UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

MARIANA MERCÍLIO DE OLIVEIRA

GEOMETRIA DO TÁXI:

UMA INTRODUÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

LAVRAS – MG

2020

MARIANA MERCÍLIO DE OLIVEIRA

GEOMETRIA DO TÁXI:
UMA INTRODUÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa
Orientadora

Profa. Dra. Graziane Sales Teodoro
Coorientadora

LAVRAS – MG
2020

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Oliveira, Mariana Mercílio de
Geometria do Táxi : uma introdução na Educação Básica / Mariana Mercílio de Oliveira. – Lavras : UFLA, 2020.
106 p. : il.

Dissertação (mestrado profissional)–Universidade Federal de Lavras, 2020.
Orientadora: Profa. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa.
Bibliografia.

1. Distância do táxi. 2. Distância euclidiana. 3. Sequência didática. I. Costa, Maria do Carmo Pacheco de Toledo. II. Teodoro, Graziane Sales. III. Título.

MARIANA MERCÍLIO DE OLIVEIRA

GEOMETRIA DO TÁXI: UMA INTRODUÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 26 de Novembro de 2020.

Profa. Dra. Adriana Xavier Freitas	UFLA
Profa. Dra. Luciane Teixeira Passos Giarola	UFSJ

M Carmo P. de Toledo Costa

Profa. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa
Orientadora

Profa. Dra. Graziane Sales Teodoro
Co-Orientadora

LAVRAS – MG
2020

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me permitido chegar até aqui, e que nos momentos mais difíceis, guiou meus passos e até me carregou nos braços.

Aos meus pais, Mário e Ana, e ao meu irmão, Mariano, que foram os braços que Deus usou para me carregar, e por não terem me deixado desistir.

À minha avó, que sempre rezou pelos meus estudos.

Aos meus familiares por todo apoio e compreensão, em especial ao meu tio Carlinhos e aos meus primos Vitor Cézar e Felipe.

À Universidade Federal de Lavras, juntamente com o PROFMAT, pela oportunidade.

Ao corpo docente do programa, pelo aprendizado, pela dedicação e pela amizade.

À minha orientadora, Dra. Maria do Carmo, pela dedicação, competência, pelo compartilhamento de saberes, mas principalmente, pela paciência e por não ter desistido de mim nem deste trabalho, principalmente em momentos que eu não conseguia desenvolver.

À minha coorientadora, Dra. Graziane, por compartilhar novos saberes, experiências, e contribuir de uma forma muito efetiva para este trabalho e para minha formação, além de, juntamente com a Dra. Maria do Carmo, aceitar a tarefa de caminhar ao meu lado para que eu chegasse aqui, por mais difícil que a caminhada estivesse.

Às professoras, Dra. Adriana e Dra Luciane pela disponibilidade e pelo enriquecimento ao meu trabalho com suas contribuições.

À turma de 2018 do PROFMAT, pela amizade, cumplicidade e companheirismo, por terem sido o principal motivo de me fazer voltar.

À turma de 2019, mesmo que tenha sido breve a convivência, me acolheram tão bem e me fizeram sentir parte da turma.

Ao CEFET-MG, unidade de Nepomuceno, que me apoiou e me possibilitou realizar este mestrado. Agradeço a todos os colegas de trabalho que contribuíram de alguma forma.

Aos meus amigos, mas que por muitas vezes foram anjos na minha vida, principalmente durante esse período do mestrado, Luciana M., Suelen, Simone e Caroline, minha comadre Luciana R., e meus afilhados Danilo e Jorge, pois não sei o que seria de mim sem eles.

Enfim, a todos que se dedicaram de alguma forma para a realização desse mestrado, minha eterna gratidão!

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma sequência didática sobre a geometria do táxi para o professor que queira trabalhar com esse tema em sala de aula na Educação Básica. A sequência didática é constituída de cinco atividades que vão desde o despertar do interesse do aluno pela distância do táxi até a consolidação do conceito da circunferência do táxi, passando pela construção da fórmula relativa a essa distância e como se calcula a quantidade de caminhos possíveis nessa geometria. Apresentamos ainda, a fundamentação teórica em que a métrica do táxi está inserida, servindo como material de apoio ao professor.

Palavras-chave: Distância do Táxi. Distância Euclidiana. Sequência Didática.

ABSTRACT

This dissertation aims to present a didactic sequence on taxi geometry for the teacher who wants to work with this theme in the Basic Education classrooms. The didactic sequence consists of five activities that range from awake the student's interest in the taxi distance to consolidating the concept of the taxi circumference, including the construction of the related formula to that distance and how to calculate the number of possible paths in this geometry. We also present the theoretical basis in which the taxi metric is inserted, serving as support material for the teacher.

Keywords: Taxi Distance. Euclidean Distance. Didactic Sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Quando nos referimos à geometria ensinada na Educação Básica estamos tratando da geometria euclidiana, pois é essa a geometria citada nos currículos oficiais do ensino, e por isso, a trazida pelos livros didáticos. Mas essa não é a única geometria existente, e nem sempre a mais aplicável às situações cotidianas.

Assim, decidimos criar uma sequência de atividades que levem para a sala de aula da Educação Básica, uma geometria não euclidiana de fácil compreensão e inserida no dia-a-dia do aluno: a geometria do táxi.

A partir da revisão literária feita, encontramos vários trabalhos com atividades utilizando a geometria do táxi das mais diversas formas, conforme resumimos no **Capítulo 4**. Para tentar fazer algo diferente resolvemos focar na introdução à geometria do táxi, de uma forma dinâmica e interativa, utilizando o ambiente virtual Scratch. Atividades num ambiente virtual como o Scratch possibilitam que o aluno aprenda de forma mais independente do professor, com uma interatividade permitindo retorno imediato. O Scratch é uma linguagem de programação que utiliza de blocos lógicos, com uma plataforma online, onde qualquer pessoa tem acesso às criações compartilhadas nele, possibilitando ao aluno realizá-las utilizando computador, tablet ou smartphone. Como a sociedade hoje utiliza o meio virtual para realizar as mais diversas atividades corriqueiras, não podemos ignorar essa inserção na sala de aula. Apesar disso, ainda existem escolas que não possuem um laboratório de informática com internet para atender às necessidades dos alunos, por esse motivo, fizemos uma adaptação das atividades virtuais de forma que o professor possa desenvolvê-las também em sala de aula sem o auxílio de um computador com internet.

A fim de trazer tal sequência de atividades com o tema geometria do táxi, dividimos nosso trabalho em capítulos conforme especificaremos abaixo.

No **Capítulo 2**, temos um resumo dos principais resultados referentes à espaços métricos que são utilizados pela geometria do táxi.

O **Capítulo 3** fala especificamente da geometria do táxi, sua classificação como uma geometria não euclidiana, trazendo as versões mais comuns para esta classificação, definindo a geometria do táxi através de sua distância e mostrando o número possíveis de caminhos entre dois pontos.

No **Capítulo 4**, listamos alguns trabalhos relacionados ao assunto e a forma com que trazem suas atividades.

Finalmente, no **Capítulo 5**, comentamos sobre o ambiente virtual Scratch e sua importância, e trazemos a sequência de atividades, detalhando cada uma delas.

2 NOÇÕES BÁSICAS DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo faremos uma introdução ao conceito de espaços métricos, apresentando algumas definições e resultados que serão abordados na geometria do táxi. Boa parte deste capítulo é baseada no livro de Lima (1993).

Definição 2.1 *Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer x, y, $z \in M$:*

i) $d(x,x) = 0$;

ii) *se* $x \neq y$, *então* $d(x,y) > 0$;

iii) $d(x,y) = d(y,x)$;

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(desigualdade triangular).*

Definição 2.2 *Um espaço métrico é um par (M, d), sendo M um conjunto e d uma métrica em M.*

Usualmente diremos somente "o espaço métrico M", ficando subentendida qual a métrica d a ser considerada.

A seguir, apresentamos algumas definições e resultados que serão utilizados nos exemplos posteriores.

Definição 2.3 *O valor absoluto de um número real x, denotado por $|x|$, é definido por*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Geometricamente, $|x|$ é a distância do número real x até a origem e $|x - y|$ é a distância entre os números x e y.

Proposição 2.4 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então $|ab| = |a||b|$.*

Demonstração. Como $\sqrt{(ab)^2} = |ab|$, temos,

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2 \cdot b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \\ &= |a||b|. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.5 (Desigualdade Triangular) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então,*

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{2.1}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $ab \geq 0$.

Demonstração. Pela definição de valor absoluto, os dois lados da desigualdade são não negativos. Então, se mostrarmos que $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$, teremos o resultado desejado, pois basta extrair a raiz quadrada de ambos os lados que chegamos em (2.1).

Temos que,

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2, \; \textit{pois} \;\; ab \leq |ab| \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a|+|b|)^2. \end{aligned}$$

No caso em que $ab \geq 0$, teremos $ab = |ab|$. Logo ocorrerá a igualdade. Reciprocamente, se ocorrer a igualdade, $|ab| = ab$, então $ab \geq 0$.

■

Teorema 2.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reais. Então,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Demonstração. Consideremos o trinômio $(ax_i - y_i)^2$, com $a \in \mathbb{R}$ e $i = 1, \ldots, n$. Como $(ax_i - y_i)^2 \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i - y_i)^2 \geq 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (ax_i - y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (a^2 x_i^2 - 2ax_i y_i + y_i^2) \\
&= a^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a^2 - \left(2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) a + \sum_{i=1}^{n} y_i^2
\end{aligned}$$

é uma equação quadrática em a, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, e para termos $\sum_{i=1}^{n} (ax_i - y_i)^2 \geq 0$, o discriminante dessa equação não pode ser positivo, ou seja,

$$4 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) \leq 0,$$

o que implica em

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right),$$

como queríamos.

■

Vamos agora mostrar exemplos de espaços métricos que serão úteis adiante.

Exemplo 2.7 *A reta, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é um exemplo importante de espaço métrico. Mostraremos que a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $d(x,y) = |x - y|$ é uma métrica no conjunto $\mathbb{R}$, chamada métrica usual da reta. A função d fornece a distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$.*
De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos,

i) $d(x,x) = |x - x| = 0$;

ii) $d(x,y) = |x - y| > 0$, *se* $x \neq y$;

iii) $d(x,y) = |x-y|$

temos dois casos a considerar:

$$\text{se } x \geq y, \text{ então } d(x,y) = |x-y| = x-y = -(y-x) = |y-x| = d(y,x);$$

$$\text{se } x < y, \text{ então } d(x,y) = |x-y| = -(x-y) = y-x = |y-x| = d(y,x).$$

Portanto, $d(x,y) = d(y,x)$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

iv)

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x-z| \\ &= |x-y+y-z| \\ &\overset{(2.1)}{\leq} |x-y| + |y-z| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Logo, a reta é um espaço métrico com a métrica d.

Exemplo 2.8 *Neste exemplo definiremos três métricas, ou seja, três maneiras diferentes de definir distância entre dois pontos em* $\mathbb{R}^n$. *Assim, com o mesmo conjunto* $\mathbb{R}^n$, *teremos três espaços métricos diferentes. Os pontos de* $\mathbb{R}^n$ *são as sequências* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *sendo cada uma das* n *coordenadas* x_i *um número real. Assim, dados* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$, *definimos* $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *por*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ d'(x,y) &= |x_1-y_1| + \cdots + |x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i| \\ d''(x,y) &= max\{|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|\} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i-y_i| \end{aligned}$$

Podemos perceber que se n=1,

$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|,$$

$$d'(x,y) = |x-y|,$$

$$d''(x,y) = max\{|x-y|\} = |x-y|,$$

e, portanto,

$$d(x,y) = d'(x,y) = d''(x,y) = |x-y|,$$

ou seja, voltamos ao ***Exemplo 2.7***. *Logo, a reta,* $\mathbb{R}$, *com a métrica* $|x-y|$ *é um caso particular de* $\mathbb{R}^n$ *com as métricas* d, d' *e* d''.

Vamos mostrar que d, d' *e* d'' *são métricas em* $\mathbb{R}^n$.

i)

$$d(x,x) = \sqrt{(x_1-x_1)^2+\cdots+(x_n-x_n)^2} = \sqrt{0+\cdots+0} = 0;$$

$$d'(x,x) = |x_1-x_1|+\cdots+|x_n-x_n| = |0|+\cdots+|0| = 0;$$

$$d''(x,x) = max\{|x_1-x_1|,\ldots,|x_n-x_n|\} = max\{0,\ldots,0\} = 0.$$

ii) Se $x \neq y$, *então, existe* $i \in \{1,\ldots,n\}$, *tal que* $x_i \neq y_i$. *Assim,*

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i-y_i)^2} = |x_i-y_i| > 0;$$

$$d'(x,y) = |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n| \geq |x_i-y_i| > 0;$$

$$d''(x,y) = max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\} \geq |x_i-y_i| > 0.$$

iii)

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} = \sqrt{(y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2} = d(y,x);$$

$$d'(x,y) = |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n| = |y_1-x_1|+\cdots+|y_n-x_n| = d'(y,x);$$

$$d''(x,y) = max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\} = max\{|y_1-x_1|,\ldots,|y_n-x_n|\} = d''(y,x).$$

iv) Seja $z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{R}^n$. *Então,*

$$\begin{aligned}
[d(x,z)]^2 &= \left[\sqrt{(x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2}\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i+y_i-z_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2.
\end{aligned}$$

*Utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (**Teorema 2.6**), temos*

$$\begin{aligned}
[d(x,z)]^2 &\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\\
&= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}\right]^2\\
&= [d(x,y)+d(y,z)]^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $[d(x,z)]^2 \leq [d(x,y)+d(y,z)]^2$ *e, como* $d(x,z)$, $d(x,y)$ *e* $d(y,z)$ *são números reais não negativos, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da desigualdade, obtemos* $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

$$\begin{aligned}
d'(x,z) &= |x_1-z_1|+\cdots+|x_n-z_n|\\
&= |x_1-y_1+y_1-z_1|+\cdots+|x_n-y_n+y_n-z_n|\\
&\overset{(2.1)}{\leq} |x_1-y_1|+|y_1-z_1|+\cdots+|x_n-y_n|+|y_n-z_n|\\
&= d'(x,y)+d'(y,z).
\end{aligned}$$

Sejam $|x_i-y_i| = \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\} = d''(x,y)$ *para algum* $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $|y_j-z_j| = \max\{|y_1-z_1|,\ldots,|x_n-z_n|\} = d''(y,z)$ *para algum* $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, *e* $|x_k-z_k| = \max\{|x_1-z_1|,\ldots,|x_n-z_n\} = d''(x,z)$ *para algum* $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. *Logo,*

$$\begin{aligned}
d''(x,z) &= \max\{|x_1-z_1|,\ldots,|x_n-z_n|\}\\
&= |x_k-z_k|\\
&= |x_k-y_k+y_k-z_k|\\
&\overset{(2.1)}{\leq} |x_k-y_k|+|y_k-z_k|\\
&\leq |x_i-y_i|+|y_j-z_j|\\
&= d''(x,y)+d''(y,z).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{R}^n$ *é espaço métrico com as métricas* d, d' *e* d''.

Observação 2.9 *A métrica* d *é conhecida como distância euclidiana e a métrica* d'' *como distância do máximo. Já a métrica* d', *quando aplicada em* $\mathbb{R}^2$, *é conhecida como distância do* *táxi,*

$$d'(x,y) = d'((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Para a demonstração da **Proposição 2.11**, que fornece uma comparação entre d, d' e d'', precisamos do resultado da **Proposição 2.10**. Em ambas as proposições, utilizaremos a seguinte notação de somatório,

$$\sum_{\substack{i=1,j=2 \\ i<j}}^{n-1,n} a_i \cdot a_j.$$

Essa notação indica uma soma de todos os produtos $a_i \cdot a_j$, para $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, $j \in \{2,\ldots,n\}$, com $i < j$, ou seja,

$$\sum_{\substack{i=1,j=2 \\ i<j}}^{n-1,n} a_i \cdot a_j = a_1 \cdot a_2 + \cdots + a_1 \cdot a_n + a_2 \cdot a_3 + \cdots + a_2 \cdot a_n + \cdots + a_{n-1} \cdot a_n.$$

Proposição 2.10 *Sejam a_i, $i = \{1,2,\ldots,n\}$, números reais. Temos que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left[\sum_{\substack{i=1,j=2 \\ i<j}}^{n-1,n} a_i \cdot a_j\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]^2, \tag{2.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Demonstração. Mostraremos este resultado pelo Princípio de Indução.

Para $n = 2$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} a_i^2 + 2\left[\sum_{\substack{i=1,j=2 \\ i<j}}^{1,2} a_i \cdot a_j\right] &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \\ &= (a_1 + a_2)^2 \\ &= \left[\sum_{i=1}^{2} a_i\right]^2.\end{aligned}$$

Suponhamos agora que a igualdade (2.2) seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + 2\left[\sum_{\substack{i=1,j=2 \\ i<j}}^{k-1,k} a_i \cdot a_j\right] = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i\right]^2. \tag{2.3}$$

Mostraremos agora que (2.2) é válida para $k+1$. Partindo do primeiro membro da igualdade, temos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 + 2\left[\sum_{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}^{k,k+1} a_i \cdot a_j\right] &= \left[\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right] + a_{k+1}^2 + 2\left[\sum_{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}^{k-1,k} a_i \cdot a_j + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot a_{k+1}\right] \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + 2\left[\sum_{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}^{k-1,k} a_i \cdot a_j\right]}_{(2.3)} + 2\left[\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot a_{k+1}\right] + a_{k+1}^2 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{k} a_i\right]^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot a_{k+1}\right] + a_{k+1}^2 \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) + a_{k+1}\right]^2 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right]^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (2.2) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

■

Proposição 2.11 *Sejam d, d' e d'' as métricas definidas no* ***Exemplo 2.8****. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tem-se que*

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y).$$

*Demonstração.*Vamos estudar cada desigualdade separadamente:

$$d''(x,y) \leq d(x,y); \tag{2.4}$$

$$d(x,y) \leq d'(x,y); \tag{2.5}$$

$$d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y). \tag{2.6}$$

i) Por definição,

$$[d(x,y)]^2 = \left[\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2.$$

Por outro lado, existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que

$$d''(x,y) = max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\} = |x_j-y_j|.$$

Então,

$$[d''(x,y)]^2 = |x_j-y_j|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = [d(x,y)]^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, sabendo que uma métrica é sempre um número não negativo, chegamos à desigualdade (2.4).

ii) Para provar a desigualdade (2.5) vamos considerar $a_i = |x_i - y_i|$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = \{1,2,\dots,n\}$ na Proposição 2.10, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2 + 2\left[\sum_{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}^{n-1,n}|x_i-y_i||x_j-y_j|\right] = \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\right]^2. \tag{2.7}$$

Além disso, observemos que a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2 + 2\left[\sum_{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}^{n-1,n}|x_i-y_i||x_j-y_j|\right] \tag{2.8}$$

é sempre verdadeira, pois

$$\left[\sum_{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}^{n-1,n}|x_i-y_i||x_j-y_j|\right] \geq 0.$$

Agora, mostraremos que vale (2.5).

$$
\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &= \left[\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2 \\
&\overset{(2.8)}{\leq} \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2+2\left[\sum_{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}^{n-1,n}|x_i-y_i||x_j-y_j|\right] \\
&\overset{(2.7)}{=} \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\right]^2 \\
&= [d'(x,y)]^2.
\end{aligned}
$$

E, portanto, $d(x,y)\leq d'(x,y)$.

iii) Como $d''(x,y)=max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\}=|x_j-y_j|$, para algum $j\in\{1,\ldots,n\}$, segue que $|x_j-y_j|\geq|x_i-y_i|$, para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
d'(x,y) &= |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n| \\
&\leq \underbrace{|x_j-y_j|+\ldots+|x_j-x_j|}_{n\ vezes} \\
&= n\cdot|x_j-y_j| \\
&= n\cdot max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\} \\
&= n\cdot d''(x,y).
\end{aligned}
$$

Logo, vale (2.6).

■

Considerando $n=2$ na **Proposição 2.11**, temos que a distância euclidiana é menor do que ou igual a distância do táxi, apresentadas na **Observação 2.9**.

2.1 Bolas e esferas

Nem toda bola é redonda! Vejamos por que essa afirmação é verdadeira considerando a definição de bola nas métricas d, d' e d'' definidas no **Exemplo 2.8** da seção anterior.

Definição 2.12 *Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r, ou seja,*

$$B(a;r) = \{x \in M;\ d(x,a) < r\}.$$

Definição 2.13 *Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, a bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que ou igual a r, ou seja,*

$$B[a;r] = \{x \in M;\ d(x,a) \leq r\}.$$

Definição 2.14 *Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, a esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é igual a r, ou seja,*

$$S(a;r) = \{x \in M;\ d(x,a) = r\}.$$

A partir das definições acima, temos que $B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$ (união disjunta).

Exemplo 2.15 *Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$, pois a condição $|x-a| < r$ equivale a $-r < x-a < r$, ou seja, $a-r < x < a+r$. Analogamente, a bola fechada $B[a;r]$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$ e a esfera $S(a;r)$ tem apenas dois pontos: $a-r$ e $a+r$.*

Vejamos nos próximos exemplos a aplicação dos conceitos de bolas e esferas para as métricas d, d' e d'' definidas no **Exemplo 2.8** considerando o $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_{-}y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}; \\ d'(x,y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|; \\ d''(x,y) &= max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.16 *Pela métrica d, a esfera de centro* $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *e raio r é dada por*

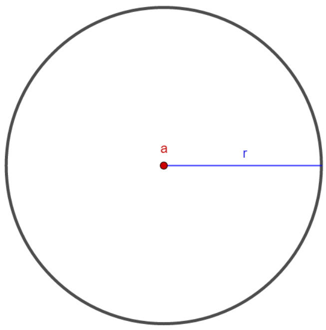
$$S(a;r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) = r &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} = r \\ &\Leftrightarrow (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Graficamente, $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 = r^2$ *representa a circunferência de centro* $a = (a_1, a_2)$ *e raio r, conforme a Figura 2.1.*

Figura 2.1 – Esfera $S(a;r)$ na métrica d.



Fonte: Da autora (2020).

Da mesma forma, a bola aberta de centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *e raio r é dada por*

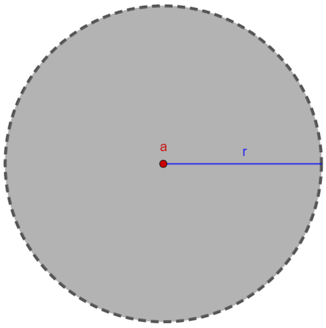
$$B(a;r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) < r &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} < r \\ &\Leftrightarrow (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 < r^2. \end{aligned}$$

Graficamente, $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 < r^2$ *representa o interior da circunferência de centro* $a = (a_1, a_2)$ *e raio r, como mostra a Figura 2.2.*

Figura 2.2 – Bola aberta $B(a;r)$ na métrica d.



Fonte: Da autora (2020).

E a bola fechada de centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e raio r é dada por

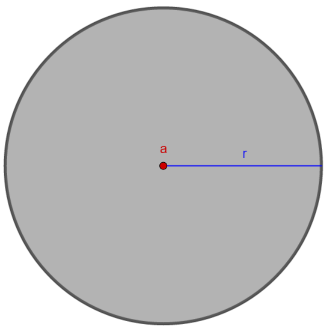
$$B[a;r] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) \leq r \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} \leq r \\ &\Leftrightarrow \quad (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 \leq r^2. \end{aligned}$$

Graficamente, $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2$ representa o círculo de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r, apresentado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Bola fechada $B[a;r]$ na métrica d.



Fonte: Da autora (2020).

Exemplo 2.17 *Pela métrica d', a esfera de centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e raio r é dada por*

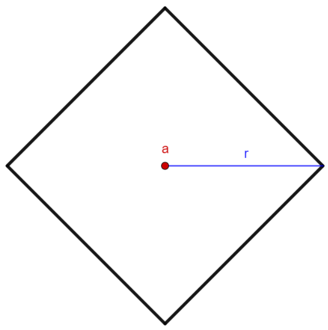
$$S(a;r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ d'((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r\},$$

ou seja,

$$d'(x_1,x_2),(a_1,a_2)) = r \Leftrightarrow |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r.$$

*Assim, $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r$ representa, geometricamente, os lados de um quadrado de diagonais medindo $2r$, paralelas aos eixos coordenados, centro em $a = (a_1,a_2)$ e com vértices nos pontos $i_1 = (a_1 + r, a_2)$, $i_2 = (a_1, a_2 + r)$, $i_3 = (a_1 - r, a_2)$ e $i_4 = (a_1, a_2 - r)$, conforme a Figura 2.4. Veja o porque disto na construção geométrica de $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r$ apresentada no **Apêndice A**.*

Figura 2.4 – Esfera $S(a;r)$ na métrica d'.



Fonte: Da autora (2020).

Da mesma forma, a bola aberta de centro $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ e raio r é dada por

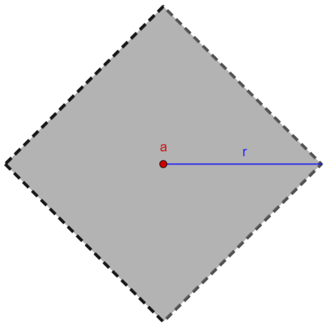
$$B(a;r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;\ d'((x_1,x_2),(a_1,a_2)) < r\},$$

ou seja,

$$d'((x_1,x_2),(a_1,a_2)) < r \Leftrightarrow |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r.$$

Graficamente, $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r$ representa o interior de um quadrado de centro $a = (a_1,a_2)$, diagonais de comprimento $2r$ paralelas aos eixos coordenados e vértices nos pontos $i_1 = (a_1 + r, a_2)$, $i_2 = (a_1, a_2 + r)$, $i_3 = (a_1 - r, a_2)$ e $i_4 = (a_1, a_2 - r)$, como mostra a Figura 2.5.

Figura 2.5 – Bola aberta $B(a;r)$ na métrica d'.



Fonte: Da autora (2020).

E a bola fechada de centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e raio r é dada por

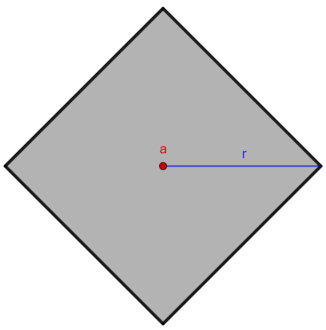
$$B[a;r] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ d'((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r\},$$

ou seja,

$$d'((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r \Leftrightarrow |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r.$$

Graficamente, $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r$ representa um quadrado (interior e bordas) de centro $a = (a_1, a_2)$, diagonais de comprimento $2r$ paralelas aos eixos coordenados e vértices nos pontos $i_1 = (a_1 + r, a_2)$, $i_2 = (a_1, a_2 + r)$, $i_3 = (a_1 - r, a_2)$ e $i_4 = (a_1, a_2 - r)$, apresentado na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Bola fechada $B[a;r]$ na métrica d'.



Fonte: Da autora (2020).

Exemplo 2.18 *Pela métrica d'', a esfera de centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e raio r é dada por*

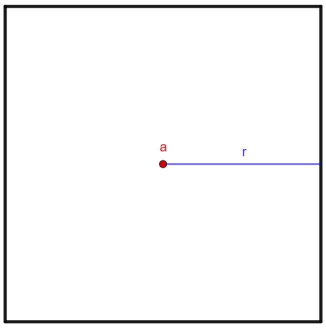
$$S(a;r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ d''((x_2, x_2), (a_1, a_2)) = r\},$$

ou seja,

$$d''((x_1,x_2),(a_1,a_2)) = r \Leftrightarrow max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\} = r \Leftrightarrow \begin{cases} |x_1-a_1| = r \quad e \quad |x_2-a_2| \leq r \\ \qquad ou \\ |x_2-a_2| = r \quad e \quad |x_1-a_1| \leq r. \end{cases}$$

Assim, $max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\}$ *representa, geometricamente, os lados, medindo* $2r$ *e paralelos aos eixos coordenados, de um quadrado com centro em* $a = (a_1,a_2)$ *e com vértices nos pontos* $j_1 = (a_1+r, a_2+r)$, $j_2 = (a_1+r, a_2-r)$, $j_3 = (a_1-r, a_2+r)$ *e* $j_4 = (a_1-r, a_2-r)$, *conforme a Figura 2.7. Veja o porque disto na construção geométrica de* $\max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\} = r$ *apresentada no* ***Apêndice B***.

Figura 2.7 – Esfera $S(a;r)$ na métrica d''.



Fonte: Da autora (2020).

Da mesma forma, a bola aberta de centro $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ *e raio r é dada por*

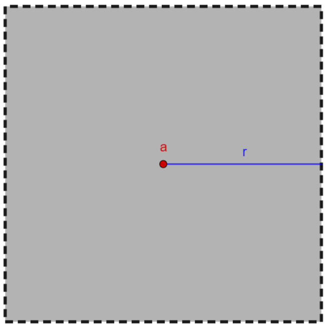
$$B(a;r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ d''((x_1,x_2),(a_1,a_2)) < r\},$$

ou seja,

$$d''((x_1,x_2),(a_1,a_2)) < r \Leftrightarrow |x_1-a_1| < r \ e \ |x_2-a_2| < r.$$

Graficamente, $|x_1-a_1| < r$ *e* $|x_2-a_2| < r$ *representam o interior de um quadrado de centro* $a = (a_1,a_2)$, *lados de comprimento* $2r$ *paralelos aos eixos coordenados e vértices nos pontos* $j_1 = (a_1+r, a_2+r)$, $j_2 = (a_1+r, a_2-r)$, $j_3 = (a_1-r, a_2+r)$ *e* $j_4 = (a_1-r, a_2-r)$, *como mostra a Figura 2.8.*

Figura 2.8 – Bola aberta $B(a;r)$ na métrica d''.



Fonte: Da autora (2020).

E a bola fechada de centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e raio r é dada por

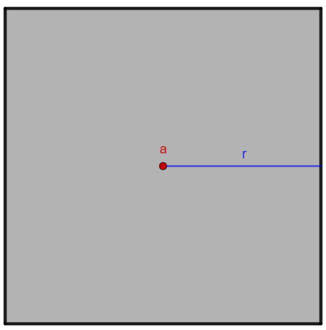
$$B[a;r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ d''((x_1,x_2),(a_1,a_2)) \leq r\},$$

ou seja,

$$d''((x_1,x_2),(a_1,a_2)) \leq r \Leftrightarrow |x_1 - a_1| \leq r \text{ e } |x_2 - a_2| \leq r.$$

Graficamente, $|x_1 - a_1| \leq r$ e $|x_2 - a_2| \leq r$ representam um quadrado (interior e bordas) de centro $a = (a_1, a_2)$, lados de comprimento $2r$ paralelos aos eixos coordenados e vértices nos pontos $j_1 = (a_1 + r, a_2 + r)$, $j_2 = (a_1 + r, a_2 - r)$, $j_3 = (a_1 - r, a_2 + r)$ e $j_4 = (a_1 - r, a_2 - r)$, apresentado na Figura 2.9.

Figura 2.9 – Bola fechada $B[a;r]$ na métrica d''.



Fonte: Da autora (2020).

Proposição 2.19 *Dados os pontos $a \neq b$ em um espaço métrico M, sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s \leq d(a,b)$. Então as bolas abertas $B(a;r)$ e $B(b;s)$ são disjuntas.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que exista $x \in B(a;r) \bigcap B(b;s)$, ou seja, que as bolas abertas $B(a;r)$ e $B(b;s)$ não sejam disjuntas. Dessa forma, $d(a,x) < r$ e $d(x,b) < s$.

Então,

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,x) + d(x,b) \\ &< r + s \\ &\leq d(a,b), \end{aligned} \tag{2.9}$$

sendo que a desigualdade (2.9) decorre da hipótese.

Assim, chegamos que $d(a,b) < d(a,b)$, uma contradição. Portanto, $B(a;r)$ e $B(b;s)$ são disjuntas.

■

Proposição 2.20 *Dados os pontos $a \neq b$ em um espaço métrico M, sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s < d(a,b)$. Então as bolas fechadas $B[a;r]$ e $B[b;s]$ são disjuntas.*

A demonstração da **Proposição 2.20** é totalmente análoga à da **Proposição 2.19**.

3 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DO TÁXI

Neste capítulo falaremos sobre nosso objeto de estudo, a geometria do táxi. Para isto, iniciaremos explicando sobre a classificação desta geometria.

Como a geometria do táxi é classificada como uma geometria não euclidiana, devemos entender o que é uma geometria deste tipo, mas para isto, falaremos resumidamente da geometria euclidiana, para depois tratarmos da geometria não euclidiana. Finalmente, introduziremos a geometria do táxi, relacionando os conceitos de espaços métricos estudados no **Capítulo 2** e fazendo um paralelo com a geometria euclidiana.

3.1 Geometria euclidiana

Ao estudarmos a História da Matemática, em especial em relação ao surgimento da geometria, o principal nome é de Euclides, matemático grego que viveu por volta do ano 300 a.C. Ele foi criador de uma obra chamada “Os Elementos”, constituída por 13 livros. Nesta obra, segundo Leivas (2013, p. 647–648), “consta um tratado de Matemática, de forma organizada, especialmente da geometria, que permeou o conhecimento por mais de dois mil anos” onde ele sintetizou o que já havia de conhecimento geométrico em axiomas, postulados e teoremas.

Abaixo segue a transcrição dos axiomas e postulados de Euclides conforme apresenta Coutinho (2018, p. 2–3).

Axiomas:

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais.
3. Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados:

1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos a vontade.
2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.
3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.

4. Todos os ângulos retos são iguais.

5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto de mesmo lado.

Coutinho (2018, p. 3) apresenta ainda uma forma alternativa da escrita do quinto postulado: "Por um ponto P exterior a uma reta m, existe uma única reta paralela à reta m".

"Com essas afirmações, Euclides criou o primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico, a geometria euclidiana", afirma Presmic (2014, p. 3). Ele afirma ainda que, por muito tempo, esse modelo pareceu ser um encadeamento lógico perfeito, até que estudos mais aprofundados sobre sistemas axiomáticos mostraram problemas na obra. Nestes estudos, ficaram determinados que um sistema axiomático apresente três propriedades enumeradas ainda por Presmic (2014, p. 3):

> - Completude: tudo que será usado na teoria está apropriadamente contido nos axiomas, de maneira que não haja hipóteses implícitas;
> - Consistência: é impossível deduzir dois teoremas contraditórios dos axiomas;
> - Independência: nenhum axioma é consequência de alguma combinação dos demais.

Dessa forma, havia uma necessidade de reformulação das obras de Euclides, já que elas não satisfaziam tais propriedades axiomáticas, "uma vez que suas demonstrações eram cheias de apelos à intuição, com hipóteses implícitas" conforme alega Presmic (2014, p. 3). Foi então que,

> David Hilbert (1862-1943) fez uma reconstrução rigorosa de Os Elementos em sua obra Fundamentos da Geometria, esclarecendo os problemas lógicos com uma nova proposta de noções primitivas e axiomas. Hilbert tomou como conceitos primitivos o ponto, a reta e o plano e os considera interligados a duas relações não definidas: "estar entre" e "congruêcia". Também elaborou o primeiro conjunto completo de axiomas da geometria euclidiana, subdividido-os como axiomas de incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade. Em 1904, Hilbert provou que a Geometria Euclidiana proposta por ele era tão consistente quanto a aritmética. (PRESMIC, 2014, p. 3)

3.2 Geometrias não euclidianas

Por volta do século XIX, muitos matemáticos tentaram provar o quinto postulado de Euclides através dos outros quatro postulados, acreditando que este não se tratava de um postulado e sim de um teorema que precisava ser demonstrado. Nesse contexto, Leivas (2013, p. 648) afirma que

> [...] matemáticos do século XIX perceberam que esse postulado era independente dos quatro primeiros e que havia sistemas geométricos em que ele, da forma como enunciado por Euclides, não se coadunava, sendo substituído por outro, o qual possibilitava criar um sistema geométrico consistente e perfeitamente compatível. Isso fazia parte da denominada crise dos Fundamentos da Matemática, pois a concepção de mundo não era mais a euclidiana.

Na tentativa de provar este quinto postulado, alguns matemáticos chegaram a novos conceitos e, três dentre eles, independentemente, desenvolveram estudos sobre uma nova geometria tão consistente quanto a euclidiana: a geometria hiperbólica, e foram Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemão, János Bolyai (1802-1860), matemático húngaro e Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), matemático russo, sendo o último responsável por publicar o primeiro trabalho sobre o tema. Leivas (2013, p. 649), pontua que os princípios da geometria euclidiana e da geometria hiperbólica se diferenciavam em pontos como: "a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que 180º; dada uma reta e um ponto fora dela, existe mais do que uma paralela passando pelo ponto e que não a intersecciona".

Ainda durante o século XIX, Georg Friedrich Bernnhard Riemann (1826-1866), matemático alemão, criou uma nova estrutura geométrica, diferente da geometria euclidiana e também da geometria hiperbólica e a esta foi dado o nome de geometria elíptica. Nessa estrutura, ainda segundo Leivas (2013, p. 649), "a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior do que 180º, [...]. Dados dois pontos distintos, é possível obter mais do que uma reta distinta unindo-os. [...] dada uma reta e um ponto fora dela, não existe paralela a ela passando pelo ponto".

A geometria hiperbólica e a geometria elíptica foram denominadas por Gauss de geometrias não euclidianas. A partir daí surgiram outras geometrias não euclidianas, e uma delas veremos a seguir: a geometria do táxi.

3.3 Geometria do táxi

Como já falamos um pouco dos Espaços Métricos e fizemos um apanhado sobre as geometrias não euclidianas, podemos tratar de uma geometria diferente e talvez nova, mas muito intuitiva: a geometria do táxi, que surgiu em meados do século XIX, e apesar de no seu surgimento ser tratada como uma geometria euclidiana, hoje é considerada em várias literaturas como uma geometria não euclidiana, este é o caminho que seguiremos, e adiante veremos a razão dessa classificação.

Gusmão, Sakaguti e Pires (2017) afirmam que a geometria do táxi teve início com os estudos relacionados à topologia, do russo Hermann Minkowski (1864-1909), e que em 1975 este tema foi formalizado por Eugene F. Krause em seu livro *"Táxicab geometry: an adventure in non-euclidean geometry"*. Ainda, segundo Gusmão, Sakaguti e Pires (2017), neste livro, Krause traz a geometria do táxi a partir de dois pontos de vista: um deles é sobre a perspectiva educacional para iniciantes do estudo da geometria, e o outro é sob o aspecto de ser um conteúdo de grande aplicação prática e cotidiana.

A geometria do táxi trabalha com a distância entre dois pontos, mas usando uma métrica diferente da euclidiana. Presmic (2014, p. 14) afirma que

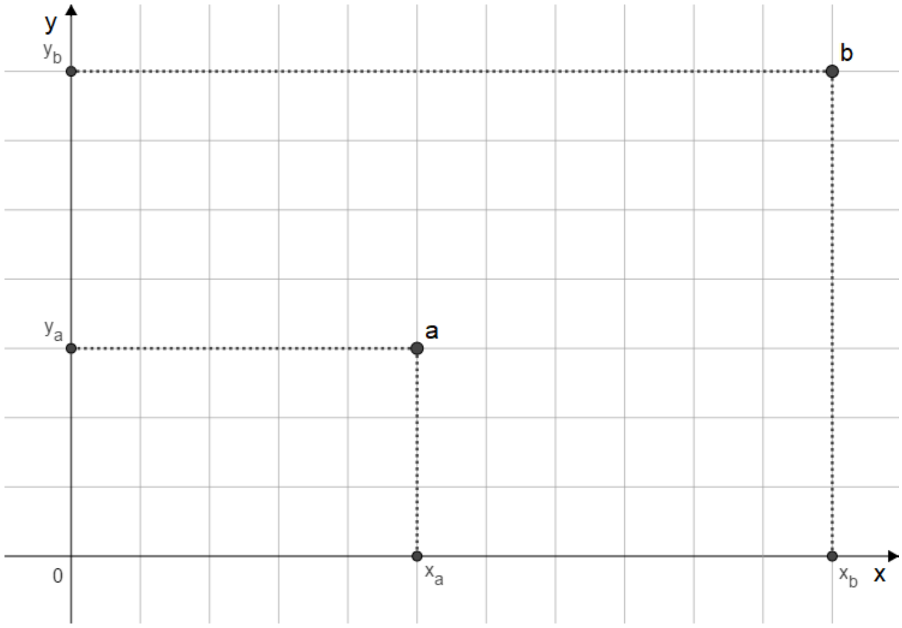
> A métrica euclidiana dominou a visão de mundo natural e a noção de distância "por linha reta" garantiu o estável desenvolvimento da geometria euclidiana. As geometrias ditas não euclidianas podem utilizar-se de outras métricas, muitas vezes até mais adequadas, como a interessante geometria do taxista.

Minkowski desenvolveu a geometria do táxi com o objetivo de estudar o deslocamento em uma cidade ideal, onde as ruas são todas paralelas e perpendiculares, semelhante a uma malha quadriculada ou ainda ao plano cartesiano. O deslocamento realizado por pedestres ou veículos nessa cidade ideal nem sempre pode ser representado por uma única reta que liga o ponto de partida ao ponto de chegada, muitas vezes ele é formado por uma combinação de segmentos horizontais e verticais, simulando as curvas do percurso. Dessa forma, a geometria do táxi, ainda que elaborada para uma "cidade ideal" representa bem melhor a realidade nas ruas de uma cidade comum do que a geometria euclidiana.

Para entendermos melhor a geometria do táxi, vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 3.1 *Consideremos os pontos $a = (x_a, y_a)$ e $b = (x_b, y_b)$ na malha quadriculada da Figura 3.1. Suponhamos que as linhas sejam ruas e que precisamos sair de a e chegar em b. Como calcular este percurso?*

Figura 3.1 – Malha contendo os pontos *a* e *b*.

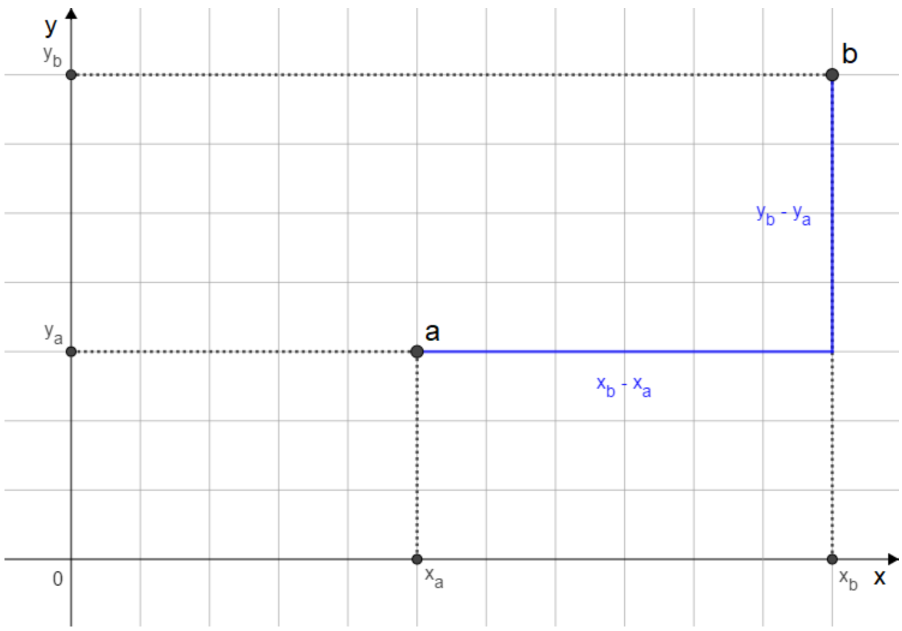


Fonte: Da autora (2020).

Para calcularmos o trajeto feito para se deslocar de a até b, ou seja, o quanto alguém andou para realizá-lo, como apresenta a Figura 3.2, considerando que somente as linhas da malha são "caminhos" possíveis, devemos somar o deslocamento horizontal ao vertical. Matematicamente, temos:

$$d = (x_b - x_a) + (y_b - y_a).$$

Figura 3.2 – Deslocamento entre os pontos *a* e *b* passando pelas linhas.



Fonte: Da autora (2020).

Nem sempre os deslocamentos são positivos, pois consideramos as coordenadas dos pontos de partida e chegada, e um deslocamento negativo só indica que ele foi realizado na direção contrária ao crescimento do eixo. Assim, a distância do táxi entre dois pontos $a = (x_a, y_a)$ e $b = (x_b, y_b)$, $a, b \in \mathbb{R}^2$, representada por d_t, é dada por:

$$d_t = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|,$$

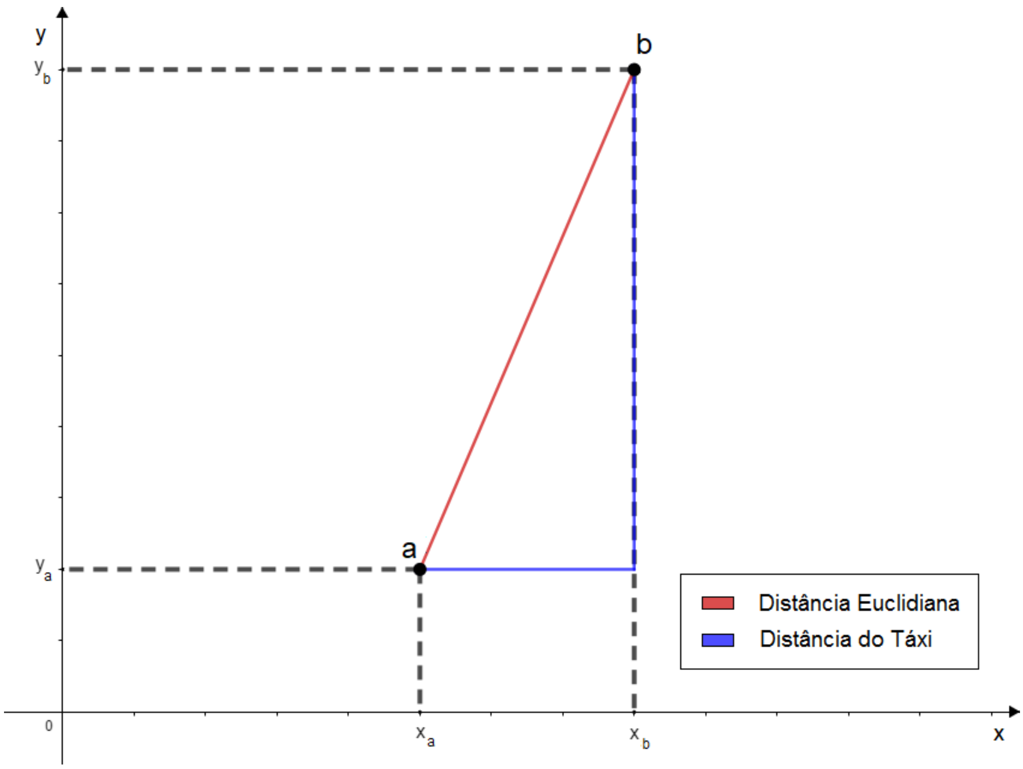
que é a métrica d' em $\mathbb{R}^2$, conforme a **Observação 2.9**.

Paralelamente, a distância euclidiana, também apresentada na **Observação 2.9** como a métrica d em $\mathbb{R}^2$, agora será representada por d_e, e expressa por:

$$d_e = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Vejamos na Figura 3.3 a distância euclidiana e a distância do táxi entre dois pontos $a = (x_a, y_a)$ e $b = (x_b, y_b)$.

Figura 3.3 – Distância euclidiana e distância do táxi entre os pontos a e b.



Fonte: Da autora (2020).

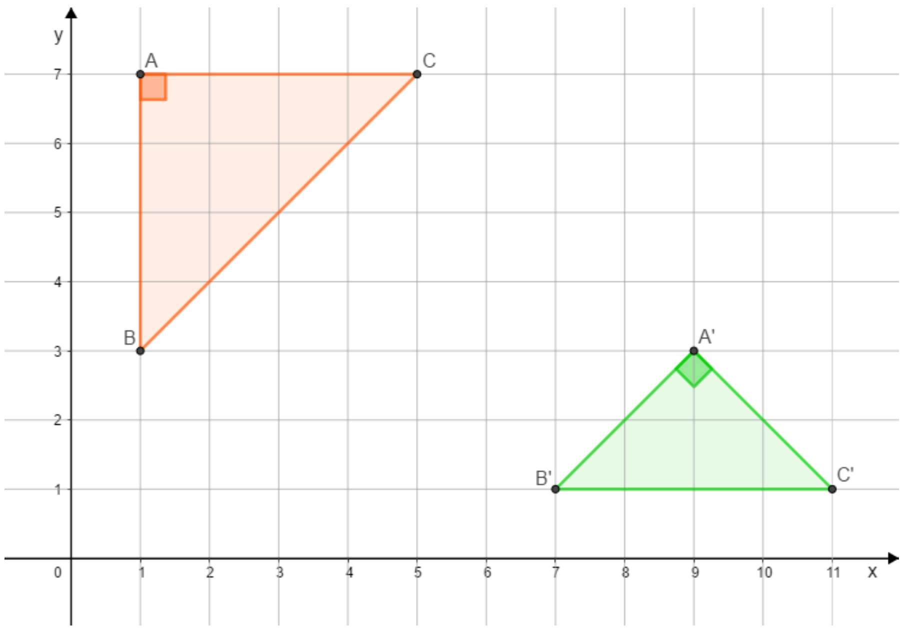
Sabendo agora que $d_e = d$ e $d_t = d'$, tudo que foi estudado para as métricas d e d' pode ser aplicado e considerado provado para d_e e d_t. Inclusive, os estudos sobre bolas e esferas realizados para d' também devem ser considerados válidos e de grande importância para a geometria do táxi. Devemos frisar também, a importância da desigualdade (2.5) da **Proposição 2.11**, afirmando que $d_e \leq d_t$.

3.3.1 Por que a geometria do táxi é uma geometria não euclidiana?

A partir das literaturas analisadas para escrever este trabalho, vimos que não há um consenso do ponto que faz com que a geometria do táxi seja uma geometria não euclidiana. Alguns autores, como Gusmão, Sakaguti e Pires (2017) e Oliveira (2014) trazem uma explicação bem intuitiva para o fato da geometria do táxi ser classificada como uma geometria não euclidiana, que se dá pelo uso de uma métrica para definir a distância entre dois pontos, diferente da métrica utilizada na geometria euclidiana.

Outros autores, como Loiola (2014), afirmam que a geometria do táxi nega a geometria euclidiana pela não validade do axioma de congruências de triângulo referente ao caso lado-ângulo-lado (LAL). Para observar essa situação vamos considerar dois triângulos (definidos na geometria euclidiana), conforme a Figura 3.4, cujos lados estão medidos pela distância do táxi.

Figura 3.4 – Negação ao axioma de congruência - caso LAL.



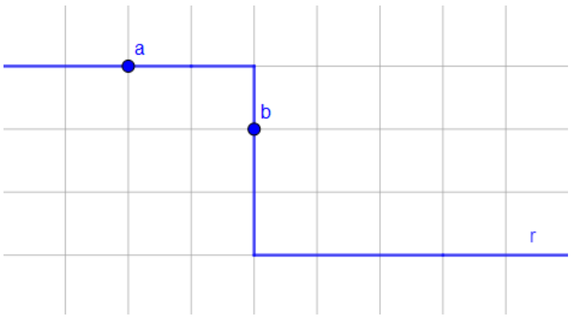
Fonte: Da autora (2020).

Comparando os triângulos, temos que o lado AB possui a mesma medida (distância do táxi) que o lado $A'B'$. Os ângulos $B\hat{A}C$ e $B'\hat{A}'C'$ são ambos retos, e os lados AC e $A'C'$ também têm a mesma medida (distância do táxi). Assim, pelo caso de congruência LAL, os triângulos ABC e $A'B'C'$ deveriam ser congruentes. Porém, na distância do táxi, o lado BC tem medida 8 unidades, enquanto o lado $B'C'$ mede 4 unidades. Portanto os dois triângulos não são congruentes e o axioma de congruência no caso LAL falha na geometria do táxi.

Uma terceira versão para a geometria do táxi não se caracterizar como uma geometria euclidiana, que é a versão acolhida por este trabalho, trazida por autores como Fernandes (2017) e Cruz (2015), é que, paralelamente à geometria hiperbólica e à geometria elíptica, a geometria do táxi também nega o quinto postulado de Euclides. Porém, para isso acontecer, precisamos definir um conceito de reta para a geometria do táxi, conforme descrito abaixo, e apresentado na Figura 3.5.

> Em geometria euclidiana, reta é um conceito primitivo, ou seja, sem definição formal. Em geometria do táxi: a reta é a união de viagens diretas, ou seja, é uma viagem estendida, no sentido de que se considera sempre o caminho mais curto entre dois pontos quaisquer dessa viagem. (ABREU; BARROSO; MIRANDA, apud FERNANDES, 2017, p. 30)

Figura 3.5 – Reta r na geometria do táxi.

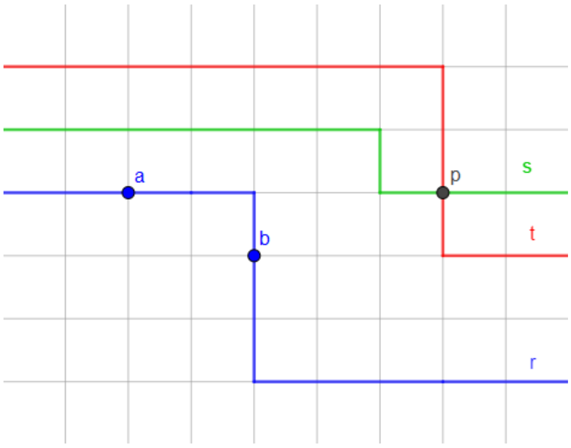


Fonte: Da autora (2020).

Em relação à definição de retas paralelas na geometria do táxi, usamos a mesma definição da geometria euclidiana, ou seja, retas paralelas são retas que não se interceptam.

Dessa forma, a geometria do táxi contraria o quinto postulado de Euclides e, segundo Cruz (2015, p. 17), o substitui afirmando que "por um ponto dado P, exterior à reta r, ambos em um mesmo plano, existem mais de uma reta paralela a esta reta".

Figura 3.6 – Retas s e t, passando pelo ponto p e paralelas à reta r.



Fonte: Da autora (2020).

Na Figura 3.6 temos duas retas, s e t passando pelo ponto p, ambas paralelas à reta r, o que não ocorre na geometria euclidiana.

3.3.2 Número de caminhos na geometria do táxi

Uma questão pertinente à geometria do táxi, quando tratamos de sua distância, é querer saber quantos são os possíveis caminhos entre dois pontos, pois,

> No modelo euclidiano a distância entre dois pontos é fornecida como a medida de um segmento de reta que une esses dois pontos, desse modo existe um único caminho para percorrer essa distância. Já no modelo do táxi podemos ter vários caminhos que fornecem a mesma medida de distância entre dois pontos. (LOIOLA, 2014, p. 46)

Uma maneira de resolver esta questão, é recorrer aos estudos de análise combinatória considerando o conceito de permutação com repetição. Para entendermos melhor, vejamos o **Exemplo 3.2**. Mas, antes, consideremos,

$V =$ decisão de realizar um movimento na direção vertical,

$H =$ decisão de realizar um movimento na direção horizontal,

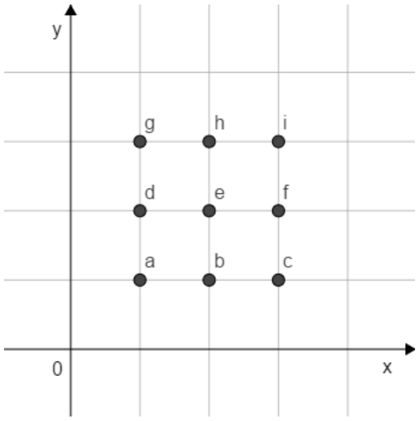
$v =$ quantidade de vezes que posso escolher a direção vertical entre dois pontos,

$h =$ quantidade de vezes que posso escolher a direção horizontal entre dois pontos,

$n = d_t = v + h$, e

$N =$ números de caminhos possíveis entre dois pontos, cujo resultado de sua distância do táxi seja igual a n.

Figura 3.7 – Pontos na malha quadriculada.



Fonte: Da autora (2020).

Exemplo 3.2 *Conforme a Figura 3.7,*

a) Quantos são os caminhos possíveis, passando pelas linhas da malha, entre os pontos a e b?

b) Quantos são os caminhos possíveis, passando pelas linhas da malha, entre os pontos a e e?

c) Quantos são os caminhos possíveis, passando pelas linhas da malha, entre os pontos a e i?

Solução

a) Entre os pontos a e b, só há 1 caminho possível, e o deslocamento é na direção horizontal.

b) Entre os pontos a e e temos duas opções:

$a \to b \to e$, com os movimentos $H \to V$,

$a \to d \to e$, com os movimentos $V \to H$.

c) Entre os pontos a e i, temos seis opções:

$a \to b \to c \to f \to i$, com os movimentos $H \to H \to V \to V$,

$a \to b \to e \to f \to i$, com os movimentos $H \to V \to H \to V$,

$a \to b \to e \to h \to i$, com os movimentos $H \to V \to V \to H$,

$a \to d \to e \to f \to i$, com os movimentos $V \to H \to H \to V$,

$a \to d \to e \to h \to i$, com os movimentos $V \to H \to V \to H$,

$a \to d \to g \to h \to i$, com os movimentos $V \to V \to H \to H$.

Com o **Exemplo 3.2**, podemos perceber que o número de caminhos entre dois pontos depende de quantos deslocamentos horizontais e quantos deslocamentos verticais são possíveis entre os pontos.

Assim, considerando dois pontos do plano, cada caminho entre eles consiste em uma escolha de v deslocamentos verticais e h deslocamentos horizontais. Descobrir quantos caminhos são possíveis é uma situação análoga a encontrar quantos anagramas tem a palavra

$$\underbrace{V \dots V}_{v\,vezes}\underbrace{H \dots H}_{h\,vezes}.$$

E, para isso, recorremos à permutação com repetição, pois V repete v vezes e H repete h vezes. Portanto,

$$N = P_n^{v,h} = \frac{n!}{v!h!}.$$

No **Exemplo 3.2**, item c), temos que

$$N = P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6,$$

como já sabíamos.

4 TRABALHOS RELACIONADOS

Como o objetivo desta dissertação é elaborar uma sequência de atividades didáticas para a Educação Básica abordando o tema geometria do táxi, iniciamos uma pesquisa, analisando trabalhos que se basearam no assunto para criar conteúdos didáticos.

No acervo do PROFMAT encontramos algumas dissertações que tratam da geometria do táxi, com contextos diferentes, além de direcionamentos e formatos distintos, contendo uma gama de atividades a se aplicar em sala de aula, desde a familiarização do aluno com o conceito de geometria do táxi através da sua distância e a comparação com a distância euclidiana, até conceitos e atividades que englobam parábolas, elipses, mediatrizes e análise combinatória. Todas elas apresentam a geometria do táxi como uma geometria não euclidiana e explanam sobre ela.

Loiola (2014) apresenta um trabalho interdisciplinarizado com geografia, desenvolvendo atividades de geometria urbana para a aplicação da geometria do táxi.

Cruz (2015) traz toda a formalização da cônica elipse na geometria do táxi direcionada para a educação básica, mas não propõe atividade.

Fava Neto (2013) propõe uma sequência de atividades englobando as distâncias euclidiana e do táxi a fim de estimular o aprendizado do aluno fazendo conexões com o cotidiano.

Caldato (2013) traz as possibilidades de estudar Análise Combinatória através da geometria do táxi utilizando da metodologia de resolução de problemas além de um jogo como recurso didático.

Santos (2016) aborda o conceito de diagrama de Voronoi pelas métricas euclidiana e do táxi através de atividades que explorem os conceitos de circunferência e mediatriz nas duas geometrias.

Pavani (2017) propõe atividades para consolidação de conteúdos fazendo a comparação entre a geometria do táxi com a geometria euclidiana, usando elementos como circunferência e parábola em ambas as geometrias.

Oliveira (2014) apesenta conceitos de círculo, mediatriz, elipse, hipérbole e parábola na geometria do táxi e sugere atividades para aplicação na educação básica.

Toledo (2018) traz uma abordagem das geometrias não euclidianas com enfoque na geometria do táxi e a geometria esférica como conteúdos para aplicação no Ensino Fundamental, fazendo um paralelo entre essas geometrias e a geometria euclidiana.

Azevedo (2013) trabalha com as geometrias euclidianas e apresenta atividades sobre geometria hiperbólica e elíptica, e traz um apanhado teórico da geometria do táxi mas não apresenta atividades.

Presmic (2014) apresenta um trabalho com a formalização das geometrias não euclidianas se aprofundando na geometria do táxi e a geometria esférica, sugerindo a aplicação desses conceitos na Educação Básica e traz um capítulo sobre a matemática do GPS que aplica exatamente essas duas geometrias.

Fernandes (2017) conceitua os mesmos lugares geométricos abordados por Oliveira (2014) e apresenta uma sequência de atividades didáticas com o auxilio do software Geogebra. Além disso, Fernandes (2017) traz ainda, na introdução de seu trabalho, um apanhado de outras pesquisas a nível de pós-graduação que tratam desde as geometrias não euclidianas como um todo a trabalhos que trazem especificamente a geometria do táxi.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentamos a sequência didática elaborada para introduzir a geometria do táxi para alunos da Educação Básica. A sequência didática está dividida em cinco atividades distintas mas interligadas, que sugerimos ao professor realizá-las na ordem em que são colocadas para um melhor resultado. Apresentaremos cada atividade, especificando os detalhes de cada uma, para o caso do professor desejar trabalhar com algumas delas isoladamente.

Nossa sequência didática é criada em torno de uma personagem, Ana, que, em situações cotidianas, vai levantando questões pertinentes à geometria do táxi e apresentando vários conteúdos. Nas duas primeiras atividades Ana dialoga com o aluno introduzindo a distância do táxi. Nas outras atividades Ana é personagem de situações cotidianas que levam os alunos a trabalharem com o conceito de circunferência do táxi, sempre relacionando a geometria do táxi com a geometria euclidiana.

Decidimos elaborar uma sequência didática, pois,

> A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido. (PERETTI; COSTA, 2013, p. 6)

Além disso, Peretti e Costa (2013) afirmam ainda que uma sequência didática deve apresentar ao aluno atividades práticas, lúdicas e com material diferenciado, trazendo desafios cada vez maiores de forma que o aluno possa construir o conhecimento. Portanto, em nossa sequência, além de atividades escritas utilizando recursos tradicionais, apresentamos duas atividades num ambiente virtual chamado Scratch, e uma atividade utilizando o material manipulativo Geoplano.

O Geoplano é formado por uma placa de madeira (ou material similar), onde são colocados pregos de forma que os pregos formem uma malha quadriculada. Nele são utilizados elásticos para formar figuras com o auxílio dos pregos.

5.1 O uso do Scratch na Educação Básica

Para a elaboração das atividades sugeridas neste trabalho gostaríamos de trazer, para a aplicação em sala de aula, algo diferente do que encontramos nos trabalhos sobre geometria do táxi que analisamos. Assim, pensamos em recorrer a alguma tecnologia para desenvolver parte das atividades e o primeiro recurso que nos vem à mente é o Geogebra. No entanto, vários trabalhos utilizaram este recurso em propostas interessantes, então, surgiu a ideia de trabalharmos com o ambiente Scratch, visto que em nossas buscas não encontramos sugestões de atividades de geometria do táxi utilizando tal ferramenta.

Segundo Silva (2015), o Scratch foi criado em 2004 mas divulgado publicamente somente em 2007, sendo que este se caracteriza como

> [$\cdots$] uma linguagem de programação gratuita que utiliza blocos lógicos, itens de som e imagem, para o desenvolvimento de histórias interativas, jogos e animações que permite o compartilhamento de maneira online de suas criações. O Scratch é um projeto do grupo Lifelong Kindergarten no Media Lab do MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusets), tendo como idealizador Mitchel Resnick. Vale ressaltar que a linguagem Scratch precede a linguagem LOGO, criada no final da década de 1960 pelo também construcionista Seymour Papert, cofundador do MIT. (PEREIRA, 2019, p. 53)

Vários autores, como Queiroz (2018) e Almeida (2020), apontam a importância do uso do Scratch na Educação Básica, inclusive na forma do aluno ser o criador de conteúdo. Mas neste trabalho as atividades foram desenvolvidas e disponibilizadas na plataforma *on-line*, de forma que o aluno possa acessar e realizar tais atividades.

Sobre o uso de tecnologias no ensino de Matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio traziam, ainda em 2006, que

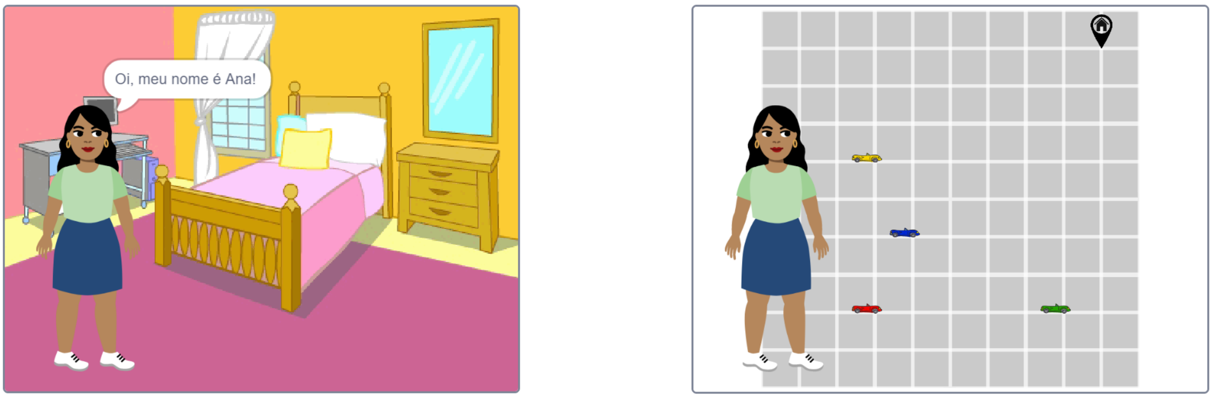
> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Ministério da Educação, 2006, p. 87)

Nos dias atuais a interação entre matemática e tecnologia é ainda mais importante na Educação Básica, pois estamos lidando com alunos totalmente inseridos no ambiente virtual, e, por isso, podemos utilizar deste meio que já é familiarizado por eles. Assim, resolvemos realizar algumas de nossas atividades recorrendo a este ambiente.

5.2 Atividade 1: Carros por aplicativo

Esta é uma atividade introdutória em que o aluno, juntamente com Ana, irá descobrir o que é a distância do táxi e qual sua finalidade. A Figura 5.1 apresenta duas telas do Scratch durante a Atividade 1.

Figura 5.1 – Atividade 1 no Scratch.



Fonte: scratch.mit.edu (2020).

Público alvo:

- alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

- distância euclidiana.

Tempo estimado:

- 10 minutos.

Recursos necessários:

Para a realização desta atividade será necessário computador ou tablet com acesso a internet. A sugestão é que fique um aluno por computador/tablet, mas caso não seja possível, o professor deve agrupar os alunos para que a quantidade de equipamentos os atenda. Caso a escola não possua sala de informática ou tablets para disponibilizar aos alunos, no **Apêndice C** está o roteiro desta atividade adaptado para ser impresso e feito em sala de aula.

Objetivos:

- introduzir o conceito de distância do táxi;
- mostrar diferenças entre a distância do táxi e a distância euclidiana.

Conteúdos explorados:

- distância euclidiana;
- distância do táxi.

Desenvolvimento da atividade:

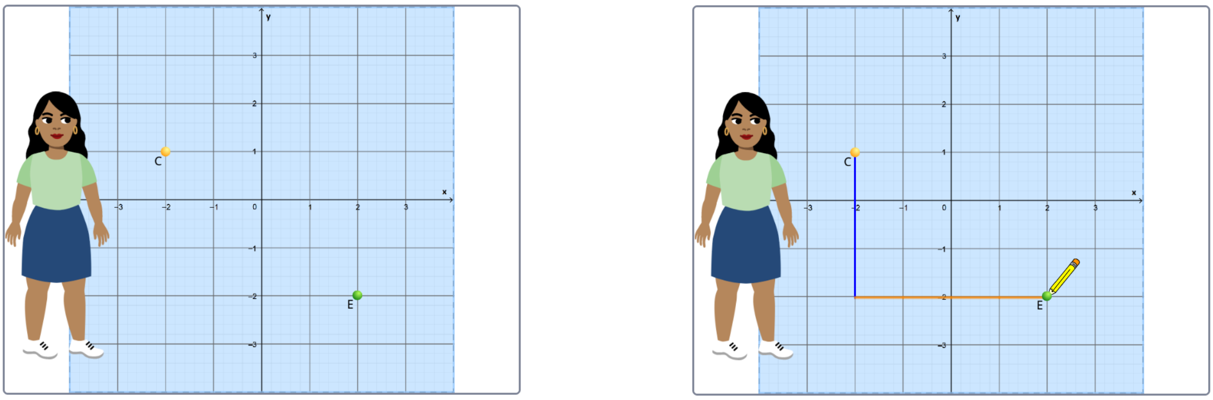
Antes da aplicação da atividade sugerimos ao professor que relembre com os alunos o que é a distância euclidana e como calculá-la.

A Atividade 1, Carros por aplicativo, está disponível em: <https://scratch.mit.edu/projects/472318606>.

5.3 Atividade 2: Distância do táxi

Nesta atividade, Ana propõe que o aluno a ajude a descobrir uma maneira de calcular a distância do táxi. A Figura 5.2 apresenta duas telas do Scratch durante a Atividade 2.

Figura 5.2 – Atividade 2 no Scratch.



Fonte: scratch.mit.edu (2020).

Público alvo:

- alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

- plano cartesiano;
- valor absoluto;
- distância euclidiana;
- permutação com repetição.

Tempo estimado:

- 10 minutos.

Recursos necessários:

Esta atividade utiliza os mesmos recursos da Atividade 1. Caso a escola não possua sala de informática ou tablets para disponibilizar aos alunos, no **Apêndice C** está o roteiro desta atividade adaptado para ser impresso e feito em sala de aula.

Objetivos:

- mostrar quando a distância euclidiana coincide com a distância do táxi;
- calcular o número de caminhos possíveis entre dois pontos;
- desenvolver a fórmula para a distância do táxi.

Conteúdos explorados:

- distância euclidiana;
- valor absoluto;
- distância do táxi;
- fatorial;
- permutação com repetição.

Desenvolvimento da atividade:

Antes da aplicação da atividade sugerimos ao professor que relembre com os alunos o conteúdo de permutação com repetição.

A Atividade 2, Distância do táxi, está disponível em: <https://scratch.mit.edu/projects/472318352>.

5.4 Atividade 3: O passeio ciclístico

Os pais de Ana, nossa personagem, têm um sítio, e ela resolveu fazer um piquenique lá com seus amigos. Eles irão de bicicleta, e para isso deverão encontrar a localização do sítio a partir das informações que Ana lhes passou.

Público alvo:

- alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

- plano cartesiano;
- distância euclidiana;
- circunferência euclidiana;
- distância do táxi.

Tempo estimado:

- 50 minutos.

Recursos necessários:

- folha de atividades;
- malha quadriculada.

Todos esses recursos deverão ser entregues pelo professor e estão disponíveis no **Apêndice C**. Sugerimos que a malha quadriculada seja impressa em um tamanho de folha maior, A3, por exemplo, para facilitar o desenvolvimento das atividades pelos alunos.

Objetivos:

- construir o conceito de circunferência do táxi a partir do conceito da circunferência euclidiana.

Conteúdos explorados:

- transformação de unidades de medidas;
- plano cartesiano;
- distância euclidiana;
- distância do táxi;
- circunferência euclidiana;
- circunferência do táxi.

Desenvolvimento da atividade:

Esta atividade deve ser aplicada, preferencialmente, após o aluno já ter realizado as Atividades 1 e 2 no Scratch. Cada aluno receberá o roteiro da atividade no início da aula. O professor deve mediar as dúvidas que possam surgir e ao final da atividade fazer a correção discutindo com os alunos sobre o tema.

Roteiro da atividade a ser entregue para os alunos:

Os pais de Ana são proprietários de um sítio próximo à cidade. Seus amigos resolveram fazer um passeio ciclístico até lá. Ana decidiu ir antes a fim de preparar um piquenique para seus amigos.

Como Ana gosta muito de matemática, deixou os amigos descobrirem como chegar no sítio apenas com algumas informações:

- Bia deverá percorrer 18 quadras de sua casa até o início da estrada que vai para o sítio;
- João também percorrerá 18 quadras de sua casa até o início da mesma estrada;
- Carla percorrerá 16 quadras de sua casa até o início da mesma estrada de terra onde chegarão também Bia e João;
- se Gabi percorrer exatamente 2,5 quilômetros em linha reta (sem fazer curvas), a partir de sua casa, ela chegará ao sítio de Ana (ela também passará pela mesma entrada da estrada de terra que os outros amigos).

Além dessas informações, Ana entregou uma malha quadriculada contendo os eixos x e y. Cada quadra, dentro do perímetro urbano, tem o formato de um quadrado, com medidas de lado de 100 metros.

a) Marque no plano cartesiano os pontos referentes à casa de cada um dos amigos de Ana, sendo:
Bia: $B = (200, 1800)$;
João: $J = (600, 1000)$;
Carla: $C = (1600, 200)$;
Gabi: $G = (500, 1600)$.

b) Marque, na malha quadriculada, alguns pontos que estão a 18 quadras da casa de Bia, da seguinte forma:

- considere somente os trajetos verticais e horizontais, e marque todos os pontos que estão a 18 quadras de B nessas direções;
- marque 2 pontos que estejam a esquerda e acima de B;
- marque 2 pontos que estejam a direita e acima de B;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a direita de B;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a esquerda de B.

Ligue os pontos encontrados. Que figura formou?

c) Marque, na malha quadriculada, alguns pontos que estão a 18 quadras da casa de João, da seguinte forma:

- considere somente os trajetos verticais e horizontais, e marque todos os pontos que estão a 18 quadras de J nessas direções;
- marque 2 pontos que estejam a esquerda e acima de J;
- marque 2 pontos que estejam a direita e acima de J;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a direita de J;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a esquerda de J.

Ligue os pontos encontrados. Que figura formou?

d) Com essas duas marcações é possível encontrar o ponto E (entrada da estrada de terra)?

e) Marque, na malha quadriculada, alguns pontos que estão a 16 quadras da casa de Carla, da seguinte forma:

- considere somente os trajetos verticais e horizontais, e marque todos os pontos que estão a 16 quadras de C nessas direções;
- marque 2 pontos que estejam a esquerda e acima de C;
- marque 2 pontos que estejam a direita e acima de C;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a direita de C;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a esquerda de C.

Ligue os pontos encontrados. Que figura formou?

f) É possível determinar o ponto E (início da estrada de terra) com essas três informações? Se sim, marque o ponto no plano cartesiano e dê as suas coordenadas.

g) Quantos caminhos possíveis Bia, João e Carla podem fazer (separadamente) para chegar até a entrada da estrada de terra, percorrendo a quantidade de quadras que Ana disse?

h) Marque, na malha quadriculada, alguns pontos que estão a 2,5 quilômetros da casa de Gabi, da seguinte forma (transforme em metros antes):

- considere somente os trajetos verticais e horizontais, e marque todos os pontos que estão a 2,5 quilômetros de G nessas direções;
- marque 2 pontos que estejam a esquerda e acima de G;
- marque 2 pontos que estejam a direita e acima de G;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a direita de G;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a esquerda de G.

i) Quando queremos encontrar todos os pontos que estão a 2,5 quilômetros de distância de um ponto G, que figura devemos desenhar? Faça esta figura utilizando os pontos marcados no item anterior.

j) Trace uma reta que passa por G e E (ponto da casa de Gabi e ponto da entrada da estrada de terra respectivamente).

k) O ponto que corresponde à localização do sítio de Ana é a intercessão entre a circunferência de centro G e raio 2,5 quilômetros e a reta que passa por G e E. Existem dois pontos que estão nessa intercessão. Qual deles representa o sítio de Ana? Por quê?

l) Sabendo as coordenadas do sítio de Ana, determine quantos metros os amigos percorrerão do ponto E até o sítio.

m) A figura desenhada no item i) é uma circunferência euclidiana, pois representa todos os pontos que estão a 2,5 quilômetros de G na distância euclidiana. Sabendo que os pontos marcados no item b) são os pontos que estão a uma distância do táxi de 1,8 quilômetros de B, mesmo formando um quadrado, qual figura esse quadrado representa na geometria do táxi?

5.5 Atividade 4: A roseira de Ana

Ana deseja plantar uma roseira no sítio de seus pais. Então ela convida os alunos a encontrar o melhor local para esta roseira.

Público alvo:

- alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

- plano cartesiano;
- áreas de figuras planas;
- distância euclidiana;
- distância do táxi;
- circunferência euclidiana;
- circunferência do táxi.

Tempo estimado:

- 50 minutos.

Recursos necessários:

- folha de atividades;
- malha quadriculada;
- mapa do sítio.

Todos esses recursos deverão ser entregues pelo professor e estão disponíveis no **Apêndice C**.

Objetivos:

- trabalhar com a circunferência do táxi.

Conteúdos explorados:

- transformação de unidades de medidas;
- coordenadas no plano cartesiano;
- áreas de figuras planas;
- distância euclidiana;
- distância do táxi;
- circunferência euclidiana;
- circunferência do táxi.

Desenvolvimento da atividade:

Esta atividade deve ser aplicada, preferencialmente, após o aluno já ter realizado as Atividades 1 e 2 no Scratch, e a Atividade 3 em sala de aula. Estimamos o tempo para sua realização em uma aula de 50 minutos, mas este pode ser ajustado (para mais ou para menos) conforme a necessidade e o desenvolvimento das atividades pelos alunos. Cada aluno receberá o roteiro da atividade no início da aula e o professor deve mediar as dúvidas que possam surgir. Quando os alunos chegarem no item h), o professor deverá entregar o mapa do sítio, contido no **Apêndice C**, esta entrega não deverá ser feita antes, pois no mapa consta a resposta de itens anteriores. Ao final da atividade, o professor deverá fazer a correção discutindo com os alunos sobre o tema geometria do táxi.

Roteiro da atividade a ser entregue para os alunos:

O sítio dos pais de Ana tem uma área de 0,1 hectare.

a) Sabendo-se que um hectare, representado pelo símbolo ha, é uma unidade de medida de área equivalente a 10.000 metros quadrados, quantos metros quadrados possui o sítio dos pais de Ana?

b) O sítio tem a forma de um retângulo e sua base é 15 metros maior que sua altura.

Figura 5.3 – Área do sítio.

Fonte: Da autora (2020).

Qual é a dimensão de seus lados em metros?

c) Ana gostaria muito de plantar uma roseira, no entanto para ficar mais fácil a escolha do local onde plantar resolveu fazer um mapa do sítio utilizando um plano cartesiano. Ela fez de tal forma que dois lados do terreno coincidem com os eixos x e y positivos e o vértice A coincide com a origem do plano cartesiano. Sabendo que as unidades nos eixos são dadas em metros, represente o terreno dos pais de Ana no plano cartesiano.

d) No terreno há um curral e um chiqueiro nas coordenadas $(3,11)$ e $(8,13)$, respectivamente. Represente esses pontos na malha quadriculada.

e) Para plantar a roseira Ana gostaria de escolher um local que dista 3 metros (distância euclidiana) do curral e 4 metros do chiqueiro (distância do táxi). Qual as coordenadas da localização da roseira? (A roseira só poderá ser plantada em pontos que possui como coordenadas números naturais.)

Para descobrir a localização exata da roseira vamos seguir os seguintes passos:

Passo 1: Vamos primeiro descobrir todos os pontos que se encontram a 3 metros do curral utilizando a distância euclidiana. Que figura geométrica encontramos?

Passo 2: Vamos, agora, descobrir todos os pontos que se encontram a 4 metros do chiqueiro utilizando a distância do táxi. Que figura geométrica encontramos?

Passo 3: Qual ponto, cujas coordenadas são números naturais, pertence à interseção das figuras obtidas nos passos 1 e 2? Esse ponto é a localização da roseira.

f) Qual a distância euclidiana do chiqueiro à roseira? Para descobrir esse valor utilize seus conhecimentos a respeito do Teorema de Pitágoras.

g) Após plantar a roseira, Ana foi ao depósito buscar adubo. O depósito encontra-se também a 4 metros do chiqueiro (distância do táxi) e a distância euclidiana entre o chiqueiro e a roseira é a mesma da roseira ao depósito. Apenas essas informações são suficientes para saber a localização exata do depósito? Quantas opções são possíveis para a localização do depósito?

h) Sabendo que o depósito encontra-se no ponto P, dê uma outra informação para que exista apenas uma opção para a localização do depósito.

   Para facilitar a escolha da informação adicional para descobrir a localização do depósito sabemos que no sítio temos, uma baia para os cavalos, um galinheiro, um canil e uma árvore, conforme o mapa que será entregue pelo professor. Peça ao professor o mapa. Complete a legenda do mapa antes de responder este item.

i) Qual a distância que Ana percorre para ir do depósito à roseira?

j) E se considerarmos que ela pode passar somente nas linhas da malha quadriculada, pois essas linhas são os corredores entre os canteiros feitos naquela região, quantos metros ela anda do depósito à roseira?

5.6 Atividade 5: Soluções para o sítio

Seu José, o pai de Ana está com algumas questões para resolver em seu sítio e pediu ajuda para ela. Então ela criou um roteiro para que o aluno possa ajudá-la a solucionar estes problemas utilizando os conhecimentos já obtidos até aqui sobre a distância do táxi em paralelo aos conhecimentos que já tinham da distância euclidiana.

Público alvo:

- alunos do Ensino Médio.

Pré-requistos:

- plano cartesiano;
- distância euclidiana;
- distância do táxi;
- circunferência euclidiana;
- circunferência do táxi.

Tempo estimado:

- 50 minutos.

Recursos necessários:

- folha de atividades;
- mapa do sítio;
- Geoplano que contenha pelo menos a dimensão de 7×7, ou seja, cada lado do Geoplano é formado por 7 pregos (caso a escola não possua Geoplanos nessa dimensão, a atividade pode ser realizada na malha quadriculada);
- elásticos coloridos para o Geoplano, nove para cada Geoplano, se possível em cores diferentes. (Se a atividade for realizada na malha quadriculada, usar lápis de nove cores diferentes para facilitar a visualização).

Todos esses recursos deverão ser entregues pelo professor e estão disponíveis no **Apêndice C**. O aluno pode reutilizar o mesmo mapa do sítio que ele desenvolveu na Atividade 4, caso contrário está disponível para impressão também no **Apêndice C**.

Objetivos:

- consolidar os conhecimentos desenvolvidos nas atividades anteriores.

Conteúdos explorados:

- transformação de unidades de medidas;
- distância euclidiana;
- distância do táxi;
- circunferência euclidiana;
- circunferência do táxi;
- figuras planas.

Desenvolvimento da atividade:

Esta atividade deve ser aplicada, preferencialmente, após o aluno já ter realizado as outras atividades da sequência didática.

Cada aluno receberá um roteiro de atividades no início da aula. Esta atividade deve ser dividida em duas etapas. A primeira delas vai até o item g) e será desenvolvida utilizando o roteiro de atividades e o mapa do sítio. A segunda, a partir do item h), será realizada preferencialmente utilizando o Geoplano. Se a escola não tiver Geoplanos nas dimensões necessárias, esta etapa deve ser realizada na malha quadriculada com o auxílio de lápis de cores diferentes. Neste caso, o professor usará o roteiro de atividades adaptado encontrado no **Apêndice C**.

O professor deve mediar as dúvidas que possam surgir e ao final da atividade, fazer a correção discutindo com os alunos sobre o tema geometria do táxi.

Roteiro da atividade a ser entregue para os alunos:

O pai de Ana decidiu colocar um cão de guarda no sítio. Assim, ele pretende comprar uma corrente e fixá-la no canil, de modo que mesmo preso, o cachorro consiga chegar ao chiqueiro, ao curral, às baias e ao galinheiro para proteger seu sítio.

a) Qual a distância euclidiana entre o canil e o curral?

b) Qual a distância euclidiana entre o canil e o chiqueiro?

c) Qual a distância euclidiana entre o canil e as baias?

d) Qual a distância euclidiana entre o canil e o galinheiro?

e) Qual desses locais está mais distante do canil?

f) Qual o tamanho mínimo da corrente, em metros, é necessário para que, com a corrente presa no canil, o cachorro consiga chegar até os locais que deverá proteger?

g) Desenhe, no mapa do sítio, o limite de onde o cachorro pode chegar se estiver preso a essa corrente (considere que o sítio é cercado nas suas fronteiras).

O pai de Ana resolveu plantar alguns pés de milho transgênico para um experimento. O técnico responsável pelo experimento deu as seguintes especificações para o plantio:

- Serão plantados 9 pés de milho de forma que cada um deverá ficar a 1 metro de distância do outro. Sugere-se que este plantio seja feito no formato de um quadrado de 4 metros quadrados, com um pé em cada vértice do quadrado, um em cada ponto médio de seus lados, e outro no seu centro;
- o local do plantio deve ser isolado para que não tenham animais nem outras plantações numa distância de 2 metros (distância do táxi) de cada pé de milho.

Ana ficou encarregada de encontrar o melhor lugar para fazer a plantação de seu pai e, para isso, ela elaborou as seguintes questões:

h) Mostre a posição dos milhos no geoplano (utilize o centro de uma malha quadriculada do Geoplano, colocando um elástico representando o quadrado que é formado pelos nove pés de milho).

i) Considere o pé de milho que está no centro do quadrado, faça o isolamento de 2 metros na distância do táxi para esse ponto (use um elástico para o isolamento de cada milho).

j) Considere, agora, os pés de milho que estão nos vértices do quadrado e faça o isolamento para cada um deles (use um elástico para o isolamento de cada milho).

k) Analise o isolamento para cada um dos pés de milho que estão nos pontos médios dos lados do quadrado (use um elástico para o isolamento de cada milho).

l) A fim de economizar cerca (sabendo que a quantidade de terreno que vai se perder fazendo isso é muito pequena), imagine um segmento paralelo a cada lado do quadrado, que passe pelos três vértices que surgiram nas figuras formadas nos itens anteriores (use um elástico para cercar toda a região isolada, considerando esses segmentos imaginários).

m) Qual o nome da figura formada após todos os passos acima?

n) Em que local do sítio o pai de Ana deve plantar os pés de milho (mostre na malha quadriculada que representa o sítio as opções de locais que aproveitam melhor o espaço do sítio)? Quanto menor o espaço utilizado para esse fim, melhor. Lembre-se de até onde o cachorro pode chegar com a corrente. Além disso, considere que nas fronteiras do sítio não existem criação animal nem plantações por parte dos vizinhos e que o terreno já está cercado.

o) Quantos metros de cerca será preciso providenciar para isolar a plantação de milho? (Se alguma cerca do isolamento coincidir com a cerca do sítio, ela será aproveitada.)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geometria do táxi é uma geometria utilizada pelas pessoas naturalmente, por ser a que melhor se aplica aos percursos realizados nas cidades, por exemplo. Portanto, levar esse conceito para a sala de aula tem a vantagem do aluno conseguir associar com situações reais. Foi pensando nisso, que decidimos criar uma sequência didática que realizasse a introdução ao tema na Educação Básica.

Para isso, achamos importante trazer a teoria na qual a geometria do táxi está vinculada, que é o conceito de métrica, bem como os resultados pertinentes aos conteúdos explorados nas atividades, para que o professor tenha um material de apoio, caso precise. Além disso, mostramos que a geometria do táxi é classificada como uma geometria não euclidiana, além de explanar as possíveis versões para esta classificação.

Nossa sequência didática foi elaborada de forma que o aluno possa descobrir a distância do táxi e a partir dela, desenvolver outros conteúdos. O foco das atividades foi a introdução à geometria do táxi, a partir de sua distância, de forma que os conceitos possam ser consolidados pelos alunos.

Para as atividades da sequência didática recorremos ao Scratch, que é um ambiente virtual online, e ao Geoplano, que é um material manipulativo. Na tentativa de não excluir alunos sem acesso a esses recursos, todas as atividades foram adaptadas para serem realizadas utilizando recursos tradicionais, como papel, lápis, régua e compasso.

Como sugestão de trabalhos futuros, pretendemos reorganizar as Atividades 3, 4 e 5 para serem realizadas com o auxílio do software Geogebra. Além disso, queremos criar um jogo, no ambiente virtual Scratch, com o tema geometria do táxi para utilização na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S. L. S. **Usando o Scratch como ferramenta interdisciplinar através da programação**. 49 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171052876>. Acesso em: 21 set. 2020.

AZEVEDO, R. d. A. **Modelo de inserção das geomerias não-euclidianas na educação básica**. 85 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=27025>. Acesso em: 01 out. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Ministério da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. v. 2. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 21 set. 2020.

CALDATO, P. **O uso da geometria do táxi no ensino de análise combinatória**. 46 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=30218>. Acesso em: 21 set. 2020.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não euclidianas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2018. 170 p.

CRUZ, E. O. d. **Geometria do táxi**: a táxi-elipse. 72 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=76693>. Acesso em: 21 set. 2020.

FAVA NETO, I. **Um novo conceito de distância**: a distância do táxi e aplicações. 49 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=34053>. Acesso em: 21 set. 2020.

FERNANDES, D. A. P. **Lugares geométricos nas geometrias euclidiana × táxi**: conceitos e possibilidades de abordagem no ensino. 111 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150880681>. Acesso em: 18 set. 2020.

GUSMÃO, N. L.; SAKAGUTI, F. Y.; PIRES, L. A. A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica. **Educação Matemática Pesquisa: revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática**, v. 19, n. 2, p. 211–235, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p211-235>. Acesso em: 14 jul. 2020.

LEIVAS, J. C. P. Geometrias não euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa: revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática**, v. 15, n. 3, p. 647–670, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/16187>. Acesso em: 14 jul. 2020.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1993. 299 p.

LOIOLA, C. A. G. **Um táxi para Euclides**: uma geometria não euclidiana na educação básica. 96 p. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=233>. Acesso em: 18 set. 2020.

OLIVEIRA, V. T. P. d. **Geometria do táxi**: pelas ruas de uma cidade aprende-se uma geometria diferente. 76 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=54542>. Acesso em: 18 set. 2020.

PAVANI, V. V. **A geometria do taxista como ferramenta de consolidação de conteúdos**. 126 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150530018>. Acesso em: 21 set. 2020.

PEREIRA, G. S. d. S. P. **A linguagem de programação educativa Scratch na produção de conteúdos digitais para mediação da aprendizagem de matemática na educação básica**. 127 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2019. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170051409>. Acesso em: 14 jul. 2020.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. d. Sequência didática na matemática. **Revista de Educação do Ideau**, v. 8, n. 17, 2013. Disponível em: <https://www.bage.ideau.com.br/wp-content/files_mf/7ff08743d52102854eaaf22c19c4863731_1.pdf>. Acesso em: 14 jul. 2020.

PRESMIC, J. d. G. **Geometrias não euclidianas**. 50 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170300972>. Acesso em: 14 jul. 2020.

QUEIROZ, V. d. S. **Contribuições da linguagem Scratch para o ensino da geometria**. 150 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160980407>. Acesso em: 14 jul. 2020.

SANTOS, P. R. S. d. **Diagrama de Voronoi**: uma exploração nas distâncias euclidiana e do táxi. 81 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95148>. Acesso em: 21 set. 2020.

SILVA, W. M. d. **Scratch × Geogebra**: uma proposta no ensino-aprendizagem dos números complexos. 81 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=93508>. Acesso em: 14 jul. 2020.

TOLEDO, M. L. **Uma abordagem sobre a geometria não-euclidiana para o ensino fundamental**. 70 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150920932>. Acesso em: 01 out. 2020.

APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA: $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r$

Sejam $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}^*_+$. Como em $\mathbb{R}^2$ normalmente usamos as coordenadas (x, y) no lugar de (x_1, x_2), faremos neste apêndice tal conversão para que facilite a visualização no plano cartesiano.

Para estudarmos a equação $|x - a_1| + |y - a_2| = r$, devemos considerar, pela **Definição 2.3**, que

$$|x - a_1| = \begin{cases} x - a_1, & \text{se } x \geq a_1; \\ -x + a_1, & \text{se } x < a_1 \end{cases} \tag{1}$$

e

$$|y - a_2| = \begin{cases} y - a_2, & \text{se } y \geq a_2; \\ -y + a_2, & \text{se } y < a_2. \end{cases} \tag{2}$$

Assim, temos que analisar quatro situações diferentes,

a) se $x \geq a_1$ e $y \geq a_2$, temos

$$\begin{aligned} |x - a_1| + |y - a_2| = r &\Leftrightarrow x - a_1 + y - a_2 = r \\ &\Leftrightarrow y = -x + a_1 + a_2 + r; \end{aligned} \tag{3}$$

b) se $x \geq a_1$ e $y < a_2$, temos

$$\begin{aligned} |x - a_1| + |y - a_2| = r &\Leftrightarrow x - a_1 - y + a_2 = r \\ &\Leftrightarrow y = x - a_1 + a_2 - r; \end{aligned} \tag{4}$$

c) se $x < a_1$ e $y \geq a_2$, temos

$$\begin{aligned} |x - a_1| + |y - a_2| = r &\Leftrightarrow -x + a_1 + y - a_2 = r \\ &\Leftrightarrow y = x - a_1 + a_2 + r; \end{aligned} \tag{5}$$

d) se $x < a_1$ e $y < a_2$, temos

$$\begin{aligned} |x - a_1| + |y - a_2| = r &\Leftrightarrow -x + a_1 - y + a_2 = r \\ &\Leftrightarrow y = -x + a_1 + a_2 - r. \end{aligned} \tag{6}$$

Podemos notar que (3), (4), (5) e (6) são retas, e as chamaremos de t_1, t_2, t_3 e t_4 respectivamente. Percebemos ainda que t_2 e t_3 têm coeficiente angular igual a 1 e t_1 e t_4 têm coeficiente angular igual a -1. Assim, t_1 é paralela a t_4, t_2 é paralela a t_3 e t_1 e t_4 são perpendiculares a t_2 e t_3.

Quando igualamos as retas perpendiculares, encontramos o ponto de intercessão entre elas, assim,

$$i_1 = t_1 \cap t_2 = (a_1 + r, a_2);$$

$$i_2 = t_1 \cap t_3 = (a_1, a_2 + r);$$

$$i_3 = t_3 \cap t_4 = (a_1 - r, a_2);$$

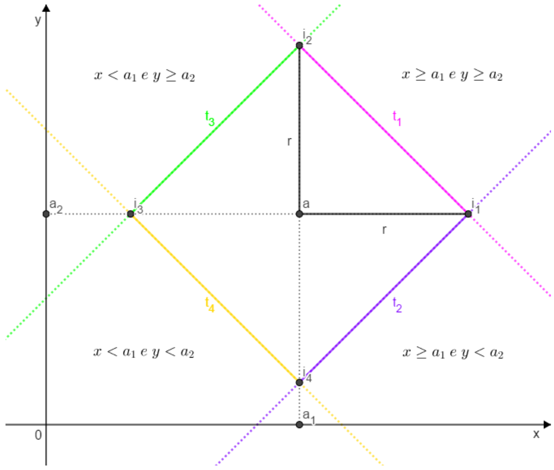
$$i_4 = t_2 \cap t_4 = (a_1, a_2 - r).$$

Na Figura 1 estão as representações gráficas das retas t_1, t_2, t_3 e t_4 considerando a possibilidade do ponto a estar em cada um dos quatro quadrantes do plano cartesiano. Caso a esteja situado em algum dos eixos x ou y, a representação é análoga.

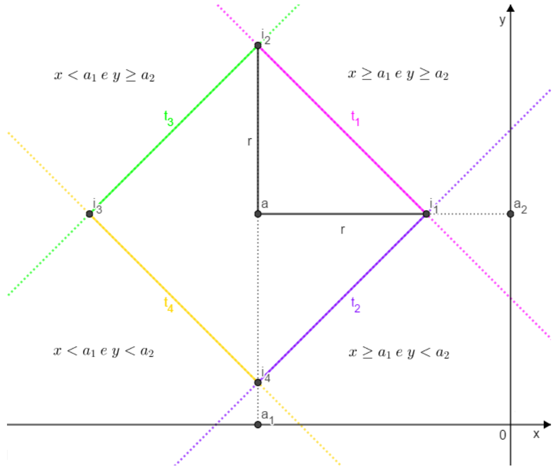
Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $y \in \mathbb{R}$, temos que a equação $|x - a_1| + |y - a_2| = r$ é representada geometricamente pelos lados de um quadrado de diagonais medindo $2r$, centro em $a = (a_1, a_2)$ e vértices nos pontos $i_1 = (a_1 + r, a_2)$, $i_2 = (a_1, a_2 + r)$, $i_3 = (a_1 - r, a_2)$ e $i_4 = (a_1, a_2 - r)$.

Figura 1 – $|x - a_1| + |y - a_2| = r$.

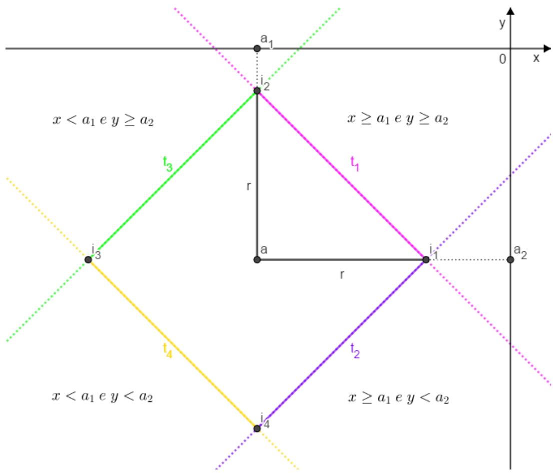
(a) quando $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$.



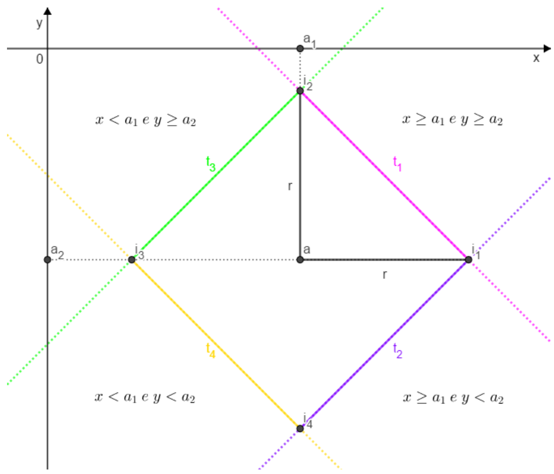
(b) quando $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$.



(c) quando $a_1 < 0$ e $a_2 < 0$.



(d) quando $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$.



Fonte: Da autora (2020).

APÊNDICE B – CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA: $max\{|x-a_1|,|y-a_2|\} = r$

Sejam $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}^*_+$. Como em $\mathbb{R}^2$ normalmente usamos as coordenadas (x,y) no lugar de (x_1,x_2), faremos também neste apêndice tal conversão para que facilite a visualização no plano cartesiano.

Precisamos analisar $max\{|x-a_1|,|y-a_2|\} = r$. Consideremos assim, duas situações para que a equação acima aconteça:

$$|x-a_1| = r \quad e \quad |y-a_2| \leq r, \tag{7}$$

ou

$$|x-a_1| \leq r \quad e \quad |y-a_2| = r. \tag{8}$$

Vamos analisar cada uma dessas situações a seguir.

a) Para que ocorra (7), devemos ter, simultaneamente, $|x-a_1| = r$ e $|y-a_2| \leq r$. Mas,

$$\begin{aligned} |y-a_2| \leq r \quad &\Leftrightarrow \quad -r \leq y-a_2 \leq r \\ &\Leftrightarrow \quad a_2 - r \leq y \leq a_2 + r. \end{aligned}$$

Portanto, (7) será representado por $|x-a_1| = r$ no intervalo $[a_2 - r, a_2 + r]$, ou seja,

- se $x \geq a_1$,

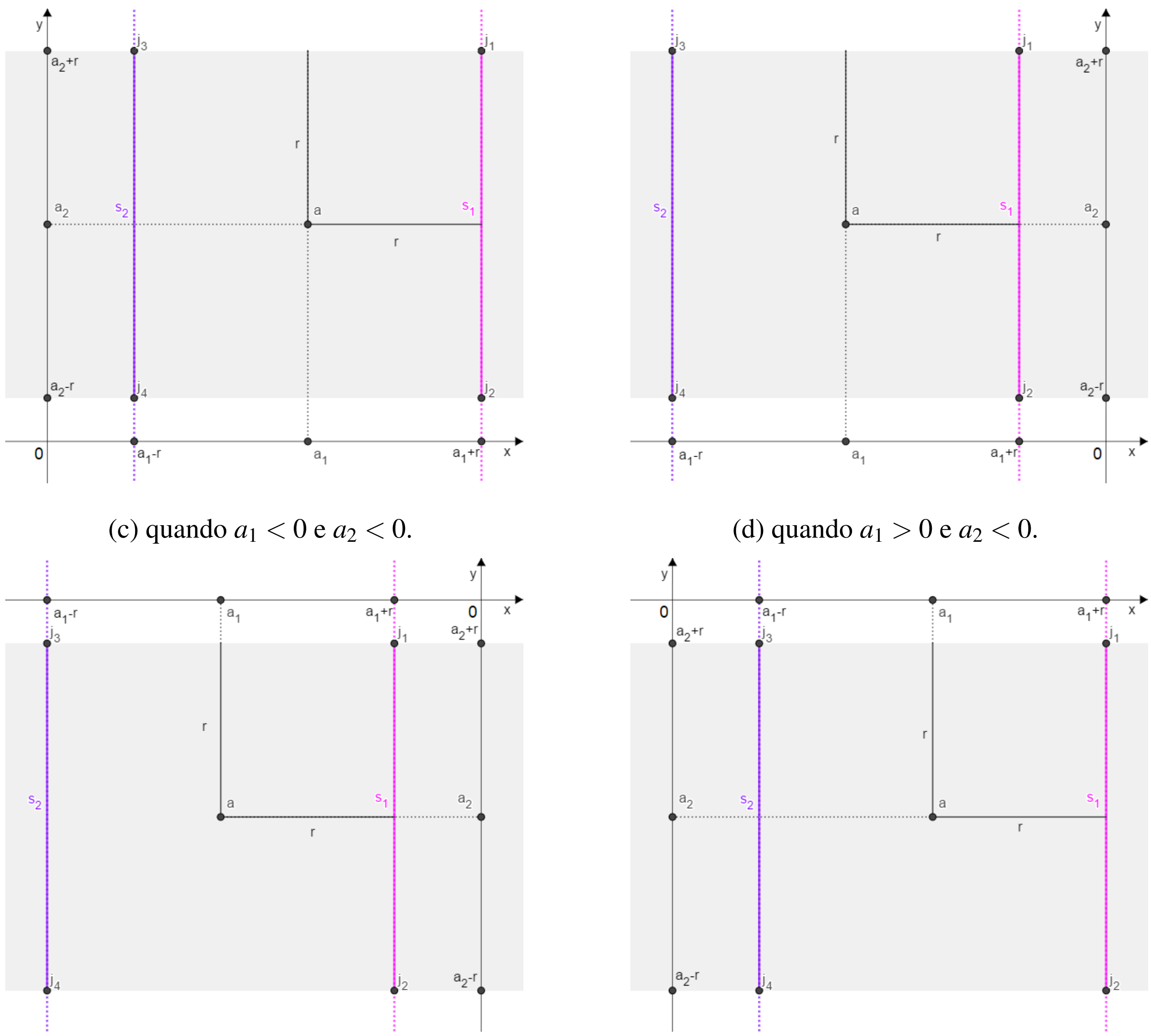
$$\begin{aligned} |x-a_1| = r \quad &\Leftrightarrow \quad x - a_1 = r \\ &\Leftrightarrow \quad x = a_1 + r; \end{aligned} \tag{9}$$

- se $x < a_1$,

$$\begin{aligned} |x-a_1| = r \quad &\Leftrightarrow \quad -x + a_1 = r \\ &\Leftrightarrow \quad x = a_1 - r. \end{aligned} \tag{10}$$

Podemos notar que (9) e (10) são retas e as chamaremos de s_1 e s_2 respectivamente. Tais retas são paralelas ao eixo y, logo, paralelas entre si. A Figura 2 representa graficamente as retas s_1 e s_2 no intervalo $[a_2 - r, a_2 + r]$ considerando o ponto a em cada um dos quadrantes do plano cartesiano. Caso a esteja situado em algum dos eixos x ou y, a representação é análoga.

Figura 2 – Retas s_1 e s_2.



(a) quando $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$.

(b) quando $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$.

(c) quando $a_1 < 0$ e $a_2 < 0$.

(d) quando $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$.

Fonte: Da autora (2020).

b) Para que ocorra (8), devemos ter, simultaneamente, $|y - a_2| = r$ e $|x - a_1| \leq r$. Mas,

$$
\begin{aligned}
|x - a_1| \leq r \quad &\Leftrightarrow \quad -r \leq x - a_1 \leq r \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 - r \leq x \leq a_1 + r.
\end{aligned}
$$

Portanto, (8) será representado por $|y - a_2| = r$ no intervalo $[a_1 - r, a_1 + r]$, ou seja,

- se $y \geq a_2$,

$$\begin{aligned} |y - a_2| = r \quad &\Leftrightarrow \quad y - a_2 = r \\ &\Leftrightarrow \quad y = a_2 + r; \end{aligned} \tag{11}$$

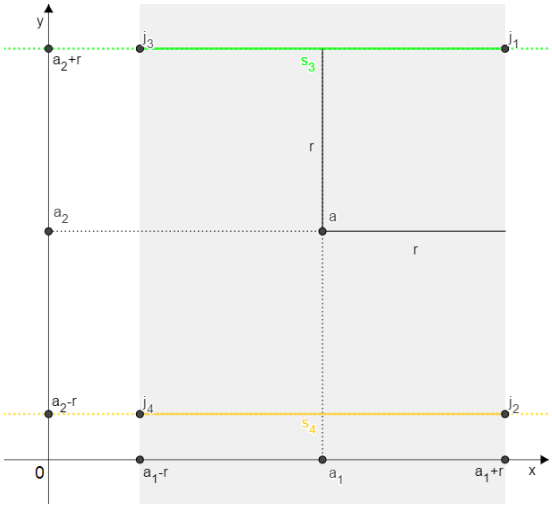
- se $y < a_2$,

$$\begin{aligned} |y - a_2| = r \quad &\Leftrightarrow \quad -y + a_2 = r \\ &\Leftrightarrow \quad y = a_2 - r. \end{aligned} \tag{12}$$

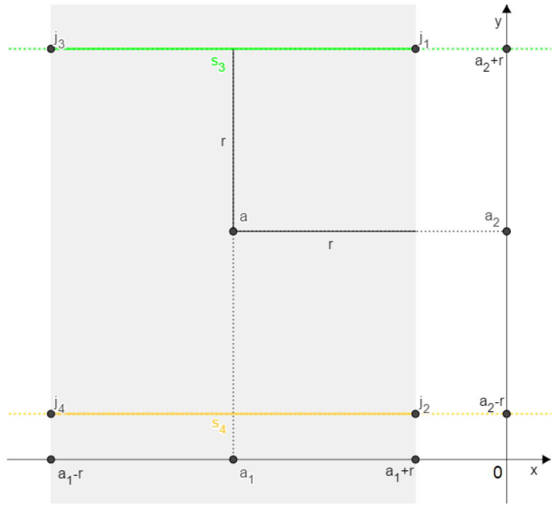
Vejamos que (11) e (12) são retas e as chamaremos de s_3 e s_4 respectivamente. Elas são paralelas ao eixo x, e também, paralelas entre si. Abaixo, na Figura 3 estão as representações gráficas de s_3 e s_4 no intervalo $[a_1 - r, a_1 + r]$ considerando o ponto a em cada um dos quadrantes do plano cartesiano. Se a for um ponto situado em algum dos eixos x ou y, a representação é análoga.

Figura 3 – Retas s_3 e s_4.

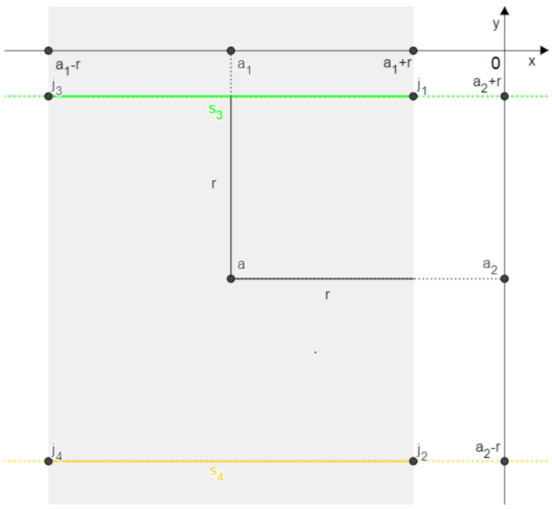
(a) quando $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$.



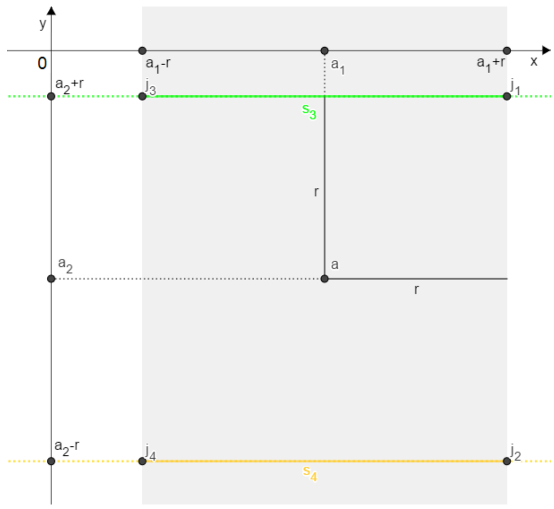
(b) quando $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$.



(c) quando $a_1 < 0$ e $a_2 < 0$.



(d) quando $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$.



Fonte: Da autora (2020).

Assim, a representação geométrica de $max\{|x-a_1|,|y-a_2|\} = r$ se dá pela representação simultânea de (7) e (8) no mesmo plano cartesiano como apresenta a Figura 4, que considera o ponto a nos quatro quadrantes do plano cartesiano. Se o ponto a situar em algum dos eixos x ou y, a representação é análoga.

Como s_1 e s_2 são paralelas ao eixo y e s_3 e s_4 são paralelas ao eixo x, então, s_1 e s_2 são perpendiculares a s_3 e s_4.

As intercessões entre as retas perpendiculares acontecem nos extremos dos intervalos $[a_1-4;1_1+r]$ e $[a_2-r;a_2+r]$, ou seja,

$$j_1 = s_1 \cap s_3 = (a_1+r, a_2+r);$$

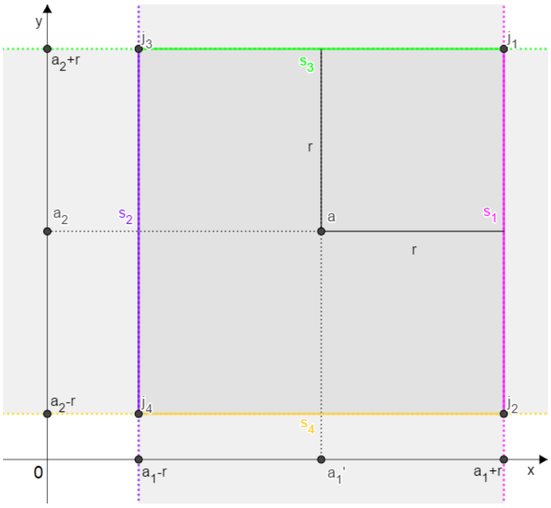
$$j_2 = s_1 \cap s_4 = (a_1 + r, a_2 - r);$$

$$j_3 = s_2 \cap s_3 = (a_1 - r, a_2 + r);$$

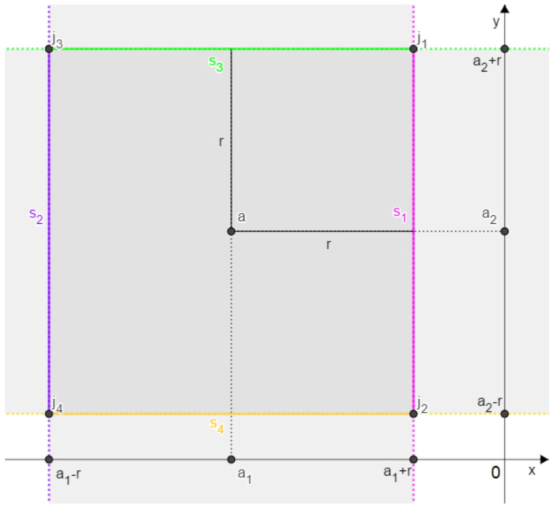
$$j_4 = s_2 \cap s_4 = (a_1 - r, a_2 - r).$$

Figura 4 – $max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} = r$.

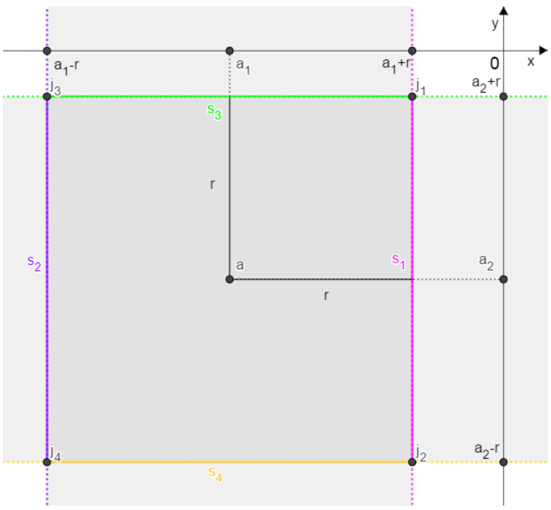
(a) quando $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$.



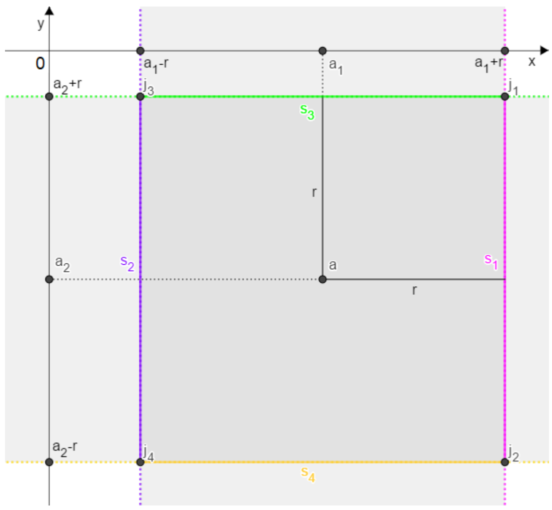
(b) quando $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$.



(c) quando $a_1 < 0$ e $a_2 < 0$.



(d) quando $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$.



Fonte: Da autora (2020).

Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $y \in \mathbb{R}$, temos que $max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} = r$ representa geometricamente os lados, com comprimento $2r$, de um quadrado com centro em $a = (a_1, a_2)$ e vértices nos pontos $j_1 = (a_1 + r, a_2 + r)$, $j_2 = (a_1 + r, a_2 - r)$, $j_3 = (a_1 - r, a_2 + r)$ e $j_4 = (a_1 - r, a_2 - r)$.

APÊNDICE C – CADERNO DE ATIVIDADES PARA IMPRESSÃO

CADERNO

DE

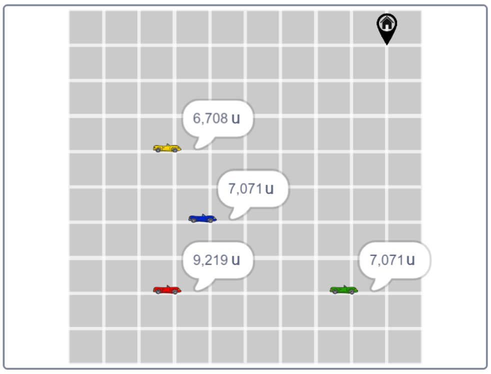
ATIVIDADES

Atividade 1 (adaptada): Carros por aplicativo

Ana quer pedir um carro por aplicativo e pede ajuda aos alunos para realizar a escolha do carro. A corrida mais barata será a do carro que percorrerá o menor trajeto para chegar até sua casa.

Na Figura 5 está o mapa do aplicativo, apresentando a posição de cada carro disponível para a corrida, onde o ponteiro no canto superior direito representa a casa de Ana, as linhas do mapa são as ruas, e cada quadra tem medida de lado igual a 1 u. As ruas do bairro de Ana são todas paralelas ou perpendiculares entre si. Nos balões sobre cada carro está a distância aproximada apontada pelo aplicativo, que cada carro está da casa de Ana.

Figura 5 – Distâncias aproximadas dadas pelo aplicativo.

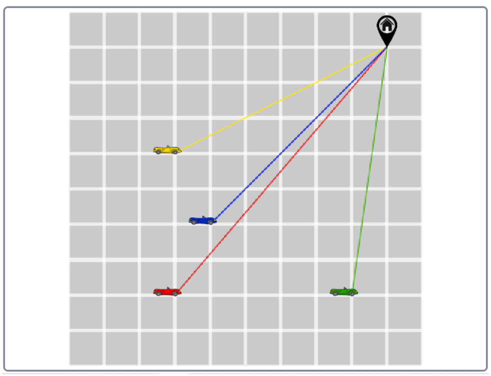


a) A partir dos valores dados Figura 5, qual carro você escolheria?

b) Você acha que a resposta do item anterior é realmente a melhor escolha? É realmente o carro que realizará o menor percurso até a casa de Ana?

Ana resolve clicar no botão que mostra como cada distância é calculada pelo aplicativo e obtém a Figura 6:

Figura 6 – Forma que as distâncias foram calculadas.

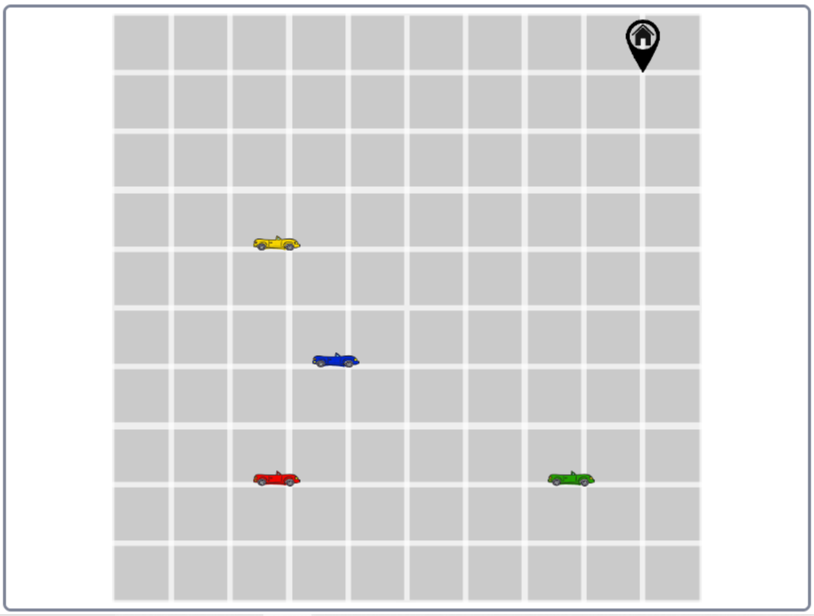


c) Qual o nome da distância que o aplicativo utiliza?

d) Esta distância é ideal para medir trajetos de carros dentro das cidades? Por quê?

e) Trace no mapa da Figura 7 um percurso que cada carro poderá realizar para chegar até a casa de Ana. Cada trajeto deve começar a partir da roda da frente do carro.

Figura 7 – Mapa do aplicativo.



f) Quanto mede o trajeto do carro amarelo? Lembre-se que cada quadra tem seu lado medindo 1u.

g) Quanto mede o trajeto do carro azul?

h) Quanto mede o trajeto do carro vermelho?

i) Quanto mede o trajeto do carro verde?

j) Com base nas respostas anteriores, qual carro deve ser chamado por Ana?

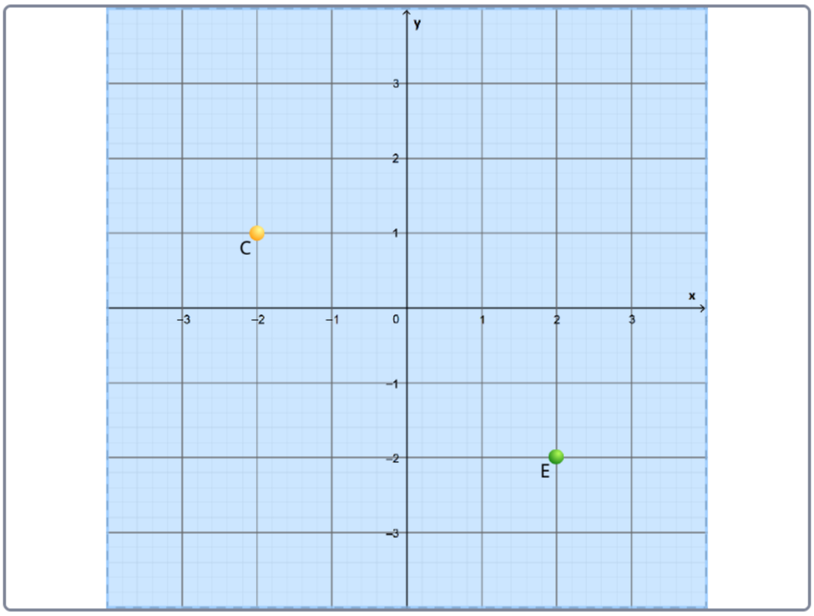
k) Qual o nome da distância utilizada por você nos itens f), g), h) e i)?

Atividade 2 (adaptada): Distância do táxi

Ana quer descobrir mais sobre a distância do táxi, inclusive como se calcula a distância para pontos que fica difícil desenhar e fazer a contagem. Para isso, ela usa uma malha quadriculada para analisar algumas situações.

Primeiramente, ela marca os pontos de sua casa e da escola onde estuda, conforme mostra a Figura 8:

Figura 8 – Plano cartesiano contendo os pontos C e E.



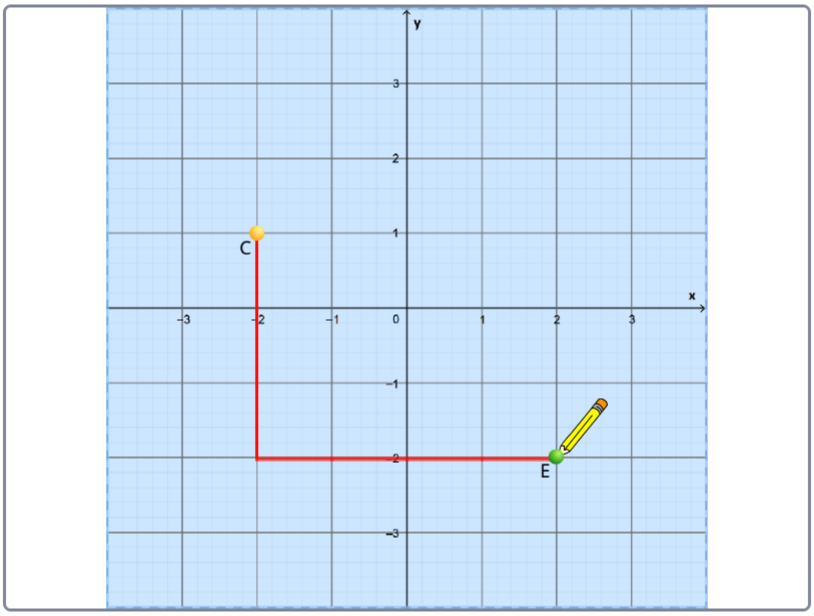
a) Quais as coordenadas do ponto C (casa de Ana)?

b) Quais as coordenadas do ponto E (escola)?

c) Calcule a distância euclidiana entre os pontos C e E.

d) Qual a distância do táxi entre C e E? Utilize o trajeto apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Trajeto entre C e E.



e) Além do trajeto apresentado na Figura 9, existem outros caminhos, passando pelas linhas da malha e deslocando a mesma quantidade de quadras, que vão de C a E?

f) Trace um trajeto diferente do anterior na Figura 9. O que os dois apresentam em comum?

Ana quer saber quantos caminhos são possíveis para ir de sua casa até a escola. Para isso, ela considera as seguintes notações:

$N =$ número possíveis de caminhos entre C e E,

$V =$ cada unidade deslocada na direção vertical,

$H =$ cada unidade deslocada na direção horizontal entre C e E,

$v =$ (número de deslocamentos na direção vertical entre C e E),

$h =$ (número de deslocamentos na direção horizontal entre C e E),

$n = v + h$ (ditância do táxi entre C e E).

g) Quais os valores de v, h e n?

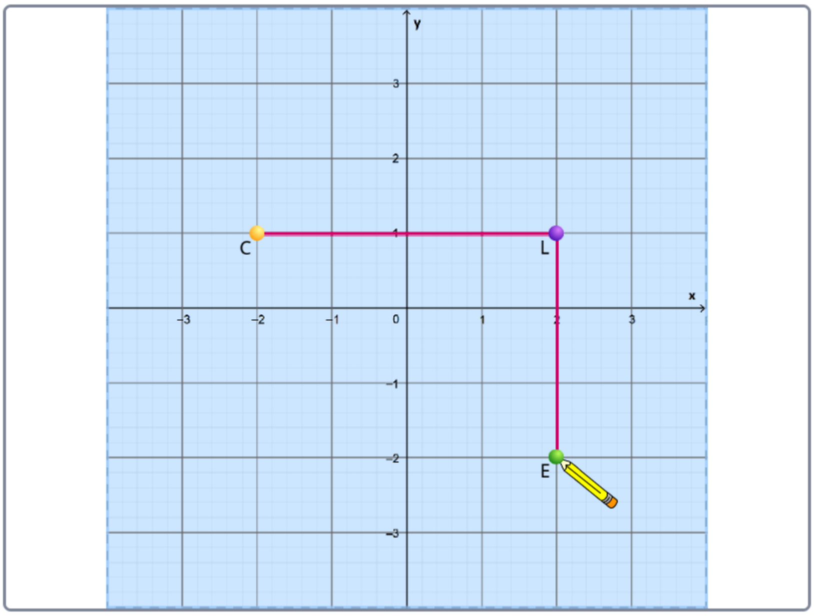
Encontrar a quantidade de caminhos entre C e E pode ser comparado a descobrir quantos anagramas tem a palavra HHHHVVV. Para isso, recorremos à permutação com repetição, dada pela fórmula:

$$N = P_n^{v,h} = \frac{n!}{v!h!}$$

h) Quantos são os caminhos que Ana pode realizar para ir de sua casa até a escola?

Ana decide estudar o caminho que costuma fazer para ir à escola, o caminho que passa pela lanchonete, conforme a Figura 10.

Figura 10 – Outro trajeto entre C e E, passando por L.



i) Quais as coordenadas do ponto L (lanchonete)?

j) Observe que o deslocamento entre a casa de Ana e a lanchonete ocorre na direção horizontal. Portanto, uma boa maneira de calcularmos a distância do táxi entre os dois pontos, C e L, é fazendo: abcissa do ponto final (L) menos abcissa do ponto inicial (C). Qual o resultado obtido?

k) Quanto mede a distância euclidiana entre C e L?

l) Observe, agora, que o deslocamento entre a lanchonete e a escola ocorre na direção vertical. De maneira parecida com o item j), podemos pensar que a distância do táxi entre L e E pode ser calculado da seguinte forma: ordenada do ponto final (E) menos ordenada do ponto inicial (L). Quanto dá esse resultado?

m) Uma distância pode ser negativa?

n) Então, para resolver este problema, temos a opção de encontrar o valor absoluto do resultado obtido no item l). Quanto resulta?

o) Calcule a distância euclidiana entre E e L.

p) O que você percebe comparando as respostas dos itens j) e k), e dos itens n) e o)? Por que você acha que isso acontece?

q) Como não sabemos o resultado antes de calcular um deslocamento, e como não devemos ter um resultado negativo para distância, para o cálculo da distância do táxi vamos sempre considerar o valor absoluto dos deslocamentos verticais e horizontais, e somá-los. Faça este cálculo e verifique se o valor encontrado coincide com a resposta do item d).

Atividade 3: Passeio ciclístico

Os pais de Ana são proprietários de um sítio próximo à cidade. Seus amigos resolveram fazer um passeio ciclístico até lá. Ana decidiu ir antes a fim de preparar um piquenique para seus amigos.

Como Ana gosta muito de matemática, deixou os amigos descobrirem como chegar no sítio apenas com algumas informações:

- Bia deverá percorrer 18 quadras de sua casa até o início da estrada que vai para o sítio;
- João também percorrerá 18 quadras de sua casa até o início da mesma estrada;
- Carla percorrerá 16 quadras de sua casa até o início da mesma estrada de terra onde chegarão também Bia e João;
- se Gabi percorrer exatamente 2,5 quilômetros em linha reta (sem fazer curvas), a partir de sua casa, ela chegará ao sítio de Ana (ela também passará pela mesma entrada da estrada de terra que os outros amigos).

Além dessas informações, Ana entregou uma malha quadriculada contendo os eixos x e y. Cada quadra, dentro do perímetro urbano, tem o formato de um quadrado, com medidas de lado de 100 metros.

a) Marque no plano cartesiano os pontos referentes à casa de cada um dos amigos de Ana, sendo:
Bia: $B = (200, 1800)$;
João: $J = (600, 1000)$;
Carla: $C = (1600, 200)$;
Gabi: $G = (500, 1600)$.

b) Marque, na malha quadriculada, alguns pontos que estão a 18 quadras da casa de Bia, da seguinte forma:

   - considere somente os trajetos verticais e horizontais, e marque todos os pontos que estão a 18 quadras de B nessas direções;
   - marque 2 pontos que estejam a esquerda e acima de B;
   - marque 2 pontos que estejam a direita e acima de B;

- marque 2 pontos que estejam abaixo e a direita de B;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a esquerda de B.

Ligue os pontos encontrados. Que figura formou?

c) Marque, na malha quadriculada, alguns pontos que estão a 18 quadras da casa de João, da seguinte forma:

- considere somente os trajetos verticais e horizontais, e marque todos os pontos que estão a 18 quadras de J nessas direções;
- marque 2 pontos que estejam a esquerda e acima de J;
- marque 2 pontos que estejam a direita e acima de J;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a direita de J;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a esquerda de J.

Ligue os pontos encontrados. Que figura formou?

d) Com essas duas marcações é possível encontrar o ponto E (entrada da estrada de terra)?

e) Marque, na malha quadriculada, alguns pontos que estão a 16 quadras da casa de Carla, da seguinte forma:

- considere somente os trajetos verticais e horizontais, e marque todos os pontos que estão a 16 quadras de C nessas direções;
- marque 2 pontos que estejam a esquerda e acima de C;
- marque 2 pontos que estejam a direita e acima de C;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a direita de C;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a esquerda de C.

Ligue os pontos encontrados. Que figura formou?

f) É possível determinar o ponto E (início da estrada de terra) com essas três informações? Se sim, marque o ponto no plano cartesiano e dê as suas coordenadas.

g) Quantos caminhos possíveis Bia, João e Carla podem fazer (separadamente) para chegar até a entrada da estrada de terra, percorrendo a quantidade de quadras que Ana disse?

h) Marque, na malha quadriculada, alguns pontos que estão a 2,5 quilômetros da casa de Gabi, da seguinte forma (transforme em metros antes):

- considere somente os trajetos verticais e horizontais, e marque todos os pontos que estão a 2,5 quilômetros de G nessas direções;
- marque 2 pontos que estejam a esquerda e acima de G;
- marque 2 pontos que estejam a direita e acima de G;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a direita de G;
- marque 2 pontos que estejam abaixo e a esquerda de G.

i) Quando queremos encontrar todos os pontos que estão a 2,5 quilômetros de distância de um ponto G, que figura devemos desenhar? Faça esta figura utilizando os pontos marcados no item anterior.

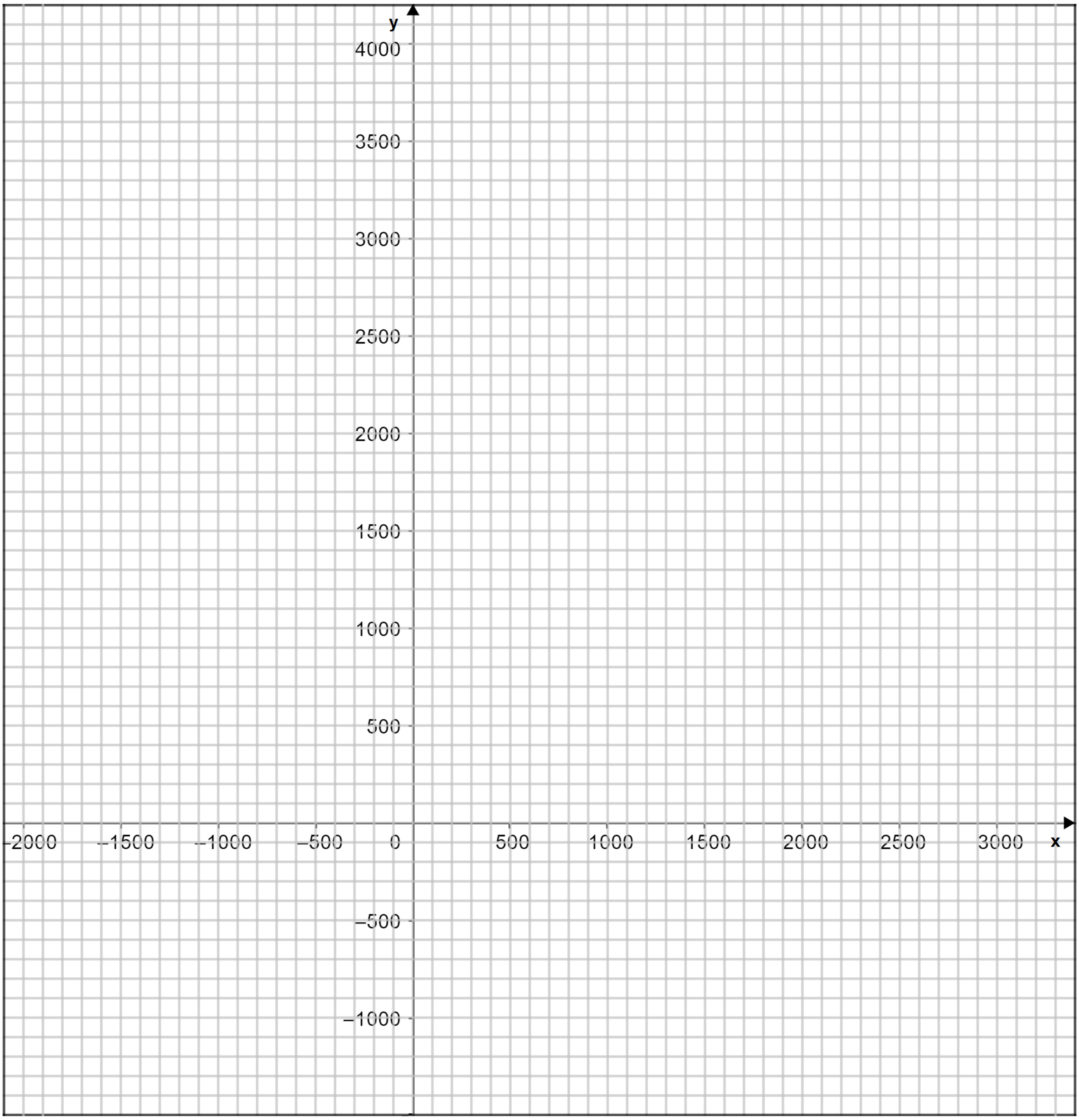
j) Trace uma reta que passa por G e E (ponto da casa de Gabi e ponto da entrada da estrada de terra respectivamente).

k) O ponto que corresponde à localização do sítio de Ana é a intercessão entre a circunferência de centro G e raio 2,5 quilômetros e a reta que passa por G e E. Existem dois pontos que estão nessa intercessão. Qual deles representa o sítio de Ana? Por quê?

l) Sabendo as coordenadas do sítio de Ana, determine quantos metros os amigos percorrerão do ponto E até o sítio.

m) A figura desenhada no item i) é uma circunferência euclidiana, pois representa todos os pontos que estão a 2,5 quilômetros de G na distância euclidiana. Sabendo que os pontos marcados no item b) são os pontos que estão a uma distância do táxi de 1,8 quilômetros de B, mesmo formando um quadrado, qual figura esse quadrado representa na geometria do táxi?

Malha quadriculada para a Atividade 3



Atividade 4: A roseira de Ana

O sítio dos pais de Ana tem uma área de 0,1 hectare.

a) Sabendo-se que um hectare, representado pelo símbolo ha, é uma unidade de medida de área equivalente a 10.000 metros quadrados, quantos metros quadrados possui o sítio dos pais de Ana?

b) O sítio tem a forma de um retângulo e sua base é 15 metros maior que sua altura.

Figura 11 – Área do sítio.

Qual é a dimensão de seus lados em metros?

c) Ana gostaria muito de plantar uma roseira, no entanto para ficar mais fácil a escolha do local onde plantar resolveu fazer um mapa do sítio utilizando um plano cartesiano. Ela fez de tal forma que dois lados do terreno coincidem com os eixos x e y positivos e o vértice A coincide com a origem do plano cartesiano. Sabendo que as unidades nos eixos são dadas em metros, represente o terreno dos pais de Ana no plano cartesiano.

d) No terreno há um curral e um chiqueiro nas coordenadas $(3,11)$ e $(8,13)$, respectivamente. Represente esses pontos na malha quadriculada.

e) Para plantar a roseira Ana gostaria de escolher um local que dista 3 metros (distância euclidiana) do curral e 4 metros do chiqueiro (distância do táxi). Qual as coordenadas da localização da roseira? (A roseira só poderá ser plantada em pontos que possui como coordenadas números naturais.)

Para descobrir a localização exata da roseira vamos seguir os seguintes passos:

Passo 1: Vamos primeiro descobrir todos os pontos que se encontram a 3 metros do curral utilizando a distância euclidiana. Que figura geométrica encontramos?

Passo 2: Vamos, agora, descobrir todos os pontos que se encontram a 4 metros do chiqueiro utilizando a distância do táxi. Que figura geométrica encontramos?

Passo 3: Qual ponto, cujas coordenadas são números naturais, pertence à interseção das figuras obtidas nos passos 1 e 2? Esse ponto é a localização da roseira.

f) Qual a distância euclidiana do chiqueiro à roseira? Para descobrir esse valor utilize seus conhecimentos a respeito do Teorema de Pitágoras.

g) Após plantar a roseira, Ana foi ao depósito buscar adubo. O depósito encontra-se também a 4 metros do chiqueiro (distância do táxi) e a distância euclidiana entre o chiqueiro e a roseira é a mesma da roseira ao depósito. Apenas essas informações são suficientes para saber a localização exata do depósito? Quantas opções são possíveis para a localização do depósito?

h) Sabendo que o depósito encontra-se no ponto P, dê uma outra informação para que exista apenas uma opção para a localização do depósito.

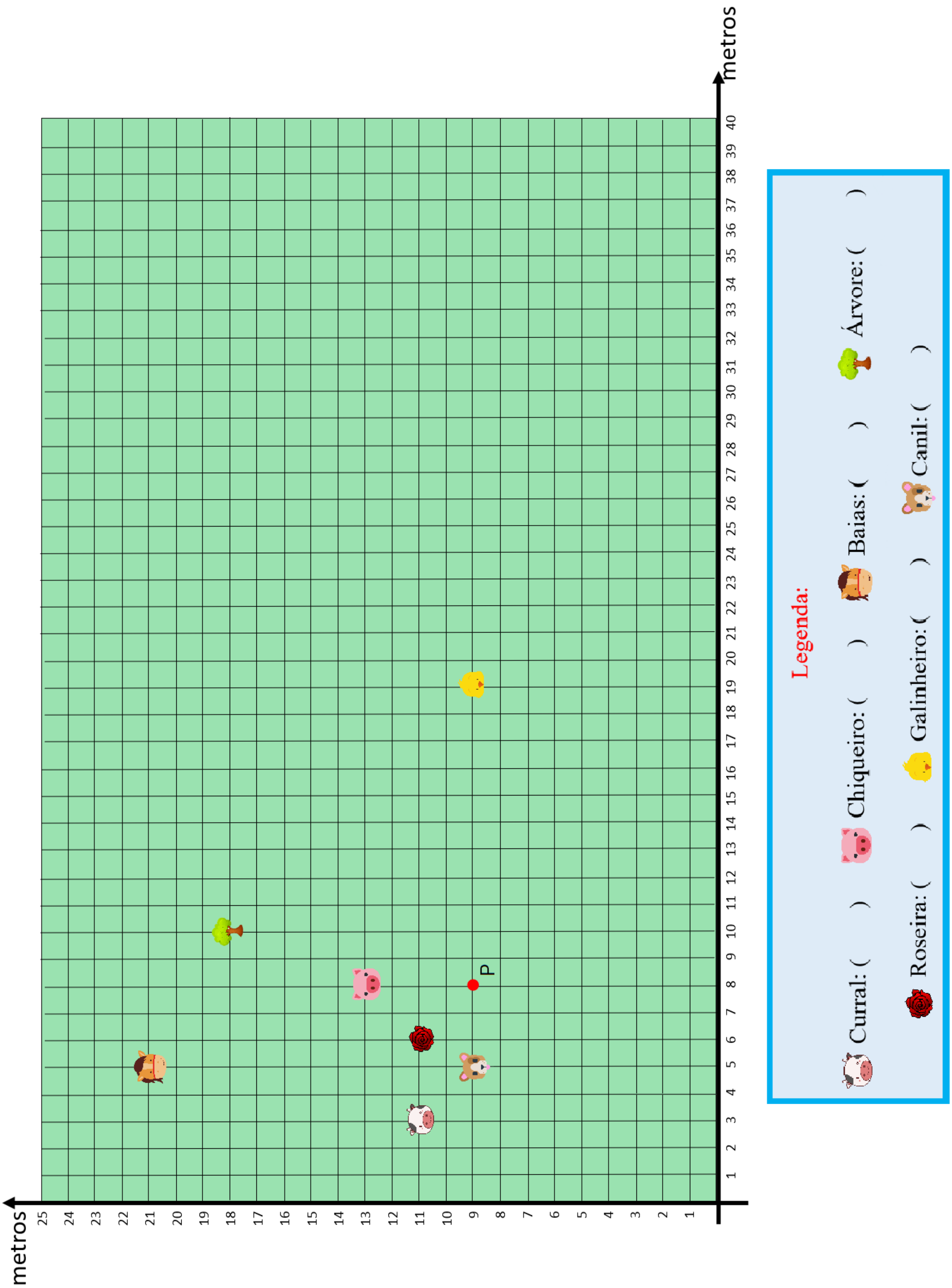
   Para facilitar a escolha da informação adicional para descobrir a localização do depósito sabemos que no sítio temos, uma baia para os cavalos, um galinheiro, um canil e uma árvore, conforme o mapa que será entregue pelo professor. Peça ao professor o mapa. Complete a legenda do mapa antes de responder este item.

i) Qual a distância que Ana percorre para ir do depósito à roseira?

j) E se considerarmos que ela pode passar somente nas linhas da malha quadriculada, pois essas linhas são os corredores entre os canteiros feitos naquela região, quantos metros ela anda do depósito à roseira?

Malha quadriculada para a Atividade 4

Mapa do sítio



Atividade 5 (com o uso do Geoplano): Soluções para o sítio

O pai de Ana decidiu colocar um cão de guarda no sítio. Assim, ele pretende comprar uma corrente e fixá-la no canil, de modo que mesmo preso, o cachorro consiga chegar ao chiqueiro, ao curral, às baias e ao galinheiro para proteger seu sítio.

a) Qual a distância euclidiana entre o canil e o curral?

b) Qual a distância euclidiana entre o canil e o chiqueiro?

c) Qual a distância euclidiana entre o canil e as baias?

d) Qual a distância euclidiana entre o canil e o galinheiro?

e) Qual desses locais está mais distante do canil?

f) Qual o tamanho mínimo da corrente, em metros, é necessário para que, com a corrente presa no canil, o cachorro consiga chegar até os locais que deverá proteger?

g) Desenhe, no mapa do sítio, o limite de onde o cachorro pode chegar se estiver preso a essa corrente (considere que o sítio é cercado nas suas fronteiras).

O pai de Ana resolveu plantar alguns pés de milho transgênico para um experimento. O técnico responsável pelo experimento deu as seguintes especificações para o plantio:

- Serão plantados 9 pés de milho de forma que cada um deverá ficar a 1 metro de distância do outro. Sugere-se que este plantio seja feito no formato de um quadrado de 4 metros quadrados, com um pé em cada vértice do quadrado, um em cada ponto médio de seus lados, e outro no seu centro;

- o local do plantio deve ser isolado para que não tenham animais nem outras plantações numa distância de 2 metros (distância do táxi) de cada pé de milho.

Ana ficou encarregada de encontrar o melhor lugar para fazer a plantação de seu pai e, para isso, ela elaborou as seguintes questões:

h) Mostre a posição dos milhos no geoplano (utilize o centro de uma malha quadriculada do Geoplano, colocando um elástico representando o quadrado que é formado pelos nove pés de milho).

i) Considere o pé de milho que está no centro do quadrado, faça o isolamento de 2 metros na distância do táxi para esse ponto (use um elástico para o isolamento de cada milho).

j) Considere, agora, os pés de milho que estão nos vértices do quadrado e faça o isolamento para cada um deles (use um elástico para o isolamento de cada milho).

k) Analise o isolamento para cada um dos pés de milho que estão nos pontos médios dos lados do quadrado (use um elástico para o isolamento de cada milho).

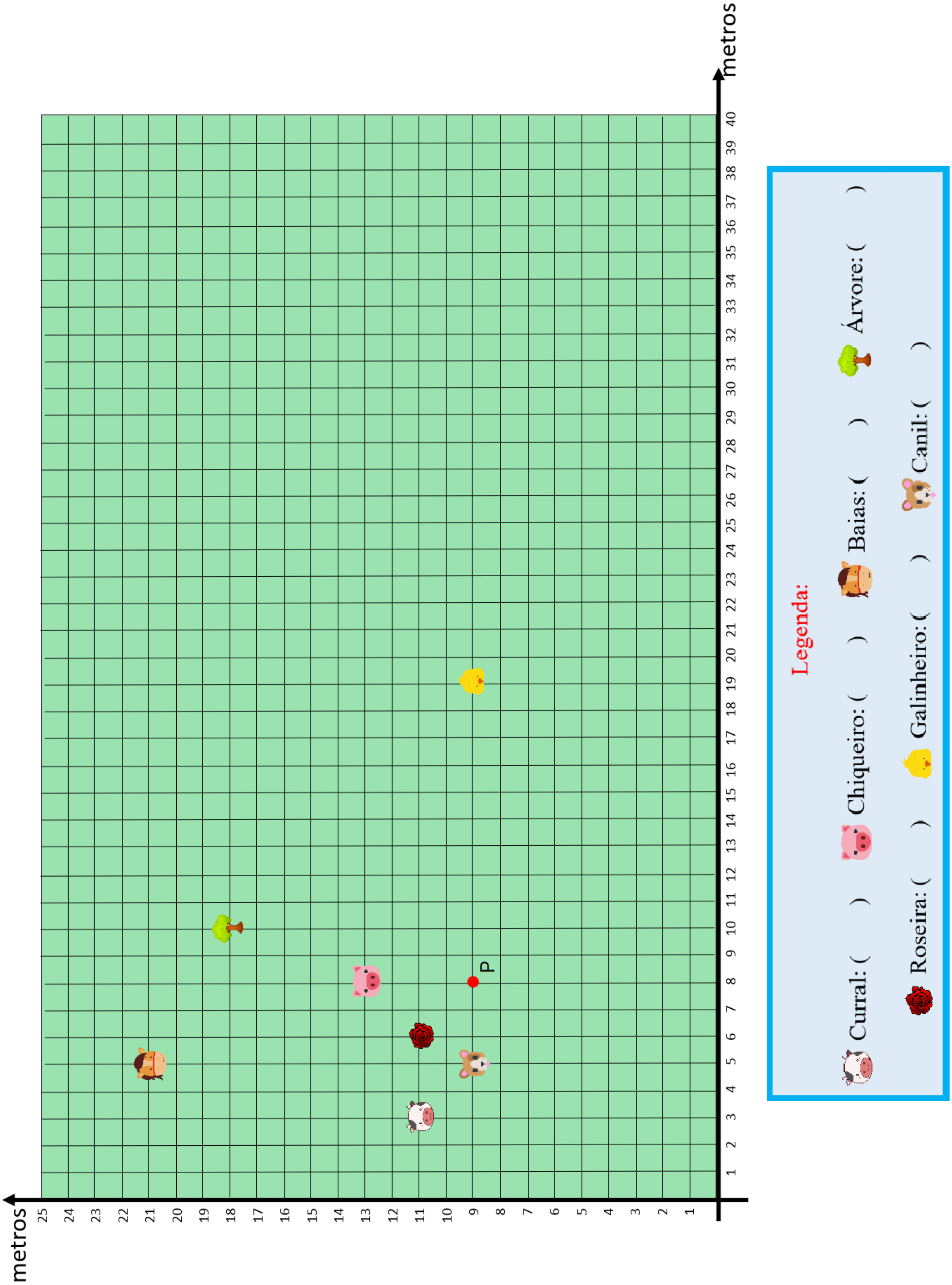
l) A fim de economizar cerca (sabendo que a quantidade de terreno que vai se perder fazendo isso é muito pequena), imagine um segmento paralelo a cada lado do quadrado, que passe pelos três vértices que surgiram nas figuras formadas nos itens anteriores (use um elástico para cercar toda a região isolada, considerando esses segmentos imaginários).

m) Qual o nome da figura formada após todos os passos acima?

n) Em que local do sítio o pai de Ana deve plantar os pés de milho (mostre na malha quadriculada que representa o sítio as opções de locais que aproveitam melhor o espaço do sítio)? Quanto menor o espaço utilizado para esse fim, melhor. Lembre-se de até onde o cachorro pode chegar com a corrente. Além disso, considere que nas fronteiras do sítio não existem criação animal nem plantações por parte dos vizinhos e que o terreno já está cercado.

o) Quantos metros de cerca será preciso providenciar para isolar a plantação de milho? (Se alguma cerca do isolamento coincidir com a cerca do sítio, ela será aproveitada.)

Mapa do sítio



Atividade 5 (adaptada): Soluções para o sítio

O pai de Ana decidiu colocar um cão de guarda no sítio. Assim, ele pretende comprar uma corrente e fixá-la no canil, de modo que mesmo preso, o cachorro consiga chegar ao chiqueiro, ao curral, às baias e ao galinheiro, para proteger seu sítio.

a) Qual a distância euclidiana entre o canil e o curral?

b) Qual a distância euclidiana entre o canil e o chiqueiro?

c) Qual a distância euclidiana entre o canil e as baias?

d) Qual a distância euclidiana entre o canil e o galinheiro?

e) Qual desses locais está mais distante do canil?

f) Qual o tamanho mínimo da corrente, em metros, é necessário para que, com a corrente presa no canil, o cachorro consiga chegar até os locais que deverá proteger?

g) Desenhe, no mapa do sítio, o limite de onde o cachorro pode chegar se estiver preso a essa corrente (considere que o sítio é cercado nas suas fronteiras).

O pai de Ana resolveu plantar alguns pés de milho transgênico para um experimento. O técnico responsável pelo experimento deu as seguintes especificações para o plantio:

- Serão plantados 9 pés de milho de forma que cada um deverá ficar a 1 metro de distância do outro. Sugere-se que este plantio seja feito no formato de um quadrado de $4m^2$, com um pé em cada vértice do quadrado, um em cada ponto médio de seus lados, e outro no seu centro;

- o local do plantio deve ser isolado para que não tenham animais nem outras plantações numa distância de 2m (distância do táxi) de cada pé de milho.

Ana ficou encarregada de encontrar o melhor lugar para fazer a plantação de seu pai e, para isso, ela elaborou as seguintes questões:

h) Mostre a posição dos milhos na malha quadriculada (utilize o centro da malha quadriculada).

i) Considere o pé de milho que está no centro do quadrado, faça o isolamento de 2 metros na distância do táxi para esse ponto.

j) Considere, agora, os pés de milho que estão nos vértices do quadrado e faça o isolamento para cada um deles.

k) Analise o isolamento para cada um dos pés de milho que estão nos pontos médios dos lados do quadrado.

l) A fim de economizar cerca (sabendo que a quantidade de terreno que vai se perder fazendo isso é muito pequena), trace um segmento paralelo a cada lado do quadrado, que passe pelos três vértices que surgiram nas figuras formadas nos itens anteriores.

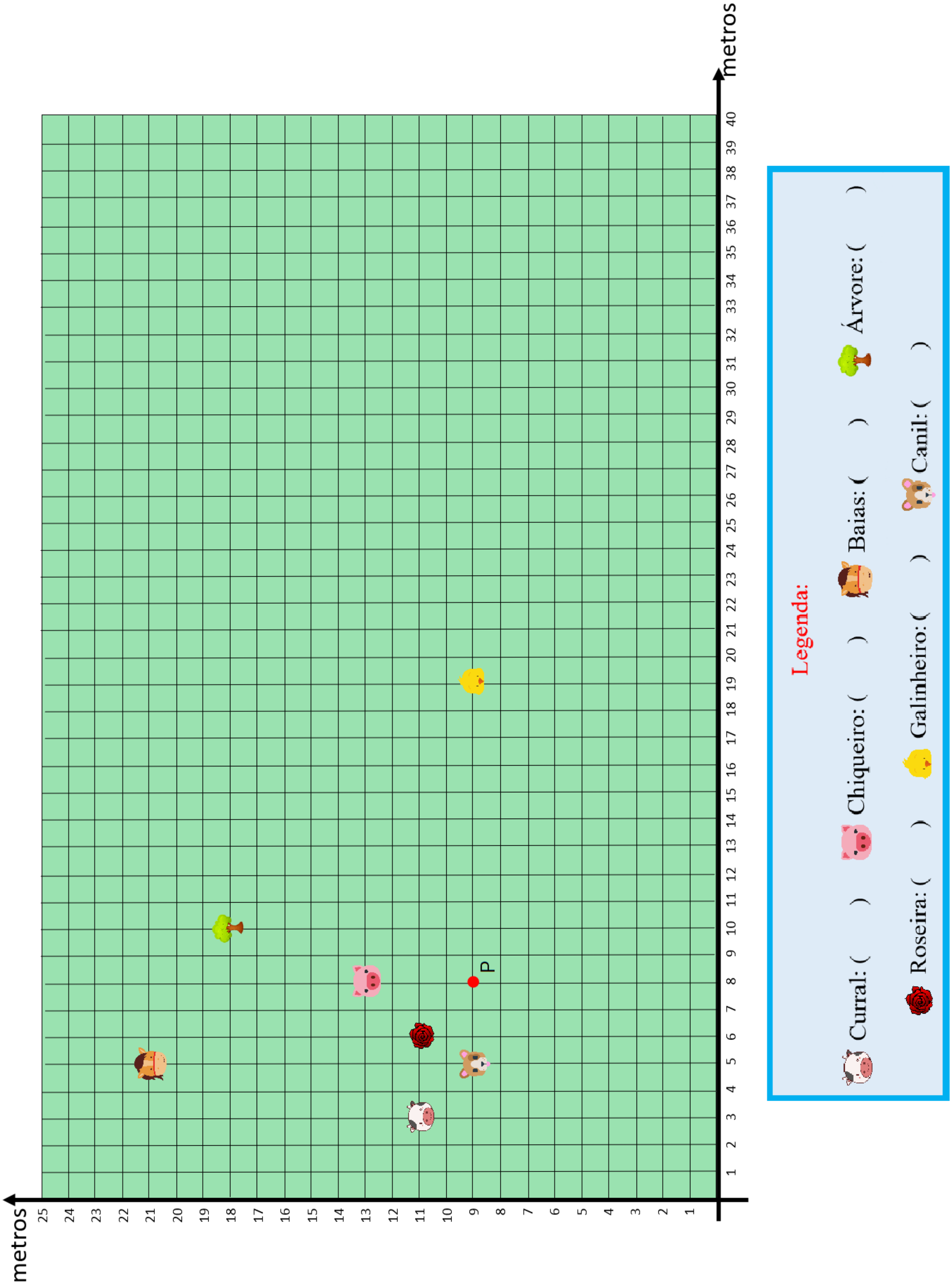
m) Qual o nome da figura formada após todos os passos acima?

n) Em que local do sítio o pai de Ana deve plantar os pés de milho (mostre na malha quadriculada que representa o sítio as opções de locais que aproveitam melhor o espaço do sítio)? Quanto menor o espaço utilizado para esse fim, melhor. Lembre-se de até onde o cachorro pode chegar com a corrente. Além disso, considere que nas fronteiras do sítio não existem criação animal nem plantações por parte dos vizinhos e que o terreno já está cercado.

o) Quantos metros de cerca será preciso providenciar para isolar a plantação de milho? (Se alguma cerca do isolamento coincidir com a cerca do sítio, ela será aproveitada.)

Malha quadriculada para a Atividade 5 (adaptada)

Mapa do sítio



APÊNDICE D – SOLUÇÃO DAS ATIVIDADES

Atividade 1 (adaptada): Carros por aplicativo

a) O carro amarelo.

b) Resposta pessoal.

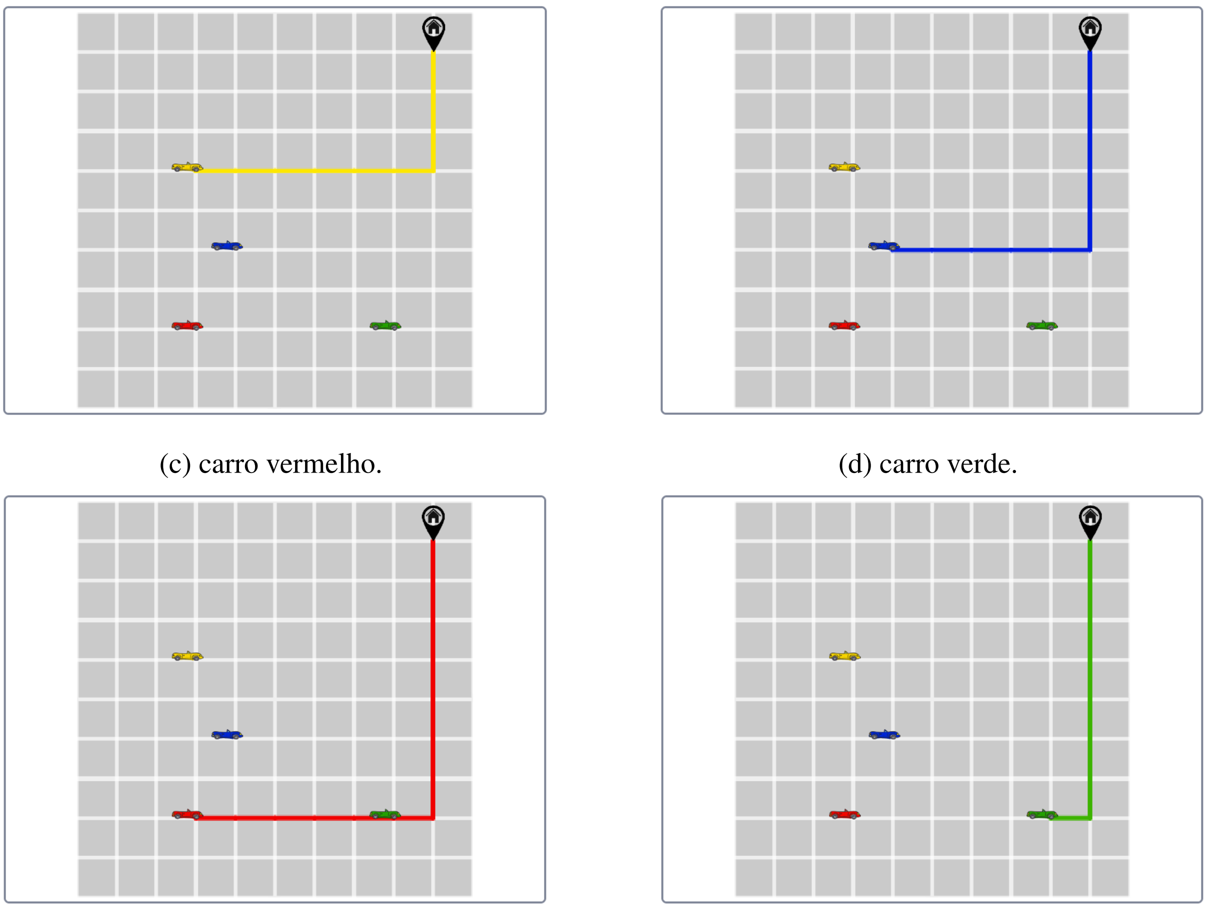
c) Distância euclidiana.

d) Não, pois para o carro realizar o percurso medido por esta distância, ele teria que passar por locais diferentes das ruas, onde encontram-se construções, praças, lotes.

e) Uma das opções de trajeto para cada carro:

Figura 12 – Possível trajeto de cada carro.

(a) carro amarelo. (b) carro azul. (c) carro vermelho. (d) carro verde.



Fonte: scratch.mit.edu (2020).

f) 9 u.

g) 10 u.

h) 13 u.

i) 8 u.

j) O carro verde.

k) Distância do táxi.

Atividade 2 (adaptada): Distância do táxi

a) $C = (-2, 1)$.

b) $E = (2, -2)$.

c) 5 u.

d) 7 u.

e) Sim.

f) O número de deslocamentos na direção vertical em ambos é o mesmo e o número de deslocamentos na direção horizontal em ambos também coincide.

g) $v = 3$, $h = 4$ e $n = 7$.

h) 35 caminhos possíveis.

i) $L = (2, 1)$.

j) 4 u.

k) 4 u.

l) -3 u.

m) Não.

n) 3 u.

o) 3 u.

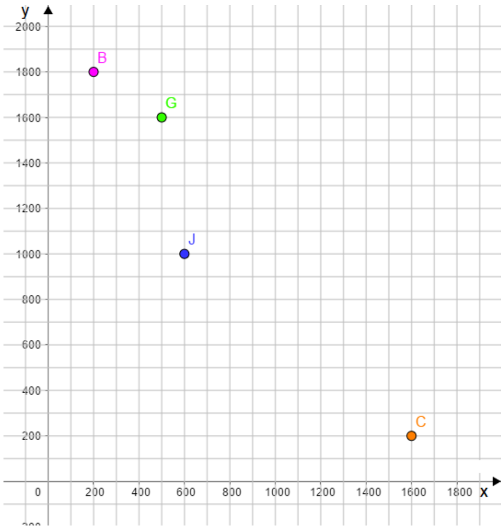
p) Em ambos os casos, o valor da distância euclidiana coincide com o valor da distância do táxi. Isso acontece, pois a distância euclidiana e a distância do táxi são iguais quando o deslocamento ocorre somente numa direção (vertical ou horizontal).

q) 7 u. Sim, é o mesmo resultado do encontrado no item d).

Atividade 3: Passeio ciclístico

a)

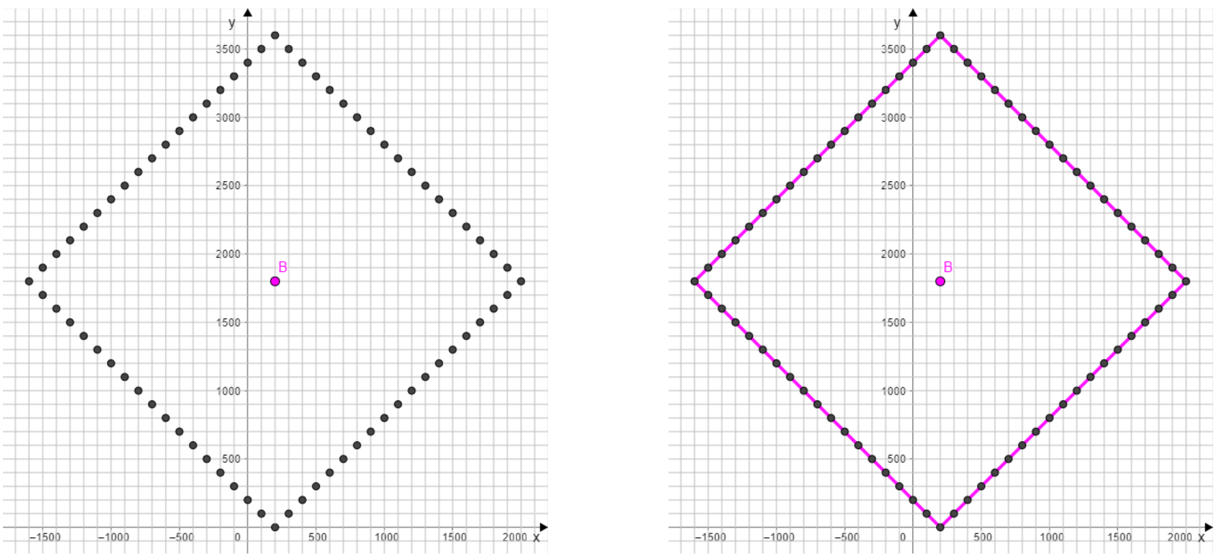
Figura 13 – Pontos B, G, J e C na malha quadriculada.



Fonte: Da autora (2020).

b) Quadrado (losango com todos os ângulos retos).

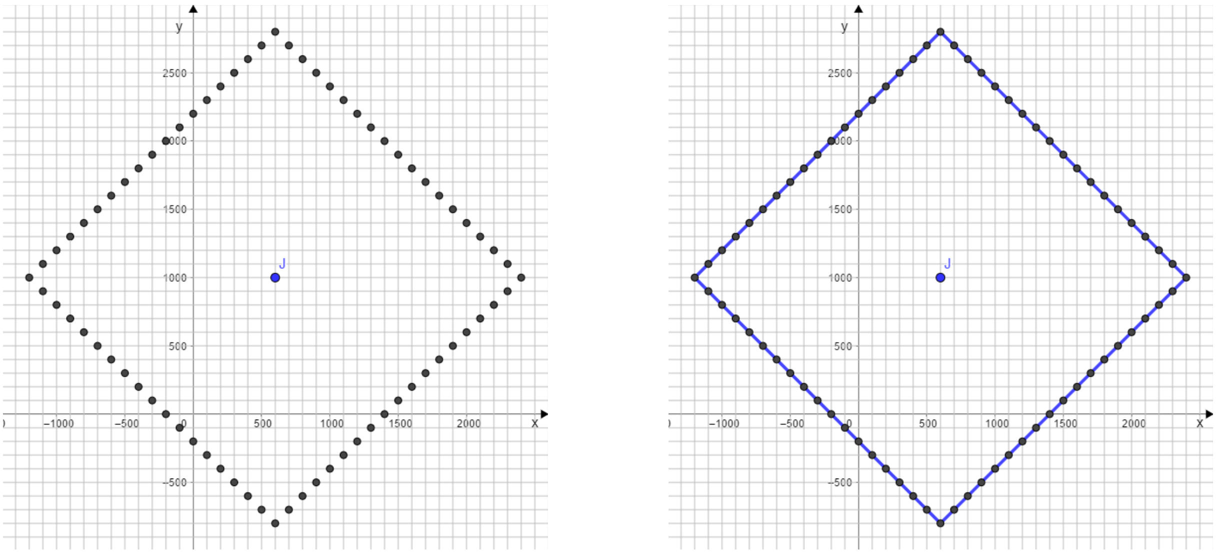
Figura 14 – Pontos que estão a 18 quadras de B.



Fonte: Da autora (2020).

c) Quadrado (losango com todos os ângulos retos).

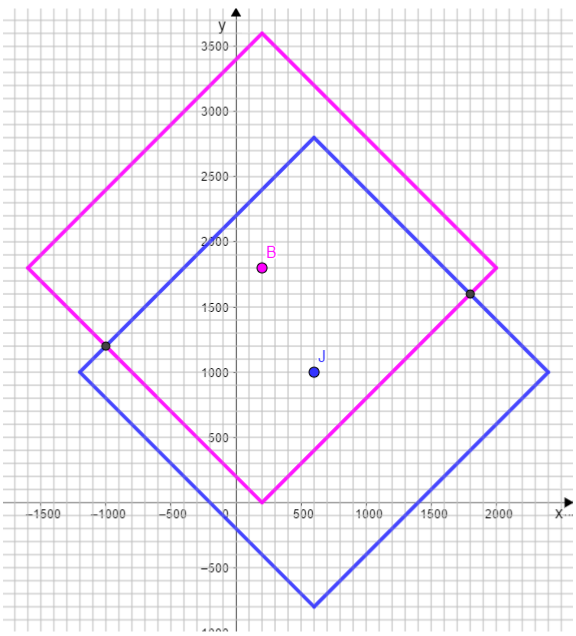
Figura 15 – Pontos que estão a 18 quadras de J.



Fonte: Da autora (2020).

d) Não, pois encontramos dois pontos que estão a 18 quadras de B e a 18 quadras de J simultaneamente.

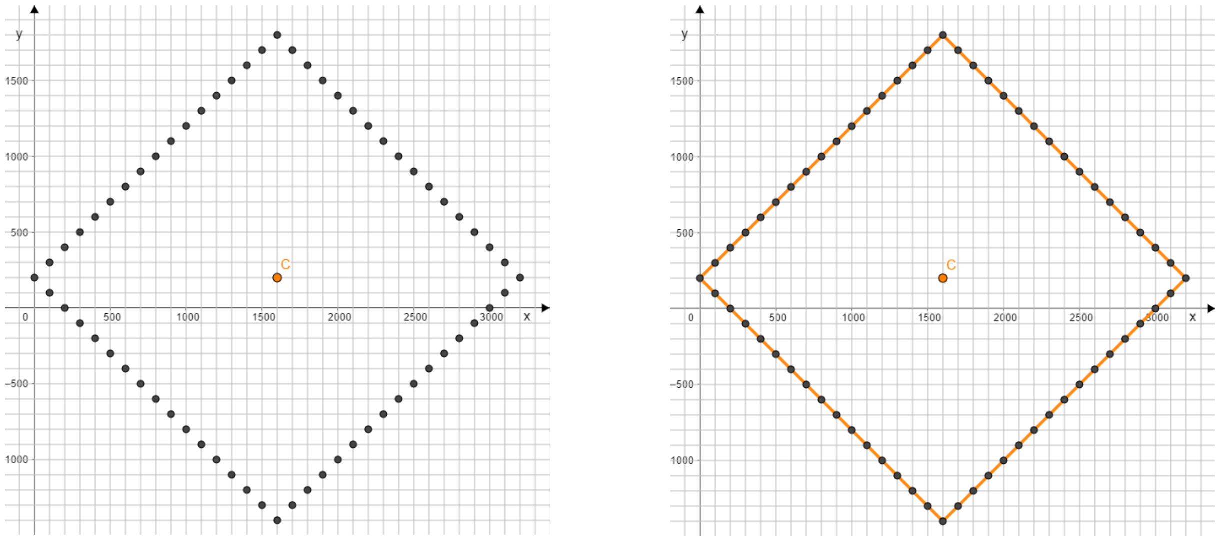
Figura 16 – Pontos que estão simultaneamente a 18 quadras de B e a 18 quadras de J.



Fonte: Da autora (2020).

e) Quadrado (losango com todos os ângulos retos).

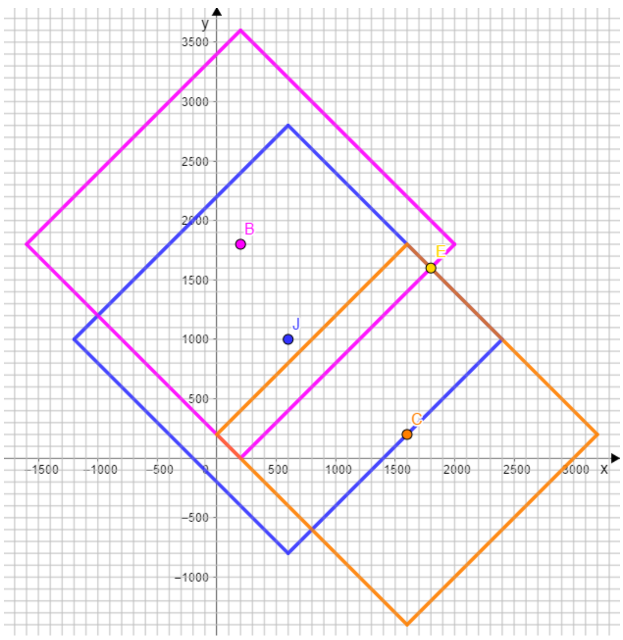
Figura 17 – Pontos que estão a 16 quadras de C.



Fonte: Da autora (2020).

f) Sim. Existe somente um ponto que está simultaneamente a 18 quadras de B, a 18 quadras de J e a 16 quadras de C. Ponto $E = (1800, 1600)$.

Figura 18 – Pontos que estão simultaneamente a 18 quadras de B, a 18 quadras de J e a 16 quadras de C.



Fonte: Da autora (2020).

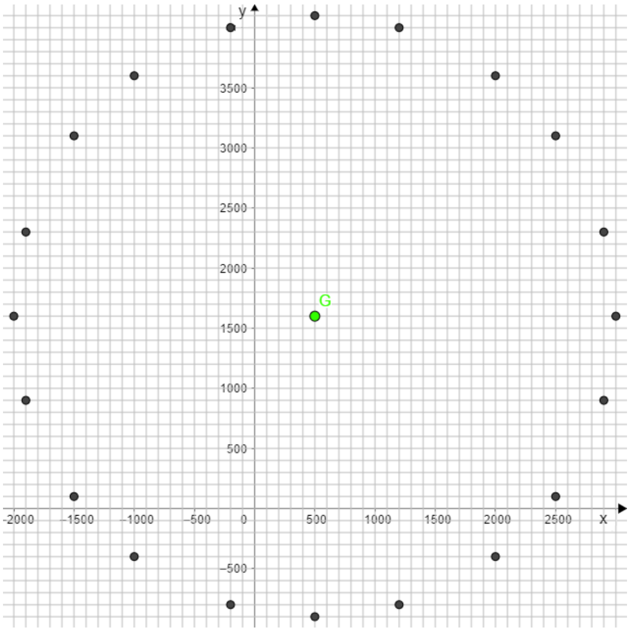
g) Bia: $P_{18}^{16,2} = 153$;

João: $P_{18}^{12,6} = 18564$;

Carla: $C_{16}^{14,2} = 120$.

h)

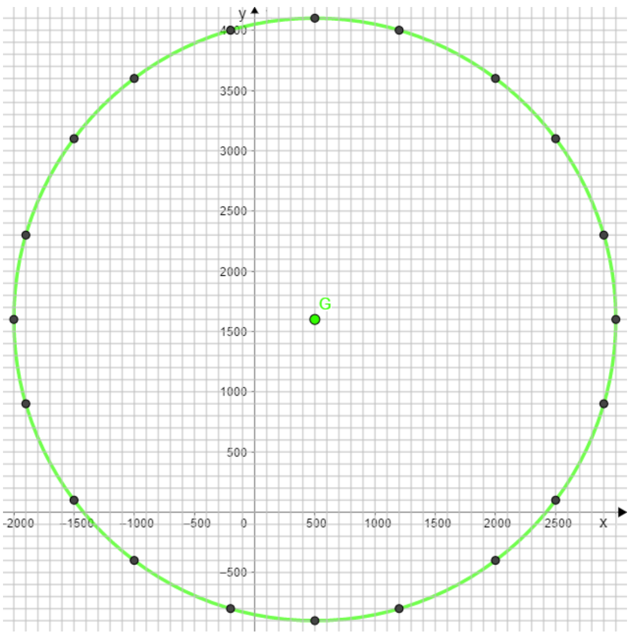
Figura 19 – Pontos que estão a 2,5 quilômetros de *G*.



Fonte: Da autora (2020).

i) Circunferência com centro em G e raio = 2,5 quilômetros.

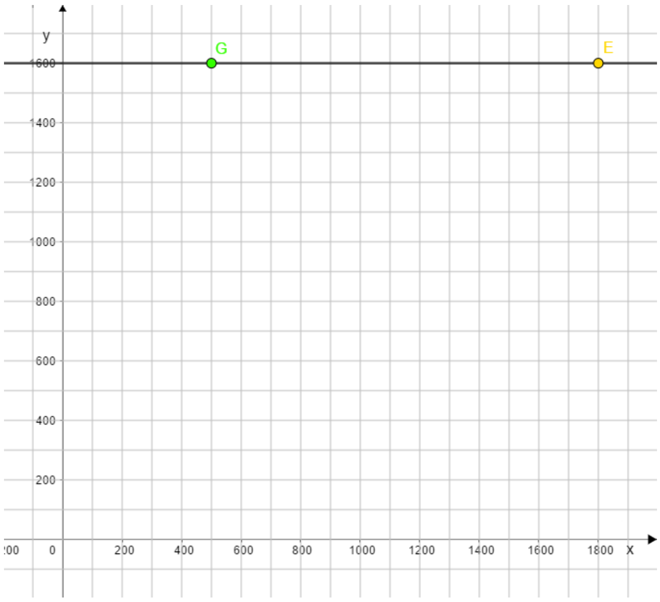
Figura 20 – Conjunto de todos os pontos que estão a 2,5 quilômetros de *G*.



Fonte: Da autora (2020).

j)

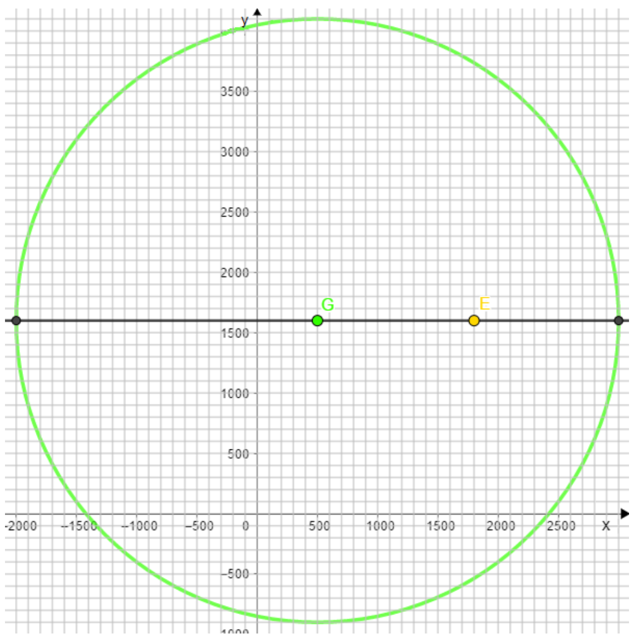
Figura 21 – Reta que contém os pontos G e E.



Fonte: Da autora (2020).

k) O ponto correspondente ao sítio de Ana é o ponto à direita de E, pois como Gabi sairá de G e passará por E para chegar no sítio, então o sítio só pode ser o ponto $A = (3000, 1600)$.

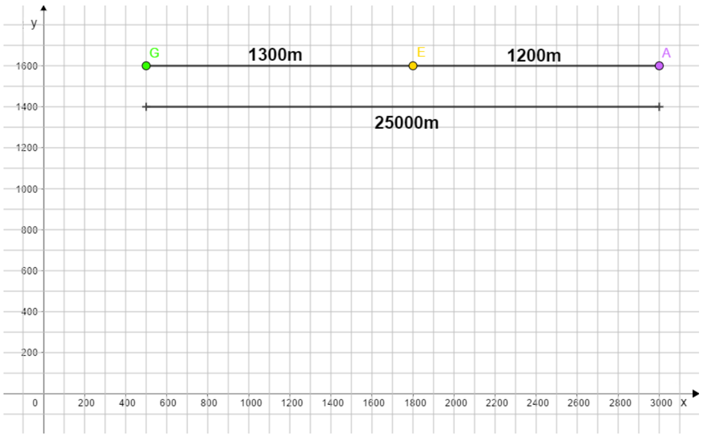
Figura 22 – Pontos de intercessão entre a circunferência e a reta.



Fonte: Da autora (2020).

l) A distância entre E e A é igual a 1200 metros (tanto a euclidiana quanto a do táxi, que acabam resultando na distância entre dois pontos na reta, já que tanto A quanto E estão numa reta paralela ao eixo x).

Figura 23 – Distâncias entre os pontos G e E e E e A.



Fonte: Da autora (2020).

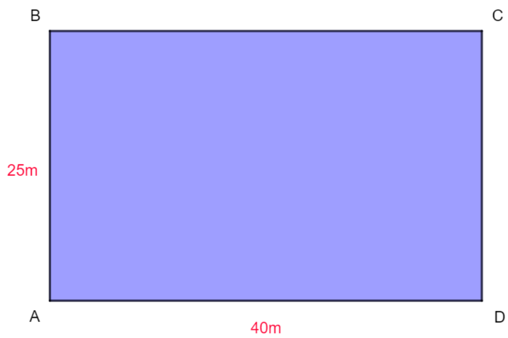
m) As figuras obtidas nos itens b), c) e e) representam a circunferência na geometria do táxi.

Atividade 4: A roseira de Ana

a) 1000 metros.

b) O terreno possui 40 metros de base e 25 metros de altura.

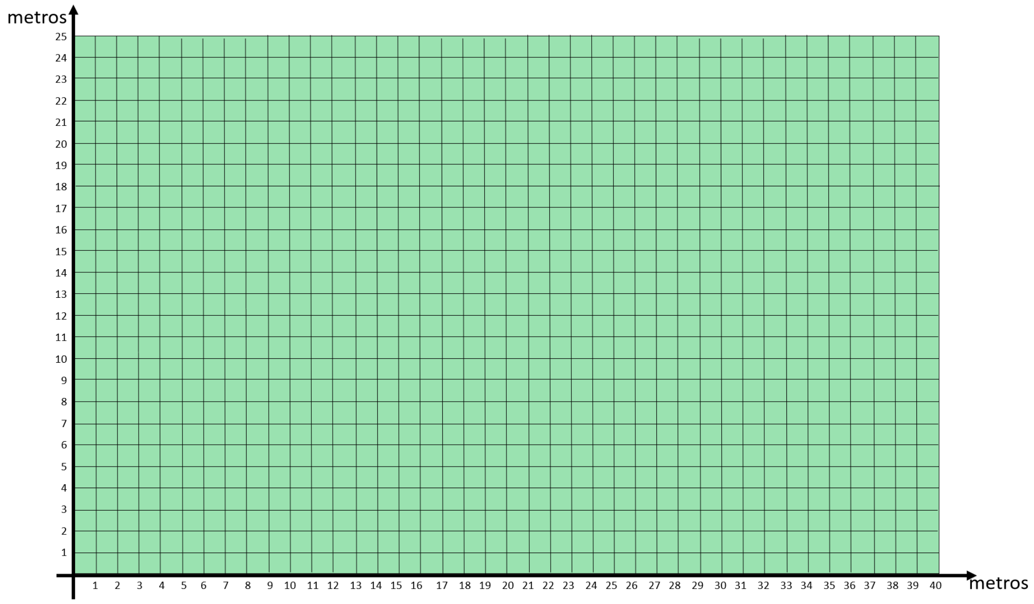
Figura 24 – Dimensões do terreno.



Fonte: Da autora (2020).

c)

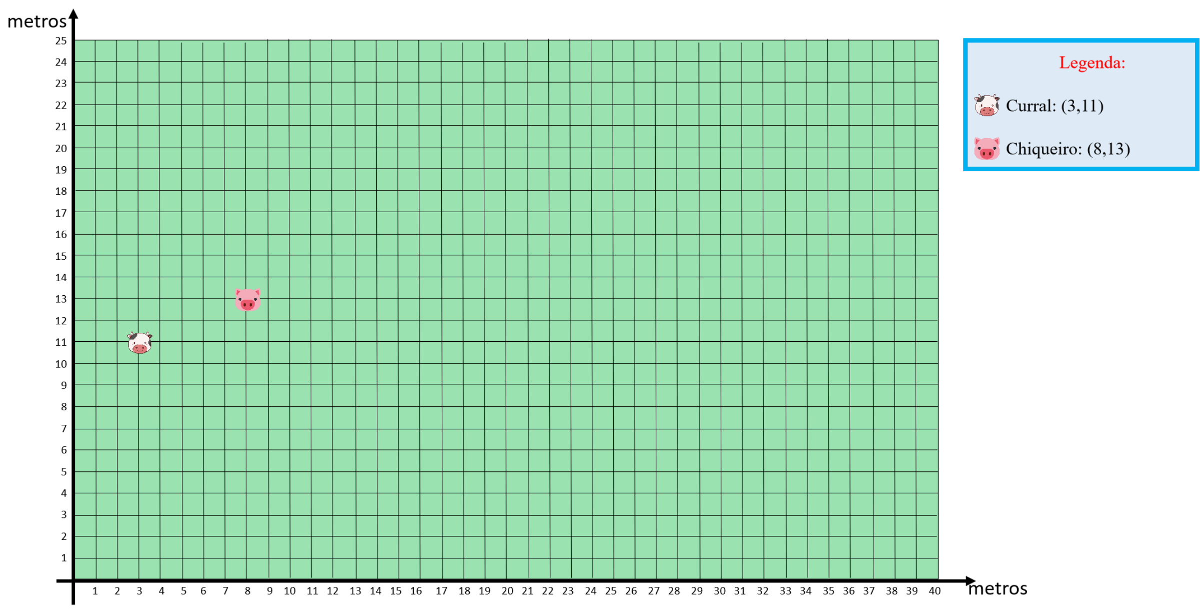
Figura 25 – Representação do terreno no plano cartesiano.



Fonte: Da autora (2020).

d)

Figura 26 – Curral e chiqueiro representados no plano cartesiano.



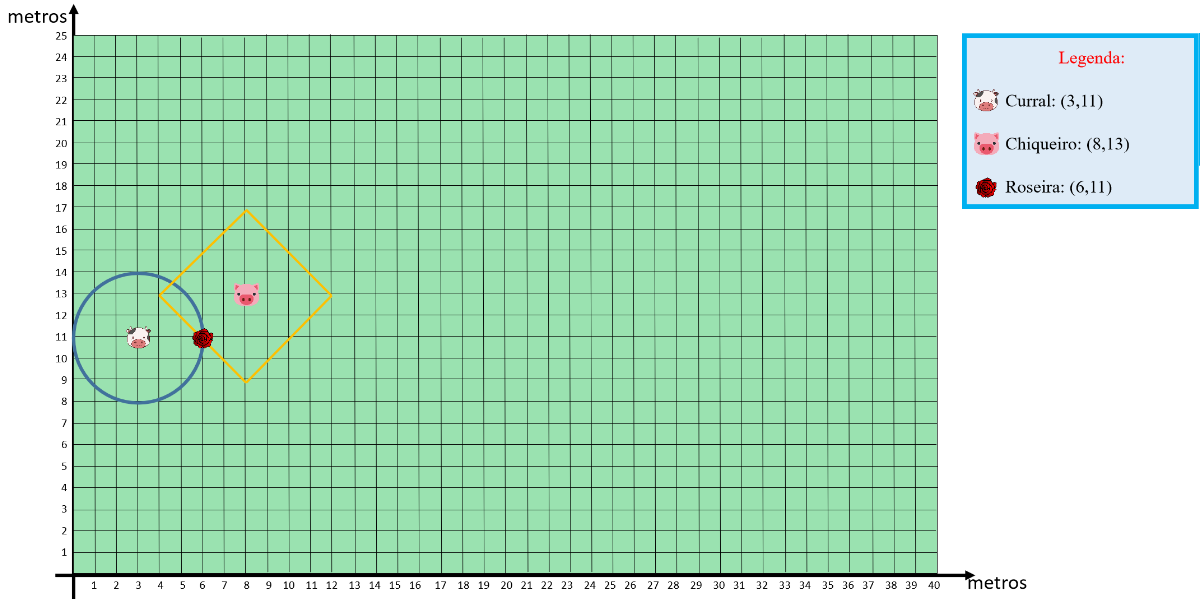
Fonte: Da autora (2020).

e) Passo 1: Circunferência.

Passo 2: Quadrado (losango, com todos os ângulos internos retos).

Passo 3: $(6,11)$

Figura 27 – Localização da roseira.



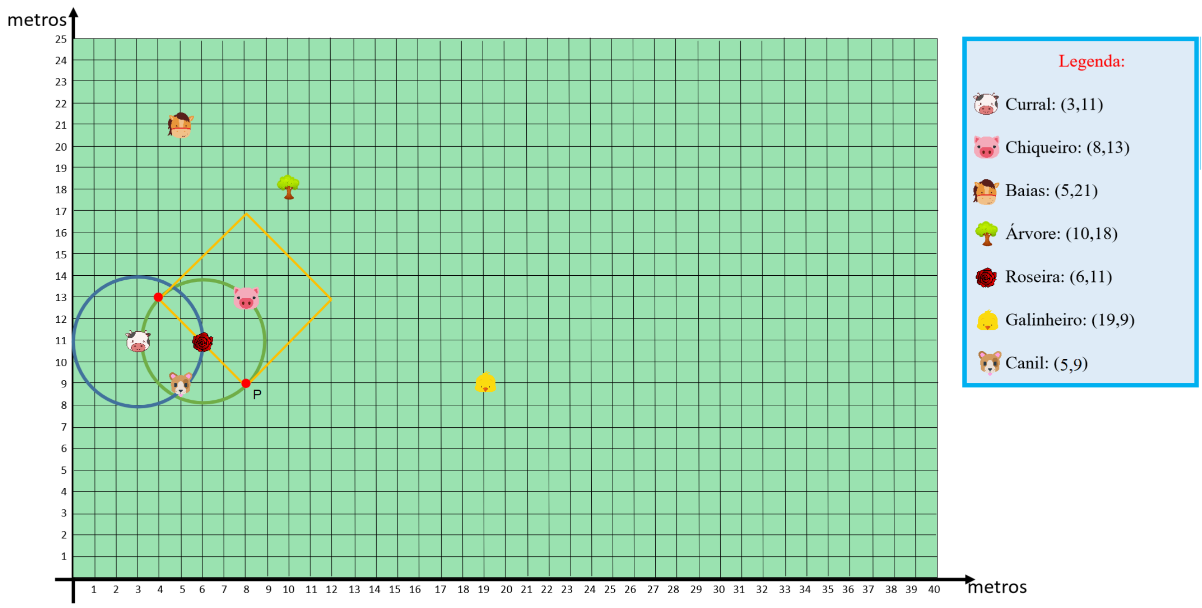
Fonte: Da autora (2020).

f) $\sqrt{8}$ metros $= 2\sqrt{2}$ metros $\approx 2,83$ metros.

g) Resposta 1: Não.

Resposta 2: 2 opções.

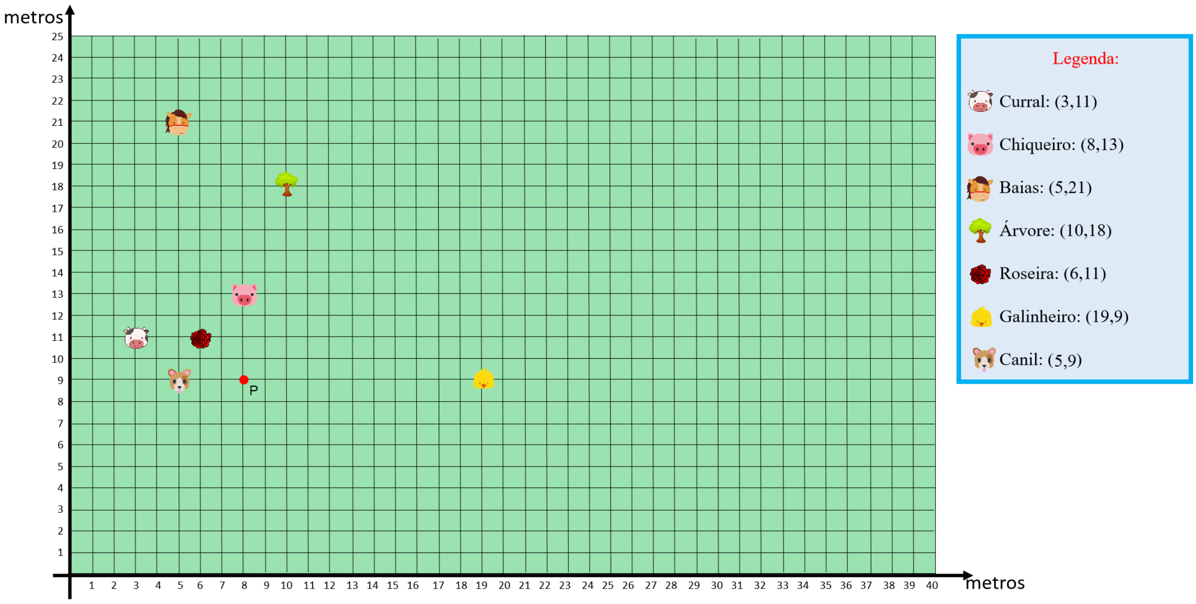
Figura 28 – Possíveis localizações do depósito.



Fonte: Da autora (2020).

h)

Figura 29 – Mapa do sítio com a legenda completa.



Fonte: Da autora (2020).

Algumas opções de resposta:

- possui mesma abscissa do galinheiro;
- a distância entre o depósito e o galinheiro na distância do táxi e na distância euclidiana é de 11 metros;
- a distância entre o depósito e o canil na distância do táxi e na distância euclidiana é de 3 metros.

i) $\sqrt{8}$ metros $= 2\sqrt{2}$ metros $\approx 2,83$ metros.

j) 4 metros.

Atividade 5: Soluções para o sítio

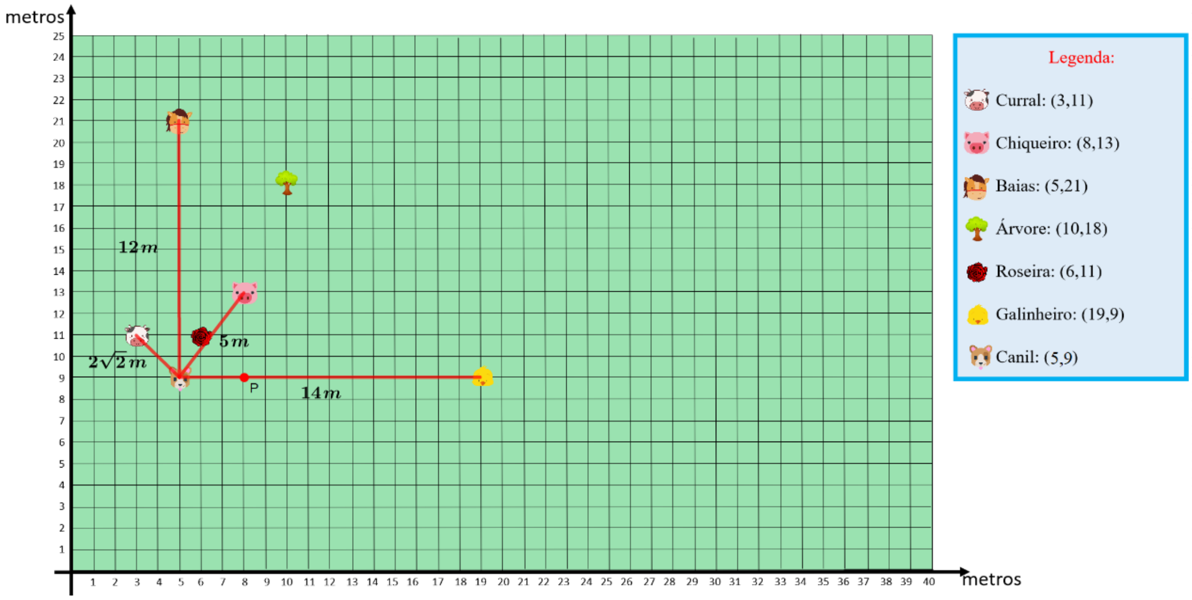
a) $2\sqrt{2}$ metros $\approx 2,82$ metros.

b) 5 metros.

c) 12 metros.

d) 14 metros.

Figura 30 – Distância entre o canil e os outros locais.



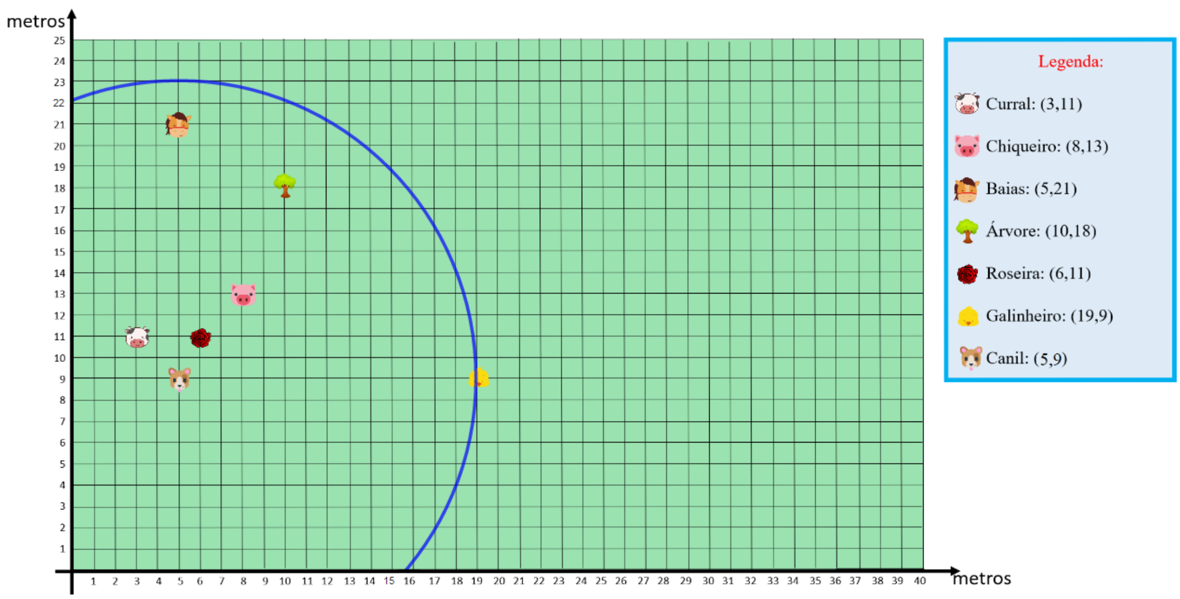
Fonte: Da autora (2020).

e) O galinheiro.

f) 14 metros.

g)

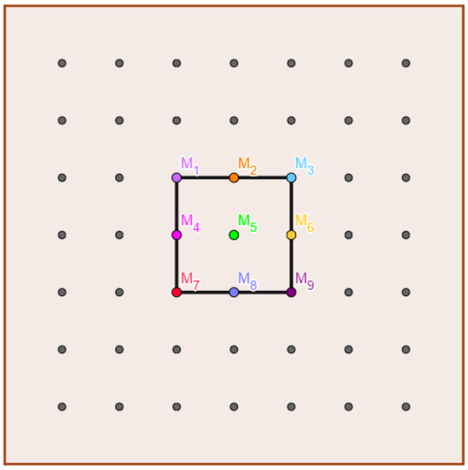
Figura 31 – Limites de onde o cachorro pode chegar.



Fonte: Da autora (2020).

h)

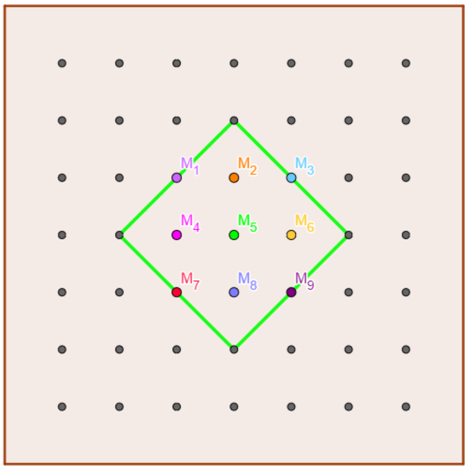
Figura 32 – Posições em que os milhos deverão ser plantados.



Fonte: Da autora (2020).

i)

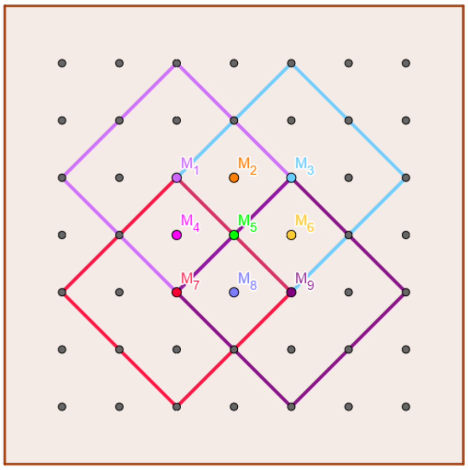
Figura 33 – Isolamento do milho M_5.



Fonte: Da autora (2020).

j)

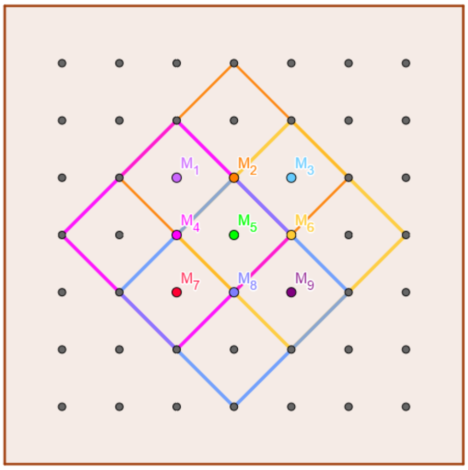
Figura 34 – Isolamento dos milhos M_1, M_3, M_7 e M_9.



Fonte: Da autora (2020).

k)

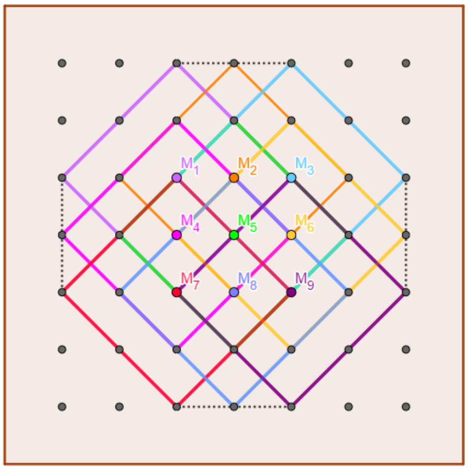
Figura 35 – Isolamento dos milhos M_2, M_4, M_6 e M_8.



Fonte: Da autora (2020).

l)

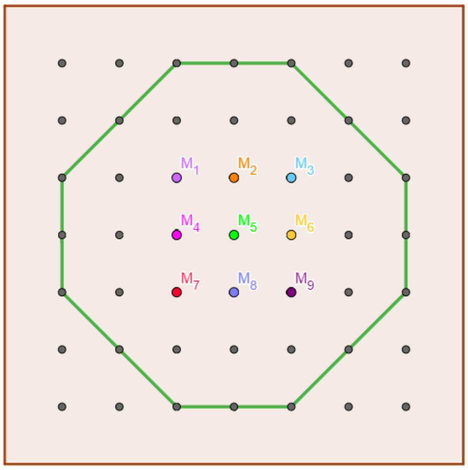
Figura 36 – Isolamento de todos os pés de milho.



Fonte: Da autora (2020).

m) Octágono irregular.

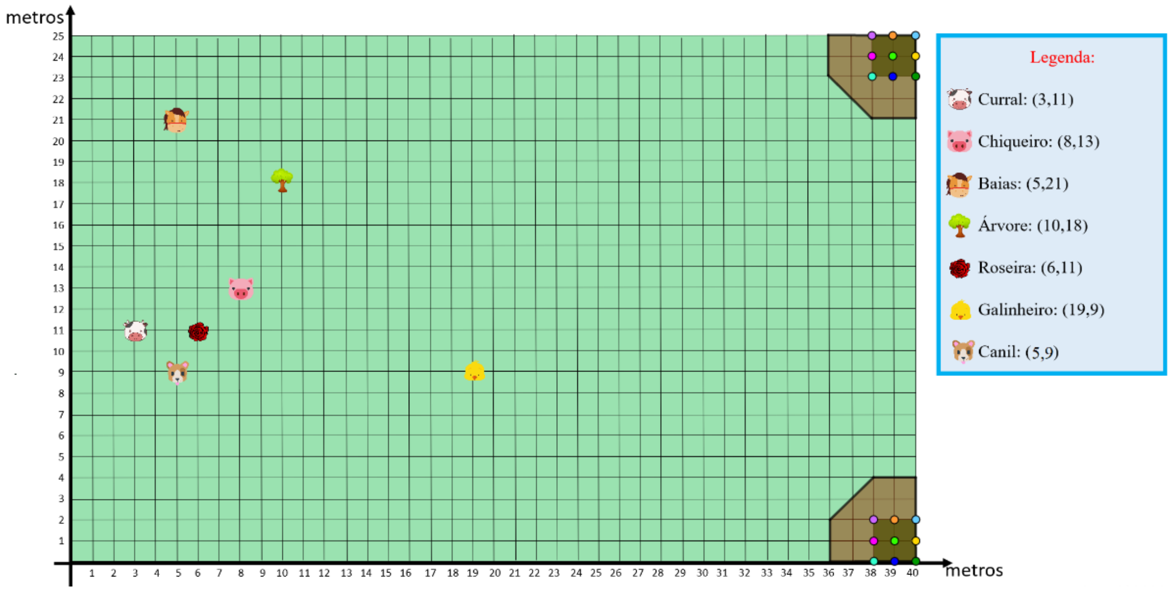
Figura 37 – Octógono irregular.



Fonte: Da autora (2020).

n) Temos 2 opções:

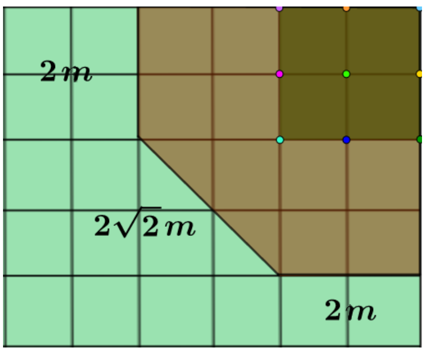
Figura 38 – Melhores locais para a plantação do milho.



Fonte: Da autora (2020).

o) $4+2\sqrt{2}$ metros $\approx 6,82$ metros.

Figura 39 – Medidas da cerca.



Fonte: Da autora (2020).