se observar esse local na tela do aplicativo e destacado em verde na Figura 9.4.

Figura 9.4 – Locais de inserção dos modelos de semivariograma - Calculadora de semivariância média

Semivariância média de um bloco

Semivariância média Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:

1

Dimensão Q do bloco:

1

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Linear

Valor do efeito pepita (C_0):

0

Valor da contribuição (C_1):

1

Valor do alcance (a):

1

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

Fonte: o autor.

Na figura 9.5 tem-se destacado em azul, o local em que o usuário irá observar o resultado obtido da semivariância média entre um ponto e um bloco retangular.

Figura 9.5 – Resultado para semivariância média entre um ponto e um bloco retangular - Calculadora de semivariância média

Semivariância média de um bloco

Semivariância média Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Linear

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

Fonte: o autor.

Como exemplo vamos simular um bloco de dimensão $0,4m$ por $0,5m$, que segue o modelo esférico no fenômeno a analisar, com efeito pepita nulo e contribuição e alcance de uma unidade. Esse exemplo é utilizado pois é o mesmo apresentado nas tabelas de aproximação apresentadas por Clark (1979). Podemos ver destacado na Figura 9.6 que o resultado da semivariância média do bloco com as dimensões e semivariograma citados é de $0,489167$.

Em vermelho se destaca a dimensão do bloco, em verde os parâmetros do modelo e em azul se observa o resultado obtido. Caso fosse ser realizado de forma manual, seria inserido esses parâmetros na equação (9.6), o que iria gerar um trabalho matemático que, apesar de não ser complexo, demanda tempo maior para a solução da equação do que na utilização do aplicativo.

Figura 9.6 – Resultado obtido - Calculadora de semivariância média

Semivariância média de um bloco

Semivariância média Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:
0,5

Dimensão Q do bloco:
0,4

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:
Esférico

Valor do efeito pepita (C0):
0

Valor da contribuição (C1):
1

Valor do alcance (a):
1

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

A semivariância média para o modelo e o bloco é: 0.489167

Fonte: o autor.

O resultado apresentado por Clark (1979) é igual a 0,489, o qual pode ser obtido na Figura 1 do apêndice B, porém como discutido na seção 9, os resultados apresentados pela autora possuem limitações de dimensões e é apresentado somente para o modelo esférico. O aplicativo desenvolvido possibilita a utilização de qualquer valor para dimensão do bloco e se aplica aos modelos linear, esférico, pentaesférico, cúbico, exponencial e gaussiano, o que passa a ser um avanço na construção da semivariância média.

Voltamos ao exemplo abordado ao final da Seção 9.3, um fenômeno esférico, com efeito pepita igual a 100, contribuição igual a 700 e alcance igual a 100, e o bloco que iremos trabalhar possui 40 por 30 metros. Ao inserir os dados no aplicativo, podemos observar na Figura 9.7 que o resultado obtido pelo aplicativo de 373,158708. Essa solução é mais simples de ser obtida quando comparamos com a utilização da tabela 9.2 ou da equação (9.6), facilitando ao usuário a obtenção da semivariância média entre um ponto e um bloco retangular.

Figura 9.7 – Comparação com a utilização das tabelas auxiliares

Semivariância média de um bloco

Semivariância média

Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Esférico

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

A semivariância média para o modelo e o bloco é: 373.158708

Fonte: o autor.

A utilização do aplicativo é a sustentação dos resultados apresentados de forma analítica para uma situação voltada à prática cotidiana do usuário, facilitando o acesso aos resultados em qualquer situação e retirando a limitação das dimensões dos blocos retangulares.

10 EXEMPLOS PRÁTICOS

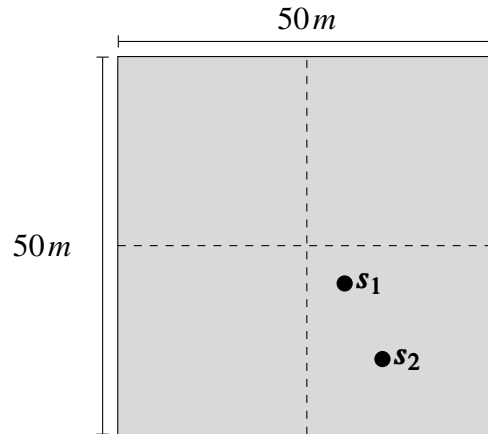
Esta seção tem o intuito de apresentar ao leitor como se utiliza os resultados apresentados na seção 9 para se obter a semivariância média entre um ponto e um bloco retangular e posteriormente a média espacial da variável aleatória. São utilizados dados obtidos por Clark (1979) e Clark & Harper (2000).

10.1 Exemplo prático 1

O exemplo apresentado a seguir foi obtido em Clark (1979), no qual a autora apresenta a resolução completa em um segundo livro Clark & Harper (2000), no qual em uma situação hipotética, onde são coletados dois dados, nas posições s_1 e s_2 . Esses dados correspondem à concentrações de ferro em uma superfície. O primeiro ponto possui 44,1 % de ferro na amostra e o segundo ponto possui 40,6 % de ferro na amostra e o bloco retangular apresenta dimensões de 50m por 50m. Uma observação é necessária nesse ponto: é que o bloco não possui a necessidade de ser quadrado e pode ser um retângulo. Neste caso em específico é um quadrado, que é um retângulo de lados iguais, o que pode ser visualizado na Figura 10.1. Este exemplo é adotado justamente por ser um dos poucos que são apresentados na literatura, de como se utilizar o método de forma completa. Nesse caso será utilizado os resultados obtidos e apresentados na seção 9 com o intuito de fixar o conteúdo apresentado de forma simples.

A questão principal desse problema e de todo este trabalho é: se possuímos os pontos s_1 e s_2 que são amostras de uma variável aleatória $Z(s_i)$, que tem seu domínio em um bloco retangular B , considerando a espacialidade dos dados, qual o valor médio da variável aleatória dentro do bloco em estudo? Esse questionamento será apresentado abaixo utilizando os resultados obtidos em todo este trabalho.

Figura 10.1 – Definição do bloco e duas amostras amostras coletadas



Fonte: Clark (1979)

Na tabela 10.1 têm-se as coordenadas (x, y) no eixo cartesiano de cada um dos pontos coletados, bem como os valores coletados, os pontos $z(\mathbf{s}_i)$.

Tabela 10.1 – Tipos de indexação e a variável em um processo espacial

Ponto $\mathbf{s}_i$	Coordenada x (m)	Coordenada y (m)	$z(\mathbf{s}_i)$ (%Fe)
$\mathbf{s}_1$	330	320	44,1
$\mathbf{s}_2$	335	310	40,6

Fonte: Clark (1979)

Clark (1979) apresenta que o modelo de semivariograma estimado para o fenômeno é o esférico, e sua representação se dá pela equação (10.1). Métodos para modelagem do semivariograma podem ser vistos em Scalón (2024) e os critérios adotados para o exemplo são expostos em Clark (1979) e em Clark & Harper (2000). Neste trabalho tem-se o foco de demonstrar com maior ênfase a parte relacionada à semivariância média entre os pontos e o bloco.

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ 24 \cdot \left[1,5 \cdot \frac{h}{120} - 0,5 \cdot \frac{h^3}{120^3} \right], & \text{para } 0 < h < 120m \\ 24, & \text{para } h \geq 120m \end{cases} \quad (10.1)$$

Utilizando os conceitos de distância entre pontos e com a equação (10.1), é possível obter o valor da semivariância entre cada par de ponto. Na tabela 10.2 apresenta-se o resultado obtido.

Tabela 10.2 – Distância entre os pontos e semivariância para krigagem

d	Pontos s_i	Distância (m)	Semivariância
h_1	s_1 e s_2	11,180339	3,3443968

Fonte: o autor.

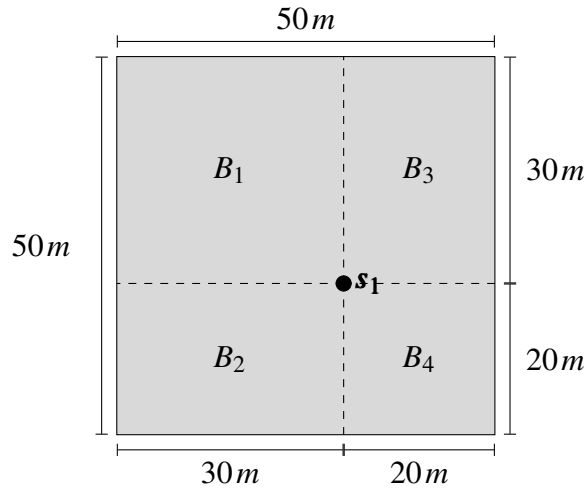
Após a obtenção dos valores de semivariância, utilizando a equação (7.3) e substituindo os valores, temos o seguinte sistema matricial (10.2).

$$\begin{bmatrix} 0 & 3,3443968 & 1 \\ 3,3443968 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(s_1, B) \\ \bar{\gamma}(s_2, B) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Observe que tem-se a necessidade de se obter a semivariância média entre o ponto 1 e o bloco retangular e o ponto 2 e o bloco retangular. Abaixo se apresenta de forma detalhada a utilização dos resultados apresentados em 9, que cria a possibilidade de se obter a média espacial do fenômeno.

10.1.1 Semivariância média entre s_1 e o bloco B

Para se obter a semivariância média entre o ponto s_1 e o bloco B pode-se utilizar a equação (9.6). A equação possui a complexidade de se utilizar vários termos. Assim, a utilização do aplicativo apresentado na seção 9.4, facilita para a obtenção dos resultados. O ponto s_1 é vértice de quatro retângulos inferiores dentro do bloco B , que podemos denominar de sub-blocos, como se apresenta na Figura 10.2.

Figura 10.2 – Divisão do bloco e a amostra s_1 

Fonte: Clark & Harper (2000)

A semivariância média pode ser obtida pela média ponderada das semivariâncias do ponto e todos os sub-blocos que ele possui com o bloco principal. Assim,

$$\bar{\gamma}(s_1, B) = \frac{30 \cdot 30 \cdot \bar{\gamma}(s_1, B_1) + 20 \cdot 30 \cdot \bar{\gamma}(s_1, B_2) + 30 \cdot 20 \cdot \bar{\gamma}(s_1, B_3) + 20 \cdot 20 \cdot \bar{\gamma}(s_1, B_4)}{50 \cdot 50}$$

$$\bar{\gamma}(s_1, B) = \frac{30 \cdot 30 \cdot 6,769165 + 20 \cdot 30 \cdot 5,735168 + 30 \cdot 20 \cdot 5,735168 + 20 \cdot 20 \cdot 4,556331}{50 \cdot 50}$$

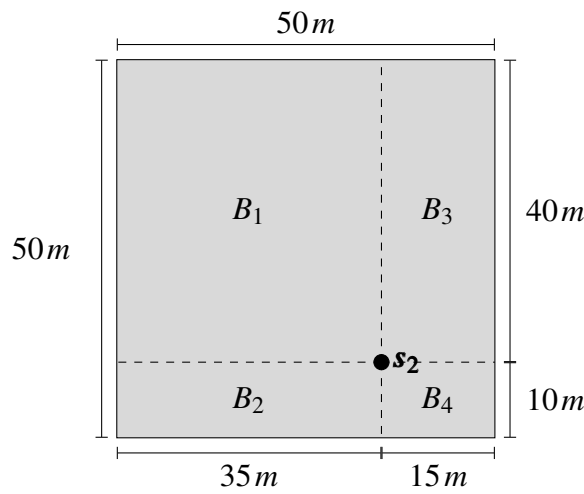
Os valores da semivariância entre o ponto e os sub-blocos foram obtidos utilizando o aplicativo apresentado no item 9.4 e pode ser conferido no apêndice C, facilitando o uso, sem a necessidade da utilização de tabelas auxiliares ou mesmo a conversão das regiões em regiões genéricas. Tem-se então que a semivariância entre o ponto s_1 e o bloco B apresentada na equação (10.3).

$$\bar{\gamma}(s_1, B) = 5,918793 \quad (10.3)$$

10.1.2 Semivariância média entre s_2 e o bloco B

Para se obter a semivariância média entre o ponto s_2 e o bloco B pode-se utilizar a equação (9.6). A equação possui a complexidade de se utilizar vários termos. Assim, a utilização do aplicativo apresentado na seção 9.4, a obtenção dos resultados. O ponto s_2 é vértice de quatro retângulos inferiores dentro do bloco B , que podemos denominar de sub-blocos, como se apresenta na Figura 10.3.

Figura 10.3 – Divisão do bloco e a amostra s_2



Fonte: Clark & Harper (2000)

A semivariância média pode ser obtida pela média ponderada das semivariâncias do ponto e todos os sub-blocos que ele possui com o bloco principal. Assim,

$$\bar{\gamma}(s_2, B) = \frac{35 \cdot 40 \cdot \bar{\gamma}(s_2, B_1) + 35 \cdot 10 \cdot \bar{\gamma}(s_2, B_2) + 40 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_2, B_3) + 15 \cdot 10 \cdot \bar{\gamma}(s_2, B_4)}{50 \cdot 50}$$

$$\bar{\gamma}(s_2, B) = \frac{35 \cdot 40 \cdot 8,388365 + 35 \cdot 10 \cdot 5,566953 + 40 \cdot 15 \cdot 6,579605 + 15 \cdot 10 \cdot 2,895135}{50 \cdot 50}$$

Os valores da semivariância entre o ponto e os sub-blocos foram obtidos utilizando o aplicativo apresentado no item 9.4 e pode ser conferido no apêndice C, facilitando o uso, sem a necessidade da utilização de tabelas auxiliares ou mesmo a conversão das regiões em regiões

genéricas. Tem-se então que a semivariância entre o ponto s_2 e o bloco B apresentada na equação (10.4).

$$\bar{\gamma}(s_2, B) = 7,229671 \quad (10.4)$$

10.1.3 Valor médio da variável aleatória no bloco B para o exemplo 1

As semivariâncias obtidas nos itens 10.1.1 e 10.1.2 só foram possíveis de serem obtidas pelos resultados apresentados na seção 9 e de maneira simples, devido ao aplicativo apresentado na seção 9.4. As imagens dos resultados obtidos pelo aplicativo são demonstrados no apêndice C.

Ao atualizarmos a equação (10.2) com as semivariâncias médias entre os pontos e o bloco, temos a equação matricial (10.5) para solucionar e obter os valores dos parâmetros λ_i , ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 & 3,3443968 & 1 \\ 3,3443968 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5,918793 \\ 7,229671 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

A solução desse sistema na equação (10.6).

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,695996 \\ 0,304004 \\ 4,902030 \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

Relembrando a equação da krigagem de blocos descrita na equação (9.1) e apresentada novamente na equação (10.7).

$$\hat{\hat{Z}}(B) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot z(\mathbf{s}_i) \quad (10.7)$$

em que N é o número de valores coletados $z(\mathbf{s}_i)$ e λ_i são os pesos associados a cada valor. Assim podemos solucionar e obter o valor médio da variável aleatória no bloco B , temos os valores coletados e os parâmetros λ_i . Nesse caso, ao expandir a equação (10.7) temos a equação (10.8),

$$\hat{\hat{Z}}(B) = \lambda_1 \cdot z(\mathbf{s}_1) + \lambda_2 \cdot z(\mathbf{s}_2) \quad (10.8)$$

Substituindo os valores das amostras coletadas e os valores dos pesos de krigagem da equação (10.6), temos a resolução apresentada pela equação (10.9), ou seja,

$$\hat{\hat{Z}}(B) = 0,695996 \cdot 44,1 + 0,304004 \cdot 40,6 \quad (10.9)$$

Sendo assim, temos que para a variável aleatória desse fenômeno no bloco retangular B , a média espacial da variável aleatória é apresentada na equação (10.10).

$$\hat{\hat{Z}}(B) = 43,0359 \%Fe \quad (10.10)$$

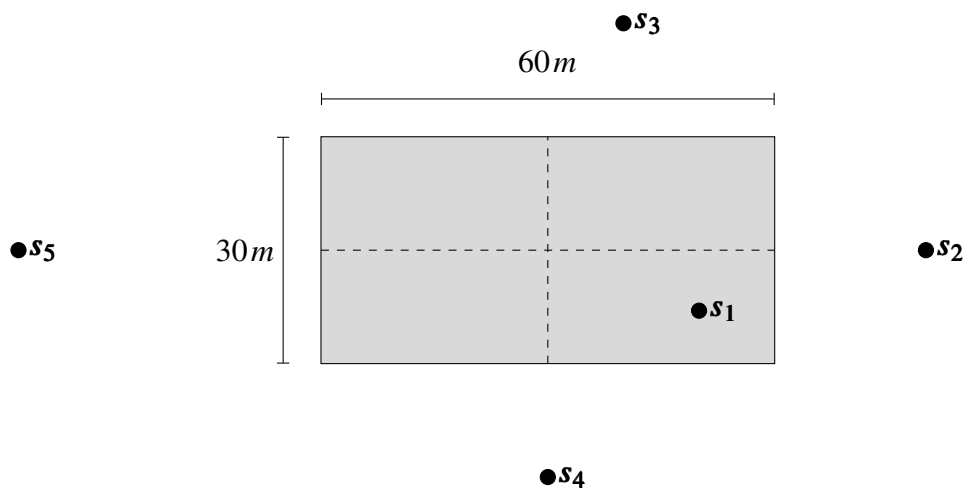
Ressalta-se que esse resultado é diferente da média convencional, pois a média apresentada na equação (10.10) é obtida por um estimador ótimo, considerando a espacialidade do fenômeno.

10.2 Exemplo prático 2

O exemplo apresentado a seguir foi obtido de Clark (1979). A autora apresenta a resolução completa em um segundo livro Clark & Harper (2000), no qual define em uma situação hipotética, que os cinco dados são coletados nas posições $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$, $\mathbf{s}_4$ e $\mathbf{s}_5$. Esses dados cor-

respondem à concentração de urânio, em partes por milhão, em cada ponto. Queremos estimar o valor médio da concentração de urânio em um bloco de lados $P = 30\text{ m}$ e $Q = 60\text{ m}$, nessa região. Vamos denominar esse bloco como bloco B , com centro nas coordenadas $x = 4120\text{ m}$ e $y = 2325\text{ m}$, conforme apresentado na Figura 10.4. Esse exemplo é particularmente interessante quando comparando ao apresentado no item 10.1, pois dessa vez tem-se pontos fora do bloco. A média do bloco pode ser predita com pontos também fora da sua região, a espacialidade do fenômeno ocorre também fora do bloco B .

Figura 10.4 – Definição do bloco e cinco amostras coletadas



Fonte: Clark (1979)

Na tabela 10.3 têm-se as coordenadas (x, y) no eixo cartesiano de cada um dos pontos coletados, bem como os valores coletados $z(s_i)$.

Tabela 10.3 – Tipos de indexação e a variável em um processo espacial

Ponto s_i	Coordenada $x\text{ (m)}$	Coordenada $y\text{ (m)}$	$z(s_i)\text{ (ppm)}$
s_1	4170	2332	400
s_2	4200	2340	380
s_3	4160	2370	450
s_4	4150	2310	280
s_5	4080	2340	320

Fonte: Clark (1979)

Clark (1979) apresenta que o modelo de semivariograma estimado para o fenômeno é o esférico, e sua representação se dá pela equação (10.11). Métodos para modelagem do semivariograma podem ser vistos em Scalon (2024) e os critérios adotados para o exemplo são expostos em Clark (1979). Neste trabalho tem-se o foco de demonstrar com maior ênfase a parte relacionada a semivariância média entre os pontos e o bloco.

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ 100 + 700 \cdot \left[1,5 \cdot \frac{h}{100} - 0,5 \cdot \frac{h^3}{100^3} \right], & \text{para } 0 < h < 100m \\ 800, & \text{para } h \geq 100m \end{cases} \quad (10.11)$$

Utilizando os conceitos de distância entre pontos e com a equação (10.11), é possível obter o valor da semivariância entre cada par de ponto. Na tabela 10.4 apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 10.4 – Pares de distância entre os pontos e semivariância para krigagem

d	Pontos s_i	Distância (m)	Semivariância
h_1	s_1 e s_2	31,0483	415,5320
h_2	s_1 e s_3	39,2937	491,3500
h_3	s_1 e s_4	29,7321	402,9883
h_4	s_1 e s_5	90,3549	790,5460
h_5	s_2 e s_3	50,0000	581,2500
h_6	s_2 e s_4	58,3095	642,8616
h_7	s_2 e s_5	120,0000	800,0000
h_8	s_3 e s_4	60,8276	659,9183
h_9	s_3 e s_5	85,4400	778,8211
h_{10}	s_4 e s_5	76,1577	745,0560

Fonte: o autor.

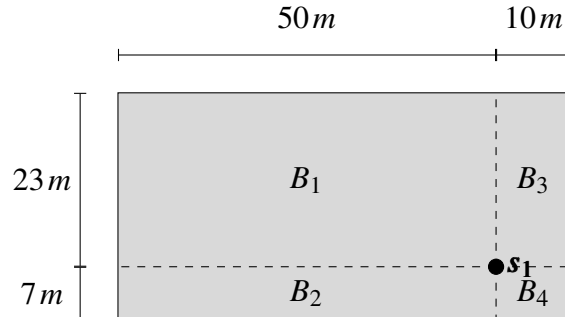
Após a obtenção obtermos os valores de semivariâncias, utilizando a equação (5.5) e substituindo os valores, temos o seguinte sistema matricial (10.12).

$$\begin{bmatrix} 0 & 415,53 & 491,35 & 402,99 & 790,55 & 1 \\ 415,53 & 0 & 581,25 & 642,86 & 800 & 1 \\ 491,35 & 581,25 & 0 & 659,92 & 778,82 & 1 \\ 402,99 & 642,86 & 659,92 & 0 & 745,06 & 1 \\ 790,55 & 800,00 & 778,82 & 745,06 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(s_1, B) \\ \bar{\gamma}(s_2, B) \\ \bar{\gamma}(s_3, B) \\ \bar{\gamma}(s_4, B) \\ \bar{\gamma}(s_5, B) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

Observe que tem-se a necessidade de se obter a semivariância média entre os pontos s_i e o bloco retangular B . Abaixo se apresenta de forma detalhada a utilização dos resultados apresentados em 9 que cria a possibilidade de se obter a média espacial do fenômeno.

10.2.1 Semivariância média entre s_1 e o bloco B

Para se obter a semivariância média entre o ponto s_1 e o bloco B pode-se utilizar a equação (9.6), a equação possui a complexidade de se utilizar vários termos, sendo assim, a utilização do aplicativo apresentado na seção 9.4 facilita para se obter os resultados. O ponto s_1 é vértice de quatro retângulos inferiores dentro do bloco B , que podemos denominar de sub-blocos, como se apresenta na Figura 10.5.

Figura 10.5 – Divisão do bloco e a amostra s_1 

Fonte: o autor.

A semivariância média pode ser obtida pela média ponderada das semivariâncias do ponto e todos os sub-blocos que ele possui com o bloco principal.

$$\bar{\gamma}(s_1, B) = \frac{50 \cdot 23 \cdot \bar{\gamma}(s_1, B_1) + 50 \cdot 7 \cdot \bar{\gamma}(s_1, B_2) + 10 \cdot 23 \cdot \bar{\gamma}(s_1, B_3) + 10 \cdot 7 \cdot \bar{\gamma}(s_1, B_4)}{60 \cdot 30}$$

$$\bar{\gamma}(s_1, B) = \frac{50 \cdot 23 \cdot 391,8145 + 50 \cdot 7 \cdot 357,3359 + 10 \cdot 23 \cdot 237,5121 + 10 \cdot 7 \cdot 168,7961}{60 \cdot 30}$$

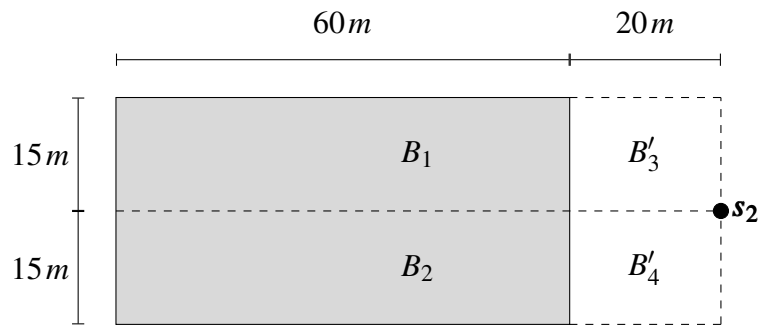
Os valores da semivariância entre o ponto e os sub-blocos foram obtidos utilizando o aplicativo apresentado no item 9.4, facilitando o uso, sem a necessidade da utilização de tabelas auxiliares ou mesmo a conversão das regiões em regiões genéricas. Tem-se então que a semivariância entre o ponto s_1 e o bloco B apresentada na equação (10.13).

$$\bar{\gamma}(s_1, B) = 356,7190 \quad (10.13)$$

10.2.2 Semivariância média entre s_2 e o bloco B

Para se obter a semivariância média entre o ponto s_2 e o bloco B pode-se utilizar a equação (9.6), a equação possui a complexidade de se utilizar vários termos, sendo assim, a utilização do aplicativo apresentado na seção 9.4 facilita para se obter os resultados. O ponto s_2 é vértice de quatro retângulos inferiores dentro do bloco B , que podemos denominar de sub-blocos, como se apresenta na Figura 10.6. Observe que nesse caso, parte do sub-bloco está fora do bloco em análise, sendo assim, ele será subtraído no cálculo da semivariância média entre o ponto e o bloco.

Figura 10.6 – Divisão do bloco e a amostra s_2



Fonte: o autor.

A semivariância média pode ser obtida pela média ponderada das semivariâncias do ponto e todos os sub-blocos que ele possui com o bloco principal.

$$\bar{\gamma}(s_2, B) = \frac{80 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_2, B_1) + 80 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_2, B_2) - 20 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_2, B'_3) - 20 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_2, B'_4)}{60 \cdot 30}$$

$$\bar{\gamma}(s_2, B) = \frac{80 \cdot 15 \cdot 489,3349 + 80 \cdot 15 \cdot 489,3349 - 20 \cdot 15 \cdot 240,2517 - 20 \cdot 15 \cdot 240,2517}{60 \cdot 30}$$

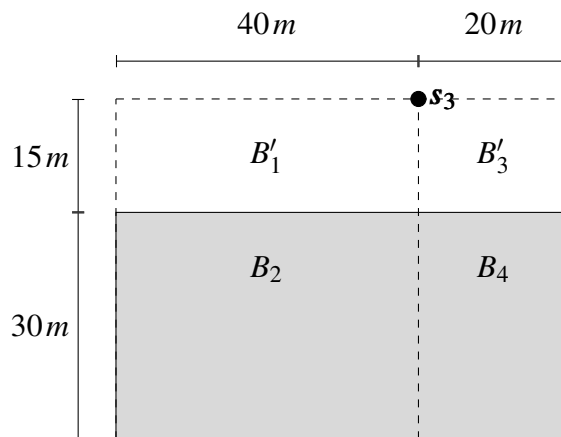
Os valores da semivariância entre o ponto e os sub-blocos foram obtidos utilizando o aplicativo apresentado no item 9.4, facilitando o uso, sem a necessidade da utilização de tabelas auxiliares ou mesmo a conversão das regiões em regiões genéricas. Tem-se então que a semivariância entre o ponto s_2 e o bloco B apresentada na equação (10.14).

$$\bar{\gamma}(s_2, B) = 572,3628 \quad (10.14)$$

10.2.3 Semivariância média entre s_3 e o bloco B

Para se obter a semivariância média entre o ponto s_3 e o bloco B pode-se utilizar a equação (9.6), a equação possui a complexidade de se utilizar vários termos, sendo assim, a utilização do aplicativo apresentado na seção 9.4 facilita para se obter os resultados. O ponto s_3 é vértice de quatro retângulos inferiores dentro do bloco B , que podemos denominar de sub-blocos, como se apresenta na Figura 10.7. Observe que nesse caso, parte do sub-bloco está fora do bloco em análise, sendo assim, ele será subtraído no cálculo da semivariância média entre o ponto e o bloco.

Figura 10.7 – Divisão do bloco e a amostra s_3



Fonte: o autor.

A semivariância média pode ser obtida pela média ponderada das semivariâncias do ponto e todos os sub-blocos que ele possui com o bloco principal.

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}_3, B) = \frac{-40 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(\mathbf{s}_3, B'_1) + 40 \cdot 45 \cdot \bar{\gamma}(\mathbf{s}_3, B_2) - 20 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(\mathbf{s}_3, B'_3) + 20 \cdot 45 \cdot \bar{\gamma}(\mathbf{s}_3, B_4)}{60 \cdot 30}$$

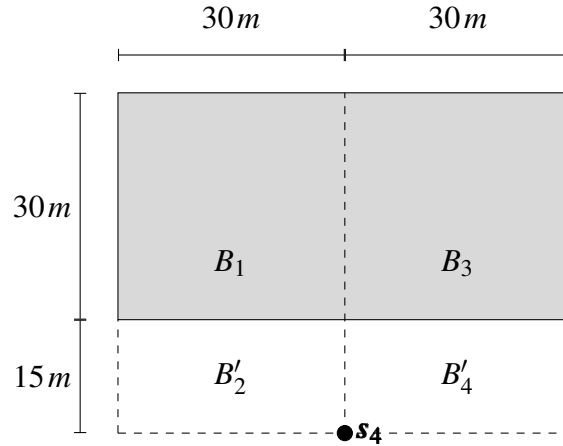
$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}_3, B) = \frac{-40 \cdot 15 \cdot 328,3077 + 40 \cdot 45 \cdot 424,8607 - 20 \cdot 15 \cdot 240,251,6840 + 20 \cdot 45 \cdot 363,0539}{60 \cdot 30}$$

Os valores da semivariância entre o ponto e os sub-blocos foram obtidos utilizando o aplicativo apresentado no item 9.4, facilitando o uso, sem a necessidade da utilização de tabelas auxiliares ou mesmo a conversão das regiões em regiões genéricas. Tem-se então que a semivariância entre o ponto $\mathbf{s}_3$ e o bloco B apresentada na equação (10.15).

$$\bar{\gamma}(\mathbf{s}_3, B) = 456,9099 \quad (10.15)$$

10.2.4 Semivariância média entre $\mathbf{s}_4$ e o bloco B

Para se obter a semivariância média entre o ponto $\mathbf{s}_4$ e o bloco B pode-se utilizar a equação (9.6), a equação possui a complexidade de se utilizar vários termos, sendo assim, a utilização do aplicativo apresentado na seção 9.4 facilita para se obter os resultados. O ponto $\mathbf{s}_4$ é vértice de quatro retângulos inferiores dentro do bloco B , que podemos denominar de sub-blocos, como se apresenta na Figura 10.8. Observe que nesse caso, parte do sub-bloco está fora do bloco em análise, sendo assim, ele será subtraído no cálculo da semivariância média entre o ponto e o bloco.

Figura 10.8 – Divisão do bloco e a amostra s_4 

Fonte: o autor.

A semivariância média pode ser obtida pela média ponderada das semivariâncias do ponto e todos os sub-blocos que ele possui com o bloco principal.

$$\bar{\gamma}(s_4, B) = \frac{30 \cdot 45 \cdot \bar{\gamma}(s_4, B_1) - 30 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_4, B'_2) + 30 \cdot 45 \cdot \bar{\gamma}(s_4, B_3) - 30 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_4, B'_4)}{60 \cdot 30}$$

$$\bar{\gamma}(s_4, B) = \frac{30 \cdot 45 \cdot 392,4565 - 30 \cdot 15 \cdot 283,8113 + 30 \cdot 45 \cdot 392,4565 - 30 \cdot 15 \cdot 283,8113}{60 \cdot 30}$$

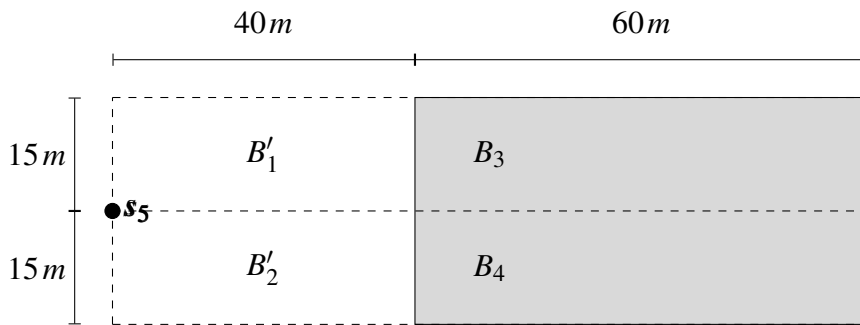
Os valores da semivariância entre o ponto e os sub-blocos foram obtidos utilizando o aplicativo apresentado no item 9.4, facilitando o uso, sem a necessidade da utilização de tabelas auxiliares ou mesmo a conversão das regiões em regiões genéricas. Tem-se então que a semivariância entre o ponto s_4 e o bloco B apresentada na equação (10.16).

$$\bar{\gamma}(s_4, B) = 446,7791 \quad (10.16)$$

10.2.5 Semivariância média entre s_5 e o bloco B

Para se obter a semivariância média entre o ponto s_5 e o bloco B pode-se utilizar a equação (9.6), a equação possui a complexidade de se utilizar vários termos, sendo assim, a utilização do aplicativo apresentado na seção 9.4 facilita para se obter os resultados. O ponto s_5 é vértice de quatro retângulos inferiores dentro do bloco B , que podemos denominar de sub-blocos, como se apresenta na Figura 10.9. Observe que nesse caso, parte do sub-bloco está fora do bloco em análise, sendo assim, ele será subtraído no cálculo da semivariância média entre o ponto e o bloco.

Figura 10.9 – Divisão do bloco e a amostra s_5



Fonte: o autor.

A semivariância média pode ser obtida pela média ponderada das semivariâncias do ponto e todos os sub-blocos que ele possui com o bloco principal.

$$\bar{\gamma}(s_5, B) = \frac{-40 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_5, B'_1) - 40 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_5, B'_2) + 100 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_5, B_3) + 100 \cdot 15 \cdot \bar{\gamma}(s_5, B_4)}{60 \cdot 30}$$

$$\bar{\gamma}(s_5, B) = \frac{-40 \cdot 15 \cdot 328,3077 - 40 \cdot 15 \cdot 328,3077 - 30}{60 \cdot 30} +$$

$$+ \frac{100 \cdot 15 \cdot 548,9712 + 100 \cdot 15 \cdot 548,9712}{60 \cdot 30}$$

Os valores da semivariância entre o ponto e os sub-blocos foram obtidos utilizando o aplicativo apresentado no item 9.4, facilitando o uso, sem a necessidade da utilização de tabelas auxiliares ou mesmo a conversão das regiões em regiões genéricas. Tem-se então que a semivariância entre o ponto s_5 e o bloco B apresentada na equação (10.17).

$$\bar{\gamma}(s_5, B) = 696,0802 \quad (10.17)$$

10.2.6 Valor médio da variável aleatória no bloco B para o exemplo 2

Assim, como temos que a semivariância média do modelo esférico. Conhecendo o estimador da semivariância média para este fenômenos, podemos então construir o vetor de semivariâncias médias entre os pontos e o bloco B, conforme da equação 10.18.

$$\begin{bmatrix} 0 & 415,53 & 491,35 & 402,99 & 790,55 & 1 \\ 415,53 & 0 & 581,25 & 642,86 & 800 & 1 \\ 491,35 & 581,25 & 0 & 659,92 & 778,82 & 1 \\ 402,99 & 642,86 & 659,92 & 0 & 745,06 & 1 \\ 790,55 & 800,00 & 778,82 & 745,06 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 356,7190 \\ 572,3628 \\ 456,9099 \\ 446,7791 \\ 696,0802 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

A solução desse sistema não será apresentada por se julgar um conhecimento prévio que o usuário deve possuir, tem-se então a solução na equação (10.19).

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3460 \\ 0,0233 \\ 0,2693 \\ 0,2340 \\ 0,1273 \\ 19,7527 \end{bmatrix} \quad (10.19)$$

Relembrando a equação da krigagem de blocos descrita na equação (9.1) e apresentada abaixo novamente pela equação (10.20).

$$\hat{\hat{Z}}(B) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot z(\mathbf{s}_i) \quad (10.20)$$

em que N é o número de valores coletados $z(\mathbf{s}_i)$ e λ_i são os pesos associados a cada valor. Assim podemos solucionar e obter o valor médio da variável aleatória no bloco B , temos os valores coletados e os parâmetros λ_i , para esse caso, ao expandir a equação (10.20) temos a equação (10.21).

$$\hat{\hat{Z}}(B) = \lambda_1 \cdot z(\mathbf{s}_1) + \lambda_2 \cdot z(\mathbf{s}_2) + \lambda_3 \cdot z(\mathbf{s}_3) + \lambda_4 \cdot z(\mathbf{s}_4) + \lambda_5 \cdot z(\mathbf{s}_5) \quad (10.21)$$

Substituindo os valores das amostras coletadas e os valores dos pesos de krigagem da equação (10.19), temos a resolução apresentada pela equação (10.22).

$$\hat{\hat{Z}}(B) = 0,3460 \cdot 400 + 0,0233 \cdot 380 + 0,2693 \cdot 450 + 0,2340 \cdot 280 + 0,1273 \cdot 320 \quad (10.22)$$

Sendo assim, temos que para a variável aleatória desse fenômeno no bloco retangular B , a média espacial da variável aleatória é apresentada na equação (10.23).

$$\hat{Z}(B) = 374,695 \text{ ppm} \quad (10.23)$$

Ressalta-se que esse resultado é diferente de uma média convencional, a média apresentada na equação (10.23) é obtida por um estimador ótimo, considerando a espacialidade do fenômeno.

A apresentação dos dois exemplos descritos em 10.1 e 10.2 fortalecem ao leitor como utilizar as equações e o aplicativo apresentado na Seção 9. Além disso, têm-se duas situações distintas: o primeiro exemplo com pontos dentro do bloco e o segundo exemplo com pontos também fora do bloco. Com o conhecimento dos exemplos é possível aplicar em qualquer bloco retangular para qualquer modelo, uma vez que o aplicativo apresentado no item 9.4 possibilita determinar a semivariância média para modelos antes não possíveis. Esse conhecimento auxilia pesquisadores na utilização da krigagem de blocos para se obter médias espaciais.

11 CONCLUSÃO

Por este trabalho é possível compreender a krigagem de blocos e a construção da semivariância média entre um ponto e uma região. Assim, pode-se construir a semivariância média para qualquer modelo em qualquer região. Neste foi apresentado essa construção para regiões retangulares.

Mesmo em face da atual possibilidade da solução numérica das integrais, visto a facilidade do uso computacional, as expressões analíticas (algébricas) continuam tendo seu valor, pois é uma solução exata, geral e independente de métodos numéricos adotados. A precisão das resoluções analíticas dão a grande confiança no trabalho desenvolvido.

Construir os semivariogramas médios linear, esférico, pentaesférico, cúbico, exponencial e gaussiano se caracteriza um avanço nos métodos da krigagem de blocos. Este trabalho ainda apresenta uma maneira simples para pesquisadores utilizarem os resultados obtidos em um aplicativo desenvolvido em *Shiny App*, possibilitando a inserção para qualquer um dos modelos obtidos e qualquer dimensão de retângulo de um bloco.

Apesar da krigagem de blocos ter sua origem na mineração, em outras áreas pode-se obter informações preciosas utilizando a técnica no auxílio de tomadas de decisões. Por exemplo, o preenchimento de falhas em imagens de satélites, o cálculo de um valor médio espacial sem viés, entre outras. Deve-se ressaltar que muito provavelmente nas Ciências Agrárias existirá um mundo considerável na aplicação desta krigagem para médias imprecisas.

Os resultados apresentados caracterizam uma apresentação clara de todo processo realizado na krigagem de blocos e uma evolução da construção da semivariância média em relação a autores de outras épocas. Os resultados e a aplicação desenvolvida facilita a utilização da técnica da krigagem de blocos para a obtenção da média espacial de fenômenos. Os exemplos práticos abordados criam uma base de resolução que é fundamental para pesquisadores em estudos iniciais sobre krigagem de blocos.

Em trabalhos futuros está o desenvolvimento de um aplicativo que possibilita todo o processo da krigagem de blocos, desde a inserção do banco de dados até o valor final da média espacial, implementado utilizando *Shiny App*.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, E. Econometria espacial. **Campinas–SP. Alínea**, 2012.
- ALVES, W. S. *et al.* Mapeamento geoestatístico do spt do bairro da ponta verde-maceió/al. Universidade Federal de Alagoas, 2024.
- ANDRADE, A. L. *et al.* Introdução à estatística espacial para a saúde pública. 2007.
- BAILEY, T. C.; GATRELL, A. C. *et al.* **Interactive spatial data analysis**. [S.l.]: Longman Scientific & Technical Essex, 1995. v. 413.
- BALL, D.; WILLIAMS, W. Variability of soil chemical properties in two uncultivated brown earths. **Journal of Soil Science**, Wiley Online Library, v. 19, n. 2, p. 379–391, 1968.
- BARTLETT, M. S. **An introduction to stochastic processes**. [S.l.]: University Press Cambridge, 1966.
- BICUDO, I. **Os elementos**. [S.l.]: Unesp, 2009.
- BIVAND, R. S.; PEBESMA, E.; GOMEZ-RUBIO, V. **Applied spatial data analysis with R, Second edition**. Springer, NY, 2013. Disponível em: <<https://asdar-book.org/>>.
- BLAIS, R. A.; CARLIER, P. A. Applications of geostatistics in ore evaluation. **Canadian Institute of Mining and Metallurgy**, p. 42, 1968.
- BURGESS, T.; WEBSTER, R. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties: I the semi-variogram and punctual kriging. **Journal of soil science**, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 315–331, 1980.
- BURGESS, T. M.; WEBSTER, R. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties: Ii block kriging. **Journal of Soil Science**, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 333–341, 1980.
- CHANG, W. **shinythemes: Themes for Shiny**. [S.l.], 2021. R package version 1.2.0. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=shinythemes>>.
- CHANG, W. *et al.* **shiny: Web Application Framework for R**. [S.l.], 2024. R package version 1.10.0. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=shiny>>.
- CHILES, J.-P.; DELFINER, P. **Geostatistics: modeling spatial uncertainty**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 497.
- CLARK, I. **Practical geostatistics**. [S.l.]: Applied Science Publishers London, 1979. v. 3.
- CLARK, I.; HARPER, W. R. **Practical geostatistics 2000. Answers to the exercises**. [S.l.]: Ecosse North America LLC, 2000.
- CRESSIE, N. Spatial prediction and ordinary kriging. **Mathematical geology**, Springer, v. 20, n. 4, p. 405–421, 1988.
- CRESSIE, N. The origins of kriging. **Mathematical geology**, Springer, v. 22, n. 3, p. 239–252, 1990.

CRESSIE, N. Aggregation in geostatistical problems. In: **Geostatistics Troia'92**. [S.l.]: Springer, 1993. p. 25–36.

CRESSIE, N. Statistics for spatial data: Wiley series in probability and statistics.(1993). **Google Scholar**, 1993.

CRESSIE, N.; HAWKINS, D. M. Robust estimation of the variogram: I. **Journal of the international Association for Mathematical Geology**, Springer, v. 12, n. 2, p. 115–125, 1980.

DAVID, M. The geostatistical estimation of porphyry-type deposits and scale factor problems. In: **Proceedings, Pribram Mining Symposium. Pribram, Czechoslovakia**. [S.l.: s.n.], 1970.

DELHOMME, J. P. Kriging in the hydrosiences. **Advances in water resources**, v. 1, n. 5, p. 251–266, 1978.

DIGGLE, P. J. **Statistical analysis of spatial and spatio-temporal point patterns**. [S.l.]: CRC press, 2013.

DIGGLE, P. J.; TAWN, J. A.; MOYEED, R. A. Model-based geostatistics. **Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics**, Oxford University Press, v. 47, n. 3, p. 299–350, 1998.

FERRAZ, P. F. P. *et al.* Distribuição espacial do índice de temperatura do globo e umidade em galpão de frangos na primeira semana de vida aquecido por fornalha industrial. **Energia na Agricultura**, v. 32, n. 4, p. 356–363, 2017.

FERREIRA, D. F. **Estatística básica**. [S.l.]: UFLA, 2005.

FONSECA, J. J. S. da. **Apostila de metodologia da pesquisa científica**. [S.l.]: João José Saraiva da Fonseca, 2002.

GIL, A. C. *et al.* **Como elaborar projetos de pesquisa**. [S.l.]: Atlas São Paulo, 2002. v. 4.

GRALER, B.; PEBESMA, E.; HEUVELINK, G. Spatio-temporal interpolation using gstat. **The R Journal**, v. 8, p. 204–218, 2016. Disponível em: <<https://journal.r-project.org/archive/2016/RJ-2016-014/index.html>>.

HAINING, R. P. **Spatial data analysis: theory and practice**. [S.l.]: Cambridge university press, 2003.

HAJRASULIHA, S. *et al.* Spatial variability of soil sampling for salinity studies in southwest iran. **Irrigation science**, Springer, v. 1, n. 4, p. 197–208, 1980.

HARRADINE, F. F. *et al.* The variability of soil properties in relation to stage of profile development. **Proceedings. Soil Science Society of America**, 1949, v. 14, p. 302–311, 1950.

HENGL, T. *et al.* Soilgrids1km—global soil information based on automated mapping. **PloS one**, Public Library of Science San Francisco, USA, v. 9, n. 8, p. e105992, 2014.

HIEMSTRA, P. *et al.* Real-time automatic interpolation of ambient gamma dose rates from the dutch radioactivity monitoring network. **Computers and Geosciences**, 2008. [Http://dx.doi.org/10.1016/j.cageo.2008.10.011](http://dx.doi.org/10.1016/j.cageo.2008.10.011).

- HOHN, M. **Geostatistics and petroleum geology**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1998.
- ISAAKS, E. H.; SRIVASTAVA, R. M. **Applied geostatistics**: Oxford university press. **New York**, USA New York, v. 561, 1989.
- JOURNEL, A. G.; HUIJBREGTS, C. J. **Mining geostatistics**. 1976.
- KRIGE, D. G. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. **Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy**, Southern African Institute of Mining and Metallurgy, v. 52, n. 6, p. 119–139, 1951.
- MATHERON, G. The theory of regionalised variables and its applications. **Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique**, Ecole des Mines de Paris, v. 5, p. 212, 1971.
- MELLO, J. M. de *et al.* Uso do estimador geoestatístico para predição volumétrica por talhão. **Floresta**, v. 36, n. 2, 2006.
- MELO, J. M. de. **Geoestatística aplicada ao inventário florestal**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2004.
- MONTGOMERY, E. G. Experiments in wheat breeding: experimental error in the nursery and variation in nitrogen and yield. Govt. print. off., 1913.
- OLEA, R. A. **Optimum mapping techniques using regionalized variable theory**. [S.l.]: Kansasgeological Survey, 1975.
- OLIVEIRA, M. C. N. d. **Métodos de estimação de parâmetros em modelos geoestatísticos com diferentes estruturas de covariâncias: uma aplicação ao teor de cálcio no solo**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2003.
- OLIVEIRA, M. S. d. **Planos amostrais para variáveis espaciais utilizando geoestatística**. 1991. 100 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 1991.
- OLIVEIRA, M. S. d. *et al.* Análise de dados de área aplicada a indicadores de seguridade rural para a cultura do café. Universidade Federal de Lavras, 2018.
- OLIVEIRA, R. P. de; GREGO, C. R.; BRANDÃO, Z. N. Geoestatística aplicada na agricultura de precisão utilizando o vesp. **Embrapa: Brasília, Brazil**, 2015.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2025. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- SCALON, J. D. **Análise De Dados Espaciais Com Aplicações Em R**. [S.l.]: Editora UFLA, Lavras, 2024. v. 1.
- SCALON, J. D. *et al.* Spatial distribution of the coffee-leaf-miner (leucoptera coffeella) in an organic coffee (coffea arabica l.) field in formation. **Coffee Science-ISSN 1984-3909**, v. 6, n. 3, p. 226–232, 2011.
- SCHABENBERGER, O.; GOTWAY, C. A. **Statistical methods for spatial data analysis: Texts in statistical science**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2017.

SILVESTRE, M. R.; FLORES, E. F.; NETO, J. L. S. Geoestatística aplicada à espacialização da precipitação. **Formação (Online)**, v. 3, n. 23, 2016.

SMITH, L. H. Plot arrangement for variety experiments with corn. **Agronomy Journal**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 84–89, 1907.

SOUSA, I. V. D. **Construção analítica de semivariogramas médios para krigagem de blocos**. 2020. 92 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras, 2020.

STEWART, J. Cálculo, v. 1, 4ª edição. **São Paulo: Pioneira**, 2001.

UGARTE, A. Ejemplos de modelos de estimacion a corto e largo plans. **Boletín de Geostadística, slp**, v. 4, p. 3–22, 1972.

VAUCLIN, M. *et al.* Spatial variability of surface temperature along two transects of a bare soil. **Water Resources Research**, Wiley Online Library, v. 18, n. 6, p. 1677–1686, 1982.

VENABLES, W. N.; RIPLEY, B. D. **Modern Applied Statistics with S**. Fourth. New York: Springer, 2002. ISBN 0-387-95457-0. Disponível em: <<https://www.stats.ox.ac.uk/pub/MASS4/>>.

VIEIRA, S. *et al.* Geostatistical theory and application to variability of some agronomical properties. **Hilgardia**, University of California, Agriculture and Natural Resources, v. 51, n. 3, p. 1–75, 1983.

VIEIRA, S. R.; LOMBARDI, F.; BURROWS, I. Mapeamento da chuva diária máxima provável para o estado de são paulo. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, v. 15, n. 1, p. 93–98, 1991.

VIEIRA, S. R. *et al.* Geoestatística em estudos de variabilidade espacial do solo. **Tópicos em ciência do solo**, Sociedade Brasileira de Ciência do solo Viçosa, v. 1, p. 1–54, 2000.

YAMAMOTO, J. K. **Avaliação e classificação de reservas minerais**. [S.l.]: Edusp, 2001. v. 38.

YAMAMOTO, J. K. Estatística, análise e interpolação de dados geoespaciais. 2020.

YAMAMOTO, J. K.; LANDIM, P. M. B. **Geoestatística: conceitos e aplicações**. [S.l.]: Oficina de textos, 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A – SEMIVARIOGRAMA MÉDIO PARA O MODELO EXPONENCIAL

O modelo exponencial é apresentado de acordo com a equação (1):

$$\hat{\gamma}(h) = \begin{cases} 0, & \text{para } h = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right], & \text{para } 0 < h < a \\ C_0 + C_1, & \text{para } h \geq a \end{cases} \quad (1)$$

Temos então que a semivariância média entre um ponto e um bloco retangular ocorre pela equação (2):

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) &= \frac{1}{P \cdot Q} \cdot \int_0^P \frac{\pi \cdot h}{2} \cdot \gamma(h) dh + \\ &+ \frac{1}{P \cdot Q} \cdot \int_P^Q \left[\frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \gamma(h) dh + \\ &\frac{1}{P \cdot Q} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \gamma(h) dh \end{aligned} \quad (2)$$

Ao aplicar o semivariograma do modelo exponencial na equação da semivariância média, a semivariância média de um ponto e um bloco retangular será a resolução da equação (3).

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\mathbf{s}, B) &= C_0 + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_0^P \frac{\pi \cdot h}{2} \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh + \\ &+ \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_P^Q \left[\frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh + \end{aligned}$$

$$+\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\frac{\pi \cdot h}{2} - \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h - \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh \quad (3)$$

Desmembrando as integrais, a solução se divide em seis partes, que ao solucionar todas elas, a soma dos resultados será a semivariância média entre um ponto e um bloco retangular para um modelo exponencial, descrito na equação (4)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\mathbf{s}, B) = & C_0 + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi \cdot h}{2} dh + \\ & + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi \cdot h}{2} \cdot \left[e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh + \\ & + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos\left(\frac{P}{h}\right) h \right] dh + \\ & + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \left[e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh + \\ & + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[-\arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h \right] dh + \\ & + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \left[e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh \end{aligned} \quad (4)$$

Solucionando cada uma das partes da equação (4) separadamente, a primeira parte:

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi \cdot h}{2} dh$$

A constante $\frac{\pi}{2}$ pode ser colocada para fora da integral:

$$\frac{\pi \cdot C_1}{2 \cdot P \cdot Q} \cdot \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} h dh$$

A integral de h é dada por:

$$\int h dh = \frac{h^2}{2}$$

Aplicando esse resultado na integral:

$$\frac{\pi \cdot C_1}{2 \cdot P \cdot Q} \cdot \left[\frac{h^2}{2} \right] \Big|_0^{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

Substituímos os limites 0 e $\sqrt{P^2+Q^2}$:

$$\frac{\pi \cdot C_1}{2 \cdot P \cdot Q} \cdot \left(\frac{(\sqrt{P^2+Q^2})^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

$$\frac{\pi \cdot C_1}{2 \cdot P \cdot Q} \cdot \left(\frac{P^2+Q^2}{2} \right)$$

$$\frac{\pi \cdot C_1}{2 \cdot P \cdot Q} \cdot \frac{P^2+Q^2}{2}$$

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi \cdot h}{2} dh = \frac{\pi \cdot C_1 \cdot (P^2+Q^2)}{4 \cdot P \cdot Q}$$

Solucionando a segunda parte:

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} \frac{\pi \cdot h}{2} \cdot \left[e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh$$

Podemos colocar as constantes $\frac{C_1 \pi}{2 \cdot P \cdot Q}$ para fora da integral:

$$\frac{C_1 \pi}{2 \cdot P \cdot Q} \cdot \int_0^{\sqrt{P^2+Q^2}} h \cdot e^{-\frac{h}{a}} dh$$

A integral do tipo:

$$\int h \cdot e^{-b \cdot x} dx$$

possui a solução conhecida:

$$\int x \cdot e^{-b \cdot x} dx = \frac{e^{-b \cdot x}(-b \cdot x - 1)}{b^2}$$

onde, no nosso caso, $x = h$ e $b = \frac{1}{a}$, ou seja:

$$\int h \cdot e^{-\frac{h}{a}} dh = a^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{a}} \cdot \left(\frac{h}{a} + 1 \right) \right)$$

Aplicamos os limites de integração $h = 0$ a $h = \sqrt{P^2 + Q^2}$:

$$\frac{C_1 \cdot \pi}{2 \cdot P \cdot Q} \cdot a^2 \cdot \left[1 - e^{-\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{a}} \cdot \left(\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{a} + 1 \right) \right]$$

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \int_0^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \frac{\pi \cdot h}{2} \cdot \left[e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh = \frac{C_1 \cdot \pi \cdot a^2}{2 \cdot P \cdot Q} \left[1 - e^{-\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{a}} \cdot \left(\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{a} + 1 \right) \right]$$

Solucionando a terceira parte

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \int_P^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \left[-\arccos \left(\frac{P}{h} \right) \cdot h \right] dh$$

Para resolver a integral:

$$\int h \cdot \arccos \left(\frac{P}{h} \right) dh$$

usamos a técnica de integração por partes, cuja fórmula geral é:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Escolhemos:

- $u = \arccos \left(\frac{P}{h} \right)$, então $du = \frac{-1}{\sqrt{h^2 - P^2}} \cdot \frac{P}{h^2} dh$ - $dv = h dh$, então $v = \frac{h^2}{2}$

Aplicamos a fórmula:

$$\int h \cdot \arccos \left(\frac{P}{h} \right) dh = \frac{h^2}{2} \cdot \arccos \left(\frac{P}{h} \right) - \int \frac{h^2}{2} \cdot \frac{-P}{h^2 \cdot \sqrt{h^2 - P^2}} dh$$

$$= \frac{h^2}{2} \cdot \arccos\left(\frac{P}{h}\right) + \frac{P}{2} \cdot \int \frac{dh}{\sqrt{h^2 - P^2}}$$

A integral:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h^2 - P^2}}$$

é uma integral conhecida, cujo resultado é:

$$\ln\left(h + \sqrt{h^2 - P^2}\right)$$

Portanto:

$$\frac{P}{2} \cdot \ln\left(h + \sqrt{h^2 - P^2}\right)$$

Substituímos os limites $h = P$ e $h = \sqrt{P^2 + Q^2}$ na expressão final:

$$I = -\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \left[\frac{h^2}{2} \arccos\left(\frac{P}{h}\right) + \frac{P}{2} \cdot \ln\left(h + \sqrt{h^2 - P^2}\right) \right]_P^{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Para $h = \sqrt{P^2 + Q^2}$:

$$\frac{h^2}{2} \cdot \arccos\left(\frac{P}{h}\right) = \frac{(P^2 + Q^2)}{2} \cdot \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right)$$

$$\frac{P}{2} \cdot \ln\left(\sqrt{P^2 + Q^2} + \sqrt{(P^2 + Q^2) - P^2}\right)$$

Para $h = P$:

$$\frac{h^2}{2} \cdot \arccos\left(\frac{P}{h}\right) = \frac{P^2}{2} \cdot \arccos(1) = 0$$

$$\frac{P}{2} \cdot \ln\left(P + \sqrt{P^2 - P^2}\right) = \frac{P}{2} \cdot \ln P$$

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \left[-\arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h \right] dh =$$

$$= -\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \left[\frac{(P^2 + Q^2)}{2} \cdot \arccos \left(\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) + \frac{P}{2} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + Q}{P} \right) \right]$$

Solucionando a quarta parte

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \left[\arccos \left(\frac{P}{h} \right) h \right] \cdot \left[e^{-\left(\frac{h}{a} \right)} \right] dh$$

Para este ponto é necessário realizar uma aproximação da integral, uma vez que ela não possui solução analítica.

$$e^{-\left(\frac{h}{a} \right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^m$$

Em vez de deixá-la infinita, escolhemos trancar no índice $m = M$, resultando num polinômio de grau M .

$$e^{-\left(\frac{h}{a} \right)} = \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{h}{a} \right)^m = E_M(h)$$

Quanto maior M , melhor a aproximação.

Se tomarmos $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$, trocando a soma e a integral, temos:

$$\int_P^R \arccos \left(\frac{P}{h} \right) \cdot h^{m+1} dh$$

Sendo assim, a aproximação acontece por:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \left[\arccos \left(\frac{P}{h} \right) \cdot h \right] \cdot \left[e^{-\left(\frac{h}{a} \right)} \right] dh = \\ \frac{C_1}{P \cdot Q} \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m! a^{2m}} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \arccos \left(\frac{P}{h} \right) \cdot h^{m+1} dh \end{aligned}$$

Solucionando a quinta parte

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \left[-\arccos \left(\frac{Q}{h} \right) \cdot h \right] dh$$

Para resolver a integral:

$$\int h \cdot \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) dh$$

usamos a técnica de integração por partes, cuja fórmula geral é:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Escolhemos:

$$- u = \arccos\left(\frac{Q}{h}\right), \text{ então } du = \frac{-1}{\sqrt{h^2 - Q^2}} \cdot \frac{Q}{h^2} dh - dv = h dh, \text{ então } v = \frac{h^2}{2}$$

Aplicamos a fórmula:

$$\begin{aligned} \int h \cdot \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) dh &= \frac{h^2}{2} \cdot \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) - \int \frac{h^2}{2} \cdot \frac{-Q}{h^2 \sqrt{h^2 - Q^2}} dh \\ &= \frac{h^2}{2} \cdot \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) + \frac{Q}{2} \cdot \int \frac{dh}{\sqrt{h^2 - P^2}} \end{aligned}$$

A integral:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h^2 - Q^2}}$$

é uma integral conhecida, cujo resultado é:

$$\ln\left(h + \sqrt{h^2 - Q^2}\right)$$

Portanto:

$$\frac{Q}{2} \cdot \ln\left(h + \sqrt{h^2 - P^2}\right)$$

Substituímos os limites $h = Q$ e $h = \sqrt{P^2 + Q^2}$ na expressão final:

$$I = -\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \left[\frac{h^2}{2} \cdot \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) + \frac{Q}{2} \ln\left(h + \sqrt{h^2 - P^2}\right) \right]_Q^{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Para $h = \sqrt{P^2 + Q^2}$:

$$\frac{h^2}{2} \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) = \frac{(P^2 + Q^2)}{2} \arccos\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right)$$

$$\frac{Q}{2} \cdot \ln \left(\sqrt{P^2 + Q^2} + \sqrt{(P^2 + Q^2) - Q^2} \right)$$

Para $h = Q$:

$$\frac{h^2}{2} \cdot \arccos \left(\frac{Q}{h} \right) = \frac{Q^2}{2} \cdot \arccos(1) = 0$$

$$\frac{Q}{2} \cdot \ln \left(Q + \sqrt{Q^2 - Q^2} \right) = \frac{Q}{2} \cdot \ln Q$$

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \left[-\arccos \left(\frac{Q}{h} \right) \cdot h \right] dh =$$

$$= -\frac{C_1}{P \cdot Q} \left[\frac{(P^2 + Q^2)}{2} \cdot \arccos \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) + \frac{Q}{2} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{P^2 + Q^2} + P}{Q} \right) \right]$$

Solucionando a sexta parte

$$\frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2 + Q^2}} \left[\arccos \left(\frac{Q}{h} \right) \cdot h \right] \left[e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh$$

Para este ponto é necessário realizar uma aproximação da integral, uma vez que ela não possui solução analítica.

$$e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^m$$

Em vez de deixá-la infinita, escolhemos trancar no índice $m = M$, resultando num polinômio de grau M .

$$e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} = \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^m = E_M(h)$$

Quanto maior M , melhor a aproximação.

Se tomarmos $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$, trocando a soma e a integral, temos:

$$\int_Q^R \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h^{m+1} dh$$

Sendo assim, a aproximação acontece por:

$$\begin{aligned} & \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \left[\arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h \right] \cdot \left[e^{-\left(\frac{h}{a}\right)} \right] dh = \\ & \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m! \cdot a^{2 \cdot m}} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h^{m+1} dh \end{aligned}$$

Com todas as partes solucionadas, a soma de cada uma delas será o resultado da semi-variância média entre um ponto e um bloco retangular para o modelo exponencial, apresentado na equação (5).

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\mathbf{s}, B)_{Exp} = & C_0 + C_1 + \frac{\pi \cdot C_1}{4 \cdot P \cdot Q} \cdot \left[\frac{P^2 + Q^2}{2} - a^2 + \left(a^2 + a\sqrt{P^2 + Q^2} \right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{a}} \right] + \\ & - \frac{\pi \cdot (P^2 + Q^2)}{4 \cdot P \cdot Q} + \\ & + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m! \cdot a^{2 \cdot m}} \cdot \int_P^{\sqrt{P^2+Q^2}} \arccos\left(\frac{P}{h}\right) \cdot h^{m+1} dh + \\ & + \frac{C_1}{P \cdot Q} \cdot \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m! \cdot a^{2 \cdot m}} \cdot \int_Q^{\sqrt{P^2+Q^2}} \arccos\left(\frac{Q}{h}\right) \cdot h^{m+1} dh \end{aligned} \quad (5)$$

APÊNDICE B – TABELA DE SEMIVARIÂNCIA OBTIDA POR CLARK (1979)

A figura 1 apresenta extraído diretamente do texto de Clark (1979) a tabela de semivariância média entre um ponto e um bloco retangular para o modelo esférico, é peça fundamental para a comparação com o resultado apresentado na tabela 9.2.

Figura 1 – Tabela de semivariância obtida por Clark (1979)

<i>L</i>	<i>B</i>									
	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.10
.10	.114	.177	.243	.310	.374	.436	.494	.546	.593	.633
.20	.177	.227	.285	.346	.406	.464	.518	.568	.613	.651
.30	.243	.285	.336	.390	.445	.499	.550	.597	.639	.674
.40	.310	.346	.390	.439	.489	.539	.586	.629	.668	.701
.50	.374	.406	.445	.489	.535	.580	.623	.663	.698	.728
.60	.436	.464	.499	.539	.580	.621	.660	.697	.728	.755
.70	.494	.518	.550	.586	.623	.660	.696	.729	.757	.781
.80	.546	.568	.597	.629	.663	.697	.729	.758	.783	.805
.90	.593	.613	.639	.668	.698	.728	.757	.783	.806	.826
1.00	.633	.651	.674	.701	.728	.755	.781	.805	.826	.843
1.20	.694	.709	.729	.751	.774	.796	.818	.837	.855	.869
1.40	.738	.751	.767	.786	.806	.825	.844	.861	.875	.888
1.60	.771	.782	.797	.813	.830	.847	.863	.878	.891	.902
1.80	.796	.806	.819	.834	.849	.864	.879	.892	.903	.913
2.00	.817	.826	.837	.850	.864	.878	.891	.902	.913	.921
2.50	.853	.860	.870	.880	.891	.902	.913	.922	.930	.937
3.00	.878	.884	.891	.900	.909	.918	.927	.935	.942	.948
3.50	.895	.900	.907	.914	.922	.930	.938	.944	.950	.955
4.00	.908	.913	.919	.925	.932	.939	.945	.951	.956	.961
5.00	.927	.930	.935	.940	.946	.951	.956	.961	.965	.969

Fonte: Clark (1979)

Essa tabela representa o único modelo obtido por Clark (1979) e pode ser encontrada na página 52 do seu livro.

APÊNDICE C – RESULTADOS DE SEMIVARIÂNCIA MÉDIA ENTRE OS PONTOS E O BLOCO PARA O EXEMPLO 1 DO ITEM 10.1

As figuras 2, 3, 4 e 5 apresentam a semivariância média entre o ponto s_1 e os sub-blocos B_i dentro do bloco B . Esses valores são utilizados para na seção 10.1 para se obter o resultado apresentado na equação (10.3).

Figura 2 – Semivariância média entre o ponto s_1 e o sub-bloco B_1

Semivariância média de um bloco

Semivariância média
Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:
Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:
Selecione o Modelo:

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

A semivariância média para o modelo e o bloco é:
A semivariância média para o modelo e o bloco é: 6.769165

Fonte: o autor.

Figura 3 – Semivariância média entre o ponto s_1 e o sub-bloco B_2

Semivariância média de um bloco

Semivariância média
Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:
Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:
Selecione o Modelo:

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

A semivariância média para o modelo e o bloco é:
A semivariância média para o modelo e o bloco é: 5.735168

Fonte: o autor.

Figura 4 – Semivariância média entre o ponto s_1 e o sub-bloco B_3

Semivariância média de um bloco

Semivariância média

Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Esférico

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

A semivariância média para o modelo e o bloco é: 5,735168

Fonte: o autor.

Figura 5 – Semivariância média entre o ponto s_1 e o sub-bloco B_4

Semivariância média de um bloco

Semivariância média

Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Esférico

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

A semivariância média para o modelo e o bloco é: 4,556331

Fonte: o autor.

As figuras 6, 7, 8 e 9 apresentam a semivariância média entre o ponto s_2 e os sub-blocos B_i dentro do bloco B . Esses valores são utilizados para na seção 10.1 para se obter o resultado apresentado na equação (10.4).

Figura 6 – Semivariância média entre o ponto s_2 e o sub-bloco B_1

Semivariância média de um bloco

Semivariância média Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Estérico ▾

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

A semivariância média para o modelo e o bloco é: 8.388365

Fonte: o autor.

Figura 7 – Semivariância média entre o ponto s_2 e o sub-bloco B_2

Semivariância média de um bloco

Semivariância média Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Estérico ▾

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

A semivariância média para o modelo e o bloco é: 5.566953

Fonte: o autor.

Figura 8 – Semivariância média entre o ponto s_2 e o sub-bloco B_3

Semivariância média de um bloco

Semivariância média

Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Esférico

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

A semivariância média para o modelo e o bloco é: 6.579685

Fonte: o autor.

Figura 9 – Semivariância média entre o ponto s_2 e o sub-bloco B_4

Semivariância média de um bloco

Semivariância média

Informações

Insira os valores das dimensões do bloco de lados P e Q:

Dimensão P do bloco:

Dimensão Q do bloco:

Selecione o modelo e insira os parâmetros:

Selecione o Modelo:

Esférico

Valor do efeito pepita (C0):

Valor da contribuição (C1):

Valor do alcance (a):

Calcular

A semivariância média para o modelo e o bloco é:

A semivariância média para o modelo e o bloco é: 2.895135

Fonte: o autor.