



FERNANDO PAIM LIMA

**FERRAMENTA COMPUTACIONAL *FUZZY*
PARA APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DE
EXTENSÃO DE ZADEH EM FUNÇÕES
ARITMÉTICAS**

LAVRAS-MG

2011

FERNANDO PAIM LIMA

**FERRAMENTA COMPUTACIONAL *FUZZY* PARA APLICAÇÕES DO
PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH EM FUNÇÕES
ARITMÉTICAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas, área de concentração em Modelagem de Sistemas Biológicos, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Sérgio Martins de Souza

Coorientador

Dr. Onofre Rojas Santos

LAVRAS-MG

2011

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Lima, Fernando Paim.

Ferramenta computacional fuzzy para aplicações do princípio de extensão de Zadeh em funções aritméticas / Fernando Paim Lima. – Lavras : UFLA, 2011.

93 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2011.

Orientador: Sérgio Martins de Souza.

Bibliografia.

1. Princípio de extensão. 2. Incerteza. 3. Imprecisão. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 511.313

FERNANDO PAIM LIMA

**FERRAMENTA COMPUTACIONAL *FUZZY* PARA APLICAÇÕES DO
PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH EM FUNÇÕES
ARITMÉTICAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas, área de concentração em Modelagem de Sistemas Biológicos, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 11 de fevereiro de 2011.

Dr. Antônio Tavares Costa	UFF
Dr. Carlos Bernardes Rosa Júnior	IFMG
Dr. Fortunato Silva de Menezes	UFLA
Dr. Tadayuki Yanagi Júnior	UFLA

Dr. Sérgio Martins de Souza
Orientador

Dr. Onofre Rojas Santos
Coorientador

LAVRAS-MG

2011

A Deus,

À minha família

À minha esposa

Aos meus pais

À minha irmã

À minha sobrinha

Aos meus tios e primos

Aos meus amigos

OFEREÇO

*À minha esposa, Eliane, à minha mãe, Vilma, ao meu pai, Aguiar, à minha irmã,
Flávia, à minha sobrinha, Lívia*

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A vida é uma luta constante, a cada batalha vencida, devemos ter gratidão por aqueles que lutaram ao nosso lado por uma guerra que nem era a deles. Obrigado, meu Deus, por colocar essas pessoas e entidades em meu caminho!

Agradeço aos professores da UFLA que me apresentaram conteúdos importantes com altíssima competência.

Agradeço a meus orientadores, Sérgio Martins de Souza e Onófre Rojas Santos pela paciência, pelos ensinamentos técnico-científicos e pelos ensinamentos de vida. Além de serem meus mestres, foram verdadeiros amigos.

Agradeço aos membros da banca examinadora por aceitarem o convite.

Agradeço aos amigos que fiz em Lavras pelos conselhos e, principalmente, ao Danilo Pires que me ajudou muito a compreender vários temas relacionados ao curso.

Agradeço aos meus pais, Vilma e Aguiar, que sempre me amaram e a quem sempre irei amar, respeitar e admirar, que me proporcionaram todas as boas oportunidades que tive na vida, além do amor, sabedoria, motivação, tudo que um filho poderia querer de seus pais.

Obrigado a minha irmã Flávia por sempre me defender em qualquer circunstância e por ser um exemplo de pessoa batalhadora.

Obrigado à minha esposa Eliane Cristina de Faria Lima... essa, sim, uma das pessoas que mais colaboraram nesta minha batalha. Pelos dias e pelas noites que não pude estar ao seu lado, para que eu pudesse realizar trabalhos e estudos, pelo carinho e compreensão de meus tantos momentos de nervosismo, por ser meu porto seguro nas horas de insegurança, por ser humilde e, ao mesmo tempo, destemida, frágil e soberana, a mulher que escolhi passar todos os dias de minha vida.

Agradeço ao Departamento de Engenharia - DEG pela oportunidade de cursar o Mestrado em Engenharia de Sistemas, o qual me possibilitou produzir este trabalho.

Agradeço à Universidade Federal de Lavras - UFLA que, com sua estrutura, possibilitou a conclusão deste trabalho.

*“Deus calcula vários mundos, mas faz
existir o melhor desses mundos”*

(Leibniz – Séc.XVI d.C.)

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma metodologia computacional que possibilita a aplicação do princípio de extensão de Zadeh da lógica *fuzzy* a funções aritméticas. O princípio de extensão de Zadeh é utilizado para extensão da imprecisão *fuzzy* em modelos matemáticos e que permite o acréscimo de parâmetros *fuzzy* (incertos) a tais modelos, neste trabalho com um, dois ou três parâmetros *fuzzy*. Foram testadas funções não monótonas e funções relacionadas a grandezas termodinâmicas. Assim, utilizando uma ferramenta computacional, foi possível avaliar o comportamento das funções fuzzificadas, de acordo com o aumento da incerteza, por meio do acréscimo de até três parâmetros *fuzzy* e confrontar resultados de defuzzificações ao resultado clássico, possibilitando uma nova forma de análise de tais funções.

Palavras-chave: Lógica *fuzzy*. Princípio de extensão. Parâmetro *fuzzy*. Termodinâmica *fuzzy*.

ABSTRACT

In this work, we presented a computational methodology which allows the application of Zadeh's extension principle of fuzzy logic to arithmetic functions. The extension principle of Zadeh is used to extend the fuzzy uncertain to mathematical models through the addition of fuzzy parameters (uncertain) to such models, in this work with one, two or three fuzzy parameters. We tested non-monotonic functions and related thermodynamics functions. Thus, using a computational tool, was possible to evaluate the behavior of fuzzified functions in accordance with the uncertainty increase, by adding up to three parameters and fuzzy confront the defuzzification results in relation to classical result, enabling a new form for analysis of such functions.

Keywords: Fuzzy logic. The extension principle. Fuzzy parameter. Termodiamic fuzzy.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Figura ilustrativa para a diferenciação de conjuntos fuzzy e crisp.....	22
Figura 2	Fluxograma representativo da implementação computacional do princípio de extensão de Zadeh.....	41
Figura 3	Esquema de deleção de pontos da operação de máxima pertinência.....	48
Figura 4	Interface gráfica do sistema computacional desenvolvido.....	53
Figura 5	Representação do modelo de Ising com 3 campos magnéticos distintos.....	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Funcionamento da ferramenta aritmética com um parâmetro fuzzy.....	45
Tabela 2	Funcionamento da Ferramenta Aritmética com dois parâmetros fuzzy.....	46
Tabela 3	Funcionamento da operação de mínima pertinência.....	47

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1	Representação de um conjunto fuzzy.....	24
Gráfico 2	Representação de um conjunto fuzzy triangular.....	25
Gráfico 3	Representação de um conjunto fuzzy gaussiano.....	26
Gráfico 4	Representação de um conjunto fuzzy trapezoidal.....	27
Gráfico 5	Representação de um conjunto fuzzy crescente.....	28
Gráfico 6	Representação de um conjunto fuzzy decrescente.....	29
Gráfico 7	Operação de interseção.....	30
Gráfico 8	Operação de união.....	31
Gráfico 9	Aplicação do parâmetro fuzzy A a uma função, em que o resultado (fW) não passou pela operação de máxima pertinência.....	33
Gráfico 10	Resultado da aplicação do parâmetro fuzzy A a uma função, antes e depois da operação de suprema (máxima) pertinência.....	34
Gráfico 11	Distâncias entre os três pontos principais (a, b e c) de um número fuzzy triangular.....	42
Gráfico 12	Discretização em 17 pontos x de um número fuzzy triangular.....	43
Gráfico 13	Graus de pertinências (considerando a função de pertinência) para os pontos discretizados de um número fuzzy triangular.....	44
Gráfico 14	Os dois primeiros estágios da operação de máxima pertinência para um número fuzzy em processamento simultâneo de etapas para cada metade do número fuzzy.....	49
Gráfico 15	Ilustração de que em algum estágio possam ocorrer processamentos de etapas simultâneas diferentes em cada parte do número fuzzy.....	49
Gráfico 16	Ilustração da operação de máxima pertinência realizada em apenas um número fuzzy.....	50
Gráfico 17	Ilustração da operação de máxima pertinência realizada em números fuzzy em seqüência ligados por uma malha cinza representando os graus de pertinência.....	50
Gráfico 18	Ilustração da operação de máxima pertinência realizada em números fuzzy em seqüência ligados por uma malha cinza representando os graus de pertinência vista por cima (eixo α).....	51

Gráfico 19	Aplicação do princípio de extensão nos casos A ($W = [1, 2, 3]$) e B ($W = [1, 2, 5]$) para $fW(t) = W \times \cos(t)$	56
Gráfico 20	Casos A e B defuzzificados pelo método de centro de gravidade.....	57
Gráfico 21	Função fuzzy oscilante com parâmetro externo à parte oscilatória pós- princípio de extensão, sendo $W=[0,8; 1; 1,2]$ para $fW(t) = W + \sin(t)$	58
Gráfico 22	Comparação de incertezas para os casos C ($W = [0, 8; 1; 1, 2]$) e D ($W = [0, 95; 1, 00; 1, 05]$) em $fW(t) = \sin(W t)$	59
Gráfico 23	Comparação de defuzzificações com a função crisp para os casos C ($W = [0, 8; 1; 1, 2]$) e D ($W = [0, 95; 1; 1, 05]$) em $fW(t) = \sin(W \times t)$	60
Gráfico 24	Comparação entre defuzzificações entre os casos C ($W = [0, 8; 1; 1, 2]$) e D ($W = [0, 95; 1; 1, 05]$) em $fW(t) = \sin(W \times t)$	61
Gráfico 25	Comparação de defuzzificações para o caso C ($W = [0, 8; 1; 1, 2]$) em $fW(t) = \sin(W t)$	62
Gráfico 26	Comparação entre funções com incertezas diferentes para os casos A ($W = [0, 8; 1, 0; 1, 2]$) e B ($W = [0, 95; 1, 00; 1, 05]$) em $fW(t) = t \sin(W t)$	63
Gráfico 27	Comparação dos resultados antes e depois da operação de máxima pertinência para $fW(t) = W \sin(t)$ (com um parâmetro fuzzy fora da parte oscilante da função) em que $W = [0, 8; 1; 1, 2]$	64
Gráfico 28	Comparação dos resultados antes e depois da operação de máxima pertinência para $fW(t) = \sin(W \times t)$ com o parâmetro fuzzy $W = [0, 8; 1; 1, 2]$ dentro da parte oscilante da função.....	65
Gráfico 29	Resultado da fuzzificação da função $fW,Z(t) = Z \times \sin(W t)$ em que $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$	66
Gráfico 30	Aparente fusão entre incertezas das funções $hW(t)$ e $gW(t)$ resultando em outra função fuzzificada.....	67
Gráfico 31	Defuzzificação da função $fW,Z(t) = Z \times \sin(W \times t)$ em que $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$	68

Gráfico 32	Fuzzificação da função $f_{V,W,Z}(t) = V \sin(W \times t) \times Z$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$	69
Gráfico 33	Defuzzificação da função $f_{V,W,Z}(t) = V \sin(W \times t) \times Z$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$...	70
Gráfico 34	Diferença percentual (%) entre as defuzzificações e o resultado crisp da função $f_{V,W,Z}(t) = V \sin(W \times t) \times Z$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$...	71
Gráfico 35	Função monótona com três parâmetros fuzzy: $f_{V,W,Z}(t) = (W \times t)^2 + (Z \times t) + V$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$	72
Gráfico 36	Defuzzificações na função monótona $f_{V,W,Z}(t) = (W \times t)^2 + (Z \times t) + V$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$	72
Gráfico 37	Diferenças percentuais entre a energia livre fuzzificada (com um parâmetro fuzzy) e a crisp para H_a (número fuzzy) com incertezas em torno de 1.....	76
Gráfico 38	Comparação entre defuzzificações e o resultado crisp para energia livre com três parâmetros fuzzy $H_a=[0,6; 1; 1,4]$, $H_b=[0,6; 1; 1,4]$ e $H_c=[0,35; 0,75; 1,15]$	78
Gráfico 39	Fuzzificação da energia livre com 1 (A_1), 2(B_1) ou 3(C_1) parâmetros fuzzy.....	80
Gráfico 40	Diferenças percentuais comparando os métodos de defuzzificação média dos máximos e centro de gravidade para a energia livre com 1, 2 e 3 parâmetros fuzzy.....	81
Gráfico 41	Fuzzificação da entropia com o parâmetro fuzzy $H_a = [0,6; 1; 1,4]$ e os valores crisp $h_b = 1$ e $h_c = 0,75$	82
Gráfico 42	Defuzzificação da entropia com o parâmetro fuzzy $H_a = [0,6; 1; 1,4]$ e os valores crisp $h_b = 1$ e $h_c = 0,75$	83
Gráfico 43	Fuzzificação da entropia com os parâmetros fuzzy $H_a = [0,6; 1; 1,4]$ e $H_b = [0,6; 1; 1,4]$ e o valor crisp $h_c = 0,75$	84
Gráfico 44	Defuzzificações da entropia com os parâmetros fuzzy $H_a = [0,6; 1; 1,4]$ e $H_b = [0,6; 1; 1,4]$ e o valor crisp $h_c = 0,75$	85

Gráfico 45	Fuzzificação do calor específico com o parâmetro fuzzy $H_a = [0.6; 1; 1.4]$ e os valores crisp $h_b = 1$ e $h_c = 0.75$	86
Gráfico 46	Defuzzificação do calor específico com o parâmetro fuzzy $H_a = [0.6; 1; 1.]$ e os valores crisp $h_b = 1$ e $h_c = 0.75$	86

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	REFERENCIAL	20
2.1	Lógica fuzzy	20
2.1.1	Conjuntos fuzzy	20
2.1.2	Representação fuzzy	23
2.1.2.1	Função de pertinência triangular para o conjunto fuzzy W	25
2.1.2.2	Função de pertinência gaussiana para o conjunto fuzzy W	26
2.1.2.3	Função de pertinência trapezoidal para o conjunto fuzzy W	27
2.1.2.4	Função de pertinência crescente para o conjunto fuzzy W	28
2.1.2.5	Função de pertinência decrescente para o conjunto fuzzy W	29
2.1.3	Operações lógicas com conjuntos fuzzy	30
2.1.3.1	Interseção	30
2.1.3.2	União	31
2.1.4	Números fuzzy	31
2.1.5	Princípio de extensão de zadeh	32
2.1.5.1	Função de pertinência para princípio de extensão com parâmetro fuzzy	32
2.1.5.2	Função de pertinência para princípio de extensão com mais de um parâmetro fuzzy	34
2.1.6	Defuzzificação	35
2.1.6.1	Centro de gravidade	36
2.1.6.2	Centro dos máximos	36
2.1.6.3	Média dos máximos	37
2.2	Lógica fuzzy aplicada à física	37
3	METODOLOGIA	38
3.1	Escopo da implementação computacional de princípio de extensão	38
3.1.1	Definição de entradas e saídas dos sistemas	39
3.1.2	Definição funcional dos módulos internos do sistema	39
3.2	Implementação computacional do princípio de extensão	40
3.2.1	Criação dos parâmetros fuzzy	42
3.2.2	Ferramenta aritmética entre os números fuzzy e números crisp	44
3.2.3	Operação da mínima pertinência	47
3.2.4	Operação de máxima pertinência	48
3.2.5	Operação de defuzzificação dos números fuzzy resposta	51

3.3	Descrição técnica e usual da aplicação computacional desenvolvida.....	51
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	55
4.1	Fuzzificação e defuzzificação com o parâmetro fuzzy “fora” da parte oscilatória da função.....	55
4.2	Fuzzificação e defuzzificação com o parâmetro fuzzy “dentro” da parte oscilatória da função.....	59
4.3	Caracterização de alterações significativas após operação de máxima pertinência (MAX).....	63
4.4	Relação entre fuzzificações com um parâmetro fuzzy resultando em uma fuzzificação com dois parâmetros.....	65
4.5	Fuzzificação de funções com três parâmetros.....	68
4.6	Fuzzificação de algumas grandezas termodinâmicas do modelo de Ising com campos distintos em 3 sítios.....	73
4.6.1	Verificação da consistência do processo de fuzzificação de energia livre.....	75
4.6.2	Comparação entre os métodos de defuzzificação centro de gravidade e média dos máximos para energia livre com três parâmetros fuzzy.....	77
4.6.3	Comparação entre os métodos de defuzzificação centro de gravidade e média dos máximos para energia livre com um, dois ou três parâmetros fuzzy.....	78
4.6.4	Fuzzificação da grandeza termodinâmica entropia.....	82
4.6.5	Observações sobre a fuzzificação da grandeza termodinâmica calor específico.....	85
5	CONCLUSÕES.....	88
	REFERÊNCIAS.....	91

1 INTRODUÇÃO

Em várias obras na literatura, retrata-se a ideia de que, com a utilização de ferramentas heurísticas, é possível obter informações relevantes de modelos matemáticos determinísticos por meio de simulação computacional.

Segundo Barros e Bassanezi (2006), a teoria dos conjuntos *fuzzy* é uma metodologia heurística recente, do ponto de vista de historiografia, cada vez sendo mais usada como ferramenta para formulação de modelos.

Inicialmente, a Lógica *Fuzzy* recebeu várias críticas (principalmente por matemáticos) insinuando que se tratava de um afrouxamento do pensamento lógico. Em contrapartida, não são raras as situações em que a lógica “tradicional” não consegue explicar determinado fenômeno de forma exata (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Hoje em dia, a lógica *fuzzy* é muito difundida e tem sido muito utilizada, sendo aplicada nas mais diversificadas áreas da ciência (LEE; WANG, 2010) e da indústria (GENG, 2009), para reconhecimento de padrões (WAN, 2010), previsões (KILIC et al., 2010), apoio à decisão (VASSANT, 2004).

A motivação para este trabalho se dá, além da aplicabilidade da teoria, a flexibilidade da técnica, facilidade de compreensão de conceitos, principalmente, pela possibilidade de desenvolvimento técnico, científico e analítico da ferramenta *fuzzy* de princípio de extensão de Zadeh em uma modelagem computacional.

Objetivou-se neste trabalho a realização da modelagem e implementação de uma ferramenta computacional *fuzzy* de princípio de extensão de Zadeh, no intuito de ser utilizada em modelos matemáticos que possam ser escritos em forma de função aritmética, com o intuito de ser utilizada na aplicação do princípio de extensão de Zadeh em funções aritméticas não monótonas e em algumas grandezas físicas termodinâmicas.

2 REFERENCIAL

2.1 Lógica *fuzzy*

Criada por Lotfi A. Zadeh, professor da Universidade da Califórnia (ZADEH, 1965), a lógica *fuzzy* pode ser entendida como uma lógica que permite quantificar suas possibilidades. Fazendo um comparativo com a lógica booleana, entende-se que com a lógica *fuzzy*, é possível quantificar o quanto algo é falso e o quanto algo é verdadeiro (PIRES, 2007).

De um modo mais abrangente, a lógica *fuzzy* possibilita tratar expressões imprecisas (sejam linguísticas ou matemáticas), em vários graus de imprecisão, podendo traduzir de forma discretizada, os termos complexos da interpretação humana em valores compreensíveis por sistemas computacionais.

Diferentemente da lógica *fuzzy*, a lógica clássica não fornece recursos para se trabalhar em situações com imprecisões, pois, utiliza o conceito de que só são aceitos dois valores: verdadeiro ou falso, de forma a não permitir que determinada suposição seja parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa.

Apesar da afirmativa de Cox (1995 apud MELO, 2007) de que conceitos básicos que diferenciam a lógica *fuzzy* da lógica booleana já existiam antes, ainda, de Aristóteles, o crédito pela criação da teoria é todo depositado em Zadeh.

2.1.1 Conjuntos *fuzzy*

Diferentemente dos conjuntos da teoria clássica (chamados de *crisp*), os conjuntos *fuzzy* têm a flexibilidade de poder não ser tão rígidos. Nos conjuntos *crisp* um elemento “X” pode ou não pertencer ao conjunto universo “Y”. Já nos conjuntos *fuzzy* pode ser medido em graus de pertinência (chamados, também,

de α -níveis) o quanto o elemento “X” pertence ao conjunto universo “Y” (PEDRYCZ; GOMIDE, 1998).

De forma rígida (é ou não é) a seguir é exibida a função característica para conjuntos *crisp*:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

Seja U um conjunto e A um subconjunto de U, a função característica de A se dá por $\chi_A(x)$ em que o domínio é U e a imagem está no conjunto {0,1}. Assim, quando $\chi_A(x) = 1$, indica que determinado elemento x está em A e quando $\chi_A(x) = 0$, indica que o elemento x não faz parte de A.

Embora em alguns casos, *Crisp* não seja possível dizer que um elemento pertença efetivamente a conjunto ou não, pode-se dizer que determinado elemento se caracteriza melhor em determinado conjunto. Por exemplo, considerando o subconjunto dos números reais próximos de 0:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ é próximo de } 0\} \quad (2)$$

É impreciso dizer que os números 7 e 0,001 pertencem a A, apenas pode-se fazer a afirmação que 0,001 é mais próximo de 0 do que 7. Dessa forma, nota-se que a rigidez dos conjuntos *crisp*, sendo observado, a seguir, que A é melhor representado como um conjunto *fuzzy*.

De forma mais flexível (em forma de graus de pertinência no intervalo de 0 a 1) é exibida a caracterização da função de pertinência para conjuntos *fuzzy*:

$$\varphi_S: U \rightarrow [0, 1] \quad (3)$$

Cada elemento em um conjunto *fuzzy* possui um índice quantitativo referente à pertinência do elemento em relação a esse determinado conjunto. Tal índice quantitativo é dado pela função de pertinência do determinado conjunto *fuzzy*.

Portanto pode-se representar um conjunto *fuzzy* como um conjunto de pares ordenados em que se tem o valor do elemento e o índice quantitativo dentro do intervalo de [0,1]:

$$F = \{(x, \varphi_{S(x)}) \text{ em que } x \in U\} \quad (4)$$

A Figura 1 ilustra a diferença entre conjuntos *fuzzy* e *crisp*:

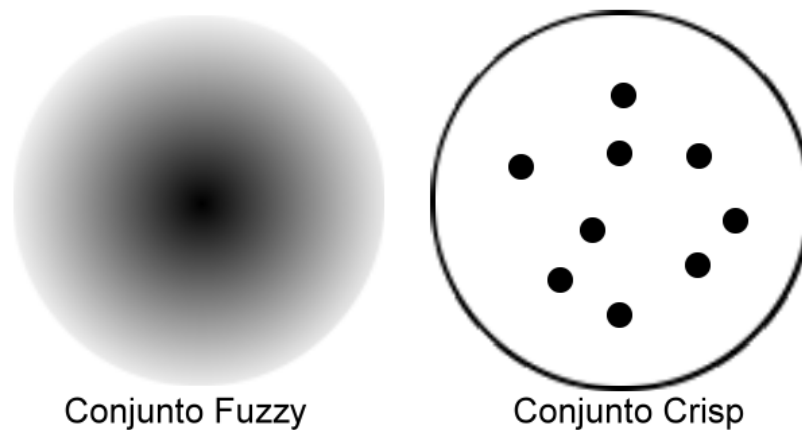


Figura 1 Figura ilustrativa para a diferenciação de conjuntos *fuzzy* e *crisp*

É notório que o conjunto *crisp* (circulo) determina somente se o elemento (pontos) pertence ou não pertence ao conjunto, já o conjunto *fuzzy* indica quantitativamente, no intervalo de [0,1], o quanto cada elemento pertence ao conjunto, tal índice é chamado de pertinência (escala em cinza)

2.1.2 Representação *fuzzy*

A representação simbólica *fuzzy* tem particularidades que devem ser observadas, por exemplo, o sinal “/” não indica uma divisão aritmética, é um simples delimitador. Já os sinais \square e Σ não indicam integral ou somatório, indicam simplesmente que existem vários elementos.

Sendo assim, a representação de um conjunto *fuzzy* é dada na equação (5):

$$\sum_{i=1}^n \varphi_A(x_i)/x_i \quad \text{ou} \quad \int \varphi_A(x)/x \quad (5)$$

Assim, pode ser observado que o um conjunto *fuzzy* é um conjunto de pares ordenados em que cada par é representado por: $\varphi_A(x)/x$, onde x significa o elemento $\varphi_A(x)$ significa o grau ou nível de pertinência que o elemento tem em relação ao conjunto *fuzzy*.

Como o grau de pertinência deve estar contido no intervalo de [0,1], quanto mais próximo de 1 for o grau de pertinência, maior será a pertinência do elemento no o conjunto *fuzzy*, como representado no Gráfico 1.

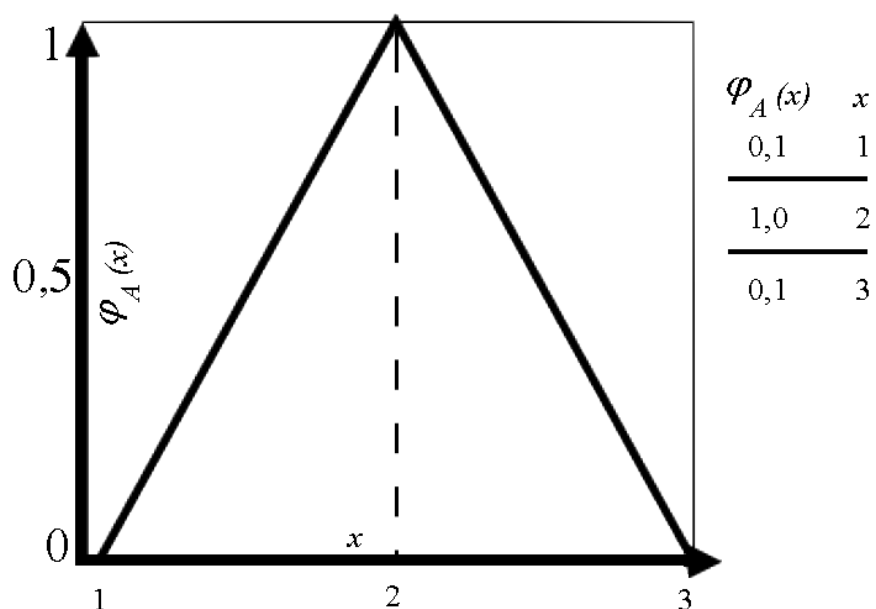


Gráfico 1 Representação de um conjunto *fuzzy*

Para se obter os graus de pertinência é necessário submeter o valor do elemento x a uma função, chamada função de pertinência.

Existem vários tipos de funções de pertinência, mas o ideal é que os tipos de funções de pertinência sejam definidos, considerando a experiência do desenvolvedor para cada caso. Abaixo se ilustram alguns tipos de funções de pertinência, as de forma triangular, trapezoidal, gaussiana, crescente e decrescente.

2.1.2.1 Função de pertinência triangular para o conjunto *fuzzy* W

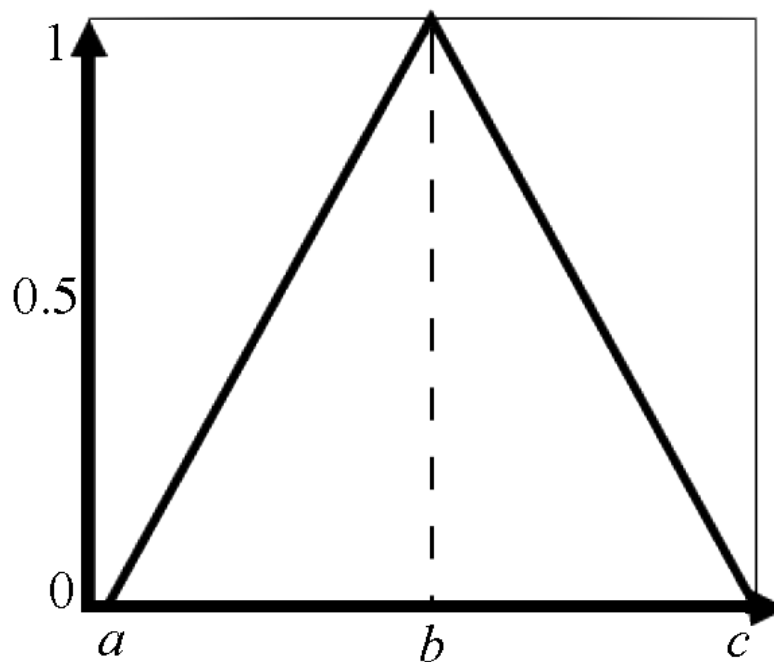


Gráfico 2 Representação de um conjunto *fuzzy* triangular

Sendo $\delta_1 = b - a$, $\delta_2 = c - b$ e $x_0 = b$:

$$\varphi_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq x_0 - \delta_1 \text{ ou } x \geq x_0 + \delta_2 \\ \frac{x - x_0 + \delta_1}{\delta_1}, & \text{se } x_0 - \delta_1 < x \leq x_0 \\ \frac{x_0 + \delta_2 - x}{\delta_2}, & \text{se } x_0 \leq x < x_0 + \delta_2 \end{cases} \quad (6)$$

2.1.2.2 Função de pertinência gaussiana para o conjunto *fuzzy* W

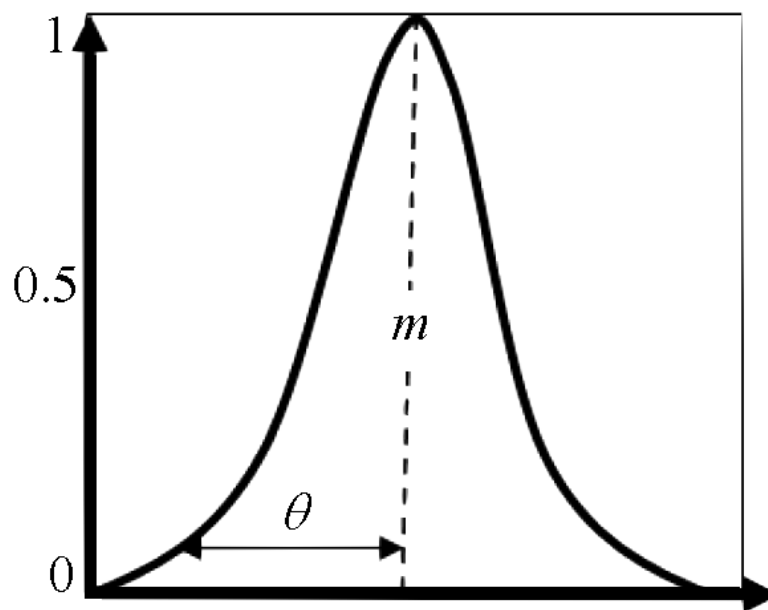


Gráfico 3 Representação de um conjunto *fuzzy* gaussiano

Onde θ representa o desvio padrão dos dados e m a média:

$$\varphi_W(x) = \{e^{-\theta(x-m)^2}\}, \text{ se } \theta > 0 \quad (7)$$

2.1.2.3 Função de pertinência trapezoidal para o conjunto *fuzzy* W

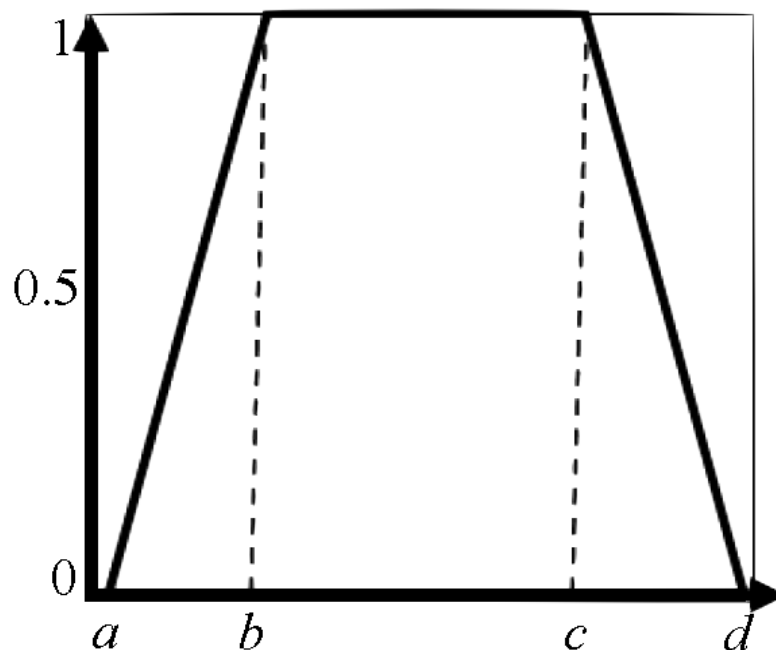


Gráfico 4 Representação de um conjunto *fuzzy* trapezoidal

Sendo $\delta_1 = b - a$ e $\delta_2 = d - c$:

$$\varphi_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \text{ ou } x \geq d \\ \frac{x - a + \delta_1}{\delta_1}, & \text{se } a < x \leq b \\ 1, & \text{se } b < x < c \\ \frac{c + \delta_2 - x}{\delta_2}, & \text{se } c \leq x < d \\ 0, & \text{se } x \geq d \end{cases} \quad (8)$$

2.1.2.4 Função de pertinência crescente para o conjunto *fuzzy* W

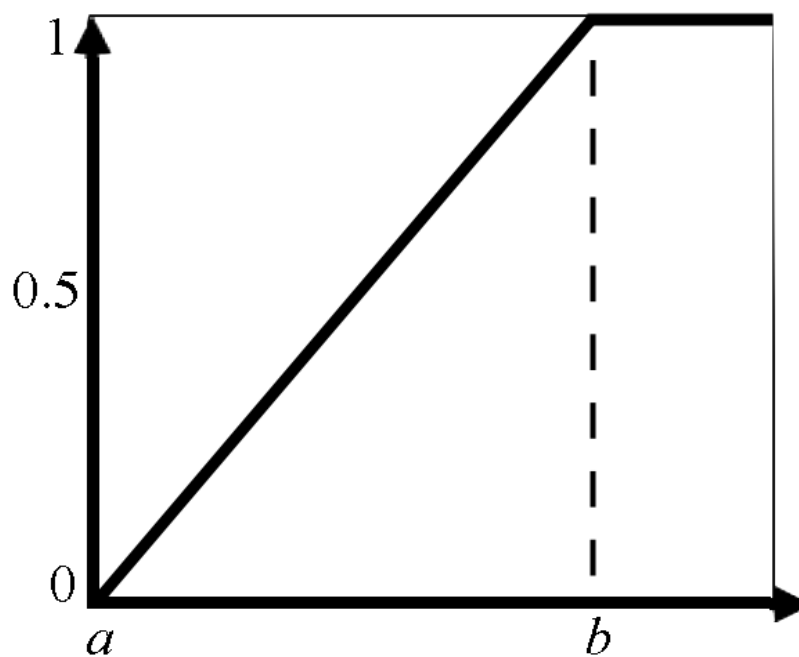


Gráfico 5 Representação de um conjunto *fuzzy* crescente

Sendo $\delta_1 = b - a$:

$$\varphi_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x - a + \delta_1}{\delta_1}, & \text{se } a < x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \end{cases} \quad (9)$$

2.1.2.5 Função de pertinência decrescente para o conjunto *fuzzy* W

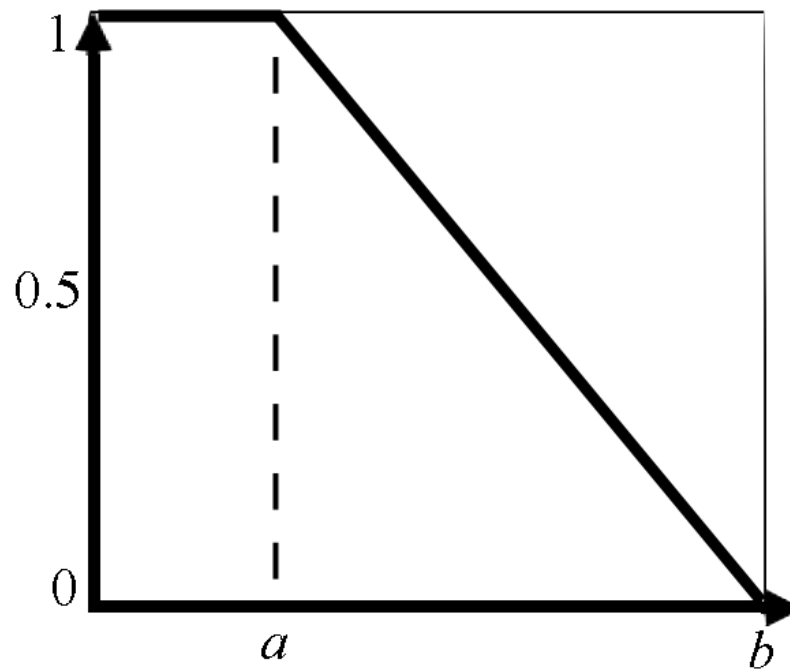


Gráfico 6 Representação de um conjunto *fuzzy* decrescente

Sendo $\delta_2 = b - a$:

$$\varphi_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq a + \delta_2 \\ \frac{a + \delta_2 - x}{\delta_2}, & \text{se } a \leq x < a + \delta_2 \\ 1 & \text{se } x \leq a \end{cases} \quad (10)$$

Um determinado elemento pode pertencer a mais de um conjunto *fuzzy*, com diferentes ou iguais graus de pertinência, quantificando a relação deste elemento para cada um dos conjuntos *fuzzy* envolvidos.

2.1.3 Operações Lógicas com Conjuntos *Fuzzy*

Existem vários tipos de operações com conjuntos *fuzzy* como as de união e interseção.

Existem várias formas de se tratar operações lógicas entre conjuntos *fuzzy*, mas, uma forma simples de se descrever tais operações é a utilização dos operadores $\min()$ e $\max()$ para representação de interseção e união *fuzzy* (PEDRYCZ; GOMIDE, 1998).

2.1.3.1 Interseção

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min(\varphi_A(x), \varphi_B(x)) \quad (11)$$

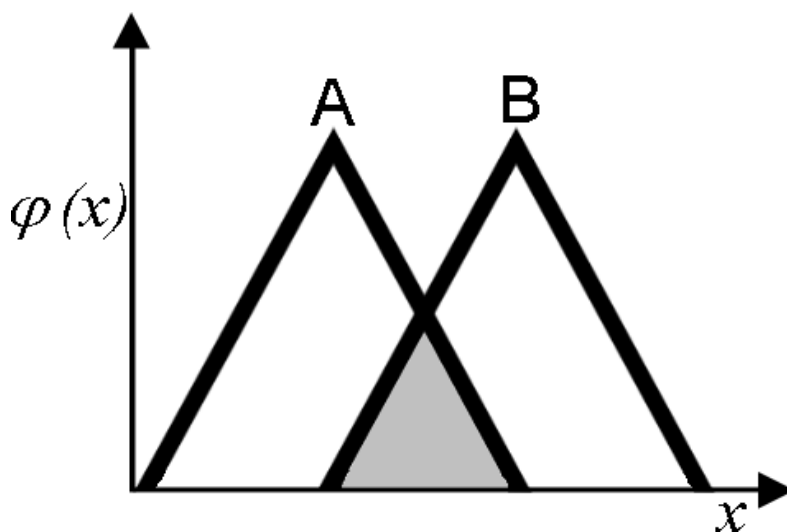


Gráfico 7 Operação de interseção

2.1.3.2 União

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max(\varphi_A(x), \varphi_B(x)) \quad (12)$$

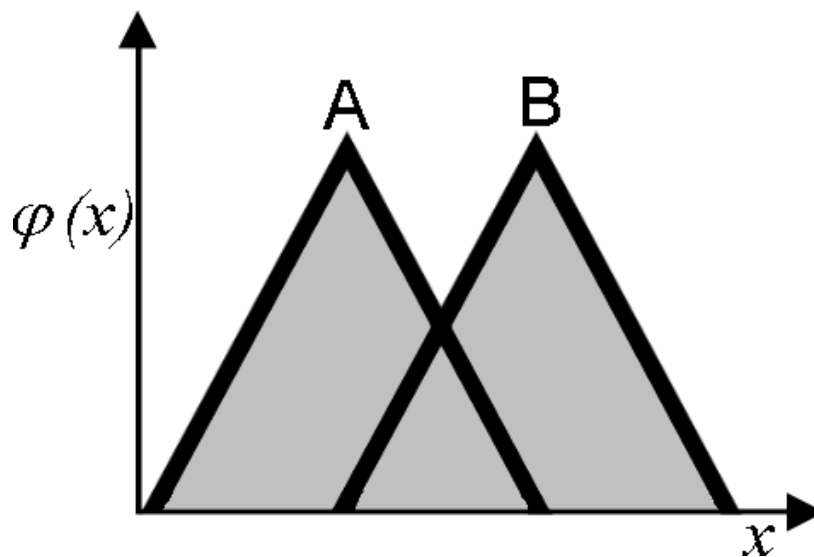


Gráfico 8 Operação de união

Existem muitas outras formas de operações lógicas fuzzy, para mais detalhes consultar (PEDRYCZ; GOMIDE, 1998).

2.1.4 Números fuzzy

Pela definição de Barros e Bassanezi (2006), um determinado conjunto *fuzzy* é um número *fuzzy*, quando sua função de pertinência está definida no conjunto dos números reais, em que todos seus graus de pertinência não sejam vazios e compreendidos entre 0 e 1, todos seus α -níveis sejam intervalos fechados.

Como os números *crisp* na matemática clássica, uma utilidade dos números *fuzzy* é permitir a realização de operações matemáticas, mas, no caso dos números *fuzzy*, tais operações têm resultados imprecisos.

Informações detalhadas sobre números *fuzzy* podem ser obtidas em Barros e Bassanezi (2006).

2.1.5 Princípio de extensão de zadeh

Princípio da extensão pode ser considerado como a mais importante ferramenta da teoria dos conjuntos *fuzzy* e permite definir operações referentes às funções matemáticas (LIMA, 2003).

Encontram-se na literatura (BARROS, 1997) informações que o Princípio da Extensão de Zadeh é uma ferramenta indispensável para a matemática, em modelagem de fenômenos da natureza, que possuem um grande grau de incerteza.

De maneira geral, pode-se afirmar que princípio de extensão permite estender operações aritméticas para os conjuntos *fuzzy*.

A utilização prática do princípio de extensão consiste na aplicação de um ou mais números *fuzzy* a uma equação matemática. Após isso, são executadas as operações de mínima e suprema (máxima) pertinência.

2.1.6 Função de pertinência para princípio de extensão com um parâmetro *fuzzy*

Seja A um parâmetro *fuzzy* de entrada para uma função f , $\mu_A(x)$ é a função de pertinência de A e W um número *fuzzy* resposta (determinado por A aplicado em f) (KAO, 2010):

$$\varphi_{f^{-1}}(y) = \begin{cases} \max_{x=f(x)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (13)$$

Primeiramente, todos os valores em x são aplicados na função f . Cada resultado herda a pertinência relacionada a seu x original do número *fuzzy* A (TANAKA, 1991), ilustrado no Gráfico 9.

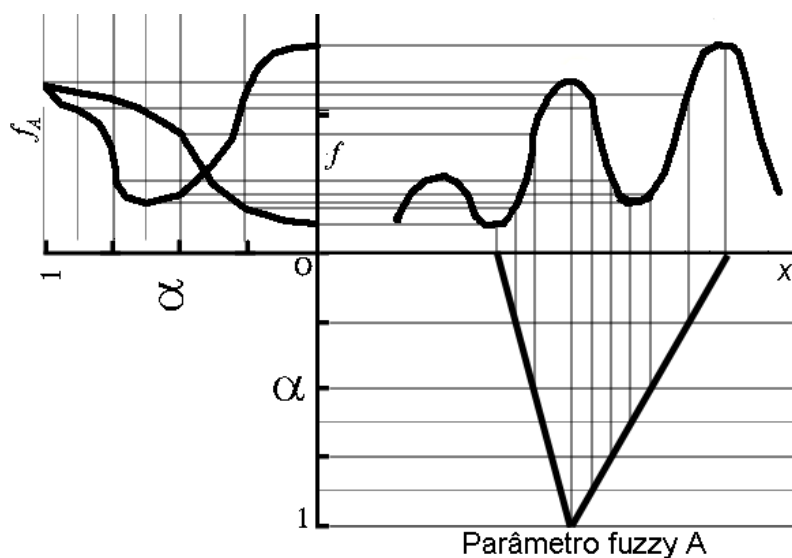


Gráfico 9 Aplicação do parâmetro *fuzzy* A a uma função, em que o resultado (f_w) não passou pela operação de máxima pertinência

Por último, permanecem somente as supremas (máximas) pertinências (alfa níveis) com os valores $f(x)$, isto é, quando houver um valor x com mais de uma pertinência, permanecerá a pertinência de maior valor (operação de **max**), pois, a outra é descartada como ilustra o Gráfico 10.

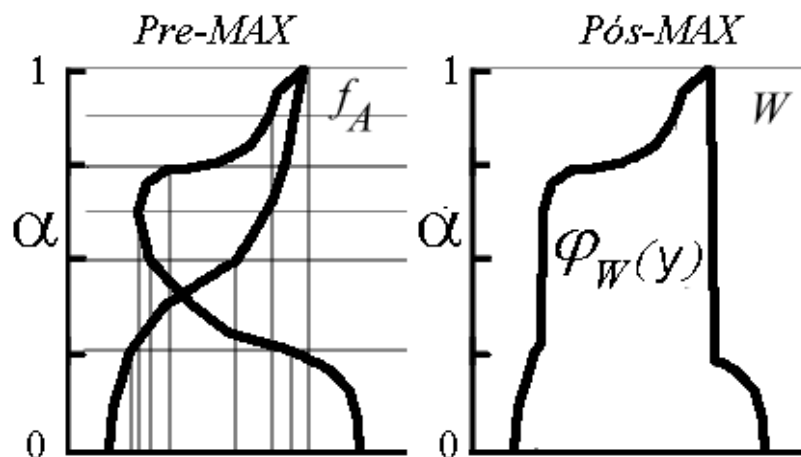


Gráfico 10 Resultado da aplicação do parâmetro *fuzzy* A a uma função, antes e depois da operação de suprema (máxima) pertinência

2.1.7 Função de pertinência para princípio de extensão com mais de um parâmetro *fuzzy*

Seja W um número *fuzzy* resposta, A_1, A_2, \dots, A_n parâmetros *fuzzy* de entrada para uma função f e $\varphi_{A_i}(x_i)$ é a função de pertinência de A_i .

Estendendo a função f ,

$$f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y, \quad (14)$$

obtem-se a relação entre o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ dos conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n em X e um conjunto *fuzzy*

$B = (f(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n))$ em Y tal que:

$$\varphi_{W'}(y) = \begin{cases} \max_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \min(\varphi_{A_1}(x_1), \dots, \varphi_{A_n}(x_n)) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (15)$$

em que, $f^{-1}(y)$ é a imagem inversa de y .

- a) Primeiramente são executados todos os valores de cada x na função f ;
- b) Em seguida, para cada valor x que houver mais de uma pertinência, são seleccionadas as menores pertinências $\varphi_{A_i}(x_i)$;
- c) Por último, são retornadas as supremas pertinências, isto é, considerando todos os parâmetros de entrada, quando houver um valor x_i com mais de uma pertinência, será preservada a pertinência de maior valor, a suprema pertinência.

2.1.8 Defuzzificação

A defuzzificação pode ser descrita como uma rotina matemática (pode ser implementada de forma computacional) que visa transformar um número *fuzzy* (geralmente quando este número *fuzzy* é a resposta de um sistema *fuzzy*) em um número *crisp* (clássico) (TANAKA, 1991).

Existem vários métodos de defuzzificação, sendo os mais comuns: centro de gravidade, (centroide ou centro de área), centro dos máximos e média dos máximos (BARROS; BASSANEZI, 2006).

2.1.8.1 Centro de gravidade

Este método de defuzzificação funciona de forma semelhante a uma média ponderada para uma distribuição de dados, ele retorna a média das áreas que representam os graus de pertinência. Talvez seja o método de defuzzificação preferido pela comunidade científica *fuzzy* (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Assim, sendo $\varphi_A(x_i)$ indica a pertinência para cada valor x_i de um número *fuzzy* (SHAW; SIMÕES, 1999).

$$c(A) = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \varphi_A(x_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_A(x_i)} \quad (16)$$

2.1.8.2 Centro dos máximos

Semelhante a uma média ponderada para uma distribuição, porém, para tal distribuição são considerados somente os valores de maior possibilidade (maior pertinência) no número *fuzzy* em questão.

Assim, $\varphi_{A_j}(x_i)$ representa a pertinência (fator de ponderação para esta média ponderada) dos valores que possuem a mais alta pertinência e x_i representa o valor x de cada par ordenado $(\varphi_A(x), x)$ em A (SHAW; SIMÕES, 1999).

$$c(A) = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \sum_{j=0}^n \varphi_{A_j}(x_i)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \varphi_{A_j}(x_i)} \quad (17)$$

2.1.8.3 Média dos máximos

Similar ao método de defuzzificação centro de máximos, porém com uma diferença básica, não existe fator de ponderação, é realizada uma média na área do número *fuzzy* que tem a máxima pertinência. Geralmente, o método, é utilizado em números *fuzzy* trapezoidais. Assim sendo x_m é o m-ésimo elemento do universo de discurso, onde a função $\mu_A(x_i)$ tenha um máximo e M é o número total desses elementos (SHAW; SIMÕES, 1999).

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^M \frac{x_m}{M} \quad (18)$$

2.2 Lógica *fuzzy* aplicada à física

De acordo com Ortega (2001 apud PIRES, 2010), relativamente, não existem muitos trabalhos em física usando a teorias *fuzzy*.

Segundo Pires (2010), teorias *fuzzy* foram introduzidas no campo da física, primeiramente, com a associação entre conjuntos *fuzzy* e mecânica quântica, ou seja, lógica *fuzzy* e lógica quântica. No ano de 1976 foi apresentada a teoria de mecânica quântica no espaço de fase *fuzzy* (PIRES, 2010). Após a imprecisão *fuzzy* ser adotada em processos de medida, alguns pesquisadores foram motivados a direcionar seus estudos no sentido de unir a teoria *fuzzy* às teorias físicas.

3 METODOLOGIA

Para que os objetivos deste trabalho fossem alcançados, foram realizados estudos das teorias *fuzzy* e, considerando estes estudos foi escolhida a ferramenta *fuzzy* de princípio de extensão de Zadeh.

Após o entendimento da ferramenta *fuzzy* de princípio de extensão de Zadeh, foi modelada e implementada uma ferramenta computacional que permite, de forma usual, que a teoria *fuzzy* de princípio de extensão seja aplicada.

Em seguida foram escolhidas funções oscilantes para serem submetidas à ferramenta computacional que, por sua vez, gera seus resultados (em forma de dados em arquivos, texto e gráficos representativos) fuzzificados e defuzzificados. Tais funções foram escolhidas, pois, exigem bastante perícia de alguns módulos da ferramenta computacional.

Posteriormente, os resultados da ferramenta computacional foram analisados quanto a incertezas para funções com um, dois ou três parâmetros *fuzzy*, quanto à proximidade entre o resultado *crisp* (clássico) e os resultados defuzzificados, além de particularidades entre as funções *fuzzy* com um, dois ou três parâmetros *fuzzy*.

Também foram escolhidas grandezas termodinâmicas para serem fuzzificadas por um sistema. Assim foram obtidas tais grandezas termodinâmicas *fuzzy*, em seguida realizou-se a análise dessas grandezas, considerando diferentes incertezas para os parâmetros *fuzzy* de entrada na função *fuzzy*. Posteriormente, se realizou o processo de defuzzificação e foram comparadas as quantidades físicas decorrentes do processo de **fuzzificação** e **defuzzificação** com as grandezas físicas clássicas. Deve-se ressaltar que as quantidades clássicas (*crisp*), também, foram geradas mediante o processo realizado pela ferramenta computacional.

3.1 Escopo da implementação computacional de princípio de extensão

Sabe-se que a implementação computacional de operações aritméticas, com um ou mais números *fuzzy*, podem não ser triviais (MELO, 2007). O princípio de extensão de Zadeh facilita bastante a implementação computacional, capaz de resolver funções que admitam um ou mais números *fuzzy* como parâmetros.

Esta seção do texto explana a utilização e toda a parte metodológica adotada na implementação computacional que realiza o princípio de extensão de Zadeh resolvendo funções *fuzzy*.

Esta implementação computacional visa solucionar numericamente qualquer função aritmética *fuzzy* simples com um, dois ou três parâmetros *fuzzy*.

3.1.1 Definição de entradas e saídas do sistema

As entradas do sistema serão uma função matemática com parâmetros *fuzzy* embutidos e uma variável livre.

As saídas do sistema serão números *fuzzy*, representando uma escala, de acordo com a variável independente, de forma que a função fuzzificada e a comparação entre a função clássica e a função defuzzificada, sejam representadas graficamente.

3.1.2 Definição funcional dos módulos internos do sistema

Módulo de geração de parâmetros *fuzzy* de entrada: responsável por gerar os números *fuzzy* que serão os parâmetros na função a ser fuzzificada,

consiste em gerar pontos com pertinências para este número *fuzzy* baseando-se em pontos obedecendo à função de pertinência para um número *fuzzy*.

O sistema computacional desenvolvido neste trabalho contempla somente a criação de parâmetros *fuzzy* triangulares e sua função de pertinência é definida pela equação (6).

Módulo de ferramenta aritmética e operação da mínima pertinência: a ferramenta aritmética é responsável por realizar operações entre números *fuzzy* e a função *crisp*.

No caso de haver dois ou mais parâmetros *fuzzy*, ocorrerá a operação de mínima pertinência, responsável por preservar a menor pertinência entre os parâmetros *fuzzy* envolvidos na operação.

Módulo de operação de máxima pertinência: responsável por preservar somente as supremas pertinências.

Módulo de operação de defuzzificação: responsável por defuzzificar os números *fuzzy* resposta, transformando-os em números *crisp*.

Módulo de solução *crisp* da função de entrada: responsável por computar a função (*crisp*) de entrada, simplesmente realizando operações aritméticas *crisp*.

Após essas operações, obtêm-se os dados da solução *crisp* e a solução defuzzificada. Isso proporciona à ferramenta computacional desenvolvida realizar testes de comparação entre as soluções defuzzificadas as soluções *crisp*.

3.2 Implementação computacional do princípio de extensão

Na Figura 2, são ilustrados os módulos e o funcionamento da implementação computacional por meio de um fluxograma:

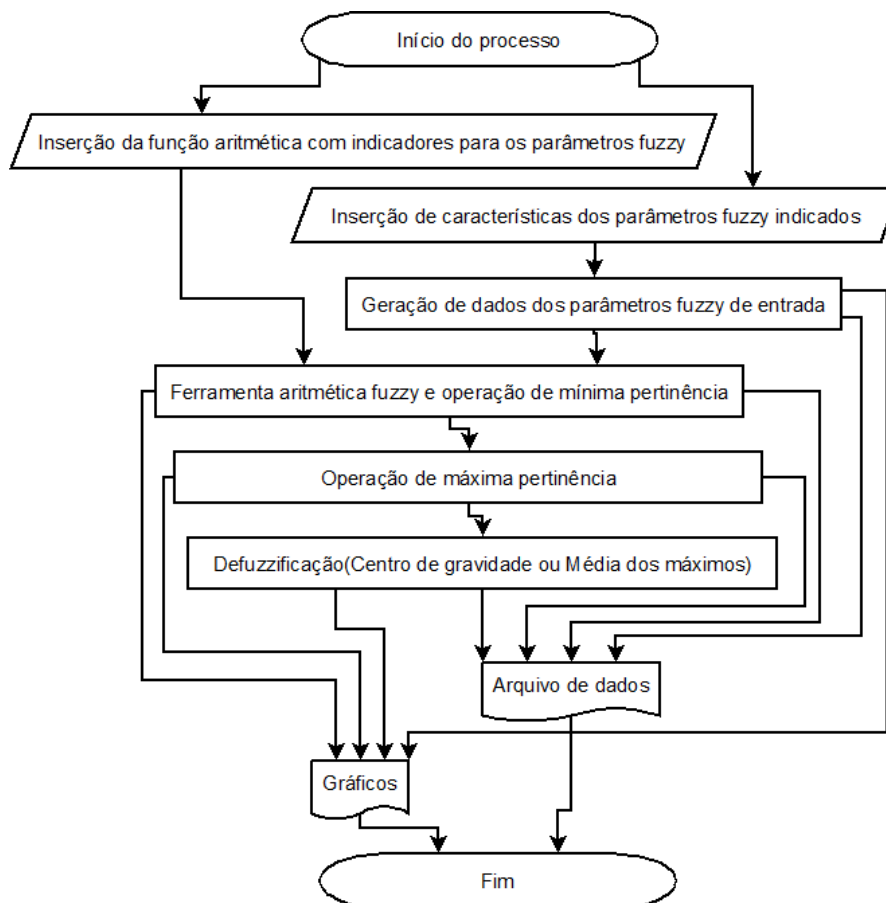


Figura 2 Fluxograma representativo da implementação computacional do princípio de extensão de Zadeh

A seguir, nesta seção do texto, é feita uma caracterização para os módulos principais.

3.2.1 Criação dos parâmetros *fuzzy*

Inicialmente, a rotina computacional que, do módulo de geração de parâmetros *fuzzy* de entrada, é acionada a fim de se gerar os parâmetros *fuzzy* que irão compor a função que o usuário introduziu no sistema. Neste trabalho será abordada somente a rotina computacional responsável pela geração de números *fuzzy* triangulares, pois, em princípio, a ferramenta computacional desenvolvida só funcionará com parâmetros de entrada triangulares, tendo em vista que Shaw e Simões (1999) recomendam a utilização de funções triangulares, quando se utiliza o método de defuzzificação média dos máximos ou o centro dos máximos. Entretanto, não é obrigatória a utilização de parâmetros triangulares para estes métodos de defuzzificação.

Pode-se obter um parâmetro (número *fuzzy* triangular obtido por meio da equação (6)) *fuzzy* tomando-se por base três pontos (a , b , c), como no Gráfico 11 em que α representa os graus de pertinência, e δ_1 e δ_2 as distâncias entre os pontos:

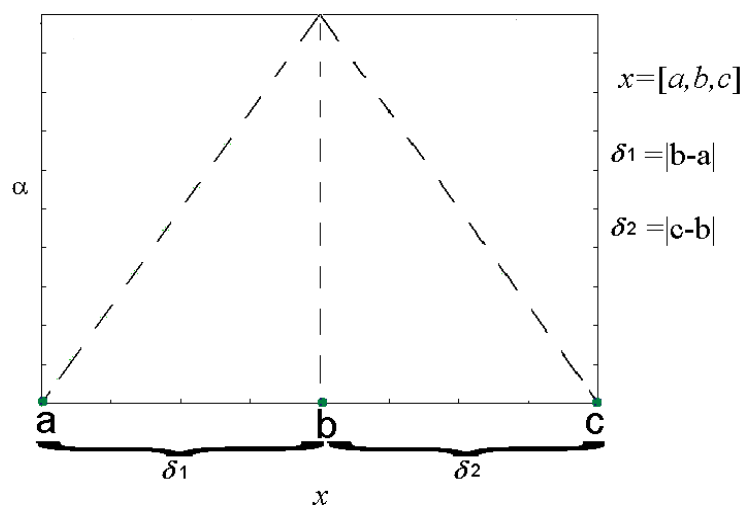


Gráfico 11 Distâncias entre os três pontos principais (a , b e c) de um número *fuzzy* triangular

Depois de obtidos os limites do número *fuzzy*, é preciso discretizar o número *fuzzy*, ou seja, determinar quantos pontos irá descrever a distância entre o ponto a e b e entre b e c.

A discretização destes pontos é necessária, pois, na aplicação computacional proposta neste trabalho, os números *fuzzy* serão manipulados em forma de dados.

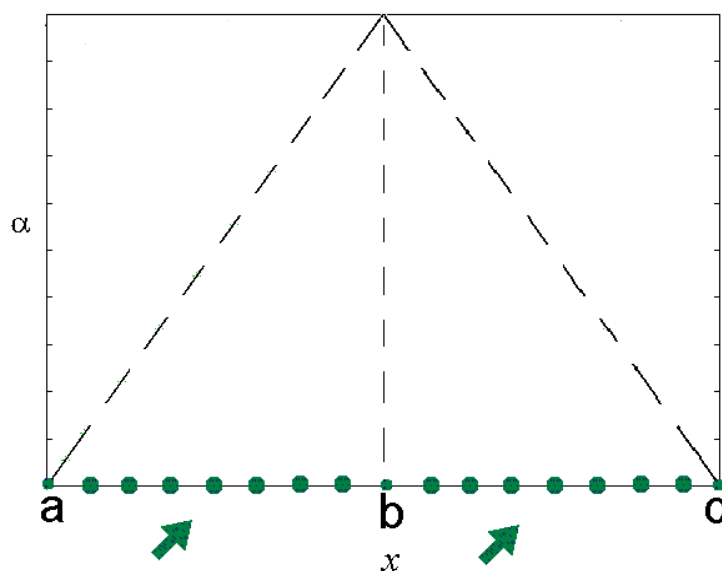


Gráfico 12 Discretização em 17 pontos x de um número *fuzzy* triangular

Demonstrando de forma gráfica esta função de pertinência, considerando o valor de um ponto entre os pontos a, b e c se obtém o grau de pertinência para cada ponto do número *fuzzy* Gráfico 13.

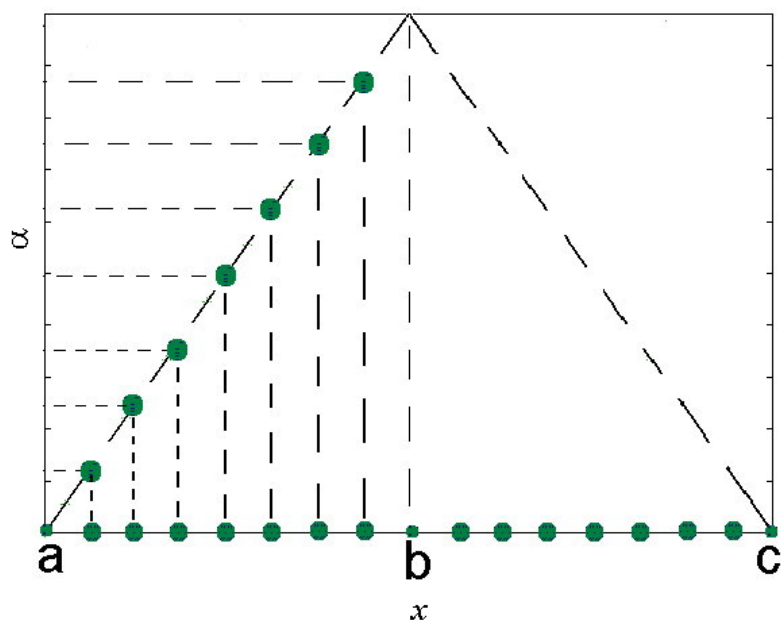


Gráfico 13 Graus de pertinências (considerando a função de pertinência) para os pontos discretizados de um número *fuzzy* triangular

3.2.2 Ferramenta aritmética entre os números *fuzzy* e números *crisp*

A ferramenta aritmética, basicamente, trabalha com 2 tipos de operações: operações em funções de entrada com apenas um parâmetro *fuzzy* (ilustrado na Tabela 1 e na equação (13)) e funções de entrada com dois ou três parâmetros *fuzzy* (ilustrado na Tabela 2 e na equação (15)). Vale ressaltar que, na equação (15), é demonstrado o princípio de extensão para funções com n parâmetros *fuzzy*.

A seguir são demonstrados dois exemplos de funcionamento:

Exemplo 1

Seja uma função:

$$f(t) = \sin(Wt), \quad (19)$$

sendo W é um parâmetro *fuzzy* e t é uma variável independente *crisp*. O parâmetro W representa o número *fuzzy* triangular $[0,5; 1; 1,5]$. Cada número *fuzzy* de entrada é discretizado em 5 pontos e a variável livre $t \in [0; 2]$, desta forma se obtém a tabela de operações aritméticas (Tabela 1).

Tabela 1 Funcionamento da ferramenta aritmética com um parâmetro *fuzzy*

W		t	Operações aritméticas	Solução em número <i>fuzzy</i>	
Valor	Pertinência			Valor	Pertinência
0,50	0,0	0	$f(0)=\sin(0,5*0)$	0	0,0
0,75	0,5	0	$f(0)=\sin(0,75*0)$	0	0,5
1,00	1,0	0	$f(0)=\sin(1*0)$	0	1,0
1,25	0,5	0	$f(0)=\sin(1,25*0)$	0	0,5
1,50	0,0	0	$f(0)=\sin(1,5*0)$	0	0,0
0,50	0,0	1	$f(1)=\sin(0,5*1)$	0.4794255386042	0,0
0,75	0,5	1	$f(1)=\sin(0,75*1)$	0.68163876002333	0,5
1,00	1,0	1	$f(1)=\sin(1*1)$	0.8414709848079	1,0
1,25	0,5	1	$f(1)=\sin(1,25*1)$	0.94898461935559	0,5
1,50	0,0	1	$f(1)=\sin(1,5*1)$	0.99749498660405	0,0
0,50	0,0	2	$f(2)=\sin(0,5*2)$	0.8414709848079	0,0
0,75	0,5	2	$f(2)=\sin(0,75*2)$	0.99749498660405	0,5
1,00	1,0	2	$f(2)=\sin(1*2)$	0.90929742682568	1,0
1,25	0,5	2	$f(2)=\sin(1,25*2)$	0.59847214410396	0,5
1,50	0,0	2	$f(2)=\sin(1,5*2)$	0.14112000805987	0,0

Nota-se que simplesmente é computada a função para cada ponto (par ordenado) de W , o único parâmetro *fuzzy* da função.

Exemplo 2

Seja uma função:

$$f(\mathfrak{t}) = \sin(W\mathfrak{t}) \times Z, \quad (20)$$

tal que W e Z são parâmetros *fuzzy* e \mathfrak{t} é uma variável independente. O parâmetro W representa o número *fuzzy* triangular [0,5; 1,0; 1,5], o Z representa o número triangular *fuzzy* [1,5; 2,0; 2,5]. Cada número *fuzzy* de entrada é discretizado em 3 pontos e a variável independente $\in [0,1]$, obtém-se a seguinte tabela de operações aritméticas:

Tabela 2 Funcionamento da ferramenta aritmética com dois parâmetros *fuzzy*

W		Z		\mathfrak{t}	Operações aritméticas	Solução em número <i>fuzzy</i>	
Val.	P.	Val.	P.			Valor	Pert.
0,5	0	1,5	0	0	$f(0)=\sin(0,5*0)*1,5$	0	0
1,0	1	1,5	0	0	$f(0)=\sin(1*0)*1,5$	0	1 ou 0
1,5	0	1,5	0	0	$f(0)=\sin(1*0)*1,5$	0	0
0,5	0	2,0	1	0	$f(0)=\sin(1,25*0)*2$	0	0 ou 1
1,0	1	2,0	1	0	$f(0)=\sin(1,5*0)*2$	0	1
1,5	0	2,0	1	0	$f(1)=\sin(0,5*0)*2$	0	0 ou 1
0,5	0	2,5	0	0	$f(1)=\sin(0,75*0)*2,5$	0	0
1,0	1	2,5	0	0	$f(1)=\sin(1*0)*2,5$	0	1 ou 0
1,5	0	2,5	0	0	$f(1)=\sin(1,25*0)*2,5$	0	0
0,5	0	1,5	0	1	$f(0)=\sin(0,5*1)*1,5$	0.7191383079	0
1,0	1	1,5	0	1	$f(0)=\sin(1*1)*1,5$	1.2622064772	1 ou 0
1,5	0	1,5	0	1	$f(0)=\sin(1,5*1)*1,5$	1.4962424799	0
0,5	0	2,0	1	1	$f(0)=\sin(0,5*1)*2$	0.9588510772	0 ou 1
1,0	1	2,0	1	1	$f(0)=\sin(1*1)*2$	1.6829419696	1
1,5	0	2,0	1	1	$f(1)=\sin(1,5*1)*2$	1.9949899732	0 ou 1
0,5	0	2,5	0	1	$f(1)=\sin(0,5*1)*2,5$	1.1985638465	0
1,0	1	2,5	0	1	$f(1)=\sin(1*1)*2,5$	2.1036774620	1 ou 0
1,5	0	2,5	0	1	$f(1)=\sin(1,5*1)*2,5$	2.4937374665	0

Nota-se que é feito um produto cartesiano. A cada ponto *fuzzy* do parâmetro *fuzzy* W se realizam funções aritméticas com os pontos *fuzzy* do parâmetro Z .

3.2.3 Operação da mínima pertinência

Após cada operação realizada no módulo de ferramenta aritmética, no caso de haver dois ou três parâmetros *fuzzy* na função de entrada, é necessário realizar a operação de **mínima pertinência**, para que seja selecionada a menor pertinência dos pontos envolvidos na operação, resultando em um ponto com um valor e uma pertinência que farão parte do número *fuzzy* que será submetido à operação de **máxima pertinência**, como pode ser observado na Tabela 3.

Tabela 3 Funcionamento da operação de mínima pertinência

W		Z		t	Operações aritméticas	Solução em número <i>fuzzy</i>	
Val.	P	Val.	P			Valor	Pert.
0,5	0	1,5	0	0	$f(0)=\sin(0,5*0)*1,5$	0	0
1,0	1	1,5	0	0	$f(0)=\sin(1*0)*1,5$	0	0
1,5	0	1,5	0	0	$f(0)=\sin(1*0)*1,5$	0	0
0,5	0	2,0	1	0	$f(0)=\sin(1,25*0)*2$	0	0
1,0	1	2,0	1	0	$f(0)=\sin(1,5*0)*2$	0	1
1,5	0	2,0	1	0	$f(1)=\sin(0,5*0)*2$	0	0
0,5	0	2,5	0	0	$f(1)=\sin(0,75*0)*2,5$	0	0
1,0	1	2,5	0	0	$f(1)=\sin(1*0)*2,5$	0	0
1,5	0	2,5	0	0	$f(1)=\sin(1,25*0)*2,5$	0	0
0,5	0	1,5	0	1	$f(0)=\sin(0,5*1)*1,5$	0.7191383079063	0
1,0	1	1,5	0	1	$f(0)=\sin(1*1)*1,5$	1.26220647721184	0
1,5	0	1,5	0	1	$f(0)=\sin(1,5*1)*1,5$	1.49624247990608	0
0,5	0	2,0	1	1	$f(0)=\sin(0,5*1)*2$	0.95885107720841	0
1,0	1	2,0	1	1	$f(0)=\sin(1*1)*2$	1.68294196961579	1
1,5	0	2,0	1	1	$f(1)=\sin(1,5*1)*2$	1.99498997320810	0
0,5	0	2,5	0	1	$f(1)=\sin(0,5*1)*2,5$	1.19856384651050	0
1,0	1	2,5	0	1	$f(1)=\sin(1*1)*2,5$	2.10367746201974	0
1,5	0	2,5	0	1	$f(1)=\sin(1,5*1)*2,5$	2.49373746651013	0

Observação: A operação de seleção da mínima pertinência entre dois ou três números *fuzzy* é realizada após cada operação aritmética.

3.2.4 Operação de máxima pertinência

Com o objetivo de melhorar o desempenho em tempo de processamento, o algoritmo divide o número fuzzy em duas partes. Esta divisão é realizada no ponto de maior pertinência do número fuzzy, a partir daí o algoritmo funciona em etapas, percorrendo cada uma das partes do número fuzzy da esquerda para a direita simultaneamente.

Em cada etapa, três pontos são verificados, se o ponto do meio é menor do que os outros pontos, este ponto do meio será excluído.

A Figura 3 ilustra o esquema que representa o algoritmo em cada etapa.

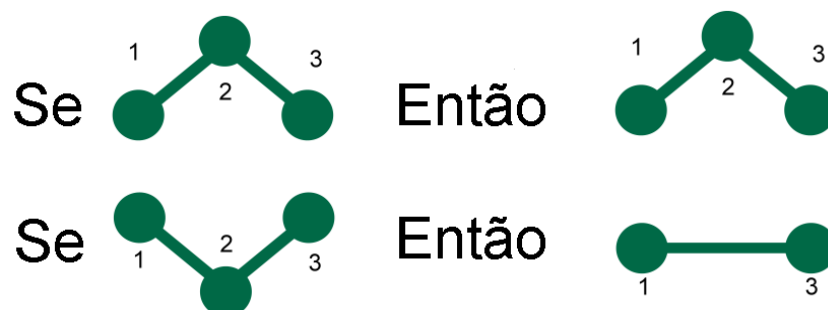


Figura 3 Esquema de deleção de pontos da operação de máxima pertinência

No Gráfico 14, é demonstrada a rotina de execução paralela nas duas partes do número *fuzzy*, em que a seta com preenchimento aponta para o ponto do meio e as setas sem preenchimento apontam para os pontos laterais de cada verificação.

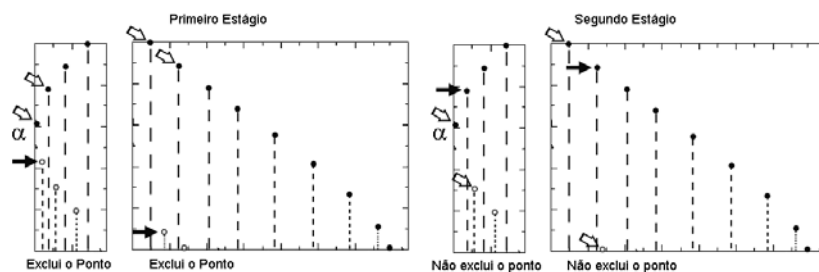


Gráfico 14 Os dois primeiros estágios da operação de máxima pertinência para um número *fuzzy* em processamento simultâneo de etapas para cada metade do número *fuzzy*

Em algum momento podem acontecer operações diferentes nas partes como ilustra o Gráfico 15.

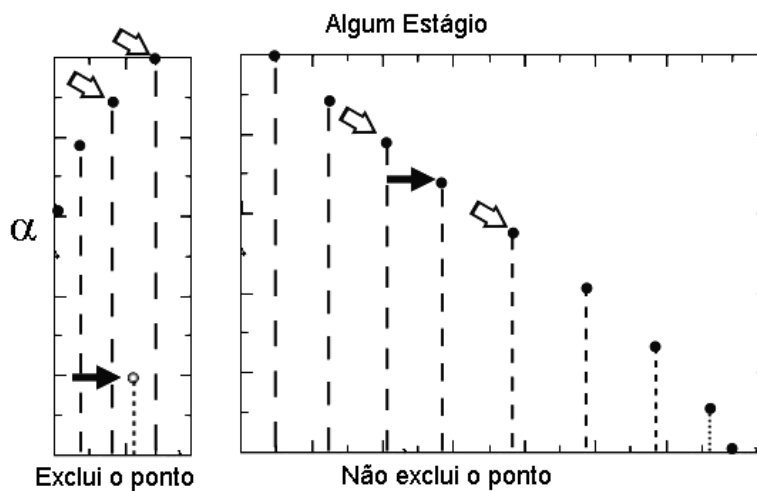


Gráfico 15 Ilustração de que em algum estágio possam ocorrer processamentos de etapas simultâneas diferentes em cada parte do número *fuzzy*

Ao final de sua rotina, o algoritmo deve excluir pertinências menores em pontos que tiverem mais de duas pertinências como ilustra o Gráfico 16.

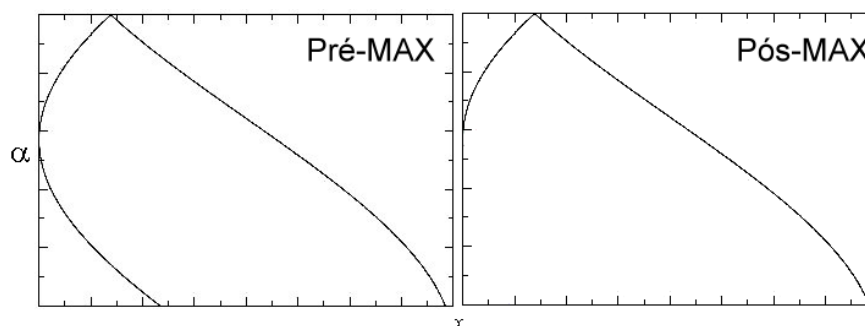


Gráfico 16 Ilustração da operação de máxima pertinência realizada em apenas um número *fuzzy*

O Gráfico 17 ilustra a operação de máxima pertinência realizada em uma escala de seis números *fuzzy* recobertos por uma malha cinza que indica o grau de pertinência:

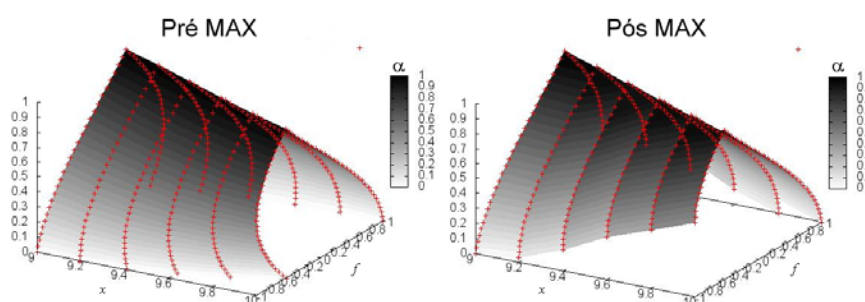


Gráfico 17 Ilustração da operação de máxima pertinência realizada em números *fuzzy* em seqüência ligados por uma malha cinza representando os graus de pertinência

Operação máxima pertinência realizada em uma escala senoidal, variando de um a quinze, demonstrada, graficamente, em três dimensões vista por cima no Gráfico 18.

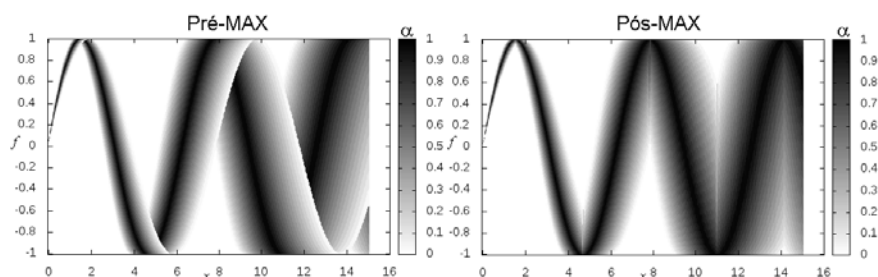


Gráfico 18 Ilustração da operação de máxima pertinência realizada em números *fuzzy* em seqüência ligados por uma malha cinza representando os graus de pertinência vista por cima (eixo α)

3.2.5 Operação de defuzzificação dos números *fuzzy* resposta

Para realizar a comparação de resultados *crisp* com os resultados defuzzificados, foram utilizados os métodos de defuzzificação centro de gravidade e o média dos máximos. O método centro de gravidade foi escolhido por ser bastante utilizado na defuzzificação pós- princípio de extensão (BARROS; BASSANEZI, 2006), já o método média dos máximos foi escolhido pela afirmativa de Shaw e Simões (1999) de que seu resultado se aproxima bastante do resultado *crisp* em se tratando da defuzzificação de números *fuzzy* trapeziodais.

3.3 Descrição técnica e usual da aplicação computacional desenvolvida

O sistema computacional foi desenvolvido na linguagem de programação Java com o pacote gráfico SWING, mas, para o total funcionamento do sistema, foram utilizadas outras tecnologias acopladas à ferramenta, como o **Maxima** (pacote algébrico gratuito) e o **Gnuplot** (gerador de gráficos gratuito).

O Maxima é responsável por todas as operações aritméticas, realizadas pelo sistema, exceto as operações realizadas no processo de defuzzificação (o qual é realizado na linguagem Java), já o Gnuplot é responsável pela geração de todos os gráficos do sistema. Toda a parte de controle e manipulação de dados *fuzzy* é escrita em Java.

Com a utilização do Maxima no sistema, houve uma diminuição considerável no tempo de desenvolvimento, pois, não foi necessário desenvolver módulos (léxico, sintático, semântico e aritmético) para análise e solução de expressões aritméticas.

Java foi a linguagem de programação escolhida por ter uma vasta portabilidade, por ser uma linguagem livre, ter vários ambientes de desenvolvimento gratuitos (sem custos para o desenvolvimento do sistema) e por ser bem difundida no mercado nacional e internacional.

O Maxima foi escolhido para ser integrante neste sistema, pois, possui uma vasta aceitação no meio científico, é um sistema gratuito, além disso, a linguagem Java é mais instável numericamente que Lisp (LIMA, 2010), linguagem em que o Maxima foi escrito, também, verifica-se que até em linguagens de programação como C++ poder-se ía ter problemas numéricos trabalhando com princípio de extensão *fuzzy* (PIRES, 2010).

O Gnuplot foi escolhido por proporcionar excelentes gráficos e por existir versões em várias plataformas, além de ser um *software* gratuito.

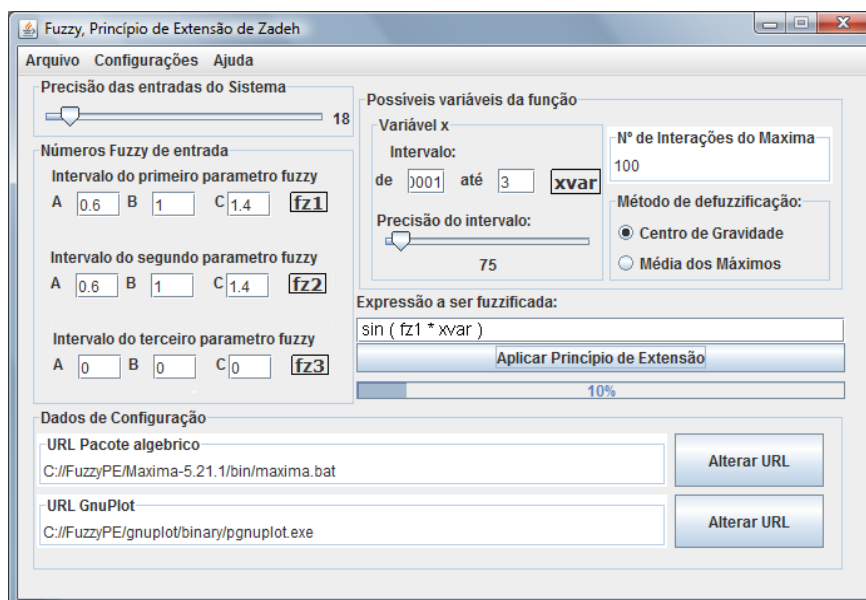


Figura 4 Interface gráfica do sistema computacional desenvolvido

Para o uso do sistema, primeiramente, o usuário deve configurar os locais no computador em que estão localizados os executáveis do pacote algébrico Maxima e do gerador de gráficos Gnuplot, em seguida, deve-se informar o número de iterações que o programa pode realizar com o Maxima até ser reiniciado o serviço (quanto mais complexa for a função introduzida no sistema, menor deve ser o número de iterações, pois, pode causar um *overflow*¹ na memória utilizada pelo Maxima).

O usuário deve inserir a função no campo **Expressão a ser fuzzificada** com até três parâmetros *fuzzy* representados por: **fz1, fz2 ou/e fz3**. Também, na função, o usuário deve introduzir a variável independente da função representada por **xvar**.

¹ **Overflow**: Neste caso, significa “estouro de memória”, quando se tem mais dados a ser representados do que determinada memória suporta, não havendo tratamento desta exceção.

Após o usuário inserir a função no campo determinado, ele deve fazer alguns ajustes como o de determinar os pontos **a**, **b** e **c** dos números *fuzzy* utilizados e a discretização dos números *fuzzy*, que, na interface gráfica da aplicação computacional, significa a metade de quantos pontos (dados) serão utilizados para descrever tal número *fuzzy*. Em seguida, o usuário deve informar o intervalo da variável independente e, também, a discretização numérica deste intervalo que significa a quantidade de números *fuzzy* que representará tal função.

Os dados de resultados que o sistema fornece são em forma de arquivos em modo texto (os dados dos resultados) e no formato imagem (os gráficos), além de arquivos com *scripts*² para a geração de novos gráficos.

² *Scripts*: São linhas, códigos escritos, que, se executados em seu determinado ambiente computacional, realiza uma determinada ação.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Todos os resultados partiram de funções aritméticas com parâmetros *fuzzy* triangulares. Em seguida foram realizadas as operações do princípio de extensão de Zadeh, a partir daí, realizou-se a defuzzificação.

Baseando-se em resultados de cada processo realizado no sistema, foram feitas análises mostradas nesta seção do texto.

Vale ressaltar que os resultados obtidos na análise do item 4.1.1 foram idênticos e na análise do item 4.2.1 são bastante parecidos com os resultados obtidos por Melo (2007), haja visto que, naquele trabalho, foi estudada uma função cossenoidal e, nesta análise, é estudada uma função senoidal. Além disso, nas análises realizadas neste trabalho se encontram contribuições não existentes nos trabalhos anteriores de Melo (2007) e Pires (2010), como a utilização de mais um método de defuzzificação, para análises diversas, a utilização de um, dois ou três parâmetros *fuzzy* em uma mesma função, além de alguns pontos não contemplados de resultados, como a observação de uma possível operação lógica demonstrada no item 4.4 deste trabalho.

4.1 Fuzzificação e defuzzificação com o parâmetro *fuzzy* “fora” da parte oscilatória da função

4.1.1 Análise

Verificando a função:

$$f_{\mu}(t) = W \cos(t), \quad (21)$$

em que, t é uma variável independente que pertence ao intervalo de $[0; 10]$ e W é um parâmetro *fuzzy* que tem sua função de pertinência determinada no caso **A** por:

$$\varphi_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3 \\ x-1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 3-x, & \text{se } 2 \leq x < 3 \end{cases}, W = [1, 2, 3], \quad (22)$$

e no caso **B** por:

$$\varphi_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5 \\ x-1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \frac{5-x}{3}, & \text{se } 2 \leq x < 5 \end{cases}, W = [1, 2, 5]. \quad (23)$$

Por meio da aplicação do princípio de extensão obtém-se a imagem da função, de forma que a escala em cinza representa a pertinência (α) $\varphi_W(x)$, o eixo vertical representa $f_W(t)$ e o eixo horizontal representa t .

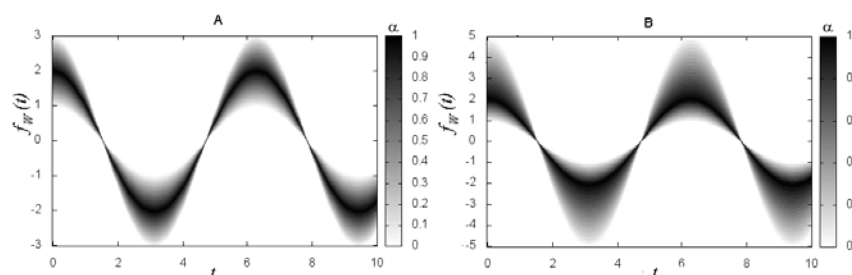


Gráfico 19 Aplicação do princípio de extensão nos casos A ($W = [1, 2, 3]$) e B ($W = [1, 2, 5]$) para $f_W(t) = W \times \cos(t)$

Desta forma pode-se observar (Gráfico 19) que:

- a) Nos máximos e mínimos de $f_{IV}(t)$ ocorrem os máximos de incertezas. Já quando $f_{IV}(t)$ se aproxima de 0, estas incertezas se tornam mínimas;
- b) No caso **B**, como a imprecisão da metade direita do parâmetro *fuzzy* de entrada ($W = [1, 2, 5]$) é maior que a do parâmetro *fuzzy* no caso **A** ($W = [1, 2, 3]$), notam-se mais incertezas nas extremidades superiores e inferiores no caso **B**;
- c) Nos dois casos, a incerteza não aumenta de forma crescente de acordo com a evolução do sistema.

Com o objetivo de comparar a solução *fuzzy* com a solução *crisp*, foi realizada a defuzzificação, nestes resultados, pelo método de centro de gravidade (Gráfico 20).

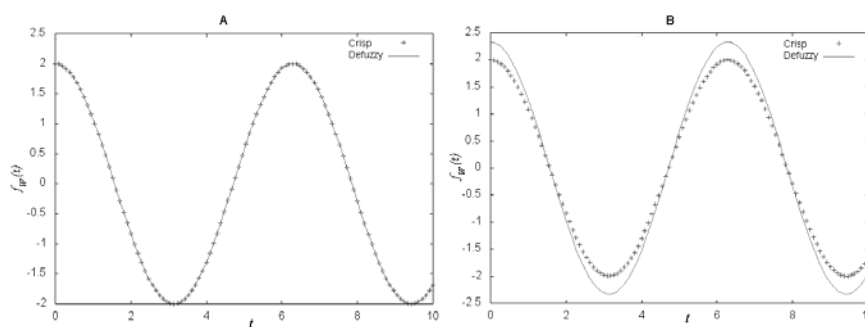


Gráfico 20 Casos A e B defuzzificados pelo método de centro de gravidade

Observa-se que a amplitude alcançada na função defuzzificada no caso **B** é maior que a do caso **A**, em decorrência da maior incerteza nas extremidades da função e do algoritmo de defuzzificação de centro de gravidade.

4.1.2 Análise

Na função:

$$f_W(t) = W + \sin(t) \quad (24)$$

De forma que $t \in [-10; 10]$ e W é um parâmetro *fuzzy* em que sua função de pertinência é:

$$\varphi_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0,8 \text{ ou } x \geq 1,2 \\ \frac{x-0,8}{0,2}, & \text{se } 0,8 < x \leq 1 \\ \frac{1,2-x}{0,2}, & \text{se } 1 \leq x < 1,2 \end{cases}, W = [0,8; 1,0; 1,2]. \quad (25)$$

É observado que, após a aplicação do princípio de extensão, não houve aumento da incerteza com a evolução da função (Gráfico 21).

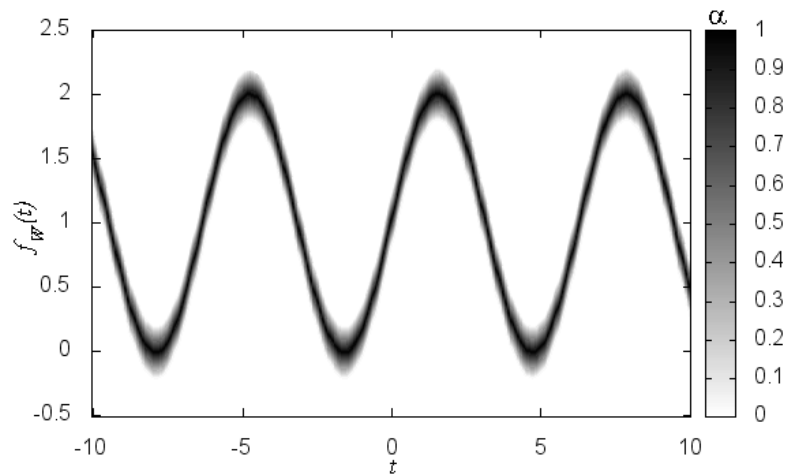


Gráfico 21 Função *fuzzy* oscilante com parâmetro externo à parte oscilatória pós- princípio de extensão, sendo $W=[0,8; 1; 1,2]$ para $f_W(t) = W + \sin(t)$

4.2 Fuzzificação e defuzzificação com o parâmetro *fuzzy* “dentro” da parte oscilatória da função

4.2.1 Análise Z

Verificando a função:

$$f_W(t) = \sin(Wt) \quad (26)$$

Em que $t \in [0; 20]$ e W é um parâmetro *fuzzy* que tem sua função de pertinência determinada no caso C pela equação (25), e no caso D por:

$$\varphi_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0,95 \text{ ou } x \geq 1,05 \\ \frac{x-0,95}{0,05}, & \text{se } 0,95 < x \leq 1,00 \\ \frac{1,05-x}{0,05}, & \text{se } 1,00 \leq x < 1,05 \end{cases}, W = [0,95; 1,00; 1,05]. \quad (27)$$

Aplicando o princípio de extensão obtêm-se os seguintes resultados para os dois casos (Gráfico 22):

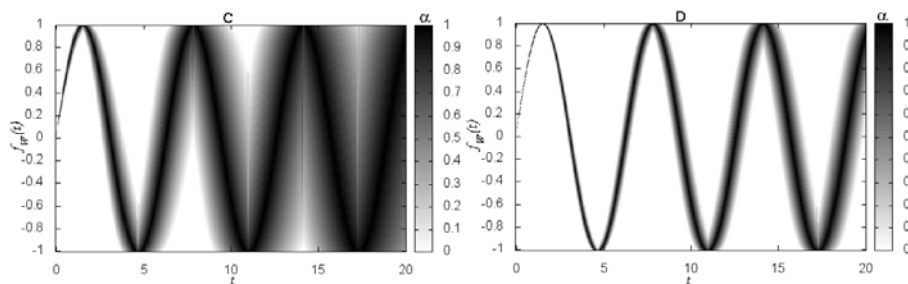


Gráfico 22 Comparação de incertezas para os casos C ($W = [0.8; 1; 1.2]$) e D ($W = [0.95; 1.00; 1.05]$) em $f_W(t) = \sin(W t)$

Observa-se que:

- a) O caso C possui maior grau de incerteza que o caso D (verificada por meio da observação do *degrade* mais cheio) em consequência do parâmetro *fuzzy* de entrada do caso C se ter maior imprecisão;
- b) Para os dois casos, à medida que a variável t evolui, há um aumento na incerteza.

Comparando as defuzzificações pelo método de Centro de Gravidade, primeiramente, com gráficos representados valores *crisp* e valores defuzzificados (Gráfico 23).

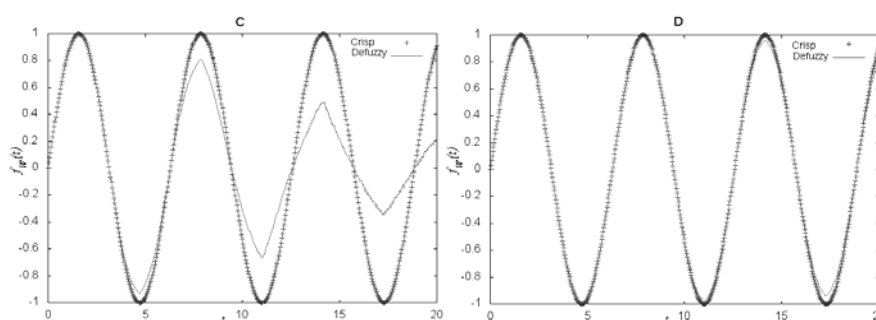


Gráfico 23 Comparação de defuzzificações com a função *crisp* para os casos C ($W = [0.8; 1; 1.2]$) e D ($W = [0.95; 1; 1.05]$) em $f_W(t) = \sin(W \times t)$

No Gráfico 23, observa-se que:

- a) Durante a evolução da função, as extremidades das oscilações, vão se tornando agudas, aparentemente triangulares.

- b) Na evolução da função, quanto maior a incerteza, o valor defuzzificado tende mais a zero, causando certo “amortecimento” nas oscilações, pois, o algoritmo de defuzzificação de centro de gravidade realiza uma média (descrita na seção 2.1.6.1) entre as incertezas.

Como nesta análise a incerteza da função fuzzificada aumenta com a evolução de t e é verificado um limite de incertezas superior (em $f_W(t) = 1$) e inferior (em $f_W(t) = -1$), quanto mais as incertezas chegarem perto destes limites superiores e inferiores nas concavidades de cada oscilação, mais tendência a zero este resultado defuzzificado (por meio do centro de gravidade) terá.

O Gráfico 24 ilustra a comparação entre as duas defuzzificações pelo método de Centro de Gravidade em apenas um gráfico:

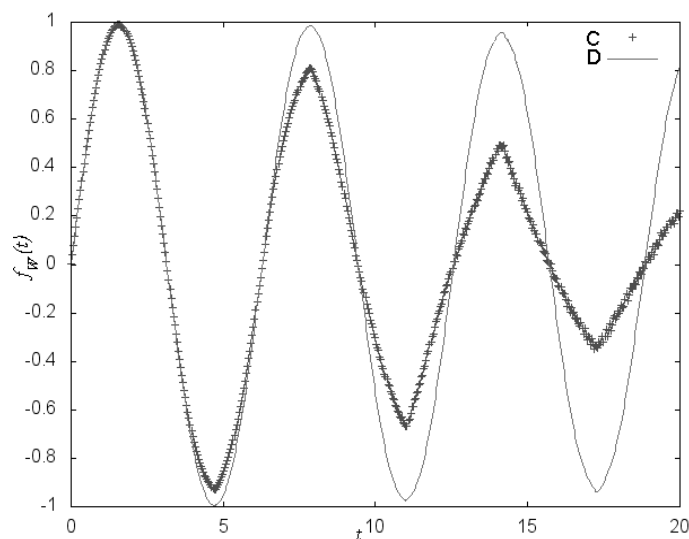


Gráfico 24 Comparação entre defuzzificações entre os casos C ($W = [0.8; 1; 1.2]$) e D ($W = [0.95; 1; 1.05]$) em $f_W(t) = \sin(W \times t)$

Verifica-se que a defuzzificação do caso **D** é amortecida (tende a zero) com menor intensidade que a defuzzificação do caso **C**, isso se dá pela maior incerteza que o caso **C** possui.

Para se verificar a diferença entre os métodos de defuzzificação Centro de Gravidade e Média dos Máximos, são observados os dois métodos de defuzzificação utilizados no caso **C** no Gráfico 25.

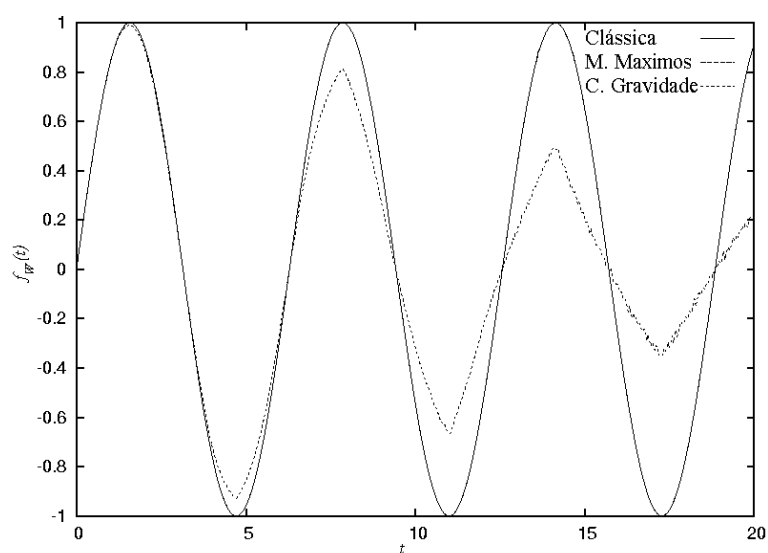


Gráfico 25 Comparação de defuzzificações para o caso C ($W = [0.8: 1: 1.2]$) em $f_W(t) = \sin(W t)$

Pelo Gráfico 25 observa-se que a defuzzificação pelo método média dos máximos coincide com o resultado clássico, enquanto que a defuzzificação, obtida pelo método centro de gravidade, apresenta maior desvio. A diferença percentual da defuzzificação pelo método média dos máximos, para $t = 20$ é de $1,094 \times 10^{-12} \%$, já pelo método centro de gravidade é de 75.67% .

4.2.2 Análise

Verificando a função:

$$f_{\mathbb{W}}(t) = t \sin(Wt) \quad (28)$$

Em que $t \in [0; 20]$ e \mathbb{W} é um parâmetro *fuzzy* com as funções de pertinência no caso A mostrada na equação (25) e no caso B na equação (27).

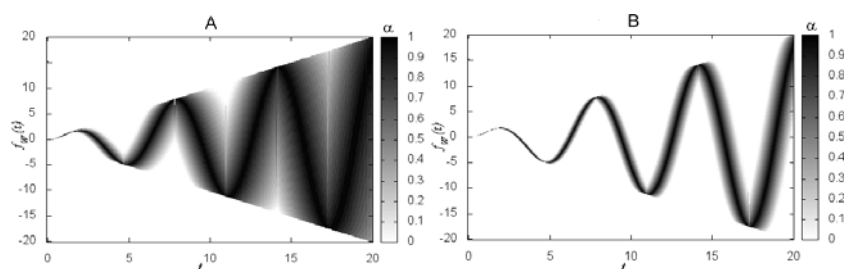


Gráfico 26 Comparação entre funções com incertezas diferentes para os casos A ($\mathbb{W} = [0.8; 1.0; 1.2]$) e B ($\mathbb{W} = [0.95; 1.00; 1.05]$) em $f_{\mathbb{W}}(t) = t \sin(Wt)$

Nota-se que, no Gráfico 26, as mesmas observações da análise anterior valem para esta e, também, observa-se que se cria certo tipo de limite (inferior e superior) de incertezas e que esse limite cresce com a evolução da variável t .

4.3 Caracterização de alterações significativas após operação de máxima pertinência (MAX)

As observações desta seção foram motivadas pelos resultados obtidos na seção 4.1, assim foi observado que, só porque a função não é monótona, não

quer dizer que ela sofrerá alterações significativas durante a operação de máxima pertinência (max):

Seja a função:

$$f_{\mu}(t) = W \sin(t), \quad (29)$$

em que $t \in [-10; 10]$ e W é um parâmetro *fuzzy* cuja função de pertinência é representada na equação (25). Analisando os resultados antes e depois da operação de máxima pertinência:

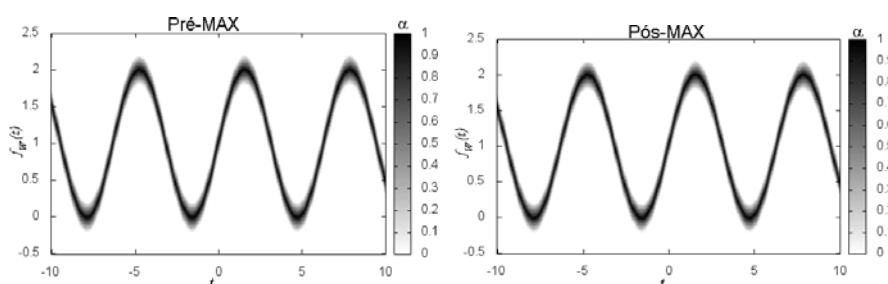


Gráfico 27 Comparação dos resultados antes e depois da operação de máxima pertinência para $f_w(t) = W \sin(t)$ (com um parâmetro *fuzzy* fora da parte oscilante da função) em que $W = [0.8; 1; 1.2]$

Verifica-se no Gráfico 27 que não houve alterações significativas entre os resultados de antes e depois da operação de máxima pertinência.

Já em outra observação, seja a função:

$$f_{\mu}(t) = \sin(Wt), \quad (30)$$

tal que, $t \in [0; 10]$, e W é um parâmetro *fuzzy* representado pela função de pertinência da equação (25).

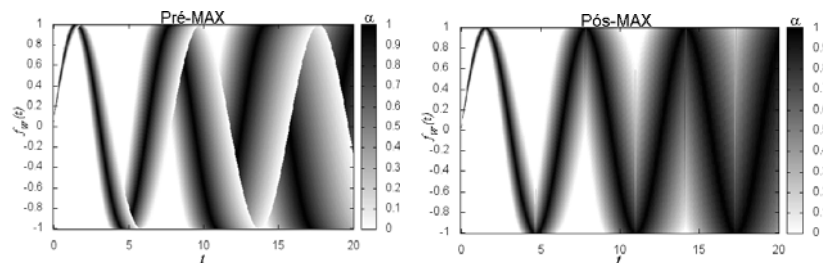


Gráfico 28 Comparação dos resultados antes e depois da operação de máxima pertinência para $f_w(t) = \sin(W \times t)$ com o parâmetro *fuzzy* $W = [0.8: 1: 1.2]$ dentro da parte oscilante da função

Ao analisar os resultados antes e após a operação de máxima pertinência (Gráfico 28), a partir dos resultados da fuzzificação das funções (29) e (30), é verificado que a função *fuzzy* não monótona só sofrerá alterações significativas, após a operação de máxima pertinência, caso o parâmetro *fuzzy* esteja dentro da parte oscilatória da função.

4.4 Relação entre fuzzificações com um parâmetro *fuzzy* resultando em uma fuzzificação com dois parâmetros

Seja a função:

$$f_{Z,W}(t) = Z \times \sin(Wt), \quad (31)$$

em que, t é a variável independente em que $t \in [0; 15]$, W e Z são parâmetro *fuzzy*, W é representado pela função de pertinência da equação (25) e Z é representado pela função de pertinência:

$$\varphi_z(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1,7 \text{ ou } x \geq 2,6 \\ \frac{x-1,7}{0,8}, & \text{se } 1,7 < x \leq 2 \\ \frac{2,6-x}{0,6}, & \text{se } 2 \leq x < 2,6 \end{cases}, \quad (32)$$

assim o resultado fuzzificado é ilustrado pelo Gráfico 29.

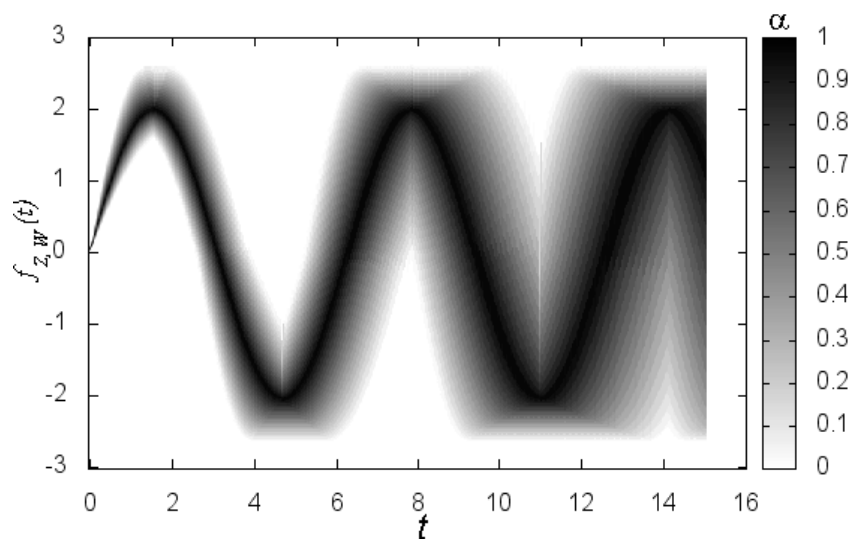


Gráfico 29 Resultado da fuzzificação da função $f_{w,z}(t) = Z \times \sin(W t)$ em que $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$

Aparentemente no Gráfico 29, nota-se que houve uma fusão entre duas funções fuzzificadas, tais funções são exibidas na equação (33) e ilustradas no Gráfico 30.

$$h_z(t) = Z \sin(t) \text{ e } g_w(t) = 2 \sin(Wt), \quad (33)$$

verifica-se que já não existe o limite superior e inferior de incertezas caracterizado em $h_z(t)$, e, também, nota-se que a incerteza cresce de acordo com a evolução de t caracterizado em $g_w(t)$ (Gráfico 30).

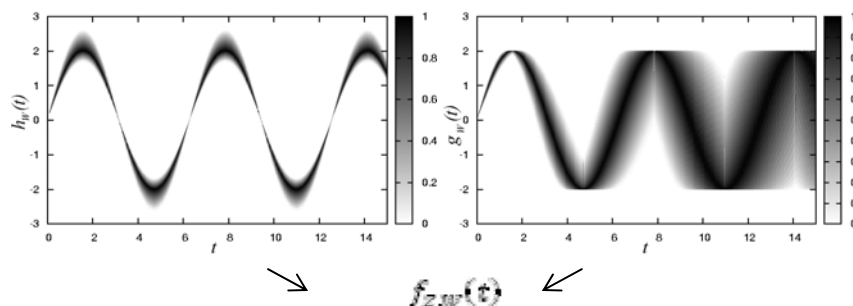


Gráfico 30 Aparente fusão entre incertezas das funções $h_w(t)$ e $g_w(t)$ resultando em outra função fuzzificada

Em trabalhos futuros serão realizados testes em operações entre as duas funções $h_w(t)$ e $g_w(t)$, a fim de que seja encontrado um modelo apropriado que chegue ao mesmo resultado que $f_{zw}(t)$, pois, se isto se concretizar, poderá haver uma redução no custo computacional em fuzzificações realizadas por meio da ferramenta proposta.

Comparando o resultado defuzzificado de $f_{zw}(t)$ ao resultado *crisp* (Gráfico 31), verifica-se que a linha pontilhada que representa a defuzzificação pelo método média dos máximos não é visível, isso se dá por ela estar, praticamente, em cima do resultado da função *crisp*. Nota-se, também, que existe a mesma tendência a zero da função oscilante defuzzificada com um parâmetro (vide análises anteriores), nota-se, também, que essa tendência a zero é mais acentuada na segunda metade de cada oscilação (crescente ou decrescente).

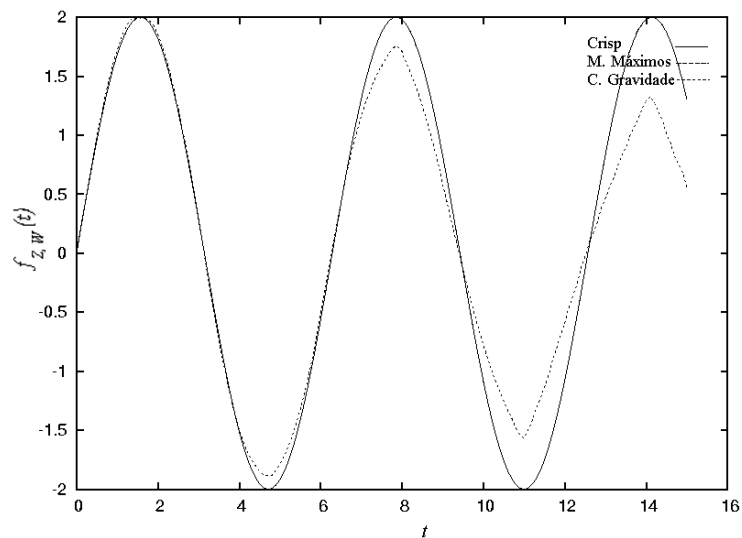


Gráfico 31 Defuzzificação da função $f_{W,Z}(t) = Z \times \sin(W \times t)$ em que $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$

4.5 Fuzzificação de funções com três parâmetros

Seja a função:

$$f_{V,W,Z}(t) = V^{\sin(W \times t)} \times Z, \quad (34)$$

em que, $t \in [0,2; 3]$. E que W , Z e V são parâmetros *fuzzy* com as seguintes funções de pertinência:

$$\varphi_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0,8 \text{ ou } x \geq 1,2 \\ \frac{x-0,8}{0,2}, & \text{se } 0,8 < x \leq 1 \\ \frac{1,2-x}{0,2}, & \text{se } 1 \leq x < 1,2 \end{cases} \quad (35)$$

$$\varphi_Z(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1,7 \text{ ou } x \geq 2,6 \\ \frac{x-1,7}{0,3}, & \text{se } 1,7 < x \leq 2 \\ \frac{2,6-x}{0,6}, & \text{se } 2 \leq x < 2,6 \end{cases} \quad (36)$$

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1,5 \text{ ou } x \geq 2,5 \\ \frac{x-1,5}{0,5}, & \text{se } 1,5 < x \leq 2 \\ \frac{2,5-x}{0,5}, & \text{se } 2 \leq x < 2,5 \end{cases} \quad (37)$$

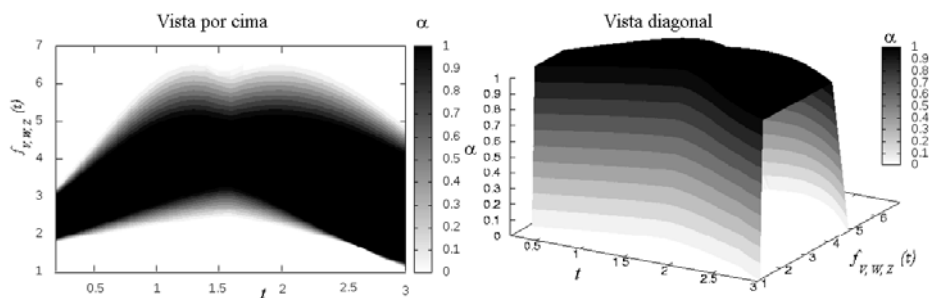


Gráfico 32 Fuzzificação da função $f_{V,W,Z}(t) = V^{\sin(W \times t)} \times Z$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$

No resultado fuzzificado, ilustrado no Gráfico 32, é observado que nesta função oscilante, nas proximidades dos pares $(f_{V,W,Z}(t); t)$: (6; 1,25); (6; 2) há “picos” de incerteza. E, principalmente, é observado que os números fuzzy estão em forma de trapézio.

O Gráfico 33 ilustra o comportamento da função $f_{V,W,Z}(t)$ defuzzificada, pelos métodos de centro de gravidade e média dos máximos.

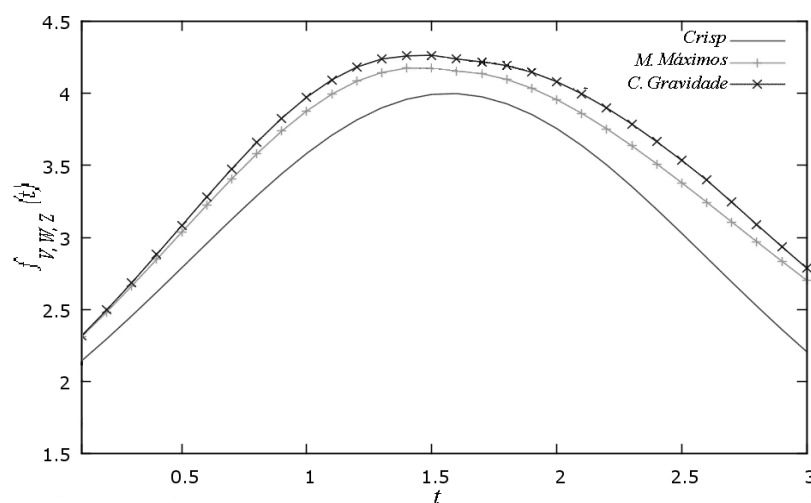


Gráfico 33 Defuzzificação da função $f_{V,W,Z}(t) = V \sin(W \times t) \times Z$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$

O Gráfico 34 ilustra a diferença percentual obtida considerando as defuzzificações pelos métodos de centro de gravidade e média dos máximos em relação ao resultado clássico de $f_{V,W,Z}(t)$.

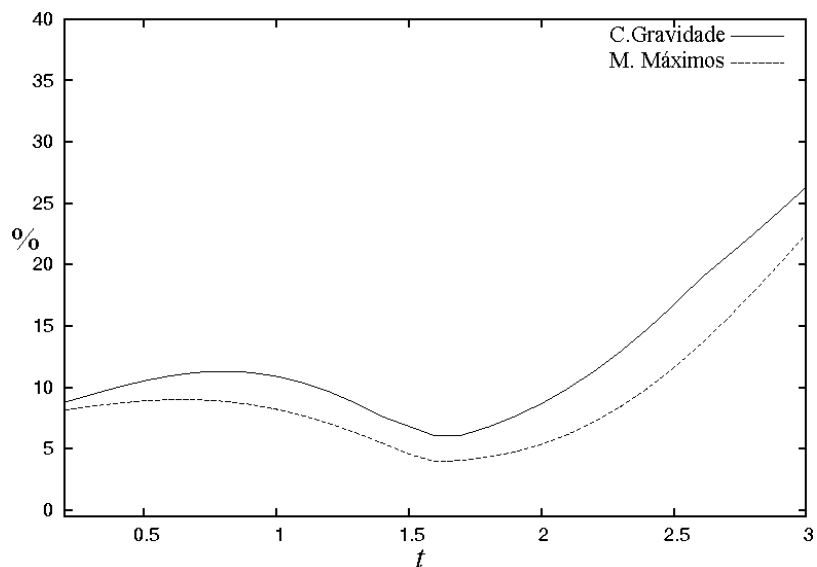


Gráfico 34 Diferença percentual (%) entre as defuzzificações e o resultado *crisp* da função $f_{V,W,Z}(t) = V \sin(W \times t) \times Z$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$

É observado que existe bastante diferença entre os resultados (defuzzificado e *crisp*). Além disso, também, é observado que o resultado da defuzzificação com o método média dos máximos teve mais proximidade da função *crisp* do que o resultado da defuzzificação com o método de centro de gravidade.

Seja a função:

$$f_{V,W,Z}(t) = (Wt)^2 + (Zt) + V, \quad (38)$$

em que, $t \in [0; 3]$, e W , V e Z são parâmetros *fuzzy* representados pelas respectivas funções de pertinência das equações (35), (36) e (37).

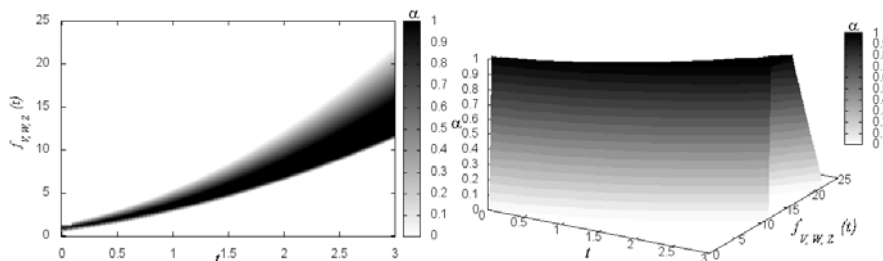


Gráfico 35 Função monótona com três parâmetros *fuzzy*: $f_{V,W,Z}(t) = (W \times t)^2 + (Z \times t) + V$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$

Aplicando o princípio de extensão em uma função monótona com três parâmetros *fuzzy* (Gráfico 35), também, observa-se que, no resultado, os números *fuzzy* estão no formato de trapezoidal.

Aplicando os métodos de defuzzificação (centro de gravidade e média dos máximos), nesta função monótona, obtém-se o resultado ilustrado no Gráfico 36, no qual, ainda, compara-se com o resultado crisp.

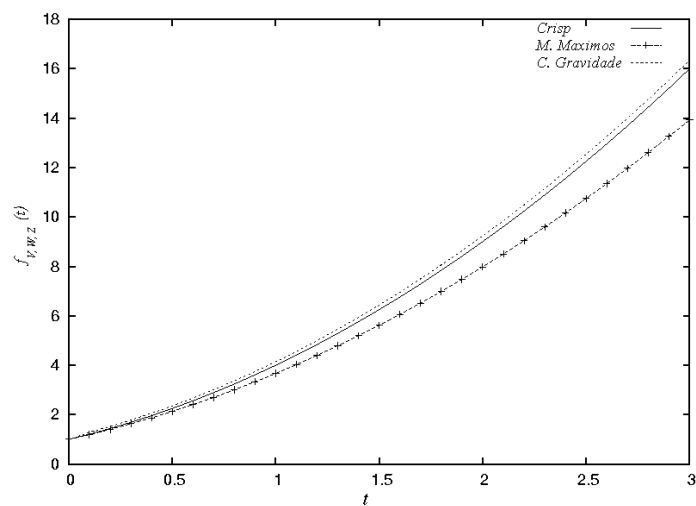


Gráfico 36 Defuzzificações na função monótona $f_{V,W,Z}(t) = (W t)^2 + (Z t) + V$ em que $V=[1,5; 2; 2,5]$, $W=[0,8; 1; 1,2]$ e $Z=[1,7; 2; 2,6]$

Para esta função monótona com três parâmetros *fuzzy*, o resultado da defuzzificação pelo método de Centro de Gravidade se aproximou mais do resultado *crisp* que o resultado da defuzzificação pelo método de Média dos Máximos.

4.6 Fuzzificação de algumas grandezas termodinâmicas do modelo de Ising com campos distintos em 3 sítios

Existem muitas possibilidades de fuzzificação de modelos físicos. Em Horiguchi (1993), foi realizada a fuzzificação do modelo de Ising, por meio das matrizes de spins. Na delimitação do projeto, optou-se por um processo de fuzzificação, que consiste em aplicar o princípio de extensão às grandezas físicas clássicas de uma rede unidimensional de Ising com N plaquetas e 3 sítios em cada plaqueta.

A aplicação nestas grandezas físicas tem por objetivo validar a utilização da ferramenta computacional desenvolvida por meio da fuzzificação de funções com considerável complexidade matemática, além da possibilidade de gerar uma termodinâmica *fuzzy* obtida baseando-se na aplicação do princípio de extensão de Zadeh nas funções correspondentes às grandezas termodinâmicas *crisp*.

A Hamiltoniana associada ao sistema é descrita por:

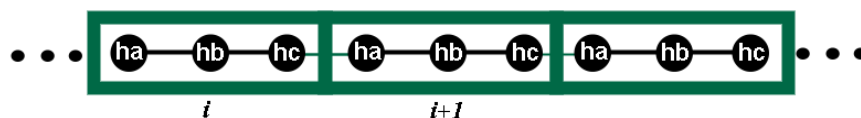


Figura 5 Representação do modelo de Ising com 3 campos magnéticos distintos

$$H = \sum_{i=1}^N H_{i,i+1} \quad (39)$$

em que $H_{i,i+1}$ é dado pela equação (40):

$$H_{i,i+1} = JS_{i,a}S_{i,b} + JS_{i,b}S_{i,c} + JS_{i,c}S_{i+1,a} + h_a S_{i,a} + h_b S_{i,b} + h_c S_{i,c} \quad (40)$$

de forma que J é o parâmetro de interações e h_a , h_b e h_c são os campos magnéticos.

Para se obter a energia livre de tal sistema, primeiro é necessário obter a função de partição parcial que é dada pela equação (41):

$$\begin{aligned} Z(S_1, S_2) = & 2 \exp\left(-\frac{\beta}{4}(J + 4h_a S_1)\right) \cosh\left(\frac{\beta}{2}(J(S_1 + S_2) + h_b + h_c)\right) \\ & + 2 \exp\left(\frac{\beta}{4}(J - 4h_a S_1)\right) \cosh\left(\frac{\beta}{2}(J(S_1 - S_2) + h_b - h_c)\right) \end{aligned} \quad (41)$$

em que $\beta = \frac{1}{kT}$ (k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta), a partir daí, é necessário se obter, também, o maior autovalor da matriz de transferência (SALINAS, 2005):

$$P = \begin{pmatrix} Z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & Z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ Z\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & Z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (42)$$

De forma trivial, se encontram os autovalores de P :

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \left(Z\left(\frac{11}{22}\right) + Z\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) \right) \quad (43)$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{Z^2\left(\frac{11}{22}\right) - 2Z\left(\frac{11}{22}\right)Z\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + Z^2\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) - 4Z\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)Z\left(\frac{11}{22}\right)}$$

Assim, a energia livre por sítio do sistema termodinâmico pode ser calculada pela equação (44):

$$W = -\frac{1}{3\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln(\Lambda_+^N)}{N} = -\frac{1}{3\beta} \ln(\Lambda_+) \quad (44)$$

Após encontrada a energia livre é possível encontrar as outras grandezas de derivadas parciais da **entropia** na equação (45) e do **calor específico** na equação (46).

$$S = -\frac{\partial W}{\partial T} \quad (45)$$

$$C = -\frac{\partial S}{\partial T} \quad (46)$$

4.6.1 Verificação da consistência do processo de fuzzificação de energia livre

O Gráfico 37 ilustra as diferenças percentuais entre a solução clássica e as soluções defuzzificadas (pelo método de centro de gravidade) para a energia livre (W) com $hb = 1$, $hc = 0,75$ e Ha é um número *fuzzy* triangular com

incertezas em torno de 1 $[1-\text{incerteza}; 1; 1+\text{incerteza}]$ e t é o intervalo de $[0,02; 5]$.

Para todas as demonstrações de h_a, h_b e/ou h_c como números *fuzzy*, será adotada a notação de conjuntos *fuzzy*, sendo assim representadas por H_a, H_b e/ou H_c .

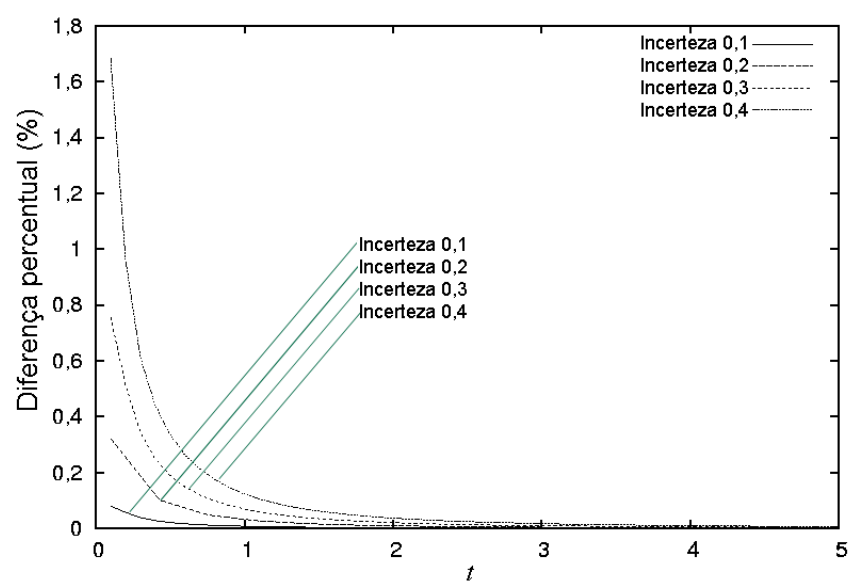


Gráfico 37 Diferenças percentuais entre a energia livre fuzzificada (com um parâmetro *fuzzy*) e a crisp para H_a (número *fuzzy*) com incertezas em torno de 1

É observado que quanto maior a incerteza, maior é a diferença percentual do resultado da defuzzificação (pelo método de centro de gravidade) em relação ao resultado *crisp*, portanto é observada a consistência do processo de fuzzificação apresentado neste trabalho.

4.6.2 Comparação entre os métodos de defuzzificação centro de gravidade e média dos máximos para energia livre com três parâmetros *fuzzy*

Pelo Gráfico 38 pode-se observar os resultados obtidos pelas defuzzificações (métodos: média dos máximos e centro de gravidade) e o resultado *crisp* para a energia livre com h_a sendo um número *fuzzy* triangular com a incerteza bilateral de 0,4 em torno de 1 [0,6; 1 ;1,4] com a função de pertinência descrita pela equação:

$$\varphi_{H_a}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0,6 \text{ ou } x \geq 1,4 \\ \frac{x-0,6}{0,4}, & \text{se } 0,6 < x \leq 1 \\ \frac{1,4-x}{0,4}, & \text{se } 1 \leq x < 1,4 \end{cases}, \quad (47)$$

h_b sendo um número *fuzzy* triangular com a incerteza bilateral de 0,4 em torno de 1 [0,6; 1 ;1,4] com a função de pertinência descrita pela equação:

$$\varphi_{H_b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0,6 \text{ ou } x \geq 1,4 \\ \frac{x-0,6}{0,4}, & \text{se } 0,6 < x \leq 1 \\ \frac{1,4-x}{0,4}, & \text{se } 1 \leq x < 1,4 \end{cases}, \quad (48)$$

h_c sendo um número *fuzzy* triangular com a incerteza bilateral de 0,4 em torno de 0,75 [0,35; 0,75 ;1,15] com a função de pertinência descrita pela equação:

$$\varphi_{H_c}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0,35 \text{ ou } x \geq 1,15 \\ \frac{x-0,35}{0,4}, & \text{se } 0,35 < x \leq 0,75 \\ \frac{1,15-x}{0,4}, & \text{se } 0,75 \leq x < 1,15 \end{cases}, \quad (49)$$

e $\varepsilon \in [0,02; 3]$.

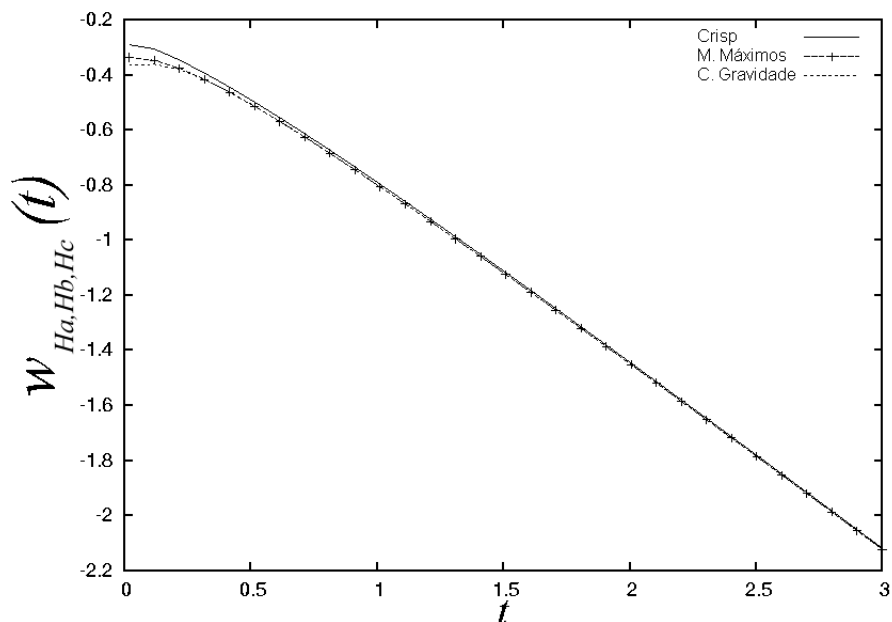


Gráfico 38 Comparação entre defuzzificações e o resultado *crisp* para energia livre com três parâmetros *fuzzy* $H_a=[0,6; 1; 1,4]$, $H_b=[0,6; 1; 1,4]$ e $H_c=[0,35; 0,75; 1,15]$

Observa-se que o resultado defuzzificado pelo método de média dos máximos se aproxima mais do resultado *crisp* (clássico) que o resultado defuzzificado obtido pelo método de centro de gravidade.

4.6.3 Comparação entre os métodos de defuzzificação centro de gravidade e média dos máximos para energia livre com um, dois ou três parâmetros *fuzzy*

No Gráfico 39, representando a energia livre (44), com o número *fuzzy* n_a representado pela função de pertinência (47) $H_a = [0,6; 1; 1,4]$ e os

valores *crisp* de $hb = 1$ e $hc = 0,75$ determinando o resultado de A1 no Gráfico 39.

Ainda, no Gráfico 39, determinando o resultado do gráfico B1, representando a energia livre (44), com os números *fuzzy* $H_a = [0,6; 1; 1,4]$ e $H_b = [0,6; 1; 1,4]$ representados, respectivamente, pelas funções de pertinência (47) e (48), e o valor *crisp* $hc = 0,75$.

Também, no Gráfico 39, determinando o resultado de C1, a energia livre (44), com os números *fuzzy* $H_a = [0,6; 1; 1,4]$, $H_b = [0,6; 1; 1,4]$ e $H_c = [0,35; 0,75; 1,15]$ representados, respectivamente, pelas funções de pertinência (47), (48) e (49).

Sendo para A1, B1 e C1, $t \in [0,02; 1,5]$.

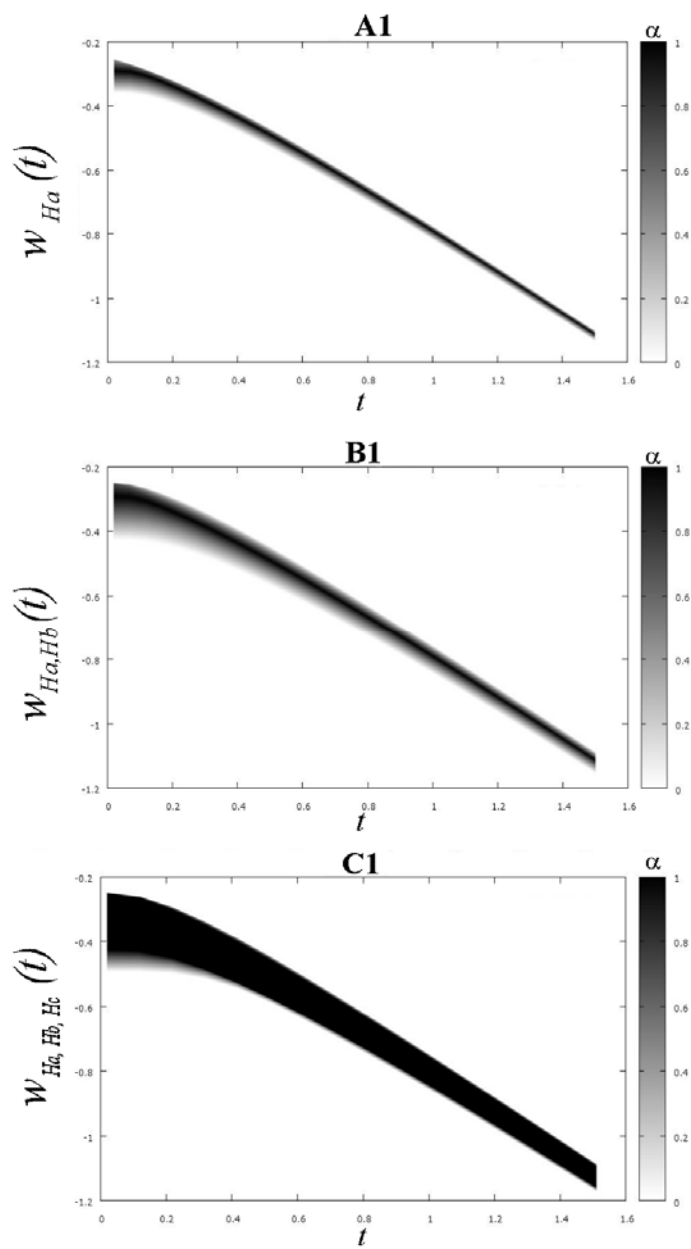


Gráfico 39 Fuzzificação da energia livre com 1 (A1), 2(B1) ou 3(C1) parâmetros *fuzzy*

Observadas as fuzzições, nota-se que a fuzzição B1 tem maior incerteza que a A1, e a fuzzição C1 possui números *fuzzy* trapezoidais. Observa-se, também, que, em baixas temperaturas, a incerteza é maior para os três casos *fuzzy*(A1, B1 e C1) e com o aumento da temperatura, a incerteza vai diminuindo.

Após a defuzzição, obtém-se a diferença percentual entre as defuzzições pelo método de centro de gravidade e pelo método de média dos máximos (Gráfico 40):

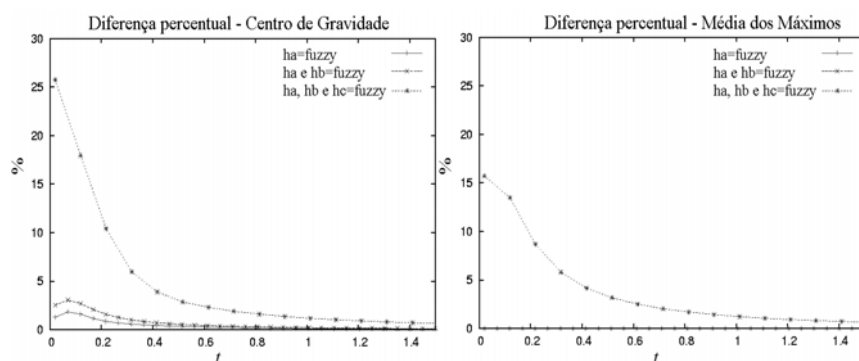


Gráfico 40 Diferenças percentuais comparando os métodos de defuzzição média dos máximos e centro de gravidade para a energia livre com 1, 2 e 3 parâmetros *fuzzy*

Nota-se que, para todas as energias livres *fuzzy* (com um, dois ou três parâmetros *fuzzy*), os resultados obtidos pelo método de defuzzição média dos máximos foram os que mais se aproximaram da solução *crisp*.

As diferenças percentuais (Gráfico 40) entre a defuzzição (média dos máximos) e o resultado *crisp* para as funções *fuzzy* com um e dois parâmetros *fuzzy* (A1 e B1 do Gráfico 39) foi quase zero. Já para a função com os três parâmetros *fuzzy* (C1 do Gráfico 39), a maior diferença percentual (*fuzzy* VS *crisp*) foi de 16% (dezesseis por cento) enquanto a maior diferença

percentual obtida com método de centro de gravidade foi de 26% (vinte e seis por cento).

4.6.4 Fuzzificação da grandeza termodinâmica entropia

Seja a entropia (45), com o número *fuzzy* $h_a = [0,6; 1,0; 1,4]$ representado pela função de pertinência (47), os valores *crisp* de $h_b = 1$ e $h_c = 0,75$ e $t \in [0,022; 2,000]$ nos Gráficos 41 e 42 é ilustrada a grandeza termodinâmica entropia *fuzzy*:

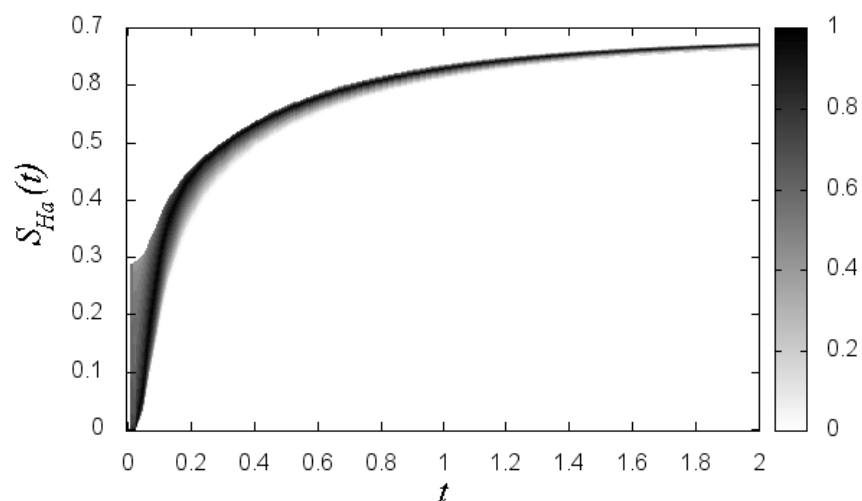


Gráfico 41 Fuzzificação da entropia com o parâmetro *fuzzy* $h_a = [0,6; 1,0; 1,4]$ e os valores *crisp* $h_b = 1$ e $h_c = 0,75$

É observado que nesta fuzzificação (Gráfico 41), em seu início existe uma incerteza muito grande para valores em $0,022 < t < 0,15$ e

$0 < S_{Ha}(t) < 0,29$. Também é observado que a partir $t \cong 0,18$ a incerteza se reverte para baixo da função (fazendo certa inversão na incerteza). Assim a incerteza tende a diminuir com o aumento de t .

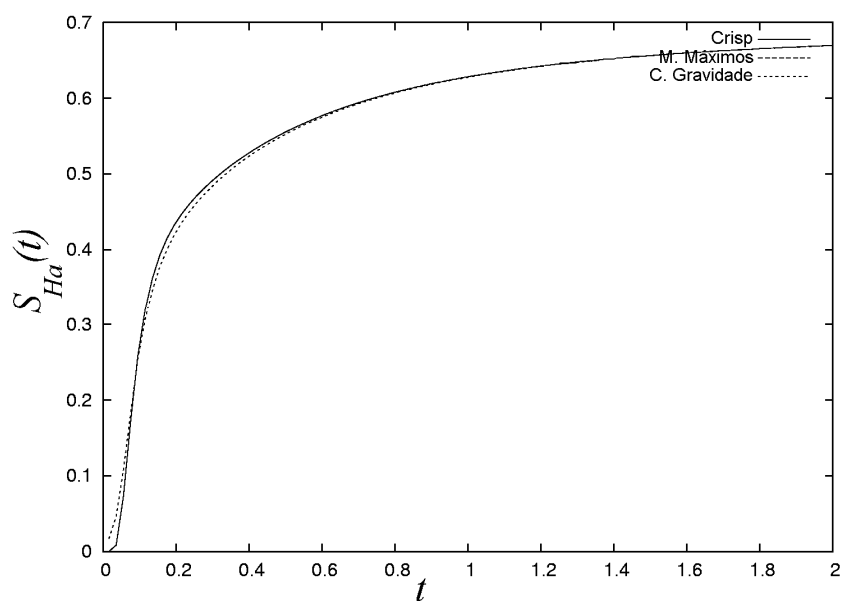


Gráfico 42 Defuzzificação da entropia com o parâmetro fuzzy $Ha = [0.6; 1; 1.4]$ e os valores crisp $hb = 1$ e $hc = 0.75$

Observando as defuzzificações do Gráfico 42, nota-se, novamente, que a defuzzificação pelo método de média dos máximos é idêntica ao resultado da função *crisp*, já a defuzzificação pelo centro de gravidade em alguns pontos (de maior incerteza da função fuzzificada) apresenta certo desvio da função *crisp*, tendo uma diferença de $1,6922 \times 10^{-2} \%$ para $t = 0,015$.

Seja a entropia (45), com os números *fuzzy* $H\alpha = [0,6; 1; 1,4]$ e $H\beta = [0,6; 1; 1,4]$ representados pelas funções de pertinência (47) e (48), o valor *crisp* de $hc = 0,75$ e $t \in [0,022; 2]$ determinando os resultados gráficos ilustrados, respectivamente, nos Gráficos 43 e 44.

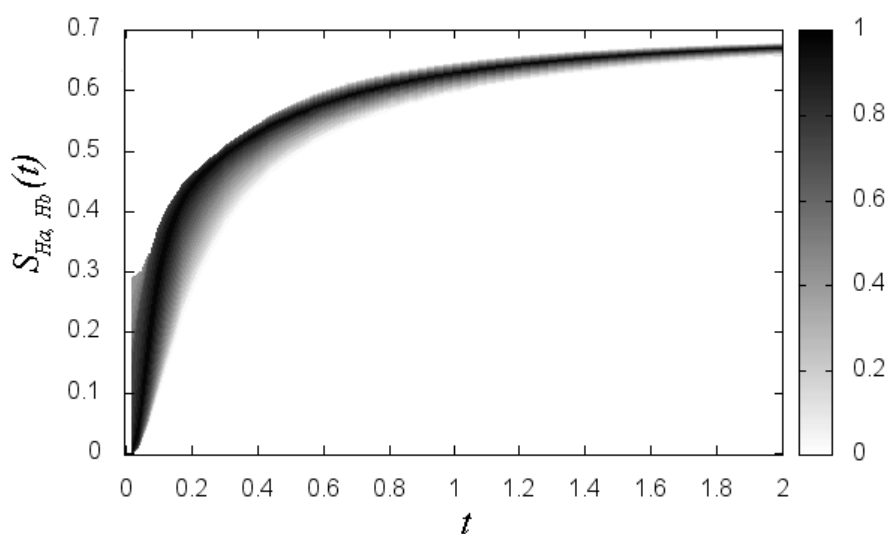


Gráfico 43 Fuzzificação da entropia com os parâmetros *fuzzy* $H\alpha = [0,6; 1; 1,4]$ e $H\beta = [0,6; 1; 1,4]$ e o valor *crisp* $hc = 0,75$

Nota-se que, para este resultado (Gráfico 43), aplicam-se as mesmas observações do resultado anterior (Gráfico 41), apenas é observado que este resultado possui uma incerteza maior que a do anterior, portanto, o resultado de sua defuzzificação pelo método de centro de gravidade se distancia um pouco mais do resultado *crisp* (Gráfico 44).

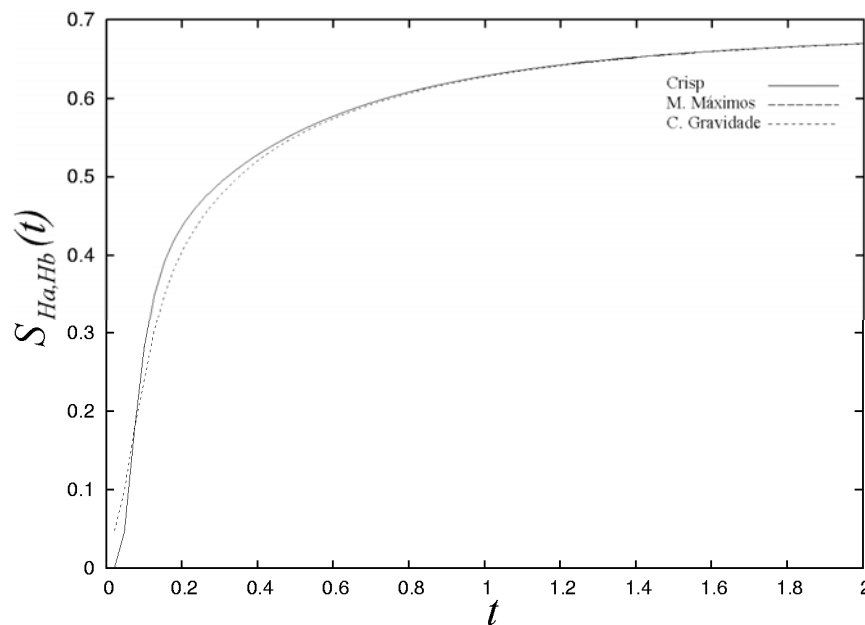


Gráfico 44 Defuzzificações da entropia com os parâmetros *fuzzy* $H_a = [0,6; 1; 1,4]$ e $H_b = [0,6; 1; 1,4]$ e o valor *crisp* $h_c = 0,75$

4.6.5 Observações sobre a fuzzificação da grandeza termodinâmica calor específico

Seja o calor específico (46), com o número *fuzzy* $H_a = [0,6; 1; 1,4]$ representado pela função de pertinência (47), os valores *crisp* de $h_b = 1$ e $h_c = 0,75$ e $t \in (0,022; 2)$ determinando o resultado dos Gráficos 45 e 46.

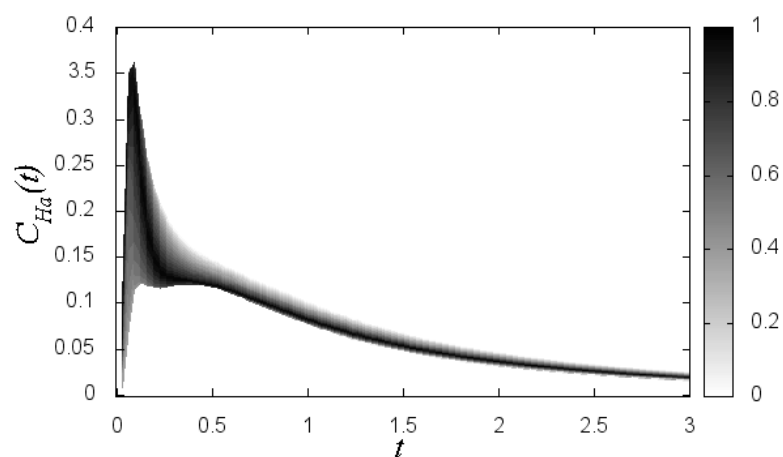


Gráfico 45 Fuzzificação do calor específico com o parâmetro fuzzy $H\alpha = [0.6:1:1.4]$ e os valores crisp $hb = 1$ e $hc = 0.75$

Observa-se que o calor específico fuzzy (Gráfico 45) se trata de uma função fuzzy que possui uma oscilação e, no período em que $0 \leq t \leq 0.3$, há uma incerteza bastante significativa de 0 até 0,35 em $C_{Ha}(t)$. A partir de $t \geq 0.5$ é observado que a incerteza vai diminuindo com o aumento de t .

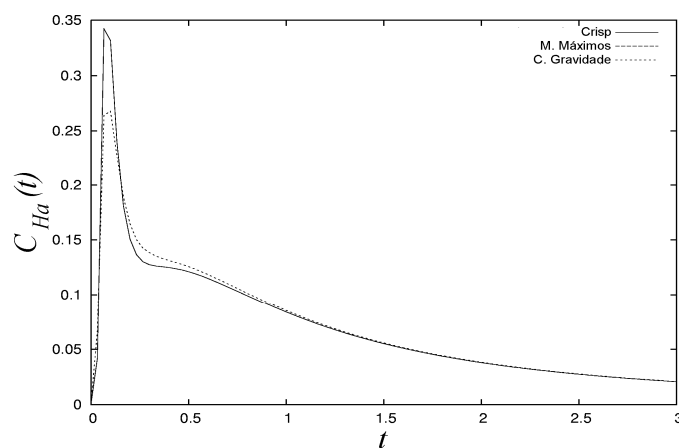


Gráfico 46 Defuzzificação do calor específico com o parâmetro fuzzy $H\alpha = [0.6:1:1.4]$ e os valores crisp $hb = 1$ e $hc = 0.75$

Nota-se, mais uma vez, que o resultado obtido pela defuzzificação, por meio do método média dos máximos se aproximou mais da função *crisp* do que o resultado obtido pela defuzzificação por meio do método de centro de gravidade.

5 CONCLUSÕES

Por meio das análises dos resultados, pode-se concluir que a ferramenta computacional *fuzzy* para princípio de extensão de Zadeh (FCFPEZ) desenvolvida, foi validada, tendo em vista que funções não monótonas e, também, funções físicas com um grau elevado de complexidade computacional foram analisadas.

Apesar de ter sido idealizada, considerando os trabalhos de Melo (2007) e Pires (2010), a ferramenta computacional foi totalmente remodelada visando contribuições não vistas nesses trabalhos anteriores, como um algoritmo de alto desempenho computacional, a usabilidade da ferramenta, portabilidade da aplicação computacional e mais funcionalidades como a utilização de até três parâmetros *fuzzy* por função e mais uma forma de defuzzificação por meio da implementação do método média dos máximos.

Após a obtenção de resultados por meio da FCFPEZ, observa-se que, ao se transformar uma função oscilante *crisp* em uma função oscilante *fuzzy*, não é correto afirmar que: “só porque a função *crisp* é oscilante terá alterações significativas, após a operação de máxima pertinência (MAX) do princípio de extensão de Zadeh”. Mas, quando existe um parâmetro *fuzzy* na parte oscilatória da função, há alterações significativas, após a operação de máxima pertinência (MAX) do princípio de extensão de Zadeh e ocasionará sensíveis diferenças após as defuzzificações (pelos métodos Média dos Máximos e Centro de Gravidade) e ao compará-las.

Como visto em (MELO, 2007) e demonstrado neste trabalho, quando o parâmetro *fuzzy* está dentro da parte oscilatória da função, há um crescimento da incerteza, durante a evolução da função, em consequência disso, ao ser defuzzificada pelo método de centro de gravidade, a função sofrerá certo tipo de amortecimento, tendendo a zero.

Não cabe afirmar qual método de defuzzificação é melhor, pois, depende dos objetivos de determinado estudo. Porém, baseando-se em resultados encontrados neste trabalho, por meio de testes realizados entre os métodos: Centro de Gravidade e Média dos Máximos, pode-se concluir que se o objetivo de determinado estudo de uma função oscilante *fuzzy* é chegar ao resultado mais próximo a função oscilante *crisp*, é recomendada a utilização do método de defuzzificação Média dos Máximos.

Foi observado que quanto mais números *fuzzy* descreverem a função, mais tempo será necessário para o processamento, pois, há um aumento considerável no número de operações aritméticas em cada módulo do sistema computacional.

Também se conclui que na função senoidal apresentada com dois parâmetros *fuzzy*, há um aumento significativo da incerteza proporcionando uma maior diferença entre o resultado defuzzificado (centro de gravidade) e o resultado *crisp*. Também é interpretável a composição da função de dois parâmetros por duas funções *fuzzy* distintas, cada uma com apenas um respectivo parâmetro *fuzzy*, dentro e fora da parte oscilante da função.

Pelas observações em funções com três parâmetros *fuzzy* (oscilante e não oscilante) nota-se que os números *fuzzy* de resposta, geralmente, são trapezoidais, com a região de maior pertinência (com o valor 1) ampliada.

Para trabalhos futuros, a FCFPEZ será utilizada na fuzzificação de vários modelos das mais diversificadas áreas, a fim de se explorar as possibilidades incertas de tais modelos. Além disso, será realizado um estudo aprofundado para associar uma operação lógica ou criar uma nova operação que valide a observação presente neste trabalho da composição de duas ou mais funções *fuzzy* com um parâmetro resultando em apenas uma função *fuzzy* que descreva tal fuzzificação com todos os parâmetros *fuzzy* envolvidos. Também serão realizadas melhorias na FCFPEZ como possibilitar que o usuário escolha

outros tipos de função de pertinência para os parâmetros *fuzzy* embutidos na função a ser fuzzificada, permitir que o usuário possa escolher mais tipos de defuzzificação.

Por fim, conclui-se que a utilização desta ferramenta torna possível a realização do estudo da termodinâmica *fuzzy*, e o estudo da fuzzificação de vários outros temas considerando funções aritméticas.

REFERÊNCIAS

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica Fuzzy e biomatemática**. Campinas: UNICAMP, 2006.

BARROS, L. C. **Sobre sistemas dinâmicos fuzzy**: teoria e aplicações. 1997. 103 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

COX, E. **Fuzzy logic for business and industry**. Massachusetts: Charles River Media, 1995.

GENG, Z. Rough set-based Fuzzy Rule acquisition and its application for fault diagnosis in petrochemical process. **Industrial & Engineering Chemistry Research** , Austin, v. 48, p. 827-836, 2009.

HORIGUCHI, T. Spin model with fuzzy Ising spin. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 176, n. 3, p. 179-183, May 1993.

KAO, C. Fuzzy data standardization. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems** , New York, v. 18, p. 745-754, 2010.

KILIC, Y. et al. A novel fuzzy-logic inference system for predicting trauma-related mortality: emphasis on the impact of response to resuscitation . **European Journal of Trauma and Emergency Surgery** , Munich, v. 36, n. 6, p. 543-550, 2010.

LEE, C.; WANG, M. A Fuzzy expert system for diabetes decision support application. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, Hanover, v. 41, n. 1, p. 1-15, 24 May 2010. Part B: Cybernetics.

LIMA, C. **Processo de tomada de decisão em projetos de exploração e produção de petróleo no Brasil**: uma abordagem usando conjuntos nebulosos. 2003. 127 p. Tese (Doutorado em Planejamento Energético) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

LIMA, F. Java+Maxima: alternativa para o desenvolvimento científico. **Revista MundoJava**, Curitiba, v. 44, p. 62-65, 2010.

MELO, G. **Lógica Fuzzy aplicada na solução do oscilador harmônico unidimensional**. 69 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2007.

ORTEGA, N. **Aplicação da teoria de conjuntos fuzzy a problemas da biomedicina**. 342 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 2001.

PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy analysis and design**. New York: Massachusetts Institute of Technology, 1998.

PIRES, D. **Implementação computacional do princípio de extensão de Zadeh**. 2010. 60 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.

PIRES, D. **Modelagem Fuzzy na estimativa do volume de árvores de eucalyptus**. Monografia (Graduação em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2007.

SALINAS, S. **Introdução à física estática**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2005.

SHAW, I; SIMÕES, M. **Controle e modelagem Fuzzy**. São Paulo: E. Blücher, 1999.

TANAKA, K. **An introduction to Fuzzy logic for practical applications.**
Kanazawa: Kanazawa University, 1991.

VASSANT, P. Decision making in industrial production planning using fuzzy linear programming. **IMA J Management Math**, Oxford, v. 15, n. 1, p. 53-65, 2004.

WAN, D. Highly specific molecular recognition by a roughly defined supramolecular nanocapsule: a fuzzy recognition mechanism. **Macromolecules**, Washington, v. 43, n. 8, p. 3809–3816, 2010.

ZADEH, L. Fuzzysets. **Information and Control**, Berkeley, v. 8, p. 338-353, 1965.