



LUCAS PEREIRA BARBOSA

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DA VOLATILIDADE EM PETR4 E
VALE3 COM O MODELO APARCH: UMA PERSPECTIVA
SOBRE PERÍODOS DE CRISE**

LAVRAS – MG

2025

LUCAS PEREIRA BARBOSA

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DA VOLATILIDADE EM PETR4 E VALE3 COM O
MODELO APARCH: UMA PERSPECTIVA SOBRE PERÍODOS DE CRISE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Mestre.

Dra. Thelma Sáfydi
Orientadora

Dr. Luiz Otávio de Oliveira Pala
Coorientador

**LAVRAS – MG
2025**

**Ficha Catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração
de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com
dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Barbosa, Lucas.

Análise estatística da volatilidade em PETR4 e VALE3 com o modelo APARCH
: uma perspectiva sobre períodos de crise / Lucas Barbosa. - 2025.
78 p. : il.

Orientadora: Thelma Sáfydi

Coorientador: Luiz Otávio de Oliveira Pala

Dissertação (Mestrado Acadêmico) - Universidade Federal de Lavras, 2025.
Bibliografia.

1. Séries temporais. 2. Risco. 3. Choques assimétricos. 4. Agrupamento. 5.
Persistência. I. Sáfydi, Thelma. II. de Oliveira Pala, Luiz Otávio. III.
Universidade Federal de Lavras. IV. Título.

LUCAS PEREIRA BARBOSA

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DA VOLATILIDADE EM PETR4 E VALE3 COM O
MODELO APARCH: UMA PERSPECTIVA SOBRE PERÍODOS DE CRISE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 16 de Junho de 2025.

Prof. Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães UFLA

Profa. Dra. Aline Caroline Rodrigues IFSP

Prof. Dr. Ednilson Sebastiao de Avila DAE/FCSA

Dra. Thelma Sáfadi
Orientadora

Dr. Luiz Otávio de Oliveira Pala
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

Dedico este trabalho à minha querida mãe, in memoriam.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes de tudo, a Deus e aos meus guias espirituais, que desde o meu nascimento têm iluminado meu caminho, não permitindo que eu me sentisse desamparado ou sem direção em nenhum momento da minha vida.

À minha mãe, que já não está mais presente de forma física, mas que permanece viva em mim por meio dos valores e ensinamentos que transmitiu, os quais moldaram a pessoa que sou hoje.

Ao meu pai, exemplo de dedicação e coragem, que, mesmo sem saber o que o futuro reservaria, sempre se empenhou em garantir minha permanência nos estudos, não medindo esforços para que eu chegasse até aqui.

À minha companheira, Layne, que aceitou o desafio de estar ao meu lado mesmo diante de tantas adversidades, oferecendo apoio e partilhando comigo as dificuldades e as cargas emocionais próprias da vida acadêmica.

Aos meus irmãos, Artur e Pedro, que, ainda que não sejam psicólogos, muitas vezes assumiram esse papel. São eles que me fortalecem diariamente e me fazem acreditar que sou um exemplo, lembrando-me de que esta conquista não é apenas minha, mas também deles.

Ao meu mais fiel amigo, Apolo, que esteve presente em todos os momentos, sejam de alegria ou de tristeza, de fartura ou de escassez, sempre ao meu lado com pureza e compreensão. Eu não poderia desejar companhia melhor do que a sua.

Aos meus orientadores, pela paciência, pela confiança em meu potencial e pela oportunidade de aprender e evoluir durante o mestrado.

Aos demais amigos e familiares que, de forma direta ou indireta, me acompanharam nessa caminhada e tiveram participação fundamental nesta conquista.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG).

Os gráficos contemplam tudo, menos os atos de Deus.

(Expressão popular inspirada na Teoria de Dow.)

RESUMO

O risco e a quantificação da incerteza são aspectos de grande importância para o setor financeiro de uma economia. Sob a ótica das entidades financeiras, a análise de risco possibilita a formulação de melhores estratégias para a gestão de carteiras de ativos e a alocação de recursos. O objetivo deste trabalho é estudar o agrupamento, persistência e assimetria na volatilidade presente nas ações da Petrobras (Petróleo Brasileiro S/A), uma entidade de economia mista controlada pela União Federal, e da Vale do Rio Doce, uma instituição privada de controle acionário, ambas listadas na Bolsa de Valores Brasileira, B3, durante períodos de instabilidade econômica ou política no cenário nacional. Em um ensaio inicial, foram consideradas as séries temporais de fechamentos diários das ações preferenciais da Petrobras, simbolizadas por PETR4, e das ações ordinárias da Vale, simbolizadas por VALE3, no período de janeiro de 2007 a dezembro de 2025. A modelagem da volatilidade foi realizada utilizando o modelo Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (APARCH), permitindo avaliar a dinâmica de assimetria e a persistência dos choques presentes nos retornos durante o período em estudo. Os resultados sugeriram que choques negativos impactaram de maneira desigual a trajetória dos preços desses ativos em comparação aos choques positivos, evidenciado por uma maior inclinação na curva de impacto. Isso revela uma maior sensibilidade dos ativos a eventos adversos, o que aumenta o risco durante períodos específicos de instabilidade.

Palavras-chave: séries temporais; risco; modelo ARMA; modelo APARCH; choques assimétricos; persistência; agrupamento; eventos extremos.

ABSTRACT

Risk and uncertainty quantification are crucial aspects of the financial sector of an economy. From the perspective of financial institutions, risk analysis enables the development of better strategies for asset portfolio management and resource allocation. The objective of this study is to examine clustering, persistence, and asymmetry in the volatility of Petrobras (Petróleo Brasileiro S/A), a mixed-capital company controlled by the Federal Government, and Vale do Rio Doce, a privately controlled institution, both listed on the Brazilian stock exchange (B3), during periods of economic or political instability in the national scenario. In an initial approach, the time series of daily closing prices of Petrobras' preferred shares, symbolized by PETR4, and Vale's common shares, symbolized by VALE3, were considered for the period from January 2007 to December 2024. Volatility modeling was performed using the Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (APARCH) model, allowing the evaluation of asymmetry dynamics and the persistence of shocks in returns throughout the study period. Preliminary results suggest that negative shocks have asymmetrically impacted the price trajectories of these assets compared to positive shocks, as evidenced by a steeper impact curve. This reveals a greater sensitivity of these assets to adverse events, increasing risk during specific periods of instability.

Keywords: time series; risk; ARMA model; APARCH model; asymmetric shocks; persistence; clustering; extreme events.

INDICADORES DE IMPACTO

O trabalho analisa a volatilidade das ações da Vale e da Petrobrás por meio do modelo APARCH, incorporando variáveis associadas a períodos de crise, como a COVID-19. O impacto tecnológico decorre da aplicação e adaptação de métodos de séries temporais capazes de capturar assimetrias e efeitos de alavancagem em ativos estratégicos da economia nacional. No campo econômico, a pesquisa oferece subsídios a investidores, gestores e formuladores de políticas, ao contribuir para a compreensão dos riscos e instabilidades ligados a grandes companhias brasileiras. O impacto social ocorre pela difusão de conhecimento junto à comunidade acadêmica e pela formação de estudantes e pesquisadores em metodologias aplicadas a problemas reais. Inserido nas áreas de Educação e de Tecnologia e Produção, o estudo fortalece a integração entre ensino, pesquisa e mercado. Alinha-se ainda aos ODS 4 (Educação de qualidade), ODS 8 (Trabalho decente e crescimento econômico) e ODS 9 (Indústria, inovação e infraestrutura). Em síntese, os impactos se manifestam na produção de conhecimento científico, na qualificação de recursos humanos e na aplicação dos resultados para a gestão de riscos financeiros e para o entendimento de fenômenos que afetam diretamente a economia brasileira.

IMPACT INDICATORS

This study analyzes the volatility of Vale and Petrobras stocks using the APARCH model, incorporating variables related to crisis periods such as COVID-19. The technological impact lies in the application and adaptation of time series methods that capture asymmetries and leverage effects in strategic assets for the national economy. Economically, the research provides valuable insights for investors, managers, and policymakers by improving the understanding of risks and instabilities associated with major Brazilian companies. The social impact emerges through the dissemination of knowledge within the academic community and the training of students and researchers in methods applied to real-world problems. Positioned within the areas of Education and Technology and Production, the study strengthens the integration between teaching, research, and the market. It is also aligned with SDG 4 (Quality Education), SDG 8 (Decent Work and Economic Growth), and SDG 9 (Industry, Innovation, and Infrastructure). In summary, the impacts are reflected in the production of scientific knowledge, the qualification of human resources, and the application of results in financial risk management and in understanding phenomena that directly affect the Brazilian economy.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Ibovespa no cenário global.	18
Figura 4.1 – Evolução dos preços de fechamento - VALE3 e PETR4	41
Figura 4.2 – Variação dos retornos diários - VALE3 e PETR4	42
Figura 4.3 – Funções de autocorrelação e autocorrelação parcial dos retornos	44
Figura 4.4 – ACF dos resíduos	46
Figura 4.5 – ACF e PACF dos resíduos quadráticos	47
Figura 4.6 – Volatilidade condicional estimada das ações da VALE3 e PETR4	50
Figura 4.7 – ACF dos resíduos padronizados	52
Figura 4.8 – ACF dos resíduos padronizados quadrados	53
Figura 4.9 – Retornos com máximos e mínimos destacados - VALE3	56
Figura 4.10 – Retornos com máximos e mínimos destacados - PETR3	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Estatísticas descritivas dos retornos diários de VALE3 e PETR4.	43
Tabela 4.2 – Resultados do teste de Box-Pierce para os retornos logarítmicos de VALE3 e PETR4.	44
Tabela 4.3 – Estimativas dos parâmetros do modelo AR(10) para os retornos de VALE3.	45
Tabela 4.4 – Estimativas dos parâmetros do modelo AR(7) ajustado para os retornos de PETR4.	45
Tabela 4.5 – Teste de Multiplicador de Lagrange (LM) para heterocedasticidade condi- cional.	47
Tabela 4.6 – Parâmetros do modelo de volatilidade para VALE3 e PETR4.	48
Tabela 4.7 – Parâmetros do modelo de volatilidade para VALE3	57
Tabela 4.8 – Parâmetros do modelo de volatilidade para PETR4	59

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1 – Informações das ações VALE3 e PETR4.	36
Quadro 4.1 – Períodos de pico de volatilidade de VALE3, seus motivos e o impacto nos preços	55
Quadro 4.2 – Períodos de pico de volatilidade de PETR4, seus motivos e o impacto nos preços	57

SUMÁRIO

1	Introdução	15
2	Revisão de literatura	17
2.1	A B3 e sua relevância no mercado de capitais brasileiro	17
2.2	Motivação para a escolha das empresas analisadas	18
2.3	Séries temporais financeiras	19
2.3.1	Retornos	20
2.3.2	Modelos autorregressivos e de médias móveis	22
2.3.2.1	Identificação do modelo	23
2.3.2.2	Estimação dos parâmetros	24
2.3.3	Algoritmo Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS)	25
2.4	Modelagem da volatilidade	27
2.4.1	Evolução dos modelos para volatilidade	27
2.4.2	Dinâmica e características da volatilidade	27
2.4.3	Estrutura dos modelos de volatilidade	28
2.4.4	Modelos ARCH, GARCH e extensões	29
2.4.4.1	ARCH(p)	30
2.4.4.2	GARCH(p,q)	30
2.4.4.3	APARCH(p,q)	31
2.4.4.4	APARCH estendido	33
2.5	Choques econômicos e a dinâmica da volatilidade financeira: Uma revisão teórica	33
2.6	Seleção final do modelo	34
3	Metodologia	36
3.1	Descrição dos dados	36
3.2	Implementação em R: Funções e pacotes utilizados	36
3.3	Testes para diagnóstico de dependência serial e heterocedasticidade	38
3.3.1	Teste de Box-Pierce e Ljung-Box	39
3.3.2	Teste ARCH-LM	39
4	Resultados e Discussões	40
4.1	Análise descritiva das séries de Preços e Retornos	40
4.2	Função de Autocorrelação e ajuste de média	44

4.3	Estimativas e interpretação dos parâmetros do modelo APARCH(1,1)	48
4.3.1	Análise gráfica dos parâmetros do modelo de volatilidade	50
4.3.2	Análise de resíduo do modelo APARCH(1,1)	52
4.4	Aplicação do modelo APARCH(1,1) estendido	53
4.4.1	VALE3	54
4.4.2	PETR4	56
5	Conclusões	61
	REFERÊNCIAS	64
	Apêndice A	68
	Script em R: Análise VALE3 e PETR4	68

1 INTRODUÇÃO

O risco no ambiente econômico e financeiro é um tema amplamente investigado, devido à sua estreita ligação com a volatilidade dos ativos. A quantificação precisa desse risco é de grande relevância para o setor financeiro, pois permite uma melhor gestão dos portfólios e a criação de carteiras.

Os riscos associados a ativos financeiros podem ser divididos em duas categorias principais: o risco de mercado, que impacta o mercado de maneira generalizada, abrangendo eventos como crises econômicas, desastres naturais, ataques terroristas e pandemias; e o risco não sistêmico, que afeta diretamente empresas ou setores específicos, sendo provocado por fatores internos, como má gestão ou desafios particulares de determinados segmentos (DAS et al., 2019).

A ocorrência de eventos como esses, aos quais se atribui o termo extremos, tende a aumentar substancialmente a volatilidade no mercado como um todo, devido ao potencial de incerteza que um evento como esse é capaz de trazer para o mercado, impactando diretamente os preços dos ativos e, conseqüentemente, seus retornos. Nesse sentido, a avaliação precisa da volatilidade dos retornos é fundamental para a formulação de estratégias e a tomada de decisões no contexto econômico-financeiro (FAUSTINO, 2013).

Dada a relevância da volatilidade como um tema central em finanças, este estudo tem como objetivo analisar e comparar o impacto de eventos extremos na volatilidade dos retornos das ações da Vale S.A. e Petróleo Brasileiro S.A.

Neste estudo, optou-se por utilizar as empresas Vale e Petrobras como referência por sua forte presença no cenário econômico brasileiro e internacional. Ambas são líderes em seus setores — mineração e energia — e exercem papel estratégico na economia do país.

Além de sua relevância no mercado, essas empresas frequentemente estão no centro de discussões sobre temas econômicos, sociais e ambientais, o que reforça o interesse para análises que envolvem o comportamento de ativos financeiros.

A relevância da Vale e da Petrobras também se reflete na forma como respondem a diferentes contextos econômicos. Atuando em setores ligados às *commodities*, como o minério de ferro e o petróleo bruto, essas empresas estão sujeitas a variações de mercado, como flutuações nos preços internacionais e mudanças no cenário político e econômico. Sua presença global

e seu impacto direto na economia brasileira fazem delas casos representativos para análise de ativos expostos a diferentes tipos de risco.

A fim de estudar a volatilidade dos ativos dessas empresas e compreender como os ativos se comportaram em cenários marcados pela presença de incerteza macroeconômica, propõe-se o uso do modelo *Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (APARCH). Esse modelo é utilizado para examinar como os três principais fatos estilizados da volatilidade dos retornos — agrupamento, persistência e assimetria — se manifestam nas ações selecionadas. Além disso, o modelo permite evidenciar os picos de volatilidade provocados por crises econômicas e fatores específicos de risco de cada empresa, destacando os impactos assimétricos gerados por choques, tanto positivos quanto negativos.

Portanto, este estudo propõe o modelo APARCH para analisar as duas ações de maior peso no índice Ibovespa, avaliando como o agrupamento, a persistência e a assimetria da volatilidade influenciam a trajetória dos preços.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Esta seção apresenta os principais fundamentos teóricos relacionados à análise de séries temporais financeiras. Inicia-se com uma motivação para a escolha das séries de VALE3 e PETR4; posteriormente, aborda-se a definição e caracterização dessas séries, tratando seus comportamentos típicos e a justificativa para a aplicação de modelos específicos na sua análise.

Em seguida, são discutidos os modelos ARMA (*AutoRegressive Moving Average*), que combinam componentes autorregressivos e de médias móveis para modelar séries temporais. Posteriormente, abordam-se os modelos voltados para a variabilidade das séries, com ênfase na família de modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), utilizada para modelar a volatilidade.

Dando continuidade, destaca-se o modelo APARCH (*Asymmetric Power GARCH*), uma extensão do GARCH que incorpora o efeito de alavancagem. Esse efeito permite capturar assimetrias na resposta da volatilidade a choques positivos e negativos, sendo especialmente útil na avaliação de risco em mercados financeiros voláteis, como o mercado de ações. Conforme indicado por Engle (2004), modelos que consideram efeitos assimétricos apresentam desempenho superior na modelagem de risco.

2.1 A B3 e sua relevância no mercado de capitais brasileiro

A Bolsa de Valores Brasileira, conhecida como B3, é responsável pela administração de índices, indicadores de mercado e pela negociação de ativos e derivativos financeiros no Brasil. Sendo a única bolsa em operação no território brasileiro, a B3 é o principal ambiente de negociação de ativos financeiros no país (Genial Investimentos, 2025).

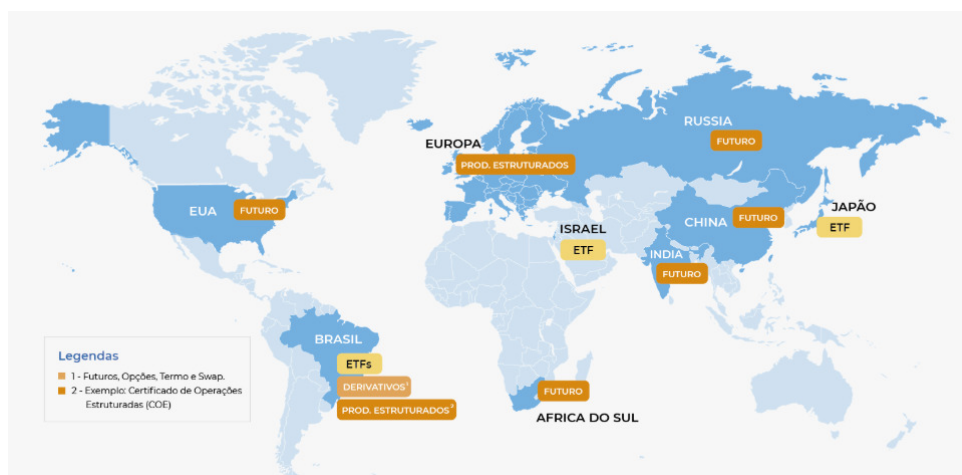
O Ibovespa, principal índice de desempenho da B3, reúne as empresas mais relevantes do mercado de capitais brasileiro. Criado em 1968, o índice tornou-se uma referência global para investidores ao longo de mais de cinco décadas. Reavaliado a cada quatro meses, o Ibovespa é baseado em uma carteira teórica composta por ações ordinárias e preferenciais das companhias listadas na B3, representando cerca de 80% do volume financeiro e do número de negócios realizados no mercado de capitais nacional (BRASIL BOLSA, 2025).

Atualmente, o índice é composto por 87 ativos. Entre eles, os cinco com maior peso na composição do Ibovespa são: Vale (VALE3), com 11,889%; Petrobras (PETR4), com 8,184%;

Petrobras (PETR3) ¹, com 4,536%; Itaú (ITUB4), com 7,513%; e Banco do Brasil (BBAS3), com 3,506%. Além disso, destaca-se a WEG (WEGE3), com 3,347% de participação no índice (E-Investidor, 2025).

Conforme destacado por Brasil Bolsa (2025), os países onde o índice Ibovespa é negociado estão representados na Figura 2.1:

Figura 2.1 – Ibovespa no cenário global.



Fonte: Adaptado de (BRASIL BOLSA, 2025).

2.2 Motivação para a escolha das empresas analisadas

A escolha das empresas Vale e Petrobras justifica-se por sua relevância estratégica para a economia brasileira e sua expressiva atuação internacional. Ambas são líderes em seus respectivos setores — mineração e energia — e influenciam significativamente o desempenho do mercado financeiro nacional. A visibilidade e a exposição a riscos variados tornam essas companhias casos representativos para estudos que envolvem a análise de ativos em contextos econômicos instáveis.

A Vale é uma das maiores mineradoras do mundo, com operações em mais de 15 países. Em 2023, figurava entre as líderes globais no mercado de minério de ferro, empregando mais de 149 mil colaboradores, sendo cerca de 75,6 mil no Brasil (VALE, 2023). Suas atividades vão além da extração mineral, incluindo uma complexa estrutura logística composta por ferrovias, portos e centros de distribuição que permitem a entrega global de seus produtos (VALE S.A., 2024).

¹ Nota: PETR4 são ações preferenciais e PETR3 são ações ordinárias da Petrobras.

Apesar de sua robustez operacional, a empresa tem enfrentado desafios significativos de 2022 a 2025. Em 2023, registrou lucro líquido de R\$ 40.554 milhões oriundo das operações continuadas, o que representou uma queda de R\$ 45.965 milhões em relação ao lucro de 2022. Essa redução foi atribuída à variação cambial, à diminuição nas vendas de produtos como níquel e minério de ferro, além da queda nos preços médios (VALE, 2023). A reputação da companhia também foi afetada pelos desastres ambientais de Mariana em 2015 e Brumadinho em 2019, que impulsionaram debates sobre responsabilidade socioambiental (VALE S.A., 2024).

A Petrobras, por sua vez, é uma das maiores produtoras de petróleo e gás do mundo, com operações em países como Argentina, Bolívia, Colômbia, Estados Unidos, Holanda e Singapura. Reconhecida pela capacidade em exploração em águas profundas, especialmente nas bacias de Campos e Santos, a empresa empregava, ao final de 2023, 46.730 trabalhadores diretos e contava com mais de 107 mil prestadores de serviços. Sua atuação é central para a produção e refino de petróleo no Brasil, além de operar o maior parque termelétrico a gás natural do país, contribuindo para a segurança energética nacional (PETROBRAS, 2024).

Em relação à estabilidade institucional, a Petrobras ainda lida com desdobramentos da Operação Lava Jato, atuando como assistente de acusação em diversas ações penais e respondendo a processos em disputas internacionais, como uma ação de indenização de 221 milhões de dólares movida pelo grupo EIG/Sete Brasil (PETROBRAS, 2024). Esses fatores, combinados à sua presença global, tornam a companhia sensível a eventos que afetam diretamente o valor de suas ações.

Diante desse contexto, é possível observar que tanto a Vale quanto a Petrobras são extremamente sensíveis a fatores internos e externos. Ambas geram milhares de empregos, têm papel de destaque nas exportações nacionais e operam em ambientes altamente expostos a riscos de mercado. Essa combinação de características torna o comportamento de seus ativos particularmente instável, refletindo rapidamente a reação do mercado a qualquer sinal de mudança no ambiente econômico, político ou institucional (TOSCANO et al., 2022).

2.3 Séries temporais financeiras

Uma série temporal é definida como um conjunto de observações de uma mesma variável coletadas e organizadas em intervalos de tempo uniformemente espaçados. Esses dados

capturam a evolução da variável ao longo do tempo, permitindo a análise de padrões, tendências e ciclos temporais (MORETTIN; TOLOI, 2022).

O objetivo principal na análise de séries temporais é criar modelos que representem essas séries de forma adequada, atendendo a objetivos específicos. Uma abordagem comum é a análise no domínio temporal, que utiliza modelos paramétricos, ou seja, aqueles que dependem de um número limitado de parâmetros (MORETTIN; TOLOI, 2018).

Entre esses modelos, destacam-se os $ARMA(p, q)$ e $GARCH(m, n)$, os quais têm como objetivo descrever o comportamento de séries temporais e são amplamente utilizados, por exemplo, para compreender a dinâmica dos preços e estimar o risco associado a ativos financeiros (MORETTIN; TOLOI, 2018).

As séries temporais financeiras constituem uma classe específica devido às suas características particulares. Essas séries geralmente apresentam alguns fatos estilizados. Os fatos estilizados referem-se a um conjunto de propriedades empíricas observadas em diversos mercados e instrumentos financeiros.

Entre essas características, destaca-se a presença de caudas pesadas nas distribuições de preços e retornos — o que frequentemente leva à rejeição da hipótese de normalidade —, a ausência de autocorrelação nos retornos, e a assimetria nos choques, onde grandes quedas nos preços não são seguidas por movimentos ascendentes de igual magnitude. Além disso, fenômenos como o agrupamento de volatilidade, efeito de alavancagem e caudas pesadas condicionais são comumente observados (MORETTIN, 2017).

À medida que se analisam os componentes dos ativos financeiros selecionados — preço, retorno e volatilidade —, será possível compreender com maior clareza cada uma dessas características.

2.3.1 Retornos

Na análise de retornos financeiros, o objetivo geralmente é avaliar o risco dos ativos ao observar como seus preços variam ao longo do tempo. Como define Morettin (2017), dado P_t o preço de um ativo no instante t ; assumindo que não há pagamento de dividendos no período, a variação no preço entre os instantes $t - 1$ e t é dada por:

$$\Delta P_t = P_t - P_{t-1}.$$

A variação relativa dos preços, ou o retorno simples do ativo, é calculada por:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

Para estabilizar a variância, muitas vezes usa-se o logaritmo do preço, $p_t = \log P_t$, para calcular o retorno logarítmico, uma medida prática para estatísticas financeiras. O retorno logarítmico entre os instantes $t - 1$ e t é dado por:

$$r_t = p_t - p_{t-1} = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right).$$

Essas medidas ajudam a entender melhor o comportamento dos preços e os riscos dos ativos financeiros. Na prática, prefere-se trabalhar com retornos em vez de preços por razões claras: os retornos são livres de escala e possuem propriedades estatísticas mais favoráveis, como a estacionariedade (MORETTIN, 2017). Dessa forma, um dos objetivos centrais passa a ser modelar e ajustar os retornos.

Segundo Morettin (2017), os retornos têm características comuns a outras séries temporais, como tendência, sazonalidade, heterocedasticidade condicional e não linearidade. No entanto, eles também possuem características exclusivas, como a ausência de autocorrelação; os quadrados dos retornos são autocorrelacionados; a volatilidade tende a se agrupar ao longo do tempo, e a distribuição dos retornos tem caudas mais pesadas que a normal. Além disso, a distribuição é aproximadamente simétrica, mas geralmente leptocúrtica.

A suposição de que os retornos dos ativos são não correlacionados tem sido um pilar da teoria moderna de portfólio e da gestão de riscos. No entanto, essa premissa não pode ser considerada totalmente verdadeira, uma vez que os retornos de alguns ativos podem apresentar correlação, ainda que de forma fraca (AMINI et al., 2021).

Nesse contexto, torna-se pertinente a utilização de modelos autorregressivos de média móvel para capturar as dinâmicas subjacentes aos retornos dos ativos, permitindo uma análise mais robusta das dependências temporais presentes nas séries financeiras (AMINI et al., 2021).

Observa-se que os retornos ao quadrado frequentemente apresentam correlação e evidências de agrupamentos de volatilidade. De acordo com Branco, Rubesam e Zevallos (2024) esse ajuste preliminar com o modelo ARMA também fornece uma base sólida para a aplicação de modelos de volatilidade condicional, como o GARCH, que são apropriados para capturar a heterocedasticidade condicional típica das séries de retornos financeiros.

2.3.2 Modelos autorregressivos e de médias móveis

A metodologia de Box e Jenkins (1970) é amplamente utilizada na análise de séries temporais. Essa abordagem consiste no ajuste de modelos autorregressivos e médias móveis, conhecidos como ARMA, a um conjunto de dados, permitindo capturar padrões e realizar previsões do fenômeno estudado.

Essa classe também permite a modelagem de séries que apresentem componentes de tendência e/ou sazonalidade, via inserção de operadores de diferenciação e sazonais, resultando na classe de modelos SARIMA (p,d,q)(P,D,Q).

Dada uma série temporal, denotada como r_t , um modelo ARMA é definido como:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i},$$

em que a_t representa uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância constante, usualmente $a_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_a^2)$. Ainda, $p \geq 0$ é a ordem do componente autorregressivo (AR), e $q \geq 0$ é a ordem do componente de médias móveis (MA).

Os modelos ARMA(p, q) são uma junção dos modelos autorregressivos (AR) e de médias móveis (MA). Isso é, quando ($q = 0$), o modelo ARMA(p, 0) reduz-se a um modelo AR(p). De forma similar, quando ($p = 0$), o modelo ARMA(0, q) reduz-se a um modelo MA(q).

O modelo ARMA(p, q) também pode ser escrito utilizando o operador de translação para o passado (B), isto é:

$$\phi(B)r_t = \theta(B)a_t,$$

onde $\phi(B)$ é o polinômio autorregressivo definido por:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p,$$

e $\theta(B)$ é o polinômio de média móvel definido por:

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q.$$

Definir o operador B é fundamental para compreender algumas características dos modelos, como a estacionariedade e a invertibilidade (MORETTIN; TOLOI, 2022).

Diz-se que o modelo é estacionário se as raízes da equação $\phi(B) = 0$ estiverem localizadas fora do círculo unitário e é invertível, se as raízes de $\theta(B) = 0$ também se encontrarem fora do círculo unitário.

Conforme Tsay (2013), o benefício da junção de uma estrutura autorregressiva e de médias móveis é ter modelos mais parcimoniosos de modo que seja possível capturar de forma mais eficiente a dinâmica dos dados, pois a depender da série a ser trabalhada, um modelo AR(p) ou MA(q) puro, pode demandar altas ordens, resultando em um número considerável de parâmetros.

Devido à sua eficiência em representar séries estacionárias, o modelo ARMA tem sido amplamente aplicado em diversas áreas, como climatologia, economia e finanças (LI et al., 2024; WIXSON; COOLEY, 2023; WU; PENG; PENG, 2024; YAMACLI; YAMACLI, 2023; HECQ; VELASQUEZ-GAVIRIA, 2024; CHAI et al., 2020).

2.3.2.1 Identificação do modelo

Nesta subseção, apresenta-se uma das etapas mais importantes durante a modelagem de séries temporais: a identificação do modelo e a estimação dos parâmetros. Um dos critérios utilizados para identificação baseia-se, principalmente, nas estimativas das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial.

É importante ressaltar que séries temporais de retorno são fracamente estacionárias. Isto é, possuem características como ausência de tendência e sazonalidade que reflete no comportamento de suas funções de autocorrelação e autocorrelação parcial. Essas funções muitas vezes não apresentam padrões definidos ou decaimentos lentos e/ou senoidais, características típicas de séries não estacionárias.

A função de autocorrelação de uma série temporal r_t é dada pela correlação entre r_t e r_{t-k} , e é comumente representada por ρ_k . Especificamente, ela é definida como:

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(r_t, r_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(r_t)\text{Var}(r_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

onde $\text{Var}(r_t) = \text{Var}(r_{t-k})$ porque r_t é uma série fracamente estacionária. A coleção das autocorrelações $\{\rho_k\}$ é chamada de função de autocorrelação (FAC) de r_t .

De forma prática, utiliza-se a função de autocorrelação para identificar a ordem q , do modelo $MA(q)$, que torna-se nula após a defasagem q .

A função de autocorrelação parcial (FACP) de r_t , dada por ϕ_{kk} , é igual à correlação parcial entre as variáveis r_t e r_{t-k} , ajustadas às variáveis $r_{t-1}, \dots, r_{t-k+1}$. Ou seja, ϕ_{kk} mede a correlação remanescente entre r_t e r_{t-k} depois de eliminada a influência das informações entre elas. Utiliza-se a FACP para identificar a ordem p do modelo $AR(p)$, a qual torna-se nula após a defasagem p .

2.3.2.2 Estimação dos parâmetros

Com a identificação das ordens de um $ARMA(p, q)$, o processo de estimação dos parâmetros do modelo pode ser realizado adotando o método de máxima verossimilhança condicional. Morettin e Toloi (2006) também discutem outros métodos de obtenção das estimativas dos parâmetros, como o dos momentos.

Assumindo que $a_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_a^2)$, para $t = 1, \dots, n$, a função densidade de probabilidade conjunta de $a_1, a_2, \dots, a_n$ é dada pelo produto das marginais, ou seja:

$$f(a_1, \dots, a_n) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma_a)^{-n} \exp \left\{ - \sum_{t=1}^n \frac{a_t^2}{2\sigma_a^2} \right\}.$$

Para calcular $a_1, \dots, a_q$, suponha que são dados p valores r_t e q valores a_t , que serão denotados por r^* e a^* , respectivamente. A função de verossimilhança, condicional à escolha dos r_t e a_t , é obtida da seguinte forma:

$$L(\varepsilon | r, r^*, a^*) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \left[r_t - \phi_1 r_{t-1} - \dots - \phi_p r_{t-p} - a_1 a_{t-1} - \dots - a_q a_{t-q} \right]^2 \right\}.$$

Tomando-se o logaritmo de L , obtém:

$$\ell(\varepsilon | r, r^*, a^*) \propto -n \log \sigma - \frac{S(\eta | r, r^*, a^*)}{2\sigma^2},$$

onde

$$S(\eta|r, r^*, a^*) = \sum_{t=1}^n \eta^2(r, r^*, a^*), \quad (2.1)$$

que é chamada soma de quadrados (SQ) condicional. Usando um asterisco para denotar $t \leq s$ condicionais a $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r^* = (r_{1-p}, \dots, r_0)$ e $a = (a_1, \dots, a_q)$, pode-se escrever:

$$\ell(\varepsilon) = -n \log \sigma_a - \frac{S_n(\eta)}{2\sigma^2},$$

$$S_n(\eta) = \sum_{t=1}^n \eta^2(r, r^*, a^*).$$

Uma alternativa para maximizar a função acima, é utilizar o método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), que oferece uma abordagem eficaz para resolver problemas de otimização baseados na minimização da função de máxima verossimilhança (CHANG; SUN; ZHANG, 2019).

2.3.3 Algoritmo Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS)

Conforme discutido por Ferreira (2022), maximizar funções do tipo (2.1) requer o uso de métodos numéricos. Nessas situações que envolvem funções de alta complexidade, a escolha criteriosa do método de otimização é essencial para garantir que o processo seja eficiente e a solução ótima seja alcançada rapidamente. Entre os diversos métodos disponíveis, identificar aquele mais adequado ao problema em questão é um fator determinante para o sucesso da abordagem.

Uma alternativa amplamente utilizada é o método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), que oferece uma abordagem eficaz para resolver problemas de otimização baseados na minimização da função de máxima verossimilhança. Como destacado por Chong e Zak (2001), a maximização e a minimização de uma função possuem objetivos equivalentes, pois maximizar a função $L(\Theta)$ é matematicamente equivalente a minimizar $-L(\Theta)$.

O algoritmo BFGS, ainda de acordo com Ferreira (2022), tem por objetivo obter uma aproximação quadrática para a função $L(\Theta)$ usando expansão em série de Taylor de ordem 2.

Para isso, assume-se que essa função de aproximação, que será denotada por $J(\Theta)$, é contínua e duas vezes diferenciável.

Existem alguns problemas relacionados ao algoritmo, apesar de este apresentar boas propriedades de convergência. Um dos principais desafios é a escolha do ponto inicial, que, se selecionado de maneira inadequada ou distante do ponto de solução, pode levar a falhas no processo de otimização. Além disso, o método pode não maximizar a função em determinadas iterações, ou seja, $L(\Theta^{(k+1)}) \leq L(\Theta^{(k)})$ (LIU; NOCEDAL, 1989).

Para contornar esse problema, realiza-se um ajuste na equação do algoritmo, cuja função de maximização é dada por $J(\theta)$. Esse ajuste assegura que a direção do gradiente de L seja preservada, promovendo maior estabilidade e eficiência no processo de otimização.

Os métodos de Newton são conhecidos por sua rápida taxa de convergência, especialmente em comparação com outros métodos de otimização. No entanto, eles apresentam algumas desvantagens. A principal delas é a necessidade de calcular a matriz Hessiana, $\nabla^2 L(\Theta(k))$. Esse processo pode ser altamente custoso em termos computacionais, o que pode ser problemático quando o número de parâmetros é grande. Esse alto custo computacional pode limitar a aplicabilidade desses métodos em problemas de grande escala (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

Diante dessas limitações, foram desenvolvidos os métodos quasi-Newton, com o objetivo de encontrar a solução do problema sem a necessidade de calcular a inversa da matriz Hessiana. Por essa característica, os métodos quasi-Newton se mostram mais eficientes em comparação aos métodos de Newton.

O algoritmo BFGS é um dos métodos quasi-Newton que visa otimizar funções sem a necessidade de calcular explicitamente a matriz Hessiana. Em vez disso, o BFGS utiliza exclusivamente as informações sobre os gradientes, ou seja, as derivadas de primeira ordem da função $L(\Theta)$ em relação ao vetor de parâmetros Θ .

O método atualiza iterativamente uma aproximação da matriz Hessiana, o que permite obter uma convergência eficiente sem os custos computacionais elevados associados ao cálculo e à inversão da Hessiana. Justamente por não haver mais a necessidade de se obter derivadas de segunda ordem da função L é que os métodos quasi-Newton se mostram mais eficientes do que os métodos de Newton (CHANG; SUN; ZHANG, 2019).

2.4 Modelagem da volatilidade

Esta seção tem por objetivo abordar uma importante medida de risco de ativos financeiros: a volatilidade. A volatilidade possui aplicações importantes em finanças, pois exerce um papel importante para precificação e gerenciamento do risco.

2.4.1 Evolução dos modelos para volatilidade

Os primeiros modelos de volatilidade desenvolvidos foram os modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), propostos por Engle (1982). Esse modelo tinha como objetivo inicial modelar a heterocedasticidade condicional na inflação, capturando a variância condicional ao longo do tempo com base em informações passadas. No entanto, o modelo ARCH apresentou limitações, especialmente na capacidade de capturar a persistência da volatilidade (MORETTIN; TOLOI, 2006).

Para superar essas limitações, Bollerslev (1986) propôs o modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), que combina componentes autoregressivos e médias móveis na variância condicional. Essa abordagem reduz o número de parâmetros necessários para descrever os dados e é capaz de capturar a persistência dos picos de volatilidade de forma mais eficiente (MORETTIN; TOLOI, 2006).

A partir dessas propostas iniciais, surgiram outros modelos voltados para tratar limitações específicas, como a assimetria. Entre eles, destaca-se o modelo APARCH (Asymmetric Power ARCH), desenvolvido por Ding, Granger e Engle (1993), que permitiu modelar a assimetria dos choques na volatilidade.

2.4.2 Dinâmica e características da volatilidade

A volatilidade de ativos financeiros não é diretamente observável na prática. O que se observa são os preços dos ativos e, a partir deles, calculam-se seus retornos. Com base nesses retornos, a volatilidade é estimada por meio de métodos estatísticos e econométricos.

A literatura apresenta uma ampla gama de modelos não lineares voltados para a estimativa do comportamento da volatilidade, incluindo aqueles que abordam a volatilidade estocástica (CHANG, 2024; MARTINS; LOPES, 2023).

A volatilidade evolui de forma contínua ao longo do tempo, e grandes saltos são raros. Quando ocorrem, geralmente estão ligados a fatores específicos, como eventos econômicos, políticos, ambientais ou administrativos, que podem afetar significativamente o mercado (TSAY, 2005).

A volatilidade pode reagir de maneira assimétrica às variações nos preços. Em outras palavras, uma alta nos preços pode ter um impacto menor na volatilidade do que uma queda de magnitude semelhante. Essa característica é conhecida como efeito de alavancagem e é amplamente estudada na literatura financeira devido ao seu impacto na modelagem e previsão da volatilidade (TSAY, 2005). Essas dinâmicas são essenciais, pois, conforme destacado por Shumway, Stoffer e Stoffer (2000), desempenham um papel crucial no desenvolvimento de modelos capazes de capturar as características específicas da volatilidade.

2.4.3 Estrutura dos modelos de volatilidade

Considere r_t como o retorno logarítmico de um ativo no instante t . A modelagem de volatilidade frequentemente parte do pressuposto de que a série $\{r_t\}$ é um ruído branco ou uma série estacionária, ainda que geralmente apresente dependência temporal. Essa característica é central para os modelos de volatilidade univariados, projetados especificamente para capturar tal comportamento (SHUMWAY; STOFFER; STOFFER, 2000).

Para contextualizar a modelagem de volatilidade, é relevante considerar a média condicional e a variância de r_t , dadas as informações disponíveis em F_{t-1} :

$$\mu_t = \mathbb{E}(r_t | F_{t-1}), \quad \sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | F_{t-1}) = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}],$$

onde F_{t-1} representa as informações disponíveis até o instante $t - 1$, as quais incluem todas as observações passadas.

Conforme discutido na seção 2.3.1, a autocorrelação em uma série de retornos é geralmente fraca, caso esteja presente. A equação para μ_t tende a ser simples, assumindo-se que r_t segue um modelo de série temporal estacionário, como um modelo $ARMA(p, q)$ (SHUMWAY; STOFFER; STOFFER, 2000).

De maneira geral, assume-se que r_t segue um modelo $ARMA(p, q)$, tal que $r_t = \mu_t + a_t$, onde μ_t é definido por:

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j}.$$

Caso estejam disponíveis variáveis explicativas, o modelo considerado é $r_t = \mu_t + a_t$, onde:

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{i,t-i} + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} \quad (2.2)$$

Neste contexto, $y_{t-i} = r_{t-i} - \phi_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{i,t-i-1}$ representa a série de retornos ajustada, removendo o efeito das variáveis explicativas, enquanto $x_{i,t-j}$ são as variáveis explicativas disponíveis no tempo $t - j$ (SHUMWAY; STOFFER; STOFFER, 2000).

Considerando a equação 2.2, a ordem (p, q) de um modelo ARMA pode variar conforme a frequência da série temporal de retornos. Por exemplo, séries temporais diárias de um índice de mercado tendem a apresentar correlações seriais mais fracas, enquanto dados mensais podem não exibir correlação serial significativa (SHUMWAY; STOFFER; STOFFER, 2000).

Combinando as equações que expressam μ_t e σ_t^2 , conforme apresentado anteriormente, tem-se:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | F_{t-1}) = \text{Var}(a_t | F_{t-1}),$$

onde a raiz quadrada positiva de σ_t^2 representa o desvio padrão condicional ao longo de t .

Os modelos de heterocedasticidade condicional abordam a evolução de σ_t^2 . A forma como σ_t^2 evolui ao longo do tempo é o que distingue um modelo de volatilidade de outro.

2.4.4 Modelos ARCH, GARCH e extensões

O estudo de modelos de volatilidade em séries temporais financeiras é motivado pela necessidade de compreender como a variância evolui ao longo do tempo. Modelos tradicionais, como os ARMA, assumem que a variância é constante, o que pode ser uma limitação em contextos onde a variabilidade dos dados apresenta flutuações significativas.

De acordo com as características das séries de retornos apresentada na seção 2.3.1, os modelos de volatilidade ARCH e GARCH têm como principal objetivo ajustar e modelar o comportamento dessas séries. Uma característica fundamental desses modelos é a capacidade

de lidar com a ausência de variância constante em r_t , uma vez que períodos de alta volatilidade tendem a ocorrer de forma agrupada no tempo. Em outras palavras, observa-se uma forte dependência temporal, em que a variabilidade do retorno está diretamente relacionada ao comportamento passado da própria série temporal (SHUMWAY; STOFFER; STOFFER, 2000).

2.4.4.1 ARCH(p)

Esse modelo foi projetado para capturar o agrupamento de volatilidade e correlação. Nesse modelo, a variância condicional no tempo t depende do quadrado dos erros anteriores.

Dada uma série, o modelo ARCH(p) pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + z_t, \\ z_t &= \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad \varepsilon_t \sim D(0, 1), \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{t-i}^2. \end{aligned}$$

em que μ é a média do processo r_t e $D(0, 1)$ é a distribuição dos erros, com média zero e variância unitária.

A média do processo r_t pode ser ajustada utilizando um modelo $ARMA(p, q)$ ou, alternativamente, por um valor médio constante ao longo do tempo. Para assegurar que a variância condicional seja positiva, é necessário que $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, p$. Adicionalmente, para garantir a estacionariedade da covariância, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1.$$

Essas restrições garantem que o modelo ARCH(p) seja bem especificado e que a variância condicional permaneça finita ao longo do tempo (GASPARINI, 2013).

2.4.4.2 GARCH(p,q)

Uma importante extensão do modelo ARCH é a sua versão generalizada, denominada GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*). Neste modelo, a variân-

cia condicional, h_t , é especificada como uma função linear que incorpora não apenas os resíduos ao quadrado, mas também valores passados da própria variância (GASPARINI, 2013).

Assim, o modelo GARCH(p,q) pode ser descrito como:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \quad (2.3)$$

em que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, e $q > 0$ é a ordem da dependência da variância atual com a variância passada, sendo os coeficientes $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$ (GASPARINI, 2013).

Segundo Bollerslev (1986), para que esse modelo tenha covariância estacionária e, portanto, variância incondicional ou uma tendência de convergência, os coeficientes das ordens p e q devem satisfazer a condição:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1. \quad (2.4)$$

O modelo considera três características importantes de séries temporais financeiras: o excesso de curtose, o agrupamento da volatilidade (*Cluster*) e a persistência. Este modelo não é capaz de capturar o efeito de alavancagem causado por choques positivos (TSAY, 2005).

Segundo Morettin e Tolo (2022), tanto o modelo ARCH quanto o GARCH apresentam uma desvantagem ao tratar retornos positivos e negativos de maneira equivalente, pois os quadrados de valores positivos e negativos resultam no mesmo valor. Na prática, observa-se que a volatilidade responde de forma distinta a esses retornos, sendo mais sensível a retornos negativos, que tendem a aumentar a volatilidade de maneira mais acentuada (GASPARINI, 2013).

2.4.4.3 APARCH(p,q)

O modelo APARCH, pode ser visto como uma extensão do modelo ARCH que permite capturar assimetrias e comportamentos não lineares na variância condicional (ADI; ADDA; WOBILOR, 2022). A equação que define a variância condicional h_t no modelo APARCH é dada por:

$$h_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^\delta, \quad (2.5)$$

em que $\alpha_0 > 0$ e $\delta > 0$, representando a constante da variância e o parâmetro de potência, respectivamente, z_{t-i} é o resíduo padronizado.

A especificação do modelo APARCH (2.5) adiciona uma flexibilidade ao modelo ao incluir o parâmetro γ_i , que captura o efeito de alavancagem. Esse efeito reflete o impacto assimétrico de choques positivos e negativos na volatilidade. Um valor positivo de γ_i indica que quedas no preço tendem a aumentar mais a volatilidade do que altas de mesma magnitude (TSAY, 2014). Esse comportamento é comum em mercados financeiros, onde notícias negativas costumam gerar reações mais fortes e duradouras.

O modelo também incorpora flexibilidade ao parâmetro δ , cuja estimação, em vez de sua fixação, confere maior capacidade de adaptação às propriedades observadas nas séries temporais. A exemplo, valores de δ diferentes de 2 — especialmente próximos de 1 — indicam que a dinâmica da volatilidade não segue a forma quadrática tradicional, mas está mais relacionada ao desvio padrão dos choques (TSAY, 2014).

Este modelo generaliza diversas especificações populares de volatilidade condicional como casos particulares, a depender dos valores atribuídos aos parâmetros δ e γ . Conforme destacado por Tsay (2005), o modelo APARCH é capaz de englobar até sete modelos distintos de volatilidade.

Para a estimação dos parâmetros, algumas restrições devem ser atendidas:

- a) $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, p$,
- b) $-1 < \gamma_i < 1$, sendo γ_i responsável por modelar o efeito de alavancagem,
- c) $\beta_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, q$.

Para garantir que a variância condicional seja estacionária, é necessário que:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i (1 + \gamma_i^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1. \quad (2.6)$$

Conforme discutido por Tsay (2005), esta condição assegura que os impactos dos choques na variância condicional são finitos ao longo do tempo.

2.4.4.4 APARCH estendido

A inclusão de variáveis indicadoras no modelo APARCH (Asymmetric Power ARCH) é uma extensão que permite capturar efeitos específicos associados a eventos ou características distintas nos dados (CURTO; SERRASQUEIRO, 2022).

A equação do modelo $APARCH(p, q)$ com a inclusão de uma variável indicadora pode ser escrita como:

$$h_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^\delta + \theta I_t, \quad (2.7)$$

em que I_t é a variável indicadora (*dummy*), que assume valores ($I_t = 1$ para o evento de interesse e $I_t = 0$ caso contrário); e θ é o parâmetro associado à variável indicadora, que mede o impacto do evento indicado por I_t na variância condicional.

A inclusão de I_t no modelo tem como objetivo capturar o impacto de eventos específicos na volatilidade condicional. Os autores Curto e Serrasqueiro (2022) aplicaram o modelo APARCH com a inclusão de uma variável indicadora para examinar os efeitos da COVID-19 e, posteriormente, o impacto da vacinação sobre os índices setoriais do S&P500², bem como sobre ações de algumas Big Techs. Nesse caso, a variável indicadora assumiu o valor 1 durante o período de fevereiro de 2020 até 31 de dezembro de 2020, representando o intervalo de maior impacto da pandemia da COVID-19.

Quando bem implementada e validada, a inclusão de variáveis indicadoras proporciona uma análise mais precisa da volatilidade condicional e ajuda a compreender melhor os fatores que a influenciam (CURTO; SERRASQUEIRO, 2022).

2.5 Choques econômicos e a dinâmica da volatilidade financeira: Uma revisão teórica

Em diferentes momentos da história econômica, já se observava que eventos extremos estavam associados a aumentos expressivos na volatilidade dos ativos financeiros. Scholes (2000) destaca que, durante diversas crises anteriores ao ano 2000 — como em 1987, 1990, 1994 e 1998 — ocorreram saltos nunca presenciados antes na volatilidade dos mercados acionários e de títulos.

² Índice formado por 500 das maiores empresas listadas nas bolsas dos Estados Unidos, usado como referência do desempenho do mercado acionário.

De acordo com Chiu (2020), a incerteza macroeconômica afeta a liquidez no mercado de ações. Isto se deve ao fato de que a incerteza sobre políticas econômicas influencia as decisões dos investidores, levando a uma redução na liquidez do mercado. Segundo os autores, o aumento na incerteza econômica se associa à diferença entre o preço de compra e o preço de venda do ativo (*spreads bid-ask*) mais amplos e volumes de negociação reduzidos, indicando menor liquidez. Nesse sentido, os autores encontram evidências empíricas de que períodos de alta incerteza econômica correspondem a aumentos na volatilidade dos retornos das ações, sugerindo que a liquidez reduzida amplifica as flutuações de preços. Esses resultados destacam a importância de considerar a incerteza macroeconômica como um fator determinante da liquidez e da volatilidade no mercado acionário.

A teoria das finanças comportamentais mostra que o sentimento dos investidores pode influenciar diretamente a volatilidade dos ativos, especialmente em períodos de crise. Maghyereh e Abdoh (2022) investigaram essa relação usando métodos não paramétricos e concluíram que o sentimento funciona como um transmissor de informação para a volatilidade em diferentes classes de ativos. Isso ocorre porque as percepções do mercado, baseadas em notícias e emoções dos investidores, aumentam a aversão ao risco, o que afeta os preços e gera mais incerteza (MAGHYEREH; ABDOH, 2022).

Em especial, Maghyereh e Abdoh (2022) mostrou que o efeito do sentimento foi ainda mais forte durante a crise financeira de 2008–2009 e a pandemia de COVID-19. Commodities como petróleo e gás natural tiveram suas volatilidades bastante influenciadas por mudanças no sentimento do mercado. O estudo também aponta que, até mesmo ativos considerados mais seguros, como ouro, títulos e moedas, que naturalmente são menos afetados, tiveram diferentes respostas ao sentimento de uma crise para outra.

2.6 Seleção final do modelo

De acordo com a discussão levantada por Cox (1977) sobre a comparação de modelos, destacam-se três abordagens principais. A primeira consiste em testar separadamente a compatibilidade dos dados com cada modelo, a fim de verificar quais são consistentes com a estrutura observada. A segunda propõe a utilização de um modelo mais abrangente, como o APARCH, que incorpora outros modelos — como ARCH, GARCH, TARARCH e EGARCH — como casos especiais. Isso permite não apenas realizar comparações entre os modelos, mas também abrir

espaço para novas possibilidades, caso nenhum se ajuste adequadamente. Por fim, há a abordagem baseada em testes direcionais, nos quais se avalia um modelo frente a um alternativo, utilizando, por exemplo, o teste de razão de verossimilhança (COX, 1961; COX, 1962).

O modelo APARCH foi escolhido justamente por sua flexibilidade e caráter abrangente, que possibilita incorporar diferentes estruturas de volatilidade como casos particulares. Esse tipo de abordagem está alinhado à perspectiva de Cox (1977), segundo a qual a escolha de um modelo mais geral permite avaliar, dentro de um mesmo ajuste, se estruturas mais simples seriam suficientes.

O modelo APARCH tem sido amplamente empregado na literatura para o ajuste de séries temporais financeiras. Um exemplo é o estudo de Alencar e Sáfadi (2012), que utilizou o modelo para comparar o comportamento e as características das bolsas de valores de diferentes países — como Estados Unidos, Japão, China e Brasil — no período pós-crise financeira de 2008.

Já em um contexto mais recente, Curto e Serrasqueiro (2022) aplicou o modelo APARCH para analisar o desempenho da volatilidade de ações de grandes empresas de tecnologia, como *Facebook*, *Apple*, *Tesla*, *Amazon*, *Netflix* e *Google*, além de índices setoriais do S&P 500, durante o período posterior à pandemia de COVID-19. Esses trabalhos reforçam a versatilidade e robustez do modelo APARCH, especialmente em contextos de alta volatilidade e incerteza, e evidenciam sua relevância para a análise de séries financeiras em cenários distintos.

3 METODOLOGIA

Nesta seção, apresentam-se os dados utilizados nessa dissertação, a justificativa para a escolha das séries temporais com base em suas contribuições para a bolsa de valores brasileira e os recursos empregados na análise por meio do software R (R Core Team, 2024), versão 4.3.1 (*Beagle Scouts*).

3.1 Descrição dos dados

A base de dados utilizada neste trabalho foi extraída do Yahoo Finance (2025), contendo os preços de fechamento diários das ações VALE3 e PETR4, no período de 08 de janeiro de 2007 a 28 de junho de 2025, totalizando 4564 observações para cada série. Esse intervalo foi escolhido por englobar crises econômicas globais significativas, como a crise do subprime (2008) e a pandemia de COVID-19 (2020), permitindo analisar o comportamento das ações diante de eventos que afetaram o mercado global, além de incluir momentos marcantes no cenário interno das empresas.

As descrições das variáveis utilizadas são apresentadas no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Informações das ações VALE3 e PETR4.

Código da Ação	Nome da Ação	Setor de atuação
VALE3	VALE	Materiais básicos/Mineração
PETR4	PETROBRÁS	Petróleo, Gás e Biocombustíveis

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 Implementação em R: Funções e pacotes utilizados

A coleta e o tratamento dos dados foram realizados utilizando-se a função *getSymbols*, pertencente ao pacote *quantmod* (RYAN; ULRICH, 2024). Este pacote tem como objetivo principal buscar dados financeiros, como os preços das ações, diretamente de fontes *online* (RYAN et al., 2024).

Após a obtenção dos preços das ações, procedeu-se ao tratamento das séries temporais, visando calcular os retornos diários, utilizando para isso a função *dailyReturn*, do mesmo pacote (RYAN et al., 2024).

Com base nas características identificadas nas séries de retornos, avaliadas por meio das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, optou-se pela aplicação de modelos da família ARMA. Embora o modelo ARMA possa ser especificado diretamente nos argumentos das funções utilizadas para a estimativa do modelo de volatilidade, optou-se por realizar o ajuste da média de forma marginal. Posteriormente, os resíduos resultantes desse ajuste foram utilizados na especificação do modelo de volatilidade.

A definição do modelo ARMA adequado para as séries de retornos foi feita com base no menor valor do Critério de Informação de Akaike (AIC), além de um diagnóstico dos resíduos, realizado por meio do teste de Box-Pierce. Este teste, conforme descrito por Box e Pierce (1970), avalia a presença de autocorrelação nos resíduos estimados. O AIC, utilizado para a seleção do modelo, é dado por:

$$AIC = \frac{-2LV + 2a}{b} \quad (3.1)$$

onde b é o número de observações da série temporal, a é o número de parâmetros estimados, e LV é o logaritmo natural da função de verossimilhança do modelo.

Dentre os recursos empregados para o ajuste das séries, desde sua coleta até a interpretação dos parâmetros do modelo de volatilidade, destaca-se o uso do pacote *rugarch* (GALANOS, 2023), utilizado para estimar os parâmetros dos modelos APARCH (GALANOS, 2020).

De acordo com Alexandru e Caragea (2013), a escolha do pacote justifica-se por sua capacidade de implementar uma ampla gama de modelos GARCH, incluindo variantes simétricas e assimétricas, como IGARCH e APARCH. O pacote também oferece flexibilidade para selecionar o modelo mais adequado aos dados analisados e suporta diversas distribuições de erro, como a distribuição normal, a distribuição t-Student e outras distribuições generalizadas, o que é essencial para capturar características típicas de dados financeiros, como caudas pesadas e assimetria, aprimorando a precisão das estimativas de volatilidade.

Com base nessas considerações, o foco do estudo foi a aplicação do modelo APARCH(1,1), cujo principal objetivo é analisar os fatos estilizados relacionados à volatilidade, tais como agrupamento, persistência e assimetria.

O ajuste do modelo de volatilidade foi realizado por meio da especificação da função *ugarchspec*. A função *ugarchfit* têm como objetivo estimar os parâmetros do modelo, levando em consideração alguns argumentos.

Em relação ao argumento *distribution.model*, foi utilizada a distribuição t-Student. Esta distribuição é amplamente utilizada em econometria, especialmente por sua popularidade entre as distribuições de cauda pesada. Como explica Tsay (2014), ela se destaca por possuir um segundo momento finito, o que facilita seu tratamento matemático, e é frequentemente considerada uma ferramenta eficaz para modelar o excesso de curtose que foi observado nas séries temporais.

Destaca-se que o pacote rugarch, conforme descrito por Galanos (2020), implementa o método de estimação por máxima verossimilhança para ajustar modelos de volatilidade, como o modelo GARCH e suas variantes, incluindo o modelo APARCH.

A estimação dos parâmetros é realizada por meio de algoritmos de otimização numérica, como os métodos BFGS e Newton-Raphson, que são reconhecidos por sua eficiência na captura das características essenciais dos retornos financeiros.

Dessa forma, para cada série de retorno r_t , considera-se que:

$$r_t = ARMA(p, q) + \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha_1 (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1 \varepsilon_{t-1})^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta,$$

$$\varepsilon_t \sim t(\nu),$$

em que ω representa o nível médio da volatilidade na variância condicional, garantindo que a volatilidade permaneça acima de um valor positivo, dado que σ_t pode assumir qualquer valor maior que zero. O parâmetro δ refere-se a uma transformação de Box-Cox aplicada a σ_t , permitindo a estimação de diferentes potências para o desvio padrão condicional. Por fim, γ_1 captura o efeito de alavancagem, caracterizando a assimetria presente na volatilidade, enquanto α_1 e β_1 descrevem conjuntamente a persistência da volatilidade ao longo do tempo (GASPARINI, 2013).

3.3 Testes para diagnóstico de dependência serial e heterocedasticidade

Para verificar a adequação dos modelos de séries temporais utilizados na análise da volatilidade, aplicou-se dois testes estatísticos: o teste de Box-Pierce/Ljung-Box, que avalia a

presença de autocorrelação nos resíduos, e o teste de Lagrange Multiplicador (ARCH-LM), que detecta heterocedasticidade condicional.

3.3.1 Teste de Box-Pierce e Ljung-Box

Os testes de Box e Pierce (1970) e Ljung e Box (1978) são utilizados para investigar a presença de autocorrelação global nos resíduos de um modelo de séries temporais. Ambos têm como hipótese nula (H_0) a ausência de autocorrelação até uma determinada defasagem i . A estatística do teste de Ljung-Box é definida por:

$$Q = b(b+2) \sum_{k=1}^i \frac{\hat{\rho}_k^2}{b-k},$$

em que b representa o número de observações e $\hat{\rho}_k$ é o coeficiente de autocorrelação dos resíduos na defasagem k . A estatística Q segue uma distribuição qui-quadrado com i graus de liberdade. A rejeição da hipótese nula sugere que os resíduos não se comportam como ruído branco, o que pode indicar omissão de termos autorregressivos ou especificação incorreta do modelo.

3.3.2 Teste ARCH-LM

O teste Multiplicador de Lagrange para heterocedasticidade condicional foi proposto por Engle (1982) e tem como objetivo verificar a presença de efeito ARCH nos resíduos de um modelo. A hipótese nula (H_0) assume que não há heterocedasticidade condicional, isto é, a variância dos resíduos é constante ao longo do tempo.

O teste consiste em regredir os quadrados dos resíduos sobre suas defasagens. O coeficiente de determinação (R^2) da regressão, multiplicado pelo número de observações da série, fornece a estatística do teste, dada por:

$$LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q),$$

onde q representa o número de defasagens dos resíduos ao quadrado. A rejeição da hipótese nula indica a presença de heterocedasticidade condicional, o que justifica o uso de modelos da classe GARCH, como o modelo APARCH utilizado nesta dissertação.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, apresenta-se inicialmente uma análise descritiva das séries temporais de preços e retornos, explorando suas principais características. Em seguida, investigam-se as autocorrelações de cada série, identificando padrões de dependência temporal. Por fim, aplica-se o modelo de volatilidade APARCH para capturar características estilizadas, como assimetria e persistência, por meio da análise e interpretação dos parâmetros do modelo de volatilidade.

4.1 Análise descritiva das séries de Preços e Retornos

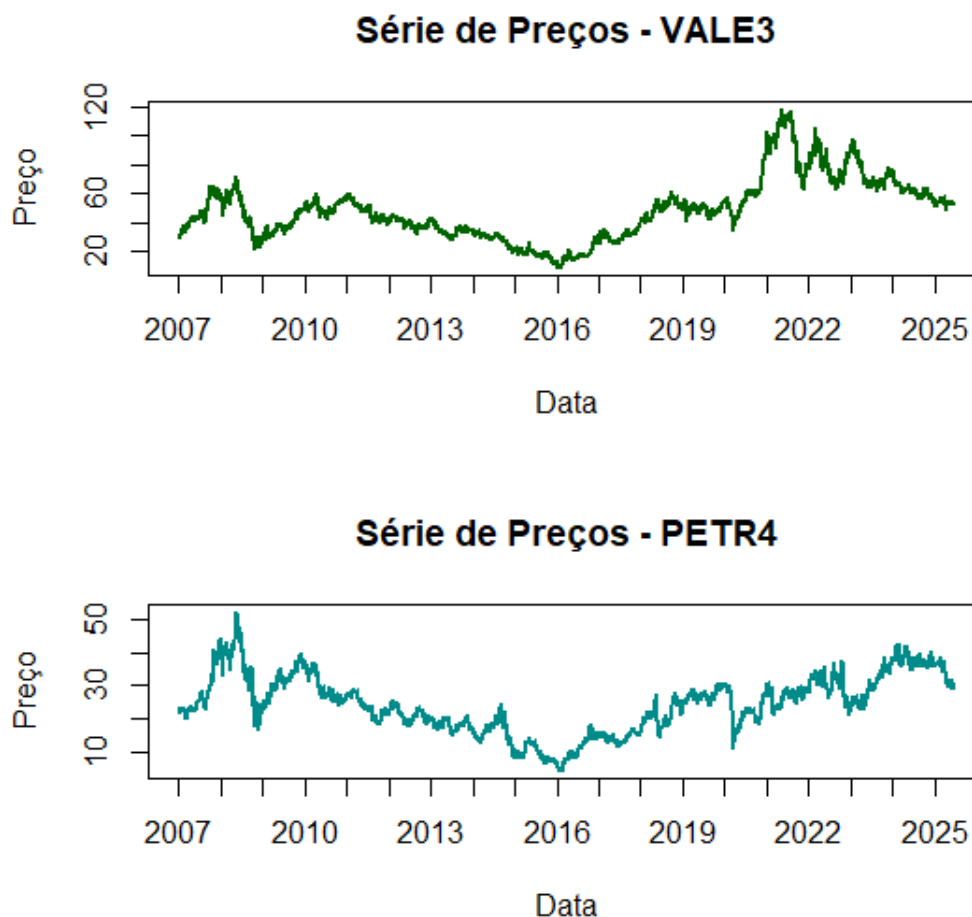
Os gráficos da Figura 4.1 mostram os preços de fechamento das ações VALE3 e PETR4 entre janeiro de 2007 e dezembro de 2024, abrangendo períodos marcados por eventos econômicos globais, como a crise do subprime em 2008 e a pandemia de COVID-19 em 2020, bem como acontecimentos domésticos relevantes, como o rompimento de barragens em Minas Gerais e a investigação da Operação Lava Jato.

Em 2008, ambos os gráficos exibem quedas acentuadas devido à crise financeira global. As ações da VALE3 caíram de valores acima de R\$ 60,00 para menos de R\$ 20,00, o que representa uma desvalorização de aproximadamente 66,7%, refletindo o impacto no setor de mineração e commodities. A PETR4 sofreu uma forte desvalorização, com os preços reduzindo-se pela metade, resultado da crise econômica global e do colapso nos preços do petróleo.

Após 2008, percebe-se que os preços apresentaram uma recuperação parcial até 2011, seguida por períodos de declínio. No caso de VALE3, essa tendência foi influenciada pela desaceleração econômica global e pela queda nos preços das commodities, resultando em valores mais baixos entre 2012 e 2016. Já PETR4 enfrentou desafios adicionais devido à fortes oscilações no mercado de petróleo e questões internas da Petrobras, como investigações de corrupção e crises de governança.

Durante a pandemia de COVID-19, em 2020, ambas as ações apresentaram quedas expressivas nos meses iniciais do evento. A VALE3 recuou cerca de 40%, mas registrou recuperação significativa, encerrando o ano com preços semelhantes aos níveis anteriores à pandemia, impulsionada pela valorização do minério de ferro. A PETR4, por sua vez, sofreu uma queda de aproximadamente 63% devido à desvalorização do petróleo no mercado internacional, recuperando parte das perdas ao longo de 2020 e 2021.

Figura 4.1 – Evolução dos preços de fechamento - VALE3 e PETR4



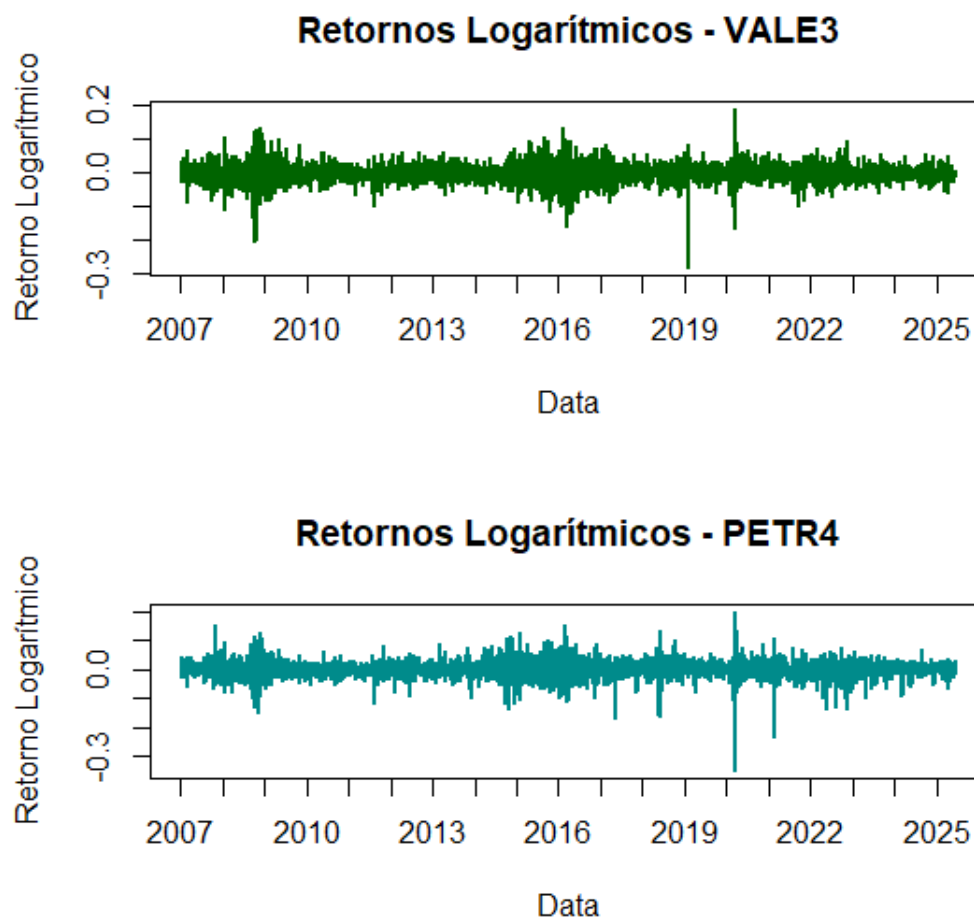
Fonte: Elaborado pelo autor.

As séries de retornos logarítmicos das ações VALE3 e PETR4, apresentadas na Figura 4.2, destacam características típicas de mercados financeiros. Observam-se flutuações ao longo do tempo, com alternância entre períodos de altos e baixos deslocamentos, esse padrão é caracterizado pela concentração de grandes variações seguidas por outras grandes variações, enquanto períodos mais estáveis apresentam retornos de menor intensidade, demonstrando fortes indícios do fenômeno de persistência da volatilidade.

Nas séries de retornos, observa-se os períodos de grandes oscilações nos preços, especialmente nos intervalos mencionados. Conforme já evidenciado por Maghyreh e Abdoh (2022), destaca-se o aumento da volatilidade em 2008, como reflexo da crise do subprime, e picos extremos em 2020, período marcado pelos impactos da pandemia.

Em outros períodos, a PETR4 também apresentou fortes oscilações, impulsionadas por fatores internos, como as investigações da Operação Lava Jato entre o final de 2014 e o ano de

Figura 4.2 – Variação dos retornos diários - VALE3 e PETR4



Fonte: Elaborado pelo autor.

2018. O fim de 2014, em especial, foi marcado pelo atraso na divulgação do balanço auditado, em razão das denúncias de corrupção que envolviam a empresa. Paralelamente, a Petrobras enfrentou uma grave crise de governança, refletida em sucessivas trocas na presidência ao longo desse período — muitas delas ocorrendo em meio aos desdobramentos da Lava Jato. Esses fatores, combinados, contribuíram para o aumento da volatilidade do ativo, evidenciando como eventos internos e externos influenciam significativamente seu comportamento e ajudam a explicar os picos observados ao longo do tempo.

Por outro lado, a VALE3 enfrentou problemas estruturais devido a eventos adversos, como o rompimento da barragem de Fundão em 2015 (Ministério Público de Minas Gerais (MPMG), 2025), e o rompimento da barragem de Brumadinho em 2019 (Vale S.A., 2019). As oscilações nos retornos dessa série podem estar associadas a esses acontecimentos ou a decisões estratégicas tomadas em resposta a essas adversidades.

Com base nas estatísticas descritivas apresentadas na tabela 4.1, destacam-se dois indicadores que merecem atenção quanto à sua interpretação: os valores de assimetria e curtose das séries de retornos. Esses indicadores fornecem informações relevantes sobre a distribuição dos retornos e os riscos associados a esses ativos.

Tabela 4.1 – Estatísticas descritivas dos retornos diários de VALE3 e PETR4.

Estatística	VALE3	PETR4
Média	0,001	0,000
Mediana	0,000	0,000
Máximo	0,194	0,201
Mínimo	-0,282	-0,352
Desvio Padrão	0,027	0,029
Assimetria	-0,223	-0,789
Curtose	10,192	13,802

Fonte: Elaborado pelo autor.

A assimetria de VALE3 é de -0,223, o que caracteriza uma leve assimetria negativa. Isso sugere que retornos negativos extremos são ligeiramente mais prováveis do que positivos, embora essa diferença seja relativamente pequena.

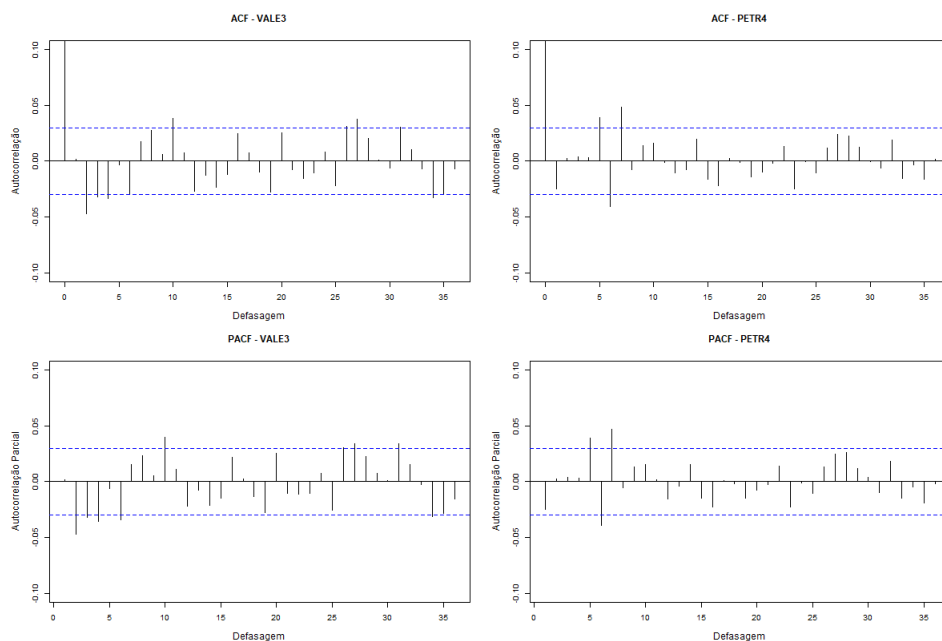
Em contrapartida, PETR4 apresenta uma assimetria de -0,789, também negativa, mas com uma magnitude significativamente maior. Esse resultado evidencia uma maior tendência para retornos negativos extremos, refletindo um risco mais elevado de perdas significativas quando comparado à VALE3.

Em relação à curtose, VALE3 apresentou um valor de 10,192, indicando a presença de caudas mais pesadas, o que implica uma maior frequência de eventos extremos, tanto positivos quanto negativos. Por outro lado, PETR4 registrou uma curtose ainda mais elevada, de 13,802, sugerindo uma frequência significativamente maior de eventos extremos em comparação a VALE3.

4.2 Função de Autocorrelação e ajuste de média

Os gráficos da função de Autocorrelação (FAC) e Autocorrelação Parcial (FACP) apresentados para os retornos de VALE3 e PETR4 mostram características consistentes das séries de retornos. Em geral, os retornos de ativos financeiros não apresentam autocorrelação significativa; no entanto, é possível identificar através da Figura 4.3 algumas autocorrelações significativas em defasagens específicas.

Figura 4.3 – Funções de autocorrelação e autocorrelação parcial dos retornos



Fonte: Elaborado pelo autor.

A presença de autocorrelação é confirmada pelo teste de Box-Pierce avaliado até a 36ª defasagem, conforme apresentado na Tabela 4.2. O teste detecta uma autocorrelação significativa, com estatísticas de valor-p para VALE3 e PETR4.

Tabela 4.2 – Resultados do teste de Box-Pierce para os retornos logarítmicos de VALE3 e PETR4.

Estatística	VALE3	PETR4
Estatística	82,364	51,208
Graus de liberdade (df)	36	36
valor-p	0,000	0,048

Fonte: Elaborado pelo autor.

Diante da interpretação do teste de Box-Pierce (tabela 4.2), foram ajustados modelos ARMA(p,q) para cada uma das séries de retornos, levando em consideração as defasagens específicas de cada uma delas. No caso de VALE3, optou-se por um modelo AR(10), com as defasagens autorregressivas específicas em 2, 4 e 10. As estimativas dos parâmetros são dadas pela Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Estimativas dos parâmetros do modelo AR(10) para os retornos de VALE3.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	Valor z	valor-p
ϕ_2	-0,048861	0,014793	-3,3030	0,000957
ϕ_4	-0,035384	0,014792	-2,3921	0,016754
ϕ_{10}	0,035904	0,014776	2,4298	0,015109

Fonte: Elaborado pelo autor.

A equação dos retornos de VALE3 pode ser descrita como:

$$r_t = \phi_2 r_{t-2} + \phi_4 r_{t-4} + \phi_{10} r_{t-10} + a_t \quad (4.1)$$

$$= -0.0489 r_{t-2} - 0.0354 r_{t-4} + 0.0359 r_{t-10} + a_t, \quad (4.2)$$

em que a_t dado por $r_t - AR(10) = a_t$ é o resíduo.

Para PETR4, foi ajustado um modelo AR(7), considerando apenas as defasagens autorregressivas 5 e 7, resultando em um modelo mais parcimonioso em relação à VALE3. As estimativas dos parâmetros estão apresentadas na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Estimativas dos parâmetros do modelo AR(7) ajustado para os retornos de PETR4.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	Valor z	p-valor
ϕ_5	0,038590	0,014939	2,5831	0,009791
ϕ_7	0,048499	0,014938	3,2467	0,001167

Fonte: Elaborado pelo autor.

O modelo ajustado para a série de retornos de PETR4 pode ser descrito pelas seguintes equações:

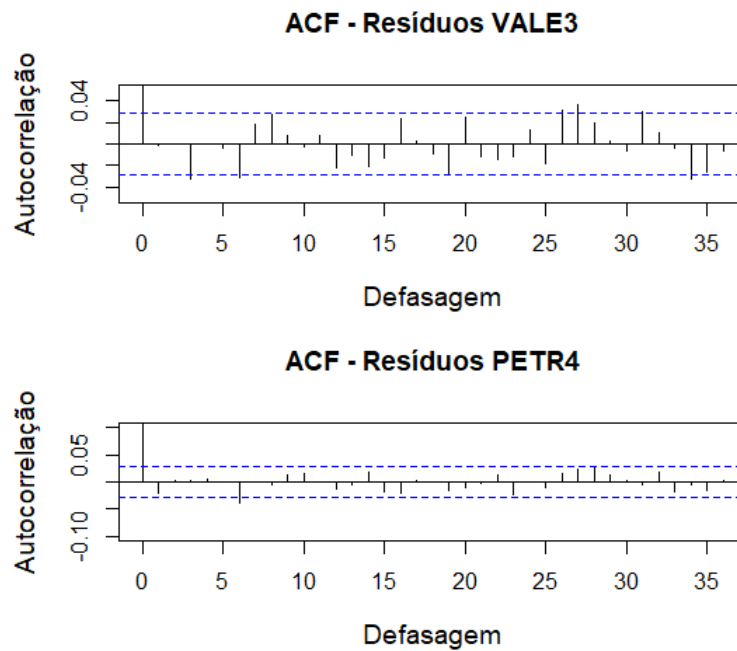
$$r_t = \phi_5 r_{t-5} + \phi_7 r_{t-7} + u_t \quad (4.3)$$

$$= 0.0386 r_{t-5} + 0.0485 r_{t-7} + u_t \quad (4.4)$$

em que a_t dado por $r_t - AR(7) = a_t$ é o resíduo.

Com ambos os modelos ajustados, verificou-se, por meio do teste de Ljung-Box, que o termo a_t , definido como o resíduo do modelo, apresenta comportamento de ruído branco em ambas as séries (Figura 4.4).

Figura 4.4 – ACF dos resíduos

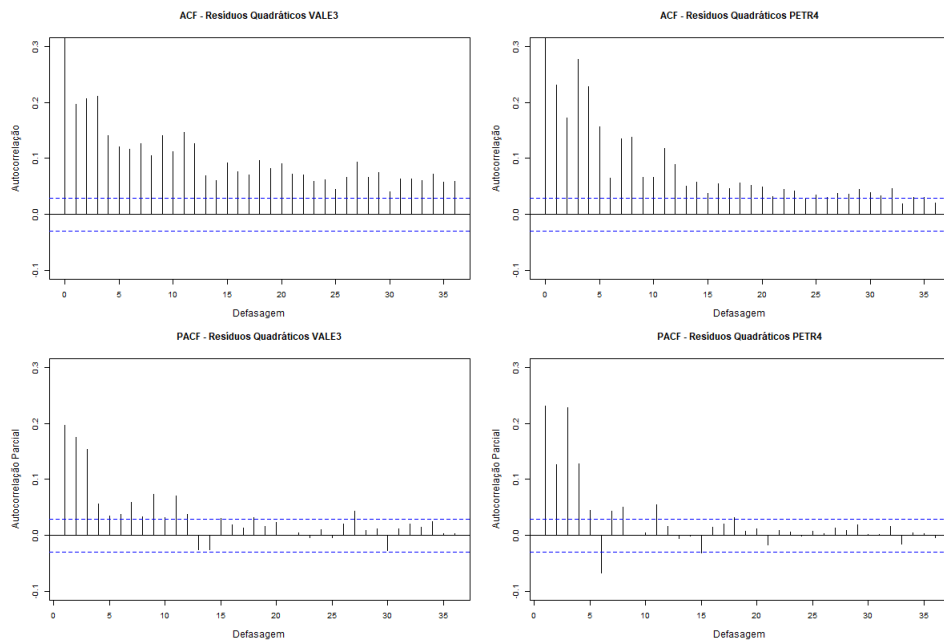


Fonte: Elaborado pelo autor.

No estudo de séries financeiras, a presença de heterocedasticidade é uma característica frequentemente observada. Para avaliar essa propriedade, foram analisadas as funções de autocorrelação (ACF) e autocorrelação parcial (PACF) dos resíduos ao quadrado das séries, a fim de identificar possíveis padrões de dependência temporal na volatilidade (Figura 4.5).

O padrão de decaimento apresentado na Figura 4.5 dos valores da função de autocorrelação para o resíduo ao quadrado para dentro do intervalo de confiança revela uma dependência temporal nos resíduos, indicando variação não constante da variância ao longo do tempo.

Figura 4.5 – ACF e PACF dos resíduos quadráticos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para confirmar a dependência temporal na série de quadrados dos resíduos do modelo, foi aplicado o teste do multiplicador de Lagrange. Os resultados indicam que ambas as séries apresentam evidências de heterocedasticidade, como apresentado na tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Teste de Multiplicador de Lagrange (LM) para heterocedasticidade condicional.

Ativo	Estatística Qui-quadrado	Graus de Liberdade	Valor-p
VALE3	414,97	5	< 0,001
PETR4	627,02	5	< 0,001

Fonte: Elaborado pelo autor.

O teste do Multiplicador de Lagrange indica valores-p menores que $\alpha = 5\%$, levando à rejeição da hipótese de ausência de heterocedasticidade. Assim, ambas as séries apresentam heterocedasticidade condicional, evidenciando dependência da volatilidade ao longo do tempo. Isso sugere a adoção de modelos GARCH para melhor capturar essa característica nos retornos das ações.

4.3 Estimativas e interpretação dos parâmetros do modelo APARCH(1,1)

As séries de retornos de VALE3 e PETR4 apresentam características de volatilidade que, embora semelhantes em alguns aspectos, revelam diferenças sutis que podem ter implicações importantes para a análise e gestão de risco.

A partir da especificação do modelo APARCH(1, 1), foram obtidas as estimativas dos parâmetros que estão apresentadas na Tabela (4.6) ¹.

Foram testadas diferentes distribuições para capturar o efeito da curtose nas séries, incluindo a normal, normal assimétrica, t assimétrica, entre outras. No entanto, os QQ-plots mostraram que essas distribuições apresentaram maiores desvios em relação à linha de referência, indicando pior ajuste em comparação à distribuição t-Student.

Tabela 4.6 – Parâmetros do modelo de volatilidade para VALE3 e PETR4.

Parâmetro	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
VALE3				
ω	0,000	NA	NA	NA
α	0,055	0,001	44,240	0,000
β	0,944	0,001	1344,988	0,000
$\alpha + \beta$	0,999	–	–	–
γ	0,258	0,059	4,351	0,000
δ	1,126	0,072	15,669	0,000
ν	6,358	0,446	14,259	0,000
PETR4				
ω	0,000	NA	NA	NA
α	0,078	0,028	2,774	0,006
β	0,929	0,030	30,557	<0,001
$\alpha + \beta$	0,999	–	–	–
γ	0,352	0,127	2,770	0,006
δ	0,982	0,236	4,161	<0,001
ν	4,959	0,365	13,602	<0,001

Fonte: Elaborado pelo autor.

O parâmetro ω , relacionado à constante do modelo, não foi significativo ao nível de significância $\alpha = 5\%$ para nenhuma das séries. No modelo APARCH(1,1), o parâmetro de potência δ pode assumir qualquer valor positivo, incluindo valores não inteiros. Em ambas as séries, as estimativas próximas de 1 sugerem a possibilidade de um comportamento do desvio

¹ Nota: O parâmetro ν representa o parâmetro de forma da distribuição *t-Student*.

padrão condicional. Nesse contexto, ω é essencial para garantir a positividade da série de volatilidade, mesmo que individualmente não seja significativo.

Na Tabela 4.6, observa-se claramente o agrupamento da volatilidade nas duas séries, evidenciado pelos sinais e pela significância das estimativas de α e β . Por "agrupamento", entende-se a persistência de alta e baixa volatilidade, ou seja, grandes retornos tendem a ser seguidos por grandes retornos, enquanto pequenos retornos são acompanhados por outros pequenos retornos.

Para as séries analisadas, os processos APARCH(1,1) apresentam alta persistência, com a estimativa para $\alpha + \beta$ muito próxima de 1,0. Isso sugere que choques na volatilidade não apenas se agrupam, mas também se dissipam de forma gradual, refletindo uma lenta redução de grandes retornos. Do ponto de vista prático, os fatores que levaram à mudança abrupta nos retornos continuarão impactando a percepção de risco e o comportamento dos investidores por um tempo considerável.

Adicionalmente, o efeito de alavancagem, capturado pelo parâmetro γ , é estatisticamente significativo para as séries. Esse efeito descreve o impacto assimétrico de boas e más notícias sobre a volatilidade dos retornos financeiros. Quando significativo, esse parâmetro indica que choques negativos (más notícias) aumentam a volatilidade de forma mais intensa do que choques positivos (boas notícias). Em outras palavras, o mercado reage com mais força ao risco do que às oportunidades.

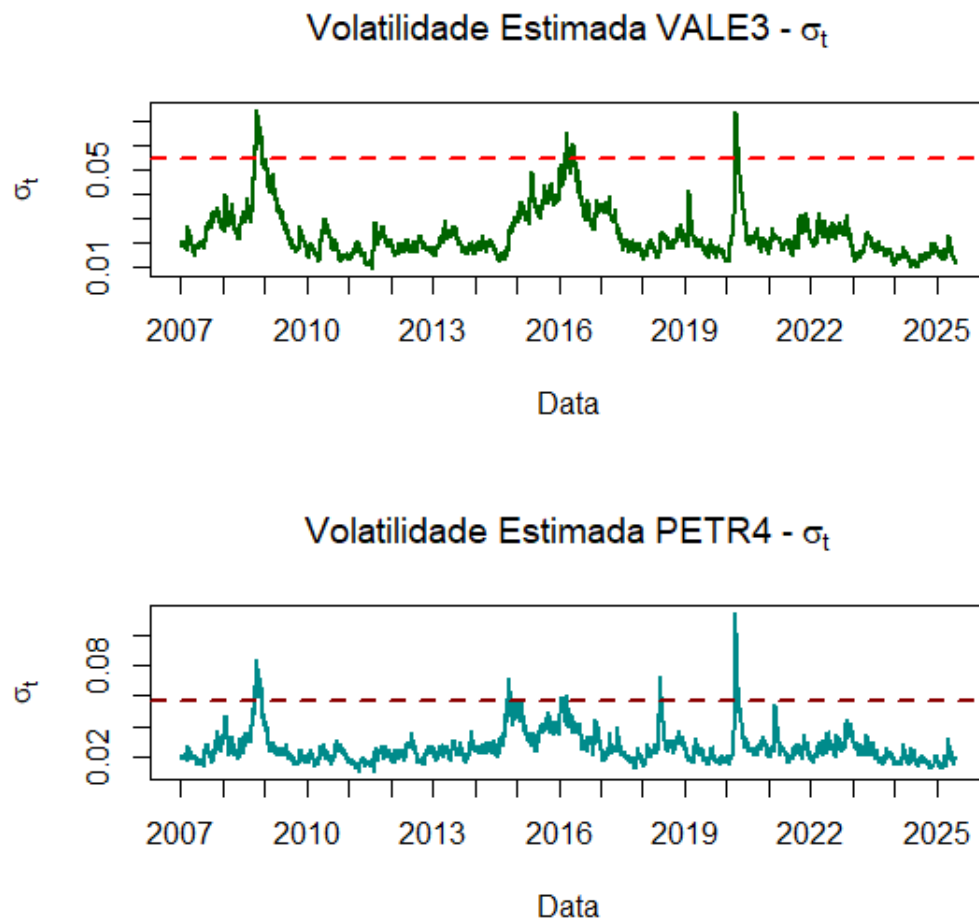
Uma diferença relevante entre as séries está na magnitude do parâmetro de assimetria γ , maior em PETR4 (0,3521) do que em VALE3 (0,258). Embora significativo em ambas, esse parâmetro indica que PETR4 é mais sensível a choques negativos, tornando-a mais vulnerável a crises ou períodos de instabilidade econômica.

Outra distinção importante está no comportamento das caudas da distribuição de retornos, representado pelo parâmetro ν . Enquanto VALE3 apresenta um valor de 6,358, PETR4 possui 4,9593, o que aponta para caudas mais pesadas em PETR4. Isso sugere que eventos extremos são mais prováveis nessa série, destacando um maior risco associado a flutuações inesperadas.

4.3.1 Análise gráfica dos parâmetros do modelo de volatilidade

Após a estimação do modelo APARCH(1,1), é possível obter a série da volatilidade condicional dos retornos ao longo do tempo. A Figura 4.6 apresenta a trajetória dessa volatilidade estimada ao longo do período considerado.

Figura 4.6 – Volatilidade condicional estimada das ações da VALE3 e PETR4



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os períodos de maior volatilidade nos retornos coincidem com fortes oscilações nos preços das ações. Isso ficou evidente na crise de 2008 e no período da COVID-19, quando os mercados enfrentaram grandes flutuações devido à instabilidade global.

As linhas horizontais no gráfico, que delimitam os picos de volatilidade em ambas as séries, foram estabelecidas com base em um critério estatístico que identifica os valores extremos, definidos como aqueles que excedem o quantil de 97,5% da distribuição dos valores de σ^δ .

Ambas as séries apresentaram picos de volatilidade durante períodos de instabilidade global que impactaram o mercado como um todo.

O primeiro ocorreu em 2007, quando os Bancos Centrais adotaram medidas para conter a turbulência financeira, marcando o início da Crise do Subprime. Em setembro de 2008, a falência do banco de investimentos, Lehman Brothers, agravou a crise, causando forte reação nos mercados e uma queda significativa na bolsa brasileira (JUNIOR; FILHO, 2008). Esse aumento da volatilidade contribuiu para a desvalorização das ações analisadas.

No período de 2010 a 2019, VALE3 registrou um único pico significativo de volatilidade, ocorrido em março de 2016, enquanto PETR4 ultrapassou o mesmo limiar estatístico em três momentos distintos: outubro de 2014, março de 2016 e junho de 2018.

O aumento da volatilidade de VALE3 em março de 2016 esteve associado a um movimento expressivo de valorização. Conforme ilustrado na Figura 4.1, o preço da ação atingiu seu menor valor em janeiro de 2016, seguido por um período de recuperação, resultando em uma alta de aproximadamente 158% até abril do mesmo ano.²

Por sua vez, os picos de volatilidade de PETR4 nesse período não seguiram uma única direção em relação à trajetória dos preços. Entre outubro de 2014 e novembro de 2015, a ação sofreu uma desvalorização de cerca de 40%, impulsionando a volatilidade nesse intervalo. Já entre fevereiro e abril de 2016, PETR4 apresentou um movimento semelhante à VALE3, com valorização de aproximadamente 90%, refletindo-se no aumento da volatilidade.

O último pico significativo ocorreu em junho de 2018, em resposta a um movimento de queda nos preços. Nesse período, PETR4 registrou uma valorização superior a 47% entre maio e junho, contribuindo para o aumento da volatilidade observada.

Por fim, ambas as séries registraram picos de volatilidade em março de 2020, reflexo do início da pandemia de COVID-19 e das medidas de restrição adotadas pelo governo. Nesse período, VALE3 e PETR4 foram significativamente impactadas, com a volatilidade intensificando a desvalorização de seus preços. Enquanto VALE3 apresentou oscilações expressivas em ambas as direções, encerrando o período com uma queda de aproximadamente 15%, PETR4 sofreu uma desvalorização mais acentuada, registrando uma perda de cerca de 60% em menos de 20 dias.

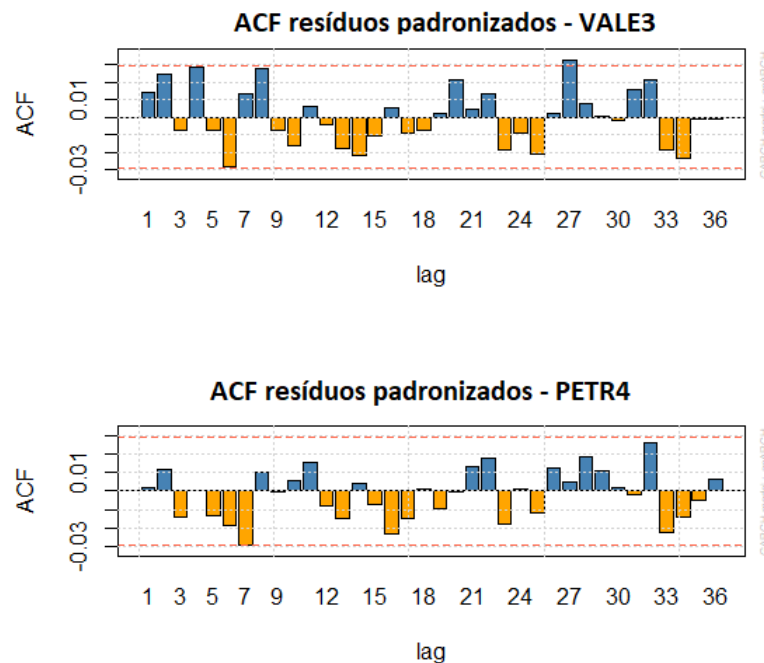
² Nota: As variações percentuais dos preços foram obtidas por meio da plataforma de negociação da corretora XP Investimentos.

4.3.2 Análise de resíduo do modelo APARCH(1,1)

A análise das funções de autocorrelação dos resíduos padronizados e dos resíduos padronizados ao quadrado do modelo APARCH(1,1) ajustado às séries de retornos da VALE3 e PETR4 tem como objetivo investigar a presença de correlações significativas e a existência de heterocedasticidade residual. Através da interpretação desses gráficos, busca-se avaliar a adequação do modelo em capturar as dinâmicas da volatilidade condicional das séries analisadas, identificando possíveis padrões não explicados pela modelagem, o que poderia indicar a necessidade de ajustes no modelo ou sugerir modelos alternativos ou abordagens diferentes.

As funções de autocorrelação dos resíduos padronizados, mostradas na Figura 4.7, indicam que todas as autocorrelações permanecem dentro dos intervalos de confiança. Isso significa que não há autocorrelação significativa nos resíduos, sugerindo que o modelo APARCH(1,1) capturou de forma satisfatória as dependências lineares de ambas as séries.

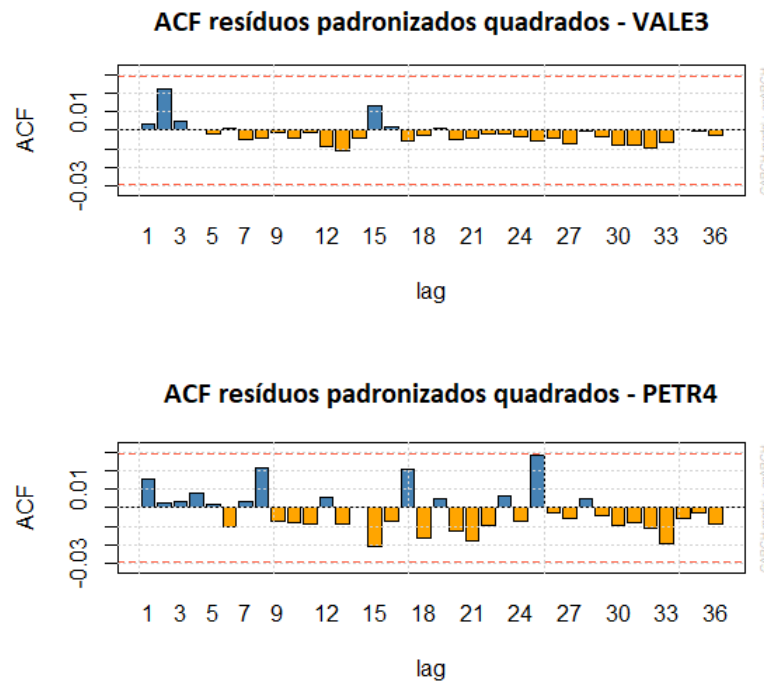
Figura 4.7 – ACF dos resíduos padronizados



Fonte: Elaborado pelo autor.

As funções de autocorrelação dos resíduos padronizados ao quadrado, apresentadas na Figura 4.8, indicam que todas as autocorrelações permanecem dentro dos intervalos de confiança, evidenciando a ausência de heterocedasticidade não explicada pelo modelo. Essa constância,

Figura 4.8 – ACF dos resíduos padronizados quadrados



Fonte: Elaborado pelo autor.

tação é corroborada pelo teste de multiplicador de Lagrange (LM) aplicado aos resíduos, que rejeita a presença de heterocedasticidade residual.

Dessa forma, o modelo APARCH(1,1) ajusta adequadamente a volatilidade condicional das séries de retornos da VALE3 e PETR4, não deixando padrões residuais que possam indicar inadequações na modelagem.

4.4 Aplicação do modelo APARCH(1,1) estendido

A ampliação do modelo APARCH buscou identificar e quantificar o impacto de eventos extremos sobre a volatilidade de cada ativo. Para isso, foi incorporada uma variável indicadora que sinaliza o período em que a volatilidade ultrapassa o percentil 97,5 da distribuição de σ^δ . Essa adaptação tem o objetivo de mostrar como os períodos destacados ao longo do texto influenciaram a dinâmica da volatilidade.

Ao estabelecer o limiar de 97,5% para a volatilidade e identificar os períodos de pico, analisou-se os retornos de cada ativo nesses intervalos. Dentro desses períodos, foram localizados os pontos em que os retornos atingiram seus valores máximos e mínimos, correspon-

dendo aos momentos em que o deslocamento do preço foi mais acentuado e, conseqüentemente, quando o efeito do evento extremo se traduziu na maior volatilidade observada.

Para facilitar a análise e permitir a interpretação dos eventos extremos em cada ativo, o estudo foi conduzido separadamente para as séries de VALE3 e PETR4.

O modelo APARCH(1,1) apresentou limitações na utilização de variáveis regressoras externas, especialmente quando mais de três variáveis foram incluídas, o que impediu a convergência dos parâmetros. Por essa razão, as variáveis foram analisadas individualmente no modelo, sendo essa a abordagem adotada para a interpretação dos parâmetros. Destaca-se, entretanto, que todas as possíveis combinações dessas variáveis também foram testadas.

Nesse contexto, optou-se por poupar a análise dos resíduos dos modelos APARCH(1,1) estendidos com variáveis indicadoras, já que os parâmetros estimados desses modelos não apresentaram divergências significativas em relação aos parâmetros do modelo original, exceto pelas variáveis indicadoras que prejudicaram a estimação. Muitas dessas variáveis, ao serem estimadas com coeficientes iguais ou próximos de zero, demonstraram não influenciar a dinâmica do modelo APARCH(1,1).

Assim, considerando que os modelos estendidos mantêm a mesma dinâmica do modelo original, não há motivo para repetir a análise dos resíduos, pois os resultados são equivalentes.

4.4.1 VALE3

Em VALE3, os períodos de volatilidade extrema abrangem os dois principais eventos globais de crise: o subprime, em 2008, e a pandemia de Covid-19, em 2020. Em novembro de 2015, quando ocorreu o desastre do rompimento da barragem de Mariana, houve um aumento expressivo na volatilidade. Contudo, esse aumento não atingiu o limiar superior de 97,5%. Esse limite foi ultrapassado apenas em março de 2016, prolongando-se até maio do mesmo ano, como reflexo do posicionamento da empresa diante da reestruturação financeira e da valorização do minério de ferro, que impulsionou os preços da ação. Outro período relevante ocorreu em 28 de janeiro de 2019, quando foi observado um salto na volatilidade, ainda que abaixo do limiar definido. Esse episódio coincidiu com o rompimento da barragem de Brumadinho, ocorrido em 25 de janeiro de 2019, resultando em grande deslocamento nos retornos.

Dessa forma, os períodos de pico de volatilidade em VALE3 e os motivos correspondentes são apresentados na Quadro 4.1. Essa tabela também indica se o evento associado provocou um deslocamento positivo ou negativo nos preços das ações.

Quadro 4.1 – Períodos de pico de volatilidade de VALE3, seus motivos e o impacto nos preços

Período	Motivo	Impacto nos preços
Setembro de 2008	Crise do subprime (crise financeira global)	Negativo
Novembro de 2015	Rompimento da barragem de Mariana	Negativo
Março – Maio de 2016	Reestruturação financeira e valorização do minério de ferro	Positivo
Janeiro de 2019	Rompimento da barragem de Brumadinho	Negativo
Março de 2020	Pandemia de Covid-19	Negativo

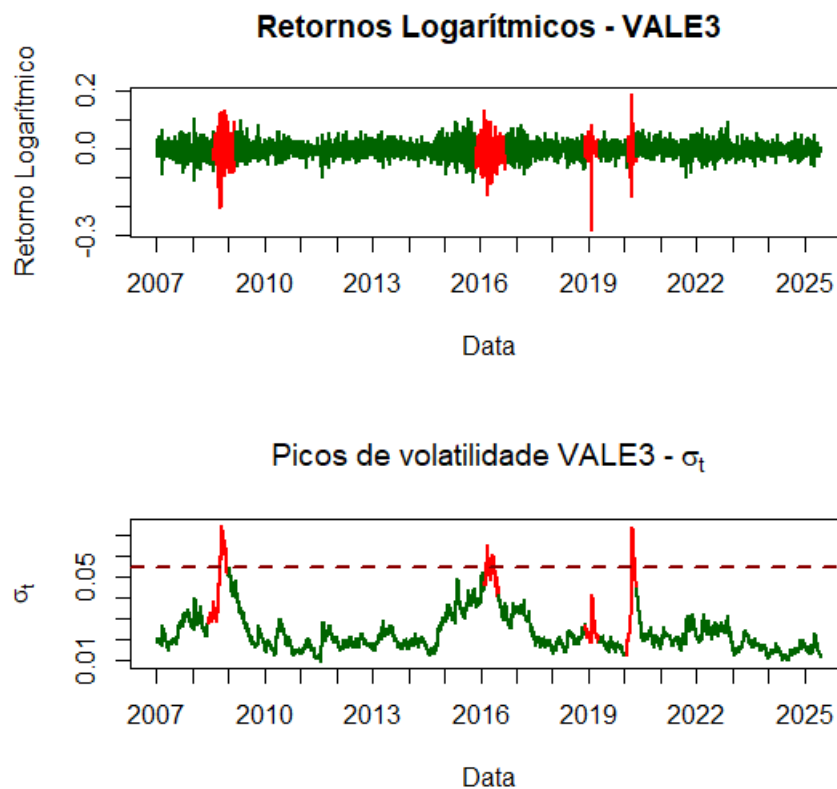
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 4.9 ilustra visualmente os retornos de VALE3, destacando os pontos de máximos e mínimos que coincidem com os períodos de maior volatilidade identificados no Quadro 4.1. Esses pontos no retorno ajudam a visualizar a resposta do mercado aos eventos analisados, permitindo compreender como as mudanças de preço foram intensificadas nesses momentos específicos.

As variáveis indicadoras foram definidas com base na direção do deslocamento do preço em cada evento. Quando houve queda significativa, utilizou-se o ponto mínimo como referência, pois representa o impacto negativo do choque. Em eventos com deslocamento positivo, como em 2016, adotou-se o ponto máximo. Embora o evento extremo tenha sido considerado pontualmente, diferentes janelas temporais ao redor desses pontos foram avaliadas para capturar o efeito temporal dos choques.

A análise das variáveis indicadoras para a série de VALE3 mostra que a variável θ_1 , referente ao período do subprime, apresentou coeficiente nulo e valor-p elevado (0,333), indicando ausência de significância estatística para o aumento da volatilidade nesse período. As variáveis θ_2 (valorização do minério de ferro) e θ_3 (rompimento da barragem de Mariana) apresentam coeficientes nulos, com valores-p iguais a 1, indicando total falta de contribuição para efeito na volatilidade.

Figura 4.9 – Retornos com máximos e mínimos destacados - VALE3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, a variável θ_4 , que corresponde ao período da pandemia (Covid), possui coeficiente positivo (0,041) e valor-p próximo do limiar de significância (0,092), sugerindo um efeito moderado, ainda que marginalmente significativo, no aumento da volatilidade dos retornos da VALE3 durante esse evento.

4.4.2 PETR4

Em PETR4, foram observados cinco períodos de maior volatilidade, cada um associado a eventos específicos que impactaram diretamente o ambiente econômico e político do país. Em outubro de 2008, a crise financeira global desencadeou um forte aumento na volatilidade dos preços das ações. No dia 16 de outubro de 2014, o avanço das investigações da Operação Lava Jato e o impacto de denúncias de corrupção criaram um ambiente de maior incerteza para a estatal.

Tabela 4.7 – Parâmetros do modelo de volatilidade para VALE3

Parâmetro	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
ω	0,000	NA	NA	NA
α	0,055	0,001	44,240	< 0,001
β	0,944	0,001	1344,988	< 0,001
$\alpha + \beta$	0,999	–	–	–
γ	0,258	0,059	4,351	< 0,001
δ	1,126	0,072	15,669	< 0,001
ν	6,358	0,446	14,259	< 0,001
Variáveis indicadoras				
θ_1 (Subprime)	0,000	0,000	0,968	0,333
θ_2 (Reestruturação)	0,000	0,008	0,000	1,000
θ_3 (Mariana)	0,000	0,005	0,000	1,000
θ_4 (Covid)	0,041	0,024	1,686	0,092

Fonte: Elaborado pelo autor.

No início de 2016, percebemos um aumento na volatilidade que coincide com o período de intensificação do processo de impeachment da presidente Dilma Rousseff e a instabilidade política generalizada. Em 28 de maio de 2018, a greve dos caminhoneiros e as discussões sobre a política de preços de combustíveis da Petrobras resultaram em um novo pico de volatilidade, que coincidiu com a renúncia do presidente da companhia. Já em março de 2020, a pandemia de Covid-19 e a queda abrupta nos preços internacionais do petróleo explicam o ambiente de forte oscilação nos retornos.

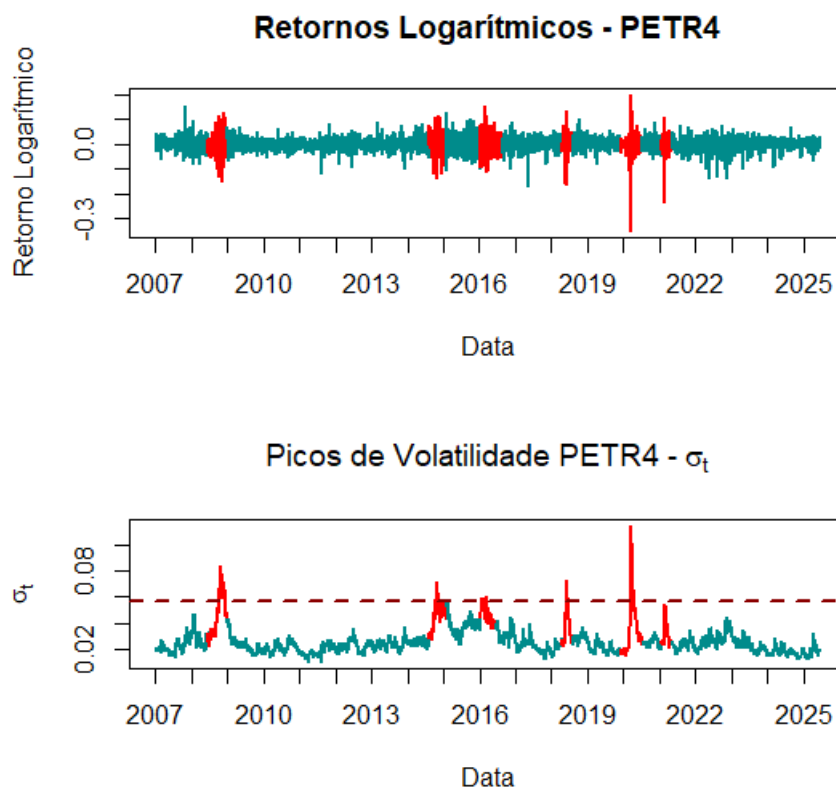
Quadro 4.2 – Períodos de pico de volatilidade de PETR4, seus motivos e o impacto nos preços

Período	Motivo	Impacto nos preços
Outubro de 2008	Crise financeira global (subprime)	Negativo
Outubro de 2014	Avanço das investigações da Operação Lava Jato	Negativo
Março de 2016	Instabilidade política e processo de impeachment	Positivo
Maio de 2018	Greve dos caminhoneiros e mudanças na política de preços	Negativo
Março de 2020	Pandemia de Covid-19 e queda nos preços do petróleo	Negativo
Fevereiro de 2021	Troca de presidência da Petrobras (Roberto Castello Branco)	Negativo

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 4.10 mostra graficamente os retornos de PETR4, ressaltando os momentos de máximos e mínimos que coincidem com os episódios de maior volatilidade listados na Quadro 4.2. Destaca-se que os pontos de 2017 e 2021, embora com volatilidade abaixo do limiar de 97,5%, mostram deslocamentos agressivos nos retornos, associados a eventos distintos. Em 2017, os reflexos de mudanças na governança e investigações de fraude continuavam a impactar a empresa. Já em fevereiro de 2021, o retorno negativo expressivo coincidiu com a troca na presidência da Petrobras, quando o então presidente Jair Bolsonaro anunciou a substituição de Roberto Castello Branco.

Figura 4.10 – Retornos com máximos e mínimos destacados - PETR3



Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma análoga à definição das indicadoras para VALE3, as variáveis indicadoras de PETR4 foram construídas a partir da direção dos movimentos de preço em cada evento. No caso de PETR4, a escolha se baseou no mínimo observado na Figura 4.10, dado que todos os eventos resultaram em deslocamentos negativos. Essa consistência reforça as estatísticas de risco associadas ao ativo, como caudas mais pesadas (indicando maior ocorrência de extremos) e um coeficiente mais alto para o parâmetro de assimetria no modelo APARCH.

A tabela 4.8 apresenta a estimação das variáveis indicadoras testadas individualmente no modelo. Foram testadas também combinações entre essas variáveis, mas elas não contribuíram de forma significativa e, além disso, afetaram negativamente a estimação dos demais parâmetros.

Tabela 4.8 – Parâmetros do modelo de volatilidade para PETR4

Parâmetro	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
ω	0,000	NA	NA	NA
α	0,055	0,001	44,240	< 0,001
β	0,944	0,001	1344,988	< 0,001
$\alpha + \beta$	0,999	–	–	–
γ	0,258	0,059	4,351	< 0,001
δ	1,126	0,072	15,669	< 0,001
ν	6,358	0,446	14,259	< 0,001
Variáveis indicadoras				
θ_1 (Subprime)	0,016	0,032	0,497	0,619
θ_2 (Lava Jato)	0,000	0,056	0,000	1,000
θ_3 (Reestruturação)	0,057	0,032	1,792	0,073
θ_4 (2017)	0,007	0,086	0,079	0,937
θ_5 (Caminhoneiros)	0,002	0,028	0,081	0,936
θ_6 (Covid)	0,091	0,044	2,061	0,039
θ_7 (Novo Presidente)	0,007	0,016	0,420	0,675

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise das variáveis indicadoras revela que o período da crise do subprime não apresentou efeito significativo no aumento da volatilidade. Ao menos, não de forma pontual, considerando a definição adotada para a indicadora referente a esse evento. As variáveis θ_2 , θ_4 , θ_5 e θ_7 não foram estatisticamente significativas para o aumento da volatilidade. Dessa forma, apenas os eventos relacionados à pandemia e às instabilidades políticas ocorridas no ano de 2016 mostraram-se relevantes para explicar aumentos significativos na volatilidade.

Apesar da relevância teórica das variáveis indicadoras para capturar choques específicos nos retornos de ambas as ações analisadas, o modelo APARCH(1,1) apresentou limitações práticas em sua estimação. Observou-se que a inclusão simultânea de múltiplas variáveis externas impediu a convergência do modelo, sendo necessário testá-las individualmente ou em pares para obter resultados numéricos viáveis. Importante destacar que, mesmo quando o modelo convergiu, algumas variáveis indicadoras apresentaram coeficientes estimados próximos de zero e valores-p elevados, indicando ausência de significância estatística.

Esses resultados não necessariamente indicam que os eventos não tenham impacto na volatilidade, mas sim que a abordagem utilizada pode não ser adequada para capturar sua contribuição de forma eficaz. Nesse sentido, métodos alternativos, como a inferência bayesiana, que incorpora informações a priori na estimação dos parâmetros, podem oferecer uma melhor quantificação do efeito desses eventos na volatilidade.

5 CONCLUSÕES

As limitações observadas no modelo APARCH(1,1) com a inclusão de variáveis externas indicam a necessidade de explorar abordagens alternativas, como modelos bayesianos, que podem lidar de forma mais flexível com problemas de convergência e incorporar fontes externas de informação. Diante disso, nossas contribuições práticas seguem utilizando o modelo APARCH(1,1) sem a inclusão dessas variáveis indicadoras.

Com base nos resultados obtidos, constatou-se que, embora apresentem algumas semelhanças, os retornos das ações de VALE3 e PETR4 possuem padrões distintos de volatilidade no período analisado. Enquanto VALE3 demonstra um risco moderado diante de eventos extremos, PETR4 apresenta maior sensibilidade a esses eventos, refletida em sua assimetria mais acentuada e curtose elevada.

A aplicação do modelo APARCH(1,1) confirmou o agrupamento, a persistência e a assimetria da volatilidade em ambos os ativos. Os altos valores dos parâmetros α e β sugerem que o aumento da volatilidade tende a se agrupar ao longo do tempo e a se dissipar lentamente. O parâmetro γ foi significativo para ambas as séries, evidenciando um efeito de assimetria, no qual choques negativos impactam a volatilidade de maneira mais intensa do que choques positivos. O parâmetro δ indica que a volatilidade condicional não segue uma estrutura puramente quadrática. Por fim, os valores do parâmetro v indicaram a presença de caudas pesadas, especialmente em PETR4.

Fatores globais, como a crise do subprime em 2008 e a pandemia de COVID-19, impulsionaram períodos de alta volatilidade nos ativos analisados, especialmente nas ações da Petrobras, devido ao impacto direto sobre o mercado de commodities como petróleo e gás natural, conforme apontado por (MAGHYEREH; ABDOH, 2022). No entanto, elementos específicos de cada empresa ou setor também contribuíram para oscilações nos preços, tanto de forma positiva quanto negativa.

No caso da Petrobras, entre 2014 e 2018, investigações de corrupção e crises de governança relacionadas à Operação Lava Jato tiveram papel central em episódios de forte oscilação nos retornos. Esses eventos ajudam a explicar os picos de volatilidade observados na curva da ação PETR4 nesse período. De acordo com Júnior et al. (2023), esse aumento na volatilidade esteve diretamente relacionado à repercussão negativa das notícias, impactando significativamente o valor de mercado da empresa.

No caso da Vale, eventos adversos também influenciaram fortemente o comportamento de suas ações. Após o rompimento da barragem de Fundão, em Mariana, em 2015 (Ministério Público de Minas Gerais (MPMG), 2025), o valor da ação VALE3 caiu ao seu menor nível em janeiro de 2016. A gravidade do desastre e suas consequências jurídicas e reputacionais provocaram forte reação negativa do mercado.

Nos meses seguintes, decisões estratégicas adotadas pela empresa contribuíram para uma recuperação de cerca de 158% até abril de 2016. Esse episódio evidencia a alta sensibilidade da ação a eventos extremos e mostra como medidas corretivas podem influenciar rapidamente a percepção dos investidores e a volatilidade dos ativos.

Diante dos resultados observados, reforça-se a importância de considerar não apenas o comportamento médio dos retornos, mas também a sensibilidade dos ativos a eventos extremos, aspecto captado pelo modelo APARCH. Esse tipo de análise permite uma compreensão mais ampla dos riscos, indo além das métricas tradicionais e destacando comportamentos assimétricos ou persistentes na volatilidade dos ativos.

Nesse contexto, uma comunicação clara e bem planejada torna-se essencial. A forma como a empresa responde a momentos negativos pode amenizar ou intensificar os efeitos no mercado. Diretores executivos e financeiros (CEOs e CFOs devem estar preparados, pois até pequenos ruídos negativos podem provocar fortes reações nos preços das ações. Isso exige atenção à liquidez, governança e alinhamento das decisões estratégicas com as expectativas do mercado.

Do ponto de vista empresarial, é fundamental que a gestão esteja atenta a eventos capazes de provocar grandes oscilações nos retornos e elevar a volatilidade dos ativos, como crises políticas, decisões judiciais ou anúncios estratégicos.

Nesse contexto, uma das estratégias amplamente adotadas por instituições financeiras é o estabelecimento de limites de perda por estresse. Esses limites visam restringir a exposição a eventos extremos — os chamados riscos de cauda —, evitando a concentração excessiva em ativos ou estratégias que, embora apresentem bom desempenho em condições normais, podem se tornar altamente arriscadas em cenários adversos (SCHOLLES, 2000).

Adicionalmente, em situações de aumento da volatilidade, é comum a alocação de recursos em estratégias de proteção, tanto por parte de empresas quanto de investidores. Essas estratégias buscam proteger os portfólios por meio de instrumentos que tendem a se valorizar em momentos de queda dos ativos principais, como derivativos ou ativos com correlação

negativa. A utilização de operações de cobertura é especialmente relevante em contextos de instabilidade, pois contribui para reduzir o risco total da carteira e reforçar sua resiliência diante de choques inesperados (ALEXANDER, 2008).

REFERÊNCIAS

- ADI, A. A.; ADDA, S. P.; WOBILOR, A. K. Shocks and volatility transmission between oil price and nigeria's exchange rate. **SN Business and Economics**, v. 2, p. 47, 2022.
- AFFONSO, T. C. **O petróleo e sua contribuição na economia brasileira**. 40 p. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade Estadual de Goiás, Anápolis, 2023. Orientador: Glauber Lopes Xavier.
- ALENCAR, A. P.; SÁFADI, T. Volatility of main stock indexes: similarities and differences. **International Journal of Statistics and Economics**, v. 9, n. A12, p. 1–12, 2012.
- ALEXANDER, C. **Market Risk Analysis, Volume II: Practical Financial Econometrics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- ALEXANDRU, A.; CARAGEA, N. Innovative methods to analyze the stock market in romania. studying the volatility of the romanian stock market with the arch and garch models using the "r" software. **Theoretical and Applied Economics**, p. 83–100, 2013.
- AMINI, S. et al. Nonlinearity everywhere: implications for empirical finance, technical analysis and value at risk. **The European Journal of Finance**, v. 27, n. 13, p. 1326–1349, 2021.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.
- BOX, G. E.; PIERCE, D. A. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 65, n. 332, p. 1509–1526, 1970.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. [S.l.]: Holden-Day, 1970.
- BRANCO, R. R.; RUBESAM, A.; ZEVALLOS, M. Forecasting realized volatility: Does anything beat linear models? **Journal of Empirical Finance**, Elsevier, p. 101524, 2024.
- BRASIL BOLSA, B. B. **Visão Geral dos Índices**. 2025. <https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/visao-geral-dos-indices/s_visgeraindsb/>. Acessado em: 23 jan. 2025.
- CHAI, S. et al. Volatility similarity and spillover effects in g20 stock market comovements: An ica-based arma-aparch-m approach. **Complexity**, Wiley Online Library, v. 2020, n. 1, p. 8872307, 2020.
- CHANG, D.; SUN, S.; ZHANG, C. An accelerated linearly convergent stochastic l-bfgs algorithm. **IEEE transactions on neural networks and learning systems**, IEEE, v. 30, n. 11, p. 3338–3346, 2019.
- CHANG, H. Stochastic volatility models and their applications to financial markets. **Proceedings of the Asian Economic and Management Policy Society (AEMPS)**, EWA Direct, v. 12, n. 1, p. 45–67, 2024. Accessed on 23 May 2025. Disponível em: <<https://www.ewadirect.com/proceedings/aemps/article/view/18738>>.

CHIU, Y.-C. Macroeconomic uncertainty, information competition, and liquidity. **Finance Research Letters**, v. 34, p. 101262, 2020.

CHONG, E. K. P.; ZAK, S. H. **An Introduction to Optimization**. 2. ed. New York: Wiley, 2001. ISBN 978-0-471-65400-1.

COX, D. R. Tests of separate families of hypotheses. **Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability**, University of California Press, v. 1, p. 105–123, 1961.

COX, D. R. Further results on tests of separate families of hypotheses. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, JSTOR, v. 24, n. 2, p. 406–424, 1962.

COX, D. R. The role of significance tests. **Scandinavian Journal of Statistics**, v. 4, n. 2, p. 49–70, 1977.

CURTO, J. D.; SERRASQUEIRO, P. The impact of covid-19 on s&p500 sector indices and fatang stocks volatility: An expanded aparch model. **Finance Research Letters**, Elsevier, v. 46, n. Part A, p. 102247, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.frl.2021.102247>>.

DAS, S. et al. A study on risk management in financial market. **Emerging Trends and Applications in Cognitive Computing**, 2019.

E-Investidor. **B3 divulga 3ª prévia da carteira do Ibovespa para janeiro a abril de 2025**. [S.l.], 2025. Acessado em: 23 jan. 2025. Disponível em: <<https://investidor.estadao.com.br/ultimas/b3-3-previa-carreira-ibovespa-janeiro-a-abril-2025-aco-es-empresas/>>.

ENGLE, R. Risk and volatility: Econometric models and financial practice. **American economic review**, American Economic Association, v. 94, n. 3, p. 405–420, 2004.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica: Journal of the econometric society**, JSTOR, p. 987–1007, 1982.

FAUSTINO, C. C. R. **O impacto das notícias no mercado financeiro brasileiro**. Tese (Doutorado), 2013.

FERREIRA, R. A. **Processo de Cox marcado modulado por processos Gaussianos para configurações pontuais unidimensionais**. [S.l.], 2022.

GALANOS, A. **Introdução ao pacote rugarch (Versão 1.3-1)**. [S.l.], 2020. Volume 11.

GALANOS, A. **rugarch: Univariate GARCH models**. [S.l.], 2023. R package version 1.5-1.

GASPARINI, D. C. d. S. **Verificação da performance de modelos APARCH assimétricos aplicados a dados financeiros**. [S.l.], 2013.

Genial Investimentos. **História da Bolsa de Valores B3**. [S.l.], 2025. Acessado em: 23 jan. 2025. Disponível em: <<https://blog.genialinvestimentos.com.br/historia-da-bolsa-de-valores-b3/>>.

HECQ, A.; VELASQUEZ-GAVIRIA, D. Non-causal and non-invertible arma models: Identification, estimation and application in equity portfolios. **Journal of Time Series Analysis**, Wiley Online Library, 2024.

JUNIOR, G. R. B.; FILHO, E. T. T. Analisando a crise do subprime. Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social, 2008.

Júnior, D. C. de A. et al. Análise do impacto da operação lava jato sobre as ações da petrobras: uma abordagem estatística à luz das notícias. **Research, Society and Development**, Research, Society and Development, v. 12, n. 4, p. e27312441209, 2023. ISSN 2525-3409. Disponível em: <<https://doi.org/10.33448/rsd-v12i4.41209>>.

LI, W. et al. The analysis on groundwater storage variations from grace/grace-fo in recent 20 years driven by influencing factors and prediction in shandong province, china. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group UK London, v. 14, n. 1, p. 5819, 2024.

LIU, D. C.; NOCEDAL, J. A limited memory bfgs-type method for large-scale unconstrained optimization. **Mathematical Programming**, Springer, v. 45, n. 1-3, p. 503–528, 1989.

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. On a measure of a lack of fit in time series models. **Biometrika**, v. 65, n. 2, p. 297–303, 1978.

MAGHYEREH, A.; ABDOH, H. Global financial crisis versus covid-19: Evidence from sentiment analysis. **International Finance**, 2022.

MARTINS, I. F. B.; LOPES, H. F. Stochastic volatility models with skewness selection. **arXiv preprint**, 2023. Accessed on 23 May 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2312.00282>>.

Ministério Público de Minas Gerais (MPMG). **Rompimento da barragem de Fundão em Mariana: Resultados e desafios cinco anos após o desastre**. 2025. Acessado em: 29 jan. 2025. Disponível em: <<https://www.mpmg.mp.br/portal/menu/comunicacao/noticias/rompimento-da-barragem-de-fundao-em-mariana-resultados-e-desafios-cinco-anos-apos-o-desastre.shtml>>.

MORETTIN, P. A. **Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras**. [S.l.]: Editora Blucher, 2017.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. **Análise de Séries Temporais—2ª Edição Revista e Ampliada**. [S.l.]: ABE–Projeto Fisher, Editora Edgar Blücher, 2006.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais: modelos lineares univariados**. [S.l.]: Editora Blucher, 2018.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. d. C. **Análise de séries temporais**. [S.l.]: Blucher, 2022.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. **Numerical Optimization**. 2. ed. New York: Springer, 2006. ISBN 1431-8598.

PETROBRAS. **Relatório de Sustentabilidade 2023**. Rio de Janeiro, Brasil: [s.n.], 2024. <<https://www.investidorpetrobras.com.br/apresentacoes-relatorios-e-eventos/relatorios-anuais/>>. Relatório anual referente ao exercício de 2023, publicado em 2024.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2024. Acesso em: 24 maio 2025. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

RYAN, J. A.; ULRICH, J. M. **quantmod: Quantitative Financial Modelling Framework**. [S.l.], 2024. R package version 0.4.26. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=quantmod>>.

RYAN, J. A. et al. **quantmod: Quantitative Financial Modelling Framework**. [S.l.], 2024. Versão 0.4.26. Disponível em: <<https://www.quantmod.com/>>.

RYAN, J. A. et al. Package ‘quantmod’. **The Comprehensive R Archive Network Available in: <http://cran.hafro.is/web/packages/quantmod/quantmod.pdf>**, 2020.

SCHOLES, M. S. Crisis and risk management. **American Economic Review**, v. 90, n. 2, p. 17–21, 2000.

SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S.; STOFFER, D. S. **Time series analysis and its applications**. [S.l.]: Springer, 2000. v. 3.

TOSCANO, T. S. B. et al. Governança e sustentabilidade: uma análise das empresas vale e petrobras. **Revista de Gestão e Secretariado (GeSec)**, São Paulo, SP, Brasil, v. 13, n. 3, p. 1106–1121, setembro/dezembro 2022. ISSN 2178-9010. Disponível em inglês: Governance and Sustainability: an analysis of the companies Vale and Petrobras. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.7769/gesec.v13i3.1393>>.

TSAY, R. S. **Analysis of financial time series**. [S.l.]: John wiley & sons, 2005.

TSAY, R. S. **Multivariate time series analysis: with R and financial applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.

TSAY, R. S. **An introduction to analysis of financial data with R**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014.

Vale S.A. **Sobre o rompimento da barragem em Brumadinho**. 2019. Acessado em: 29 jan. 2025. Disponível em: <<https://vale.com/pt/w/about-brumadinho-dam-breach>>.

VALE S.A. **Formulário de Referência 2024**. Rio de Janeiro, Brasil: [s.n.], 2024. <<https://www.vale.com>>. FRE – Formulário de Referência, VALE S.A.

WIXSON, T. P.; COOLEY, D. Attribution of seasonal wildfire risk to changes in climate: A statistical extremes approach. **Journal of Applied Meteorology and Climatology**, American Meteorological Society, v. 62, n. 11, p. 1511–1521, 2023.

WU, Y.; PENG, C.; PENG, Z. Key indicators for pre-warning risks associated with urbanization in china. **Ecological Indicators**, Elsevier, v. 162, p. 112032, 2024.

Yahoo Finance. **Yahoo Finance**. [S.l.], 2025. Acessado em: 23 jan. 2025. Disponível em: <<https://finance.yahoo.com>>.

YAMACLI, D. S.; YAMACLI, S. Estimation of the unemployment rate in turkey: A comparison of the arima and machine learning models including covid-19 pandemic periods. **Heliyon**, Elsevier, v. 9, n. 1, 2023.

APÊNDICE A

Script em R: Análise VALE3 e PETR4

```
# =====
# Análise VALE3
# =====

library("rugarch")
library("readxl")
library("lubridate")
library("lmtest")

# Leitura dos dados
dados <- read_excel("dados_VALE_salvo.xlsx")
dados$Date <- as.Date(dados$Date)

# Gráfico dos retornos
plot(dados$Date, dados$daily.returns, type = "l",
     ylab = "Log-retorno", xlab = "Data")

acf(dados$daily.returns)
pacf(dados$daily.returns)

# Modelo ARMA
modelo_arma <- arima(dados$daily.returns, order = c(10, 0, 0),
                    fixed = c(0, NA, 0, NA, 0, 0, 0, 0, 0, NA, 0))
coeftest(modelo_arma)

# Resíduos
acf(modelo_arma$residuals)
pacf(modelo_arma$residuals)
Box.test(modelo_arma$residuals, lag = 20, type = "Ljung-Box")
```

```

# Volatilidade
res <- modelo_arma$residuals
res2 <- res^2

acf(res2)
pacf(res2)

# Modelo APARCH(1,1)
spec1 <- ugarchspec(
  variance.model = list(model = "apARCH", garchOrder = c(1, 1)),
  mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = TRUE),
  distribution.model = "std",
  fixed.pars = list(mu=0, omega=0))

modelo <- ugarchfit(spec = spec1, data = res)
print(modelo)
plot(modelo)

pacf(modelo@fit$residuals^2)
Box.test(modelo@fit$residuals^2)

plot(dados$Date, modelo@fit$sigma, type = "l")
abline(h = quantile(modelo@fit$sigma, 0.950, na.rm = TRUE),
  col = "red", lwd = 2, lty = 2)
abline(h = quantile(modelo@fit$sigma, 0.975, na.rm = TRUE),
  col = "blue", lwd = 2, lty = 2)

# Identificação de períodos de intervenção
which(modelo@fit$sigma >= quantile(modelo@fit$sigma, 0.975))

# Período 1

```

```

dados$Date[428]
dados$Date[497]
which.max(modelo_arma$residuals[428:497])
which.min(modelo_arma$residuals[428:497])
dados$Date[428+38-1]
dados$Date[428+11-1]

# Período 2
dados$Date[2261]
dados$Date[2313]
which.max(modelo_arma$residuals[2000:2313])
which.min(modelo_arma$residuals[2261:2313])
dados$Date[2000+244-1]
dados$Date[2261+4-1]

# Período 3
dados$Date[3260]
dados$Date[3290]
which.max(modelo_arma$residuals[3260:3290])
which.min(modelo_arma$residuals[3260:3290])
dados$Date[3260+4-1]
dados$Date[3260+8-1]

# Período 4
dados$Date[which.min(res)]

# Gráfico final com máximos e mínimos destacados
plot(dados$Date, res, type = "l",
main = "Retornos com máximos e mínimos destacados - VALE3",
xlab = "Data", ylab = "Retorno")

min_index <- which.min(res[428:497]) + 427

```



```

max_index <- which.max(res[428:497]) + 427
points(dados$Date[min_index], res[min_index], col = "blue", pch = 19)
points(dados$Date[max_index], res[max_index], col = "red", pch = 19)

min2_index <- which.min(res[2261:2313]) + 2260
max2_index <- which.max(res[2000:2313]) + 1999
points(dados$Date[min2_index], res[min2_index], col = "blue", pch = 19)
points(dados$Date[max2_index], res[max2_index], col = "red", pch = 19)

min3_index <- which.min(res[3260:3290]) + 3259
max3_index <- which.max(res[3260:3290]) + 3259
points(dados$Date[min3_index], res[min3_index], col = "blue", pch = 19)
points(dados$Date[max3_index], res[max3_index], col = "red", pch = 19)

min_global_index <- which.min(res)
points(dados$Date[min_global_index],
res[min_global_index], col = "blue", pch = 19)

# Criação das variáveis indicadoras
per1 <- rep(0, length(res))
per1[428+11-1] <- 1
per1 <- as.matrix(per1)

per2 <- rep(0, length(res))
per2[2000+244-1] <- 1
per2 <- as.matrix(per2)

per3 <- rep(0, length(res))
per3[3260+4-1:3260+8-1] <- 1
per3 <- as.matrix(per3)

per4 <- rep(0, length(res))

```

```

per4[which.min(res)] <- 1
per4 <- as.matrix(per4)

X <- cbind(per1, per2)

# Modelo APARCH(1,1) com variável externa
spec1 <- ugarchspec(
  variance.model = list(model = "apARCH", garchOrder = c(1, 1),
                        external.regressors = per4),
  mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = TRUE),
  distribution.model = "std",
  fixed.pars = list(mu=0, omega=0))

modelo <- ugarchfit(spec = spec1, data = modelo_arma$residuals)
print(modelo)

#=====
# Análise PETR4
#=====

library("rugarch")
library("readxl")
library("lubridate")
library("lmtest")
library("quantmod")
library("stochvol")

# Obtenção e preparação dos dados
ticker <- "PETR4.SA"
start_date <- as.Date("2007-01-08")
end_date <- as.Date("2025-05-29")
getSymbols(ticker, src = "yahoo", from = start_date)

```

```

dados <- get(ticker)

# Cálculo dos log-retornos
ret <- log(Cl(dados)[-1]) - log(Cl(dados)[-nrow(dados)])
plot(ret, type = "l")

# ACF e PACF dos log-retornos
acf(ret, ylim = c(-0.1, 0.1), main = "")
pacf(ret, ylim = c(-0.1, 0.1), main = "")

# Ajuste do modelo ARMA
modelo_arma <- arima(ret, order = c(7, 0, 0),
                     fixed = c(0, 0, 0, 0, NA, 0, NA, 0))
coeftest(modelo_arma)

# Resíduos e testes de diagnóstico
acf(modelo_arma$residuals, ylim = c(-0.05, 0.05),
    main = "", lag.max = 24)
Box.test(modelo_arma$residuals, lag = 24, type = "Ljung-Box")

# Modelo APARCH para a volatilidade
res <- modelo_arma$residuals
res2 <- res^2

acf(res2, ylim = c(0, 1), main = "")
pacf(res2, ylim = c(0, 1), main = "")

spec1 <- ugarchspec(
  variance.model = list(model = "apARCH", garchOrder = c(1, 1)),
  mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = TRUE),
  distribution.model = "std",
  fixed.pars = list(mu = 0))

```

```

modelo <- ugarchfit(spec = spec1, data = res)
print(modelo)

plot(modelo, which = 10)
plot(modelo, which = 11)
plot(modelo)

datas <- index(dados)
plot(datas, c(NA, modelo@fit$sigma), type = "l",
      ylab = expression(sigma[t]))

# Identificação de períodos extremos
dados$indice <- 1:nrow(dados$PETR4.SA.Open)
plot(datas, c(NA, res), type = "l")

limite <- quantile(res, 0.99, na.rm = TRUE)
indices_extremos <- which(abs(res) >= limite)
points(datas[indices_extremos + 1],
c(NA, res)[indices_extremos + 1], col = "red")

# Variável indicadora: COVID
covid <- ifelse(datas[-1] >= "2020-01-30" &
datas[-1] <= "2023-05-05", 1, 0)
covid <- as.matrix(covid)

plot(datas[-1], modelo@fit$sigma, type = "l",
      ylab = expression(sigma[t]))
abline(v = as.Date("2020-01-30"), col = "red", lty = 2)
abline(v = as.Date("2023-05-05"), col = "red", lty = 2)

# Variável indicadora: Subprime
per1 <- rep(0, length(res))

```

```

per1[458] <- 1
per1 <- as.matrix(per1)

# Variável indicadora: 2014-2019
per2 <- rep(0, length(res))
per2[1191 + 741 - 1] <- 1
per2 <- as.matrix(per2)

# Variável indicadora: 2016
per3 <- rep(0, length(res))
per3[1880 + 382 - 1] <- 1
per3 <- as.matrix(per3)

# Variável indicadora: 2017
per4 <- rep(0, length(res))
per4[2471 + 92 - 1] <- 1
per4 <- as.matrix(per4)

# Variável indicadora: 2018
per5 <- rep(0, length(res))
per5[2471 + 355 - 1] <- 1
per5 <- as.matrix(per5)

# Variável indicadora: 2021
per6 <- rep(0, length(res))
per6[3290 + 209 - 1] <- 1
per6 <- as.matrix(per6)

# Modelo final com variável indicadora de 2021
X <- cbind(per1, per6, covid)

spec2 <- ugarchspec(

```

```
variance.model = list(model = "apARCH", garchOrder = c(1, 1),  
                      external.regressors = per6),  
mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = TRUE),  
distribution.model = "std",  
fixed.pars = list(mu = 0))  
modelo <- ugarchfit(spec = spec2, data = res)  
print(modelo)
```