



PATRICK CORRÊA DOS SANTOS

**PARA ALÉM DO CÍRCULO UNITÁRIO: EXPLORANDO AS
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ENEM COM
FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS**

LAVRAS – MG

2026

PATRICK CORRÊA DOS SANTOS

**PARA ALÉM DO CÍRCULO UNITÁRIO: EXPLORANDO AS FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS DO ENEM COM FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS**

Trabalho de conclusão do curso apresentada à
Universidade Federal de Lavras, como parte
das exigências do Mestrado em Matemática em
rede nacional, para a obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Profa. Dra. Evelise Roman Corbalan Gois Freire
Orientadora

LAVRAS – MG

2026

**Ficha Catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo autor**

Santos, Patrick Corrêa dos

Para além do círculo unitário: explorando as funções trigonométricas do ENEM com ferramentas computacionais / Patrick Corrêa dos Santos. – Lavras : UFLA, 2026.

172 p. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática)–Universidade Federal de Lavras, 2026.

Orientadora: Profa. Dra. Evelise Roman Corbalan Gois Freire.
Bibliografia.

1. Funções Trigonométricas. 2. ENEM. 3. GeoGebra. 4. Maxima. 5. Recursos Computacionais. I. Freire, Evelise Roman Corbalan Gois. II. Universidade Federal de Lavras. III. Título.

PATRICK CORRÊA DOS SANTOS

**PARA ALÉM DO CÍRCULO UNITÁRIO: EXPLORANDO AS FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS DO ENEM COM FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS**
**BEYOND THE UNIT CIRCLE: EXPLORING TRIGONOMETRIC FUNCTIONS IN
ENEM WITH COMPUTATIONAL TOOLS**

Trabalho de conclusão do curso apresentada à
Universidade Federal de Lavras, como parte
das exigências do Mestrado em Matemática em
rede nacional, para a obtenção do título de
Mestre em Matemática.

APROVADA em 27 de agosto de 2026.

Profa. Dra. Evelise Roman Corbalan Gois Freire .	UFLA
Prof. Dr. Helvécio Geovani Fagnoli Filho	UFLA
Profa. Dra. Gilcélia Regiane de Souza.	UFSJ

Documento assinado digitalmente
 **EVELISE ROMAN CORBALAN GOIS FREIRE**
Data: 30/09/2026 16:40:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Evelise Roman Corbalan Gois Freire
Orientadora

LAVRAS – MG
2026

AGRADECIMENTOS

Início agradecendo a Deus, Aquele que me sustentou, tornou tudo isso possível, encaixou todas as peças e ofereceu soluções em todos os momentos, principalmente naqueles em que não havia nenhuma saída visível. Foram muitos metros cúbicos de lágrimas derramadas nos últimos dois anos e meio, mas Ele as enxugou, contou uma a uma e as transformou em bênçãos na minha vida e na da minha família.

Agradeço à minha esposa, Juliana de Faria, que amo tanto, que sempre apoiou minhas aventuras acadêmicas. Muito obrigado pela parceria, Juliana. Essa foi a última "tá"? Será? Aos meus filhos, Albert Kepler e Patrícia, ouvir deles um "eu te amo" em meio à pressão da qualificação foi o combustível que me deu força e a certeza de que tudo daria certo. De tudo aquilo que eu puder deixar para vocês, que o mais importante seja: amar e confiar em Deus, acreditar que estudar pode transformar a nossa realidade e respeitar os seus professores: isso fará toda a diferença na vida de vocês.

Agradeço aos meus pais, Helena e Joacy, pela educação cristã e pelas orações que nunca faltaram, e ao meu irmão Diego. Mesmo sem acesso a bolsa, por ser professor da rede privada e tendo que reduzir a carga horária para poder estudar, eles me ajudaram e apoiaram em todos os momentos. À minha família, meu muito obrigado.

À Rede Adventista de Educação, por 18 anos de atuação e por todas as escolas por onde passei. Aos gestores com quem trabalhei, Pr. Dalney Reis (EDESSA/CAES) e Pr. Everton Augusto (CAB/FADBA/FADMINAS), pelo apoio incondicional e inspiração. Às minhas coordenadoras, pela paciência e disposição em sempre caminharmos juntos: Profª Neila Rabelo (EDESSA), Profª Claudia Alves (CAB/FADBA), Profª Elaine Santana (CAB/FADBA) e Profª Fátima Borges (CAB/FADBA/FADMINAS). Em algum momento, vocês me ensinaram que ir além do ensino é amparar o professor em momentos difíceis e oferecer oportunidade de crescimento, e hoje agradeço muito por isso.

Durante esses anos, muitos professores se tornaram amigos. Em Provérbios 17:17 está escrito: *“O amigo ama em todos os momentos, mas na adversidade nasce um irmão.”* E mais que um amigo, ganhei um irmão nesse processo: agradeço ao Prof. Daniel Alves (FADMINAS) e à sua esposa, Micheli, pela amizade. Vários momentos difíceis foram superados pela amizade de vocês.

Agradeço à UFLA por me receber, saindo do estado do Espírito Santo, e me proporcionar a oportunidade de estudar em um lugar de excelência acadêmica. Em especial, gostaria de agradecer à minha orientadora, Profª Dra. Evelise Roman, por todas as orientações e intervenções neste trabalho. À Profª Dra. Rita Sodré, pelo suporte junto à coordenação, e a todos os professores do curso, Profª Dra. Adriana Xavier, Profª Dra. Daiane Ament, Prof. Dr. Helvécio Fagnoli (O curso de verão foi muito importante para a qualificação, obrigado!) e Prof. Dr. Osnel Broche, pelos preciosos ensinamentos durante esses dois anos de intensos estudos.

Aos meus colegas da turma de 2024, professores brilhantes que me ajudaram em muitos momentos dessa jornada: Profª Ana Camila Vilela, Profª Eliana Soares, Prof. Gabriel Alvarenga, Prof. João Paulo Martins, Prof. Matheus Claudino, Prof. Milton Augusto e Prof. Nivaldo Alves. A todos, meu muito obrigado.

*“Para que todos vejam, e saibam, e considerem, e juntamente entendam
que a mão do Senhor fez isto...”*

Isaías 41:20

RESUMO

Este trabalho investigou o conteúdo de Funções Trigonométricas e a forma como é avaliado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A pesquisa utilizou os recursos computacionais GeoGebra e Maxima como ferramentas de visualização e cálculo algébrico na aplicação dos conceitos matemáticos. A análise dos recursos computacionais evidenciou que cada ferramenta possui pontos fortes e fracos, limitações e possibilidades, sendo possível verificar a complementaridade entre os softwares. Foram investigadas as características dinâmicas e visuais do GeoGebra e suas potencialidades, bem como a potente capacidade algébrica oferecida pelo Maxima, demonstrando como cada software pode complementar o outro no estudo das Funções Trigonométricas. Para tanto, realizou-se uma análise histórica das questões do ENEM que envolvem Funções Trigonométricas, aplicou-se a resolução analítica tradicional e propôs-se a resolução com o auxílio dos softwares matemáticos. Como resultado, foi possível comparar as potencialidades dos softwares e, ao final, elaborou-se uma sequência didática para aplicação das ferramentas no ensino de funções trigonométricas. Dessa forma, o trabalho proporciona novos olhares, estratégias alternativas e maior aprofundamento conceitual, contribuindo para o enriquecimento da prática docente mediante o uso de recursos computacionais.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas; ENEM; GeoGebra; Maxima; Recursos Computacionais

ABSTRACT

This work investigated the content of Trigonometric Functions and how it is assessed in the Brazilian National High School Examination (ENEM). The research used the computational resources GeoGebra and Maxima as visualization and algebraic calculation tools in the application of mathematical concepts. The analysis showed that each tool has strengths and weaknesses, limitations and possibilities, making it possible to verify the complementarity between the software. The dynamic and visual characteristics of GeoGebra were investigated, as well as the powerful algebraic capacity offered by Maxima, demonstrating how each software can complement the other in the study of Trigonometric Functions. To this end, a historical analysis of the ENEM questions involving such functions was carried out, the traditional analytical resolution was applied, and a resolution with the aid of the software was proposed. As a result, it was possible to compare the potential of the software and, at the end, a didactic sequence was developed for the application of the tools in teaching trigonometric functions. Thus, the work provides new perspectives, alternative strategies, and greater conceptual depth, contributing to the enrichment of teaching practice through the use of computational resources.

Keywords: Trigonometric Functions; ENEM; GeoGebra; Maxima; Computational Resources

INDICADORES DE IMPACTO

A pesquisa investiga o ensino de Funções Trigonométricas a partir de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), articulando a resolução analítica tradicional a ferramentas computacionais gratuitas, o GeoGebra e o Maxima, com o objetivo de ampliar as possibilidades didáticas disponíveis a professores da Educação Básica. O trabalho produz uma sequência didática e um conjunto de apêndices que detalham, passo a passo, a resolução de seis questões do ENEM sobre o tema em ambos os softwares, acompanhados de comentários técnicos voltados especificamente à prática docente em sala de aula. Do ponto de vista tecnológico, o impacto reside na sistematização do uso de recursos computacionais livres e gratuitos como alternativa à desatualização de materiais didáticos tradicionais adotados no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), tornando replicável, em qualquer escola com acesso a computadores, o recurso a visualizações dinâmicas e cálculo algébrico sem custo adicional para a instituição ou para o professor. Socialmente, o produto educacional beneficia de forma direta professores de Matemática da Educação Básica e, por extensão, seus estudantes, ao oferecer um material replicável que amplia o repertório metodológico para o ensino de um conteúdo historicamente associado a dificuldades de aprendizagem no ENEM. O caráter formativo do trabalho alcança também professores em formação continuada, já que os apêndices funcionam como guia autoinstrutivo para a apropriação das ferramentas. Ainda que o alcance direto do produto dependa da divulgação e da adoção voluntária por outros docentes, os impactos potenciais concentram-se no fortalecimento do ensino de Matemática na Educação Básica e na democratização do acesso a tecnologias educacionais gratuitas.

IMPACT INDICATORS

This research investigates the teaching of Trigonometric Functions based on questions from the Brazilian National High School Exam (ENEM), combining traditional analytical resolution with free computational tools, GeoGebra and Maxima, with the aim of broadening the didactic possibilities available to Basic Education teachers. The study produces a didactic sequence and a set of appendices detailing, step by step, the resolution of six ENEM questions on the topic using both software programs, accompanied by technical comments aimed specifically at classroom teaching practice. From a technological standpoint, the impact lies in the systematization of free and open computational resources as an alternative to outdated traditional teaching materials adopted in the Professional Master's Program in Mathematics in a National Network (PROFMAT), making it replicable, in any school with computer access, to use dynamic visualizations and algebraic computation at no additional cost to the institution or the teacher. Socially, the educational product directly benefits Basic Education Mathematics teachers and, by extension, their students, by offering replicable material that broadens the methodological repertoire for teaching content historically associated with learning difficulties in ENEM. The formative character of the work also reaches teachers in continuing education, since the appendices function as a self-instructional guide for appropriating the tools. Although the direct reach of the product depends on dissemination and voluntary adoption by other teachers, the potential impacts are concentrated on strengthening the teaching of Mathematics in Basic Education and on democratizing access to free educational technologies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Interface do GeoGebra Classic com destaque para as áreas de trabalho . . .	28
Figura 3.2 – Interface do Maxima (wxMaxima)	31
Figura 4.1 – Questão 160 - Prova Azul - ENEM 2025	39
Figura 4.2 – Tela do GeoGebra: construção da função com os controles deslizantes k , p e m , com visualização das assíntotas e dos pontos A e B	43
Figura 4.3 – Comandos de entrada e saída no Maxima	46
Figura 4.4 – Gráfico gerado pelo comando <code>plot2d</code>	46
Figura 4.5 – Gráfico gerado no Maxima com as assíntotas desenhadas explicitamente . .	47
Figura 4.6 – Valores calculados de $D(0)$, $D(2,5)$ e do período	48
Figura 4.7 – Inserindo a função	53
Figura 4.8 – Tela do GeoGebra: gráfico de $T(x)$ no intervalo $[0, 24]$ com os três mínimos visíveis, com exploração dos parâmetros a , b e c	54
Figura 4.9 – Comandos na interface do Maxima	55
Figura 4.10 – Gráfico gerado no Maxima	56
Figura 4.11 – Saída do comando <code>solve</code> e das substituições de k	58
Figura 4.12 – Questão 177 - ENEM 2019	59
Figura 4.13 – Utilizando a ferramenta interseção	63
Figura 4.14 – Tela do GeoGebra: gráfico com β variando e a reta $y = 6$, com pontos de interseção destacados para $\beta = 4$	64
Figura 4.15 – Solução geral obtida pelo comando <code>solve</code>	66
Figura 4.16 – Valores numéricos das interseções para $\beta = 4$	68
Figura 4.17 – Gráfico de $h(t)$ e da reta $y=6$ gerado no Maxima, com as três interseções visíveis	69
Figura 4.18 – Questão 170 - ENEM 2018 - Parte A. Fonte: Wikipedia (2014).	70
Figura 4.19 – Questão 170 - ENEM 2018 - Parte B. Fonte: INEP (2018).	70
Figura 4.20 – Tela do GeoGebra: ajuste dos sliders a e b até coincidir com as retas de referência, com gráfico final sobreposto às retas $y = 88$ e $y = 168$	74
Figura 4.21 – Cálculo direto de a e b a partir dos valores máximo e mínimo	76
Figura 4.22 – Gráfico final gerado no Maxima — Decimais	77

Figura 4.23 – Tela do GeoGebra: ajuste dos sliders A e B com as retas de referência 78 e 120, com ajuste do slider k até representar o período correto	83
Figura 4.24 – Cálculo direto de A e B a partir dos dados de pressão	86
Figura 4.25 – Conversão da frequência cardíaca em período	86
Figura 4.26 – Determinação de k a partir do período T	87
Figura 4.27 – Modelo final da pressão arterial e verificação	88
Figura 4.28 – Inserção da função no prompt do GeoGebra	93
Figura 4.29 – Ajuste do intervalo de pontos no GeoGebra	94
Figura 4.30 – Inserção do intervalo de pontos no GeoGebra	94
Figura 4.31 – Visualização gráfica do ponto mínimo	95
Figura 4.32 – Inserção da função no Maxima	96
Figura 4.33 – Visualização gráfica do ponto mínimo - Plotando os gráficos.	97
Figura 4.34 – Visualização gráfica do ponto mínimo - Visualizando o gráfico	97
Figura 4.35 – Visualização gráfica do ponto mínimo - Visualizando o ponto mínimo	98
Figura 4.36 – Solução da Equação no Maxima	98
Figura A.1 – Declarando as funções no Maxima	110
Figura A.2 – Valores Numéricos	110
Figura A.3 – Valores Numéricos	111
Figura A.4 – Racionalização de Denominadores	111
Figura A.5 – Seno vs Cosseno	112
Figura A.6 – Gráfico Seno vs Cosseno	112
Figura A.7 – Seno vs Cosseno em Radianos	113
Figura A.8 – Seno vs Cosseno	113
Figura A.9 – Comando Tangente	113
Figura A.10 – Tangente	114
Figura A.11 – Comando Tangente em Radianos	114
Figura A.12 – Tangente em Radianos	115
Figura A.13 – Comandos para informar os parâmetros	116
Figura A.14 – Informações apresentadas pelo aluno	116
Figura C.1 – Tela do GeoGebra: construção da função com os controles deslizantes k, p e m, com visualização das assíntotas e dos pontos A e B	126

Figura C.2 – Comandos de entrada e saída no Maxima	127
Figura C.3 – Gráfico gerado pelo comando plot2d	128
Figura C.4 – Gráfico gerado no Maxima com as assíntotas desenhadas explicitamente . .	129
Figura C.5 – Valores calculados de $D(0)$, $D(2,5)$ e do período	130
Figura D.1 – Inserindo a função	132
Figura D.2 – Tela do GeoGebra: gráfico de $T(x)$ no intervalo $[0, 24]$ com os três mínimos visíveis, com exploração dos parâmetros a , b e c	133
Figura D.3 – Comandos na interface do Maxima	134
Figura D.4 – Gráfico gerado no Maxima	135
Figura D.5 – Saída do comando solve e das substituições de k	136
Figura E.1 – Utilizando a ferramenta interseção	139
Figura E.2 – Tela do GeoGebra: gráfico com β variando e a reta $y = 6$, com pontos de interseção destacados para $\beta = 5$	139
Figura E.3 – Solução geral obtida pelo comando solve	140
Figura E.4 – Valores numéricos das interseções para $\beta = 5$	141
Figura E.5 – Gráfico de $h(t)$ e da reta $y=6$ gerado no Maxima, com as três interseções visíveis	142
Figura F.1 – Tela do GeoGebra: ajuste dos sliders a e b até coincidir com as retas de referência, com gráfico final sobreposto às retas $y = 88$ e $y = 168$	145
Figura F.2 – Cálculo direto de a e b a partir dos valores máximo e mínimo	146
Figura F.3 – Gráfico final gerado no Maxima — Decimais	147
Figura F.4 – Gráfico final gerado no Maxima — Radianos	148
Figura G.1 – Tela do GeoGebra: ajuste dos sliders A e B com as retas de referência 78 e 120, com ajuste do slider k até representar o período correto	151
Figura G.2 – Cálculo direto de A e B a partir dos dados de pressão	152
Figura G.3 – Conversão da frequência cardíaca em período	153
Figura G.4 – Determinação de k a partir do período T	154
Figura G.5 – Modelo final da pressão arterial e verificação	155
Figura H.1 – Janela de Álgebra do GeoGebra: lista de preços gerada por Sequência . . .	158
Figura H.2 – Preço mínimo e mês correspondente encontrados utilizando lógica de pro- gramação.	158

Figura H.3 – Definição da função de busca com laço e condicional	161
Figura H.4 – Resultado da busca: mês e preço mínimo	161
Figura I.1 – Janela de Álgebra com $P(x)$, listaPrecos e a variável minMes já definidos, antes da criação do botão	164
Figura I.2 – Prenchimento do botão com o script em GGBScript, antes da execução . . .	165
Figura I.3 – Mensagem de erro retornada ao tentar executar o comando Para dentro do botão	165
Figura I.4 – Segundo erro encontrado: comando Se não reconhecido dentro do eval- Command, por estar em português	167
Figura I.5 – Configuração final do botão: campo Ao Clicar com ScriptType em JavaS- cript e os comandos já traduzidos para o inglês	169
Figura I.6 – Resultado do script após o clique: minMes = 7	169

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	JUSTIFICATIVA	19
2	METODOLOGIA	21
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
3.1	A BNCC e as Funções Trigonométricas	25
3.2	O Software GeoGebra	26
3.2.1	Interface do GeoGebra	28
3.3	O Software Maxima	29
3.3.1	Maxima: Sistema de Computação Algébrica de Código Aberto	29
3.3.2	Origens Históricas e Desenvolvimento	29
3.3.3	Características Técnicas e Funcionalidades	30
3.3.4	Interface e Operacionalização	30
3.3.5	Aplicações Pedagógicas	30
3.3.6	Materiais Complementares para Estudo do Maxima	31
3.3.7	Relevância para o Ensino de Funções Trigonométricas	32
3.3.8	Funções Trigonométricas: Fundamentos Teóricos	33
3.3.9	Pensamento Computacional e o Uso de Softwares Educacionais	34
4	ANÁLISE E DISCUSSÃO	37
4.1	Questões Seleccionadas do ENEM	37
4.2	Questão 160 - ENEM 2025	38
4.2.1	Resolução Analítica - Questão 160 - Prova Azul - ENEM 2025	39
4.2.2	Resolução Utilizando o Geogebra	42
4.2.3	Resolução Utilizando o Maxima	45
4.2.4	Encaminhamento Pedagógico - Questão 160 – ENEM 2025.	49
4.3	Questão 142 - ENEM 2023	50
4.3.1	Resolução Analítica - Questão 142 - Prova Azul - ENEM 2023	50
4.3.2	Resolução Utilizando o GeoGebra	52
4.3.3	Resolução Utilizando o Maxima	55
4.3.4	Encaminhamento Pedagógico - Questão 142 – ENEM 2023.	58
4.4	Questão 177 - ENEM 2019	59

4.4.1	Resolução Analítica - Questão 177 - Prova Azul - ENEM 2019	60
4.4.2	Resolução Utilizando o Geogebra	62
4.4.3	Resolução Utilizando o Maxima	65
4.4.4	Encaminhamento Pedagógico -Questão 177 – ENEM 2019.	70
4.5	Questão 170 - ENEM 2018	70
4.5.1	Resolução Analítica - Questão 170 - Prova Azul - ENEM 2018	71
4.5.2	Resolução Utilizando o Geogebra	73
4.5.3	Resolução Utilizando o Maxima	75
4.6	Encaminhamento Pedagógico - Questão 170 – ENEM 2018.	78
4.7	Questão 166 - ENEM 2017	79
4.7.1	Resolução Analítica - Questão 166 - Prova Azul - ENEM 2017	79
4.7.2	Resolução Utilizando o Geogebra	82
4.7.3	Resolução Utilizando o Maxima	84
4.7.4	Encaminhamento Pedagógico - Questão 166 – ENEM 2017.	88
4.8	Questão 180 - ENEM 2015	90
4.8.1	Resolução Analítica - Questão 180 - ENEM 2015	90
4.8.2	Resolução utilizando o Geogebra	93
4.8.3	Resolução utilizando o Maxima	96
4.9	Questão 180 – ENEM 2015: preço sazonal e função cosseno	100
4.10	Síntese das potencialidades e complementaridades	100
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	101
5.1	A dimensão da lógica de programação: contribuições dos Apêndices H e I . .	103
5.2	Limitações e desafios enfrentados	103
5.3	Sugestões para trabalhos futuros	104
5.4	Conclusão	105
	REFERÊNCIAS	105
A	APÊNDICE A - Sequência Didática utilizando o Maxima - Funções Trigono- métricas e suas inversas	108
B	APÊNDICE B —Sequência Didática: Modelagem de Marés com Funções Trigonométricas	119

C	APÊNDICE C — Questão 160 (ENEM 2025): Função Tangente e Modelagem de um Recipiente	125
D	APÊNDICE D — Questão 142 (ENEM 2023): Temperatura na Estufa e Função Seno	132
E	APÊNDICE E — Questão 177 (ENEM 2019): Movimento do Pistão e o Parâmetro β	138
F	APÊNDICE F — Questão 170 (ENEM 2018): Roda-Gigante e Função Seno .	144
G	APÊNDICE G — Questão 166 (ENEM 2017): Pressão Arterial e Função Cosseno	150
H	APÊNDICE H — Questão 180 (ENEM 2015): Preço Sazonal e Função Cosseno - Utilizando lógica de programação	157
I	APÊNDICE I — Questão 180 (ENEM 2015): Preço Sazonal e Função Cosseno - Script Dinâmico via Programação no GeoGebra	163
	ANEXO A – Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias (BNCC) .	172

1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática no Brasil enfrenta desafios persistentes, que aparecem de várias formas. Para o professor, a situação é complicada: além de lidar com a defasagem de conteúdos básicos dos alunos ao final do Ensino Médio, ele ainda precisa prepará-los para o ENEM, um exame que exige domínio conceitual e boa capacidade de abstração.

A gravidade disso fica clara nas avaliações internacionais. O PISA 2022 mostrou que o desempenho dos brasileiros em matemática está abaixo do recomendado pela OCDE. Silva [1] resume bem:

(...) De acordo com o relatório divulgado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), apenas 27% dos estudantes brasileiros atingiram ao menos o nível 2 de proficiência em matemática, que é considerado o patamar mínimo para o exercício da cidadania em sociedades contemporâneas. A média dos países da OCDE foi de 69%. Além disso, enquanto a média brasileira foi de 379 pontos, a média da OCDE atingiu 472 pontos. Apenas 1% dos estudantes brasileiros alcançou os níveis mais altos de proficiência (níveis 5 e 6), frente a 9% dos países da OCDE. Esses resultados indicam não apenas um baixo desempenho geral, mas também a persistência de desigualdades profundas entre os estudantes brasileiros e seus pares internacionais...(Silva, 2025, p.13)

Diante disso, alguns conteúdos do Ensino Médio se tornam especialmente difíceis de compreensão e assimilação por parte dos estudantes. As funções trigonométricas são um deles, talvez um dos mais complicados para os alunos. Este trabalho propõe usar recursos computacionais para tentar superar essas dificuldades.

O uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) no ensino de matemática ajuda os alunos a adquirir habilidades básicas com mais facilidade. Com apoio bem planejado e prática suficiente, eles podem melhorar seu desempenho e explorar seu potencial tecnológico. Os alunos precisam de orientação para usar a tecnologia mais recente na resolução de problemas. O computador já é amplamente usado como auxiliar de ensino e isso aumenta a automotivação e a autoconfiança, como afirmam Rezende, Pesco e Bortolossi [2]:

O uso de TDIC's no ensino e aprendizagem da matemática é, na verdade, um método sofisticado em oposição aos métodos convencionais. Vários tipos de software de computador são comumente usados para ajudar os alunos a serem mais responsáveis por seu próprio aprendizado por meio de uma abordagem de exploração mais criativa e atraente. Na verdade, os softwares de ensino e aprendizagem estão se tornando mais populares e procurados, especialmente na disciplina de Cálculo. [2] (Rezende, Pesco e Bortolossi, 2012, p.75)

A BNCC [3] também reforça a necessidade de aplicar tecnologias educacionais em sala de aula:

A contemporaneidade é fortemente marcada pelo desenvolvimento tecnológico. Tanto a computação quanto as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão cada vez mais presentes na vida de todos, não somente nos escritórios ou nas escolas, mas nos nossos bolsos, nas cozinhas, nos automóveis, nas roupas etc. Além disso, grande parte das informações produzidas pela humanidade está armazenada digitalmente. Isso denota o quanto o mundo produtivo e o cotidiano estão sendo movidos por tecnologias digitais, situação que tende a se acentuar fortemente no futuro.[3](BRASIL,2018 ,p.473)

O professor, como mediador, tem a responsabilidade de propor alternativas didático-metodológicas para tornar conteúdos abstratos mais claros. Os recursos computacionais podem ser ferramentas eficazes nesse processo. A BNCC [3] complementa:

Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. [3](BRASIL , 2018 ,p.528).

A pergunta que nos guia é: De que maneira a integração entre o GeoGebra (com sua abordagem visual-dinâmica) e o Maxima (com seu potencial algébrico-computacional) pode ajudar no ensino e aprendizagem das funções trigonométricas, considerando o que é exigido como competências e habilidades no ENEM ?

Para responder, foi estabelecido como objetivo geral analisar a contribuição desses dois softwares como ferramentas complementares no ensino de funções trigonométricas, com foco na resolução de questões do ENEM. Os objetivos específicos são: identificar as principais dificuldades e conceitos envolvidos nas questões dos últimos dez anos; mapear as funcionalidades do GeoGebra para visualização e interpretação geométrica; sistematizar os comandos do Maxima para manipulação algébrica e resolução de equações; desenvolver uma sequência didática que articule as potencialidades de cada software; e, por fim, comparar as três abordagens (tradicional/analítica, GeoGebra e Maxima), mostrando o que cada uma tem de melhor e suas limitações.

Após esta introdução, o trabalho está estruturado em capítulos que articulam fundamentação teórica, análise de questões do ENEM e proposições pedagógicas. O Capítulo 2 detalha

a metodologia da pesquisa, explicitando o recorte temporal, os critérios de seleção das questões e os procedimentos de análise adotados. O Capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica, abordando as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino de funções trigonométricas, as potencialidades dos softwares GeoGebra e Maxima, os fundamentos das funções trigonométricas com base em Lima et al. (2006) e a articulação com o pensamento computacional, conforme previsto no complemento à BNCC voltado à Computação na Educação Básica.

O Capítulo 4 é dedicado à análise de seis questões do ENEM, abrangendo o período de 2015 a 2025. Cada questão é apresentada em três subseções: a resolução analítica tradicional, a resolução com o software GeoGebra, explorando sua abordagem visual e dinâmica, e a resolução com o software Maxima, utilizando sua capacidade de manipulação algébrica e simbólica. Após cada questão, é apresentado um encaminhamento pedagógico que discute as potencialidades, limitações e complementaridades entre as abordagens, oferecendo ao professor um roteiro claro para a integração das ferramentas em sala de aula. Ao final do capítulo, uma síntese consolida as potencialidades e complementaridades entre as três abordagens.

O Capítulo 5 apresenta as considerações finais, retomando os principais achados da pesquisa e discutindo a complementaridade entre os softwares, a dimensão da lógica de programação explorada nos apêndices, as limitações enfrentadas e sugestões para trabalhos futuros.

Os Apêndices complementam o trabalho com material prático e detalhado para educadores e pesquisadores. O Apêndice A apresenta uma sequência didática para o uso do Maxima no estudo de funções trigonométricas e suas inversas; o Apêndice B propõe uma atividade investigativa sobre modelagem de marés, integrando as três abordagens. Os Apêndices C a G aprofundam, passo a passo, as resoluções computacionais de cada uma das seis questões do ENEM analisadas no Capítulo 4, com capturas de tela, dicas para o professor, comentários sobre a resolução e notas técnicas sobre o comportamento dos softwares. Os Apêndices H e I exploram soluções algorítmicas para a mesma questão (Questão 180 - ENEM 2015), utilizando lógica de programação no GeoGebra e no Maxima: o Apêndice H implementa a busca por meio de comandos de lista e da função `buscar_minimo`, enquanto o Apêndice I aprofunda a programação com scripts dinâmicos em GGBScript e JavaScript, estabelecendo um diálogo direto com o desenvolvimento do pensamento computacional. Por fim, o Anexo A reproduz as

competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias previstas na BNCC, para referência do leitor.

1.1 JUSTIFICATIVA

Mais do que uma exigência acadêmica, esta pesquisa nasce de uma necessidade real do dia a dia dos professores que ensinam matemática nas escolas brasileiras. Quem já viu o desânimo dos estudantes diante de fórmulas trigonométricas aparentemente abstratas sabe a urgência de se promover mudanças. Imagine um professor que, em vez de só escrever no quadro, pode mostrar visualmente como uma função seno se comporta, as suas oscilações, seu período, sua amplitude e com animações dinâmicas no GeoGebra. E complementarmente, pode demonstrar como o Maxima simplifica cálculos complexos que antes tomavam um tempo enorme. Essa ponte entre o abstrato e o concreto é o que buscamos construir.

Esta pesquisa se justifica, primeiro, pelo seu potencial transformador na prática docente. Não se trata apenas de “usar tecnologia”. Trata-se de dar ao professor ferramentas concretas para descomplicar conceitos, engajar alunos acostumados com linguagens visuais e interativas, economizar tempo com cálculos mecânicos e focar na compreensão conceitual.

Para os estudantes, especialmente aqueles que veem a matemática como um obstáculo intransponível esta proposta pode significar a diferença entre a frustração e a descoberta. Quando o aluno manipula com os próprios dedos o gráfico de uma função trigonométrica e vê instantaneamente as consequências, a matemática deixa de ser um amontoado de símbolos misteriosos e se transforma em uma linguagem viva.

Para os professores que sentem dificuldade com tecnologia, este trabalho serve como um roteiro. Muitas vezes os programas de matemática são pouco usados porque os docentes não se sentem preparados. A falta de preparo, e não a má vontade, é o grande obstáculo. Mas quando o professor se arrisca e aplica esses recursos, ele descobre que eles são eficazes. Como destacam Nogueira, Braga e De Sá [4], o professor precisa ativá-los e aplicá-los para que os alunos se beneficiem.

Hoje, reconhece-se que fazer matemática envolve muito mais do que dominar técnicas ou fórmulas. Os alunos devem desenvolver uma disposição de pensar, buscar relações, fazer conjecturas, usar diferentes sistemas de representação, estabelecer conexões e comunicar seus resultados, como enfatizam Moura, Santos e Silva [5].

Isso nos leva a repensar o ensino. Precisamos gerar ambientes de trabalho matemático onde seja possível articular diferentes estruturas (algébricas, aritméticas, geométricas). Esses

quadros permitem representar objetos matemáticos em vários registros (tabelas, gráficos, fórmulas...). Infelizmente, no ensino de matemática e especialmente na formação de professores a mudança de registro raramente é usada como estratégia para solucionar problemas. Essa ausência de integração implica uma perda substancial de conhecimento e limita o trabalho a um único registro [4].

Este trabalho se propoe a mostrar que essa multiplicidade de significados pode ser aprimorada com software de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Mas a aquisição de conhecimento profissional nesse campo exige matemática sólida e análise dos resultados da implementação.

Há também uma questão de equidade social. Trabalhar com softwares gratuitos como GeoGebra e Maxima garante que escolas públicas e comunidades com menos recursos não fiquem excluídas das inovações. Todo estudante brasileiro, independentemente da condição socioeconômica, merece acesso às melhores ferramentas de aprendizagem.

O ENEM, neste contexto, não é um fim em si, mas uma realidade presente e significativa na trajetória dos estudantes. Preparar melhor os estudantes para esse exame significa ampliar suas oportunidades de acesso ao ensino superior e influenciar positivamente suas vidas. Por trás de cada gráfico, cada comando computacional, cada sequência didática, está o objetivo maior: ajudar professores a redescobrir a alegria de ensinar e estudantes a experimentar o prazer de compreender.

Neste contexto, devemos analisar o papel do professor. Existem várias ferramentas disponíveis, mas há muitos empecilhos em sua utilização. Uma barreira é a falta de incentivos para a formação de professores. As escolas até oferecem as ferramentas, mas nem sempre o treinamento. A dificuldade é ainda maior para professores com mais de vinte anos de carreira, cuja metodologia muitas vezes se limita ao livro didático (Moura, 2016).

Pretende-se que esta não seja apenas uma pesquisa acadêmica, mas sim uma ferramenta de transformação no espaço onde a educação realmente acontece: na relação dialógica entre quem ensina e quem aprende, mediada por tecnologias que tornam o conhecimento matemático acessível, significativo e, acima de tudo, humano.

2 METODOLOGIA

Este estudo adotou uma abordagem de pesquisa quali-quantitativa, organizada em três fases sequenciais que articularam análise documental, desenvolvimento metodológico e análise comparativa. Conforme destaca Andrade [6], uma dissertação deve demonstrar "a habilidade em realizar estudos científicos e em seguir linhas mestras na área de formação escolhida", sendo fundamental que o pesquisador "evidencie os passos da pesquisa e justifique cada estratégia adotada".

A primeira fase consistiu na análise documental das questões de Funções Trigonométricas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). As provas foram obtidas através do portal oficial do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) [7], na seção de histórico do exame, com acesso em 25 de março de 2026. O recorte temporal estabelecido compreendeu as edições de 2015 a 2025, abrangendo um período de dez anos que permite identificar tendências, padrões e evoluções na abordagem das funções trigonométricas ao longo de uma década.

Para a seleção das questões, foram adotados critérios específicos. O recorte temporal considerou as questões dos últimos dez anos (2015 a 2025). O foco temático restringiu-se a questões que envolvessem explicitamente Funções Trigonométricas, incluindo funções seno, cosseno, tangente e suas aplicações. Buscou-se também representatividade, contemplando diferentes níveis de complexidade (fácil, médio, difícil) conforme classificação do próprio INEP, e variedade contextual, abrangendo fenômenos periódicos, geometria e aplicações ondulatórias.

O processo de identificação das questões seguiu um protocolo sistemático. Inicialmente, realizou-se uma varredura de todas as provas de Matemática e suas Tecnologias no período estabelecido. Em seguida, procedeu-se à filtragem temática, identificando questões que mencionassem explicitamente termos como "seno", "cosseno", "tangente", "função trigonométrica", "período", "amplitude" ou "ciclo trigonométrico". Posteriormente, realizou-se a validação contextual, verificando se a resolução da questão demandava efetivamente a aplicação de conhecimentos sobre funções trigonométricas. Priorizou-se a seleção da prova azul, visando padronização da amostra, e, por fim, atribuiu-se identificadores únicos para cada questão selecionada.

A aplicação dos critérios de busca resultou na identificação de 13 questões que envolviam funções trigonométricas no período analisado. Dentre estas, foram selecionadas 6 questões, uma por ano, sempre do caderno azul, totalizando 6 questões para análise aprofundada.

As 7 questões restantes foram descartadas por não atenderem a pelo menos um dos seguintes critérios: conteúdo redundante, apresentavam nível de complexidade redundante em relação às já selecionadas, ou possuíam contextualização muito semelhante a outras questões do mesmo ano. Este protocolo de seleção permite que outros pesquisadores reproduzam o procedimento em futuras investigações.

As questões selecionadas estão organizadas na Tabela 2.1, que sintetiza os anos, cadernos, numerações, temas específicos e níveis de complexidade.

Tabela 2.1 – Questões do ENEM sobre Funções Trigonométricas (2015-2025)

Ano	Caderno	Questão	Tema Específico	Nível
2025	Azul	160	Função Tangente - Período, Deslocamento Horizontal, Análise Gráfica	Médio
2023	Azul	142	Função Seno - Valor máximo e mínimo e Amplitude	Médio
2019	Azul	177	Funções Seno - Interpretação e Período	Difícil
2018	Azul	170	Função Seno e Cosseno - Representação gráfica, amplitude e período	Médio
2017	Azul	166	Função Cosseno - Amplitude e Período	Médio
2015	Azul	115	Função Cosseno - Máximo e Mínimo	Médio

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos microdados do INEP (2015-2025), acesso em 26 de março de 2026.

Na segunda fase, foi realizada a análise comparativa das estratégias de resolução. Cada questão selecionada foi abordada através de três metodologias distintas: resolução analítica tradicional, utilizando lápis e papel; resolução com o software GeoGebra, explorando suas ferramentas de visualização gráfica e geometria dinâmica; e resolução com o software Maxima, utilizando seus recursos de computação algébrica e manipulação simbólica. Nogueira, Braga e De Sá [4] ressaltam que "a utilização de tecnologias digitais deve ser incentivada, pois amplia as possibilidades de aprendizagem", enquanto Giraldo, Caetano e Mattos [8] observam que os sistemas de computação algébrica "podem ser vistos como poderosas calculadoras científicas, capazes de efetuar cálculos e produzir gráficos com grande precisão e versatilidade".

A comparação entre as abordagens foi realizada com base em parâmetros factíveis diante da natureza teórica deste estudo, considerando os recursos gráficos de cada software, ou seja, sua capacidade de gerar visualizações das funções trigonométricas com qualidade e interatividade; as possibilidades de manipulação, entendidas como a facilidade de alterar parâmetros como amplitude, período e fase e observar instantaneamente as modificações no comportamento das funções; e a facilidade da interface, relacionada à curva de aprendizado necessária para operar cada software e sua intuitividade para estudantes do Ensino Médio. Além disso, considerou-se o tipo de análise oferecida por cada ferramenta, distinguindo-se fundamentalmente entre análise gráfica, presente no GeoGebra, e análise numérica, característica do Maxima em certas operações. Conforme corrobora Giraldo, Caetano e Mattos [8], essa distinção implica a possibilidade de aparecimento de erros de arredondamento ou truncamento no caso da análise numérica, aspecto que deve ser considerado na escolha da ferramenta mais adequada para cada tipo de problema. Outro parâmetro fundamental foi a complementaridade entre os softwares, identificando situações em que a abordagem visual do GeoGebra é mais adequada, como na compreensão de período, amplitude e fase, e momentos em que a manipulação algébrica do Maxima se destaca, como na simplificação de expressões e resolução exata de equações trigonométricas.

Como destaca Oliveira [9], "a utilização do Software Maxima em sala durante o ensino de matrizes tem como objeto facilitar a compreensão dos conteúdos ministrados", premissa que se estende ao estudo de funções trigonométricas. De maneira análoga, Braga e Nogueira [10] afirmam que a geometria dinâmica, como qualquer tecnologia, não oferece uma panaceia mágica para aprender matemática apenas pelo movimento na tela, sendo necessário que o aluno analise criticamente ou seja orientado a observar e examinar o que está acontecendo na tela para que a aprendizagem ocorra efetivamente.

Como produto final, foi desenvolvida uma sequência didática que integra as três abordagens de forma sinérgica, oferecendo aos educadores um material pedagogicamente fundamentado para o ensino de Funções Trigonômicas com suporte tecnológico. A sequência foi organizada em formato modular, com abordagem tripla, guias passo a passo, atividades práticas e material de apoio para professores. Moura, Santos e Silva [5] destacam que "a visualização é um meio alternativo de acessar o conhecimento matemático" e que "a compreensão de con-

ceitos matemáticos requer múltiplas representações", justificando a integração proposta neste trabalho.

A pesquisa caracteriza-se como aplicada, com abordagem quali-quantitativa, combinando análise interpretativa com dados mensuráveis. Quanto aos procedimentos, adotou-se pesquisa documental, desenvolvimento experimental e análise comparativa. Os objetivos foram exploratórios e descritivos, visando tanto a compreensão do fenômeno quanto a proposição de soluções.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 A BNCC e as Funções Trigonométricas

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Ela assegura os direitos de aprendizagem e desenvolvimento [3]. Instituída em 2017, a BNCC passou a orientar sistemas educacionais e escolas de todo o país, organizando os currículos em uma base comum e uma parte diversificada.

No Ensino Médio, a BNCC se organiza por áreas do conhecimento. Uma delas é Matemática e suas Tecnologias. Essa área visa promover o raciocínio lógico, a capacidade de resolver problemas, a argumentação matemática e a interpretação de diferentes linguagens e representações.

De acordo com a BNCC, as competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio envolvem:

- Usar estratégias e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos;
- Propor ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis;
- Construir modelos, resolver problemas e avaliar a plausibilidade dos resultados;
- Compreender e usar diferentes registros de representação (algébrico, geométrico, estatístico, gráfico e computacional);
- Investigar e estabelecer conjecturas, usando experimentações, observações, tecnologias e estratégias diversas.

No eixo da Álgebra, as funções trigonométricas ocupam papel central. Elas permitem ao estudante compreender e modelar fenômenos periódicos, fazer análises gráficas e simbólicas, e interpretar relações matemáticas em contextos reais (BNCC, 2018). Esses fenômenos incluem, por exemplo, o movimento de um pêndulo, a variação das marés, ondas sonoras (notas musicais), oscilações de uma mola, fases da lua, batimento cardíaco, ondas de rádio e até a propagação da luz.

A abordagem das funções seno, cosseno e tangente promove o desenvolvimento da Competência Específica 3 (que articula resolução de problemas, modelagem e argumentação). Também contribui para as Competências 1 e 4 (uso de múltiplas representações) e para a Competência 5 (investigação de padrões e regularidades).

Portanto, o ensino das funções trigonométricas, conforme orienta a BNCC, deve ir além da aplicação mecânica de fórmulas. Ele deve buscar a compreensão conceitual e inserir o estudante em práticas investigativas – o que justifica o uso de recursos tecnológicos como GeoGebra e Maxima.

Tabela 3.1 – Descrição de Habilidades conforme a BNCC

Habilidades	Descrição
EM13MAT306	Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
EM13MAT404	Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno, por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos.

Fonte: Elaborado pelo autor com base na BNCC (BRASIL, 2018).

3.2 O Software GeoGebra

O GeoGebra é um software dinâmico de matemática para uso em sala de aula, abrangendo áreas como geometria, álgebra e cálculo. O programa permite fazer construções geométricas usando pontos, linhas, segmentos e polígonos, além de introduzir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente após a conclusão da construção. Equações e coordenadas também podem ser inseridas diretamente. Conforme destacam Braga e Nogueira [10], o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis, números, pontos, vetores, funções derivadas e integradoras, fornecendo comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isso, o programa reúne as ferramentas tradicionais da geometria com outras mais convenientes para álgebra e cálculo, permitindo trabalhar também com geometria em três dimensões.

O GeoGebra está disponível gratuitamente e pode ser acessado de duas formas principais: online, através do site oficial www.geogebra.org [18], ou offline, mediante download da versão Classic para Windows, Mac ou Linux no mesmo endereço. Para este trabalho, utilizou-se a versão online do GeoGebra, por sua facilidade de acesso e dispensa de instalação.

As características intrínsecas do GeoGebra, em sua capacidade como conector dinâmico para múltiplas representações, baseiam-se nas potencialidades do trabalho simultâneo com a Visualização Gráfica, a Planilha e a Janela Algébrica. Moura, Santos e Silva [5] destacam que isso possibilita sua implementação como integradora de registros, permitindo a criação de vínculos entre diferentes estruturas e, a partir delas, a criação e justificativa de novas técnicas de resolução, bem como novas análises que permitam um estudo global dos problemas modelados.

Nogueira, Braga e De Sá [4] ressaltam que a mera implementação de ferramentas de computador não gera externamente a integração conceitual desejada para as tarefas a serem executadas em tais ambientes. Portanto, a escolha dos problemas é fundamental, pois eles levam à conjectura com a ajuda do software, para que a atividade matemática não permaneça em uma simples observação ou no cálculo, mas sim em tornar explícitas as propriedades e conceitos postos em jogo, permitindo justificar as observações feitas. Surge então a necessidade de elaborar ou selecionar problemas que, através de seu estudo usando ferramentas computacionais, favoreçam a integração desejada.

Os softwares educacionais têm a capacidade de aprimorar o componente visual da matemática, atribuindo um papel importante à visualização no ensino. Moura, Santos e Silva [5] afirmam que a visualização atinge uma nova dimensão quando o ambiente de aprendizagem com computadores é considerado um grupo de pensamento específico, onde professores, alunos, mídia e conteúdo matemático residem juntos e, mais do que isso, pensam juntos. Nesse grupo, o meio adquire outro status, indo além da exibição de uma imagem. Mais especificamente, é possível dizer que o software se torna um ator no processo de fazer matemática.

Braga e Nogueira [10] alertam, no entanto, que muitos professores utilizam o software de geometria dinâmica como um quadro-negro glorificado, estendendo a geometria de lápis e papel. Utilizada dessa maneira, a nova tecnologia não é tão boa quanto a tecnologia antiga. Para continuar usando a nova tecnologia para fazer matemática, é preciso aprender a usá-la de maneira que transforme a atividade matemática, permitindo fazer coisas que antes não seriam possíveis. Os autores afirmam que a geometria dinâmica, como qualquer tecnologia, não ofe-

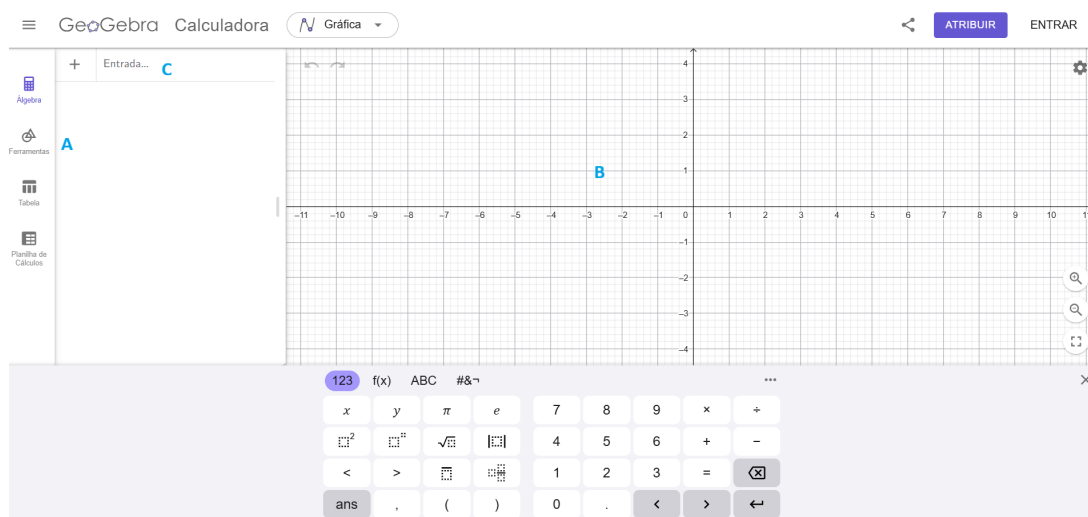
rece uma panaceia mágica para aprender geometria apenas pelo movimento na tela. A menos que o aluno analise criticamente ou seja orientado a observar e examinar o que está acontecendo na tela, muito pouco aprendizado ocorrerá.

Nogueira, Braga e De Sá [4] complementam que a visualização pode ser muito útil como ferramenta para um aluno avançado, mas pode até distrair um novato do aprendizado de matemática. Para começar a usar a geometria dinâmica, é necessário repensar criticamente o conteúdo, os objetivos e a abordagem didática utilizada, sendo que a implementação dessa abordagem deve ser constantemente avaliada e revisada.

3.2.1 Interface do GeoGebra

O GeoGebra apresenta uma interface integrada que combina diferentes representações matemáticas. Conforme ilustrado na Figura 3.1, a interface é composta por: (A) Barra de ferramentas para construção geométrica; (B) Área gráfica para visualização dinâmica; (C) Campo de entrada para comandos algébricos.

Figura 3.1 – Interface do GeoGebra Classic com destaque para as áreas de trabalho



Fonte: O autor.

Esta interface permite que os estudantes interajam simultaneamente com representações geométricas, algébricas e numéricas das funções trigonométricas, facilitando a compreensão de conceitos como período, amplitude e deslocamento de fase.

3.3 O Software Maxima

3.3.1 Maxima: Sistema de Computação Algébrica de Código Aberto

O Maxima configura-se como um software educacional de código aberto e gratuito que, conforme Oliveira [9], constitui um sistema para manipulação de expressões numéricas e simbólicas. O Maxima é uma linguagem computacional que permite realizar cálculos numéricos e simbólicos, representações gráficas e efetuar programação, possuindo uma grande variedade de comandos para os diversos ramos da Matemática (Alves, 2018, p. 49). Esta característica fundamental permite que o programa realize cálculos de limites, diferenciação, integração, operações com matrizes e funções, entre outras funcionalidades.

O Maxima está disponível gratuitamente e pode ser baixado através do site oficial <https://maxima.sourceforge.io/> [19], onde estão disponíveis versões para diferentes sistemas operacionais, incluindo Windows, Linux e macOS. O fato de o Maxima possuir uma Licença Pública GNU (GPL) possibilita que seja instalado em qualquer computador e seja explorado ou distribuído sem qualquer empecilho ou custo adicional [11]. Para este trabalho, utilizou-se a versão 5.47.0 com interface wxMaxima versão 23.05.1.

3.3.2 Origens Históricas e Desenvolvimento

A trajetória histórica do Maxima remonta ao Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), onde, segundo Oliveira [9], foi desenvolvido no final da década de 1960, sendo o sucessor do Macsyma. Alves [11] corrobora essa origem ao afirmar que o WxMAXIMA (interface do Maxima) surgiu a partir do Macsyma, um sistema de Álgebra Computacional desenvolvido na década de 1970 no MIT (Projeto MAC).

Um marco decisivo em sua evolução ocorreu em 1998, quando William Schelter obteve permissão para liberar o código-fonte sob a licença de software livre GPL (General Public License). Esta transição, conforme Vaz [12], apresenta diversas vantagens, como acesso ao código fonte, estímulo ao desenvolvimento de um espírito de comunidade, maior segurança, incentivo ao trabalho colaborativo e criação de patrimônio cultural da humanidade.

3.3.3 Características Técnicas e Funcionalidades

Tecnicamente, o Maxima se caracteriza, nas palavras de Giraldo, Caetano e Mattos [8], como um sistema de computação algébrica que integra recursos numéricos, gráficos e simbólicos, podendo ser visto como uma poderosa calculadora científica, capaz de efetuar cálculos e produzir gráficos com grande precisão e versatilidade. Sua capacidade de visualização também é destacada por Oliveira [9], que observa que o programa permite a visualização e o processamento de dados em duas ou três dimensões, oferecendo uma ampla gama de ferramentas para análise matemática e computacional.

Contudo, como alerta Giraldo [8] ;

a interpretação de resultados produzidos por ferramentas computacionais simbólicas, mesmo nos sistemas de computação algébrica mais poderosos, como por exemplo o software WxMAXIMA, não dispensa ou substitui o conhecimento dos conceitos matemáticos envolvidos. [11](Giraldo ,2012, p. 209 apud Alves, 2018, p. 91)

Essa ressalva é fundamental para que o uso do software não se torne um fim em si mesmo, mas sim um meio para aprofundar a compreensão conceitual.

3.3.4 Interface e Operacionalização

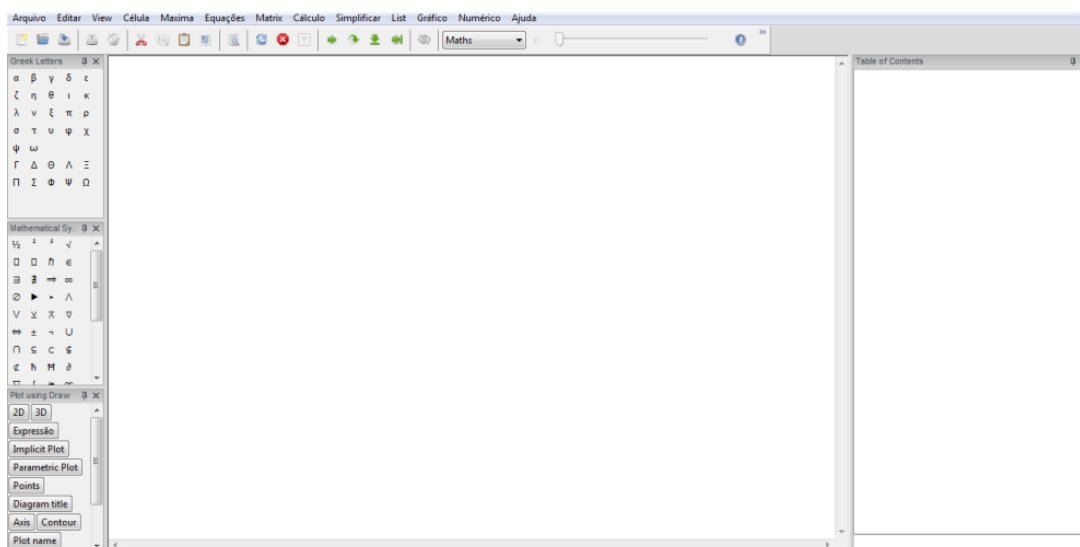
A interface do Maxima, particularmente na versão wxMaxima, oferece múltiplas formas de interação. Conforme Vaz [12], os comandos são acompanhados pelos símbolos %in (entrada) e %on (saída). Todos os comandos no Maxima devem ser finalizados com ponto e vírgula ou com o símbolo \$ e, para obter a saída, deve-se pressionar simultaneamente as teclas Shift+Enter ou Ctrl+Enter.

3.3.5 Aplicações Pedagógicas

No contexto educacional, Oliveira [9] defende que a utilização do Software Maxima em sala de aula, especialmente no ensino de matrizes, tem como objetivo facilitar a compreensão dos conteúdos ministrados. Esta implementação, segundo o autor, demanda recursos de multimídia em sala ou, preferencialmente, a utilização do laboratório de informática.

Souza [13], em pesquisa sobre o impacto do Maxima no ensino de funções quadráticas, relata que os alunos afirmaram que “o Maxima facilitou a visualização dos gráficos e a resolução

Figura 3.2 – Interface do Maxima (wxMaxima)



Fonte: O autor.

de cálculos algébricos que, manualmente, poderiam ser mais trabalhosos”. A autora conclui que a utilização do Maxima;

quando bem planejada e acompanhada pela orientação pedagógica do professor, é eficaz para auxiliar na aprendizagem de conteúdos matemáticos, proporcionando aulas mais dinâmicas, interativas e permitindo a compreensão de conceitos mais abstratos. [13](Souza, 2025, p. 72).

Além disso, Souza [13] destaca que, embora alguns alunos relatem dificuldades iniciais com os comandos em inglês e com a sentaxe específica do software, a adaptação ocorre ao longo das atividades e os benefícios superam os desafios. A pesquisadora também ressalta o papel fundamental do professor como mediador, condicionando o uso eficaz do Maxima à orientação docente Souza[13]. Essa perspectiva complementa as observações de Alves[11], que reforça que a interação professor-aluno é imprescindível em todo o processo, sendo o software uma ferramenta de auxílio, não um substituto do conhecimento.

3.3.6 Materiais Complementares para Estudo do Maxima

Para aqueles que desejam aprofundar seus conhecimentos no Maxima e explorar todas as suas funcionalidades, há uma vasta gama de materiais gratuitos disponíveis. O ponto de partida mais completo é o manual oficial do software, que pode ser acessado tanto em formato

HTML quanto em PDF¹, sendo que a versão em português, embora um pouco desatualizada, ainda oferece uma excelente visão geral da estrutura e dos comandos básicos. Para uma leitura mais atualizada, recomenda-se a versão em inglês, disponível no site oficial do projeto.

Além do manual, existem tutoriais práticos que são ideais para uma primeira aproximação, como o conhecido "Maxima em 10 passos"², desenvolvido por universidades brasileiras, que guia o usuário pelos comandos essenciais de forma objetiva. Também são encontradas apostilas didáticas organizadas por níveis de dificuldade³, que podem ser adquiridas ou baixadas, oferecendo uma estrutura de curso progressivo para quem prefere um estudo mais dirigido.

Por fim, diversas instituições de ensino superior, como a UFSCar, a UFSC e a UFPB, disponibilizam em seus portais roteiros e tutoriais adaptados para disciplinas de cálculo e álgebra⁴, o que demonstra a relevância do Maxima no ambiente acadêmico. Esses materiais, somados à vasta documentação oficial, fornecem ao leitor todos os recursos necessários para dominar o software e aplicá-lo em seus estudos e práticas docentes.

3.3.7 Relevância para o Ensino de Funções Trigonométricas

Embora os trabalhos citados focalizem aplicações em álgebra linear e funções quadráticas, as funcionalidades descritas estendem-se naturalmente ao estudo de funções trigonométricas. A capacidade de manipulação de expressões simbólicas e integração de recursos numéricos, gráficos e simbólicos posiciona o Maxima como ferramenta valiosa para simplificação de identidades trigonométricas, resolução de equações e análise de propriedades periódicas.

A possibilidade de trabalhar com expressões gerais, como $f(x) = a + b \sin(cx + d)$, e de obter soluções simbólicas exatas, evita os erros de arredondamento comuns em aproximações numéricas. Conforme observa Souza [13](2025, p. 67), o software permitiu que alunos “visualizassem rapidamente os gráficos das funções, identificassem o formato das parábolas,

¹ Manual do Maxima em português (HTML): <http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/pt/maxima.html>. Versão em inglês (PDF): <http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/en/maxima.pdf>.

² Tutorial "Maxima em 10 passos", disponível em repositórios de universidades como a USP: <https://www.ime.usp.br/~mfranca/maxima10passos.pdf>.

³ Apostilas disponíveis em plataformas como o Clube de Autores, por exemplo: <https://www.clubedeautores.com.br/livro/apostila-de-maxima>.

⁴ Exemplos de roteiros: UFSCar: <http://www.dm.ufscar.br/professor/waldecir/arquivos/maxima.pdf>; UFSC: <https://www.ufsc.br/documents/...>; UFPB: <http://www.mat.ufpb.br/...>

localizassem o vértice e as raízes de maneira prática”, habilidades que, no contexto trigonométrico, correspondem à identificação de amplitude, período, fase e deslocamento vertical.

Esta complementaridade com abordagens visuais, como as do GeoGebra, fundamenta a proposta metodológica deste trabalho, que busca explorar de forma conjunta o rigor algébrico do Maxima e a intuição geométrica proporcionada pelo GeoGebra no ensino de funções trigonométricas. Enquanto o GeoGebra permite a exploração dinâmica e a visualização imediata, o Maxima consolida a formalização e a validação analítica, promovendo uma aprendizagem mais completa e significativa.

3.3.8 Funções Trigonômétricas: Fundamentos Teóricos

As funções trigonométricas constituem uma classe particularmente importante de funções reais, pois modelam fenômenos periódicos presentes em diversas áreas do conhecimento. Conforme destaca Lima et al. (2006), as funções seno e cosseno são definidas a partir da projeção de um ponto que percorre o círculo unitário sobre os eixos coordenados, o que lhes confere propriedades notáveis, como a periodicidade, com período fundamental 2π , e a imagem contida no intervalo $[-1, 1]$. Os autores ressaltam ainda que tais funções são exemplos paradigmáticos de funções que não são injetoras nem sobrejetoras, e cujo estudo exige a compreensão de conceitos como amplitude, período, fase e deslocamento vertical, especialmente quando expressas na forma geral $f(x) = a + b \sin(cx + d)$ ou $f(x) = a + b \cos(cx + d)$.

A análise das transformações sofridas por uma função trigonométrica a partir de sua forma geral é fundamental para a interpretação de gráficos e para a modelagem de situações reais. Lima et al. (2006) exploram detalhadamente como os parâmetros a , b , c e d atuam sobre o gráfico da função seno ou cosseno: o parâmetro a produz uma translação vertical; b controla a amplitude, ou seja, a variação máxima em torno do valor médio; c altera o período, dado por $\frac{2\pi}{|c|}$; e d promove um deslocamento horizontal (fase). Os autores enfatizam que a compreensão desses efeitos é essencial não apenas para a manipulação algébrica, mas também para a interpretação de fenômenos oscilatórios, como ondas, marés e movimentos circulares.

Além das funções seno e cosseno, a função tangente, definida por $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, apresenta características próprias que a distinguem das demais funções trigonométricas. Lima et al. (2006) observam que a tangente tem período π e não está definida para valores de x onde $\cos(x) = 0$, o que gera assíntotas verticais em seu gráfico. Essa particularidade torna a fun-

ção tangente especialmente adequada para modelar situações em que há crescimento ilimitado nas proximidades de pontos de descontinuidade, como ocorre em problemas de enchimento de recipientes ou em fenômenos de ressonância.

Dessa forma, os fundamentos teóricos apresentados por Lima et al. (2006) fornecem a base conceitual necessária para a compreensão das funções trigonométricas, enquanto as ferramentas computacionais como GeoGebra e Maxima, atuam como recursos que potencializam a visualização, a experimentação e a validação algébrica dos conceitos, em consonância com a proposta metodológica deste trabalho.

3.3.9 Pensamento Computacional e o Uso de Softwares Educacionais

O pensamento computacional (PC) pode ser definido como um conjunto de habilidades e processos mentais que envolvem a formulação de problemas e a organização de soluções de maneira que possam ser executadas por um agente computacional, humano ou máquina. Wing (2006)[14], uma das precursoras do termo, o descreve como “uma habilidade fundamental para todos, não apenas para cientistas da computação”. No contexto educacional, o PC não se limita ao ensino de programação; ele engloba estratégias de resolução de problemas que incluem a decomposição, o reconhecimento de padrões, a abstração e o design de algoritmos.

Esses quatro pilares constituem a base do pensamento computacional aplicado à matemática:

- **Decomposição:** quebrar um problema complexo em partes menores e mais gerenciáveis.
- **Reconhecimento de padrões:** identificar semelhanças ou regularidades entre problemas ou dentro de um mesmo problema.
- **Abstração:** focar nas informações relevantes e ignorar detalhes irrelevantes, generalizando soluções.
- **Design de algoritmos:** desenvolver uma sequência ordenada de passos (instruções) para resolver um problema ou realizar uma tarefa.

Esses pilares podem ser desenvolvidos em diferentes disciplinas, e a matemática, especialmente o estudo de funções trigonométricas, oferece um campo fértil para sua aplicação.

A própria organização da Computação na Educação Básica dialoga diretamente com esses pilares. O documento, homologado pelo Conselho Nacional de Educação em 2022 como complemento à BNCC [15], estrutura a área em três eixos, Pensamento Computacional, Mundo Digital e Cultura Digital e situa, entre as competências específicas para o Ensino Médio, a capacidade de propor e analisar soluções computacionais em diferentes domínios do conhecimento:

Compreender as possibilidades e os limites da Computação para resolver problemas, tanto em termos de viabilidade quanto de eficiência, propondo e analisando soluções computacionais para diversos domínios do conhecimento, considerando diferentes aspectos. (BRASIL, 2022, p. 62)

Essa competência aproxima-se diretamente da proposta deste trabalho: no ensino de funções trigonométricas, o GeoGebra e o Maxima funcionam como um domínio de aplicação em que o aluno decompõe o problema, reconhece padrões nos parâmetros das funções e generaliza soluções. Os mesmos processos que a norma busca desenvolver.

A integração entre tecnologia e educação matemática tem avançado significativamente nos últimos anos, especialmente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento computacional. Macedo e Alves (2025)[16] destacam que o pensamento computacional na educação básica “se configura como uma ferramenta poderosa para articular competências cognitivas, sociais e digitais”, favorecendo uma aprendizagem mais contextualizada e alinhada às demandas do século XXI. Essa perspectiva está em sintonia com a BNCC, que enfatiza a cultura digital como uma das competências gerais.

No contexto do ensino de funções trigonométricas, o uso de softwares como GeoGebra e Maxima pode potencializar o desenvolvimento dos quatro pilares do pensamento computacional. Abar e Almeida (2024)[17] afirmam que “tem-se como proposta desenvolver habilidades do Pensamento Computacional, por meio de atividades com os comandos do GeoGebra”, mostrando que o software vai além da geometria dinâmica, atuando também como ambiente para a construção de algoritmos e a resolução estruturada de problemas.

No GeoGebra, a criação de applets interativos permite que o aluno decomponha um problema complexo, como determinar o período de uma função seno, em etapas menores: definir a função, ajustar parâmetros, observar mudanças no gráfico e formular conjecturas. Essa abordagem está diretamente relacionada à decomposição e ao reconhecimento de padrões. Além disso, o GeoGebra pode ser utilizado para simular algoritmos, como a aproximação do seno por séries de Taylor, tornando o pensamento computacional visível e operacional.

a

Já o Maxima, por ser um sistema de computação algébrica, favorece os pilares da abstração e do design de algoritmos. Ao resolver uma equação trigonométrica, por exemplo, o software utiliza o comando `solve` para obter a solução geral na forma simbólica. Diferentemente de uma calculadora numérica, que forneceria apenas uma aproximação decimal para uma solução particular, o Maxima retorna uma expressão que contempla todas as soluções possíveis, parametrizada por um número inteiro k . Por exemplo, ao resolver a equação $\sin(x) = 0$, o Maxima devolve $x = \pi k$, com $k \in \mathbb{Z}$, expressão que generaliza todas as raízes da função seno. Essa representação simbólica explicita a periodicidade da função e permite ao estudante compreender que, para cada valor inteiro de k , obtém-se uma solução distinta, fundamental para a resolução de problemas em intervalos restritos. Além disso, o Maxima permite que o usuário substitua valores específicos para k e obtenha as soluções particulares desejadas, como $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, etc., promovendo a articulação entre o geral e o particular. Essa capacidade de generalização algébrica, aliada à possibilidade de testar casos concretos, contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional, uma vez que o estudante é levado a refletir sobre a estrutura da solução e a construir algoritmos para explorar diferentes cenários.

, estimulando o aluno a generalizar resultados. Macedo e Alves (2025)[16] reforçam que “a tecnologia, quando bem planejada, não substitui o raciocínio, mas amplia a capacidade de abstração e modelagem”. O Maxima também permite a criação de pequenos programas (scripts) que automatizam cálculos repetitivos, como a determinação de máximos e mínimos de funções trigonométricas em intervalos fechados.

A articulação entre os dois softwares, GeoGebra e Maxima, pode ser vista como um ambiente integrado para o desenvolvimento do pensamento computacional. Enquanto o GeoGebra oferece uma interface visual e interativa para explorar padrões e testar hipóteses, o Maxima fornece o suporte simbólico e algorítmico para validar e generalizar os resultados. Dessa forma, o estudante não apenas resolve questões do ENEM, mas também desenvolve competências computacionais essenciais para sua formação.

Assim, incorporar o pensamento computacional no ensino de funções trigonométricas, mediado por softwares como GeoGebra e Maxima, não é apenas uma tendência pedagógica, mas uma necessidade formativa, alinhada às diretrizes curriculares contemporâneas e às exigências de uma sociedade cada vez mais digital.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO

4.1 Questões Seleccionadas do ENEM

Foram analisadas seis questões do ENEM, abrangendo o período de 2015 a 2025, todas extraídas do caderno azul. Para cada questão, a apresentação está organizada em três subseções: a primeira traz a resolução analítica tradicional; a segunda, a resolução com o software GeoGebra, explorando sua abordagem visual e dinâmica; a terceira, a resolução com o Maxima, utilizando sua capacidade de manipulação algébrica e simbólica. Em cada seção são feitos os encaminhamentos pedagógicos, com ênfase nas potencialidades, limitações e complementaridades entre as ferramentas encontradas em questão analisada.

A análise das questões evidencia que cada abordagem, analítica, visual (GeoGebra) e simbólica (Maxima), apresenta potencialidades e limitações específicas. A simples justaposição dessas formas de resolver problemas não garante uma aprendizagem significativa; é necessário articulá-las em um movimento pedagógico que valorize tanto a intuição geométrica quanto o rigor algébrico e a precisão conceitual da matemática formal. Cada seção deste capítulo enfatiza o diálogo entre a situação-problema, os conceitos trigonométricos envolvidos e o papel de cada ferramenta, oferecendo ao professor um roteiro claro e articulado que evita repetições e foca na complementaridade metodológica.

O ensino de funções trigonométricas frequentemente esbarra na dificuldade de abstração e na transição entre diferentes registros de representação. Os Parâmetros Curriculares Nacionais já alertavam que o estudo da trigonometria deve estar ligado a aplicações, evitando excesso de cálculos algébricos e enfatizando a análise de gráficos [20]. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio reforçam a necessidade de superar barreiras tradicionais:

É preciso atenção à transição do seno e do cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno, definidos como coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com a medida em radianos. As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0° e 180° . [21](BRASIL, 2006, p. 74 apud Lopes, 2023, p. 15)

Nesse contexto, as tecnologias digitais assumem papel central. O GeoGebra destaca-se pela visualização dinâmica: Dantas [22] ressalta que seu uso contribui significativamente para a aprendizagem de aspectos inerentes ao comportamento das funções seno, cosseno e tan-

gente. A geometria dinâmica permite manipular centenas de imagens sobrepostas de forma interativa [21], e Nogueira [23] observa que os elementos se ajustam em tempo real, permitindo explorar propriedades de forma visual e intuitiva. Sobre o papel das mídias digitais, as Orientações Curriculares afirmam que softwares como esses provocam o processo de “pensar matematicamente”, levando os alunos a experimentar, testar hipóteses, esboçar conjecturas e criar estratégias [21](BRASIL, 2006, p. 88 apud Lopes, 2023, p. 22).

O Maxima complementa essa abordagem com o rigor da computação algébrica simbólica. Oliveira [9] destaca sua capacidade de realizar cálculos simbólicos com precisão, sendo útil para verificar periodicidade e generalizar soluções. Giraldo, Caetano e Mattos [8] o descrevem como uma poderosa calculadora científica, capaz de efetuar cálculos e produzir gráficos com grande versatilidade. Alves [11] ressalta que o Maxima permite cálculos numéricos, simbólicos, representações gráficas e programação, enquanto Souza [13] demonstra sua eficácia na compreensão de conceitos abstratos quando bem planejado. Por ser livre, o Maxima torna-se acessível a escolas públicas, conforme salienta Vaz [12].

A articulação entre GeoGebra e Maxima favorece o desenvolvimento de múltiplas representações e o pensamento computacional. Macedo e Alves [16] afirmam que o pensamento computacional se configura como ferramenta poderosa para articular competências cognitivas, sociais e digitais, e Abar e Almeida [17] propõem atividades com comandos do GeoGebra para desenvolver habilidades de decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e design de algoritmos. As seções seguintes aprofundam, para cada questão, como as três abordagens podem ser integradas em sala de aula.

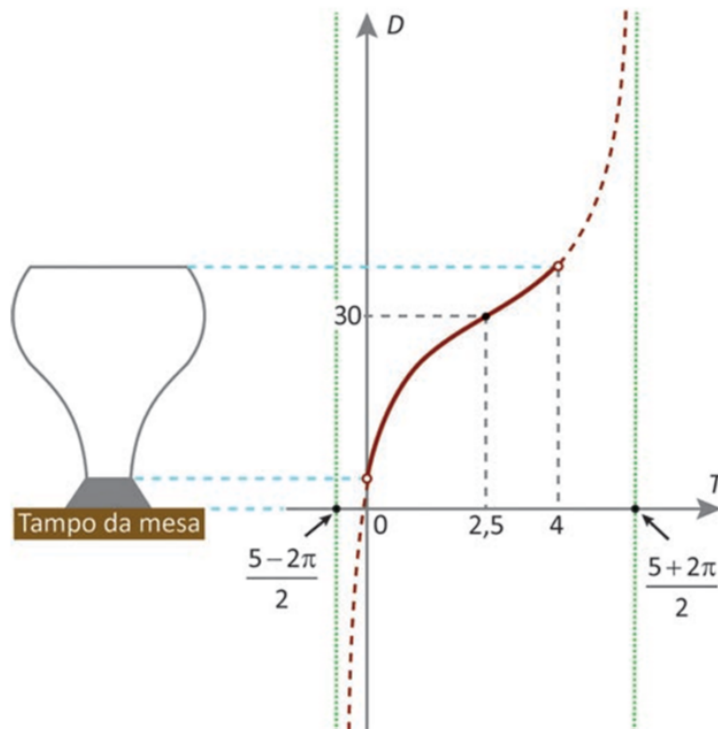
4.2 Questão 160 - ENEM 2025

Um recipiente tem um formato que faz com que, ao ser enchido de água com uma vazão constante, a distância D da lâmina de água ao tampo da mesa, em centímetro, aumente em relação ao tempo T , em minuto, de acordo com uma função do tipo

$$D = k + \tan[p(T + m)],$$

sendo os parâmetros k , p e m números reais, para T variando entre 0 e 4 minutos, conforme ilustrado na figura, na qual estão apresentadas assíntotas verticais da função tangente utilizada na definição de D .

Figura 4.1 – Questão 160 - Prova Azul - ENEM 2025



Fonte: INEP (2025).

A expressão algébrica que representa a relação entre D e T é:

- A) $D = 2,5 + \tan \left[30 \left(T - \frac{5-2\pi}{2} \right) \right]$
- B) $D = 4 + \tan \left[30 \left(T + \frac{5}{2} \right) \right]$
- C) $D = 4 + \tan \left[2,5 \left(T + \frac{5+2\pi}{2} \right) \right]$
- D) $D = 30 + \tan \left[\frac{1}{2} (T - 5) \right]$
- E) $D = 30 + \tan \left[\frac{1}{2} \left(T - \frac{5}{2} \right) \right]$

4.2.1 Resolução Analítica - Questão 160 - Prova Azul - ENEM 2025

A função dada é do tipo:

$$D = k + \tan[p(T + m)].$$

Passo 1 : Determinação de p

Observando o gráfico, as assíntotas verticais estão em:

$$T = \frac{5 - 2\pi}{2} \quad \text{e} \quad T = \frac{5 + 2\pi}{2}.$$

A distância entre assíntotas consecutivas da tangente é:

$$\Delta T = \frac{\pi}{p}.$$

Calculando essa distância:

$$\Delta T = \frac{5 + 2\pi}{2} - \frac{5 - 2\pi}{2} = 2\pi.$$

Logo:

$$\frac{\pi}{p} = 2\pi \Rightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Passo 2: Determinação de k

O ponto médio entre as assíntotas é:

$$T = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Nesse ponto, a função tangente vale zero, então:

$$D = k.$$

Pelo gráfico, nesse ponto temos $D = 30$, logo:

$$k = 30.$$

Passo 3 : Determinação de m

Queremos que o centro da tangente ocorra em $T = 2,5$, ou seja:

$$p(T + m) = 0 \quad \Rightarrow \quad T + m = 0.$$

Assim:

$$m = -2,5.$$

Passo 4: Expressão final

Substituindo os valores encontrados:

$$D = 30 + \tan \left[\frac{1}{2}(T - 2,5) \right].$$

Resposta: alternativa (E).

4.2.2 Resolução Utilizando o Geogebra

Tema: Função tangente e transformações de funções

Objetivo: Construir e analisar a função tangente a partir de seus parâmetros, identificando deslocamentos e comportamento gráfico com o auxílio do GeoGebra.

Habilidade: Analisar e interpretar gráficos de funções trigonométricas, reconhecendo o papel dos parâmetros em suas transformações.

Passo 1: Desenvolvimento da atividade

O objetivo é construir e analisar a função

$$D(T) = 30 + \tan \left[\frac{1}{2}(T - 2,5) \right]$$

a partir dos elementos do gráfico.

Passo 2: Criar os controles deslizantes

No GeoGebra, crie três controles deslizantes:

- $k = 30$
- $p = 0,5$
- $m = -2,5$

Passo 3: Inserir a função

Na barra de entrada, digite:

$$D(T) = k + \tan(p * (T + m))$$

Passo 4: Marcar pontos importantes

Insira os pontos observados no gráfico:

$$A = (0, 0)$$

$$B = (2,5, 30)$$

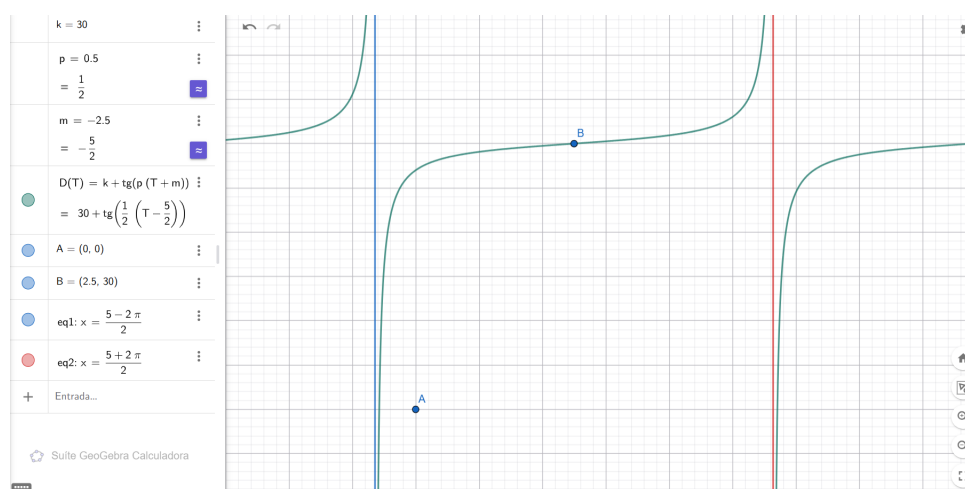
Passo 5: Construir as assíntotas verticais

Digite:

$$x = (5 - 2\pi) / 2$$

$$x = (5 + 2\pi) / 2$$

Figura 4.2 – Tela do GeoGebra: construção da função com os controles deslizantes k , p e m , com visualização das assíntotas e dos pontos A e B



Fonte: O autor.

Passo 6: Analisar o gráfico

Observe que:

- O ponto médio entre as assíntotas é $T = 2,5$
- Nesse ponto, $D = 30$
- A curva é crescente no intervalo considerado

Passo 7: Exploração com sliders

Varie os valores de k , p e m e observe:

- k : deslocamento vertical do gráfico
- p : alteração da inclinação e do período da tangente
- m : deslocamento horizontal

Passo 8: Conclusão

Após os ajustes, obtemos a função:

$$D(T) = 30 + \tan \left[\frac{1}{2}(T - 2,5) \right]$$

4.2.3 Resolução Utilizando o Maxima

Tema: Função tangente e análise simbólica de funções

Objetivo: Analisar a função tangente por meio de representações algébricas e computacionais, utilizando o Maxima para explorar propriedades como período, deslocamentos e validação de resultados.

Habilidade: Resolver e interpretar problemas envolvendo funções trigonométricas, articulando representações algébricas e computacionais.

Desenvolvimento da atividade

O objetivo é construir e analisar a função

$$D(T) = 30 + \tan \left[\frac{1}{2}(T - 2,5) \right]$$

com auxílio do software Maxima.

Passo 1: Definir a função

No Maxima, definimos a função:

```
D(T) := 30 + tan((1/2)*(T - 2.5));
```

Passo 2: Plotar o gráfico

Para visualizar a função no intervalo de interesse:

```
plot2d(D(T), [T, 0, 4],
  [xlabel, "Tempo (min)"],
  [ylabel, "Distância D (cm)"],
  [title, "Gráfico da função D(T)"]);
```

Figura 4.3 – Comandos de entrada e saída no Maxima

```

wxMaxima 22.04.0 (Windows 10 (build 26200), 64-bit edition) [ não salvo* ]
Arquivo Editar View Célula Maxima Equações Matrix Cálculo Simplificar List Gráfico Numérico Ajuda

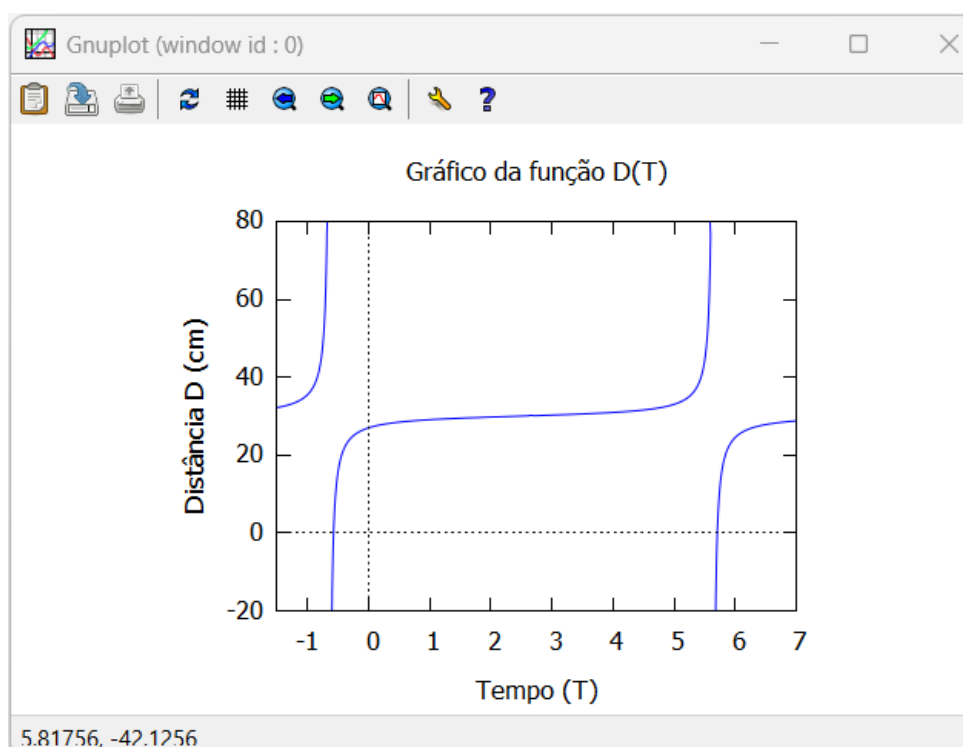
(%i1) D(T) := 30 + tan((1/2)*(T - 2.5));
(%o1) D(T) := 30 + tan(1/2 (T - 2.5))

(%i2) plot2d(D(T), [T, -1.5, 7], [y, -20, 80],
[xlabel, "Tempo (T)", ylabel, "Distância D (cm)",
[title, "Gráfico da função D(T)"]);
plot2d: some values will be clipped.
(%o2) false

```

Fonte: O autor.

Figura 4.4 – Gráfico gerado pelo comando plot2d



Fonte: O autor.

Passo 3: Inserir as assíntotas verticais

As assíntotas são dadas por:

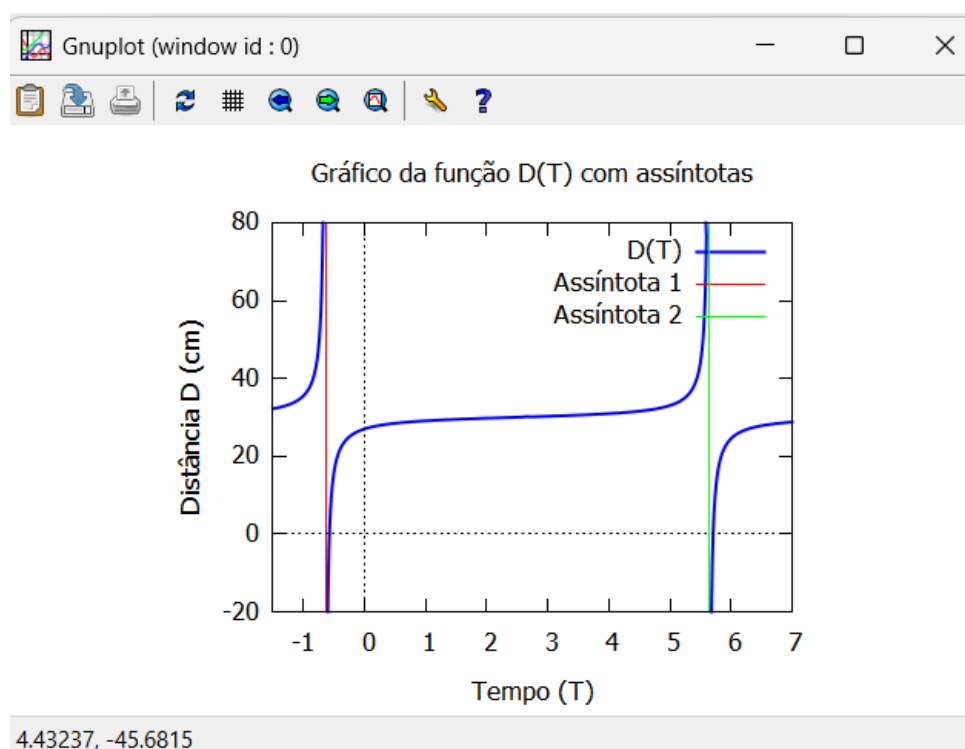
$$T = \frac{5 - 2\pi}{2} \quad \text{e} \quad T = \frac{5 + 2\pi}{2}.$$

No Maxima:

$$x1 : (5 - 2*\pi)/2;$$

$$x2 : (5 + 2*\pi)/2;$$

Figura 4.5 – Gráfico gerado no Maxima com as assíntotas desenhadas explicitamente



Fonte: O autor.

Passo 4: Analisar pontos importantes

Avaliando a função:

$$D(0);$$

$$D(2.5);$$

Espera-se:

- $D(0) = 0$
- $D(2,5) = 30$

Passo 5: Exploração dos parâmetros

Defina a função geral:

$$f(T) := k + \tan(p*(T + m));$$

Teste diferentes valores:

k : 30;

p : 1/2;

m : -2.5;

plot2d(f(T), [T, 0, 4]);

Passo 6: Verificação do período

O período da função tangente é dado por:

$$\frac{\pi}{p}.$$

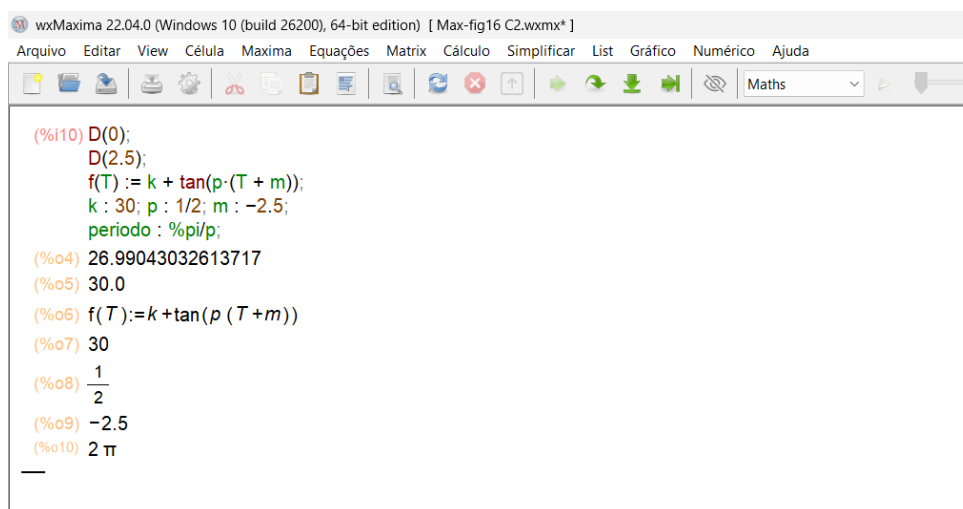
No Maxima:

periodo : %pi/p;

Obtém-se:

$$2\pi.$$

Figura 4.6 – Valores calculados de D(0), D(2,5) e do período



Fonte: O autor.

Passo 7: Conclusão

A função obtida é:

$$D(T) = 30 + \tan \left[\frac{1}{2}(T - 2,5) \right].$$

4.2.4 Encaminhamento Pedagógico - Questão 160 – ENEM 2025.

A questão 160 do ENEM 2025 apresenta um problema de enchimento de um recipiente, cuja distância da lâmina de água ao tampo da mesa é descrita pela função $D(T) = k + \tan[p(T + m)]$. O gráfico fornecido exibe duas assíntotas verticais, e o aluno deve determinar os parâmetros k , p e m para identificar a expressão correta. O conteúdo central é a função tangente, seus deslocamentos e período.

A resolução analítica tradicional exige que o estudante:

- Calcule a distância entre as assíntotas para encontrar $p = 1/2$;
- Localize o ponto médio entre as assíntotas para obter $k = 30$;
- Imponha a condição de centro da tangente para determinar $m = -2,5$.

Essa abordagem é indispensável para desenvolver o raciocínio algébrico e a compreensão das relações entre os parâmetros e o gráfico. Contudo, muitos alunos apresentam dificuldade em visualizar o papel das assíntotas e o efeito do deslocamento horizontal, o que torna o problema abstrato quando trabalhado apenas com lápis e papel.

O GeoGebra preenche exatamente essa lacuna visual. Ao criar controles deslizantes para k , p e m , o estudante pode ajustar cada parâmetro e observar, em tempo real, as transformações no gráfico. A reta $T = 2,5$ aparece naturalmente como ponto médio entre as assíntotas, e o valor de $k = 30$ é confirmado quando a curva passa pelo ponto $(2,5;30)$. A manipulação dinâmica permite que o aluno perceba que p altera a inclinação e o período, enquanto m desloca a curva horizontalmente. Dessa forma, o GeoGebra não apenas valida a solução analítica, mas também constrói significado para os parâmetros a partir da experimentação.

O Maxima complementa essa abordagem com o rigor algébrico. Definida a função, o software calcula o período como 2π e fornece as assíntotas simbolicamente. O estudante pode então verificar que a função atinge o valor mínimo no ponto central e que a solução geral para o argumento da tangente confirma os valores encontrados. A precisão simbólica do Maxima é particularmente útil para validar as conjecturas feitas a partir da observação gráfica, consolidando a formalização matemática.

A articulação entre as três abordagens, analítica, visual e simbólica, mostra-se altamente produtiva. O professor pode iniciar com a resolução tradicional, depois utilizar o GeoGebra para

explorar o comportamento dos parâmetros e, finalmente, recorrer ao Maxima para verificar algebricamente os resultados. Essa sequência respeita diferentes estilos de aprendizagem: alunos mais visuais se beneficiam do GeoGebra, enquanto aqueles com maior inclinação para a álgebra encontram no Maxima um aliado para generalizar. Assim, ao final da atividade, o estudante não apenas identifica a alternativa correta, mas também compreende como cada parâmetro da função tangente afeta o gráfico.

4.3 Questão 142 - ENEM 2023

Na modelagem e no estudo de fenômenos periódicos, em geral, os modelos associados fazem uso de funções trigonométricas. Nesse sentido, considere um experimento, realizado em laboratório, em que uma planta foi colocada em uma estufa, onde a temperatura é controlável. O experimento consiste em observar alterações nas características dessa planta ao ser submetida a variações de temperatura. Durante 24 horas, a temperatura $T(x)$ da estufa variou de acordo com a função

$$T(x) = 20 - 10 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{4} \right)$$

em que x é medido em hora, variando no intervalo $0 \leq x \leq 24$.

Durante esse experimento, quantas vezes a temperatura na estufa atingiu o seu valor mínimo?

- A) 1
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 7

4.3.1 Resolução Analítica - Questão 142 - Prova Azul - ENEM 2023

A função que descreve a temperatura é:

$$T(x) = 20 - 10 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{4} \right).$$

Passo 1: Determinação do valor mínimo

Sabemos que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq 1.$$

Logo, o valor mínimo da função ocorre quando:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1.$$

Assim:

$$T_{\min} = 20 - 10(1) = 10.$$

Passo 2: Determinação dos instantes em que ocorre o mínimo

Precisamos resolver:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1.$$

Sabemos que:

$$\operatorname{sen}(\theta) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo:

$$\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{4}{\pi}$:

$$x = 2 + 8k.$$

Passo 3 : Contagem das soluções no intervalo $0 \leq x \leq 24$

Agora, determinamos os valores de k tais que:

$$0 \leq 2 + 8k \leq 24.$$

Subtraindo 2:

$$-2 \leq 8k \leq 22.$$

Dividindo por 8:

$$-0,25 \leq k \leq 2,75.$$

Os valores inteiros de k nesse intervalo são:

$$k = 0, 1, 2.$$

Assim, os instantes são:

$$x = 2, 10, 18.$$

Passo 4: Conclusão

A temperatura atinge o valor mínimo **3 vezes** no intervalo considerado.

Resposta: alternativa (B).

4.3.2 Resolução Utilizando o GeoGebra

Tema: Função seno e fenômenos periódicos

Objetivo: Analisar o comportamento da função seno em um contexto aplicado, identificando período, amplitude e valores extremos com o auxílio do GeoGebra.

Habilidade: Interpretar e analisar funções trigonométricas em situações reais, reconhecendo padrões periódicos e suas propriedades.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere a função que modela a temperatura:

$$T(x) = 20 - 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right), \quad 0 \leq x \leq 24.$$

Questão norteadora:

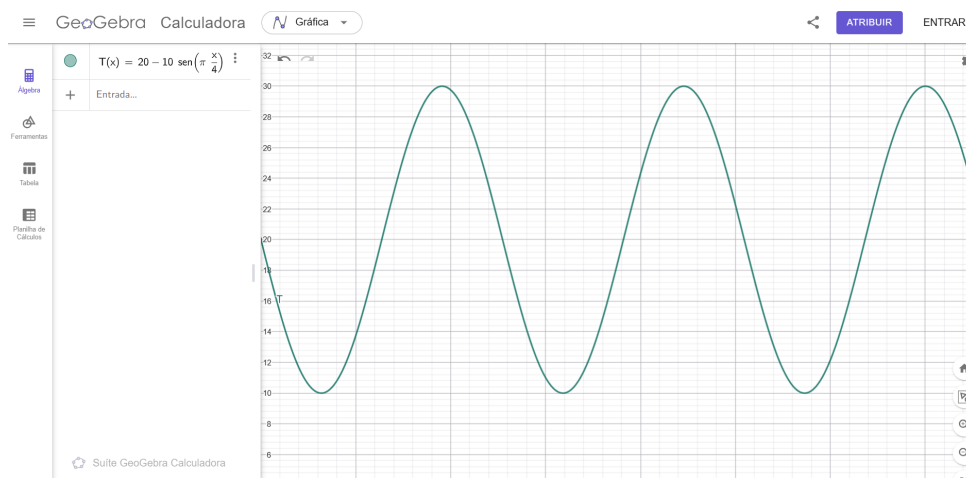
Quantas vezes a temperatura atinge seu valor mínimo?

Passo 2 : Construção no GeoGebra

No GeoGebra, digite:

$$T(x) = 20 - 10 * \operatorname{sen}(\pi * x / 4)$$

Figura 4.7 – Inserindo a função



Fonte: O autor.

Ajuste a janela gráfica para:

x: 0 até 24

y: 0 até 30

Passo 3: Exploração guiada

Solicite aos alunos:

- Identificar o valor máximo e mínimo do gráfico
- Observar em quais pontos o gráfico atinge o valor mínimo
- Contar quantas vezes isso ocorre no intervalo dado

Passo 4: Investigação com parâmetros Antes de modificar a função, é preciso criar os controles deslizantes para os parâmetros a , b e c . No campo de entrada do GeoGebra, digite:

$a=1$

$b=1$

$c=1$

Ao pressionar Enter após cada comando, o GeoGebra cria automaticamente um controle deslizante para cada letra, exibido na Janela de Visualização.

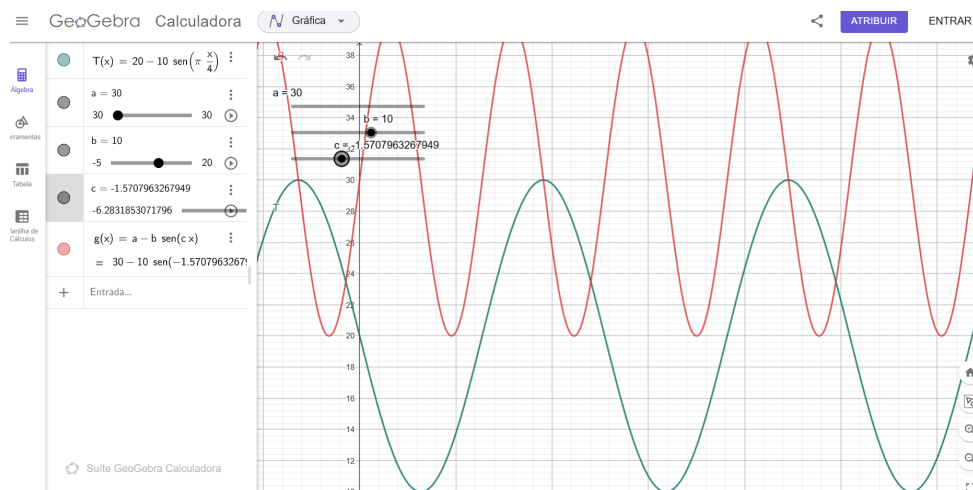
Em seguida, redefina a função original utilizando esses parâmetros:

$$T(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x)$$

Peça aos alunos que arrastem os controles deslizantes e explorem:

- O que acontece ao variar a (translação vertical)
- O que acontece ao variar b (amplitude)
- O que acontece ao variar c (período)

Figura 4.8 – Tela do GeoGebra: gráfico de $T(x)$ no intervalo $[0, 24]$ com os três mínimos visíveis, com exploração dos parâmetros a , b e c



Fonte: O autor.

Passo 5: Formalização

Com base na exploração:

- O período da função é:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

- O valor mínimo ocorre quando:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1$$

Logo, os mínimos ocorrem a cada 8 unidades.

Passo 6 : Conclusão

No intervalo $0 \leq x \leq 24$, o valor mínimo ocorre 3 vezes.

4.3.3 Resolução Utilizando o Maxima

Tema: Função seno e análise simbólica de fenômenos periódicos

Objetivo: Analisar uma função trigonométrica por meio de procedimentos algébricos e computacionais, utilizando o Maxima para determinar valores extremos e resolver equações trigonométricas em intervalos definidos.

Habilidade: Resolver e interpretar equações trigonométricas, compreendendo o comportamento de funções periódicas e suas soluções ao longo do domínio.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere a função:

$$T(x) = 20 - 10 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right), \quad 0 \leq x \leq 24.$$

Questão norteadora:

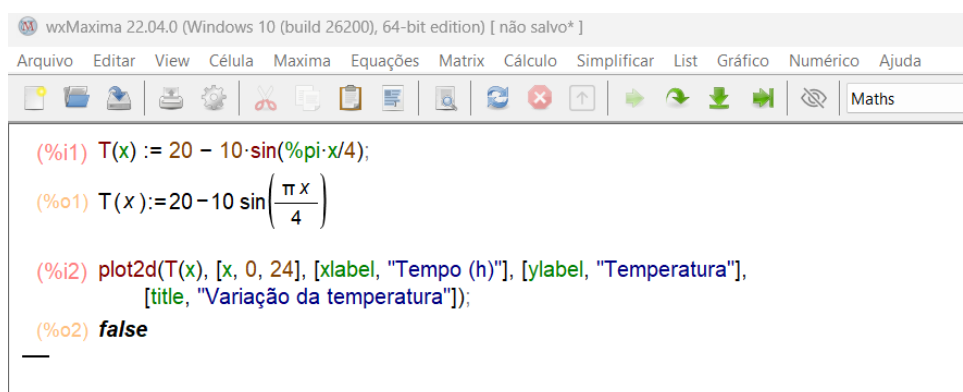
Quantas vezes a temperatura atinge seu valor mínimo?

Passo 2: Definição da função no Maxima

No Maxima, digite:

```
T(x) := 20 - 10*sen(%pi*x/4);
```

Figura 4.9 – Comandos na interface do Maxima



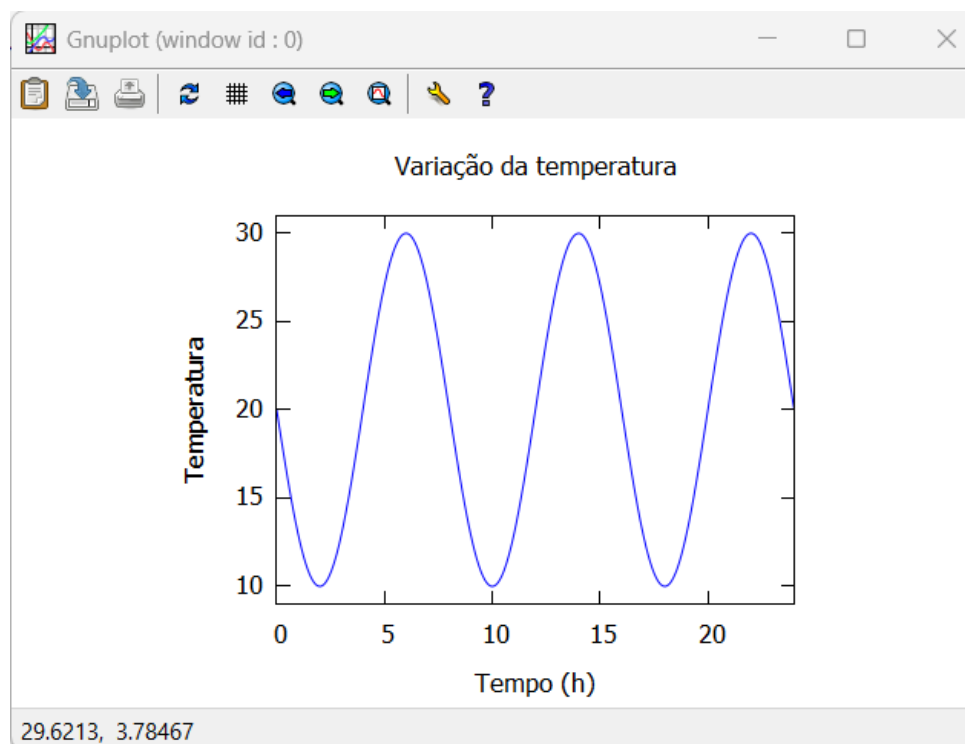
Fonte: O autor.

Passo 3: Visualização do gráfico

Plote a função no intervalo dado:

```
plot2d(T(x), [x, 0, 24],
      [xlabel, "Tempo (h)"],
      [ylabel, "Temperatura"],
      [title, "Variação da temperatura"]);
```

Figura 4.10 – Gráfico gerado no Maxima



Fonte: O autor.

Passo 4: Determinação do valor mínimo

Utilizando propriedades da função seno, temos:

$$-1 \leq \text{sen}(\theta) \leq 1.$$

Logo, o valor mínimo ocorre quando:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1.$$

No Maxima:

```
min_val : 20 - 10*1;
```

Portanto:

$$T_{\min} = 10.$$

Passo 5: Resolução da equação trigonométrica

Resolver:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1.$$

No Maxima:

```
solve(sen(%pi*x/4) = 1, x);
```

A solução geral pode ser expressa por:

$$\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Passo 6: Determinação dos valores no intervalo

Isolando x , obtemos:

$$x = 2 + 8k.$$

No Maxima:

```
x(k) := 2 + 8*k;
```

Testando valores inteiros de k :

```
subst(k=0, x(k));
```

```
subst(k=1, x(k));
```

```
subst(k=2, x(k));
```

```
subst(k=3, x(k));
```

Resultados:

$$x = 2, 10, 18.$$

Figura 4.11 – Saída do comando solve e das substituições de k

```

wxMaxima 22.04.0 (Windows 10 (build 26200), 64-bit edition) [ não salvo* ]
Arquivo Editar View Célula Maxima Equações Matrix Cálculo Simplificar List Gráfico Numérico Ajuda

(%i4) min_val : 20 - 10·1;
      solve(sin(%pi·x/4) = 1, x);

(%o3) 10
      solve: using arc-trig functions to get a solution.
      Some solutions will be lost.

(%o4) [x=2]

(%i9) x(k) := 2 + 8·k;
      subst(k=0, x(k));
      subst(k=1, x(k));
      subst(k=2, x(k));
      subst(k=3, x(k));

(%o5) x(k) := 2 + 8 k
(%o6) 2
(%o7) 10
(%o8) 18
(%o9) 26

```

Fonte: O autor.

Passo 7: Conclusão

No intervalo $0 \leq x \leq 24$, a temperatura atinge o valor mínimo três vezes.

Resposta: 3

4.3.4 Encaminhamento Pedagógico - Questão 142 – ENEM 2023.

A função $T(x) = 20 - 10\sin(\pi x/4)$ modela a temperatura em 24 horas. O estudante deve contar quantas vezes o valor mínimo (10) é atingido. A resolução analítica, baseada na equação $\sin(\pi x/4) = 1$, leva a $x = 2 + 8k$, com três soluções no intervalo ($x = 2, 10, 18$).

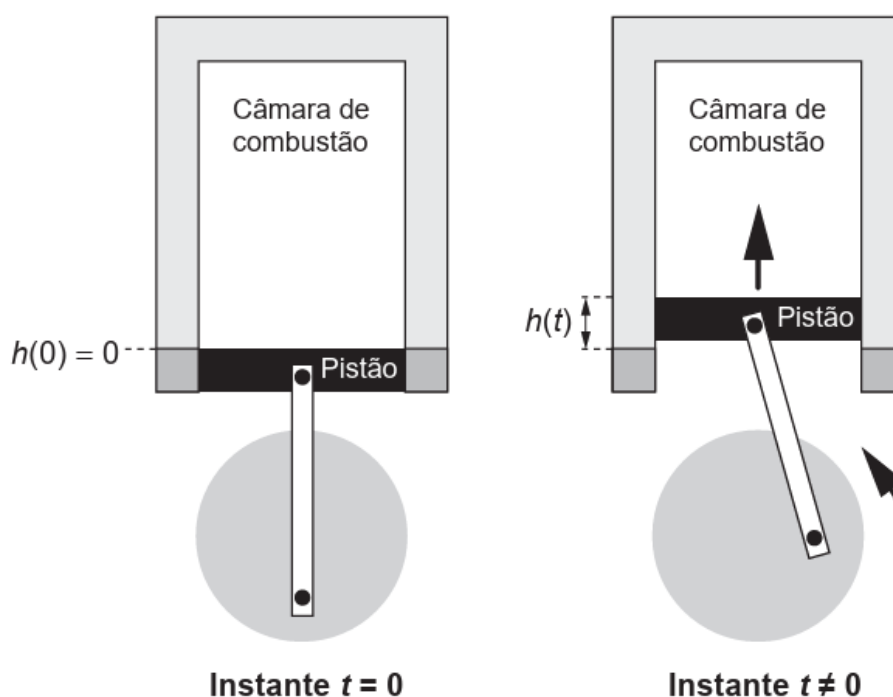
No GeoGebra, a visualização do gráfico e a contagem dos pontos de mínimo são imediatas. Ao manipular os parâmetros a , b e c da função geral $T(x) = a + b\sin(cx)$, os alunos observam em tempo real os efeitos da translação vertical, da amplitude e do período. Como destacam Braz, Castro e Oliveira [24], “a grande vantagem didática deste programa é que ele apresenta, ao mesmo tempo e no mesmo ambiente visual, representações geométricas e algébricas de um mesmo objeto que interagem entre si”. Isso ajuda a conectar a expressão algébrica ao gráfico.

O Maxima resolve a equação simbolicamente e fornece a solução geral $x = 2 + 8k$. O trabalho com a variável inteira k permite que os alunos testem valores e compreendam a periodicidade da função. Como Giraldo, Caetano e Mattos [25] colocam, os sistemas de computação algébrica “podem ser vistos como poderosas calculadoras científicas, capazes de efetuar cálculos e produzir gráficos com grande precisão e versatilidade”. Essa precisão simbólica, aliada à visualização do GeoGebra, consolida o conceito de periodicidade e prepara os alunos para interpretar fenômenos periódicos no ENEM.

4.4 Questão 177 - ENEM 2019

Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.

Figura 4.12 – Questão 177 - ENEM 2019



Fonte: INEP (2019).

A função

$$h(t) = 4 + 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right),$$

definida para $t \geq 0$, descreve como varia a altura h , medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t , medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β , que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π .

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β , de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é:

- A) 1
- B) 2
- C) 4
- D) 5
- E) 8

4.4.1 Resolução Analítica - Questão 177 - Prova Azul - ENEM 2019

A função dada é:

$$h(t) = 4 + 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Passo 1: Determinação dos instantes em que $h(t) = 6$

Queremos que a altura seja igual a 6 cm:

$$4 + 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 6.$$

Subtraindo 4:

$$4 \operatorname{sen} \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 2.$$

Dividindo por 4:

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Passo 2: Resolução da equação trigonométrica

Sabemos que:

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

Logo:

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

ou

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

Passo 3: Isolando t

Somando $\frac{\pi}{2}$ em ambos os lados:

$$\frac{\beta t}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\Rightarrow t = \frac{4\pi}{3\beta} + \frac{4\pi k}{\beta}$$

Para o outro caso:

$$\frac{\beta t}{2} = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\Rightarrow t = \frac{8\pi}{3\beta} + \frac{4\pi k}{\beta}$$

Passo 4: Uso da aproximação $\pi \approx 3$

Substituindo $\pi \approx 3$:

$$t_1(k) = \frac{4 \cdot 3}{3\beta} + \frac{4 \cdot 3}{\beta} k = \frac{4}{\beta} + \frac{12k}{\beta}$$

$$t_2(k) = \frac{8 \cdot 3}{3\beta} + \frac{12k}{\beta} = \frac{8}{\beta} + \frac{12k}{\beta}$$

Passo 5: Contagem das soluções no intervalo $0 < t < 4$

Queremos três valores de t menores que 4.

Testando $\beta = 1$:

$$t = 4; 8; \dots$$

Nenhum valor é menor que 4.

Testando $\beta = 2$:

$$t = 2; 4; 8; \dots$$

Apenas um valor é menor que 4.

Testando $\beta = 3$:

$$t \approx 1,33; 2,67; 5,33; \dots$$

Apenas dois valores são menores que 4.

Testando $\beta = 4$:

$$t = 1; 2; 4; 5; \dots$$

Apenas dois valores são menores que 4 (o terceiro ocorre exatamente em $t = 4$, que não conta).

Testando $\beta = 5$:

$$t = 0,8; 1,6; 3,2; 4; 4,8; \dots$$

Três valores são menores que 4.

Temos três valores menores que 4:

$$t = 0,8; 1,6; 3,2$$

Passo 6: Conclusão

O menor valor inteiro de β que satisfaz a condição é:

$$\boxed{\beta = 5}.$$

Resposta: alternativa (D).

4.4.2 Resolução Utilizando o Geogebra

Tema: Funções trigonométricas — movimento periódico

Objetivo: Compreender o comportamento de uma função seno em um contexto físico, analisando período, frequência e contagem de soluções em um intervalo.

Habilidade: Interpretar funções trigonométricas em fenômenos periódicos e resolver problemas envolvendo parâmetros.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere a função:

$$h(t) = 4 + 4 \sin\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \quad t \geq 0.$$

Questão norteadora:

Qual o menor valor de β para que a altura $h(t) = 6$ ocorra três vezes antes de $t = 4$?

Passo 2: Construção no GeoGebra

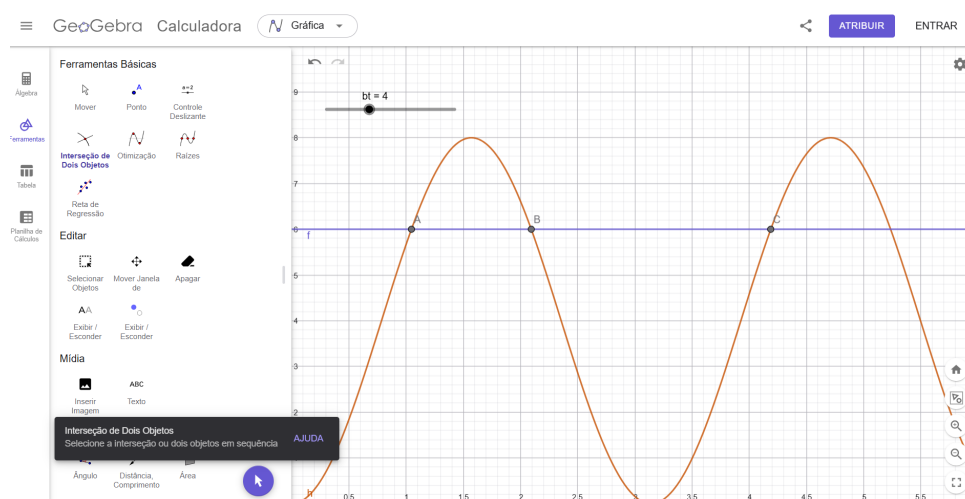
Criar um controle deslizante:

- $\beta \in [1, 10]$, incremento 1

Inserir a função:

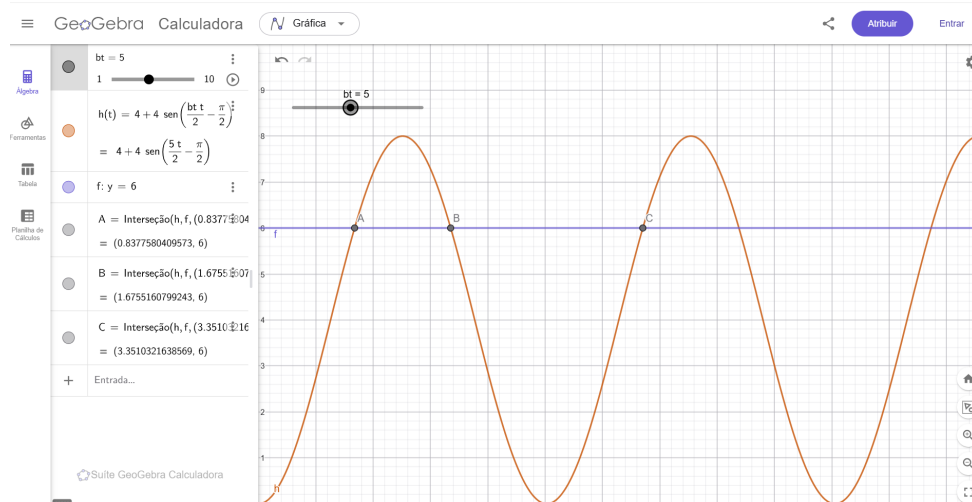
$$h(t) = 4 + 4 \cdot \sin((\beta \cdot t) / 2 - \pi / 2)$$

Figura 4.13 – Utilizando a ferramenta interseção



Fonte: O autor.

Figura 4.14 – Tela do GeoGebra: gráfico com β variando e a reta $y = 6$, com pontos de interseção destacados para $\beta = 4$



Fonte: O autor.

Passo 3: Janela gráfica

Ajustar:

t: 0 até 6

h: 0 até 10

Passo 4: Reta de referência

Inserir a reta:

$y = 6$

Passo 5: Interseções

Inserir:

$\text{Interseção}(h, y = 6)$

(O GeoGebra exibirá os pontos onde $h(t) = 6$.)

Passo 6: Exploração guiada

Solicitar aos alunos:

- Variar o valor de β

- Observar quantas interseções ocorrem antes de $t = 4$
- Identificar o menor valor de β que produz três interseções

Passo 7: Investigação do período

Propor questionamentos como:

- Qual o efeito da variação de β no gráfico?
- Como o número de oscilações se altera quando β aumenta?

Conduzir à ideia de que o período da função é dado por:

$$T = \frac{4\pi}{\beta}.$$

Passo 8: Conclusão

Observa-se que o menor valor de β que produz três interseções antes de $t = 4$ é:

$$\beta = 5.$$

4.4.3 Resolução Utilizando o Maxima

Tema: Funções trigonométricas — movimento periódico

Objetivo: Analisar uma função trigonométrica em um contexto físico, utilizando o Maxima para resolver equações e interpretar resultados de forma algébrica.

Habilidade: Resolver equações trigonométricas e analisar soluções em intervalos definidos, compreendendo a periodicidade das funções.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere a função:

$$h(t) = 4 + 4 \sin \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right), \quad t \geq 0.$$

Questão norteadora:

Determinar o menor valor inteiro de β para que $h(t) = 6$ ocorra três vezes antes de $t = 4$.

Passo 2: Definição da função

No Maxima, digite:

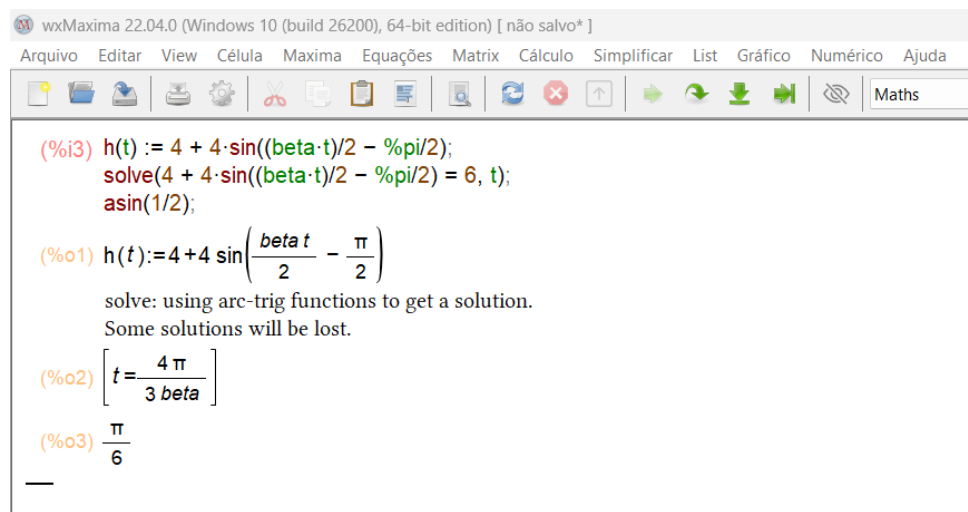
```
h(t) := 4 + 4*sen((beta*t)/2 - %pi/2);
```

Passo 3: Determinação do valor de interesse

Resolver a equação $h(t) = 6$:

```
solve(4 + 4*sen((beta*t)/2 - %pi/2) = 6, t);
```

Figura 4.15 – Solução geral obtida pelo comando solve



Fonte: O autor.

Passo 4: Análise da equação trigonométrica

A equação é equivalente a:

$$\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

No Maxima, pode-se obter:

```
asen(1/2);
```

Passo 5: Construção das soluções gerais

As soluções podem ser expressas por:

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{ou} \quad \frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

No Maxima:

```
t1(k) := (4*%pi)/(3*beta) + (4*%pi*k)/beta;
t2(k) := (8*%pi)/(3*beta) + (4*%pi*k)/beta;
```

Passo 6: Aproximação numérica

Adotando $\pi \approx 3$:

```
t1(k) := 4/beta + 12*k/beta;
t2(k) := 8/beta + 12*k/beta;
```

Passo 7: Teste de valores de β

Testar valores inteiros:

```
beta : 1;
t1(0), t2(0);
```

```
beta : 2;
t1(0), t2(0);
```

```
beta : 3;
t1(0), t2(0);
```

```
beta : 4;
t1(0), t2(0), t1(1);
```

```
beta : 5;
t1(0), t2(0), t1(1);
```

Figura 4.16 – Valores numéricos das interseções para $\beta = 4$

```

(%i6) t1(k):=(4*%pi)/(3*beta) + (4*%pi*k)/beta;
      t2(k):=(8*%pi)/(3*beta) + (4*%pi*k)/beta;

(%o5) t1(k):=  $\frac{4\pi}{3\beta} + \frac{4\pi k}{\beta}$ 
(%o6) t2(k):=  $\frac{8\pi}{3\beta} + \frac{4\pi k}{\beta}$ 

(%i13) beta : 5;
      t1(0);
      t2(0);
      t1(1);
      float(t1(0));
      float(t2(0));
      float(t1(1));

(%o7) 5
(%o8)  $\frac{4\pi}{15}$ 
(%o9)  $\frac{8\pi}{15}$ 
(%o10)  $\frac{16\pi}{15}$ 
(%o11) 0.8377580409572781
(%o12) 1.675516081914556
(%o13) 3.351032163829113

```

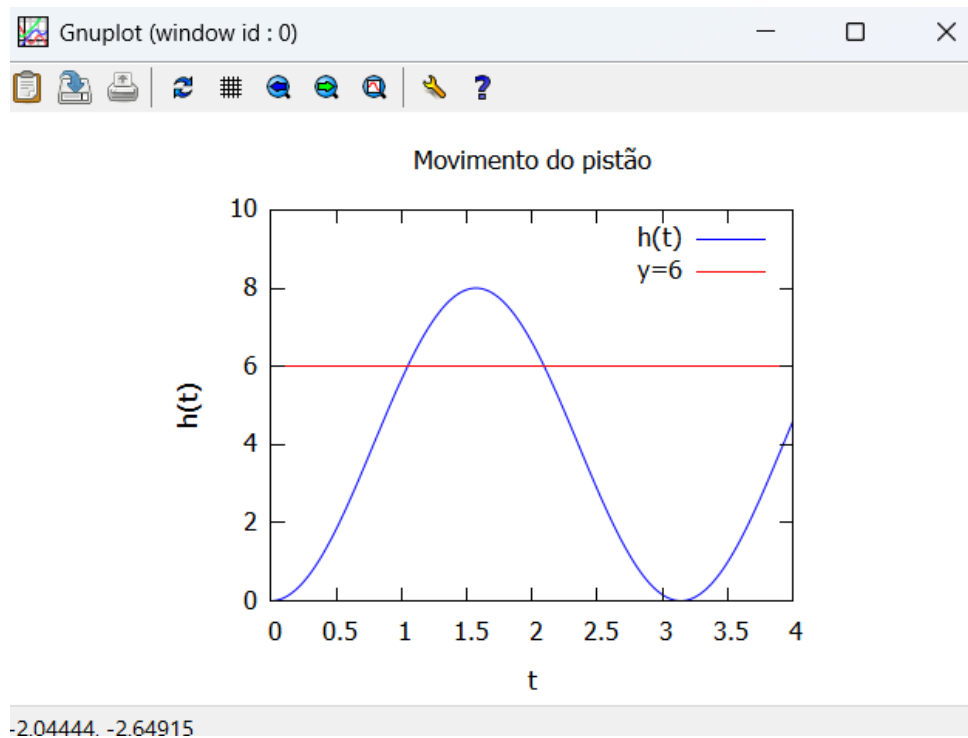
Fonte: O autor.

Passo 8: Verificação gráfica Para visualizar as soluções, plote a função $h(t)$ juntamente com a reta $y = 6$, com $\beta = 5$:

```
beta : 5;
```

```
plot2d([h(t), 6], [t, 0, 4], [legend, "h(t)", "y=6"]);
```

Figura 4.17 – Gráfico de $h(t)$ e da reta $y=6$ gerado no Maxima, com as três interseções visíveis



Fonte: O autor.

Passo 9: Verificação no intervalo Verificar quais valores satisfazem:

$$0 < t < 4.$$

No Maxima:

```
float(t1(0));
```

```
float(t2(0));
```

```
float(t1(1));
```

Passo 10: Conclusão Observa-se que, para $\beta = 5$, existem três valores de t no intervalo $(0, 4)$: aproximadamente 0,8, 1,6 e 3,2. Logo:

$$\beta = 5.$$

Resposta: alternativa (D).

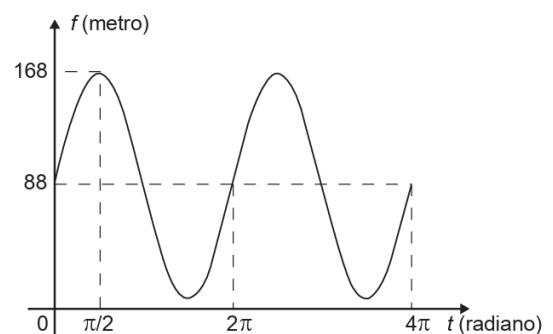
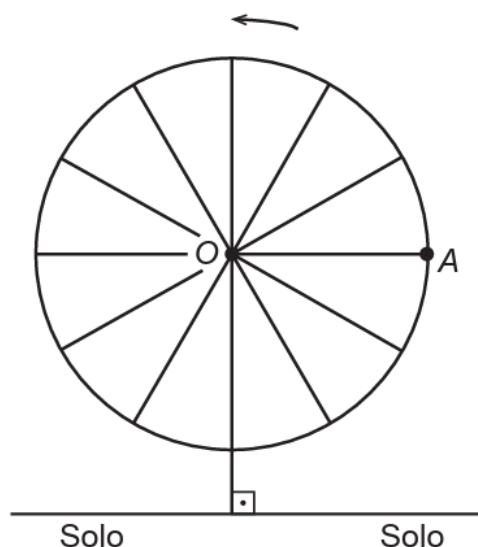
4.4.4 Encaminhamento Pedagógico -Questão 177 – ENEM 2019.

O deslocamento do pistão é dado por $h(t) = 4 + 4\sin(\beta t/2 - \pi/2)$. O objetivo é o menor β inteiro para que $h(t) = 6$ ocorra três vezes antes de $t = 4$. A resolução analítica produz duas famílias de soluções: $t = \frac{4\pi}{3\beta} + \frac{4\pi k}{\beta}$ e $t = \frac{8\pi}{3\beta} + \frac{4\pi k}{\beta}$. Usando $\pi \approx 3$, testando $\beta = 1, 2, 3, 4$ chega-se a $\beta = 5$. No GeoGebra, um controle deslizante para β mostra instantaneamente as interseções com a reta $y = 6$. O aluno observa que para $\beta = 5$ aparecem três interseções antes de $t = 4$. A investigação do período – a fórmula $T = 4\pi/\beta$ – fica evidente ao perceber que, quanto maior β , mais oscilações ocorrem no mesmo intervalo. O Maxima complementa com a generalização simbólica. A partir da definição da função, resolve a equação $\sin(\beta t/2 - \pi/2) = 1/2$ e obtém as soluções gerais. O estudante pode então definir uma função para $t(k)$ e testar valores inteiros de β de forma sistemática. Essa abordagem desenvolve o pensamento algébrico e a capacidade de generalização.

4.5 Questão 170 - ENEM 2018

Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras.

Figura 4.19 – Questão 170 - ENEM 2018 - Parte B. Fonte: INEP (2018).



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, a *High Roller* rotaciona-se no sentido anti-horário, em torno do ponto O .

Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A , em relação ao solo, em função de t .

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:

A expressão da função altura é dada por:

- (A) $f(t) = 80 \operatorname{sen}(t) + 88$
- (B) $f(t) = 80 \cos(t) + 88$
- (C) $f(t) = 88 \cos(t) + 168$
- (D) $f(t) = 168 \operatorname{sen}(t) + 88 \cos(t)$
- (E) $f(t) = 88 \operatorname{sen}(t) + 168 \cos(t)$

4.5.1 Resolução Analítica - Questão 170 - Prova Azul - ENEM 2018

A função que descreve a altura do ponto A em uma roda-gigante é do tipo:

$$f(t) = a \operatorname{sen}(t) + b \quad \text{ou} \quad f(t) = a \cos(t) + b,$$

em que:

- a representa a amplitude (raio da roda-gigante);
- b representa o deslocamento vertical (altura do centro em relação ao solo).

Passo 1: Identificação da linha média

Pelo gráfico, observa-se que a altura média da função é:

$$f(t) = 88.$$

Logo, o deslocamento vertical é:

$$b = 88.$$

Passo 2: Determinação da amplitude

O valor máximo observado no gráfico é:

$$f_{\max} = 168.$$

Assim, a amplitude é:

$$a = 168 - 88 = 80.$$

Passo 3: Escolha da função trigonométrica

No instante inicial $t = 0$, o ponto A encontra-se na altura média (88 m), e a partir daí a função cresce.

Sabemos que:

$$\text{sen}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \text{cos}(0) = 1.$$

Logo:

- A função seno inicia na linha média;
- A função cosseno inicia no valor máximo.

Como o gráfico começa na linha média e cresce, a função adequada é a seno.

Passo 4: Construção da função

Substituindo os valores encontrados:

$$f(t) = 80\text{sen}(t) + 88.$$

Passo 5: Conclusão

A expressão que representa a altura do ponto A é:

$$\boxed{f(t) = 80\text{sen}(t) + 88}.$$

Resposta: alternativa (A).

4.5.2 Resolução Utilizando o Geogebra

Tema: Função seno e modelagem de fenômenos periódicos

Objetivo: Analisar uma função trigonométrica a partir de sua representação gráfica, identificando amplitude, período e deslocamento vertical em um contexto físico.

Habilidade: Interpretar gráficos de funções trigonométricas, relacionando suas características com situações reais e construindo modelos matemáticos adequados.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere o gráfico que representa a altura de uma cadeira de uma roda-gigante em função do ângulo t .

Questão norteadora:

Qual é a expressão da função que modela a altura do ponto em função do ângulo?

Passo 2: Construção no GeoGebra

Inserir a função geral:

$$f(t) = a \cdot \sin(t) + b$$

Criar controles deslizantes:

- $a \in [0, 200]$
- $b \in [0, 200]$

Passo 3: Ajuste da janela gráfica

Configurar:

t : 0 até $4 \cdot \pi$

y : 0 até 200

Passo 4: Inserção de referências do gráfico

Inserir retas auxiliares:

$$y = 88$$

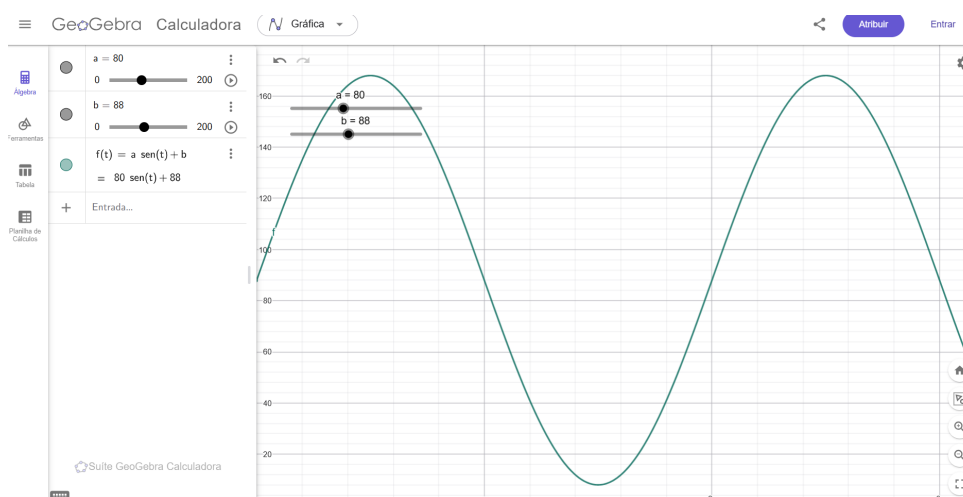
$$y = 168$$

Passo 5: Exploração guiada

Solicitar aos alunos:

- Ajustar o valor de b para coincidir com a linha média do gráfico
- Ajustar o valor de a para que a função atinja o valor máximo observado
- Observar o comportamento da função no ponto $t = 0$

Figura 4.20 – Tela do GeoGebra: ajuste dos sliders a e b até coincidir com as retas de referência, com gráfico final sobreposto às retas $y = 88$ e $y = 168$



Fonte: O autor.

Passo 6: Investigação do tipo de função

Propor questionamentos:

- A função começa no valor máximo ou na linha média?
- O gráfico está crescendo ou decrescendo em $t = 0$?

Conduzir à escolha da função seno.

Passo 7: Ajuste final do modelo

Após a exploração, obter:

$$f(t) = 80 \cdot \sin(t) + 88$$

Passo 8: Conclusão

A função que modela a altura do ponto é:

$$f(t) = 80 \sin(t) + 88.$$

4.5.3 Resolução Utilizando o Maxima

Tema: Função seno e análise simbólica de fenômenos periódicos

Objetivo: Analisar uma função trigonométrica a partir de suas propriedades algébricas, utilizando o Maxima para validar modelos matemáticos e interpretar seus parâmetros.

Habilidade: Interpretar e resolver problemas envolvendo funções trigonométricas, articulando representações algébricas e computacionais.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere a função que modela a altura de um ponto em uma roda-gigante em função do ângulo t .

Questão norteadora:

Determinar a expressão da função que representa a altura do ponto em função de t .

Passo 2: Definição do modelo geral

No Maxima, definir uma função geral:

$$f(t) := a \cdot \sin(t) + b;$$

Passo 3: Análise do deslocamento vertical

A partir do gráfico, identifica-se a linha média:

$$b : 88;$$

Passo 4: Determinação da amplitude

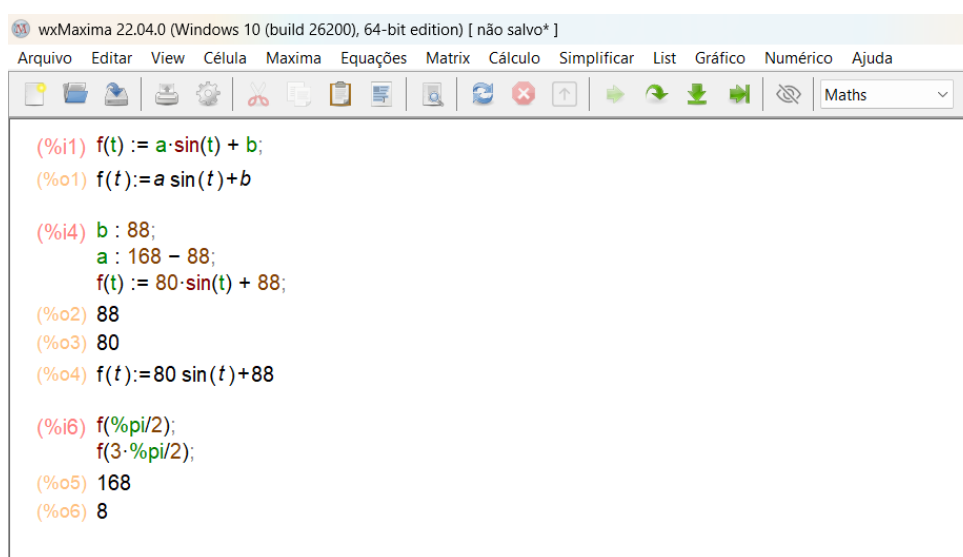
Sabendo que o valor máximo é 168:

$$a : 168 - 88;$$

Logo:

$$a = 80.$$

Figura 4.21 – Cálculo direto de a e b a partir dos valores máximo e mínimo



```

(%i1) f(t) := a*sin(t) + b;
(%o1) f(t):=a sin(t)+b

(%i4) b : 88;
      a : 168 - 88;
      f(t) := 80*sin(t) + 88;
(%o2) 88
(%o3) 80
(%o4) f(t):=80 sin(t)+88

(%i6) f(%pi/2);
      f(3*%pi/2);
(%o5) 168
(%o6) 8

```

Fonte: O autor.

Passo 5: Construção da função

Substituindo os valores encontrados:

$$f(t) := 80*\text{sen}(t) + 88;$$

Passo 6: Verificação dos valores extremos

No Maxima:

$$f(\pi/2);$$

$$f(3*\pi/2);$$

Obtém-se:

- valor máximo: 168

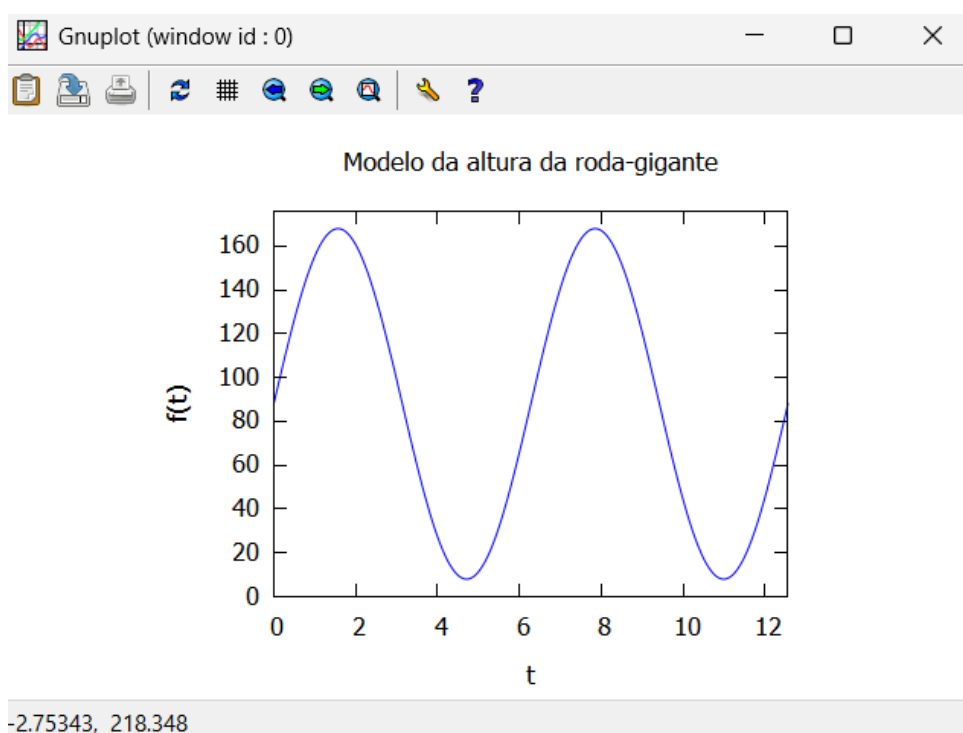
- valor mínimo: 8

Passo 7: Visualização do gráfico

Para validar o modelo:

```
plot2d(f(t), [t, 0, 4*%pi],
      [xlabel, "t"],
      [ylabel, "f(t)"],
      [title, "Modelo da altura da roda-gigante"]);
```

Figura 4.22 – Gráfico final gerado no Maxima — Decimais



Fonte: O autor.

Passo 8: Conclusão

A função que modela a altura do ponto é:

$$f(t) = 80 \operatorname{sen}(t) + 88.$$

4.6 Encaminhamento Pedagógico - Questão 170 – ENEM 2018.

O gráfico da altura de uma cadeira da roda-gigante permite identificar a linha média (88), a amplitude (80) e o fato de a função começar na linha média e crescer – indicando seno. A resolução analítica conduz a $f(t) = 80 \sin t + 88$.

No GeoGebra, controles deslizantes para a e b ajustam a curva ao gráfico. Os alunos podem perceber que $b = 88$ (deslocamento vertical) e $a = 80$ (amplitude). Questionamentos como “Por que não poderia ser cosseno?” levam à conclusão de que o cosseno começaria no valor máximo. Nogueira [23] observa que “todos os elementos relacionados se ajustam em tempo real, permitindo explorar propriedades matemáticas de forma visual e intuitiva”. O professor age como mediador, fazendo perguntas e construindo o modelo coletivamente.

O Maxima valida o modelo algebricamente. A partir da função geral $f(t) = a \sin t + b$, calcula-se b (média entre máximo e mínimo) e a (diferença entre máximo e a média). O software plota o gráfico e verifica os valores extremos. Alves [11] cita Giraldo (2012) e faz um alerta importante:

a interpretação de resultados produzidos por ferramentas computacionais simbólicas, mesmo nos sistemas de computação algébrica mais poderosos, como por exemplo o software WxMAXIMA, não dispensa ou substitui o conhecimento dos conceitos matemáticos envolvidos. [11](Giraldo, 2012, p. 209 apud Alves, 2018, p. 91).

Ou seja, o software auxilia o aluno na execução de cálculos e na visualização de gráficos, mas o verdadeiro aprendizado ocorre quando ele é capaz de interpretar os resultados obtidos, relacioná-los aos conceitos teóricos e questionar a plausibilidade das respostas. O Maxima, nesse sentido, atua como um laboratório algébrico: oferece respostas rápidas e precisas, mas cabe ao estudante compreender o significado de cada parâmetro, a periodicidade das funções e as transformações envolvidas. Essa postura crítica diante da tecnologia é essencial para que o uso do software não se reduza a uma mera substituição do cálculo manual, mas se torne um efetivo promotor de reflexão e construção de conhecimento. O professor, como mediador, tem o papel de orientar essa leitura crítica, incentivando os alunos a confrontar as respostas obtidas com suas próprias conjecturas e a justificar matematicamente cada passo do processo.

4.7 Questão 166 - ENEM 2017

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo

$$P(t) = A + B \cos(kt),$$

em que A , B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundos.

Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os seguintes dados:

Grandeza	Valor
Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida por este cientista, ao analisar o caso específico, é:

- (A) $P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$
- (B) $P(t) = 78 + 42 \cos(3\pi t)$
- (C) $P(t) = 99 + 21 \cos(2\pi t)$
- (D) $P(t) = 99 + 21 \cos(t)$
- (E) $P(t) = 78 + 42 \cos(t)$

4.7.1 Resolução Analítica - Questão 166 - Prova Azul - ENEM 2017

A função que modela a pressão arterial é dada por:

$$P(t) = A + B \cos(kt),$$

em que A , B e k são constantes positivas.

Passo 1: Determinação do valor médio

A pressão média é dada pela média entre o valor máximo e o valor mínimo:

$$A = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} = \frac{120 + 78}{2} = 99.$$

Passo 2: Determinação da amplitude

A amplitude é metade da diferença entre os valores máximo e mínimo:

$$B = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} = \frac{120 - 78}{2} = 21.$$

Passo 3: Determinação do período

Sabemos que a função cosseno possui período:

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

O enunciado informa que ocorrem 90 batimentos por minuto, ou seja:

$$\text{frequência} = 90 \text{ batimentos/minuto}.$$

Convertendo para segundos:

$$90 \text{ batimentos/minuto} = \frac{90}{60} = 1,5 \text{ batimentos/segundo}.$$

Logo, o período é:

$$T = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \text{ segundo}.$$

Passo 4: Determinação de k

Utilizando a relação:

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

temos:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\pi}{k}.$$

Isolando k :

$$k = 3\pi.$$

Passo 5: Construção da função

Substituindo os valores encontrados:

$$P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t).$$

Passo 6: Conclusão

A função que modela a pressão arterial é:

$$\boxed{P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)}.$$

Resposta: alternativa (A).

4.7.2 Resolução Utilizando o Geogebra

Tema: Funções trigonométricas — modelagem de fenômenos periódicos

Objetivo: Modelar uma função trigonométrica a partir de dados experimentais, identificando média, amplitude e período com o auxílio do GeoGebra.

Habilidade: Interpretar e construir modelos matemáticos envolvendo funções trigonométricas, relacionando parâmetros algébricos com fenômenos reais.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere uma função que modela a pressão arterial de uma pessoa ao longo do tempo.

Questão norteadora:

Como determinar a expressão da função $P(t)$ a partir dos dados de pressão mínima, máxima e frequência cardíaca?

Passo 2: Construção do modelo geral

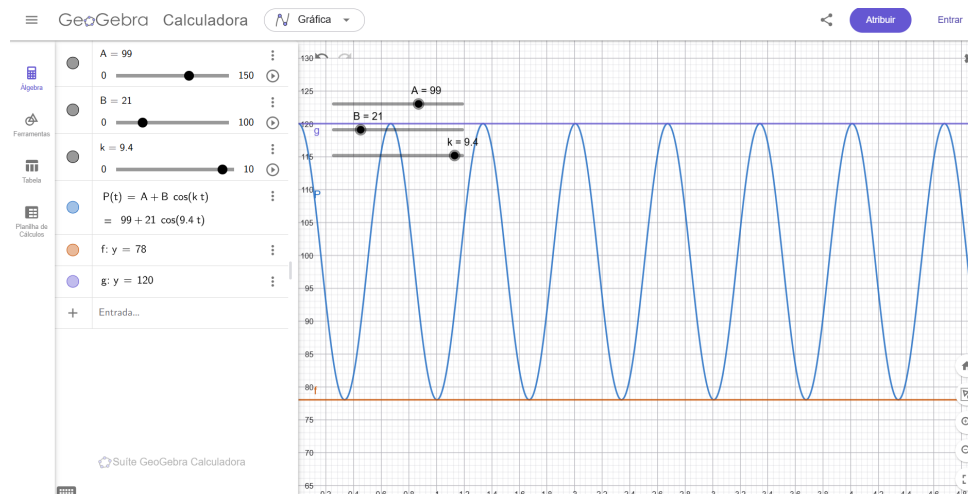
No GeoGebra, inserir:

$$P(t) = A + B \cdot \cos(k \cdot t)$$

Criar controles deslizantes:

- $A \in [0, 150]$
- $B \in [0, 100]$
- $k \in [0, 10]$

Figura 4.23 – Tela do GeoGebra: ajuste dos sliders A e B com as retas de referência 78 e 120, com ajuste do slider k até representar o período correto



Fonte: O autor.

Passo 3: Ajuste da janela gráfica

Configurar:

t: 0 até 5

P: 60 até 130

Passo 4: Inserção de referências

Inserir retas:

$y = 78$

$y = 120$

Passo 5: Exploração da média e amplitude

Solicitar aos alunos:

- Ajustar o valor de A para representar a linha média
- Ajustar o valor de B para que a função atinja os valores máximo e mínimo

Concluir que:

$$A = 99 \quad \text{e} \quad B = 21.$$

Passo 6: Investigação do período

Orientar os alunos a observar quantos ciclos ocorrem no gráfico.

Relacionar com a informação:

- 90 batimentos por minuto

Conduzir à ideia de que:

- frequência = 1,5 Hz
- período = $\frac{2}{3}$

Passo 7: Ajuste do parâmetro k

Explorar o valor de k até que o gráfico represente corretamente o período observado.

Concluir que:

$$k = 3\pi.$$

Passo 8: Construção final do modelo

Obter:

$$P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$$

Passo 9: Conclusão

A função que modela a pressão arterial é:

$$P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t).$$

4.7.3 Resolução Utilizando o Maxima

Tema: Funções trigonométricas — modelagem e análise simbólica

Objetivo: Construir e analisar uma função trigonométrica a partir de dados experimentais, utilizando o Maxima para formalizar e validar o modelo matemático.

Habilidade: Resolver problemas envolvendo funções trigonométricas, articulando interpretação de dados, manipulação algébrica e validação computacional.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere a função que modela a pressão arterial de uma pessoa ao longo do tempo.

Questão norteadora:

Como determinar a expressão da função $P(t)$ a partir dos dados de pressão mínima, máxima e frequência cardíaca?

Passo 2: Definição do modelo geral

No Maxima, definir a função geral:

$$P(t) := A + B \cdot \cos(k \cdot t);$$

Passo 3: Determinação da média

A partir dos dados:

$$A : (120 + 78) / 2;$$

Resultado:

$$A = 99.$$

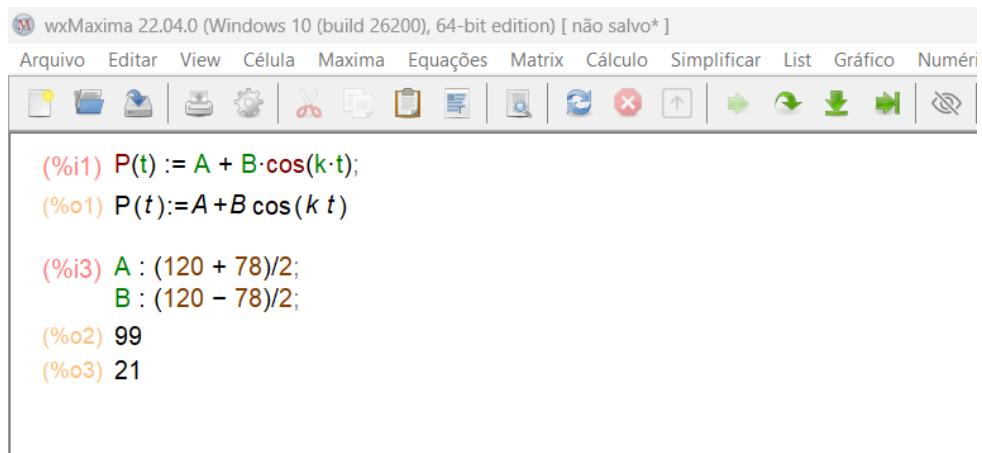
Passo 4: Determinação da amplitude

$$B : (120 - 78) / 2;$$

Resultado:

$$B = 21.$$

Figura 4.24 – Cálculo direto de A e B a partir dos dados de pressão



Fonte: O autor.

Passo 5: Determinação do período

Converter a frequência:

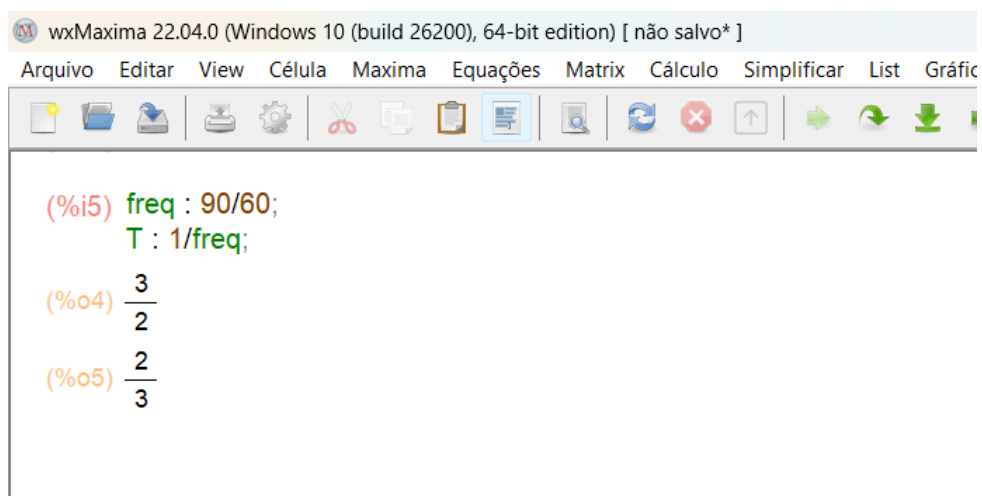
freq : 90/60;

T : 1/freq;

Resultado:

$$T = \frac{2}{3}.$$

Figura 4.25 – Conversão da frequência cardíaca em período



Fonte: O autor.

Passo 6: Determinação de k

Utilizando:

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

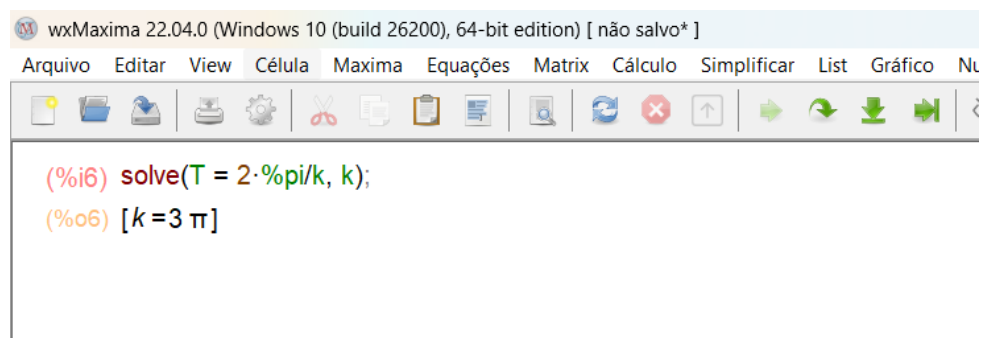
no Maxima:

```
solve(T = 2*%pi/k, k);
```

Resultado:

$$k = 3\pi.$$

Figura 4.26 – Determinação de k a partir do período T



Fonte: O autor.

Passo 7: Construção da função

```
P(t) := 99 + 21*cos(3*%pi*t);
```

Passo 8: Verificação do modelo

Testar valores extremos:

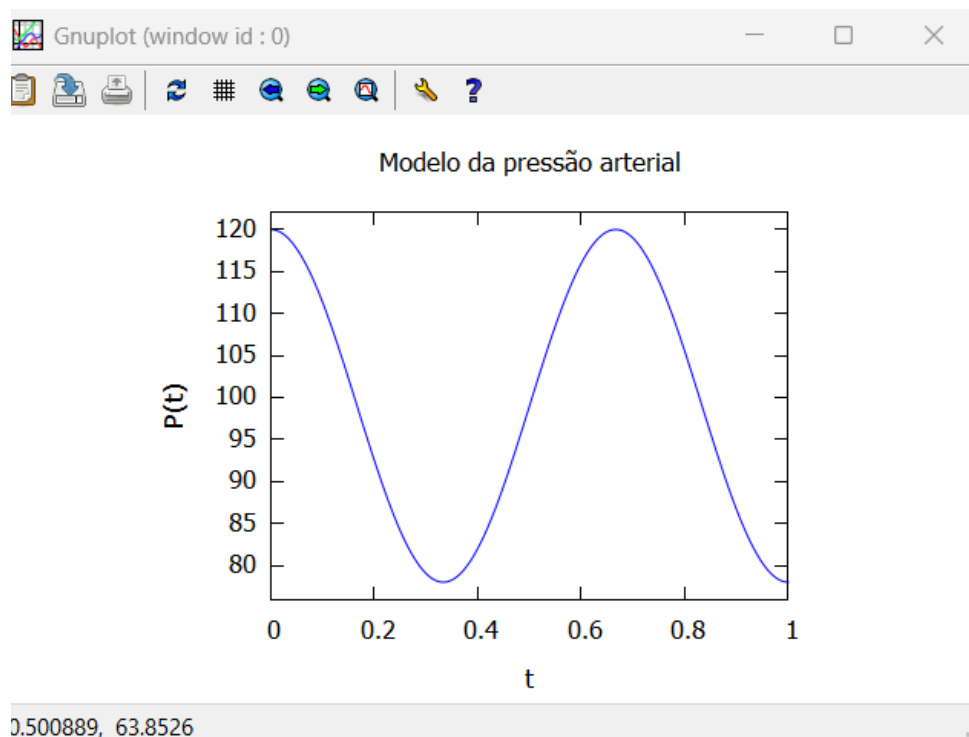
```
P(0);
```

```
P(1/(2*freq));
```

E plotar o gráfico:

```
plot2d(P(t), [t, 0, 3],
  [xlabel, "Tempo (s)"],
  [ylabel, "Pressão"],
  [title, "Modelo da pressão arterial"]);
```

Figura 4.27 – Modelo final da pressão arterial e verificação



Fonte: O autor.

Passo 9: Conclusão

A função que modela a pressão arterial é:

$$P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t).$$

4.7.4 Encaminhamento Pedagógico - Questão 166 – ENEM 2017.

O modelo $P(t) = A + B \cos(kt)$ com pressão máxima 120, mínima 78 e 90 batimentos/min. A análise fornece $A = 99$ (média), $B = 21$ (amplitude) e $k = 3\pi$ (período $2/3$ s). No **GeoGebra**, controles deslizantes para A , B e k mostram como cada parâmetro altera o gráfico: A desloca verticalmente, B controla a amplitude, k muda o período. Nogueira [23] observa que “abordar conceitos abstratos de Trigonometria com visualização dinâmica é muito mais eficaz do que apenas decorar fórmulas”.

O Maxima resolve o sistema $A + B = 120$ e $A - B = 78$ e obtém $A = 99$, $B = 21$. A partir da frequência, determina $k = 3\pi$. Alves [11] observa que o Maxima é uma linguagem que

realiza cálculos simbólicos com precisão. A mediação do professor é fundamental: perguntas como “Por que a média é a soma dos extremos dividido por dois?” consolidam o aprendizado.

A integração entre GeoGebra e Maxima é o ponto alto: o GeoGebra permite a descoberta visual; o Maxima, a validação algébrica. Como destacam as Orientações Curriculares, “o ideal é promover, sempre que possível, uma criativa articulação” entre diferentes metodologias (PERNAMBUCO, 2021, p. 192 apud Lopes, 2023, p. 23).

4.8 Questão 180 - ENEM 2015

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função

$$P(x) = 8 + 5 \cos \left(\frac{\pi x - \pi}{6} \right),$$

onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

- (A) janeiro.
- (B) abril.
- (C) junho.
- (D) julho.
- (E) outubro.

4.8.1 Resolução Analítica - Questão 180 - ENEM 2015

A função que modela o preço do produto é dada por:

$$P(x) = 8 + 5 \cos \left(\frac{\pi x - \pi}{6} \right).$$

Passo 1: Interpretação do problema

O enunciado informa que, na safra, ocorre a **produção máxima**, o que corresponde ao momento de **menor preço**, devido à maior oferta do produto.

Portanto, devemos determinar o valor de x para o qual $P(x)$ é mínimo.

Passo 2: Determinação do valor mínimo

Sabemos que:

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1.$$

Assim, o valor mínimo da função ocorre quando:

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1.$$

Passo 3: Resolução da equação trigonométrica

Resolver:

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1.$$

Sabemos que:

$$\cos(\theta) = -1 \iff \theta = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo:

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi + 2\pi k.$$

Multiplicando ambos os lados por 6:

$$\pi x - \pi = 6\pi + 12\pi k.$$

Somando π em ambos os lados:

$$\pi x = 7\pi + 12\pi k.$$

Dividindo por π :

$$x = 7 + 12k.$$

Passo 4: Determinação no intervalo do problema

Como x representa os meses do ano, temos:

$$1 \leq x \leq 12.$$

Testando valores inteiros de k :

- Para $k = 0$: $x = 7$
- Para $k = -1$: $x = -5$ (fora do intervalo)

Logo:

$$x = 7.$$

Passo 5: Interpretação do resultado

O valor $x = 7$ corresponde ao mês de julho.

Passo 6: Conclusão

O mês de produção máxima (menor preço) é:

julho.

Resposta: alternativa (D).

4.8.2 Resolução utilizando o Geogebra

Tema: Funções trigonométricas — modelagem de fenômenos sazonais

Objetivo: Analisar o comportamento de uma função trigonométrica em um contexto econômico, identificando valores máximos e mínimos a partir de sua representação gráfica.

Habilidade: Interpretar gráficos de funções trigonométricas, relacionando seus valores extremos com situações reais e identificando soluções em intervalos discretos.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere a função que modela o preço de um produto ao longo dos meses do ano:

$$P(x) = 8 + 5 \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right).$$

Questão norteadora

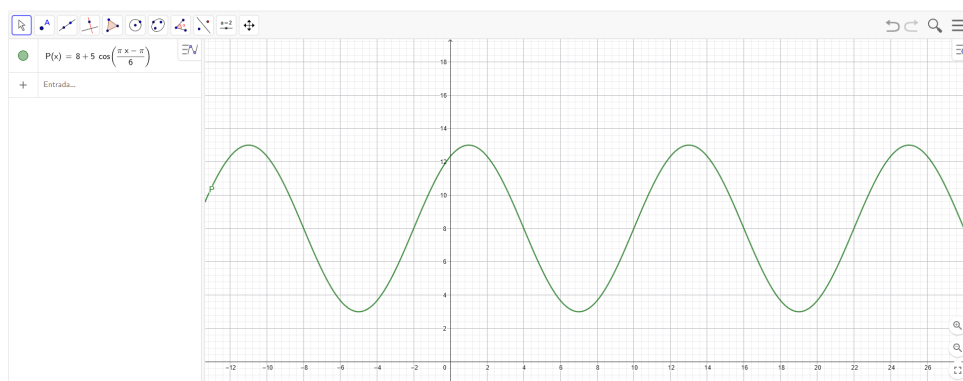
Em qual mês ocorre a produção máxima do produto?

Passo 2: Inserção da função

No GeoGebra, digite:

$$P(x) = 8 + 5 \cdot \cos((\pi \cdot x - \pi) / 6)$$

Figura 4.28 – Inserção da função no prompt do GeoGebra



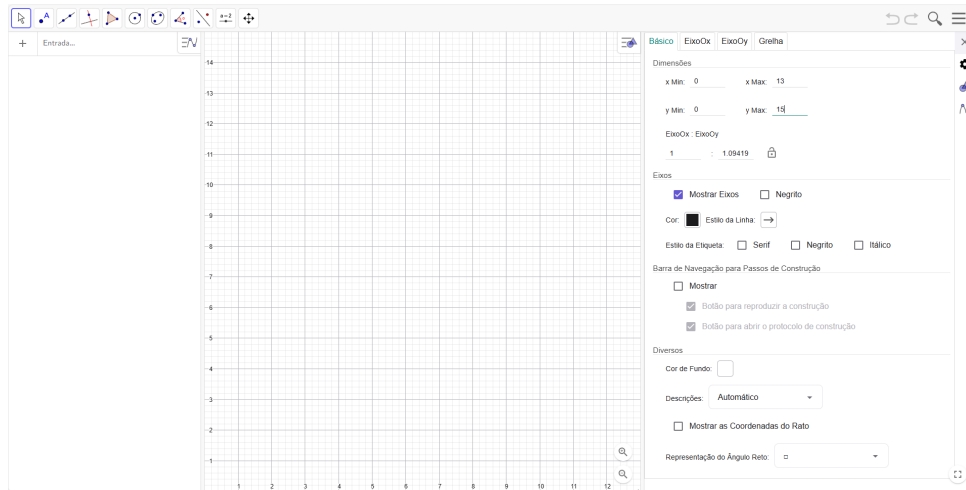
Passo 3: Ajuste da janela gráfica

Configurar:

x: 1 até 12

y: 0 até 15

Figura 4.29 – Ajuste do intervalo de pontos no GeoGebra

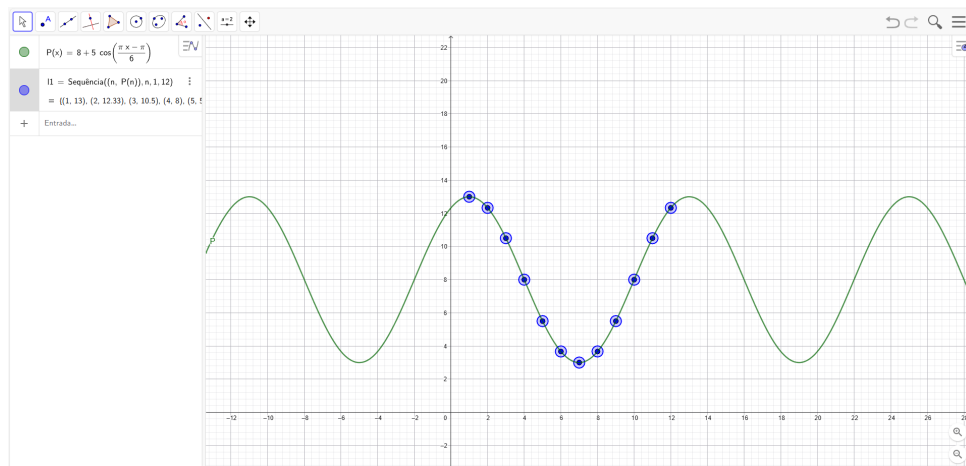


Passo 4: Marcação dos meses

Inserir pontos discretos:

`Sequence((n, P(n)), n, 1, 12)`

Figura 4.30 – Inserção do intervalo de pontos no GeoGebra



Passo 5: Identificação do valor mínimo

Solicitar aos alunos:

- Observar o ponto mais baixo do gráfico
- Identificar em qual valor de x ocorre o menor preço

Passo 6: Interpretação do contexto

Conduzir os alunos à compreensão de que:

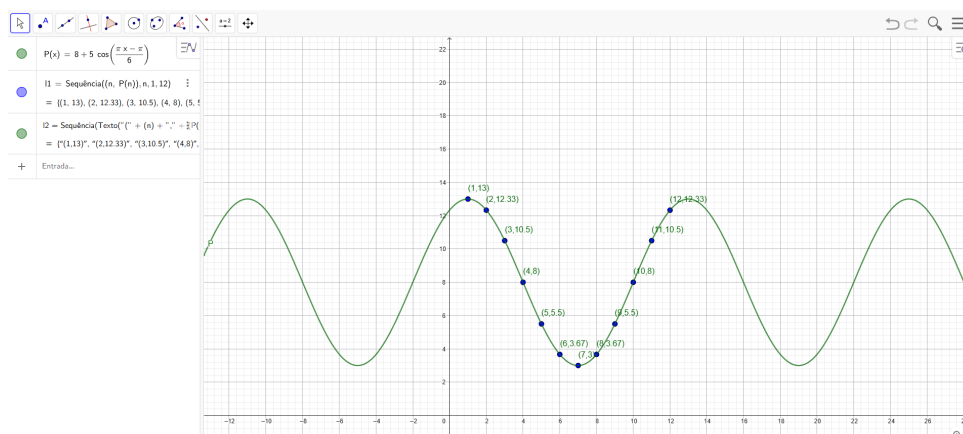
- Menor preço $\Rightarrow$ maior oferta
- Maior oferta $\Rightarrow$ produção máxima (safra)

Passo 7: Identificação do mês

Observa-se que o valor mínimo ocorre em:

$$x = 7.$$

Figura 4.31 – Visualização gráfica do ponto mínimo



Passo 8: Conclusão

O mês de produção máxima é:

julho.

4.8.3 Resolução utilizando o Maxima

Tema: Funções trigonométricas — análise simbólica de fenômenos sazonais

Objetivo: Analisar uma função trigonométrica em um contexto econômico, utilizando o Maxima para determinar valores extremos e interpretar seus significados.

Habilidade: Resolver equações trigonométricas e interpretar soluções em intervalos definidos, relacionando resultados matemáticos com situações reais.

Desenvolvimento da atividade

Passo 1: Apresentação do problema

Considere a função:

$$P(x) = 8 + 5 \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right),$$

em que x representa o mês do ano.

Questão norteadora:

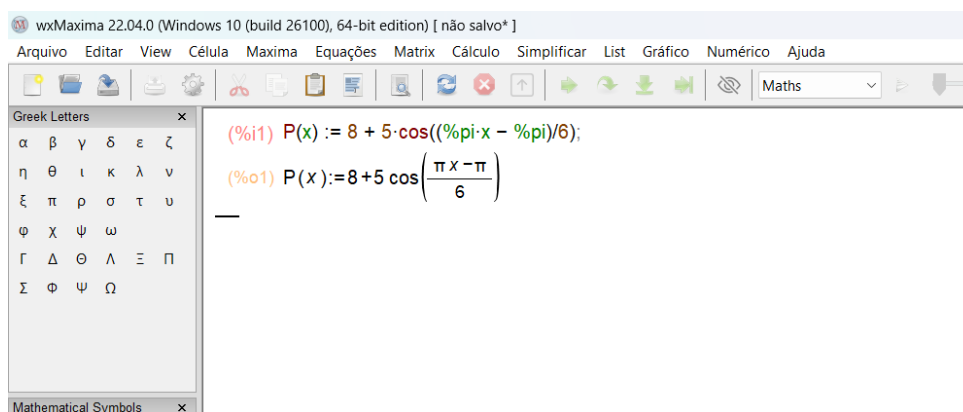
Em qual mês ocorre a produção máxima do produto?

Passo 2: Definição da função

No Maxima, digite:

```
P(x) := 8 + 5*cos((%pi*x - %pi)/6);
```

Figura 4.32 – Inserção da função no Maxima



Passo 3: Visualização do gráfico

Para observar o comportamento da função:

```
plot2d(P(x), [x, 1, 12],
      [xlabel, "Mes"],
      [ylabel, "Preco"],
      [title, "Variacao sazonal do preco"]);
```

Figura 4.33 – Visualização gráfica do ponto mínimo - Plotando os gráficos.

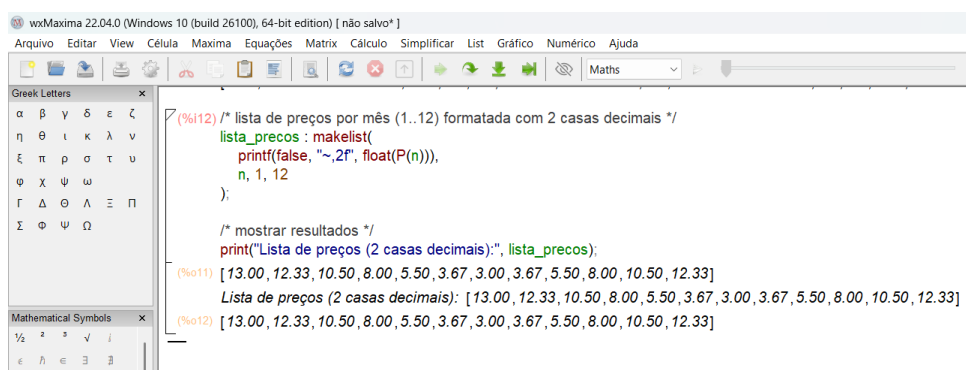
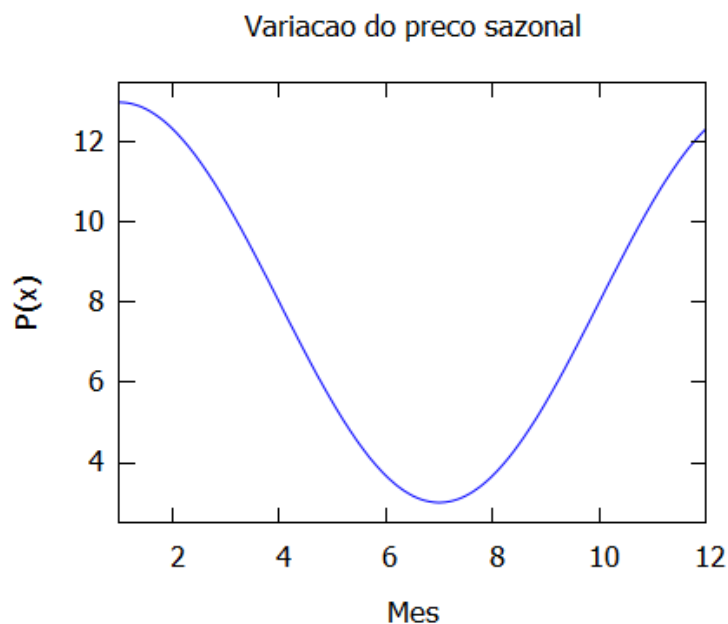


Figura 4.34 – Visualização gráfica do ponto mínimo - Visualizando o gráfico

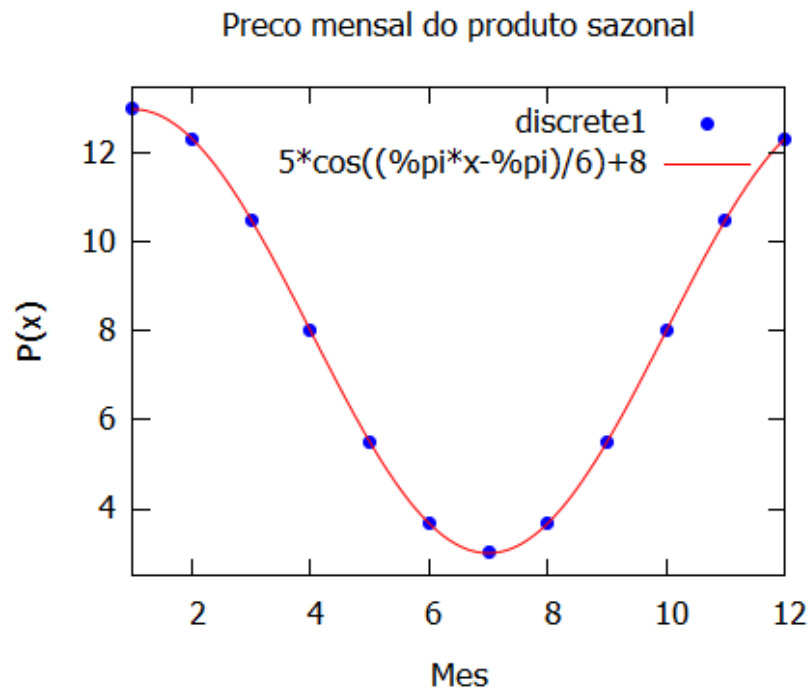


Passo 4: Determinação do valor mínimo

Sabemos que o valor mínimo ocorre quando:

$$\cos(\theta) = -1.$$

Figura 4.35 – Visualização gráfica do ponto mínimo - Visualizando o ponto mínimo



Logo, resolver:

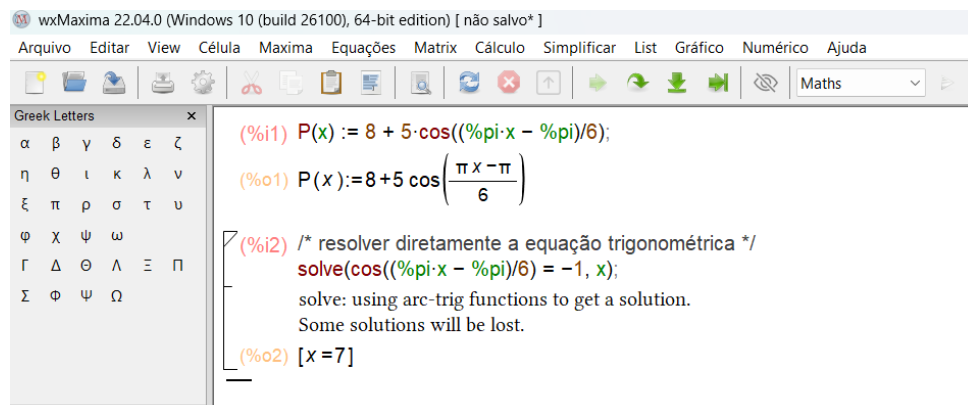
$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1.$$

Passo 5: Resolução da equação trigonométrica

No Maxima:

```
solve(cos((%pi*x - %pi)/6) = -1, x);
```

Figura 4.36 – Solução da Equação no Maxima



Interpretação da solução:

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi + 2\pi k.$$

Passo 6: Isolamento da variável

Resolver algebricamente:

```
solve((%pi*x - %pi)/6 = %pi + 2*%pi*k, x);
```

Obtém-se:

$$x = 7 + 12k.$$

Passo 7: Determinação no intervalo

Como $1 \leq x \leq 12$, testar valores inteiros de k :

```
x(k) := 7 + 12*k;
```

```
subst(k=0, x(k));
```

```
subst(k=-1, x(k));
```

Resultado válido:

$$x = 7.$$

Passo 8: Verificação do valor mínimo

No Maxima:

```
P(7);
```

Confirmando o menor valor da função.

Passo 9: Conclusão

O menor preço ocorre no mês:

julho.

4.9 Questão 180 – ENEM 2015: preço sazonal e função cosseno

A função $P(x) = 8 + 5 \cos((\pi x - \pi)/6)$ modela o preço ao longo dos meses. O mínimo ocorre quando $\cos = -1$, levando a $x = 7 + 12k$. No intervalo $1 \leq x \leq 12$, a única solução é $x = 7$ (julho).

O GeoGebra permite explorar o fenômeno de forma visual e dinâmica. Ao plotar a função e gerar os pontos discretos $(n, P(n))$, o aluno identifica imediatamente o ponto mais baixo em $x = 7$. Conforme Nogueira (2025, p. 33), o GeoGebra possibilita “abordar conceitos abstratos de Trigonometria permitindo uma visualização dinâmica [...] em vez de depender apenas de explicações teóricas”. A interação com o gráfico ajuda a entender a periodicidade anual e a relação entre preço, oferta e produção.

O Maxima complementa com o rigor algébrico. A partir da condição $\cos(\theta) = -1$, resolve a equação e obtém a solução geral $x = 7 + 12k$. O estudante testa valores inteiros de k no intervalo e confirma $x = 7$. Alves [11] destaca que o Maxima é “uma linguagem computacional que permite realizar cálculos numéricos e simbólicos, representações gráficas e efetuar programação”. A articulação entre os dois softwares favorece a intuição e a descoberta (GeoGebra) e a validação algébrica (Maxima). O professor deve mediar perguntas como “Por que o menor preço corresponde à produção máxima?” e “O que aconteceria se monitorássemos o preço por dois anos?”

4.10 Síntese das potencialidades e complementaridades

As seis questões analisadas mostram que a integração entre resolução analítica, GeoGebra e Maxima potencializa a aprendizagem de funções trigonométricas. O GeoGebra favorece a intuição e a descoberta; o Maxima consolida a formalização e a generalização; a álgebra tradicional desenvolve o raciocínio lógico. O professor, como mediador, pode escolher a sequência mais adequada para sua turma, respeitando diferentes estilos de aprendizagem. Essa articulação está em sintonia com a BNCC e com as recomendações curriculares, que enfatizam o uso crítico de tecnologias digitais para a investigação e modelagem matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, investigamos o potencial dos softwares GeoGebra e Maxima como ferramentas complementares no ensino de funções trigonométricas, com foco em questões do ENEM. Analisamos um conjunto de questões dos últimos dez anos, aplicamos três abordagens distintas, resolução analítica tradicional, exploração visual com GeoGebra e manipulação simbólica com Maxima, e estruturamos uma sequência didática que integra esses três caminhos. Os resultados obtidos revelam uma verdadeira complementaridade entre os programas, em que cada um potencializa o outro na construção do conhecimento matemático.

A análise das seis questões evidenciou que a resolução analítica tradicional é indispensável para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo e para a compreensão profunda das propriedades das funções trigonométricas. Contudo, sua principal limitação reside na dificuldade de visualização e na abstração exigida para compreender o efeito dos parâmetros sobre o gráfico. O GeoGebra preenche exatamente essa lacuna: ao permitir a manipulação dinâmica de controles deslizantes, o estudante observa, em tempo real, como cada parâmetro altera amplitude, período, fase e deslocamento vertical. Essa experiência visual reduz a abstração e torna o conteúdo mais acessível, especialmente para alunos com maior inclinação para aprendizagem visual. O Maxima, por sua vez, consolida a formalização: sua capacidade de manipulação simbólica permite resolver equações de forma exata, generalizar soluções e validar algebricamente as conjecturas formuladas a partir da observação gráfica. Dessa forma, o GeoGebra ajuda o aluno a ver o fenômeno, enquanto o Maxima o ajuda a provar matematicamente o que foi visto.

Essa complementaridade fica evidente na comparação sintetizada na Tabela 1, que resume as principais características de cada abordagem.

A análise da tabela evidencia que nenhum dos métodos é superior em todos os aspectos. A resolução analítica é insubstituível para o desenvolvimento do raciocínio lógico, mas peca pela falta de visualização. O GeoGebra revela seu maior potencial justamente onde a abordagem tradicional mostra sua fragilidade: ao deslocar um ponto sobre a circunferência trigonométrica e acompanhar a construção simultânea do gráfico correspondente, o aluno percebe, literalmente com os olhos, a relação entre o ângulo e as funções seno, cosseno e tangente. Essa experiência sensorial reduz a abstração e torna o conteúdo mais acessível. Já o Maxima se destaca nos momentos em que a precisão algébrica é indispensável, como na determinação do parâmetro

Tabela 5.1 – Comparação entre as abordagens tradicional, GeoGebra e Maxima

Aspecto	Resolução analítica	GeoGebra	Maxima
Foco principal	Raciocínio dedutivo, manipulação de equações	Visualização dinâmica, experimentação	Cálculo simbólico, precisão algébrica
Facilidade de uso	Depende do domínio prévio da álgebra	Intuitiva, interface amigável	Curva de aprendizado mais íngreme (comandos)
Visualização	Limitada (apenas gráficos manuais)	Excelente; gráficos interativos em tempo real	Geração de gráficos estáticos com alta precisão; animações possíveis, porém menos amigáveis
Tratamento de equações	Passo a passo completo, sujeito a erros humanos	Permite resolução numérica e simbólica (CAS); útil para verificação	Resolve simbolicamente, fornecendo soluções exatas e gerais
Contextualização	Depende da habilidade do aluno em interpretar texto	Favorece a associação entre fenômeno real e gráfico	Útil para validar modelos e generalizar resultados
Tempo de resolução	Variável (pode ser alto em problemas complexos)	Rápido para análise qualitativa	Muito rápido após domínio da sintaxe
Papel do professor	Mediador do método, corretor de procedimentos	Mediador de conjecturas, orientador da exploração	Facilitador da linguagem algébrica, intérprete de resultados simbólicos

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos resultados da pesquisa.

β no movimento do pistão, fornecendo a solução geral e eliminando erros de arredondamento comuns em calculadoras convencionais.

5.1 A dimensão da lógica de programação: contribuições dos Apêndices H e I

Além da complementaridade entre visualização dinâmica e cálculo simbólico, este trabalho revelou uma terceira dimensão de análise: a possibilidade de resolver a mesma questão do ENEM por meio de lógica de programação, tanto no GeoGebra quanto no Maxima. Essa frente de investigação surgiu da constatação, discutida na Fundamentação Teórica, de que o pensamento computacional engloba estratégias de decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e design de algoritmos aplicáveis a qualquer conteúdo matemático.

No Apêndice H, a Questão 180 (ENEM 2015) foi resolvida por uma busca linear percorrendo os doze preços mensais até localizar o valor mínimo. No GeoGebra, essa busca foi implementada de forma declarativa, com os comandos `Mínimo` e `ÍndiceDe` operando sobre uma lista de dados; no Maxima, a mesma lógica foi construída de forma imperativa, com um laço `for` e uma condicional `if` escritos pelo próprio usuário. Essa contraposição entre paradigmas evidencia que a escolha da ferramenta molda a maneira como o aluno enxerga o problema, seja delegando o processo ao software, seja explicitando cada etapa da decisão algorítmica.

O Apêndice I aprofundou essa investigação ao implementar a mesma busca como um script dinâmico executado por um botão no GeoGebra. A trajetória até esse resultado, marcada por limitações do GGBScript e pela migração para JavaScript, revelou que o GeoGebra comporta um ambiente de programação interativo capaz de dialogar com uma linguagem externa consolidada. Essa possibilidade amplia o potencial do software para além do ensino de trigonometria, aproximando a disciplina de Matemática das competências de pensamento computacional previstas no complemento à BNCC. Para o professor, esses apêndices sugerem um caminho pedagógico adicional: após consolidada a compreensão do conteúdo pelas vias analítica, visual e simbólica, é possível propor aos alunos o desafio de programar o próprio algoritmo de resolução, transformando o conteúdo em uma porta de entrada para o letramento computacional.

5.2 Limitações e desafios enfrentados

Apesar dos resultados positivos, algumas limitações precisam ser registradas. A falta de infraestrutura adequada em muitas escolas públicas pode inviabilizar o uso dos softwares, o que reforça a necessidade de políticas públicas que garantam acesso a laboratórios de informática.

Além disso, tanto o GeoGebra quanto o Maxima exigem tempo de familiarização inicial; o Maxima, em particular, com sua sintaxe em inglês e comandos específicos, apresenta uma curva de aprendizado mais íngreme, o que demandaria suporte intenso do professor. Essa dificuldade ficou evidente na elaboração dos apêndices: rodar os comandos do Maxima exigiu memorizar uma sintaxe própria (`solve`, `subst`, `plot2d`, entre outros), algo que um aluno do Ensino Médio sem contato prévio com programação dificilmente conseguiria fazer sozinho. No GeoGebra, a manipulação de sliders e a construção geométrica seguem uma lógica mais intuitiva. Contudo, é importante ressaltar que esta pesquisa não envolveu uma aplicação prática com alunos; as considerações sobre dificuldades são hipotéticas, baseadas na análise das ferramentas e na literatura consultada.

Outra limitação foi a impossibilidade de aplicar a sequência didática de forma extensiva em múltiplas turmas, o que restringe a generalização dos resultados. Contudo, os indícios são suficientemente fortes para recomendar o uso integrado dos softwares.

5.3 Sugestões para trabalhos futuros

Como desdobramento natural desta pesquisa, sugerem-se as seguintes possibilidades para trabalhos futuros:

- Aplicar a sequência didática proposta em um número maior de escolas, com a devida aprovação do comitê de ética, incluindo a validação estatística dos resultados.
- Desenvolver materiais de apoio específicos para o Maxima com comandos traduzidos e exemplos focados em trigonometria, para reduzir a barreira linguística.
- Investigar o impacto do uso combinado dos softwares na retenção de longo prazo dos conceitos trigonométricos.
- Adaptar as atividades para dispositivos móveis, aproveitando a versão mobile do GeoGebra e possíveis interfaces do Maxima para tablets, ampliando o acesso em escolas com infraestrutura limitada.

5.4 Conclusão

Este trabalho reafirmou que o ensino de funções trigonométricas pode ser significativamente enriquecido com o uso criterioso de tecnologias. O GeoGebra e o Maxima não são concorrentes, mas parceiros em um processo que valoriza tanto a intuição quanto o rigor. O professor continua sendo o elemento central, pois é ele quem escolhe quando e como usar cada ferramenta, quem cria as perguntas desafiadoras e quem ajuda o aluno a dar sentido aos gráficos e às expressões algébricas.

Esperamos que este estudo incentive mais professores a experimentar essas ferramentas em suas aulas, adaptando-as às realidades de suas turmas. A matemática, quando bem mediada, deixa de ser um obstáculo intransponível e se transforma numa linguagem viva que descreve o mundo ao nosso redor, desde o movimento de um pistão até a oscilação dos preços de uma safra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SILVA, J. *Análise do desempenho brasileiro no PISA 2022*. Brasília: INEP, 2025.
- [2] REZENDE, A.; PESCO, S.; BORTOLOSSI, H. *Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação no ensino de matemática*. São Paulo: Editora da USP, 2012.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.
- [4] NOGUEIRA, A.; BRAGA, M.; DE SÁ, P. *Visualização e geometria dinâmica no ensino de matemática*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2018.
- [5] MOURA, A.; SANTOS, J.; SILVA, R. *Múltiplas representações e ensino de matemática*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2016.
- [6] ANDRADE, M. *Metodologia científica: fundamentos e técnicas*. São Paulo: Atlas, 2014.
- [7] INEP. *Microdados do ENEM - Provas e Gabaritos 2015-2025*. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep>>. Acesso em: 25 mar. 2026.
- [8] GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, A. *Sistemas de computação algébrica no ensino de matemática*. Campinas: Editora UNICAMP, 2012.
- [9] OLIVEIRA, F. *Software Maxima no ensino de matemática*. Recife: Editora UFPE, 2013.
- [10] BRAGA, M.; NOGUEIRA, A. *Geometria dinâmica: potencialidades e limites*. São Paulo: Livraria da Física, 2017.
- [11] ALVES, L. *Maxima: linguagem computacional e aplicações matemáticas*. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2018.
- [12] VAZ, C. *Software livre e educação matemática*. Brasília: Editora UnB, 2016.
- [13] SOUZA, M. *Maxima no ensino de funções quadráticas*. Curitiba: Editora UFPR, 2025.
- [14] WING, J. M. Computational thinking. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

- [15] BRASIL. Ministério da Educação. *Computação na Educação Básica - Complemento à BNCC*. Brasília: MEC, 2022.
- [16] MACEDO, L.; ALVES, R. *Pensamento computacional na educação básica*. Brasília: Editora UnB, 2025.
- [17] ABAR, C.; ALMEIDA, M. *GeoGebra e pensamento computacional*. São Paulo: Editora PUC-SP, 2024.
- [18] GEOGEBRA. *Software de matemática dinâmica*. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 25 mar. 2026.
- [19] MAXIMA. *Sistema de álgebra computacional*. Disponível em: <https://maxima.sourceforge.io>. Acesso em: 25 mar. 2026.
- [20] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2000.
- [21] LOPES, A. *Orientações curriculares e ensino de trigonometria*. São Paulo: Editora USP, 2023.
- [22] DANTAS, G. *GeoGebra no ensino de funções trigonométricas*. Natal: Editora UFRN, 2015.
- [23] NOGUEIRA, A. *Visualização dinâmica em trigonometria*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2025.
- [24] BRAZ, R.; CASTRO, A.; OLIVEIRA, T. *Geometria dinâmica com GeoGebra*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2019.
- [25] GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, A. Recursos computacionais para o ensino de matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Matemática*, v. 10, n. 2, p. 201-215, 2012.
- [26] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).
Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem>. Acesso em: 26 mar. 2026.

A APÊNDICE A - SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO O MAXIMA - FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E SUAS INVERSAS

Sequência Didática utilizando o Maxima - Funções Trigonômétricas e suas inversas: Explorando recursos computacionais como o software Maxima

Patrick Corrêa do Santos

Universidade Federal de Lavras – PROFMAT/UFLA, Lavras, MG

Planejamento da sequência didática

Público-alvo

Alunos do 2º ou 3º ano do Ensino Médio que já tenham tido contato prévio com as noções básicas de trigonometria (razões trigonométricas no triângulo retângulo e ciclo trigonométrico).

Número de aulas e duração

A sequência foi planejada para ser desenvolvida em **4 aulas**, cada uma com duração de **50 minutos** (total de 200 minutos). Caso o professor disponha de laboratório de informática, as aulas poderão ser realizadas em dois encontros de 100 minutos.

Objetivos gerais

- Compreender o papel dos parâmetros a , b , c e d na função $f(x) = a + b\cos(cx + d)$.
- Utilizar o software Maxima para calcular valores exatos e aproximados de funções trigonométricas.
- Interpretar e construir gráficos de funções trigonométricas com o auxílio do Maxima.
- Relacionar a representação algébrica com a representação gráfica de funções cosseno e seno.

- Desenvolver habilidades de investigação e validação de conjecturas por meio da computação simbólica.

Recursos necessários

- Computador com o software Maxima instalado (versão 5.47.0 ou superior, com interface wxMaxima).
- Projetor para demonstração (opcional, caso o professor queira mediar coletivamente).
- Acesso à internet (apenas para download do software, caso não esteja instalado previamente).

Estrutura da sequência

A sequência está organizada em cinco momentos, que podem ser distribuídos ao longo das aulas conforme o ritmo da turma:

1. Definição e primeiros comandos no Maxima.
2. Cálculo de valores numéricos e racionalização.
3. Construção e análise de gráficos (seno, cosseno, tangente).
4. Exploração dos parâmetros da função cosseno.
5. Integração com GeoGebra e desafio final (aplicação em problema do ENEM).

Introdução

Os ângulos de um triângulo retângulo estão relacionados aos seus lados por meio das três funções trigonométricas principais: seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tan). Em uma função como

$$f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$$

os parâmetros a, b, c, d determinam, respectivamente, a amplitude, o período, o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal, modificando assim sua representação gráfica. Neste roteiro de aula exploraremos os parâmetros com o auxílio do software Maxima.

Definindo as funções trigonométricas básicas

Figura A.1 – Declarando as funções no Maxima

```
→ f(x):= sin(x);
   g(x):= cos(x);
   h(x):= tan(x);
```

Encontrando os Valores numéricos

Figura A.2 – Valores Numéricos

```
→ /* Definindo o ângulo em radianos */
   teta: %pi/6; /* Exemplo para 30° */

   /* Calculando seno, cosseno e tangente */
   f(teta);
   g(teta);
   h(teta);
```

Tabela A.1 – Tabela de ângulos notáveis (para completar).

Ângulo	$\text{sen}(\theta)$	$\text{cos}(\theta)$	$\text{tan}(\theta)$
$0^\circ (0)$			
$30^\circ (\frac{\pi}{6})$			
$45^\circ (\frac{\pi}{4})$			
$60^\circ (\frac{\pi}{3})$			
$90^\circ (\frac{\pi}{2})$			

Validando com o Maxima

Utilizando os comandos do Maxima, calcule os valores exatos de $\text{sen}(30^\circ)$, $\text{cos}(60^\circ)$, $\text{tan}(45^\circ)$ etc. Compare com os valores que você preencheu na tabela. Em seguida, obtenha os valores decimais com o comando `float(...)`. Registre as diferenças e observe quando o Maxima retorna expressões com radicais.

Valores em decimais

Figura A.3 – Valores Numéricos

→ **`float(f(teta));`**
`float(g(teta));`
`float(h(teta));`

Racionalizando Denominadores

`ratsimp(expr)` → simplifica frações e racionaliza denominadores.

`radcan(expr)` → simplifica radicais, combina raízes semelhantes e racionaliza denominadores.

Figura A.4 – Racionalização de Denominadores

→ **`ratsimp(tan(%pi/6));`**
`radcan(tan(%pi/6));`

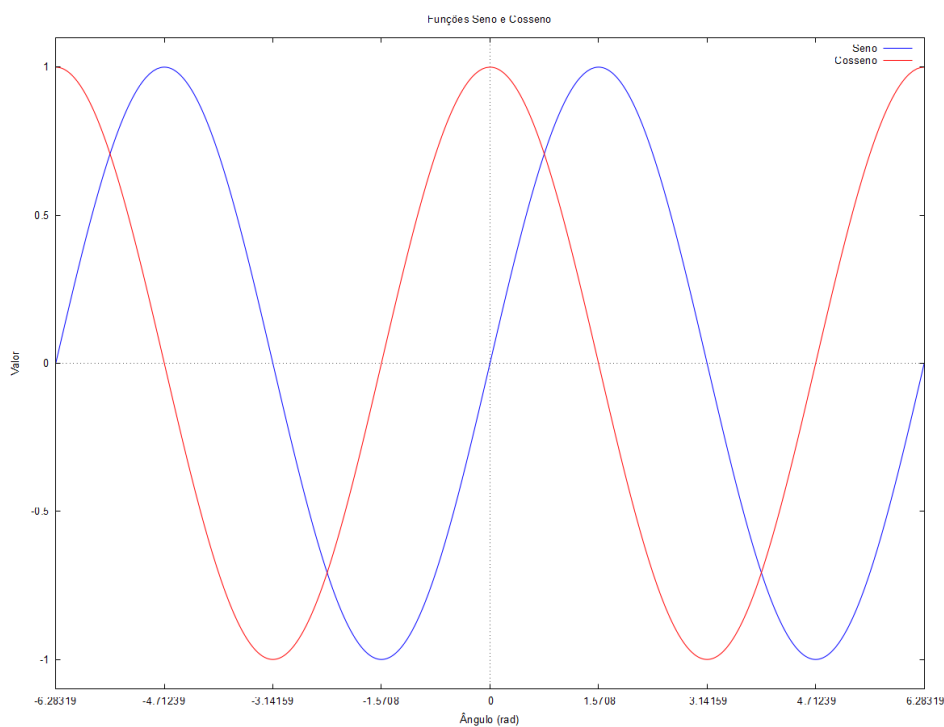
Analizando Gráficos

Comparando Gráfico do Seno e Cosseno

Figura A.5 – Seno vs Cosseno

```
→ wxplot2d([sin(x), cos(x)], [x, -2·%pi, 2·%pi],
            [legend, "Seno", "Cosseno"],
            [xlabel, "Ângulo (rad)"],
            [ylabel, "Valor"],
            [title, "Funções Seno e Cosseno"],
            [xticks, -2·%pi, %pi/2, 2·%pi]);
```

Figura A.6 – Gráfico Seno vs Cosseno



Seno vs Cosseno - Alterando o eixo x para radianos

Figura A.7 – Seno vs Cosseno em Radianos

```
→ wxplot2d([f(x),g(x)], [x, -2*%pi, 2*%pi],
            [legend, "Seno", "Cosseno"],
            [xlabel, "Ângulo (rad)"],
            [ylabel, "Valor"],
            [title, "Funções Trigonométricas"],
            [gnuplot_preamble, "
set xtics ('-2π' -6.2832, '-π' -3.1416, '0' 0, 'π' 3.1416, '2π' 6.2832)
set grid
"]);
```

Figura A.8 – Seno vs Cosseno

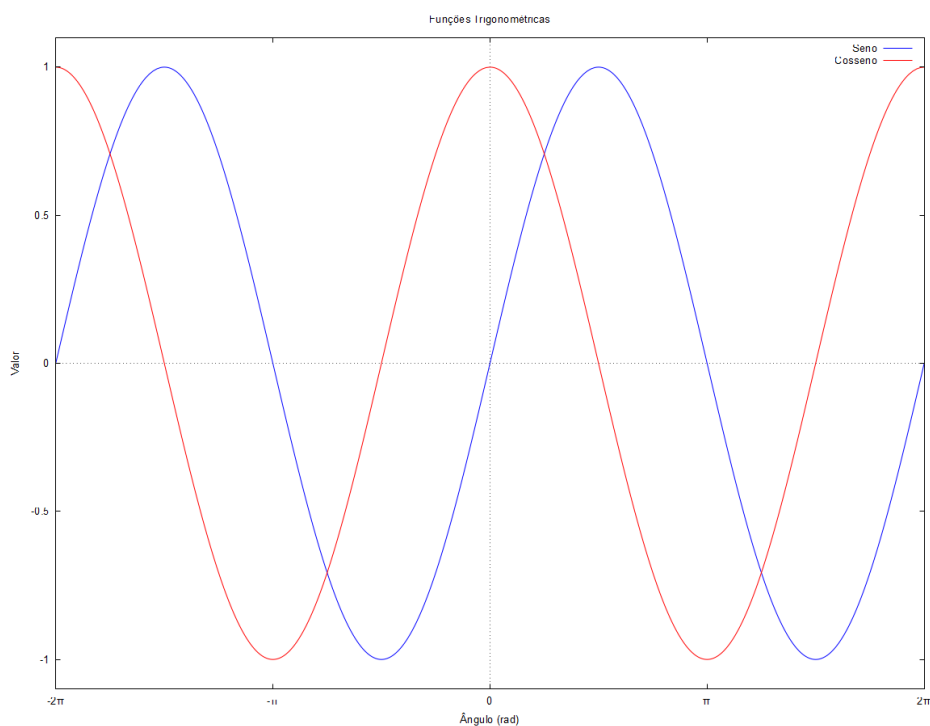


Gráfico da Tangente

Figura A.9 – Comando Tangente

```
wxplot2d(tan(x), [x, -2*%pi, 2*%pi], [y, -5, 5],
          [title, "Função Tangente"],
          [gnuplot_preamble, "set grid"]);
```

Figura A.10 – Tangente

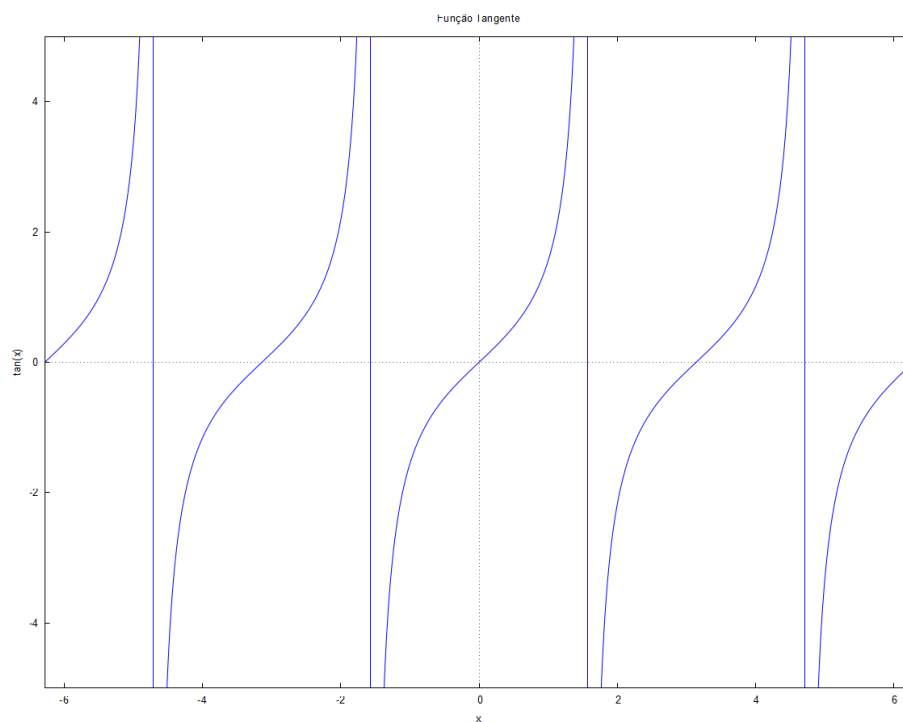


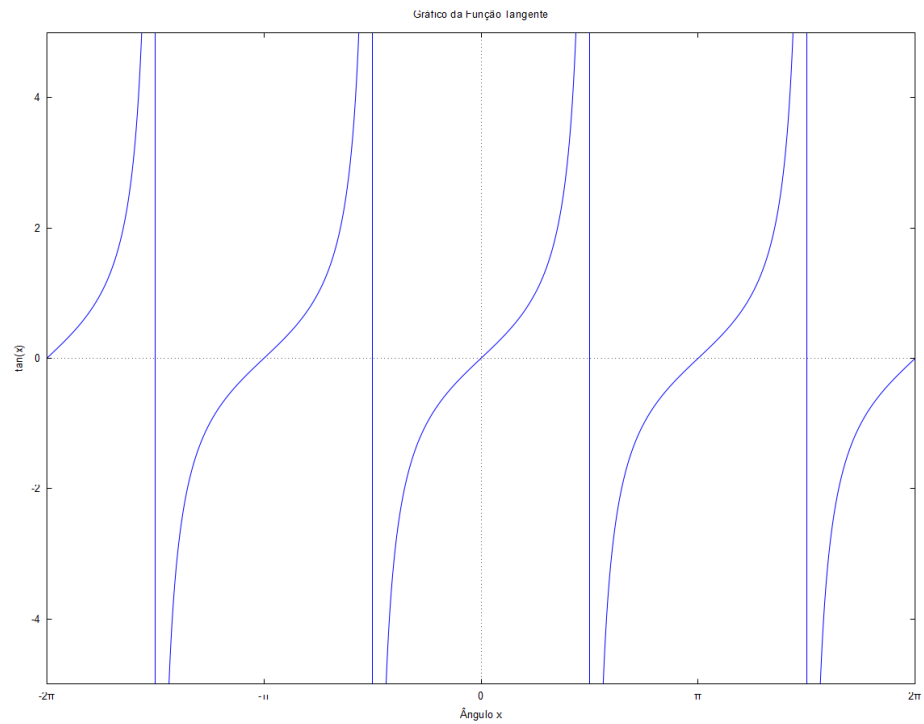
Figura A.11 – Comando Tangente em Radianos

```

wxplot2d(tan(x), [x, -2*%pi, 2*%pi], [y, -5, 5],
          [title, "Gráfico da Função Tangente"],
          [xlabel, "Ângulo x"],
          [ylabel, "tan(x)"],
          [gnuplot_preamble, "
set xtics ('-2π' -6.28, '-π' -3.14, '0' 0, 'π' 3.14, '2π' 6.28)
set grid
"]);

```

Figura A.12 – Tangente em Radianos



Parâmetros das Funções

$$f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$$

Informando os parâmetros

Figura A.13 – Comandos para informar os parâmetros

```
→ "=== EXPLORADOR DE PARÂMETROS:  $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$  ===";

"Digite valor para a (deslocamento vertical):";
a: read("Exemplo: 1");

"Digite valor para b (amplitude):";
b: read("Exemplo: 2");

"Digite valor para c (frequência):";
c: read("Exemplo: 3");

"Digite valor para d (deslocamento de fase):";
d: read("Exemplo: %pi/4");

wxplot2d([funcao_base, funcao_parametrizada],
         [x, -2·%pi, 2·%pi], [y, -5, 5]);
```

Figura A.14 – Informações apresentadas pelo aluno

```
/* Mostrando informações dos parâmetros */
print("=== ANÁLISE DOS PARÂMETROS ===");
print("a =", a, "→ Deslocamento vertical (eixo y)");
print("b =", b, "→ Amplitude (metade da altura da onda)");
print("c =", c, "→ Frequência (", c/(2·%pi), "Hz)");
print("d =", d, "→ Deslocamento de fase (horizontal)");
print("Período da função =", 2·%pi/abs(c));
```

Atividade exploratória – o papel de cada parâmetro

Antes de usar o Maxima, reúna-se com um colega e discuta:

- O que você acha que acontece com o gráfico da função $f(x) = a + b \cos(cx + d)$ quando aumentamos o valor de a ? E quando diminuímos?

- O que o parâmetro b representa graficamente? E c ? E d ?

- Anote suas hipóteses aqui: _____

Agora, com o auxílio do Maxima, vamos testar suas conjecturas.

Para cada um dos casos abaixo, utilize o Maxima para plotar as funções e responda:

1. Fixe $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ e varie a de -3 a 3 . O que acontece com o gráfico?
2. Fixe $a = 0$, $c = 1$, $d = 0$ e varie b de $0,5$ a 3 . O que representa b ?
3. Fixe $a = 0$, $b = 1$, $d = 0$ e varie c (ex.: $0,5$, 1 , 2). Como o período é afetado?
4. Fixe $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e varie d (ex.: 0 , $\pi/2$, π). O que ocorre com o gráfico?

Anote suas conclusões em uma tabela como a abaixo:

Tabela A.2 – Conclusões sobre os parâmetros.

Parâmetro	Efeito no gráfico	Efeito na fórmula
a	deslocamento vertical	
b		
c		
d		

Atividades utilizando os parâmetros das funções trigonométricas

Exemplo 1: Função base $f_1(x) = \cos x$ e vamos comparar com $f_2(x) = 2 \cos x$.

Exemplo 2: Função base $f_1(x) = \cos x$ e vamos comparar com $f_3(x) = 2 + \cos x$.

Exemplo 3: Função base $f_1(x) = \cos x$ e vamos comparar com $f_2(x) = 2 + 2 \cos x$.

Comparando com o GeoGebra

Abra o GeoGebra e crie controles deslizantes para a , b , c , d . Defina a função $f(x) = a + b \cos(cx + d)$.

- Movimente os controles e observe as mudanças no gráfico em tempo real.
- Compare as suas conclusões obtidas no Maxima com o que você vê no GeoGebra.
- Qual dos dois softwares você achou mais intuitivo para explorar os parâmetros? Por quê?

Desafio: modelando um fenômeno real

Uma roda-gigante tem raio de 80 m e seu centro está a 88 m do solo. A função que descreve a altura de uma cadeira em função do ângulo é $h(t) = 80\sin(t) + 88$.

1. Use o Maxima para calcular a altura quando $t = \frac{\pi}{2}$ e quando $t = \frac{3\pi}{2}$.
2. Use o GeoGebra para plotar o gráfico e identificar o valor máximo e mínimo.
3. Explique, com suas palavras, como os parâmetros 80 e 88 aparecem no gráfico.
4. Compare com a função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$ (ENEM 2015). Qual é o papel dos parâmetros nesse modelo?

B APÊNDICE B —SEQUÊNCIA DIDÁTICA: MODELAGEM DE MARÉS COM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Descobrimos as Marés com Matemática

Uma aventura investigativa usando análise, GeoGebra e Maxima

Patrick Corrêa do Santos

Universidade Federal de Lavras – PROFMAT/UFLA, Lavras, MG

Planejamento da sequência didática

Público-alvo

Alunos do 2º ou 3º ano do Ensino Médio com noções básicas de trigonometria (seno, cosseno, período, amplitude).

Número de aulas e duração

2 aulas de 50 minutos cada (100 minutos), preferencialmente no laboratório de informática.

Objetivos

- Compreender como funções seno modelam fenômenos periódicos reais (marés).
- Resolver inequações trigonométricas de forma analítica, visual e simbólica.
- Utilizar o GeoGebra para explorar e validar hipóteses graficamente.
- Utilizar o Maxima para obter soluções exatas e generalizadas.
- Refletir sobre as vantagens de cada abordagem e escolher a mais adequada para diferentes situações.

Materiais

- Computadores com GeoGebra e Maxima instalados (ou acesso online).
 - Folhas de atividades (incluindo as tabelas abaixo).
 - Projetor para discussão coletiva (opcional).
-

Problema motivador: "Salvando o navio"

Você é o capitão de um navio cargueiro. O porto tem marés que variam segundo a função:

$$h(t) = 10 + 4 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right),$$

onde h é a altura da água (em metros) e t as horas após meia-noite (0 a 24). Seu navio precisa de pelo menos 12 metros de profundidade para não encalhar. Durante quantas horas você pode ficar atracado com segurança?

Antes de começar – suas hipóteses

Preencha a tabela com seu palpite inicial (sem usar os softwares ainda):

Tabela B.1 – Registro de hipóteses iniciais

Pergunta	Sua resposta (palpite)
Qual o período da maré? (quantas horas entre duas marés altas consecutivas?)	
Qual a altura máxima da água? E a mínima?	
Em qual(is) horário(s) a água atinge exatamente 12 m?	
Entre quais horas a profundidade é suficiente?	

Primeira abordagem: investigação analítica (lápis e papel)

Passo 1 – Organizando a inequação

Sabemos que $h(t) \geq 12$. Escreva a inequação e simplifique:

$$10 + 4 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \geq 12 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Passo 2 – Lembrando o círculo trigonométrico

Complete a tabela com os ângulos em que $\sin \theta = 1/2$:

Tabela B.2 – Soluções da equação $\sin \theta = 1/2$ no primeiro período

θ (radianos)	θ (graus)	$\sin \theta$
$\pi/6$	30°	$1/2$
$5\pi/6$	150°	$1/2$

Passo 3 – Resolvendo a inequação

Sabemos que $\sin \theta \geq 1/2$ ocorre entre esses ângulos. Escreva a solução geral:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Substitua $\theta = \frac{\pi t}{12}$ e isole t :

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi t}{12} \leq \frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad 2 \leq t \leq 10.$$

Passo 4 – Interpretação

Qual o significado físico do intervalo encontrado? O navio pode ficar atracado das 2h às 10h, ou seja, por 8 horas.

Verificação rápida

Teste $t = 2$ e $t = 10$ na função original. Eles realmente dão 12 metros? Por quê?

Segunda abordagem: explorando com o GeoGebra

Agora vamos visualizar a situação e testar nossas hipóteses.

Passo 1 – Construindo o modelo

Abra o GeoGebra e digite:

$$h(t) = 10 + 4 \cdot \sin(\pi \cdot t / 12)$$

Ajuste a janela para $0 \leq t \leq 24$ e $0 \leq y \leq 16$.

Passo 2 – Adicionando referências

Insira a reta que representa a profundidade mínima:

$$y = 12$$

Passo 3 – Encontrando as interseções

Use a ferramenta de interseção: clique em "Interseção de dois objetos", depois na função e na reta. Anote os valores:

Tabela B.3 – Interseções obtidas no GeoGebra

Ponto de interseção	Valor de t
A	2
B	10

Passo 4 – Respondendo à pergunta inicial

Observando o gráfico, a função fica acima da reta entre os pontos A e B. Portanto, o intervalo é $[2, 10]$, ou seja, das 2h às 10h.

Pergunta reflexiva

Por que no GeoGebra não precisamos resolver a inequação? O que ganhamos com essa visualização?

Terceira abordagem: validando com o Maxima

Agora usaremos o Maxima para confirmar algebricamente e generalizar.

Passo 1 – Definindo a função

```
h(t) := 10 + 4*sen(%pi*t/12);
```

Passo 2 – Resolvendo a equação

```
solve(h(t) = 12, t);
```

O Maxima retorna:

$$t = 2 \quad \text{e} \quad t = 10.$$

Passo 3 – Resolvendo a inequação

```
solve(h(t) >= 12, t);
```

O software mostra a solução geral: $2 \leq t \leq 10$.

Passo 4 – Plotando o gráfico

```
plot2d(h(t), [t, 0, 24], [y, 0, 16]);
```

Pergunta reflexiva

Qual a vantagem do Maxima em relação à resolução analítica manual? Em que situações ele é mais útil?

Conclusão – Integrando as abordagens

Preencha a tabela comparativa abaixo, discutindo com seus colegas:

Tabela B.4 – Comparando as três formas de resolver

Abordagem	Ponto forte	Ponto fraco / desafio
Analítica (lápis e papel)		
GeoGebra		
Maxima		

Desafio extra (para casa)

Um novo porto tem função de maré $h(t) = 8 + 5 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$. Determine o período, a amplitude e o intervalo de tempo em que a profundidade é superior a 10,5 m. Use as três abordagens (analítica, GeoGebra, Maxima). Registre suas descobertas em um pequeno relatório.

Respostas para o professor (não aparecem na versão do aluno)

- Período da maré: $T = \frac{2\pi}{\pi/12} = 24$ horas.
- Altura máxima: $10 + 4 = 14$ m; mínima: $10 - 4 = 6$ m.
- Interseções: $t = 2$ e $t = 10$ (exatos).
- Intervalo seguro: das 2 às 10 horas.
- O desafio extra: amplitude 5, período 12 horas, intervalo: resolvendo $\cos(\pi t/6) \geq 0.1 \rightarrow$ aproximadamente entre 0,6 e 5,4 horas (simétrico em torno de 3).

C APÊNDICE C — QUESTÃO 160 (ENEM 2025): FUNÇÃO TANGENTE E MODELAGEM DE UM RECIPIENTE

Contextualização

A questão exige a construção da função $D(T) = 30 + \tan\left[\frac{1}{2}(T - 2,5)\right]$, obtida a partir da leitura de um gráfico com assíntotas verticais e um ponto de inflexão conhecido. Diferentemente das demais questões selecionadas, que partem de fenômenos com comportamento oscilatório limitado (seno e cosseno), esta envolve a função tangente, cujo domínio restrito e crescimento ilimitado nas proximidades das assíntotas colocam desafios particulares tanto para a leitura gráfica quanto para o tratamento algébrico.

Resolução Utilizando o GeoGebra

Passo 1 — Controles deslizantes

$$k = 30$$

$$p = 0,5$$

$$m = -2,5$$

Passo 2 — Inserção da função

$$D(T) = k + \tan(p \cdot (T + m))$$

Passo 3 — Pontos de referência

$$A = (0, 0)$$

$$B = (2,5, 30)$$

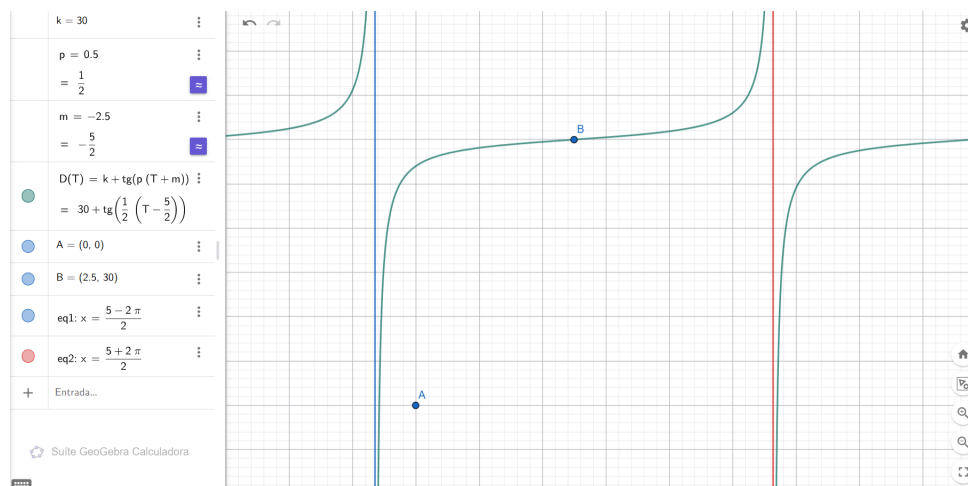
Passo 4 — Assíntotas verticais

$$x = (5 - 2 \cdot \pi) / 2$$

$$x = (5 + 2 \cdot \pi) / 2$$

Dica para professores: Vale inserir a função com k , p e m ainda genéricos e deixar a turma ajustar os sliders até "descobrir" os valores certos, em vez de já entregar a função pronta no quadro. O processo de tentativa costuma prender mais a atenção do que a fórmula final copiada direto.

Figura C.1 – Tela do GeoGebra: construção da função com os controles deslizantes k , p e m , com visualização das assíntotas e dos pontos A e B



Fonte: O autor.

Resultado encontrado: a construção no GeoGebra reproduz a função $D(T) = 30 + \tan\left[\frac{1}{2}(T - 2,5)\right]$ obtida na resolução analítica (Seção 4.1.2). As assíntotas aparecem exatamente nos pontos calculados algebricamente, $T = (5 - 2\pi)/2$ e $T = (5 + 2\pi)/2$, o que bate com a alternativa (E).

Resolução Utilizando o Maxima

Nota: No Maxima, cada entrada de comando é representada por %i (input) e cada saída por %o (output). Após digitar o comando, é preciso pressionar Shift + Enter para executá-lo e visualizar o resultado na tela.

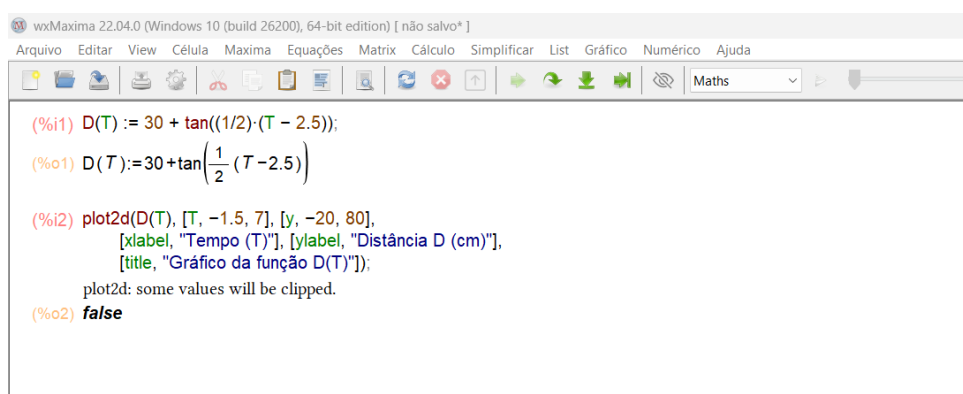
Célula 1 — Definir a função

```
D(T) := 30 + tan((1/2)*(T - 2.5));
```

Célula 2 — Gráfico

```
plot2d(D(T), [T, -1.5, 7], [y, -20, 80],
  [xlabel, "Tempo (T)"], [ylabel, "Distância D (cm)"],
  [title, "Gráfico da função D(T)"]);
```

Figura C.2 – Comandos de entrada e saída no Maxima

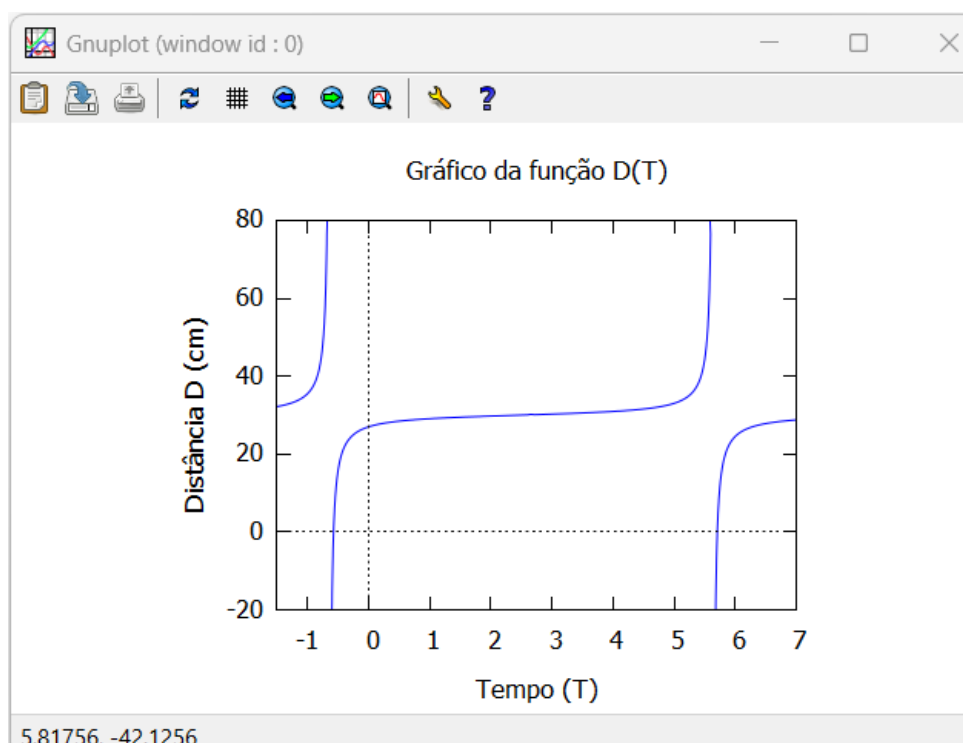


Fonte: O autor.

Nota: Ao rodar o comando `plot2d`, o Maxima pode exibir o aviso "plot2d: some values will be clipped." e devolver `(%o) false` logo abaixo. Isso não é um erro. O aviso aparece porque o eixo y foi limitado entre -20 e 80 , e a curva é cortada de propósito nesse intervalo para não ficar ilegível perto das assíntotas. Já o `false` é apenas o valor de retorno padrão do comando `plot2d`, sem significado matemático — o gráfico em si abre normalmente em uma janela separada.

Nota: o intervalo de plotagem foi ampliado para $[-1,5, 7]$ (em vez de $[0, 4]$) para que as duas assíntotas apareçam na tela. No intervalo original elas ficam fora do domínio plotado, e a curva sai só como um trecho suave.

Figura C.3 – Gráfico gerado pelo comando plot2d



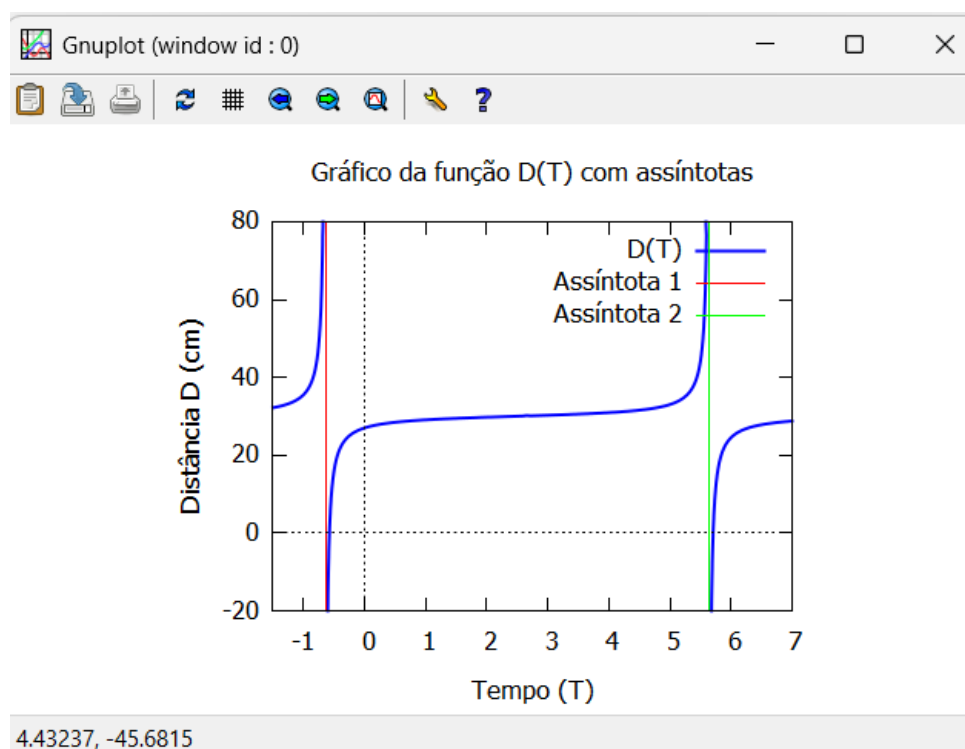
Fonte: O autor.

Nota: Embora a curva já revele indiretamente onde estão as assíntotas (pelo comportamento próximo a $T \approx -0,64$ e $T \approx 5,64$), é possível desenhá-las como linhas verticais explícitas no gráfico, deixando o resultado mais próximo do que já foi construído no GeoGebra e mais claro para quem for consultar o apêndice.

Célula 3 — Gráfico com as assíntotas desenhadas explicitamente

```
plot2d([D(T),
      [parametric, (5-2*pi)/2, s, [s, -20, 80]],
      [parametric, (5+2*pi)/2, s, [s, -20, 80]]],
      [T, -1.5, 7], [y, -20, 80],
      [xlabel, "Tempo (T)", [ylabel, "Distância D (cm)"]],
      [title, "Gráfico da função D(T) com assíntotas"],
      [style, [lines,2], [lines,1], [lines,1]],
      [legend, "D(T)", "Assíntota 1", "Assíntota 2"]);
```

Figura C.4 – Gráfico gerado no Maxima com as assíntotas desenhadas explicitamente



Fonte: O autor.

Célula 4 — Valores pontuais

$D(0);$

$D(2.5);$

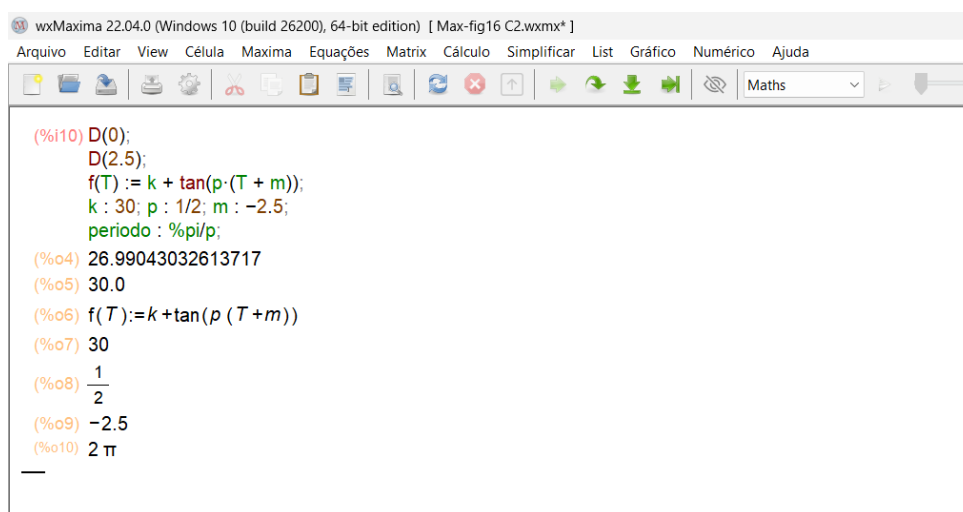
Célula 5 — Parâmetros e período

$f(T) := k + \tan(p \cdot (T + m));$

$k : 30; p : 1/2; m : -2.5;$

$\text{período} : \%pi/p;$

Dica para professores: Separar o gráfico (Células 2 e 3) dos valores numéricos (Células 4 e 5) em comandos distintos ajuda o aluno a associar cada saída ao comando que a gerou. Numa apresentação ou aula, rodar tudo de uma vez só deixa a leitura mais confusa.

Figura C.5 – Valores calculados de $D(0)$, $D(2,5)$ e do período

Fonte: O autor.

Resultado encontrado: o período calculado (`periodo : %pi/p`) e os valores de $D(0)$ e $D(2,5)$ reproduzem os mesmos números usados na construção da função. Isso valida algebricamente a expressão da resolução analítica, alternativa (E).

Análise Comparativa: GeoGebra e Maxima na Questão 160

A construção desta questão no GeoGebra depende quase inteiramente da manipulação dos controles deslizantes k , p e m . É movendo esses valores que o aluno percebe, na prática, o efeito de cada parâmetro sobre o gráfico: m desloca a curva, p altera a inclinação e o período, k move a curva verticalmente. Essa é uma vantagem real do software para esta questão específica, porque a função tangente tem um comportamento perto das assíntotas que é difícil de imaginar só olhando a fórmula.

Já o Maxima serve para confirmar o que foi visto no gráfico. Os valores de $D(0)$ e $D(2,5)$, por exemplo, podem parecer corretos visualmente, mas só o cálculo simbólico garante que estão certos, sem depender da escala usada na tela. O mesmo vale para o período: o comando `periodo : %pi/p` devolve um valor exato, que o GeoGebra sozinho não oferece com a mesma precisão.

Na prática, esta questão mostra bem o papel de cada ferramenta: o GeoGebra ajuda o aluno a entender por que a função se comporta daquele jeito perto das assíntotas, e o Maxima garante que os números encontrados estão certos. Um professor que use só o GeoGebra corre o

risco de deixar tudo no campo do "parece que"; quem usa só o Maxima perde a construção da intuição geométrica que vem antes do cálculo.

D APÊNDICE D — QUESTÃO 142 (ENEM 2023): TEMPERATURA NA ESTUFA E FUNÇÃO SENO

Contextualização

A questão modela a temperatura de uma estufa por $T(x) = 20 - 10 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, $0 \leq x \leq 24$, e pergunta quantas vezes a temperatura mínima ocorre nesse intervalo. Trata-se de um problema de contagem de soluções de uma equação trigonométrica em um domínio limitado, uma tarefa em que a leitura gráfica e a resolução algébrica tendem a se apoiar mutuamente.

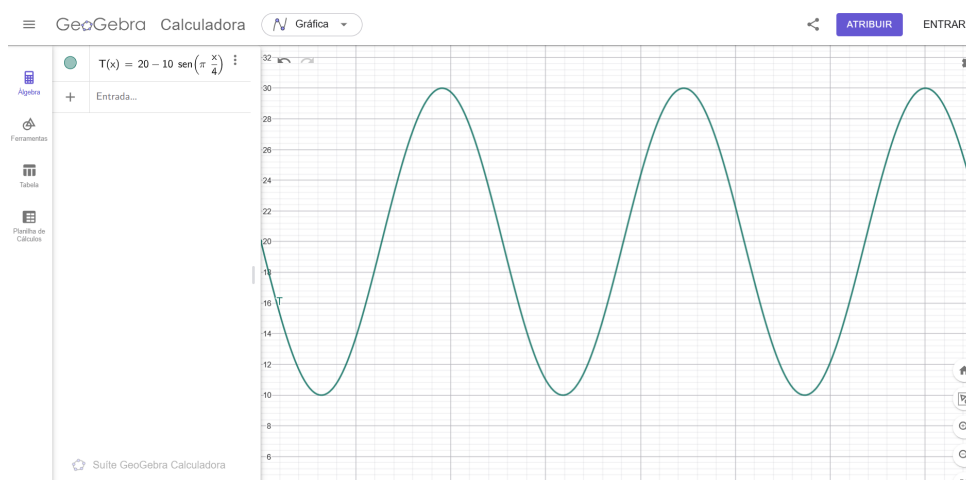
Resolução Utilizando o GeoGebra

Passo 1 — Inserção da função

$$T(x) = 20 - 10 \cdot \sin(\pi \cdot x / 4)$$

Janela gráfica ajustada para x : 0 a 24; y : 0 a 30.

Figura D.1 – Inserindo a função



Fonte: O autor.

Passo 2 — Generalização com parâmetros

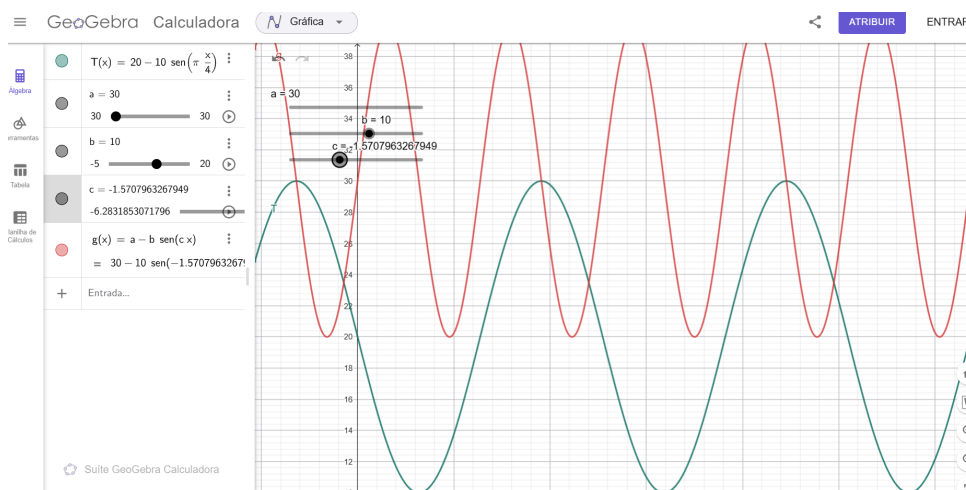
$$T(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x)$$

Variação de a , b e c para observar o efeito de cada parâmetro isoladamente.

Dica para professores: Antes de revelar a resposta (três mínimos), vale pedir que os alunos contem em voz alta olhando só o gráfico, e depois comparar com o resultado exato do

Maxima. Esse contraste entre "o que eu contei" e "o que a álgebra confirma" costuma render boa discussão em sala.

Figura D.2 – Tela do GeoGebra: gráfico de $T(x)$ no intervalo $[0, 24]$ com os três mínimos visíveis, com exploração dos parâmetros a , b e c



Fonte: O autor.

Ela deve aparecer sobreposta à curva de $T(x)$, coincidindo exatamente (já que $a=20$, $b=10$, $c=\pi/4$ são os mesmos valores).

Passo 3 — Ver os sliders na tela

Depois de criados, os três (a , b , c) aparecem na Janela de Álgebra. Clique na bolinha colorida ao lado de cada um para garantir que estão visíveis como controles deslizantes na tela do gráfico (às vezes eles ficam ocultos por padrão nessa versão Calculadora).

Passo 4 — Explorar

Arraste o slider de cada parâmetro, um de cada vez, e observe:

- $a \rightarrow$ desloca a curva toda para cima/baixo (é a "linha média" da temperatura)
- $b \rightarrow$ estica ou encolhe a amplitude (a distância entre pico e vale)
- $c \rightarrow$ aperta ou alarga a curva no eixo x (muda o período/quantos ciclos cabem no intervalo)

Resultado encontrado: a contagem visual no GeoGebra mostra três mínimos da função $T(x)$ no intervalo $[0, 24]$. É o mesmo resultado da resolução analítica (Seção 4.1.3), alternativa (B).

Resolução Utilizando o Maxima

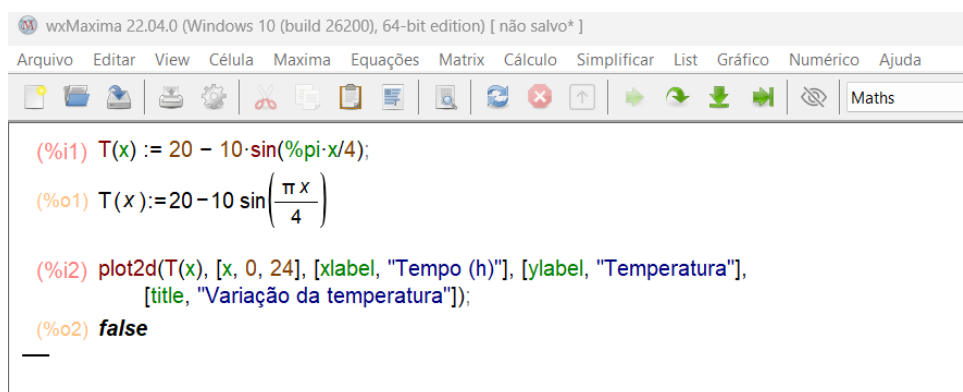
Célula 1 — Definir a função

```
T(x) := 20 - 10*sen(%pi*x/4);
```

Célula 2 — Gráfico

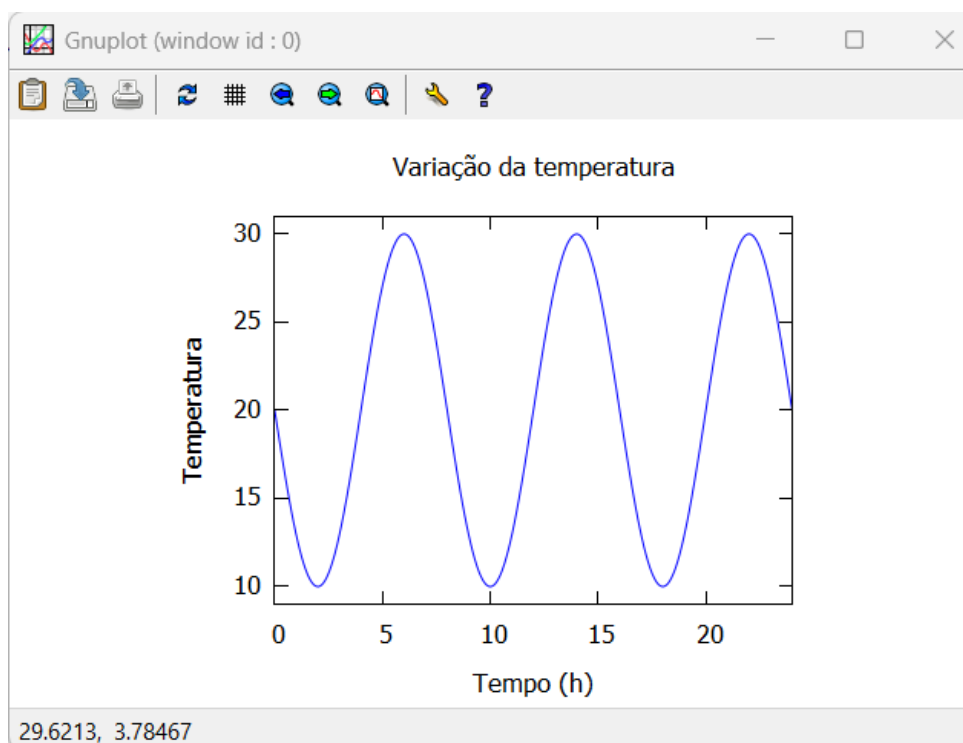
```
plot2d(T(x), [x, 0, 24], [xlabel, "Tempo (h)", ylabel, "Temperatura"],
[title, "Variação da temperatura"]);
```

Figura D.3 – Comandos na interface do Maxima



Fonte: O autor.

Figura D.4 – Gráfico gerado no Maxima



Fonte: O autor.

Célula 3 — Resolver a equação do mínimo

```
min_val : 20 - 10*1;
solve(sen(%pi*x/4) = 1, x);
```

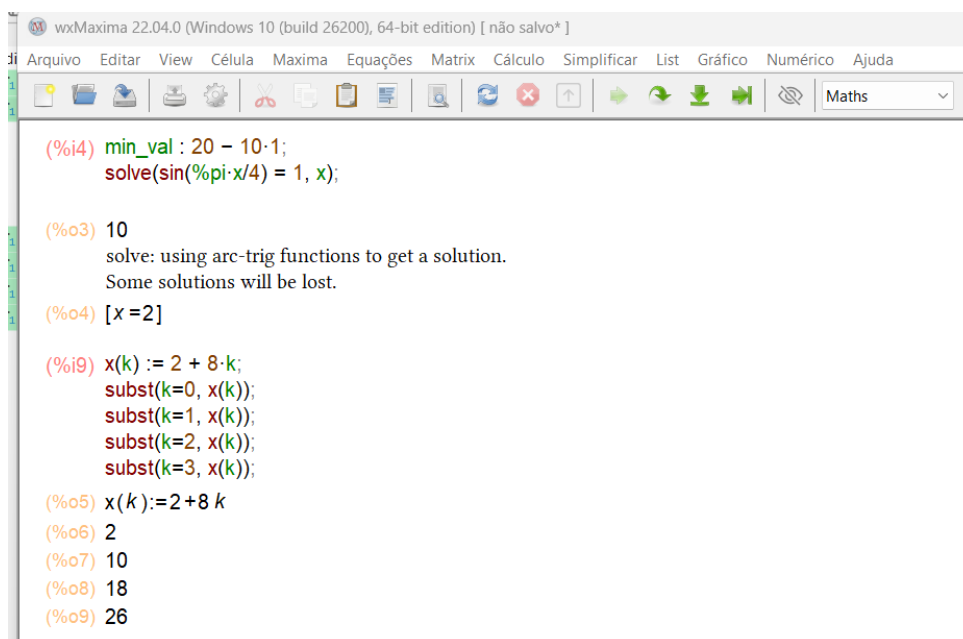
Nota: Ao rodar o comando `solve(sen(%pi*x/4) = 1, x)`, o Maxima retorna apenas uma solução ($x = 2$) e exibe o aviso "solve: useng arc-trig functions to get a solution. Some solutions will be lost." Isso não é um erro: como a função seno é periódica, existem infinitas soluções para essa equação, e o comando `solve` devolve apenas o valor principal (a primeira solução encontrada pela função inversa do arco-seno), descartando as demais. É por isso que, na sequência, se define a fórmula geral $x(k) = 2 + 8k$ e se testam manualmente os valores de k (0, 1, 2, 3) para recuperar todas as soluções dentro do intervalo do problema. Entre os quatro valores obtidos ($x = 2, 10, 18, 26$), apenas $x = 2$, $x = 10$ e $x = 18$ pertencem ao intervalo $[0, 24]$ do enunciado; $x = 26$ fica fora do domínio e deve ser descartado.

Célula 4 — Testar os valores de k no intervalo

```
x(k) := 2 + 8*k;
subst(k=0, x(k));
subst(k=1, x(k));
subst(k=2, x(k));
subst(k=3, x(k));
```

Dica para professores: A Célula 4 é um bom momento para pausar e perguntar à turma quantos valores de k ainda vão "caber" dentro de $0 \leq x \leq 24$ antes de rodar a próxima substituição. Isso transforma o comando em uma pequena previsão, não só em uma saída de tela.

Figura D.5 – Saída do comando solve e das substituições de k



```
(%i4) min_val : 20 - 10*1;
      solve(sin(%pi*x/4) = 1, x);

(%o3) 10
      solve: using arc-trig functions to get a solution.
      Some solutions will be lost.

(%o4) [x=2]

(%i9) x(k) := 2 + 8*k;
      subst(k=0, x(k));
      subst(k=1, x(k));
      subst(k=2, x(k));
      subst(k=3, x(k));

(%o5) x(k):=2+8 k
(%o6) 2
(%o7) 10
(%o8) 18
(%o9) 26
```

Fonte: O autor.

Resultado encontrado: a solução geral do comando `solve`, testada para $k = 0, 1, 2$, devolve os instantes $x = 2, 10, 18$. São os mesmos valores calculados na resolução analítica, alternativa (B).

Análise Comparativa: GeoGebra e Maxima na Questão 142

Contar os pontos mínimos direto no gráfico do GeoGebra funciona bem nesta questão. No intervalo de 0 a 24, os três vales aparecem claros na tela, e essa contagem visual já daria a resposta certa sem precisar de mais nada. É um dos casos em que o software resolve o problema quase sozinho.

O risco dessa abordagem é confiar demais no que se vê. Se os mínimos estivessem mais próximos, ou se o intervalo fosse maior, contar visualmente ficaria mais complicado e sujeito a erro. O Maxima resolve isso de outro jeito: o comando `solve` devolve a expressão geral da equação $\sin(\pi x/4) = 1$, e testar os valores de k um a um mostra exatamente quais soluções caem dentro do intervalo pedido, sem depender da visualização gráfica

Esta questão deixa claro que contar no gráfico é rápido, mas não é prova de nada. O cálculo simbólico do Maxima transforma uma observação em uma resposta que pode ser justificada passo a passo, o que importa bastante quando se pensa no que o ENEM cobra do aluno em termos de raciocínio, não só de resposta certa.

E APÊNDICE E — QUESTÃO 177 (ENEM 2019): MOVIMENTO DO PISTÃO E O PARÂMETRO β

Contextualização

A questão pede o menor valor inteiro de β para que $h(t) = 4 + 4 \sin\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ atinja o valor 6 três vezes antes de $t = 4$. Diferentemente das demais, aqui o próprio parâmetro da função é a incógnita, o que exige testar diferentes configurações até encontrar a que satisfaz a condição do enunciado, tornando esta talvez a questão mais propícia à exploração por tentativa e ajuste.

Resolução Utilizando o GeoGebra

Passo 1 — Controle deslizante

```
beta=Slider(1,10,1)
```

```
h(t)=4+4*sen((beta*t)/2-pi/2)
```

Passo 2 — Janela gráfica e referências

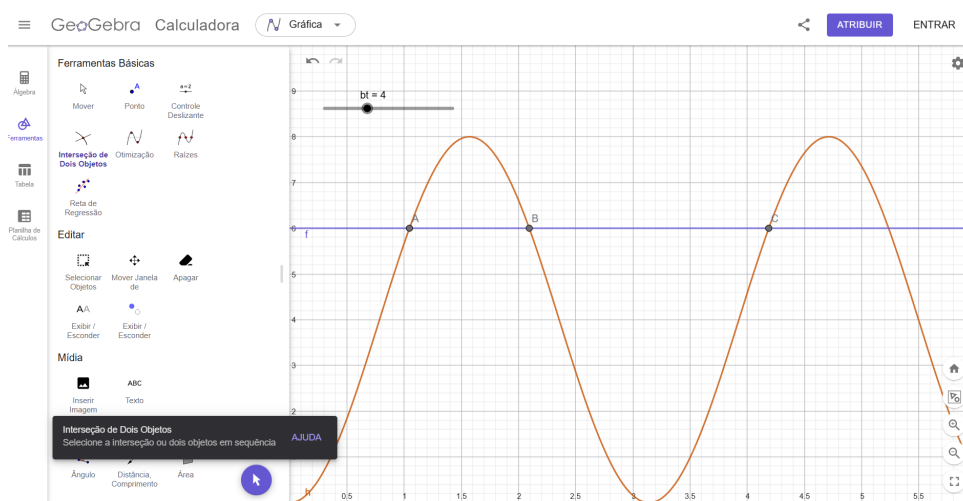
Ajuste a janela pela engrenagem: x Mín = 0, x Máx = 6, y Mín = 0, y Máx = 10.

```
y=6
```

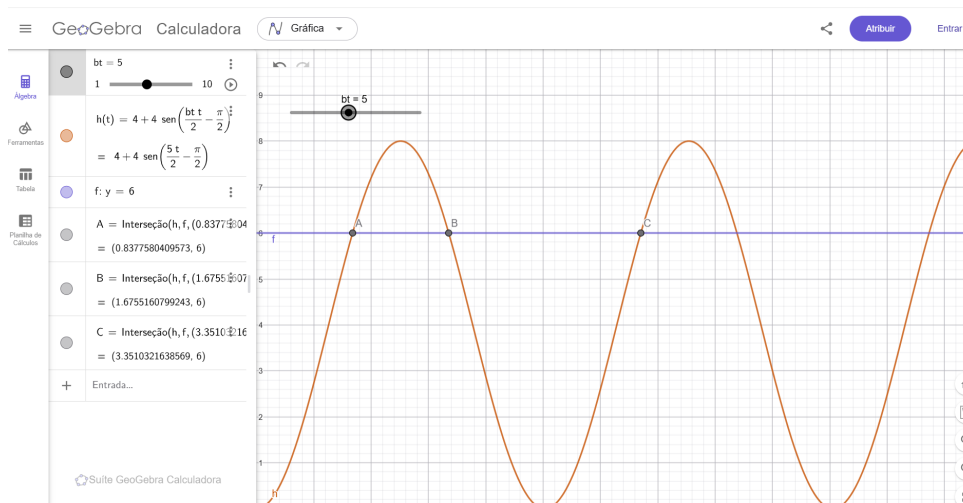
```
Interseção(h,f_1)
```

Dica para professores: Peça aos alunos que anotem, para cada valor inteiro de β testado no slider (1, 2, 3, 4...), quantas interseções aparecem antes de $t = 4$. Montar essa pequena tabela na mão, junto com a exploração visual, prepara o terreno para entender de onde vem a fórmula geral que aparece depois no Maxima.

Figura E.1 – Utilizando a ferramenta interseção



Fonte: O autor.

Figura E.2 – Tela do GeoGebra: gráfico com β variando e a reta $y = 6$, com pontos de interseção destacados para $\beta = 5$ 

Fonte: O autor.

Nota: O comando $\text{Interseção}(h, f)$, sem parâmetro adicional, retorna apenas um ponto de interseção entre a curva e a reta. Como o objetivo é visualizar as três interseções previstas na resolução analítica para $\beta = 5$, é necessário repetir o comando indicando qual interseção buscar: $\text{Interseção}(h, f, 1)$, $\text{Interseção}(h, f, 2)$ e $\text{Interseção}(h, f, 3)$, que retornam, respectivamente, a primeira, a segunda e a terceira interseção dentro da janela visível.

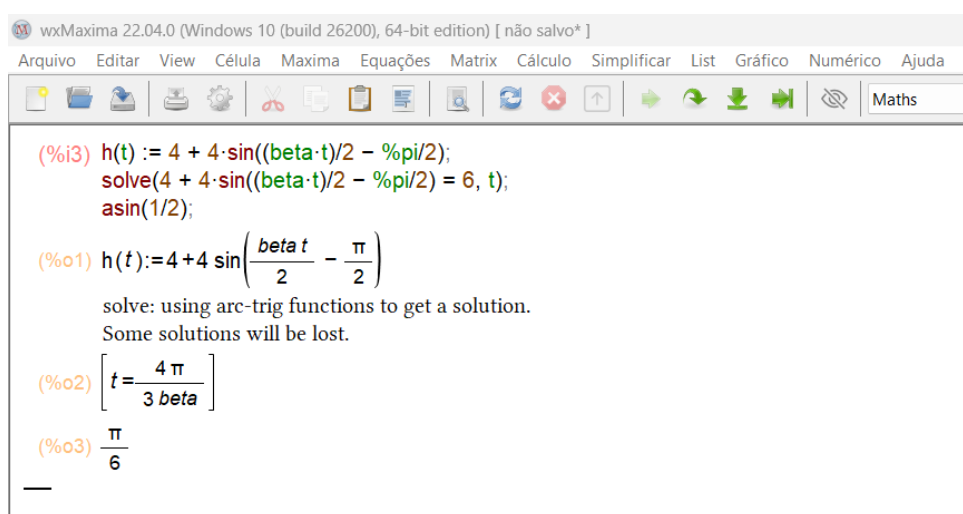
Resultado encontrado: com $\beta = 5$ no slider, aparecem três interseções entre $h(t)$ e a reta $y = 6$ antes de $t = 4$. É o resultado obtido na resolução analítica (Seção 4.1.4), alternativa (D).

Resolução Utilizando o Maxima

Célula 1 — Definir a função e resolver

```
h(t) := 4 + 4*sen((beta*t)/2 - %pi/2);
solve(4 + 4*sen((beta*t)/2 - %pi/2) = 6, t);
asen(1/2);
```

Figura E.3 – Solução geral obtida pelo comando solve



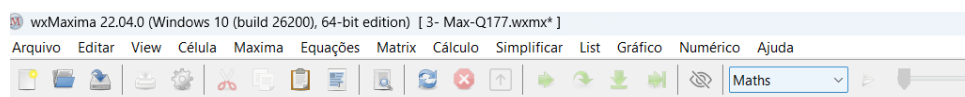
Fonte: O autor.

Célula 2 — Fórmulas gerais das soluções

```
t1(k) := (4*pi)/(3*beta) + (4*pi*k)/beta;
t2(k) := (8*pi)/(3*beta) + (4*pi*k)/beta;
```

Célula 3 — Testar com $\beta = 5$

```
beta : 5;
t1(0);
t2(0);
t1(1);
float(t1(0));
float(t2(0));
float(t1(1));
```

Figura E.4 – Valores numéricos das interseções para $\beta = 5$


```
(%i6) t1(k) := (4*%pi)/(3*beta) + (4*%pi*k)/beta;
      t2(k) := (8*%pi)/(3*beta) + (4*%pi*k)/beta;

(%o5) t1(k) :=  $\frac{4\pi}{3\beta} + \frac{4\pi k}{\beta}$ 
(%o6) t2(k) :=  $\frac{8\pi}{3\beta} + \frac{4\pi k}{\beta}$ 

(%i13) beta : 5;
      t1(0);
      t2(0);
      t1(1);
      float(t1(0));
      float(t2(0));
      float(t1(1));

(%o7) 5
(%o8)  $\frac{4\pi}{15}$ 
(%o9)  $\frac{8\pi}{15}$ 
(%o10)  $\frac{16\pi}{15}$ 
(%o11) 0.8377580409572781
(%o12) 1.675516081914556
(%o13) 3.351032163829113
```

Fonte: O autor.

Dica para professores: Vale mostrar a Célula 3 só depois que a turma já testou $\beta = 5$ no GeoGebra e viu as três interseções na tela. Assim o Maxima entra como confirmação do que já foi observado, não como um cálculo solto sem contexto.

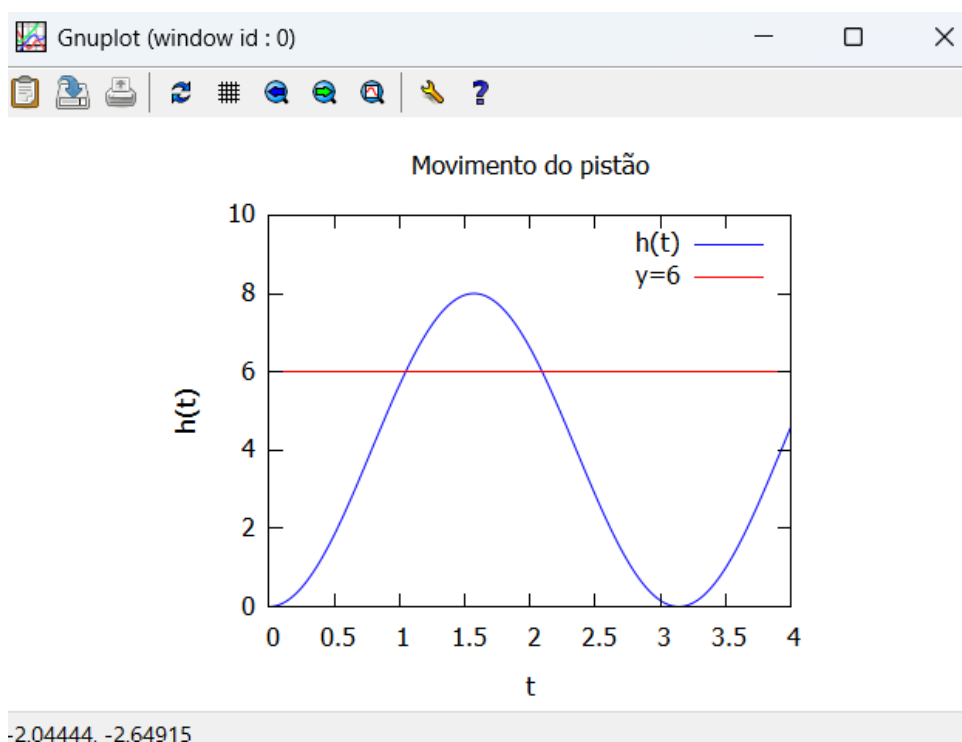
Dica para professores: Este é um ponto sutil, mas rico para discussão em sala. O enunciado da questão pede explicitamente que se utilize $\pi \approx 3$ nos cálculos. Ao definir as fórmulas no Maxima usando `%pi` (o valor exato de π), o software calcula $t_1(0) = 4\pi/15 \approx 0,838$, $t_2(0) = 8\pi/15 \approx 1,676$ e $t_1(1) = 16\pi/15 \approx 3,351$, valores muito próximos dos obtidos com a aproximação $\pi \approx 3$ (respectivamente 0,8, 1,6 e 3,2). Vale usar esse contraste para discutir com a turma que, embora a aproximação de π seja uma instrução explícita do enunciado, neste caso específico ela não altera qual é o menor valor de β que resolve o problema, o que nem sempre acontece.

Célula 4 — Visualizar o gráfico com as interseções

```
h_aprox(t) := 4 + 4*sen((beta*t)/2 - 3/2);
plot2d([h_aprox(t), 6], [t, 0, 4], [y, 0, 10],
      [xlabel, "t"], [ylabel, "h(t)"],
      [title, "Movimento do pistão (com pi aproximado)"],
      [legend, "h(t)", "y=6"]);
```

Nota: Com $\beta = 5$ já definido na Célula 3, o gráfico exibe a curva $h(t)$ e a reta $y = 6$ juntas, permitindo visualizar as três interseções no intervalo $[0, 4]$ — o equivalente, no Maxima, à construção já feita no GeoGebra.

Figura E.5 – Gráfico de $h(t)$ e da reta $y=6$ gerado no Maxima, com as três interseções visíveis



Fonte: O autor.

Nota: Ao plotar a função com o valor exato de π (sem a aproximação $\pi \approx 3$), observa-se que as três interseções continuam ocorrendo antes de $t = 4$, nos mesmos pontos aproximados vistos na Célula 3. Diferente do que ocorreria com $\beta = 4$ (onde a terceira interseção ficaria em $t \approx 4,189$, fora do intervalo), com $\beta = 5$ a aproximação de π não é determinante para a resposta.

Dica para professores: Comparar a saída numérica da Célula 3 com o gráfico da Célula 4 é um bom momento para discutir a diferença entre "calcular" e "visualizar" um resultado. Os três valores decimais isolados dizem exatamente onde a curva cruza a reta, mas é só ao ver o gráfico completo que fica evidente por que não existe uma quarta interseção antes de $t = 4$ — o professor pode perguntar à turma o que aconteceria se o intervalo fosse estendido até $t = 6$, antecipando a próxima oscilação da curva.

Dica para professores: Em vez de recorrer a comandos como `Interseção(...)` ou `Raiz(...)`, que exigem sentaxe específica e podem confundir quem está começando, é possível marcar os três pontos de cruzamento diretamente na tela, usando a ferramenta de Interseção do menu Ferramentas e clicando sobre cada cruzamento visível entre a curva e a reta $y = 6$. Esse caminho manual é mais lento, mas dispensa qualquer comando e deixa claro, visualmente, o que está sendo encontrado é uma boa opção para a primeira vez que a turma usa esse tipo de construção.

Resultado encontrado: substituindo $k = 0$ e $k = 1$ nas fórmulas $t_1(k)$ e $t_2(k)$, com $\beta = 5$, chegam os mesmos instantes $t \approx 0,8, 1,6, 3,2$ da resolução analítica. Isso confirma que $\beta = 5$ é o menor valor que satisfaz a condição do enunciado, alternativa (D).

Análise Comparativa: GeoGebra e Maxima na Questão 177

Esta foi a questão em que o slider do GeoGebra rendeu mais. Como o parâmetro β é a própria incógnita do problema, dá para ir testando valores no controle deslizante e observando quantas vezes a curva cruza a reta $y = 6$ antes de $t = 4$. Com $\beta = 5$, aparecem exatamente três interseções, e isso já responde a pergunta sem precisar resolver equação nenhuma.

Só que testar valores no slider não explica por que $\beta = 5$ funciona. Foi aí que o Maxima entrou: resolver a equação simbolicamente e chegar nas fórmulas gerais $t_1(k)$ e $t_2(k)$ mostra de onde vem esse resultado, e permite generalizar para outras situações (por exemplo, quantas interseções haveria antes de $t = 6$) sem repetir a exploração visual do zero.

O interessante aqui é que os dois caminhos chegam no mesmo lugar por vias bem diferentes: um por tentativa guiada pela imagem, outro por dedução algébrica. E o valor encontrado no slider bate exatamente com o que sai da substituição de $k = 0$ e $k = 1$ na fórmula do Maxima, o que dá segurança de que a resposta está certa.

F APÊNDICE F — QUESTÃO 170 (ENEM 2018): RODA-GIGANTE E FUNÇÃO SENO

Contextualização

A questão pede a expressão da função que modela a altura de um ponto da roda-gigante High Roller a partir da leitura de um gráfico, com valor mínimo e máximo conhecidos (88 e 168). É um problema clássico de ajuste de modelo a partir de características observadas: amplitude, deslocamento vertical e comportamento na origem.

Resolução Utilizando o GeoGebra

Passo 1 — Função geral e controles

```
a=Slider(0,200,1)
```

```
b=Slider(0,200,1)
```

```
f(t)=a*sen(t)+b
```

Passo 2 — Janela e referências

```
t: 0 até 4*pi
```

```
y: 0 até 200
```

```
y = 88
```

```
y = 168
```

Passo 3A — Ajuste Parcial

```
f(t) = 80*sen(t) + 88
```

Passo 3B — Ajuste final

Ajuste os sliders (arrastando ou pelas setas do teclado) até:

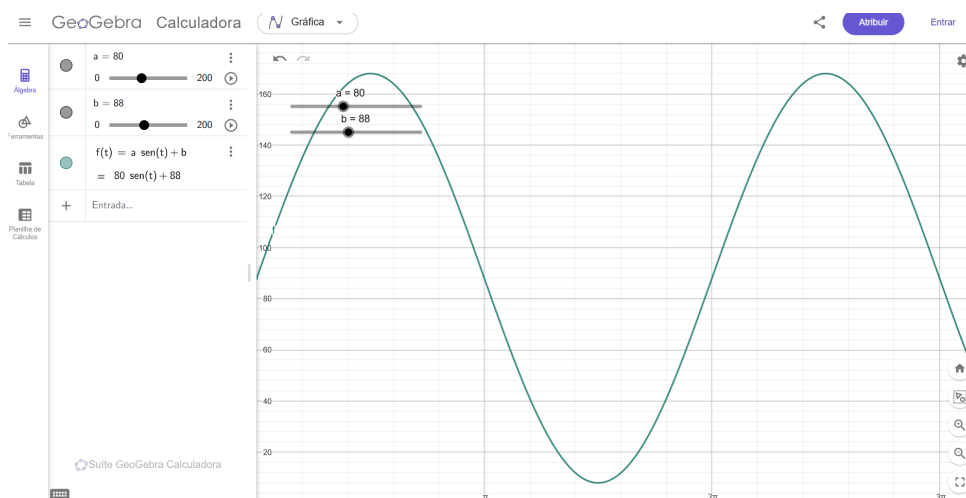
```
a = 80
```

```
b = 88
```

A função se ajusta automaticamente e passa a coincidir com as retas de referência: $f(t) = 80\text{sen}(t) + 88$.

Dica para professores: Peça que os alunos registrem, por escrito, a sequência de ajustes que fizeram nos sliders até chegar no valor final (o que tentaram primeiro, o que corrigiram depois). Esse registro do processo costuma revelar mais sobre o entendimento do aluno do que só o valor final de a e b .

Figura F.1 – Tela do GeoGebra: ajuste dos sliders a e b até coincidir com as retas de referência, com gráfico final sobreposto às retas $y = 88$ e $y = 168$



Fonte: O autor.

Resultado encontrado: ajustando os sliders a e b até as retas $y = 88$ e $y = 168$, chega-se à mesma função $f(t) = 80 \sin(t) + 88$ da resolução analítica (Seção 4.1.5), alternativa (A).

Resolução Utilizando o Maxima

Célula 1 — Definir o modelo geral

```
f(t) := a*sen(t) + b;
```

Célula 2 — Calcular a e b diretamente

```
b : 88;
```

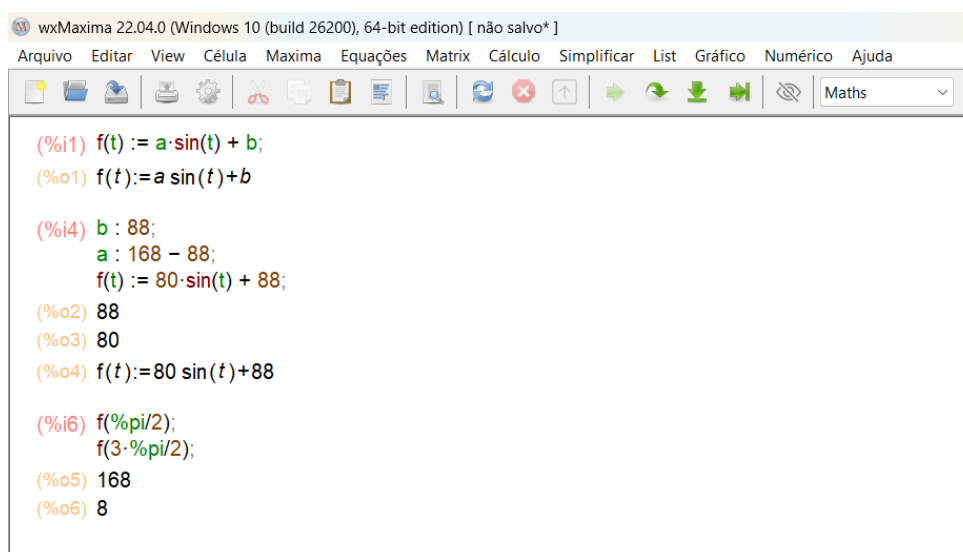
```
a : 168 - 88;
```

```
f(t) := 80*sen(t) + 88;
```

Célula 3 — Verificar os valores extremos

```
f(%pi/2);
```

```
f(3*%pi/2);
```

Figura F.2 – Cálculo direto de a e b a partir dos valores máximo e mínimo


```

wxMaxima 22.04.0 (Windows 10 (build 26200), 64-bit edition) [ não salvo* ]
Arquivo Editar View Célula Maxima Equações Matrix Cálculo Simplificar List Gráfico Numérico Ajuda

(%i1) f(t) := a*sin(t) + b;
(%o1) f(t):=a sin(t)+b

(%i4) b : 88;
      a : 168 - 88;
      f(t) := 80*sin(t) + 88;
(%o2) 88
(%o3) 80
(%o4) f(t):=80 sin(t)+88

(%i6) f(%pi/2);
      f(3*%pi/2);
(%o5) 168
(%o6) 8

```

Fonte: O autor.

Dica para professores: Essa é a etapa que mais evidencia a diferença entre as duas abordagens desta questão. Enquanto no GeoGebra os valores de a e b foram encontrados por ajuste visual dos sliders, aqui eles saem direto da conta $a = 168 - 88$ e $b = 88$, sem nenhuma tentativa. Vale perguntar à turma: "se vocês já sabem os valores máximo e mínimo, por que ajustar por tentativa no GeoGebra em vez de calcular direto?-- a resposta esperada é que o ajuste visual constrói a intuição sobre o que a e b representam no gráfico, algo que o cálculo direto não ensina sozinho.

Célula 4 — Gráfico sem a representação em Decimais

```

plot2d(f(t), [t, 0, 4*%pi], [xlabel, "t"], [ylabel, "f(t)"],
      [title, "Modelo da altura da roda-gigante"]);

```

Dica para professores: Essa é uma boa questão para comparar tempo de execução com a turma. Cronometrar quanto tempo leva o ajuste por tentativa no GeoGebra contra o cálculo direto no Maxima (Célula 2) costuma surpreender os alunos e abre espaço para discutir quando vale a pena cada abordagem.

Célula 4B — Gráfico com a representação em Radianos

```

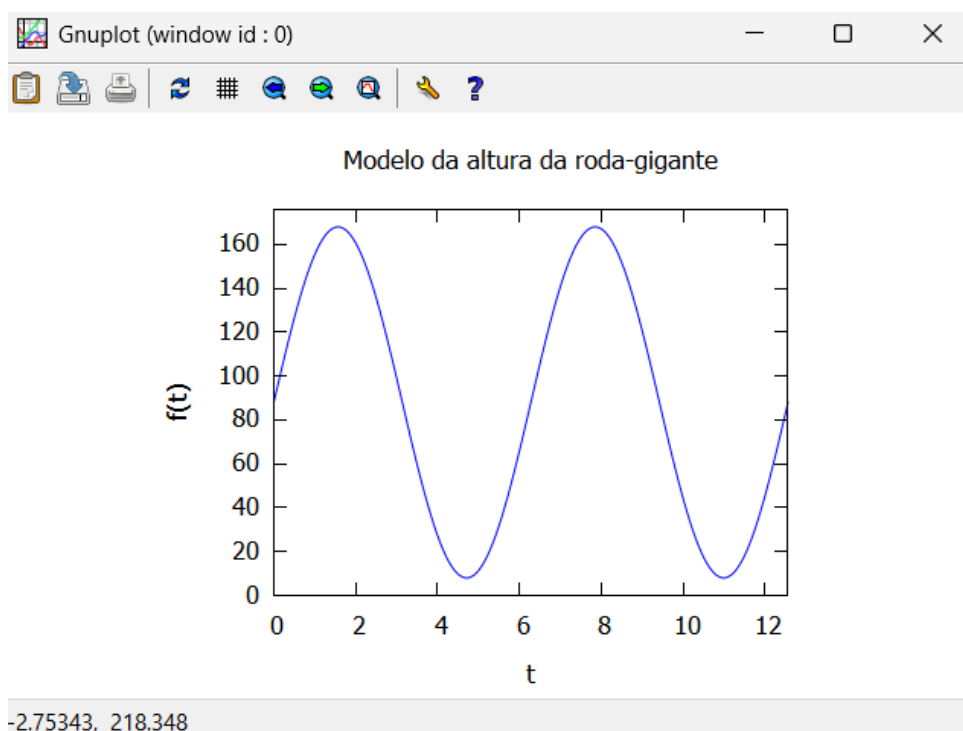
plot2d(f(t), [t, 0, 4*%pi], [xlabel, "t"], [ylabel, "f(t)"],
      [title, "Modelo da altura da roda-gigante"],
      [gnuplot_preamble, "set xtics ('0' 0, '/2' pi/2, '' pi,

```

```
'3/2' 3*pi/2, '2' 2*pi, '5/2' 5*pi/2,
'3' 3*pi, '7/2' 7*pi/2, '4' 4*pi)"]));
```

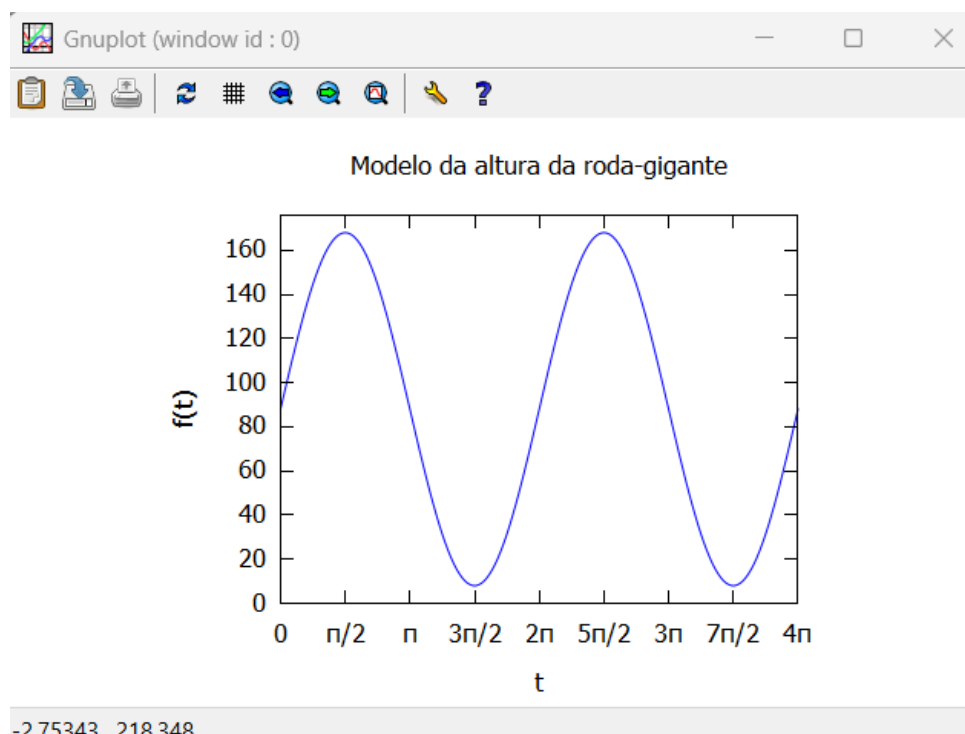
Dica para professores: essas duas figuras mostram, de forma prática, uma diferença real entre os softwares. No GeoGebra, converter o eixo x para radianos é uma configuração simples, feita pelo menu de propriedades do eixo, em poucos cliques. No Maxima, o mesmo resultado exige um comando adicional, `gnuplot_preamble`, escrito diretamente na sentaxe do `gnuplot` (o motor gráfico usado por trás do Maxima) — uma camada extra de complexidade que não tem equivalente no comando básico de plotagem. Vale usar esse contraste com a turma para discutir que, embora o Maxima seja mais rigoroso no cálculo simbólico, o GeoGebra tende a ser mais direto quando o objetivo é só ajustar a apresentação visual do gráfico.

Figura F.3 – Gráfico final gerado no Maxima — Decimais



Fonte: O autor.

Figura F.4 – Gráfico final gerado no Maxima — Radianos



Fonte: O autor.

Resultado encontrado: o cálculo direto de $a = 168 - 88 = 80$ e $b = 88$, mais a verificação $f(\pi/2) = 168$ e $f(3\pi/2) = 8$, confirma o modelo da resolução analítica, alternativa (A).

Análise Comparativa: GeoGebra e Maxima na Questão 170

Ajustar essa questão no GeoGebra é um processo de tentativa: mexer nos sliders a e b até o gráfico coincidir com as retas $y = 88$ e $y = 168$ traçadas como referência. Funciona, e tem a vantagem de obrigar o aluno a associar visualmente cada parâmetro ao seu efeito no gráfico, amplitude de um lado, deslocamento vertical do outro.

No Maxima não existe tentativa: $a = 168 - 88$ e $b = 88$ saem direto dos valores máximo e mínimo informados no enunciado, sem precisar ajustar nada na tela. A conferência final, calculando $f(\pi/2)$ e $f(3\pi/2)$ e checando que dão 168 e 8, funciona como prova de que o modelo está certo.

A diferença de velocidade entre os dois é grande, mas não à toa: o caminho do GeoGebra demora mais porque ensina o significado de cada parâmetro durante o processo; o do Maxima

é rápido porque já pressupõe esse entendimento. Ajustar primeiro no GeoGebra e confirmar depois no Maxima aproveita o que cada um tem de melhor.

G APÊNDICE G — QUESTÃO 166 (ENEM 2017): PRESSÃO ARTERIAL E FUNÇÃO COSSENO

Contextualização

A questão modela a pressão arterial por $P(t) = A + B \cos(kt)$, a partir de dados de pressão mínima, máxima e frequência cardíaca (90 batimentos por minuto). É a única das seis questões selecionadas em que um dos parâmetros (k) depende da conversão de uma unidade, de batimentos por minuto para período em segundos, antes de poder ser determinado.

Resolução Utilizando o GeoGebra

Passo 1 — Função geral e controles

Criar os controles deslizantes:

```
A=Slider(0,150,1)
```

```
B=Slider(0,100,1)
```

```
k=Slider(0,10,0.1)
```

Em seguida, definir a função:

```
P(t)=A+B*cos(k*t)
```

Passo 2 — Janela e referências

Ajustar a janela:

```
xmin=0
```

```
xmax=5
```

```
ymin=60
```

```
ymax=130
```

Criar as retas de referência:

```
y=78
```

```
y=120
```

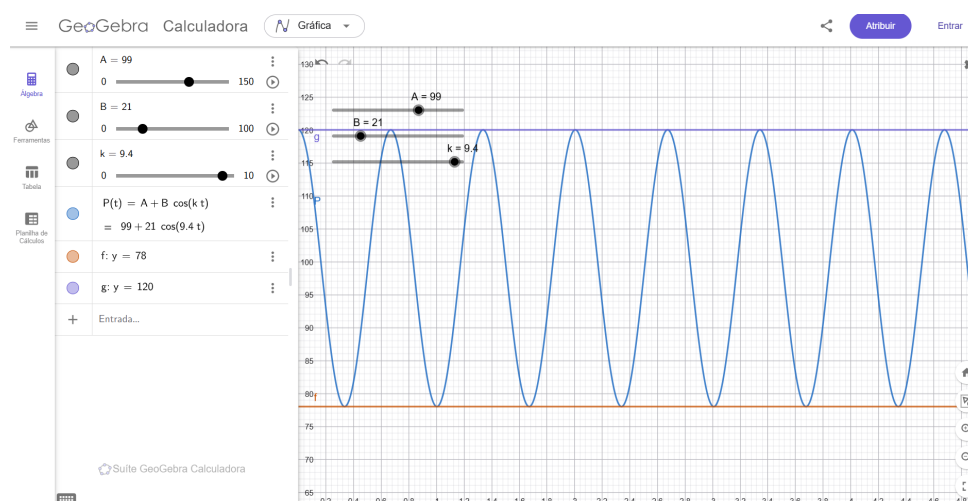
Dica para professores: Nesta questão, vale reforçar que os sliders começam em zero de propósito, gerando uma reta constante em $P(t) = 0$ – isso é intencional, não um erro. É a partir dessa "tela em branco" que o aluno constrói o modelo peça por peça: primeiro ajusta A até a curva se estabilizar na altura média entre as retas $y = 78$ e $y = 120$, depois ajusta B até os picos e vales tocarem exatamente essas duas retas, e só por último mexe em k , que é o parâmetro mais abstrato dos três, já que exige ter feito antes a conversão de 90 batimentos/minuto em período (a conta sugerida na Célula 3 do Maxima). Apresentar as retas de referência (Passo 2) antes de ajustar os sliders (Passo 1 já feito) transforma a atividade em um "acerte o alvo" visual: o aluno sabe onde a curva precisa chegar antes mesmo de mexer nos parâmetros, o que costuma tornar o processo mais engajador do que simplesmente informar os valores prontos de A , B e k .

Passo 3 — Ajuste final

$$P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3 \cdot \pi \cdot t)$$

Dica para professores: Antes de abrir o GeoGebra, vale fazer a conversão de 90 batimentos/minuto para período em segundos no quadro, junto com a turma. Sem esse passo prévio, o slider de k vira só um número "acertado por tentativa", sem que o aluno entenda de onde ele realmente vem.

Figura G.1 – Tela do GeoGebra: ajuste dos sliders A e B com as retas de referência 78 e 120, com ajuste do slider k até representar o período correto



Fonte: O autor.

Resultado encontrado: ajustando A , B e k no GeoGebra, chega-se ao mesmo modelo $P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$ da resolução analítica (Seção 4.1.6), alternativa (A).

Resolução Utilizando o Maxima

Célula 1 — Definir o modelo geral

```
P(t) := A + B*cos(k*t);
```

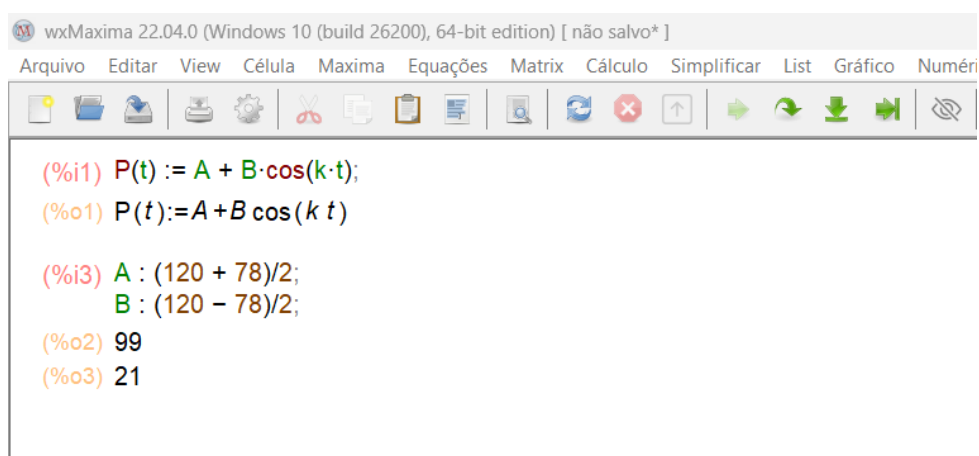
Célula 2 — Calcular A e B

```
A : (120 + 78)/2;
```

```
B : (120 - 78)/2;
```

Dica para professores: Repare que A e B saem diretamente da fórmula, sem nenhuma tentativa: a média entre pressão máxima e mínima dá o deslocamento vertical, e a metade da diferença entre elas dá a amplitude. Vale perguntar à turma por que essas duas contas funcionam? a resposta esperada é que a pressão oscila simetricamente ao redor de um valor central (A), subindo e descendo sempre a mesma distância (B) para cada lado. É um bom contraste com o GeoGebra, onde os mesmos valores de $A = 99$ e $B = 21$ só aparecem depois de mover os sliders até a curva encostar nas retas $y = 78$ e $y = 120$.

Figura G.2 – Cálculo direto de A e B a partir dos dados de pressão



Fonte: O autor.

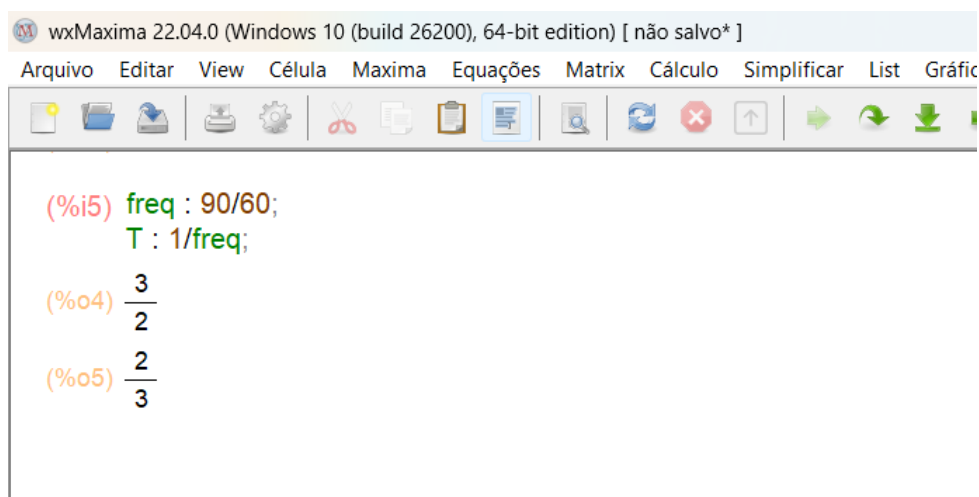
Célula 3 — Converter a frequência em período

freq : 90/60;

T : 1/freq;

Dica para professores: A Célula 3 é o ponto-chave da questão. Deixá-la separada das demais reforça que a conversão de unidade é uma etapa de raciocínio própria, e não um detalhe escondido dentro de outro cálculo.

Figura G.3 – Conversão da frequência cardíaca em período



Fonte: O autor.

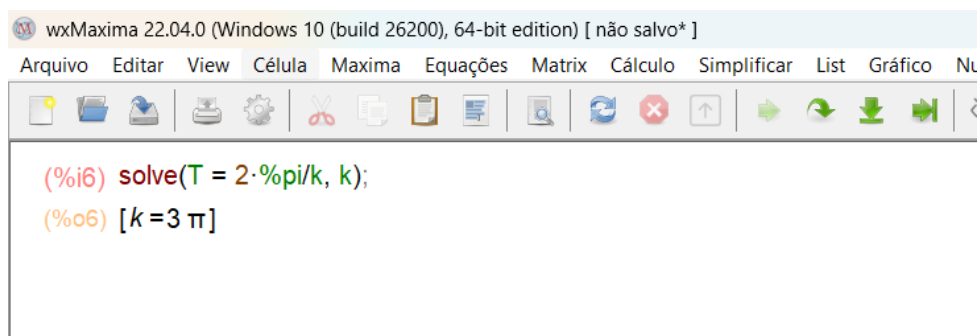
Resultado encontrado: o cálculo de $A = 99$ e $B = 21$ a partir dos valores de pressão, junto com a conversão da frequência cardíaca em período, reproduz os parâmetros do modelo $P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$ da resolução analítica, alternativa (A).

Célula 4 — Determinar k a partir do período

solve(T = 2*%pi/k, k);

Nota: A relação entre período e frequência angular de uma função cosseno é $T = 2\pi/k$. Isolando k , o Maxima resolve diretamente e devolve $k = 3\pi$, já na forma simbólica exata.

Figura G.4 – Determinação de k a partir do período T



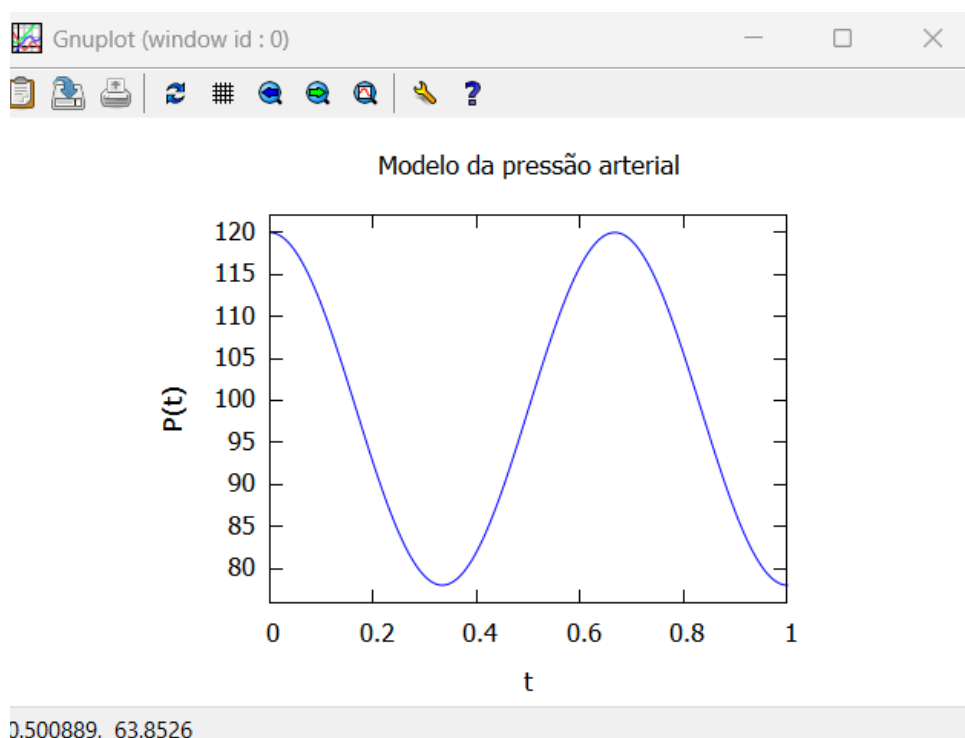
Fonte: O autor.

Célula 5 — Construir e verificar o modelo final

```
k : 3*%pi;
P(t) := 99 + 21*cos(3*%pi*t);
P(0);
plot2d(P(t), [t, 0, 1], [xlabel, "t"], [ylabel, "P(t)"],
      [title, "Modelo da pressão arterial"]);
```

Nota: Como o Maxima retorna k em função de T simbolicamente, o valor $k = 3\pi$ foi atribuído manualmente após a simplificação de $2\pi/(2/3) = 3\pi$, fechando o modelo com os parâmetros já calculados nas células anteriores.

Figura G.5 – Modelo final da pressão arterial e verificação



Fonte: O autor.

Dica para professores: Vale mostrar aos alunos que o Maxima não "sabe sozinho" simplificar $2\pi/(2/3)$ até a forma mais limpa 3π sem que o aluno faça essa conta – o software resolve a equação simbolicamente, mas a interpretação final do resultado continua sendo trabalho do estudante. É um bom momento para reforçar que o software automatiza o cálculo, não o raciocínio.

Resultado encontrado: O cálculo de $A = 99$ e $B = 21$ a partir dos valores de pressão, junto com a conversão da frequência cardíaca em período e a determinação de $k = 3\pi$, reproduz o modelo $P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$ da resolução analítica, alternativa (A).

Análise Comparativa: GeoGebra e Maxima na Questão 166

Os parâmetros A e B dessa questão se ajustam bem no GeoGebra, do mesmo jeito que na questão da roda-gigante: mexer nos sliders até a curva tocar as retas 78 e 120. O problema aparece no parâmetro k , que depende de converter 90 batimentos por minuto em período, uma conta que não tem correspondente natural em mexer num slider. Dá para "acertar" k testando valores até a curva bater, mas sem entender de onde ele vem.

O Maxima obriga a fazer essa conversão de forma explícita: $\text{freq} : 90/60$ e depois $T : 1/\text{freq}$. É um passo que fica escondido quando se ajusta o slider por tentativa, mas que fica visível e justificado no cálculo simbólico.

Essa questão mostra um limite do GeoGebra: ele funciona bem quando o parâmetro tem relação direta com o que se vê no gráfico, como altura e amplitude, mas não ajuda tanto quando o parâmetro depende de converter uma unidade que vem de fora do gráfico. O Maxima cobre exatamente essa lacuna.

H APÊNDICE H — QUESTÃO 180 (ENEM 2015): PREÇO SAZONAL E FUNÇÃO COSSENO - UTILIZANDO LÓGICA DE PROGRAMAÇÃO

Contextualização

A questão modela o preço de um produto agrícola ao longo dos meses do ano por $P(x) = 8 + 5 \cos \left[\frac{\pi x - \pi}{6} \right]$, perguntando em qual mês ocorre a produção máxima (ou seja, o preço mínimo). A resolução completa desta questão, com as capturas de tela originais, já consta no texto (Seção 4.1.7, páginas 68 a 73). Diferentemente dos demais apêndices, que reproduzem em detalhe o mesmo caminho de resolução do corpo do texto, este apresenta uma solução alternativa, propositalmente distinta: em vez de identificar o mês de preço mínimo por leitura gráfica ou resolução simbólica de equação, o problema é resolvido por meio de um algoritmo de busca — uma lista de preços é percorrida por meio de um comando de programação, mês a mês, tanto no GeoGebra quanto no Maxima, aproximando a resolução de práticas usuais em métodos computacionais.

Resolução Utilizando o GeoGebra

Passo 1 — Gerar a lista de preços

Definir a função (caso ainda não esteja definida na sessão):

```
P(x)=8+5*cos((pi*x-pi)/6)
```

Gerar a lista de valores para os 12 meses:

```
listaPrecos=Sequência(P(n), n, 1, 12)
```

Passo 2 — Encontrar o menor valor e o mês correspondente

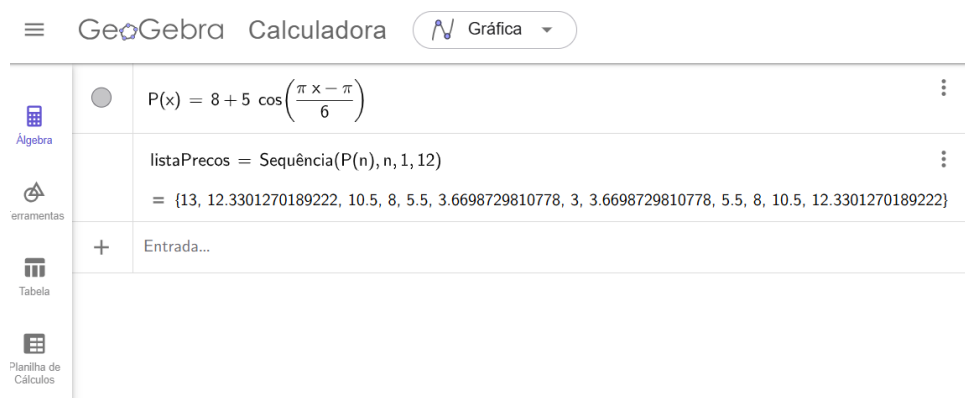
```
precoMinimo=Mínimo(listaPrecos)
```

```
mesMinimo=Índice(precoMinimo, listaPrecos)
```

Dica para professores: Essa abordagem é deliberadamente diferente do `Sequence` usado no corpo do texto. Em vez de identificar o mínimo olhando o gráfico, o GeoGebra localiza o valor via comando de programação: `Menor(...)` varre a lista de doze preços e devolve o menor, e `Índice(...)` devolve a posição (o mês) onde esse valor está na lista, é o mesmo tipo

de operação que um algoritmo de busca faria em qualquer linguagem de programação, só que usando os comandos nativos de lista do GeoGebra.

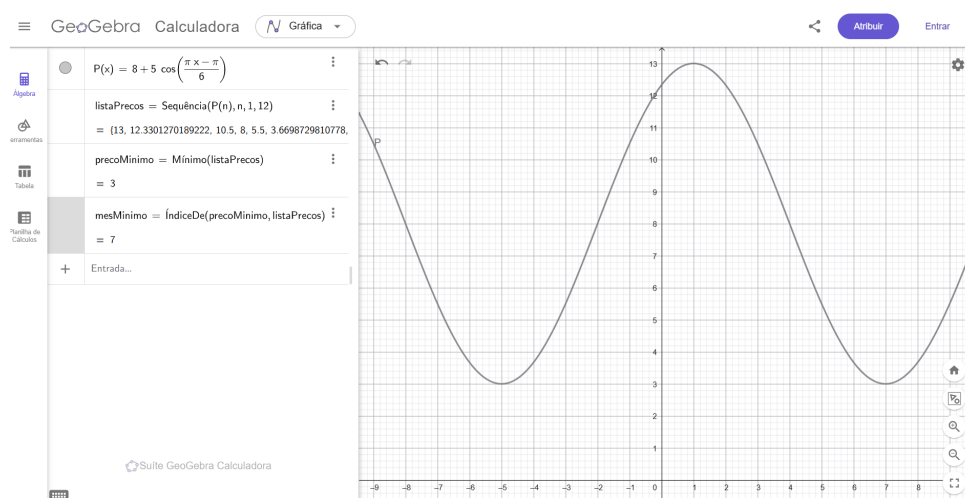
Figura H.1 – Janela de Álgebra do GeoGebra: lista de preços gerada por Sequência



Fonte: O autor.

Dica para professores: Essa lista representa, de forma compacta, os doze preços que apareceriam em uma tabela feita à mão. Vale mostrar à turma que $\text{Sequência}(P(n), n, 1, 12)$ é equivalente a calcular $P(1), P(2), \dots, P(12)$ manualmente e guardar cada resultado em ordem, só que o software faz isso automaticamente, em uma única linha, sem risco de erro de conta. Essa é uma boa oportunidade para introduzir a ideia de estrutura de dados (a lista) antes mesmo de chegar na busca pelo valor mínimo, que será feita no próximo passo.

Figura H.2 – Preço mínimo e mês correspondente encontrados utilizando lógica de programação.



Fonte: O autor.

Nota: Propositadamente, o gráfico não foi utilizado para localizar o ponto mínimo nesta seção. A resposta (mês 7) foi obtida inteiramente por meio da lista de dados e das funções `Mínimo` e `ÍndiceDe`, sem necessidade de inspeção visual da curva, evidenciando que a mesma questão pode ser resolvida por caminhos totalmente distintos: leitura gráfica (corpo do texto), resolução simbólica (demais apêndices) ou busca algorítmica sobre uma estrutura de dados (aqui).

Nota: Os três comandos executados nesta seção (`listaPrecos`, `Mínimo` e `ÍndiceDe`) não são apenas ferramentas de cálculo trigonométrico, mas conceitos centrais da lógica de programação. A criação de `listaPrecos` é uma **declaração de variável**¹ que armazena uma **estrutura de dados do tipo lista**² (ou vetor), reunindo os doze valores de preço em uma única unidade, com posições numeradas de 1 a 12. O comando `Mínimo(listaPrecos)` é uma **função de retorno de valor**³, que devolve um único dado (o menor elemento) a partir de toda a estrutura, sem que o usuário precise inspecionar a lista manualmente. Já o `ÍndiceDe(precoMínimo, listaPrecos)` devolve não o valor em si, mas a **posição**⁴ em que ele ocorre uma distinção importante em programação, entre "que valor" e "onde esse valor está".

Esses três conceitos; variáveis, estruturas de dados e funções que operam sobre elas e dialogam diretamente com o eixo de Pensamento Computacional da Computação na Educação Básica, complemento à BNCC homologado pelo CNE em 2022 e ainda em fase de implementação nas redes de ensino brasileiras [15]. Entre as habilidades previstas para os anos finais do Ensino Fundamental, o documento inclui tanto a criação de soluções que usem estruturas de dados como registros, matrizes, listas e grafos, quanto a análise de programas para detectar e corrigir erros [15](BRASIL, 2022). É esse mesmo tipo de raciocínio, reconhecer uma lista como estrutura de dados e percorrê-la em busca de um valor, o que está sendo mobilizado nesta seção.

¹ Ato de dar um nome a um espaço de memória do computador para guardar um valor, aqui, o nome `listaPrecos` passa a representar os doze preços calculados, e pode ser usado no restante do trabalho sempre que for preciso consultá-los.

² Uma forma de organizar vários valores relacionados sob um único nome, guardando-os em ordem e numerando cada posição de forma parecida com uma fileira de gavetas numeradas, em que cada gaveta guarda um preço.

³ Um comando que recebe uma informação (aqui, a lista inteira de preços) e devolve um único resultado calculado a partir dela neste caso, o menor preço sem que o usuário precise abrir a lista e comparar os valores manualmente.

⁴ O lugar que um valor ocupa dentro de uma lista, contado a partir do início por exemplo, o preço de julho ocupa a sétima posição na lista `listaPrecos`, então seu índice é 7.

Resultado encontrado: A busca pelo menor valor na lista de preços aponta o mês 7 (julho) como o de produção máxima (preço mínimo). É o mesmo resultado da resolução analítica (Seção 4.1.7) e do corpo do texto, alternativa (D).

Resolução Utilizando o Maxima

Célula 1 — Definir a função

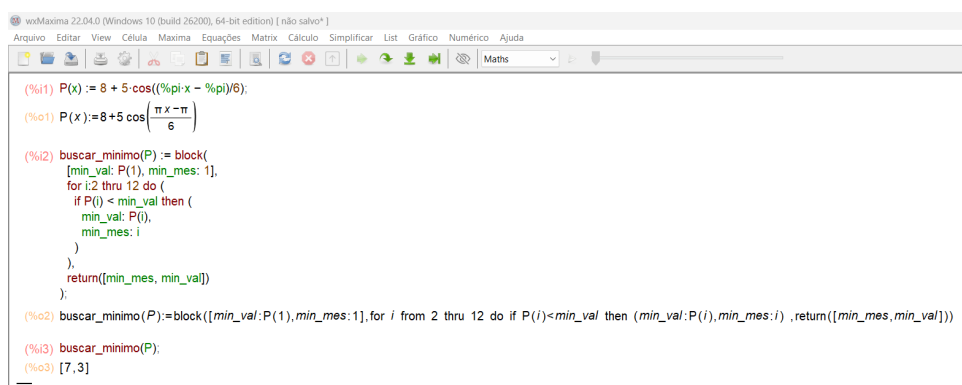
```
P(x) := 8 + 5*cos((%pi*x - %pi)/6);
```

Célula 2 — Função de busca com laço e condicional

```
buscar_minimo(P) := block(
  [min_val: P(1), min_mes: 1],
  for i:2 thru 12 do (
    if P(i) < min_val then (
      min_val: P(i),
      min_mes: i
    )
  ),
  return([min_mes, min_val])
);
```

Nota: Diferente das outras questões, aqui não se resolve a equação simbolicamente com `solve`. A função `buscar_minimo` percorre os 12 meses um a um (comando `for`), comparando cada preço com o menor já encontrado (comando `if`), e atualiza o resultado sempre que encontra um valor menor. É o mesmo algoritmo de busca linear ensinado em disciplinas introdutórias de programação, implementado dentro da sentaxe do Maxima.

Figura H.3 – Definição da função de busca com laço e condicional



```

(%i1) P(x) := 8 + 5*cos((%pi*x - %pi)/6);
(%o1) P(x) := 8 + 5*cos((%pi*x - %pi)/6)

(%i2) buscar_minimo(P) := block(
  [min_val: P(1), min_mes: 1],
  for i:2 thru 12 do (
    if P(i) < min_val then (
      min_val: P(i),
      min_mes: i
    )
  ),
  return([min_mes, min_val])
);
(%o2) buscar_minimo(P) := block([min_val: P(1), min_mes: 1], for i from 2 thru 12 do if P(i) < min_val then (min_val: P(i), min_mes: i), return([min_mes, min_val]))

(%i3) buscar_minimo(P);
(%o3) [7, 3]

```

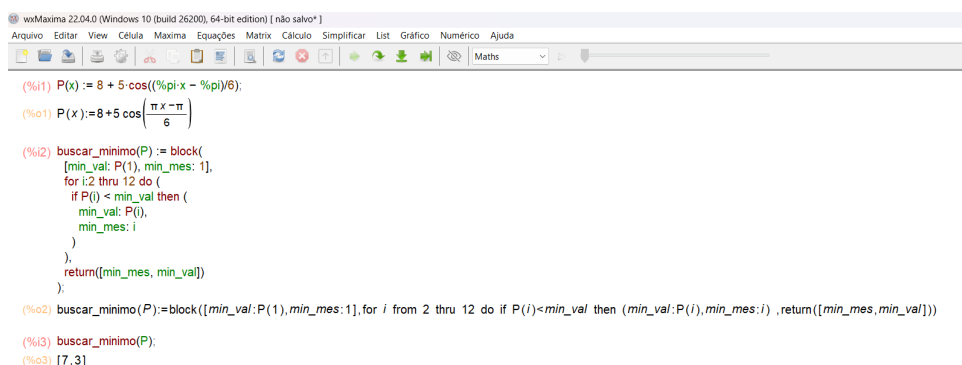
Fonte: O autor.

Célula 3 — Executar a busca

```
buscar_minimo(P);
```

Dica para professores: Essa célula é uma boa ponte para uma discussão de pensamento computacional (Seção 3.6 da Fundamentação Teórica). Vale perguntar à turma o que aconteceria se o intervalo fosse de 1 a 120 meses em vez de 12 o laço `for` continuaria funcionando sem alteração nenhuma, enquanto testar manualmente cada valor (como fizemos nas outras cinco questões, com `subst`) se tornaria inviável. É um exemplo concreto de por que algoritmos generalizam melhor que verificação caso a caso.

Figura H.4 – Resultado da busca: mês e preço mínimo



```

(%i1) P(x) := 8 + 5*cos((%pi*x - %pi)/6);
(%o1) P(x) := 8 + 5*cos((%pi*x - %pi)/6)

(%i2) buscar_minimo(P) := block(
  [min_val: P(1), min_mes: 1],
  for i:2 thru 12 do (
    if P(i) < min_val then (
      min_val: P(i),
      min_mes: i
    )
  ),
  return([min_mes, min_val])
);
(%o2) buscar_minimo(P) := block([min_val: P(1), min_mes: 1], for i from 2 thru 12 do if P(i) < min_val then (min_val: P(i), min_mes: i), return([min_mes, min_val]))

(%i3) buscar_minimo(P);
(%o3) [7, 3]

```

Fonte: O autor.

Resultado encontrado: A função `buscar_minimo` percorre os 12 meses e devolve o mês 7 com o menor preço, confirmando algoritmicamente o mesmo resultado obtido na resolução analítica e no corpo do texto, alternativa (D).

Análise Comparativa: GeoGebra e Maxima na Questão 180

Esta solução alternativa abandona tanto a leitura visual do gráfico quanto a resolução simbólica da equação trigonométrica, adotando em seu lugar uma lógica de busca percorrer os doze valores possíveis e comparar cada um até encontrar o menor. No GeoGebra, essa busca é feita por comandos de lista (`Sequência`, `Menor`, `Índice`), uma abordagem declarativa: descreve-se o que se quer encontrar, e o software resolve internamente.

No Maxima, a mesma busca é implementada de forma explícita, com um laço `for` e uma condicional `if` dentro de uma função programada pelo próprio usuário. Essa diferença de estilo comandos prontos de lista de um lado, algoritmo escrito à mão do outro ilustra dois paradigmas distintos de resolver o mesmo problema computacionalmente, ambos válidos, mas com naturezas diferentes: um mais próximo de uma calculadora avançada, o outro mais próximo de uma linguagem de programação de propósito geral.

Essa diferença de estilo, comandos prontos de lista de um lado, algoritmo escrito à mão do outro, ilustra dois **paradigmas**⁵ distintos de resolver o mesmo problema computacionalmente, ambos válidos, mas com naturezas diferentes: um mais próximo de uma calculadora avançada, o outro mais próximo de uma linguagem de programação de propósito geral.

Essa abordagem alternativa foge da leitura gráfica e da resolução simbólica que aparecem nas outras cinco questões. Com isso, o trabalho deixa de comparar só visualização dinâmica com cálculo algébrico e passa a tocar também em métodos computacionais e pensamento algorítmico aplicados ao ensino de matemática.

⁵ Um paradigma de programação é, de forma simples, um "jeito de pensar" a solução de um problema no computador. Aparecem dois nesta seção: o paradigma **declarativo**, usado no GeoGebra com os comandos `Mínimo` e `ÍndiceDe` (descreve-se *o que* se quer, "o menor valor", sem especificar os passos para chegar lá), e o paradigma **imperativo**, usado na função `buscar_minimo` do Maxima (descrevem-se, passo a passo, *como* chegar ao resultado: percorrer a lista, comparar, atualizar). Não existe um "melhor" entre os dois, são estratégias diferentes para o mesmo problema.

I APÊNDICE I — QUESTÃO 180 (ENEM 2015): PREÇO SAZONAL E FUNÇÃO COS-SENO - SCRIPT DINÂMICO VIA PROGRAMAÇÃO NO GEOGEBRA

Contextualização

Este apêndice estende a solução alternativa apresentada no Apêndice H, na qual a lista de preços foi percorrida por meio dos comandos `Mínimo` e `ÍndiceDe`. Enquanto aqueles comandos resolvem a busca internamente, este apêndice apresenta o mesmo algoritmo de busca implementado explicitamente, por meio de um **script**¹ na aba de Programação do GeoGebra, executado por um botão, introduzindo dinamismo e tornando visível, linha a linha, a lógica que os comandos prontos escondem.

O objetivo aqui não é ensinar programação, e sim mostrar que a mesma solução matemática pode ser escrita de mais de um jeito no computador. Vale adiantar: a primeira tentativa de script não funcionou, e o motivo desse erro, e como ele foi contornado também faz parte do que este apêndice quer mostrar. Um algoritmo nem sempre sai certo de primeira, mesmo quando a lógica matemática por trás dele já está resolvida, e essa etapa de ajuste é tão parte do trabalho quanto o resultado final.

Resolução Utilizando o GeoGebra

Passo 1 — Pré-requisitos

Este apêndice pressupõe que $P(x)$ e `listaPrecos` já estejam definidos na sessão, conforme o Apêndice H, além da **variável**² `minMes`, que serve para armazenar esse mês candidato durante a busca:

```
P(x)=8+5*cos((pi*x-pi)/6)
listaPrecos=Sequência(P(n), n, 1, 12)
minMes=1
```

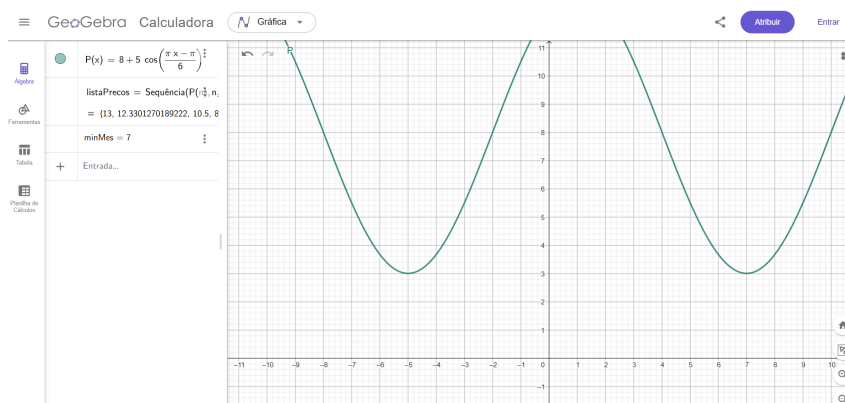
Nota: Se a variável `minMes` não for criada antes de clicar no botão, o GeoGebra retorna o erro "Variável indefinida: `minMes`— diferente dos erros de sentaxe descritos adiante, este

¹ Sequência de instruções escrita pelo próprio usuário para automatizar uma tarefa dentro de um software, neste caso, um pequeno programa executado ao clicar em um botão do GeoGebra.

² Um espaço nomeado que o computador usa para guardar um valor que pode mudar ao longo da execução do script. Neste caso, a variável `minMes` começa valendo 1 (janeiro) e é atualizada sempre que um mês com preço menor é encontrado, terminando com o valor do mês vencedor, 7 (julho).

indica apenas que o script está tentando alterar o valor de algo que ainda não existe na sessão. O comando SetValue (ou DefinirValor) atualiza uma variável já criada; ele não a cria do zero.

Figura I.1 – Janela de Álgebra com $P(x)$, listaPrecos e a variável minMes já definidos, antes da criação do botão



Fonte: O autor.

Passo 2 — Criar o botão

1. Selecione a ferramenta **Botão** (menu Ferramentas)
2. Clique em qualquer ponto vazio da Janela de Visualização para posicioná-lo
3. Nas propriedades do botão, acesse a aba **Programação** → campo **Ao Clicar**

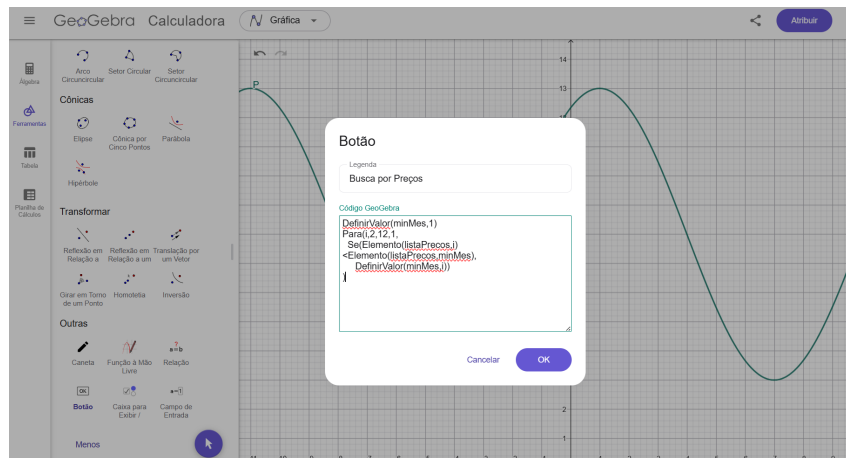
Passo 3 — Primeira tentativa: a linguagem de comandos do próprio GeoGebra

A primeira tentativa foi escrever o script na própria linguagem de comandos do GeoGebra, chamada **GGBScript**³, a mesma linguagem já usada em todos os outros comandos deste trabalho, como Sequência ou Interseção. O código escrito reproduzia, em português, a lógica de repetição já usada no Maxima (Apêndice H).

```
DefinirValor(minMes,1)
Para(i,2,12,1,
  Se(Elemento(listaPrecos,i)<Elemento(listaPrecos,minMes),
    DefinirValor(minMes,i))
)
```

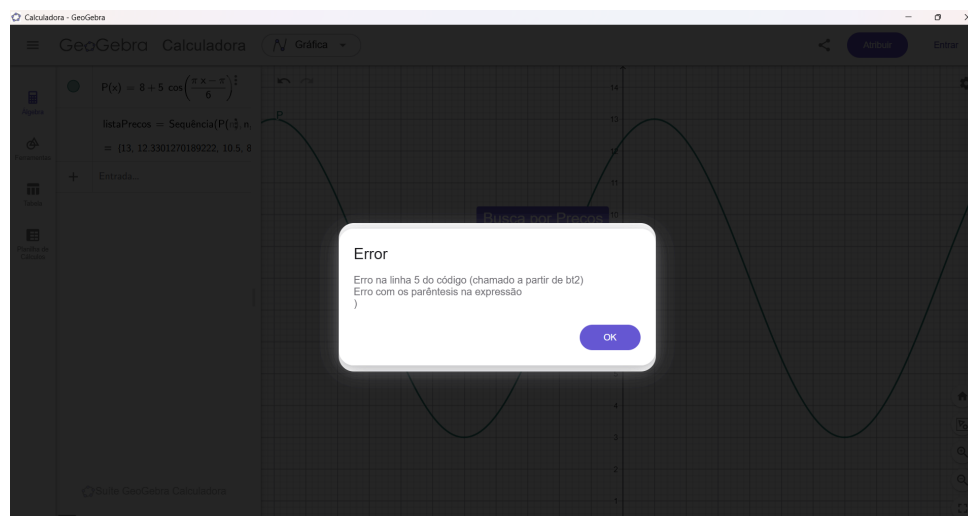
³ Conjunto de comandos do próprio GeoGebra (como Se, DefinirValor, Elemento) que pode ser usado tanto na barra de Entrada quanto dentro de scripts de botões, com os nomes traduzidos para o português.

Figura I.2 – Preenchimento do botão com o script em GGBScript, antes da execução



Fonte: O autor.

Figura I.3 – Mensagem de erro retornada ao tentar executar o comando Para dentro do botão



Fonte: O autor.

Nota: Ao clicar no botão com esse script, o GeoGebra devolveu a mensagem "Comando desconhecido: Para". O comando `Para` (que cria um **laço de repetição**⁴) funciona normalmente quando digitado direto na barra de Entrada, mas não é aceito dentro do campo "Ao Clicar" de um botão. É uma limitação real do GGBScript, presente tanto na versão web simplificada quanto na versão Classic completa, e não um problema de configuração.

Passo 3B — Segunda tentativa: escrevendo o script em JavaScript

Esse erro obrigou a trocar de estratégia. O GeoGebra permite escrever o campo "Ao Clicar" em **JavaScript**⁵ em vez de GGBScript, bastando alterar a opção "ScriptType" (tipo de script) de "Código GeoGebra" para "JavaScript". Diferente do GGBScript, o JavaScript tem um comando de repetição completo, chamado `for`, sem a limitação encontrada na tentativa anterior.

Para que o JavaScript consiga se comunicar com o GeoGebra e executar comandos como `Se` ou `DefinirValor`, é necessário usar uma ponte de comunicação chamada **API**⁶, acessada pelo comando `ggbApplet.evalCommand(...)`. Esse comando recebe, entre aspas, uma **string**⁷ com o texto exato do comando do GeoGebra que se deseja executar, como se estivesse sendo digitado na barra de Entrada.

A primeira versão em JavaScript ainda manteve os nomes de comando em português, como no GGBScript:

⁴ Também chamado de "loop": uma instrução que repete um mesmo bloco de comandos várias vezes, mudando um valor a cada repetição — neste caso, repetindo a comparação de preços para cada mês, do 2 ao 12.

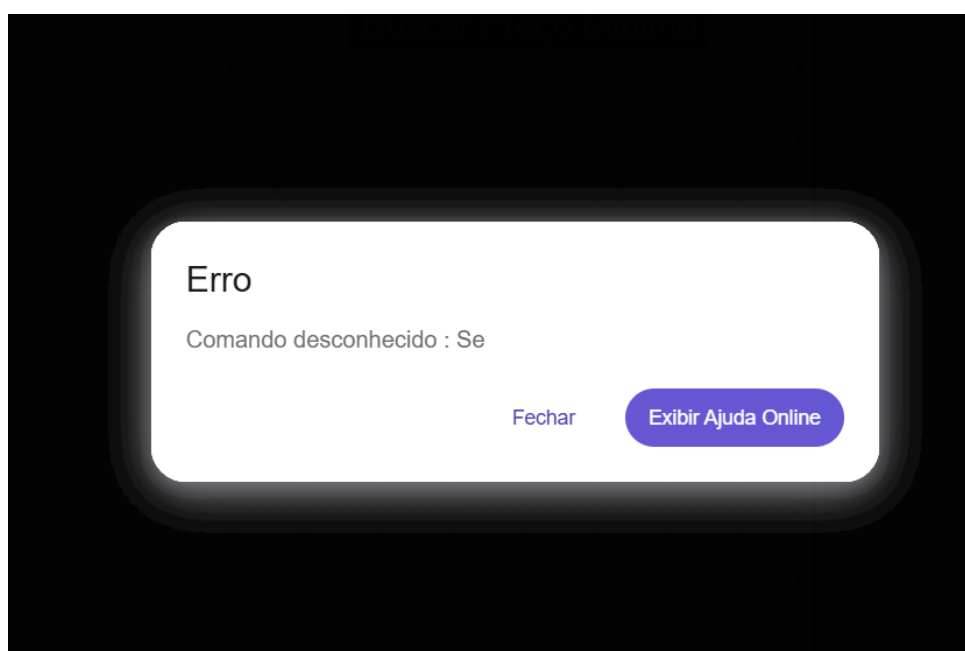
⁵ Uma das linguagens de programação mais usadas no mundo, muito comum para criar interatividade em páginas da internet. O GeoGebra permite usá-la como alternativa ao GGBScript quando este apresenta alguma limitação, como foi o caso aqui.

⁶ Sigla para "Application Programming Interface" (Interface de Programação de Aplicações). De forma simples, é um conjunto de "portas de entrada" que um software disponibiliza para que outros programas, ou outras linguagens, possam controlá-lo. Aqui, é a porta que permite ao JavaScript enviar comandos para o GeoGebra.

⁷ Em programação, um trecho de texto entre aspas é chamado de string. O comando `evalCommand` recebe uma string porque funciona como se estivesse digitando o comando na barra de Entrada do GeoGebra por dentro do próprio JavaScript.

```
for (var i = 2; i <= 12; i++) {
    ggbApplet.evalCommand("Se(Elemento(listaPrecos," + i + ") " +
        "<Elemento(listaPrecos,minMes),DefinirValor(minMes," + i + "))");
}
```

Figura I.4 – Segundo erro encontrado: comando Se não reconhecido dentro do evalCommand, por estar em português



Fonte: O autor.

Nota: Dessa vez o erro foi "Comando desconhecido: Se". Isso revelou uma segunda particularidade: dentro dessa porta de comunicação entre o JavaScript e o GeoGebra, os comandos só são reconhecidos pelos seus nomes originais em inglês — If (em vez de Se), SetValue (em vez de DefinirValor) e Element (em vez de Elemento) — mesmo com a interface toda em português. Os nomes das variáveis criadas pelo próprio usuário, como minMes e listaPrecos, continuam sendo escritos normalmente, sem tradução.

O código final, corrigido com os nomes de comando em inglês, ficou assim:

```
// Zera o mes candidato, começando pelo mes 1 (janeiro)
ggbApplet.evalCommand("SetValue(minMes,1)");

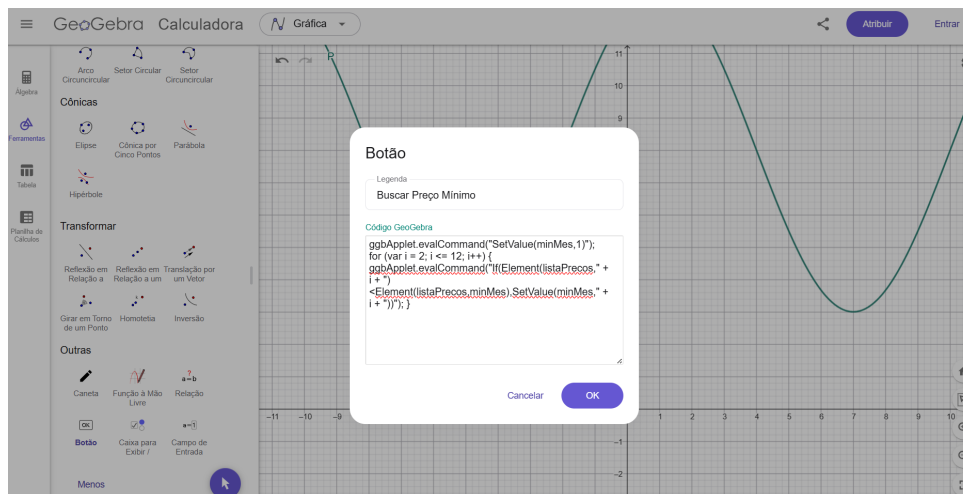
// Repete a comparacao abaixo para cada mes de 2 a 12
for (var i = 2; i <= 12; i++) {

    // Se o preco do mes "i" for menor que o preco do mes
    // ja guardado em minMes, atualiza minMes para "i"
    ggbApplet.evalCommand(
        "If(Element(listaPrecos," + i + "<)<Element(listaPrecos,minMes)," +
        "SetValue(minMes," + i + "))"
    );
}
```

Nota: As linhas iniciadas por // são comentários — não são executadas pelo computador, servem apenas como anotações para quem lê o código. É uma prática comum em programação, sobretudo quando o código será revisado por outra pessoa (ou, como aqui, apresentado a uma banca) tempos depois de escrito.

Nota: O laço percorre apenas os meses de 2 a 12 porque o mês 1 (janeiro) já entra na disputa como candidato inicial, na linha `SetValue(minMes,1)`. Todos os doze meses acabam sendo considerados — janeiro por ser o ponto de partida, e os demais por serem comparados um a um contra o menor preço encontrado até aquele momento.

Figura I.5 – Configuração final do botão: campo Ao Clicar com ScriptType em JavaScript e os comandos já traduzidos para o inglês



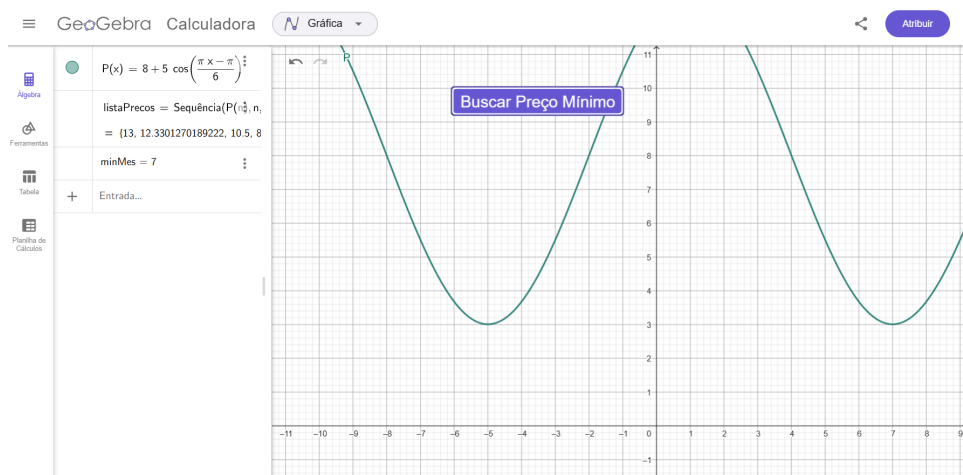
Fonte: O autor.

Dica para professores: Mesmo sem entrar em detalhes de sentaxe do JavaScript, vale destacar para a turma a ideia central desse trecho: o computador repete a mesma pergunta — "este mês é mais barato que o candidato atual?"— doze vezes seguidas, trocando apenas o número do mês a cada rodada. É esse princípio de repetição controlada, e não a sentaxe específica de cada linguagem, que constitui o núcleo do pensamento computacional mobilizado nesta atividade.

Passo 4 — Executar e verificar

Clique no botão criado e observe o valor de `minMes` na Janela de Álgebra.

Figura I.6 – Resultado do script após o clique: `minMes = 7`



Fonte: O autor.

Dica para professores: Essa é a única etapa, em todo o trabalho, em que o GeoGebra é usado como ambiente de programação interativo, não apenas como calculadora gráfica ou algébrica. Vale contrastar com o Apêndice H: ali, `Mínimo(...)` encontra a resposta em uma única chamada de comando; aqui, o aluno escreve o próprio algoritmo, linha por linha, e o executa sob demanda, a cada clique.

Resultado encontrado: o script executado no botão devolve `minMes = 7`, confirmando, por meio de um algoritmo escrito e executado interativamente, o mesmo resultado obtido no Apêndice H e no corpo do texto, alternativa (D).

Considerações sobre o Script Dinâmico

A diferença entre este apêndice e o Apêndice H não está na resposta final, os dois chegam no mês 7 e sim em quanto da lógica de busca fica visível. No Apêndice H, os comandos `Mínimo` e `ÍndiceDe` funcionam como uma função pronta de biblioteca: confiáveis, mas escondem como o processo acontece por dentro. Aqui, o script faz o caminho inverso: implementa essa mesma busca do zero, mostrando cada decisão do algoritmo, o laço, a comparação, a atualização da variável, um passo de cada vez.

O caminho até chegar nesse resultado também vale registrar. A primeira tentativa esbarrou numa limitação real do GeoGebra o comando de repetição não roda dentro de um botão. Foi preciso trocar de linguagem, e essa troca trouxe sua própria pegadinha: os comandos só funcionam em inglês dentro da API. Não é um desvio do assunto é, no fim, o tipo de ajuste que qualquer professor enfrenta na prática ao tentar usar tecnologia em sala.

Vale registrar, por fim, que existe uma terceira possibilidade além do GGBScript e do JavaScript: a plataforma **PyGgb**⁸, que integra o GeoGebra com Python. Ela não foi utilizada neste trabalho por se tratar de um ambiente web separado do GeoGebra Classic, mas fica registrada como um caminho possível para quem quiser aprofundar essa integração entre matemática e programação.

⁸ Aplicativo web gratuito, mantido pela própria equipe do GeoGebra, disponível em <https://www.geogebra.org/python>, que permite controlar construções do GeoGebra usando a linguagem Python.

Na prática, os dois caminhos deste apêndice e do anterior valem a pena de jeitos diferentes. Usar um comando pronto ensina o aluno a aproveitar bem uma ferramenta que já existe; escrever o próprio script, mesmo que em uma linguagem diferente da esperada, ensina a lógica que fica por trás dela. Isso conversa diretamente com a BNCC Computação [15]: saber usar um algoritmo e saber construir um algoritmo são duas habilidades diferentes, e o GeoGebra, mesmo com suas limitações pontuais, permite trabalhar as duas sem precisar de uma linguagem de programação à parte.

ANEXO A – COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS (BNCC)

Tabela I.1 – Competências Específicas da Área de Matemática e suas Tecnologias (BNCC/EM)

Competência	Descrição
1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018, p. 531.