



ALISSON MAGNO DOMINGHETTI

**INTEGRAÇÃO DE SISTEMA DE NAVEGAÇÃO
INERCIAL COM RESTRIÇÕES DE MOVIMENTO E
ATUALIZAÇÕES ESTACIONÁRIAS**

LAVRAS – MG

2023

ALISSON MAGNO DOMINGHETTI

**INTEGRAÇÃO DE SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL COM
RESTRICÇÕES DE MOVIMENTO E ATUALIZAÇÕES ESTACIONÁRIAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Felipe Oliveira e Silva
Orientador

**LAVRAS – MG
2023**

**Ficha Catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da
Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) autor(a).**

Dominghetti, Alisson Magno

Integração de sistema de navegação inercial com restrições de movimento e atualizações estacionárias / Alisson Magno Dominghetti. – 2023.

93 p. : il.

Orientador: Prof. DSc. Felipe Oliveira e Silva.

Dissertação (mestrado acadêmico)– Universidade Federal de Lavras, 2023.

Bibliografia.

1. Sistema de Navegação Inercial. 2. Restrições de Movimento. 3. Atualizações Estacionárias. I. Silva, Felipe Oliveira. II. Título.

ALISSON MAGNO DOMINGHETTI

**INTEGRAÇÃO DE SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL COM
RESTRICÇÕES DE MOVIMENTO E ATUALIZAÇÕES ESTACIONÁRIAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 28 de setembro de 2023.

Prof. DSc. Felipe Oliveira e Silva UFLA
Prof. DSc. Danilo Alves de Lima UFLA
Prof. DSc. Giovani Bernardes Vitor UNIFEI

Prof. DSc. Felipe Oliveira e Silva
Orientador

**LAVRAS – MG
2023**

*A Deus,
aos meus pais
aos meus irmãos,
a minha noiva,
dedico*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por ter-me agraciado com força e perseverança, permitindo-me concluir esta jornada de conhecimento. Sem Ele, nada disso seria possível.

Expresso minha profunda gratidão a meus queridos pais, José Carlos Dominghetti e Rosa Helena F. Dominghetti, cujo apoio incondicional e compreensão da importância da educação como a maior herança têm sido alicerce fundamental.

Aos meus irmãos, Anderson William Dominghetti e José Carlos Dominghetti Júnior, dedico minha gratidão pelo constante companheirismo e amizade, sempre presentes.

À minha noiva, Ângela Figueiredo Marciano, minha inspiradora e leal companheira, agradeço por me motivar desde o início do mestrado e por ser minha fortaleza nos momentos mais desafiadores, inclusive quando pensei em desistir.

Ao meu orientador, Prof. Felipe Oliveira e Silva, expresso meu reconhecimento por sua paciência e compreensão desde o princípio, compreendendo a árdua tarefa de conciliar mestrado e trabalho. Agradeço, também, pelos ensinamentos não apenas durante este mestrado, mas ao longo de toda minha trajetória acadêmica em que sua presença se fez notável.

Aos membros da banca, estendo meu agradecimento por suas contribuições exemplares e construtivas, que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho. Suas análises enriqueceram sobremaneira este processo.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), em particular ao Programa de Mestrado em Engenharia de Sistemas e Automação (PPGESISA), por todo suporte necessário para a realização deste trabalho.

A todos aqueles que, de uma forma ou outra, compartilharam dessa jornada comigo, minha mais sincera gratidão. Este trabalho é um testemunho do poder do apoio, da amizade e da dedicação em nossa busca incessante pelo conhecimento.

*"Não entregues tua alma à tristeza, não atormentes a ti mesmo em teus pensamentos.
A alegria do coração é a vida do homem, e um inesgotável tesouro de santidade. A
alegria do homem torna mais longa a sua vida. Tem compaixão de tua alma, torna-te
agradável a Deus, e sê firme; concentra teu coração na santidade, e afasta a tristeza
para longe de ti."
Eclo 30: 22,24*

RESUMO

Sistemas de Navegação Inercial (INSs) são sistemas de navegação constituídos por sensores inerciais (acelerômetros e girômetros), os quais são de extrema importância para aplicações veiculares terrestres, aéreas, espaciais, marítimas, subaquáticas, etc. Os INSs fornecem uma solução completa de navegação (posição, velocidade e orientação) do veículo a uma alta taxa de amostragem, com alta banda passante, e são independentes de sinais externos. Contudo, INSs apresentam a desvantagem de acumular erros no longo prazo, devido às integrações numéricas internamente realizadas. Uma maneira de se mitigar esse acúmulo de erros é integrando o INS com sensores auxiliares, geralmente por meio de filtros de Kalman. Uma abordagem alternativa, consiste na utilização de restrições físicas (MCs) dos veículos e/ou condições estacionárias (ZUPTs) do mesmo, na condição de sensores virtuais para auxílio do INS. Informações tais como velocidade linear e/ou angular nulas, velocidade nula ao longo do eixo das rodas traseiras e na direção perpendicular à ela e ao terreno podem ser inseridas no filtro de Kalman como se fossem medições fornecidas por sensores físicos, colaborando, dessa forma, para a redução do acúmulo de erro nos INSs. Este trabalho revisita o problema supracitado e investiga técnicas que permitam a fusão sensorial, para a melhoria da solução de navegação. Por meio da realização de simulações computacionais e experimentos práticos, nos quais veículos em escala real foram equipados com módulos de Sistema de Navegação Inercial (INS), foi possível realizar uma comparação entre diferentes cenários e examinar o desempenho das diversas técnicas de integração em relação aos eixos norte, leste, horizontal e vertical.

Palavras-chave: Sistemas de Navegação Inercial. Filtragem de Kalman. Restrições de Movimento. Atualizações Estacionárias.

ABSTRACT

Inertial Navigation Systems (INSs) are navigation systems composed of inertial sensors (accelerometers and gyroscopes), which are of utmost importance for terrestrial, aerial, space, maritime, underwater, and other vehicle-related applications. Inertial Navigation Systems provide a complete navigation solution (position, velocity and orientation) for the vehicle at a high sampling rate, high bandwidth, being also independent of external signals. Nevertheless, INSs have a disadvantage of accumulating errors in the long term, due to the numerical integrations carried out internally. One solution to mitigate this error accumulation is to integrate the INS with auxiliary sensors, usually via Kalman filters. An alternative approach is to use vehicles's motion constraints (MCs) and/or stationary conditions (ZUPTs), as virtual sensors in order to aid the INS. Informations, such as zero linear and/or angular velocity, zero velocity along the axis of the rear axis, and in the direction that is perpendicular to it and to the terrain can be inserted into the Kalman filter as if they were provide by true sensors, collaborating, in this way for the reduction in INS error accumulation. This work, therefore, revisits the aforementioned problem, and investigates the detection of stationarity techniques that allow sensory fusion, to improve the navigation solution. Through the conduct of computational simulations and practical experiments, in which full-scale vehicles were equipped with Inertial Navigation System (INS) modules, it was possible to conduct a comparison among different scenarios and assess the performance of various integration techniques concerning the north, east, horizontal, and vertical axes.

Keywords: Inertial Navigation Systems. Kalman Filtering. Motion Constraints. Zero Updates.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Diagrama de blocos dos sistemas de navegação.	15
Figura 1.2 – Diagrama de blocos de um sistema INS/ZUPT/MC integrado via AKF.	20
Figura 2.1 – Conceito de navegação inercial.	22
Figura 2.2 – Exemplo de funcionamento de um acelerômetro.	24
Figura 2.3 – Esquema de montagem de um acelerômetro pendular em malha aberta.	24
Figura 2.4 – Esquema de montagem de um acelerômetro pendular em malha fechada.	25
Figura 2.5 – Esquema de montagem de um acelerômetro ressonante.	26
Figura 2.6 – Esquema de funcionamento de um girômetro vibratório.	27
Figura 2.7 – Esquema de funcionamento de um girômetro ótico.	28
Figura 2.8 – Erro de viés de um sensor inercial	29
Figura 2.9 – Erro de fator de escala de um sensor inercial	31
Figura 2.10 – Desalinhamento entre os eixos do corpo, acelerômetro e girômetros.	32
Figura 2.11 – Ruído aleatório de um sensor inercial.	34
Figura 2.12 – Representação de navegação inercial unidimensional.	35
Figura 2.13 – Transformação do sistema de coordenadas do corpo para o sistema de coordenadas de navegação.	36
Figura 2.14 – Diagrama de blocos das equações de navegação.	38
Figura 3.1 – Elementos do filtro de Kalman	44
Figura 3.2 – Etapas do algoritmo do filtro de Kalman	46
Figura 3.3 – Arquitetura de correção INS de malha aberta	51
Figura 3.4 – Arquitetura de correção INS em malha fechada	51
Figura 5.1 – Trajetória simulada, mostrada nos eixos x , y e z (NED).	67
Figura 5.2 – Erros de posição em norte para a simulação.	70
Figura 5.3 – Erros de posição em leste para a simulação.	71
Figura 5.4 – Erros de posição na horizontal para a simulação.	72
Figura 5.5 – Erros de posição na vertical para a simulação.	72
Figura 5.6 – Veículo tipo sedan utilizado para o experimento 1.	75
Figura 5.7 – Módulo MTi7 instalado próximo ao eixo das rodas traseiras do veículo.	75
Figura 5.8 – Trajeto realizado com o veículo instrumentado com o modulo de na- vegação integrada MTi-7.	76
Figura 5.9 – Erros de posição em norte para o experimento 1.	77

Figura 5.10 – Erros de posição em leste para o experimento 1.	77
Figura 5.11 – Erros de posição na horizontal para o experimento 1.	78
Figura 5.12 – Erros de posição na vertical para o experimento 1.	79
Figura 5.13 – Veículo tipo minivan utilizado para o experimento 2 e 3.	80
Figura 5.14 – Módulo MTi-680G instalado próximo ao centro do eixo das rodas tra- seiras do veículo.	81
Figura 5.15 – Erros de posição em norte para o experimento 2.	82
Figura 5.16 – Erros de posição em leste para o experimento 2.	83
Figura 5.17 – Erros de posição na horizontal para o experimento 2.	83
Figura 5.18 – Erros de posição na vertical para o experimento 2.	84
Figura 5.19 – Erros de posição em norte para o experimento 3.	85
Figura 5.20 – Erros de posição em leste para o experimento 3.	86
Figura 5.21 – Erros de posição na horizontal para o experimento 3.	87
Figura 5.22 – Erros de posição na vertical e para o experimento 3.	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores característicos de viés para diferentes tipos de IMUs.	30
Tabela 3.1 – Aplicações de filtragem de Kalman em navegação.	45
Tabela 5.1 – Erros de inicialização do INS.	67
Tabela 5.2 – Viés instabilidade.	68
Tabela 5.3 – Tempo de correlação dos vieses instabilidade.	68
Tabela 5.4 – Tempo de correlação dos vieses instabilidade.	68
Tabela 5.5 – Vieses dos girômetros dependentes da gravidade.	68
Tabela 5.6 – Valores de erros aleatórios adotados para o INS.	69
Tabela 5.7 – Resolução dos sensores.	69
Tabela 5.8 – Valores adotados para a inicialização de P	69
Tabela 5.9 – Valores adotados para S	70
Tabela 5.10 – Valores adotados para R	70
Tabela 5.11 – Valores RMS (m) dos erros de posição para a simulação.	73
Tabela 5.12 – Especificações de desempenho dos módulos XSENS.	74
Tabela 5.13 – Parâmetros dos girômetros dos módulos XSENS.	74
Tabela 5.14 – Parâmetros dos acelerômetros dos módulos XSENS.	74
Tabela 5.15 – Valores RMS (m) dos erros de posição para o experimento 1.	79
Tabela 5.16 – Valores RMS (m) dos erros de posição para o experimento 2.	84
Tabela 5.17 – Valores RMS (m) dos erros de posição para o experimento 3.	88

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AKF	Filtro de Kalman Adaptativo
DR	<i>Dead Reckoning</i>
EKF	Filtro de Kalman Estendido
GNSSs	Sistemas de Navegação Global por Satélites
GPS	Sistema de Posicionamento Global
HDR	<i>Heuristic Drift Reduction</i>
IAE	Estimativa Adaptativa Baseada em Inovação
IMU	Unidade de Medição Inercial
INSs	Sistemas de Navegação Inercial
MMAE	Estimativa Adaptativa baseada em Modelos Múltiplos
MCs	Restrições de Movimento
PFX	<i>Position Fixing</i>
PPP	Posicionamento por Ponto Preciso
RIAE	Estimativa Adaptativa Baseada em Inovação Robusta
ZUPTs	Atualizações Estacionárias

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Aceleração de força específica
b	Corpo
b_i	Viés instabilidade
b_r	Viés repetibilidade
e	Sistema de coordenadas ECEF
f	Força específica
g	Aceleração devido à gravidade
g_0	Aceleração média na superfície da Terra ($1g = 9,80665m/s^2$)
L_b	Latitude geodésica
h_b	Altitude geodésica
m	Massa
\mathbf{m}_a	Vetor de erros de acoplamento cruzado de acelerômetros
\mathbf{m}_g	Vetor de erros de acoplamento cruzado de girômetros
n^b	Eixos do sistema de coordenadas do corpo
n^{accel}	Eixos de coordenadas do acelerômetro
n^{gyro}	Eixos de coordenadas do girômetro
R_E	Raio de curvatura transversal da Terra
r	Raio
S	Densidade espectral de potência
s_a	Erro de fator de escala do acelerômetro
s_g	Erro de fator de escala do girômetro
λ_b	Longitude
w_a	Erro aleatório do acelerômetro
w_g	Erro aleatório do girômetro
\mathbf{x}	Vetor de estados
z	Inovação de medição
ω_{ib}^b	Taxa angular medida pelos girômetros
ω_{ie}^n	Vetor velocidade de rotação da Terra
ω_{en}^n	Taxa de transporte
ω_{ie}	Magnitude da taxa de rotação da Terra

t	Tempo
τ	Tempo de correlação
τ_i	Intervalo de tempo de integração de navegação inercial
R_N	Raio de curvatura meridiano da Terra
C	Matriz de transformação de coordenadas
F	Matriz dinâmica do sistema
H	Matriz de medição do sistema
I	Matriz identidade
K	Matriz de ganhos de Kalman
M	Matriz de erros de acoplamento cruzado
P	Matriz de covariância dos estados
Q	Matriz de covariância dos ruídos do sistema
Q'	Matriz aproximada de covariância dos ruídos do sistema
R	Matriz de covariância dos ruídos de medição
S	Matriz de densidade de ruído do sistema
Φ	Matriz de transição de estados
Ω	Matriz anti-simétrica de velocidade angular

SUMÁRIO

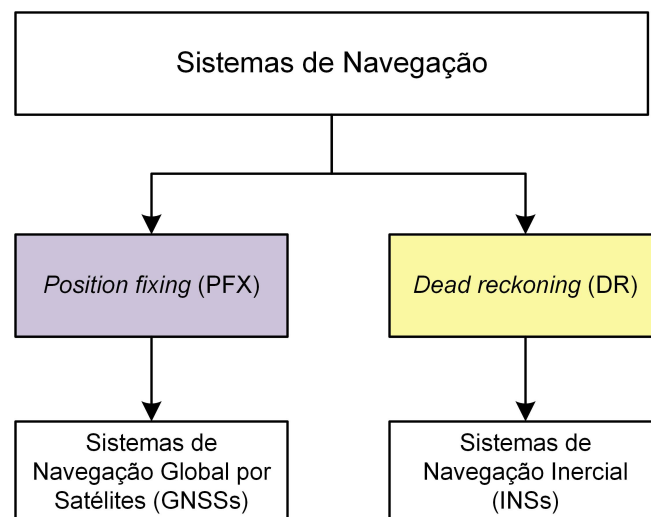
1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	20
1.2	Contribuições	21
1.3	Organização da Dissertação	21
2	SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL	22
2.1	Sensores Inerciais	23
2.1.1	Acelerômetro	23
2.1.2	Girômetro	26
2.1.3	Erros Característicos	28
2.1.3.1	Vieses	29
2.1.3.2	Erros de Fator de Escala	31
2.1.3.3	Vieses Dependentes da Aceleração	31
2.1.3.4	Erros de Acoplamento Cruzado	32
2.1.3.5	Ruídos Aleatórios	33
2.2	Navegador Inercial	34
2.2.1	Atualização da Atitude	38
2.2.1.1	Transformação de Coordenadas do Vetor Força Específica	40
2.2.1.2	Atualização da Velocidade	40
2.2.1.3	Atualização da Posição	42
3	PRINCÍPIOS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL AUXILIADA	43
3.1	Princípios da Filtragem de Kalman	43
3.1.1	Elementos do Filtro de Kalman	43
3.1.2	Etapas e Funcionamento do Filtro de Kalman	45
3.2	Propagação de Erros em INS	49
3.2.1	Arquiteturas de Integração	50
3.2.2	Seleção de Estados e Propagação de INSS	52
3.2.2.1	Modelagem de Ruídos de INSS	55
4	METODOLOGIA	57
4.1	Integração INS/ZUPT	57
4.1.1	<i>Zero Velocity Updates</i>	57
4.1.2	<i>Zero Angular Rate Updates</i>	59

4.2	Técnicas de Detecção de Estacionariedade	61
4.3	Integração INS/MC	62
5	RESULTADOS	66
5.1	Resultados Simulados	66
5.2	Resultados experimentais	73
5.2.1	Experimento 1	74
5.2.2	Experimento 2	80
5.2.3	Experimento 3	85
6	CONCLUSÃO	89
	REFERÊNCIAS	91

1 INTRODUÇÃO

Em engenharia, o termo navegação pode estar associado a dois conceitos diferentes. O primeiro diz respeito à determinação da posição, velocidade e orientação (também referida como atitude) de um corpo com relação a um ponto de referência conhecido, sendo definido como "ciência da navegação". O segundo conceito está relacionado ao planejamento e manutenção de uma trajetória de um local para outro, evitando obstáculos e colisões, e é frequentemente conhecido como "arte da navegação" (GROVES, 2013) (GREWAL; ANDREWS; BARTONE, 2013). Este trabalho foca na "ciência da navegação", que se ramifica em duas principais técnicas, a saber: as técnicas do tipo *position fixing* (PFX) e as técnicas do tipo *dead reckoning* (DR), conforme Figura 1.1.

Figura 1.1 – Diagrama de blocos dos sistemas de navegação.



Fonte: Do Autor (2022).

PFX é uma técnica de navegação, utilizada nos Sistemas de Navegação Global por Satélites (GNSSs) que fornece uma solução pontual de posicionamento, a partir de várias medições feitas em um determinado instante de tempo. Dentro dessa técnica de navegação existem os sistemas baseados em recepção de sinais externos (de satélites, rádios, acústicos, óticos, etc.) e sistemas baseados em características ambientais (câmeras, sensores infravermelhos, radares laser, mapas, etc.). Ambos os métodos de PFX requerem dados previamente determinados, tais como a posição de pontos de referência, informações de identificação de características ambientais e dados de correspondência de padrões (GROVES, 2013). Exemplos dessa tecnologia são os Sistemas de Navegação Global por Satélites (GNSS), tais como o GPS, o GLONASS, o BeiDou e o Galileo.

Técnicas de navegação do tipo DR, foco deste trabalho, por outro lado, utilizam o princípio da integração numérica para determinação de posição veicular a partir do conhecimento do deslocamento e da posição em estados anteriores, podendo, inclusive, recorrer a sensores que medem a velocidade, aceleração e velocidade angular. Dadas as condições iniciais especificadas, uma integração numérica da aceleração fornece velocidade e uma segunda integração fornece posição (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012). As principais vantagens desse tipo de sistema em comparação com métodos do tipo *position fixing* são: operação contínua (independente de sinais externos), altas taxas de amostragem e atualização, baixo ruído (precisão e estabilidade elevadas, com pouca interferência de variações ou distorções indesejadas nas leituras dos sensores) e o fornecimento de atitude, taxa angular e aceleração além da posição e velocidade (GROVES, 2013).

Um exemplo de sistema *dead reckoning* são os Sistemas de Navegação Inercial (INSs), os quais utilizam os sensores acelerômetros e girômetros instalados em uma plataforma veicular. Três acelerômetros e três girômetros compõem um conjunto inercial em espaço tridimensional de seis graus de liberdade (três de rotação e três de translação). Esse agrupamento de sensores e sua estrutura (*case*) são chamados de Unidade de Medição Inercial (IMU) (CHATFIELD, 1997).

Um dos problemas da navegação inercial (e de qualquer outra técnica *dead reckoning*) é que a sua solução diverge no tempo, e uma maneira de se resolver esse problema é fazer sua fusão com sensores auxiliares. Exemplos bem sucedidos de integrações de INS com sensores auxiliares incluem: GNSS, magnetômetros e barômetros (LI et al., 2019) (DONG et al., 2022) (CUI et al., 2021). Já outra técnica bastante empregada principalmente em veículos terrestres, e que é tema de estudo deste trabalho, são as integrações de INS com sensores virtuais, fazendo uso de condições dinâmicas e/ou restrições físicas dos veículos como se fossem sensores auxiliares. Exemplos de tais sensores virtuais são as chamadas atualizações estacionárias (do inglês, *Zero Updates* (ZUPTs)) e restrições de movimento (do inglês, *Motion Constraints* (MCs)).

ZUPTs são informações auxiliares utilizadas para manter limitados os erros de navegação de um veículo ou usuário que esteja parado momentaneamente (GROVES, 2013). Quando não são implementadas, a precisão do INS pode ser colocada em risco por um aumento potencialmente ilimitado nos erros de velocidade e suas contribuições

diretas para os erros de atitude e posição (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012). Uma grande dificuldade associada à utilização de ZUPTs reside na adequada identificação da condição estacionária do veículo, especialmente quando o mesmo somente se encontra equipado com um INS (FARRELL, 2008).

Restrições de movimento de um veículo terrestre, por outro lado, estão associadas ao fato de que o movimento do mesmo é, em geral, limitado à sua direção frontal. Supondo que o veículo não sofra fenômenos de derrapagem lateral ou movimento vertical, a velocidade do mesmo ao longo do eixo tracionado (traseiro ou dianteiro), é nula, assim como a velocidade no eixo mutuamente perpendicular a este e ao eixo longitudinal do veículo (SUKKARIEH, 2000). Em Li et al. (2012) é demonstrado que as MCs permitem estimar ângulos de rolamento (*roll*) do veículo melhor do que os ângulos de guinada (*yaw*), e permitem estimar, ainda, os ângulos de guinada melhor que os ângulos de arfagem (*pitch*) em condições frontais e rotacionais do veículo. Ou seja, aplicando-se as restrições de movimento há uma maior observabilidade para rolamento e guinada do veículo.

A aplicação de atualizações estacionárias tem sido bastante difundida principalmente em navegação de pedestres, preponderando trabalhos focados em atenuar vieses da IMU como forma de reduzir os erros de navegação (WANG; CHERNYSHOFF; SHKEL, 2019), e em desenvolver limiares adaptativos baseados na variação de velocidade durante o percurso sem a necessidade do ajuste de parâmetros durante o mesmo (WANG; SHKEL, 2019). Já para fins de navegação veicular baseada em filtro de Kalman, ZUPTs têm sido usados com o intuito de se ponderar de forma ótima os efeitos de ruído de observação nos erros da velocidade, o que aumenta a precisão da navegação (XIAOFANG et al., 2014). Nesse contexto, os autores utilizaram detectores de variância da aceleração e de magnitude da aceleração e da taxa angular para a identificação de paradas do INS via filtro de Kalman linear discreto.

No trabalho de Wang e Gao (2010) desenvolveu-se uma aplicação na qual os ZUPTs foram integrados ao INS por meio de filtros de Kalman, com o objetivo de corrigir erros originários de possíveis falhas de sinais de GPS. Nesse sentido, primeiramente o filtro fez uso de apenas uma atualização do GPS para estimar os vieses do acelerômetro para cada trajetória, e, em seguida, foi desativada a atualização do GPS e usou-se apenas as inovações de medição corrigidas pelos vieses do acelerômetro. Os experimentos de campo

mostraram uma precisão na posição de cerca de 15 m, com interrupções de 3 minutos do GPS quando aplicados os ZUPTs e cerca de 100 m sem o modelo proposto.

O uso de restrições de movimento em fusões sensoriais envolvendo com INSs pode se dar também em conjunto com outros sensores ou técnicas de mitigação de erros. Estudos integrando MCs com magnetômetros, por exemplo, apresentaram uma significativa melhoria na estimativa da atitude do veículo e uma ligeira melhoria na posição do mesmo. No trabalho de Won et al. (2015), por exemplo, foi realizada a compensação da inclinação do veículo, para se obter medições magnéticas horizontais do ângulo de declinação, para referenciar as estimativas ao norte verdadeiro e de distorções magnéticas, visando ajustar o fator de escala e viés das medições. Para isso, os autores utilizaram um Filtro de Kalman Estendido (EKF) para fazer a integração e correção dos erros das medições, resultando em uma fusão sensorial que apresentou significativa melhoria na estimação de posição em comparação com as demais fusões sensoriais investigadas, a saber, INS/MC/-Magnetômetros (WON et al., 2015), INS/GNSS/MC/Odômetros (CHOI et al., 2019) e INS/GNSS/Odômetro/Barômetro (CHIANG et al., 2019).

A integração de MCs em conjunto com atualizações estacionárias busca aliar a detecção de paradas do INS com os deslocamentos laterais e verticais do veículo, nominalmente nulos. No trabalho de Sun e Yang (2020), por exemplo, é demonstrado que, via ZUPTs e MCs, é possível atenuar os erros de posicionamento em um INS/GNSS baseado na técnica de Posicionamento por Ponto Preciso (PPP), originários principalmente quando da ausência de GNSS. Já outros estudos na área mostram que a utilização de ZUPTs e MCs proporciona uma melhoria nas soluções de navegação de aproximadamente 50% quando se integra ambas as técnicas em um INS (LIU et al., 2012). Todavia, no trabalho dos autores, o sistema opera em conjunto com um receptor GNSS, sendo capaz de operar de modo estável, i.e., somente com referência inercial, apenas por 15 minutos, o que faz com que esse apresente, eventualmente, acúmulo de erros no tempo.

Kilic et al. (2019) apresenta um trabalho integrando ZUPTs e MCs, utilizando EKF, em veículos do tipo *rover* planetários, no intuito de se compensar problemas que a odometria apresentava devido à irregularidades de solo. Nele é demonstrado que os ZUPTs, podem reduzir significativamente a taxa do crescimento do erro do INS para *rovers* com rodas e que, ainda, o deslocamento lateral da roda pode ser detectado como discrepâncias de velocidade entre as medições oriundas da odometria e a solução de na-

vegação. Nos resultados foi possível avaliar que há uma notável melhoria com relação aos erros de posição, em todos os cenários, principalmente quando se funde INS/ZUPTs/MCs.

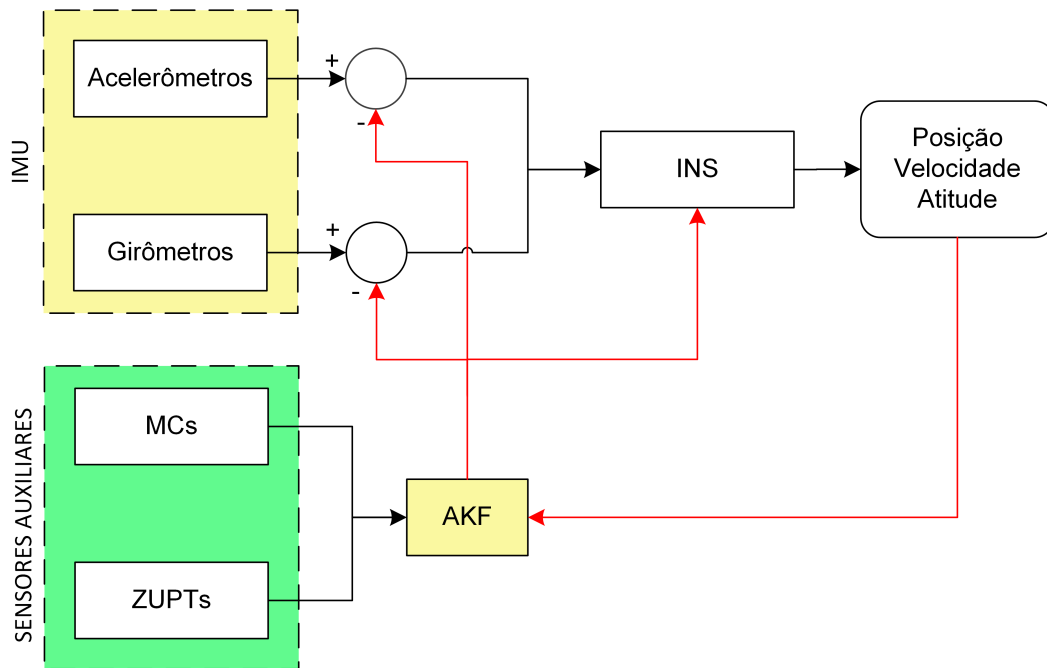
Já em Zhang et al. (2014) a fusão de ZUPTs e MCs com Redução de Deriva Heurística (HDR) também trouxe significativas melhorias na posição do veículo. Aplicando MCs ao sistema é obtido uma melhoria de aproximadamente 95%, tanto para a posição norte quanto para o leste, e de aproximadamente 78% para altitude do veículo. No cenário onde é feita a fusão de MCs/ZUPTs, a melhoria para a posição norte e leste é de aproximadamente 100%, e para a altitude chega a ser de 88%. Por fim, na integração MCs/ZUPTs/HDRs os resultados são aproximadamente os mesmos obtidos da integração MCs/ZUPTs.

Uma outra frente de pesquisa recente na área de ZUPTs e MCs diz respeito à utilização dos mesmos via Filtros de Kalman Adaptativos (AKF) os quais ajustam suas matrizes de covariância de processo e/ou medição à medida em que a navegação evolui. Nesse contexto, pode-se definir duas abordagens para a fusão sensorial via AKF a saber: Estimativa Adaptativa baseada em Modelos Múltiplos (MMAE) e a estimativa adaptativa baseada em inovação (IAE). Enquanto na primeira abordagem um banco de filtros de Kalman funciona em paralelo considerando diferentes modelos para a informação estatística do problema, na segunda a adaptação é feita diretamente nas matrizes de covariância do processo/ou medição com base na alteração da sequência de medições (MOHAMED; SCHWARZ, 1999). A Figura 1.2 mostra o diagrama de um sistema de navegação que faz uso tanto de ZUPTs e MCs, quanto da abordagem AKF para tratamento das incertezas de modelagem.

Em Peng, Lin e Chiang (2012), foi implementado uma MMAE em conjunto com IAE aplicando MC para validação de desempenhos em um sistema INS/GPS. Dois testes de trajetória foram realizados com um veículo. O primeiro, que implementou um AKF/MC, com GPS geodésico, atingiu 25% de melhoria em termos de posição horizontal e vertical em comparação com algoritmo baseado em AKF puro (i.e., sem MC). Já o segundo teste implementou um AKF com MC, e um GPS de baixo custo, atingindo 26% de melhoria em termos de posição horizontal e 20% de melhoria em termos de posição vertical em comparação com algoritmo baseado em AKF puro.

ZhiWen, XiaoPing e JunXiang (2013), por outro lado, utilizaram o AKF para comparar modelos robustos de IAE (RIAE), com IAE e filtragem de Kalman em navegação

Figura 1.2 – Diagrama de blocos de um sistema INS/ZUPT/MC integrado via AKF.



Fonte: Do Autor (2023).

veicular terrestre. Na ocasião, foi verificado que o RIAE-AKF tem um desempenho significativamente superior ao KF e IAE-AKF, especialmente, quando o ruído de medição mostrou-se variável e rigorosamente perturbado. Nesse caso, o algoritmo proposto resultou em uma matriz de covariâncias de inovação suave, evitando a divergência do filtro. Os resultados também demonstraram que o RIAE-AKF é mais robusto e insensível à variação do ruído de medição, além de ter maior precisão e garantir transições mais suaves.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é analisar a integração de INS com ZUPTs e MCs de veículos terrestres por meio de filtros de Kalman de forma a evitar a divergência da solução de navegação no tempo. Além disso, os objetivos específicos deste estudo são:

- Investigar as principais fontes de erro em sistemas de navegação inercial, como erros de modelo, vieses do sensor, ruído e não linearidades, e avaliar as técnicas existentes para mitigar esses erros.
- Investigar abordagens avançadas de fusão de sensores, combinando sistemas de navegação inercial com outras tecnologias, como atualizações estacionárias (ZUPTs) e restrições de movimento (MCs), para melhorar a precisão e a robustez da navegação.

- Realizar uma avaliação simulada e experimental do sistema de navegação inercial desenvolvido, comparando sua precisão e desempenho em diferentes cenários de navegação.

1.2 Contribuições

A principal contribuição deste trabalho reside na investigação de novos métodos para a fusão de técnicas de navegação inercial, especificamente as atualizações estacionárias (ZUPTs) e restrições de movimento (MCs) por meio de Filtro de Kalman Estendido (EKF), com o objetivo de avaliar a mitigação de erros de posição nos canais norte, leste, vertical e horizontal.

Resultados preliminares deste estudo foram divulgados durante o XXIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA) em outubro de 2022, sob o título "Integração de Sistemas de Navegação Inercial com Atualizações Estacionárias e Restrições de Movimento" (DOMINGHETTI et al., 2022).

1.3 Organização da Dissertação

Este trabalho se estrutura em seis capítulos, organizados da seguinte maneira:

O Capítulo 1 oferece uma introdução ao contexto do tema de pesquisa, delineando seus objetivos, contribuições e estrutura organizacional.

O Capítulo 2 explora a definição do Sistema de Navegação Inercial (INS), abordando os tipos de sensores empregados e suas principais fontes de erro. Discute ainda os navegadores inerciais e as equações fundamentais que os caracterizam.

No Capítulo 3, é apresentada a fundamentação teórica da filtragem de Kalman, seu funcionamento, aplicação em INSs e modelagem matemática, além da propagação de erros. Em seguida, examina os erros de atitude, velocidade e posição, juntamente com a integração de INSs por meio de ZUPTs e MCs.

O Capítulo 5 compila os resultados obtidos. Na Seção 5.1, são apresentados os resultados de simulações executadas no ambiente MATLAB, incluindo a comparação das técnicas de fusão sensorial. A Seção 5.2 disponibiliza os resultados obtidos a partir de experimentos realizados em um veículo em escala real equipado com uma plataforma INS.

Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as conclusões do estudo e sugestões para futuras investigações.

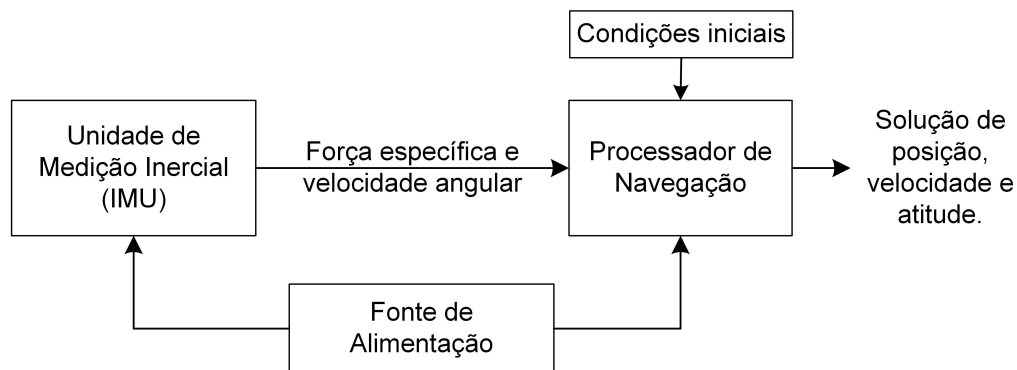
2 SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

Sistemas de Navegação Inercial (INSs) são compostos basicamente por uma IMU dotada de sensores inerciais, tais como acelerômetros e girômetros, e um computador de bordo. O princípio da navegação inercial é baseado na primeira lei do movimento de Newton. Essa lei estabelece que um corpo em repouso tende a permanecer em repouso e um corpo em movimento tende a permanecer em movimento (ambos do ponto de vista inercial), a menos que uma força externa aja sobre ele (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

O cômputo de uma solução de navegação inercial é um processo iterativo, i.e, faz uso da solução do instante anterior. Portanto, a solução de navegação deve ser inicializada antes que o INS possa funcionar (GROVES, 2013). O resultado dessas iterações é a determinação de posição, velocidade e orientação por meio de integrações numéricas.

A Figura 2.1 ilustra o conceito básico de funcionamento de um navegador inercial. Como pode ser observado, as informações dos sensores inerciais são enviadas para um processador de navegação que implementa as iterações responsáveis por fornecer a solução de navegação - posição, velocidade e atitude.

Figura 2.1 – Conceito de navegação inercial.



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

Assim como todo sistema de navegação, a navegação inercial possui vantagens e desvantagens. As principais vantagens dessa tecnologia de navegação são: independência de sinais externos, alta banda passante (capacidade de recuperar movimento de um veículo com alta dinâmica sem que haja perda de informações) e alta taxa de amostragem. Já um dos problemas que mais impactam a navegação inercial é a divergência da solução no tempo oriunda das integrações numéricas. Uma maneira de se mitigar esse problema é realizar a integração de INS com sensores auxiliares.

Neste capítulo são discutidas características de sensores inerciais (Seção 2.1), a saber acelerômetros, girômetros e seus erros característicos. Além disso, são apresentadas as principais equações a serem implementadas em um navegador inercial (Seção 2.2).

2.1 Sensores Inerciais

Sensores inerciais são sensores que fornecem medições vetoriais de acelerações de forças específicas (referidas como acelerações não-gravitacionais, ou simplesmente, forças específicas) e velocidades angulares, ambas com relação ao espaço inercial (FARRELL, 2008). A maioria dos acelerômetros medem força específica ao longo de um único eixo sensível. Da mesma forma, a maioria dos girômetros medem a taxa angular em torno de um único eixo. Assim sendo, uma Unidade de Medição Inercial (IMU) combina vários acelerômetros e girômetros, geralmente três de cada, para produzir uma medição tridimensional de força específica e taxa angular (GROVES, 2013).

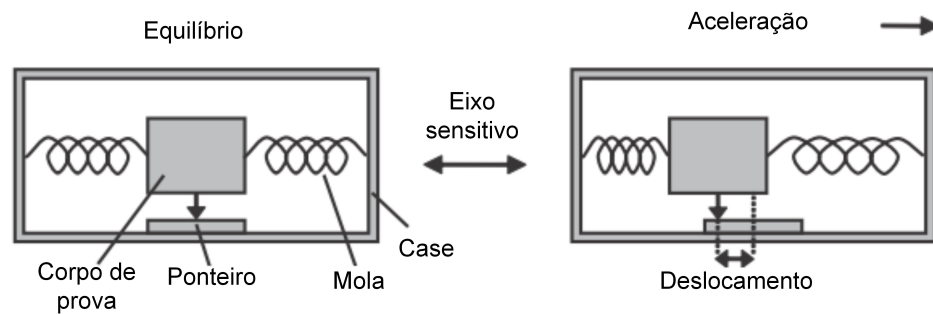
Assim como a navegação inercial, em algumas literaturas, é chamada de "navegação em caixa preta", por ser totalmente independente de sinais externos, os sensores que a compõem são também designados sensores em "caixa preta". Porém, existem aspectos particulares que precisam ser levados em consideração para modelagem de um sensor inercial, os quais influenciam diretamente no desempenho da navegação inercial.

2.1.1 Acelerômetro

Acelerômetros são sensores inerciais capazes de medir a aceleração de forças específicas (não gravitacionais) de um corpo. O princípio de funcionamento de um acelerômetro pode ser aprendido a partir de uma massa de prova, m , conectada a uma caixa (*case*) por um par de molas, conforme mostrado na Figura 2.2. Nessa ilustração, o eixo da mola é o eixo sensível do movimento, ou seja, o eixo horizontal. A aceleração, gerada por meio de uma força específica aplicada, desloca o *case* com uma quantidade de movimento proporcional. Esse deslocamento na posição do corpo de prova é então detectado por um ponteiro que converte o deslocamento em uma informação de aceleração. A posição de equilíbrio da massa é calibrada para aceleração zero. Uma aceleração para a direita faz com que a massa de prova se mova para a esquerda com relação à caixa indicando, no caso ilustrado, uma aceleração positiva.

O que os acelerômetros medem é modelado pela segunda lei de Newton como:

Figura 2.2 – Exemplo de funcionamento de um acelerômetro.



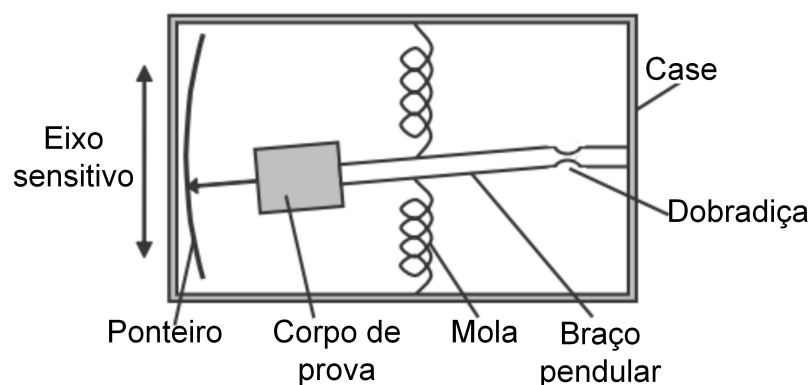
Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{F} é a força fisicamente aplicada (exceto a gravidade) e m é a massa à qual ela é aplicada. A força por unidade de massa é chamada de aceleração de força específica ou simplesmente força específica \mathbf{a} (GREWAL; ANDREWS; BARTONE, 2013).

Existem duas tecnologias de fabricação mais comuns para acelerômetros, a saber, os acelerômetros pendulares em malha fechada e os ressonantes. Acelerômetros pendulares são semelhantes ao exemplo anterior. No entanto, eles contêm um par de molas que conecta a massa de prova ao *case* via uma haste, a qual limita o movimento da mesma ao plano do eixo sensível. Conforme a força é aplicada sobre o *case*, o ponteiro se desloca sobre o eixo sensível e um sensor (resistivo, potenciômetro), medindo o deslocamento, conforme Figura 2.3.

Figura 2.3 – Esquema de montagem de um acelerômetro pendular em malha aberta.



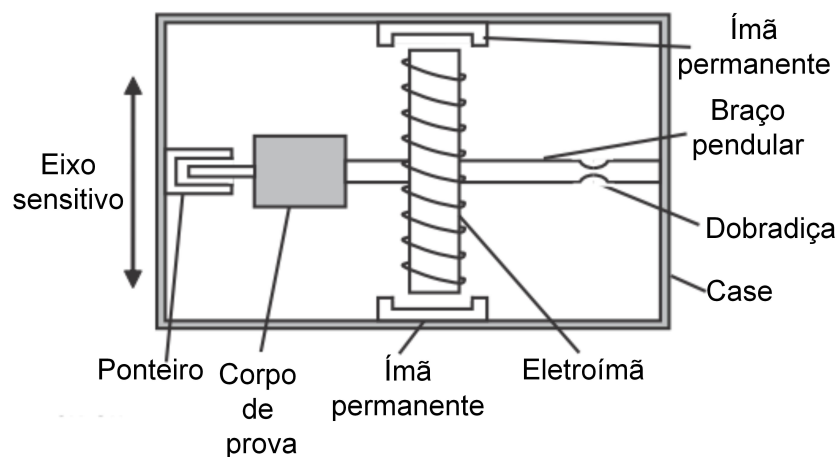
Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

Algumas desvantagens desse tipo de acelerômetro são:

- Possuem uma baixa resolução;
- A força exercida pelas molas apresentam histerese e não-linearidade, devido à sua deformação;
- O eixo sensitivo, por não ser exatamente paralelo à direção de movimentação da massa de prova, pode resultar em variações de angulação e prejudicar as medições práticas.

Uma topologia mais interessante para aplicações de acelerômetros é a de malha fechada. Essa é semelhante ao exemplo anterior (dito malha aberta), porém nela existe um eletroímã conectado à haste e à massa de prova, conforme mostrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Esquema de montagem de um acelerômetro pendular em malha fechada.



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

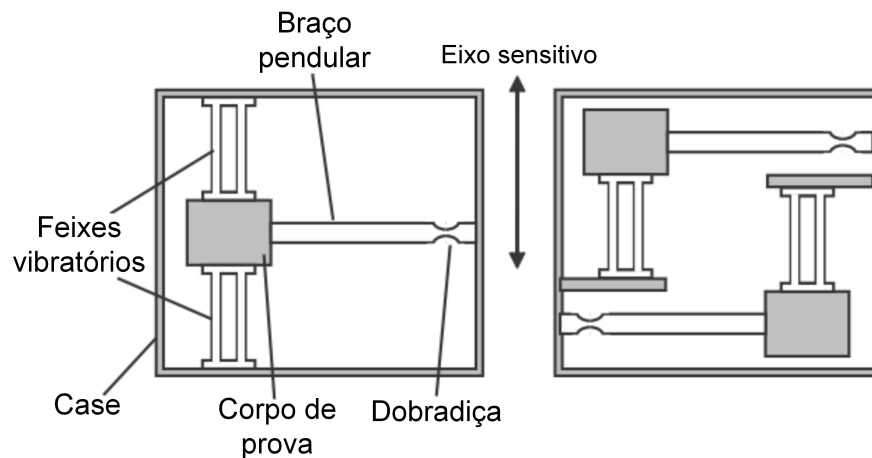
Nas extremidades do eletroímã, que é comandado externamente pela corrente elétrica que age sobre o mesmo, existem ímãs permanentes fixos de polaridades opostas. Além disso, no eixo sensitivo existe um sensor capacitivo que detecta o movimento do braço pendular, e realimenta o eletroímã com uma corrente que cria um campo magnético. Juntamente com os ímãs permanentes, esse tende a manter o corpo de prova fixo em sua posição inicial.

Dessa forma, em malha fechada a medição de força específica feita por esse tipo de acelerômetro não é mais realizada em função do deslocamento da massa de prova, mas sim da corrente elétrica aplicada no eletroímã. Com isso, resolve-se o problema do

eixo sensitivo, de histerese e não-linearidade da mola e a baixa resolução existente em sistemas pendulares em malha aberta. A principal desvantagem encontrada nessa topologia de acelerômetros surge quando o sistema está desenergizado, o que pode danificar o equipamento caso esteja em movimento.

Por fim, existem ainda os acelerômetros ressonantes, onde a massa de prova, assim como nas topologias anteriores, estão encapsuladas em um *case*, conectadas a uma haste com dobradiças. Porém ao invés de se fazer uso de molas, são utilizados feixes vibratórios (contendo cristais piezoelétricos), conforme Figura 2.5, os quais vibram em uma frequência especificada pelo fabricante. Quando uma força é exercida no *case*, surge uma compressão e tração nos feixes, os quais mudam ligeiramente a frequência de ressonância dos mesmos, sendo essa mudança função da aceleração aplicada. As principais vantagens do desse tipo acelerômetro são a ausência de histerese, resolução limitada pelo sensor resistivo e movimento perpendicular ao *case* - devido à baixa deformação dos feixes que o compõem.

Figura 2.5 – Esquema de montagem de um acelerômetro ressonante.



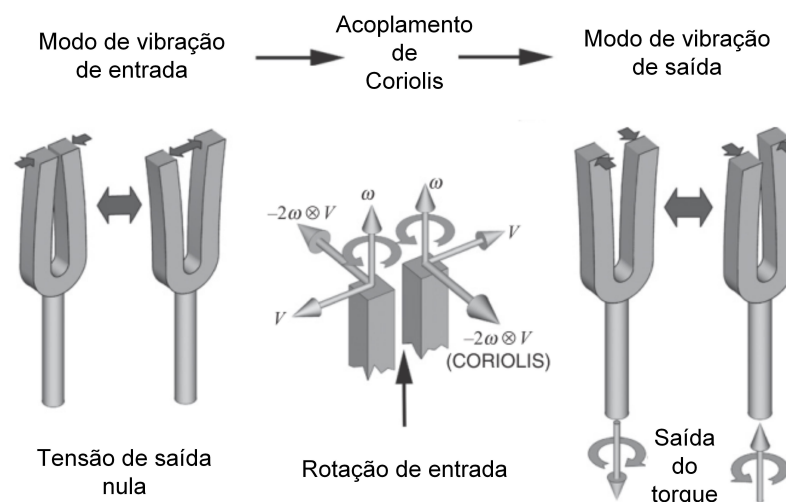
Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

2.1.2 Girômetro

Girômetros são sensores utilizados para se medir taxas angulares com relação a um referencial inercial. São elementos importantes para um INS pois por meio deles consegue-se descrever a orientação (atitude) de um corpo no espaço tridimensional. Os girômetros podem ser subdivididos em três tecnologias de fabricação: girômetros de massa rotativa, óticos e ressonantes.

Os girômetros mecânicos, ou de massa rotativa, atuam com base no princípio da conservação do momento angular (ou ainda quantidade de movimento angular). Eles foram os primeiros girômetros a serem concebidos e encontram baixa aceitação/utilização nos dias de hoje, devido às suas grandes dimensões e complexidade mecânica. Um girômetro vibratório, por outro lado, compreende um elemento que é acionado para sofrer um movimento harmônico simples (Figura 2.6). Tal elemento pode ser uma corda, viga, par de vigas, diapasão, anel, cilindro ou hemisfério. Todos operam sob o mesmo princípio, que é a detecção da aceleração de Coriolis do elemento vibratório quando o girômetro é rotacionado em torno do seu eixo sensitivo (GROVES, 2013). O diapasão, por exemplo, é projetado para que o movimento de entrada e saída de seus dentes seja equilibrado e nenhuma tensão seja transmitida ao suporte. No entanto, quando o diapasão é girado em torno de sua alça, o efeito Coriolis resultante acopla o modo de vibração equilibrada no plano em um modo de vibração fora do plano de torção desequilibrada, que produz torque vibracional na alça. Essa vibração de saída pode ser detectada usando sensores de tensão entre a alça e seu suporte, mas uma solução melhor é anexar outra alça do diapasão na alça de ponta a ponta de modo que o modo de vibração de torção do diapasão conectado tenha a mesma frequência de ressonância que aquele do modo de vibração no plano do diapasão de detecção (GREWAL; ANDREWS; BARTONE, 2013).

Figura 2.6 – Esquema de funcionamento de um girômetro vibratório.

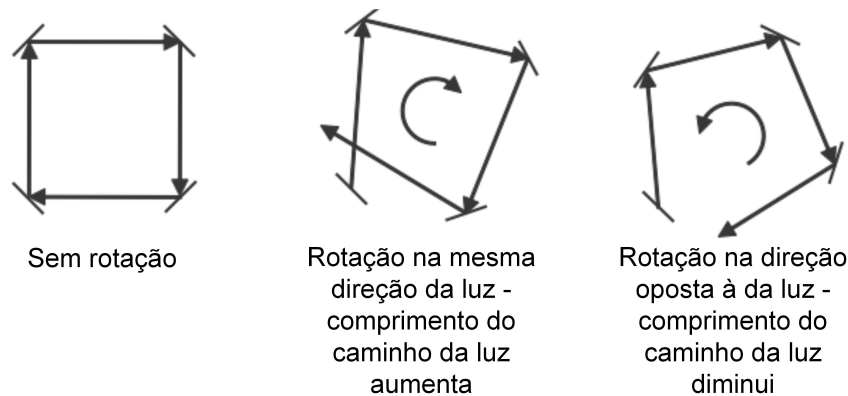


Fonte: Adaptado de (GREWAL; ANDREWS; BARTONE, 2013).

Já os girômetros do tipo óticos, por fim, operam segundo a premissa de que, em um determinado meio, a luz viaja com velocidade constante em relação a um referencial

inercial. Se a luz for direcionada em ambas as direções ao redor de um guia de onda em malha fechada, não giratório, feito de espelhos ou fibra óptica, o comprimento do caminho é o mesmo para ambos os feixes. No entanto, se o guia de ondas é girado em torno de um eixo perpendicular ao seu plano, então, a partir da perspectiva de um observador inercial, as superfícies refletoras estão se afastando para a luz que viaja na mesma direção de rotação (GROVES, 2013).

Figura 2.7 – Esquema de funcionamento de um girômetro ótico.



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

2.1.3 Erros Característicos

Assim como os inúmeros instrumentos da engenharia, os sensores inerciais estão sujeitos a vários erros que se tornam mais complexos à medida que seus custos diminuem. Os erros limitam a precisão com que as grandezas podem ser medidas e são classificados de acordo com duas grandes categorias: erros sistemáticos e estocásticos (ou aleatórios) (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

Erros sistemáticos são erros de variação conhecida/previsível ao longo de um conjunto de medições, que podem ser caracterizados a partir de 4 contribuições distintas:

1. Contribuição fixa: Esse tipo de contribuição está presente no sensor inercial sempre que ele for ligado, e pode ser corrigida fazendo uso de parâmetros de calibração armazenados dentro do próprio sensor e fornecidos pelo fabricante da IMU;
2. Contribuição dependente da temperatura: Pode ser calibrada com base em ensaios laboratoriais, também fazendo uso de parâmetros fornecidos pelo fabricante;

3. Contribuição *run-to-run*: Contribuição que se manifesta com valores diferentes toda vez que o sensor é utilizado, porém, permanecem constantes em todas as medições ao longo de seu funcionamento. Para sua compensação é preciso fazer uso de algoritmos de detecção capazes de estimá-los toda vez que o sensor for ligado (e.g. algoritmos de alinhamento fino (SILVA; HEMERLY; FILHO, 2014));
4. Contribuição *in-run*: Pequena oscilação que acontece ao longo do funcionamento do sensor. Assim como para a contribuição *run-to-run*, é necessário fazer uso de algoritmos de detecção capazes de estimá-la (e.g. algoritmos de integração (FARRELL et al., 2021));

Já os erros estocásticos (aleatórios) são erros imprevisíveis, cujo comportamento em medições futuras não pode ser estimado, independente do conhecimento de amostras anteriores.

2.1.3.1 Vieses

Viés é um tipo de erro sistemático exibido em todos os acelerômetros e girômetros, que é independente da força específica ou velocidade angular que é aplicada sobre o sensor. Em geral, ele pode ser compensado por calibração laboratorial, principalmente para os sensores da última geração. Vieses são caracterizados pela própria saída do sensor quando há entrada zero, como pode ser visto na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Erro de viés de um sensor inercial



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

Por ser um erro do tipo sistemático, o viés possui as quatro contribuições anteriormente citadas. As contribuições fixas e dependentes da temperatura geralmente são compensadas pelo próprio sistema da IMU. A contribuição *run-to-run* mais comumente referida como viés repetibilidade, \mathbf{b}_r , compreende os eventuais resíduos da contribuição fixa, que não foram compensados. Pode ser modelada de acordo com a Equação (2.2).

$$\dot{\mathbf{b}}_r = 0, \quad (2.2)$$

Já a contribuição *in-run*, comumente referida como viés instabilidade, \mathbf{b}_i , incorpora eventuais resíduos da contribuição dependente da temperatura que permaneceram após a compensação, e varia em períodos da ordem de 1 minuto. Ela pode ser modelada como um processo correlacionado de Gauss-Markov de primeira ordem, a saber:

$$\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial t} = -\frac{\mathbf{b}_i}{\tau_i} + w_i, \quad (2.3)$$

onde τ_i e w_i são o tempo de correlação do viés instabilidade e o ruído branco que dirige o mesmo.

Os vieses dos acelerômetros e dos girômetros não são, em geral, quantificados, em termos do sistema internacional de medidas. Para o primeiro, é utilizado subdivisões de g, como mg e μg , onde $1\text{g} = 9,80665\text{ m/s}^2$. Já para o segundo, utiliza-se a medida deg/h, onde $1\text{ deg/h} = 4,848 \times 10^{-6}\text{ rad/s}$. A Tabela 2.1 apresenta valores característicos de vieses para diferentes categorias de IMUs.

Tabela 2.1 – Valores característicos de viés para diferentes tipos de IMUs.

IMU	Viés do Acelerômetro		Viés do Girômetro	
	mg	m/s ²	deg/h	rad/s
Marítima	0,01	10 ⁻⁴	0,001	5 × 10 ⁻⁹
Aviação	0,03 – 0,1	3 × 10 ⁻⁴ – 10 ⁻³	0,01	5 × 10 ⁻⁸
Intermediária	0,1 – 1	10 ⁻³ – 10 ⁻²	0,1	5 × 10 ⁻⁷
Tática	1 – 10	0,01 – 0,1	1 – 100	10 ⁻⁶ – 5 × 10 ⁻⁴
Automotiva	> 3	> 0,03	> 100	> 5 × 10 ⁻⁴

Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

2.1.3.2 Erros de Fator de Escala

O erro fator de escala também é um erro sistemático presente nos sensores inerciais, o qual pode ser definido como o desvio da unidade do gradiente entre entrada e saída (Figura 2.9). Assim, o erro de fator de escala do acelerômetro é proporcional à força específica verdadeira ao longo do eixo sensível, enquanto o erro do girômetro é proporcional à taxa angular verdadeira em torno do eixo sensível.

Figura 2.9 – Erro de fator de escala de um sensor inercial



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

Após serem feitas as compensações das contribuições fixas e dependentes da temperatura, as parcelas residuais correspondentes aos erros de fator de escala dos acelerômetros e girômetros são aqui denominadas s_a e s_g , respectivamente. Suas unidades são frequentemente dadas em porcentagem ou partes por milhão (ppm).

2.1.3.3 Vieses Dependentes da Aceleração

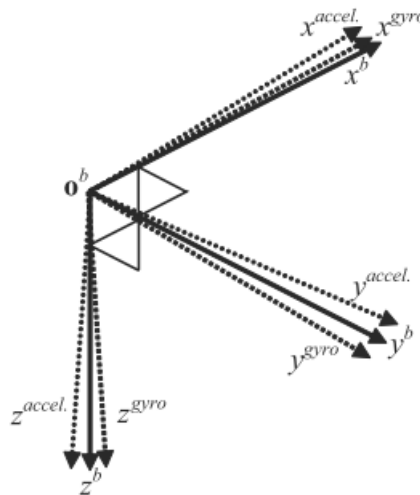
Os vieses denominados dependentes da aceleração são erros proporcionais à magnitude da aceleração aplicada aos eixos do sensor inercial. Tais erros ocorrem em girômetros de massa giratória devido ao desequilíbrio de massa na suspensão do rotor, ou seja, na não coincidência entre o centro de gravidade do rotor e o centro do mecanismo de suspensão do mesmo (TITTERTON; WESTON, 2004).

Em geral, girômetros podem ser sensíveis a acelerações ao longo dos três eixos que o compõem, portanto, o viés dependente da aceleração gravitacional para um conjunto de três girômetros compreende a matriz 3×3 . A relação entre esses componentes de viés e a aceleração aplicada pode ser expressa por meio de coeficientes com unidades $dehg/h/g$.

2.1.3.4 Erros de Acoplamento Cruzado

Os erros de acoplamento cruzado se originam a partir do desalinhamento dos eixos sensitivos dos sensores inercias com relação aos eixos ortogonais do sistema de coordenadas do corpo ¹, o que, a princípio acontece devido a problemas de fabricação do sensor. Conforme mostrado na Figura 2.10, x^b , y^b e z^b são os eixos do sistema de coordenadas do corpo, x^{accel} , y^{accel} e z^{accel} são os eixos de coordenadas dos acelerômetros e x^{gyro} , y^{gyro} e z^{gyro} são os eixos de coordenadas dos girômetros. O alinhamento perfeito de ambos os eixos é impossível do ponto de vista prático devido a problemas de montagem, o que faz com que eles sejam sensíveis à força específica e velocidade angular aplicada aos eixos ortogonais do sistema.

Figura 2.10 – Desalinhamento entre os eixos do corpo, acelerômetro e girômetros.



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

Erros de acoplamento cruzado podem ser descritos por meio dos vetores \mathbf{m}_a , para acelerômetros, e \mathbf{m}_g , para girômetros, com dimensão 3×1 , e associados aos erros de fator de escala por meio das matrizes \mathbf{M}_a e \mathbf{M}_g , conforme mostra a Equação (2.4).

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} s_{a,x} & m_{a,xy} & m_{a,xz} \\ m_{a,yx} & s_{a,y} & m_{a,yz} \\ m_{a,zx} & m_{a,zy} & s_{a,z} \end{bmatrix} e \mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} s_{g,x} & m_{g,xy} & m_{g,xz} \\ m_{g,yx} & s_{g,y} & m_{g,yz} \\ m_{g,zx} & m_{g,zy} & s_{g,z} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

¹ O sistema de coordenadas do corpo (subscrito b) é definido com sua origem no centro de massa do veículo para o qual a navegação se deseja e tem seus eixos x , y e z direcionados ao longo do eixo longitudinal do mesmo, para o lado direito e completando um triedro ortogonal dextrogiro, respectivamente.

onde os elementos da diagonal principal são os erros de fatores de escala, e os demais são os erros de acoplamento cruzado em x, y e z . Sua unidade de medida pode ser dada em graus, radianos ou partes por milhão (ppm).

2.1.3.5 Ruídos Aleatórios

Variáveis são ditas estocásticas, ou aleatórias, quando se caracterizam por funções que mapeiam resultados experimentais aleatórios que envolvem um procedimento e uma observação do mesmo (FARRELL, 2008). Sendo esse procedimento e observação fontes de incertezas, torna-se necessário o uso da experimentação para uma conclusão analítica sobre os dados.

Os sensores inerciais sofrem interferência de uma variedade de erros aleatórios, os quais estão associados geralmente a:

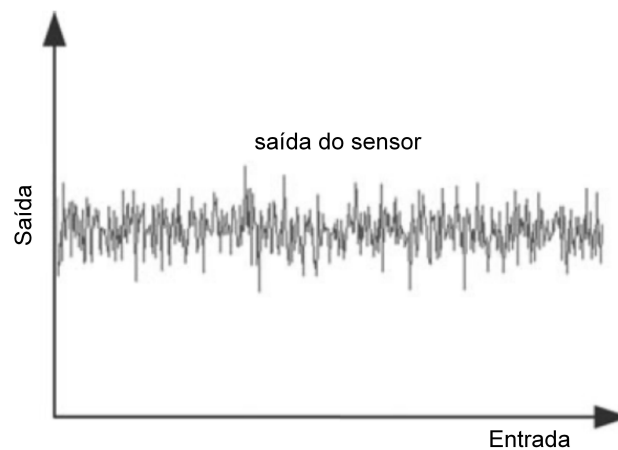
- Instabilidades mecânicas;
- Vibrações e resíduos;
- Ressonâncias;
- Discretização de dados.

Assume-se, idealmente, que ruídos aleatórios são brancos e gaussianos. Eles são ditos brancos pois não se correlacionam temporalmente e são constituídos por todas as bandas do espectro de frequências. A denominação gaussiana se refere a fato deles seguirem, em geral, uma distribuição normal com média não necessariamente igual a zero (Figura 2.11).

O ruído de acelerômetros e girômetros às vezes são descritos como *random walks* (processos estocásticos que se originam quando se integra um ruído branco e gaussiano). Ruídos aleatórios de força específica medidas pelos acelerômetros são integrados para produzir um *random walk* na solução de velocidade inercial. Do mesmo modo, nos girômetros, os ruídos aleatórios nas medições de taxa angular são integradas para produzir um erro de *random walk* em atitude. Estudos recentes apontam que a taxa de ruídos aleatórios dos girômetros atua como a fonte de erro mais dominante na navegação (WANG; CHERNYSHOFF; SHKEL, 2019), tendo discrepância de 10% em simulações numéricas e 20% em resultados experimentais na direção perpendicular à trajetória.

Ruídos aleatórios não podem ser calibrados e/ou compensados uma vez que não existe correlação com valores passados ou futuros. Para atenuar esses erros são aplicadas técnicas de filtragem, como filtros de largura de banda integradas com funções de correlação (HOWARD, 2015) ou ainda técnicas estatísticas como algoritmos de ponderações aleatórias (GAO; FENG; LI, 2006). Para acelerômetros e girômetros a notação para esse tipo de erro é w_a e w_g , respectivamente.

Figura 2.11 – Ruído aleatório de um sensor inercial.



Fonte: Adaptado de (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

2.2 Navegador Inercial

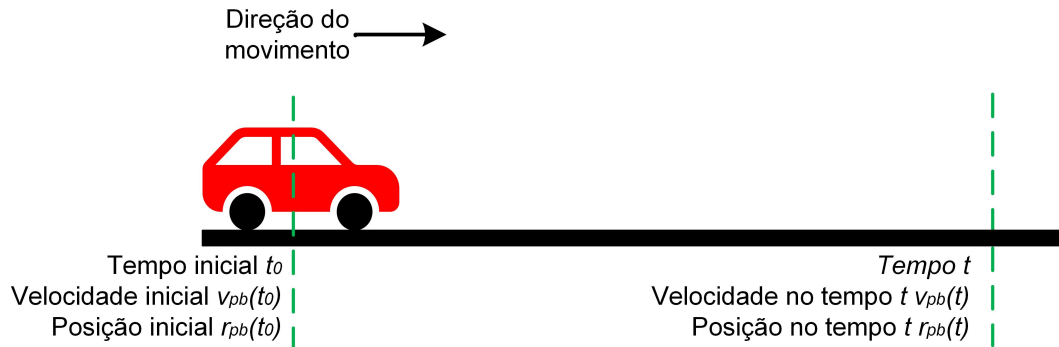
Um INS é um sistema de navegação, do tipo *dead reckoning*, na qual é constituído por dois componentes: uma Unidade de Medição Inercial (IMU) e um processador de navegação (GROVES, 2013). Uma IMU usa três acelerômetros e três girômetros, ambos mutuamente ortogonais, cujos sinais são pré-processados por alguma forma de filtragem, para eliminar distúrbios, e enviados ao algoritmo de mecanização que converte as medições em informações de posição, velocidade e atitude.

Uma solução de posição é mantida pela integração da velocidade, que, por sua vez, é mantida pela integração das medições de força específica obtidas da IMU. Uma solução de atitude também é mantida integrando as medições de taxa angular da IMU. Após a inicialização, a navegação pode prosseguir sem informações adicionais do ambiente (GROVES, 2013).

Para se compreender mais facilmente um INS tridimensional em escala real, seja primeiramente o exemplo de um sistema inercial unidimensional, isto é, um corpo b se

deslocando em linha reta, conforme a Figura 2.12, com relação a um referencial fixo, p , na Terra (considerada inercial, nessa simplificação). Nesse caso, para se calcular a velocidade e posição do veículo, necessita-se apenas de um único acelerômetro montado no corpo, que tem seu eixo sensível ao longo da direção do movimento.

Figura 2.12 – Representação de navegação inercial unidimensional.



Fonte: Adaptado de (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

Conhecendo-se a velocidade, v_{pb} , no instante inercial t_0 , é possível determiná-la em um instante t qualquer, integrando a aceleração, a_{pb} , do corpo de acordo com a Equação (2.5):

$$v_{pb}(t) = v_{pb}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{pb}(t') dt'. \quad (2.5)$$

Do mesmo modo, se a posição do corpo r_{pb} é conhecida no instante t_0 , pode-se determinar a posição em um instante t qualquer a partir da integração da velocidade v_{pb} , que por sua vez é a integração da aceleração a_{pb} , conforme:

$$\begin{aligned} r_{pb}(t) &= r_{pb}(t_0) + \int_{t_0}^t v_{pb}(t') dt' \\ &= r_{pb}(t_0) + (t - t_0)v_{pb}(t_0) + \int_{t_0}^t \int_0^{t'} a_{pb}(t'') dt'' dt'. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ao se considerar uma navegação inercial bidimensional uma complexidade adicional é inserida, pois o movimento do corpo acontece nos eixos x e y do sistema de coordenadas de referência, o que introduz a necessidade de que a aceleração esteja representada nesse mesmo sistema. Isso requer a transformação da aceleração do sistema de coordenadas do corpo para um sistema de coordenadas de referência, geralmente escolhido como sendo localmente nivelado, e conhecido como sistema de coordenadas de navegação.

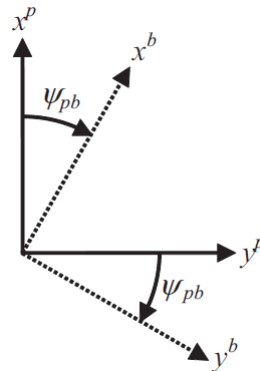
Nesse panorama, considere o mesmo corpo, b , se movendo em um plano definido pelos eixos x e y no sistema de coordenadas de navegação p . À semelhança de (2.5) e (2.6), é possível obter a velocidade e posição bidimensionais de acordo com (2.7) e (2.8), respectivamente.

$$\begin{bmatrix} v_{pb,x}^p(t) \\ v_{pb,y}^p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{pb,x}^p(t_0) \\ v_{pb,y}^p(t_0) \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} a_{pb,x}^p(t') \\ a_{pb,y}^p(t') \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} r_{pb,x}^p(t) \\ r_{pb,y}^p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{pb,x}^p(t_0) \\ r_{pb,y}^p(t_0) \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} v_{pb,x}^p(t') \\ v_{pb,y}^p(t') \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Como observado anteriormente, o movimento acontece em dois eixos, portanto, são necessários dois acelerômetros para medir a aceleração ao longo dos mesmos e um girômetro para identificar o movimento rotacional (nesse caso, ângulo de guinada) perpendicular ao plano e em relação ao referencial de navegação (p). Isso pode ser verificado na Figura 2.13.

Figura 2.13 – Transformação do sistema de coordenadas do corpo para o sistema de coordenadas de navegação.



Fonte: (GROVES, 2013).

Análogo ao cálculo da velocidade (2.7) e posição (2.8), se em um tempo inicial t_0 , o ângulo de guinada, $\psi_{pb}(t)$ for conhecido, ele pode ser determinado em um momento qualquer t realizando a integração da taxa angular, $\omega_{pb,z}^b$.

$$\psi_{pb}(t) = \psi_{pb}(t_0) + \int_{t_0}^t \omega_{pb,z}^b(t') dt'. \quad (2.9)$$

As medições dos acelerômetros, contudo, devem ser transformadas para os eixos de resolução do sistema de coordenadas p via uma matriz de transformação de coordenadas 2×2 (GROVES, 2013), de acordo com:

$$\begin{bmatrix} a_{pb,x}^p(t') \\ a_{pb,y}^p(t') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{pb}(t') & -\sin \psi_{pb}(t') \\ \sin \psi_{pb}(t') & \cos \psi_{pb}(t') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{pb,x}^b(t') \\ a_{pb,y}^b(t') \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

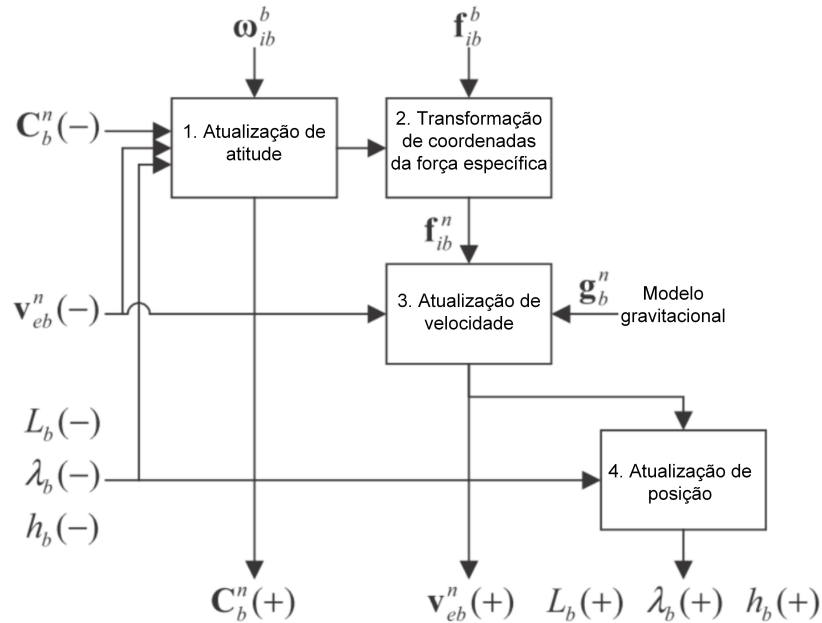
O processamento das equações matemáticas (2.5) a (2.10) deve seguir uma ordem determinada. Primeiramente, deve ser atualizado o ângulo de guinada. Em seguida, a aceleração é convertida para o sistema de coordenadas de navegação. Por fim, o valor da velocidade é computado para que se possa, enfim, atualizar o valor da posição (GROVES, 2013). Essa sequência de etapas é normalmente respeitada na maioria das implementações de sistemas de navegação inercial, de quaisquer dimensões.

Uma implementação tridimensional de um INS contém seis graus de liberdade (três lineares e três angulares). Desse modo, são necessários seis sensores inerciais para uma implementação completa. Uma IMU realiza as medições de força específica, \mathbf{f}_{ib}^b , e taxa angular, $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ com relação ao espaço inercial. Além disso, nenhum acelerômetro consegue medir a aceleração total do corpo de forma que, para obtê-la, faz-se necessário o cômputo de um modelo gravitacional (GROVES, 2013).

A Figura 2.14 ilustra o esquema de um processador de navegação inercial tridimensional. As medições oriundas da IMU são integradas para se obter posição, velocidade e atitude, de acordo com as etapas previamente mencionadas:

1. Atualização da atitude;
2. Transformação da força específica do sistema de coordenadas do corpo para o sistema de coordenadas de navegação;
3. Atualização da velocidade, incluindo a transformação da força específica em aceleração usando um modelo gravitacional;
4. Atualização da posição.

Figura 2.14 – Diagrama de blocos das equações de navegação.



Fonte: (GROVES, 2013).

Na Figura 2.14, \mathbf{C}_b^n representa a matriz de rotação, ou ainda a atitude do corpo com relação ao sistema de coordenadas de navegação; \mathbf{v}_{eb}^n representa a velocidade do corpo com relação à Terra, representada no sistema de coordenadas de navegação e L_b , λ_b e h_b representa a posição (latitude, longitude e altitude geodética) do corpo com relação à Terra.

A Figura 2.14 mostra, ainda, como as medições de taxa angular e força específica são processadas ao longo do intervalo de tempo t a $t + \tau_i$. Além disso, os sufixos (-) e (+) são, respectivamente, usados para denotar valores no início do ciclo de processamento das equações de navegação (t) e no final do mesmo ($t + \tau_i$).

2.2.1 Atualização da Atitude

A atualização da atitude (orientação) de um INS faz uso das soluções de posição e velocidade no instante anterior. Ela é determinada resolvendo-se a equação (2.11) da derivada temporal da matriz de transformação de coordenadas \mathbf{C}_b^n , que relaciona o sistema

de coordenadas do corpo com o de navegação².

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \mathbf{C}_b^n. \quad (2.11)$$

O primeiro termo, $\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b$, é a forma anti-simétrica do vetor taxa angular medido pelos girômetros. O segundo termo é a forma anti-simétrica do vetor velocidade de rotação da Terra com relação ao sistema de coordenadas inerciais. Finalmente, o terceiro termo é conhecido como taxa de transporte e surge da rotação dos eixos do sistema de coordenadas de navegação local com relação à Terra (GROVES, 2013). Ao integrar-se discretamente (2.11), obtém-se:

$$\mathbf{C}_b^n(+) \approx \mathbf{C}_b^n(-) (\mathbf{I}_3 + \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \tau_i) - (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n(-) + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n(-)) \mathbf{C}_b^n(-) \tau_i, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{I}_3 é a matriz identidade 3×3 sendo $\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n(-)$ calculado usando a latitude no instante anterior.

$$\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n = \omega_{ie} \begin{bmatrix} 0 & \text{sen}L_b & 0 \\ -\text{sen}L_b & 0 & -\text{cos}L_b \\ 0 & \text{cos}L_b & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde ω_{ie} é a magnitude da taxa de rotação da Terra e $\boldsymbol{\Omega}_{en}^n(-)$ pode ser computada conforme:

$$\boldsymbol{\Omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{en,z}^n & -\omega_{en,y}^n \\ \omega_{en,z}^n & 0 & -\omega_{en,x}^n \\ -\omega_{en,y}^n & \omega_{en,x}^n & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_{eb,E}^n}{R_E(L_b) + h_b} \\ -\frac{v_{eb,N}^n}{R_N(L_b) + h_b} \\ -\frac{v_{eb,E}^n \tan L_b}{R_E(L_b) + h_b} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

onde R_E é o raio de curvatura transversal e R_N o raio de curvatura meridiano.

² O sistema de coordenadas de navegação (subscrito n) adotado neste trabalho tem sua origem definida no centro de massa do corpo e seus eixos x , y e z são orientados nas direções norte, leste e vertical para baixo (ou do inglês *North, East, Down* - NED).

2.2.1.1 Transformação de Coordenadas do Vetor Força Específica

A medição da força específica em um INS geralmente é feita no sistema de coordenada dos sensores. Assumindo-se (como geralmente é feito) que tal sistema coincida com o sistema de coordenadas do corpo, essa medição precisa ser transformada via matriz de transformação $\mathbf{C}_b^n(t)$ para o sistema de coordenadas de navegação (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012). A equação que rege essa transformação é mostrada a seguir:

$$\mathbf{f}_{ib}^n(t) = \mathbf{C}_b^n(t) \mathbf{f}_{ib}^b(t). \quad (2.16)$$

Como a medição de força específica é realizada ao longo de um intervalo de tempo t a $t + \tau_i$, a média da matriz de transformação de coordenadas também deve ser calculada de acordo com:

$$\mathbf{f}_{ib}^n \approx \frac{1}{2} [\mathbf{C}_b^n(t)(-) + \mathbf{C}_b^n(+)] \mathbf{f}_{ib}^b(t). \quad (2.17)$$

2.2.1.2 Atualização da Velocidade

Para implementação das equações de um INS no sistema de coordenadas de navegação os eixos de representação da velocidade não são os mesmos do sistema de coordenadas de referência (GROVES, 2013). Nesse caso, a velocidade do corpo é matematicamente expressa em relação ao sistema de coordenadas terrestre, ou ECEF³, a partir do qual a seguinte transformação se faz necessária:

$$\mathbf{v}_{eb}^n = \mathbf{C}_e^n \mathbf{v}_{eb}^e, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{C}_e^n = \begin{bmatrix} -\text{sen}(L_b)\text{cos}(\lambda_b) & \text{sen}(\lambda_b) & -\text{cos}(L_b)\text{cos}(\lambda_b) \\ -\text{sen}(L_b)\text{sen}(\lambda_b) & \text{cos}(\lambda_b) & -\text{cos}(L_b)\text{sen}(\lambda_b) \\ \text{cos}(L_b) & 0 & -\text{sen}(L_b) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

³ O triedro ECEF (*Earth Centered Earth Fixed*), representado pelo subscrito e , é o sistema de coordenadas cuja origem coincide com centro de massa da Terra e que se rotaciona junto com a mesma. O eixo x aponta do centro para a intersecção do equador com o meridiano de referência; O eixo z aponta sempre do centro ao polo norte; e o eixo y completa o conjunto ortogonal, apontando do centro para a intersecção do equador com o meridiano (GROVES, 2013).

A derivada da Equação (2.18) inclui termos associados à taxa de transporte, aceleração centrífuga e força de Coriolis oriundos da atualização da velocidade no sistema de coordenadas de navegação, devido à rotação de seus eixos, a saber:

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n = \mathbf{f}_{ib}^n + \mathbf{g}_b^n(L_b, h_b) - (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \mathbf{v}_{eb}^n. \quad (2.20)$$

onde a aceleração da gravidade é modelada em função da latitude e altitude, e pode ser expressa conforme a Equação (2.21).

$$\mathbf{g}_b^n = \begin{bmatrix} g_{b,N}^n(L_b, h_b) \\ 0 \\ g_{b,D}^n(L_b, h_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.08 \times 10^{-9} h_b \sin 2L_b \text{ ms}^2 \\ 0 \\ g_0(L_b) \left\{ 1 - \frac{2}{R_0} \left[1 + f(1 - 2\sin^2 L_b) + \frac{\omega_{ie}^2 R_0^2 R_P}{\mu} \right] h_b + \frac{3}{R_0^2} b_b^2 \right\} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

A equação que caracteriza $g_0(L_b)$ é modelada por:

$$g_0(L) \approx 9.7803253359 \frac{(1 + 0.001931853 \sin^2 L)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 L}} \text{ ms}^2, \quad (2.22)$$

onde μ é a constante gravitacional da Terra, e seu valor, de acordo com a WGS 84⁴, é $3.986004418 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}^2$.

Novamente, obter uma solução analítica completa da atualização da atitude é uma tarefa complexa. No entanto, como os termos de Coriolis e da taxa de transporte têm, geralmente, pequena magnitude, é uma aproximação razoável negligenciar sua variação ao longo do intervalo de integração. Além disso, a variação da aceleração devido à gravidade ao longo do intervalo de integração também pode ser desprezada (GROVES, 2013). Desse modo tem-se:

$$\mathbf{v}_{eb}^n(+) \approx \mathbf{v}_{eb}^n(-) + [\mathbf{f}_{ib}^n + \mathbf{g}_b^n(L_b(-)h_b(-)) - (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n(-) + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n(-)) \mathbf{v}_{eb}^n(-)] \tau_i. \quad (2.23)$$

⁴ WGS 84 é um referencial global fixado na terra, que possibilita se expressar uma posição qualquer na Terra usando coordenadas cartesianas ou elipsoidais.

2.2.1.3 Atualização da Posição

A latitude, longitude e altitude são funções da velocidade, latitude e altitude, conforme mostrados na Equação (2.24).

$$\begin{aligned}
L_b(+) &= L_b(-) + \int_t^{t+\tau_i} \frac{v_{eb,N}^n(t')}{R_N(L_b(t')) + h_b(t')} dt' \\
\lambda_b(+) &= \lambda_b(-) + \int_t^{t+\tau_i} \frac{v_{eb,E}^n(t')}{(R_E(L_b(t')) + h_b(t')) \cos L_b(t')} dt'. \\
h_b(+) &= h_b(-) - \int_t^{t+\tau_i} v_{eb,D}^n(t') dt'
\end{aligned} \tag{2.24}$$

A variação dos raios de curvatura meridiano e transversal, R_N e R_E , com a latitude geodésica, L_b , é insignificante, logo é aceitável negligenciar sua variação no intervalo de integração. Desse modo, sabendo que a velocidade varia como uma função linear do tempo ao longo do intervalo de integração, uma aproximação adequada para a atualização da posição é dada por:

$$\begin{aligned}
h_b(+) &= h_b(-) - \frac{\tau_i}{2} (v_{eb,D}^n(-) + v_{eb,D}^n(+)) \\
L_b(+) &\approx L_b(-) + \frac{\tau_i}{2} \left(\frac{v_{eb,N}^n(-)}{R_N(L_b(-)) + h_b(-)} + \frac{v_{eb,N}^n(+)}{R_N(L_b(+)) + h_b(+)} \right), \\
\lambda_b(+) &= \lambda_b(-) + \frac{\tau_i}{2} \left(\frac{v_{eb,E}^n(-)}{(R_E(L_b(-)) + h_b(-)) \cos L_b(-)} + \frac{v_{eb,E}^n(+)}{(R_E(L_b(+)) + h_b(+)) \cos L_b(+)} \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Devido à dependência entre a altitude, latitude e longitude, as equações (2.25) devem ser calculadas na ordem apresentada anteriormente. Alternativamente, a posição pode ser atualizada resolvendo:

$$\dot{\mathbf{C}}_n^e = \mathbf{C}_n^e \boldsymbol{\Omega}_{en}^n, \tag{2.26}$$

cuja solução de primeira ordem é:

$$\mathbf{C}_n^e(+) \approx \mathbf{C}_n^e(-) \left(\mathbf{I}_3 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n(-) + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n(+)) \tau_i \right). \tag{2.27}$$

3 PRINCÍPIOS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL AUXILIADA

Conforme mencionado anteriormente, os INSs tendem a apresentar erros crescentes no tempo, devido às integrações numéricas de suas medições. Neste capítulo são apresentadas técnicas de fusão sensorial que buscam mitigar esses erros, com o auxílio de filtros de Kalman (Seção 3.1 e 3.2). Os ZUPTs (Seção 4.1) são utilizados para corrigir a solução de navegação e calibrar os erros (vieses) dos sensores sempre que o veículo possuir velocidade nula com relação à Terra; Já os MCs (Seção 4.3), exploram as restrições dos graus de liberdade (restrições físicas) do veículo para calibrar os erros do INSs.

3.1 Princípios da Filtragem de Kalman

O Filtro de Kalman (KF) é um algoritmo de estimação que usa o conhecimento das propriedades determinísticas e estatísticas dos parâmetros de um determinado sistema e das medições para obter estimativas ótimas com base nas informações disponíveis. Para sua aplicação, deve ser fornecido um conjunto inicial de estimativas de forma que o filtro opere recursivamente, atualizando suas estimativas a partir de medições passadas (GROVES, 2013).

Para aplicações de navegação inercial, a filtragem de Kalman é usada em configuração complementar na qual medições redundantes de um mesmo sinal, mas com diferentes características de ruído, são combinadas como um meio de minimizar o erro (BROWN; HWANG, 1996). Um INS fornece solução de navegação a uma alta taxa de amostragem, mas seus erros aumentam com o tempo devido à integração numérica implícita no algoritmo de mecanização a qual faz com que os erros de viés dos acelerômetros e girômetros se acumulem na saída. Tais erros geralmente aparecem na parte de baixa frequência da saída do sensor e têm impacto no longo prazo. Sendo assim, o filtro de Kalman é geralmente empregado para se beneficiar de dados precisos de baixa frequência de uma fonte externa e assim limitar os erros de longo prazo de um INS (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

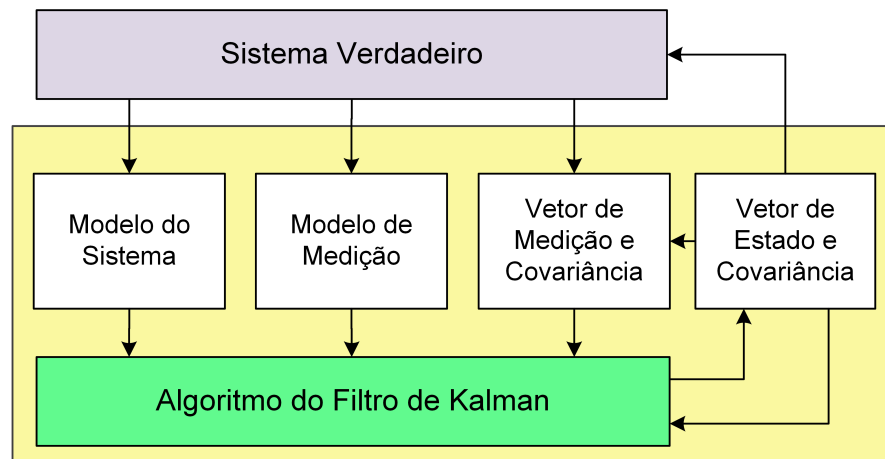
3.1.1 Elementos do Filtro de Kalman

A Figura. 3.1 ilustra os elementos constituintes do filtro de Kalman, que são o vetor de estado e covariância, o modelo do sistema, o vetor de medição e covariância, o modelo de medição e o algoritmo propriamente dito (GROVES, 2013). Em geral, o filtro

de Kalman estima alguns parâmetros do sistema (veículo, pedestre, avião, entre outros) o que requer entradas para processar o algoritmo. Nesse sentido, primeiramente faz-se necessário modelar o sistema do ponto de vista dinâmico. Após isso, deve-se processar algumas etapas do algoritmo, a saber:

- Determinar o vetor de estados;
- Determinar o modelo dinâmico dos parâmetros;
- Determinar as medições a serem realizadas, relacionando-as com o vetor de estados;
- Estimar as incertezas do sistema.

Figura 3.1 – Elementos do filtro de Kalman



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

O *vetor de estado* é o conjunto de parâmetros de interesse que descrevem o sistema, chamados de estados, a ser estimado pelo filtro de Kalman. Cada estado pode ser constante ou variável no tempo. Para a maioria das aplicações de navegação, o estado inclui posição ou um componente de erro de posição. Eles também podem englobar velocidade, atitude e erros dos sensores envolvidos. A *matriz de covariância dos estados* descreve as incertezas e correlação nas estimativas que o FK fornece para os parâmetros/estados de interesse do sistema. As covariâncias são importantes pois permitem que um estado seja determinado a partir de outro (e.g, velocidade a partir de posição); que combinações lineares de estados sejam determinadas (e.g, permite resolver o problema de observabilidade), e as estimações tenham uma distribuição geométrica bem representada.

O *modelo do processo/sistema* é um modelo físico, dinâmico, que descreve, deterministicamente, como os estados do filtro de Kalman e a matriz de covariância dos

erros variam com o tempo. O *ruído do processo/sistema* é a incerteza que é inserida na estimação do estado, de forma a se considerar mudanças desconhecidas no modelo do processo.

O *vetor de medição* trata-se de um conjunto de medições que se relacionam, determinística ou estocasticamente, com parâmetros de interesse (estados) do sistema. Associado ao vetor de medição existe a *matriz de covariância dos ruídos de medição* que irá descrever a estatística dos ruídos nas medições.

O *modelo de medição* descreve como o vetor de medição se relaciona deterministicamente com o vetor de estados, i.e, da ausência de ruídos de medição. O *algoritmo do filtro de Kalman*, por fim, usa o vetor de medição, o modelo de medição e as características estatísticas, tanto dos estados quanto do processo de medição do sistema, para manter estimativas ótimas do vetor de estado.

A Tabela 3.1 ilustra alguns exemplos de FK presentes em sistemas de navegação.

Tabela 3.1 – Aplicações de filtragem de Kalman em navegação.

Aplicação	Estados	Medições
GNSS filtrado	Posição, velocidade, erro e taxa de variação do relógio dos receptores.	Pseudo-distância, <i>doppler</i> e fase da onda portadora.
INS/GNSS	Erros de posição, velocidade, atitude e dos sensores inerciais.	Posição, velocidade, pseudo-distâncias, e <i>doppler</i> .
Alinhamento e calibração de INSS	Erros de atitude e dos sensores inerciais.	Posição e velocidade.

Fonte: Do Autor (2023).

3.1.2 Etapas e Funcionamento do Filtro de Kalman

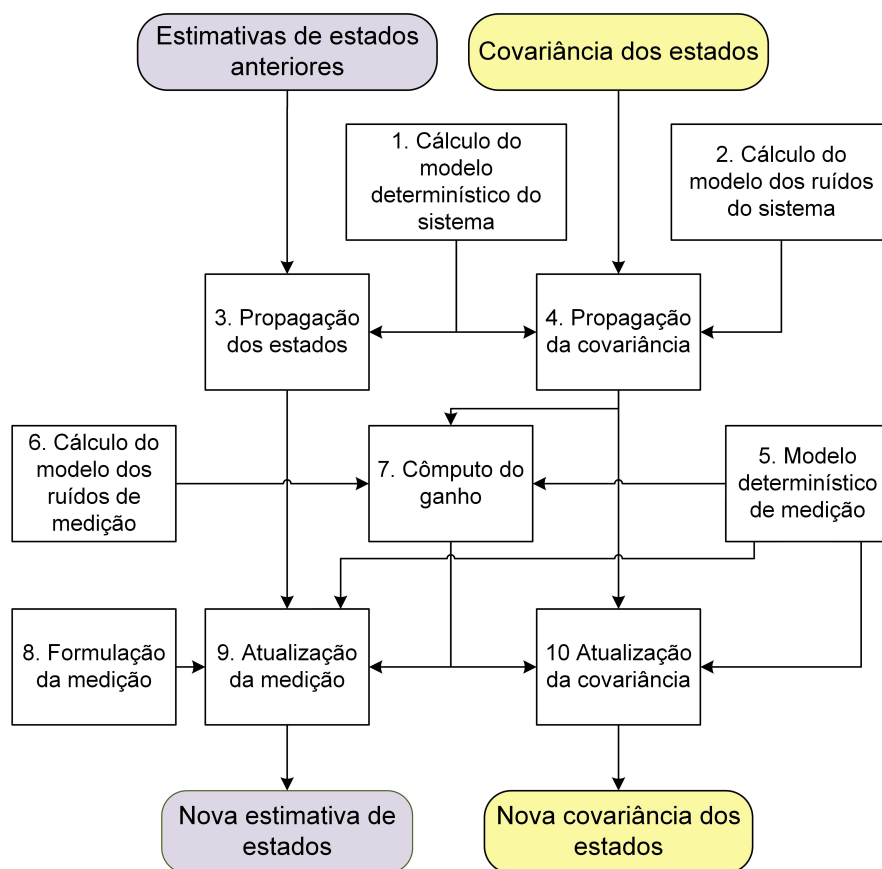
O algoritmo do filtro de Kalman é constituído por duas fases distintas, a saber, predição do sistema e atualização de medições, as quais juntas compreendem 10 etapas iterativas (GROVES, 2013).

- **Fase de predição:** Nessa fase (etapas de 1-4) prevê-se em um instante de amostragem a frente, quais serão os valores e incertezas que os parâmetros de interesse devem assumir.

- **Fase de atualização:** Nessa fase (etapas de 5-10) atualizam-se a estimativa e a incerteza dos parâmetros contidos no vetor de estados. É nessa etapa que o ganho de Kalman é calculado para ponderar, de forma ótima, a correção do vetor de estados de acordo com a incerteza existentes na predição do vetor de estados e no fluxo de medição.

O fluxo do algoritmo do filtro de Kalman é ilustrado na Figura 3.2. Dito isso, para se implementar um filtro de Kalman discreto deve-se executar as seguintes etapas:

Figura 3.2 – Etapas do algoritmo do filtro de Kalman



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

1. Calcular a matriz de transição Φ_{k-1} ;
2. Calcular a matriz de covariância do ruído do sistema \mathbf{Q}_{k-1} ;
3. Propagar (sobrescrito -) a estimativa do vetor de estados de $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ para $\hat{\mathbf{x}}_k^-$;
4. Propagar a matriz de covariância dos estados de \mathbf{P}_{k-1}^+ para \mathbf{P}_k^- ;
5. Calcular a matriz de medição \mathbf{H}_k ;

6. Calcular a matriz de covariância dos ruídos de medição \mathbf{R}_k ;
7. Calcular a matriz de ganhos de Kalman \mathbf{K}_k ;
8. Formular a medição, \mathbf{z}_k ;
9. Atualizar (sobrescrito +) a estimativa do vetor de estados de $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ para $\hat{\mathbf{x}}_k^+$;
10. Atualizar a matriz de covariância dos estados de \mathbf{P}_k^- para \mathbf{P}_k^+ .

A etapa 1 se refere ao cálculo da matriz de transição, Φ_{k-1} , a qual define como o vetor de estados muda a cada instante de tempo discreto em função da dinâmica do sistema modelado pelo filtro de Kalman. A matriz de transição se difere para cada aplicação e além disso, é derivada de um modelo de sistema linear. Quase sempre ela é uma função do intervalo de propagação, τ_s , e frequentemente é uma função de outros parâmetros. Se houver uma variação de parâmetros ao longo do tempo, a matriz de transição deverá ser recalculada a cada iteração.

As Equações (3.1) e (3.2) descrevem como se pode calcular Φ_{k-1} a partir de qualquer matriz dinâmica do sistema (\mathbf{F}).

$$\Phi_{k-1} \approx \exp(\mathbf{F}_{k-1}\tau_s), \quad (3.1)$$

ou ainda,

$$\Phi_{k-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathbf{F}_{k-1}^r \tau_s^r}{r!} = \mathbf{I} + \mathbf{F}_{k-1}\tau_s + \frac{1}{2}\mathbf{F}_{k-1}^2\tau_s^2 + \frac{1}{6}\mathbf{F}_{k-1}^3\tau_s^3 + \dots \quad (3.2)$$

A etapa 2 é o cálculo da matriz de covariância dos ruídos do sistema, \mathbf{Q}_{k-1} , a qual define como as incertezas das estimativas dos estados aumentam em função de mudanças desconhecidas no modelo de predição, não consideradas na etapa 1. A matriz \mathbf{Q}_{k-1} também é genericamente determinada com base na propagação de τ_s e nas matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} (matriz de distribuição dos ruído do sistema) e \mathbf{S} (matriz de densidade de ruído do sistema), conforme as Equações (3.3) e (3.4).

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \int_{t_k - \tau_s}^{t_k} \exp(\mathbf{F}_{k-1}(t_k - t')) \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{G}_{k-1}^T \exp(\mathbf{F}_{k-1}^T(t_k - t')) dt', \quad (3.3)$$

ou ainda,

$$\mathbf{Q}_{k-1} \approx \mathbf{Q}'_{k-1} = \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{G}_{k-1}^T \tau_s. \quad (3.4)$$

A etapa 3 compreende a propagação da estimativa do vetor de estados ao longo do tempo de iteração, i.e., de $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ para $\hat{\mathbf{x}}_k^-$. Uma vez que o ruído do sistema é assumido branco e normal, a melhor predição dos estados no tempo k é dada pela Equação (3.5).

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+. \quad (3.5)$$

A etapa 4 é a propagação da correspondente matriz de covariância dos estados, i.e., estado de \mathbf{P}_{k-1}^+ para \mathbf{P}_k^- . Esta contém os valores esperados para as incertezas nos estados no tempo k dadas todas as informações até o tempo $k-1$, representada pela Equação:

$$\mathbf{P}_k^- = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (3.6)$$

A etapa 5 corresponde ao cálculo da matriz de medição, \mathbf{H}_k , a qual define como o vetor de medição se relaciona com o vetor de estados. Essa matriz não possui nenhum estado contido, podendo ser constante ou variável no tempo.

A etapa 6 corresponde ao cálculo da matriz de covariância dos ruídos de medição, \mathbf{R}_k . Dependendo da aplicação, ela pode ser assumida constante, modelada como uma função da dinâmica do veículo, e/ou da relação sinal-ruído.

A etapa 7 é a principal etapa do FK, pois é nesse ponto do algoritmo que é feito o cálculo da matriz de ganhos de Kalman, \mathbf{K}_k . Ela é usada para ponderar as informações provenientes das medições e da predição da etapa anterior. Cada linha da matriz corresponde a um estado e cada coluna a uma medição, e ela é calculada de forma a minimizar o erro quadrático médio das estimativas, conforme descrito a seguir:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (3.7)$$

A etapa 8 é a formulação do vetor de medição, \mathbf{z}_k . Em alguns casos, como nas medições de alcance em sistemas de radionavegação os componentes do vetor de medição já estão presentes no sistema modelado pelo filtro de Kalman. Em outros casos, \mathbf{z}_k deve ser calculado como uma função de outros parâmetros do sistema. Um exemplo é a diferença

da solução de navegação entre um sistema sob calibração e um sistema auxiliar (como é o caso do presente trabalho).

A etapa 9 corresponde à atualização do vetor de estados a partir do fluxo de medição, a qual é implementada a partir da Equação (3.8).

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \delta \mathbf{z}_k^-\end{aligned}\quad (3.8)$$

A inovação de medição, $\delta \mathbf{z}_k^-$, é multiplicada pela matriz de ganho de Kalman de forma a originar uma correção para a estimativa do vetor de estados.

A etapa 10, por fim, é a atualização correspondente da matriz de covariância dos estados.

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (3.9)$$

Como a estimativa do vetor de estados atualizado é baseada em mais informações, as incertezas dos estados atualizados são, em geral, menores do que antes da atualização.

As etapas de processamento de um filtro de Kalman em malha aberta não precisam necessariamente ser executadas na ordem descrita anteriormente, desde que as dependências e requisitos de cada etapa estejam de acordo. Esse tipo de implementação de FK é típica quando os estados são os próprios parâmetros de interesse, e.g, posição, velocidade e atitude, e ao final do processamento os mesmos não são realimentados no sistema de navegação. Normalmente em aplicações de navegação integradas, como é o caso do presente trabalho, dá-se preferência à implementação do FK dita em malha fechada, segundo a qual os estados não são mais os parâmetros de interesse, mas sim, os erros nesses parâmetros, os quais são constantemente estimados pelo FK e realimentados no sistema de navegação para correção e compensação.

3.2 Propagação de Erros em INS

A precisão de um INS é afetada por várias fontes de erros, dentre as quais se destacam erros durante o procedimento de alinhamento inicial, erros dos sensores e as aproximações numéricas do algoritmo de processamento. Para se ter dimensão do efeito desses erros nos parâmetros de saída da navegação (posição, velocidade e atitude), é vital

entender sua propagação através das equações dinâmicas. Uma vez que a natureza dos erros é conhecida, pode-se mitigá-los por meio de técnicas adequadas de modelagem/estimativa e arquiteturas de integração (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

3.2.1 Arquiteturas de Integração

Na Figura 3.3 é mostrada uma arquitetura típica de integração de um INS com um sensor auxiliar arbitrário em malha aberta, na qual os erros estimados de posição, velocidade e atitude são usados para corrigir a solução de navegação inercial dentro do algoritmo de integração em cada iteração, mas não são realimentados no INS. A solução de navegação inercial corrigida é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{C}}_b^n &= \delta \hat{\mathbf{C}}_b^{nT} \tilde{\mathbf{C}}_b^n \\ \hat{\mathbf{v}}_{eb}^n &= \tilde{\mathbf{v}}_{eb}^n - \delta \hat{\mathbf{v}}_{eb}^n.\end{aligned}\tag{3.10}$$

E \mathbf{C}_b^n é modelado por:

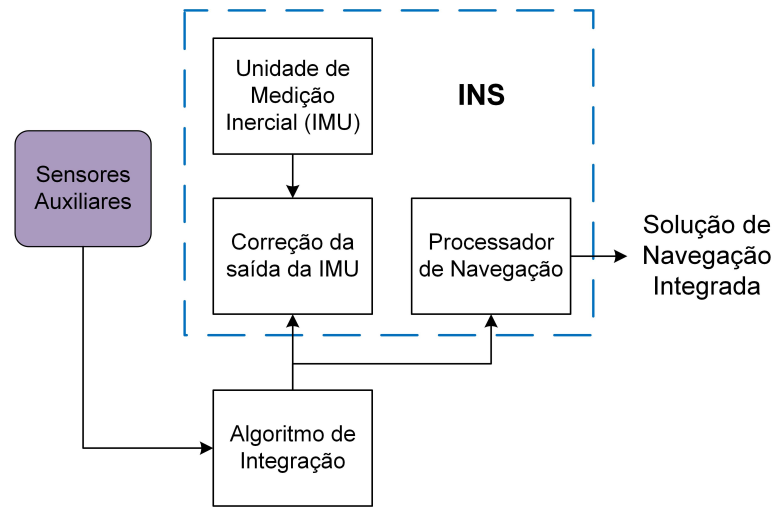
$$\hat{\mathbf{C}}_b^n(+) \approx (\mathbf{I}_3 - [\delta \hat{\boldsymbol{\psi}}_{nb}^n \times]) \hat{\mathbf{C}}_b^n(-)\tag{3.11}$$

e

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}_b &= \tilde{\mathbf{L}}_b - \delta \hat{\mathbf{L}}_b \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b &= \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b - \delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b, \\ \hat{\mathbf{h}}_b &= \tilde{\mathbf{h}}_b - \delta \hat{\mathbf{h}}_b\end{aligned}\tag{3.12}$$

onde os erros de atitude, velocidade e posição, $\delta \hat{\boldsymbol{\psi}}_{nb}^n$, $\delta \hat{\mathbf{v}}_{\eta b}^n$, $\delta \hat{\mathbf{L}}_b$, $\delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b$, e $\delta \hat{\mathbf{h}}_b$ são termos estimados pelo filtro de Kalman, sendo que $\hat{}$ representa variável estimada, $\tilde{}$ variável medida (sujeita a erros) e \times , a forma antissimétrica do vetor que o precede.

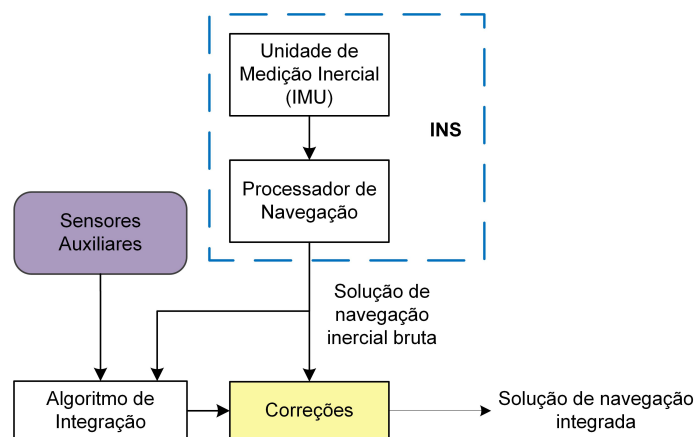
Figura 3.3 – Arquitetura de correção INS de malha aberta



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

Na arquitetura de integração em malha fechada, um sensor auxiliar é usado para efetivamente corrigir o INS por meio de uma realimentação no algoritmo de integração. Isso é mostrado na Figura 3.4. Os erros estimados de posição, velocidade e atitude são realimentados ao processador de navegação inercial, onde são usados para corrigir a própria solução de navegação inercial. A realimentação pode ocorrer em cada iteração do filtro de Kalman ou em intervalos mais longos. As estimativas dos erros de posição, velocidade e atitude do filtro de Kalman são zeradas após cada conjunto de correções ser realimentado (GROVES, 2013).

Figura 3.4 – Arquitetura de correção INS em malha fechada



Fonte: Adaptado de (GROVES, 2013).

Na arquitetura de integração em malha fechada, quaisquer erros de acelerômetros e girômetros estimados pelo filtro de Kalman são realimentados para corrigir as medições

da IMU conforme eles são inseridos nas equações de navegação inercial. Essas correções são adicionais a quaisquer correções que possam ser aplicadas pelo processador da IMU. Ao contrário das correções de posição, velocidade e atitude, as correções dos acelerômetros e girômetros devem ser aplicadas em cada iteração das equações de navegação, com a realimentação do filtro de Kalman atualizando periodicamente os erros dos acelerômetros e girômetros. O filtro pode fornecer estimativas substitutivas para o processador de navegação inercial ou estimar erros residuais e realimentar perturbações para as estimativas de erro armazenadas pelo processador de navegação. No último caso, as estimativas do filtro de Kalman são zeradas na realimentação.

Os sistemas de navegação, em que a IMU é fornecida separadamente e as equações de navegação inercial e algoritmos de integração compartilham um processador comum são idealmente adequados para operação em malha fechada, já que a realimentação das correções está totalmente sob o controle do projetista do sistema de navegação integrado. Porém, quando o INS é fornecido como unidade completa, a integração em malha fechada deve ser abordada com cautela, pois é necessário garantir que as correções sejam enviadas na forma que o INS espera, o que pode não estar claramente definido.

3.2.2 Seleção de Estados e Propagação de INSs

Um modelo de propagação de estados é proposto para um filtro de Kalman projetado para estimar os erros de atitude, velocidade e posição do INS representados no sistema de coordenadas NED, bem como vieses dos acelerômetros e girômetros, como segue:

$$\mathbf{x}_{INS}^n = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^n & \delta\mathbf{v}_{eb}^n & \delta\mathbf{p}_b & \mathbf{b}_a & \mathbf{b}_g \end{bmatrix}^T, \quad (3.13)$$

onde $\delta\mathbf{p}_b$, $\delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^n$ e $\delta\mathbf{v}_{eb}^n$ são os erros de posição, orientação e velocidade do INS, e \mathbf{b}_a e \mathbf{b}_g são os *bias* dos acelerômetros e girômetros, respectivamente. Em uma implementação de um INS referenciada em coordenadas NED, os erros de posição são expressos em termos de δL_b (latitude), $\delta\lambda_b$ (longitude) e δh_b (atitude), conforme:

$$\delta\mathbf{p}_b = \begin{bmatrix} \delta L_b & \delta\lambda_b & \delta h_b \end{bmatrix}^T. \quad (3.14)$$

Dito isso, a derivada do erro de atitude em um sistema de navegação local pode ser definido pela Equação (3.15).

$$\delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^n \approx \hat{\mathbf{C}}_b^n \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \hat{\mathbf{C}}_b^n (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^b) - \hat{\mathbf{C}}_b^n (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^b - \boldsymbol{\omega}_{en}^b), \quad (3.15)$$

onde o termo $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ são erros nas medições dos girômetros ($\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^b$) corresponde aos erros na taxa de rotação da Terra em ($\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^b - \boldsymbol{\omega}_{en}^b$) estão os erros na taxa de transporte.

Expandindo os termos de taxa de rotação da Terra e taxa de transporte e desprezando produtos de erros dos estados, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_b^n (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^b) + \hat{\mathbf{C}}_b^n (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^b - \boldsymbol{\omega}_{en}^b) &\approx \hat{\mathbf{C}}_b^n (\tilde{\mathbf{C}}_n^b - \mathbf{C}_n^b) (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n), \\ &\approx \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^n + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) = -\omega_{ie} \begin{pmatrix} \sin \hat{L}_b \\ 0 \\ \cos \hat{L}_b \end{pmatrix} \delta L_b, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n) &\approx \begin{bmatrix} \delta v_{eb,E}^n / (R_E (\hat{L}_b) + \hat{h}_b) \\ -\delta v_{eb,N}^n / (R_N (\hat{L}_b) + \hat{h}_b) \\ -\delta v_{eb,E}^n \tan \hat{L}_b / (R_E (\hat{L}_b) + \hat{h}_b) \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\hat{v}_{eb,E}^n}{(R_E (\hat{L}_b) + \hat{h}_b) \cos^2 \hat{L}_b} \delta L_b \\ &+ \begin{bmatrix} -\hat{v}_{eb,E}^n / (R_E (\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2 \\ \hat{v}_{eb,N}^n / (R_N (\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2 \\ \hat{v}_{eb,E}^n \tan \hat{L}_b / (R_E (\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2 \end{bmatrix} \delta h_b \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde o símbolo $E()$ corresponde ao operador esperança matemática.

Já a Equação (3.19) define a derivada temporal do erro de velocidade em termos dos estados do filtro de Kalman.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\delta\dot{\boldsymbol{v}}_{eb}^n) &\approx -(\hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\mathbf{f}}_{ib}^b) \times \delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^n - (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n) \delta\boldsymbol{v}_{eb}^n + \hat{\boldsymbol{v}}_{eb}^n \times \mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \\ &+ 2\hat{\boldsymbol{v}}_{eb}^n \times \mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) - 2\frac{g_0(L_b)}{r_{eS}^e(\hat{L}_b)} \hat{\mathbf{u}}_D^n \delta h_b + \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{b}_a, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde r_{eS}^e é o raio superficial da Terra na localidade do veículo e \mathbf{u}_D^n é o vetor unitário definido na direção paralela ao eixo z do sistema NED. Além disso, a derivada temporal do erro de posição, desprezando os produtos dos erros dos estados e a variação dos raios de curvatura com a latitude, pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\delta \dot{L}_b) &= \frac{\delta v_{eb,N}^n}{R_N(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} - \frac{\hat{v}_{eb,N}^n \delta h_b}{(R_N(\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2} \\
\mathbb{E}(\delta \dot{\lambda}_b) &\approx \frac{\delta v_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b) \cos \hat{L}_b} + \frac{\hat{v}_{eb,E}^n \sin \hat{L}_b \delta L_b}{(R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b) \cos^2 \hat{L}_b} - \frac{\hat{v}_{eb,E}^n \delta h_b}{(R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2 \cos \hat{L}_b} \\
\delta \dot{h}_b &\approx -\delta v_{eb,D}^n
\end{aligned} \tag{3.20}$$

A matriz do sistema \mathbf{F}_{INS}^n pode ser expressa a partir de:

$$\mathbf{F}_{INS}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}^n & \mathbf{F}_{12}^n & \mathbf{F}_{13}^n & 0_3 & \hat{C}_b^n \\ \mathbf{F}_{21}^n & \mathbf{F}_{22}^n & \mathbf{F}_{23}^n & \hat{C}_b^n & 0_3 \\ 0_3 & \mathbf{F}_{32}^n & \mathbf{F}_{33}^n & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

onde

$$\mathbf{F}_{11}^n = -[\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n \times], \tag{3.22}$$

$$\mathbf{F}_{12}^n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} & 0 \\ \frac{1}{R_N(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tan \hat{L}_b}{R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

$$\mathbf{F}_{13}^n = \begin{bmatrix} \omega_{ie} \sin \hat{L}_b & 0 & \frac{\hat{v}_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ 0 & 0 & \frac{-\hat{v}_{eb,N}^n}{(R_N(\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ \omega_{ie} \cos \hat{L}_b + \frac{\hat{v}_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b) \cos^2 \hat{L}_b} & 0 & \frac{-\hat{v}_{eb,E}^n \tan \hat{L}_b}{(R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{F}_{21}^n = -[(\hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\mathbf{f}}_{ib}^b) \times], \quad (3.25)$$

$$\mathbf{F}_{22}^n = \begin{bmatrix} \frac{\hat{v}_{eb,D}^n}{R_N(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} & -\frac{2\hat{v}_{eb,E}^n \tan \hat{L}_b}{R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} - 2\omega_{ie} \sin \hat{L}_b & \frac{\hat{v}_{eb,N}^n}{R_N(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} \\ \frac{\hat{v}_{eb,E}^n \tan \hat{L}_b}{R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} + 2\omega_{ie} \sin \hat{L}_b & \frac{\hat{v}_{eb,N}^n \tan \hat{L}_b + \hat{v}_{eb,D}^n}{R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} & \frac{\hat{v}_{eb,E}^n}{R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} + 2\omega_{ie} \cos \hat{L}_b \\ -\frac{2\hat{v}_{eb,N}^n}{R_N(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} & -\frac{2\hat{v}_{eb,E}^n}{R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} - 2\omega_{ie} \cos \hat{L}_b & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{F}_{32}^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_N(\hat{L}_b) + \hat{h}_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b) \cos \hat{L}_b} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{F}_{33}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\hat{v}_{eb,N}^n}{(R_N(\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ \frac{\hat{v}_{eb,E}^n \sin \hat{L}_b}{(R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b) \cos^2 \hat{L}_b} & 0 & -\frac{\hat{v}_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{L}_b) + \hat{h}_b)^2 \cos \hat{L}_b} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

3.2.2.1 Modelagem de Ruídos de INSs

O modelo dinâmico dos erros do INS compreende a um número de fontes de ruído aleatórios independentes, os quais são assumidos brancos e com distribuição Gaussiana. Conforme apresentado na Subseção 2.1.3.5, um dos principais erros que podem ser en-

contrados em INSs são os do tipo *random-walks*, que são estocásticos e originários da integração numérica de um ruído aleatório branco e Gaussiano. É possível caracterizar tais erros a partir da matriz de covariância dos ruídos de processo, dada pela Equação (3.29).

$$\mathbf{Q}_{INS}^n \approx \begin{bmatrix} S_{rg}\mathbf{I}_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & S_{ra}\mathbf{I}_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & S_{bad}\mathbf{I}_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & S_{bgd}\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \tau_i, \quad (3.29)$$

onde S_{rg} , S_{ra} são as densidades espectrais de potência (PSDs) dos ruídos aleatórios do girômetro e do acelerômetro, S_{bad} , S_{bgd} são as PSDs dos ruídos aleatórios que dirigem os vieses *in-run* do acelerômetro e do girômetro, respectivamente, e τ_i o intervalo de integração do INS.

Sendo σ_{ra} e σ_{rg} os desvios-padrões dos ruídos nas medições de força específica do acelerômetro e nas medições de taxa angular dos girômetros, respectivamente, pode-se definir os PSDs de acordo com:

$$\begin{aligned} S_{ra} &= \sigma_{ra}^2 \tau_i, \\ S_{rg} &= \sigma_{rg}^2 \tau_i. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Considerando, ainda, σ_{bad} e σ_{bgd} como sendo os desvios-padrões dos vieses dos acelerômetros e dos girômetros, respectivamente, pode-se definir os PSDs dos ruídos diretores desses conforme:

$$S_{bad} = \frac{\sigma_{bad}^2}{\tau_{bad}}, \quad S_{bgd} = \frac{\sigma_{bgd}^2}{\tau_{bgd}}, \quad (3.31)$$

onde τ_{bad} e τ_{bgd} se referem aos tempos de correlação dos vieses instabilidade dos acelerômetros e girômetros, respectivamente.

4 METODOLOGIA

A metodologia proposta para esta dissertação tem como objetivo investigar a integração otimizada de Sistemas de Navegação Inerciais (INSs) com Atualizações Estacionárias (ZUPTs) e Restrições de Movimento (MCs). Essa integração visa aprimorar a utilização das informações provenientes dessas técnicas, e assim, obter uma estimativa mais precisa e robusta de posição e orientação do INS.

4.1 Integração INS/ZUPT

ZUPTs são atualizações de velocidade linear e angular zero que são feitas para se manter a calibração e alinhamento de um INS. Elas consistem em pseudo-medições necessariamente associadas à condição de estacionariedade do veículo para o qual a navegação é desejada.

Em aplicações de navegação onde não há medições auxiliares (e.g., GNSS) continuamente disponíveis ou quando as medições são rejeitadas temporariamente, a precisão de um INS pode ser colocada em risco por um aumento potencialmente ilimitado nos erros de velocidade e suas contribuições diretas para os erros de atitude e posição. As chamadas atualizações estacionárias fornecem uma melhoria drástica na precisão do INS em comparação aos sistemas sem nenhum tipo de fusão sensorial (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

A vantagem do ZUPT é que sua aplicação é econômica e bem menos complexa, pelo fato de não necessitar de nenhum equipamento/sensor adicional. Além disso, não há problemas de sincronização entre as predições e atualizações que ocorrem no filtro de Kalman. No entanto, sua principal limitação é que o veículo deve estar completamente parado, o que nem sempre é possível, como por exemplo, na navegação aérea e marítima. ZUPTs podem ser usados em aplicações veiculares terrestres a despeito da existência ou não de odometria e em aplicações chamadas PDR (do inglês *Pedestrian Dead Reckoning*) que funcionam com base no monitoramento da passada dos usuários.

4.1.1 *Zero Velocity Updates*

As *Zero Velocity Updates* (ZVUs) são exemplos de ZUPTs que devem ser executadas somente quando o sistema de navegação possuir velocidade nula com relação à Terra.

Essa detecção pode se dar de forma manual ou automática, e a inovação de medição para uma ZVU é dada pela Equação (4.1).

$$\delta \mathbf{z}_{ZV,k}^{n-} = \tilde{\mathbf{v}}_{eb}^n - \hat{\mathbf{v}}_{eb}^n, \quad (4.1)$$

onde \sim e $\hat{\cdot}$ representam as variáveis medidas pelos pseudo-sensores auxiliares e estimadas pelo INS.

Ao explorar com mais detalhes a Equação da inovação, levando em consideração que a medição do pseudo sensor ($\tilde{\mathbf{v}}_{eb}^n$) pode ser modelada pela velocidade verdadeira do veículo acrescida de ruído branco, e que a estimativa proveniente do INS ($\hat{\mathbf{v}}_{eb}^n$) pode ser modelada como a velocidade verdadeira mais uma perturbação linear da mesma, é possível substituir esses modelos na Equação (4.1), resultando na Equação (4.2).

$$\tilde{\mathbf{v}}_{eb}^n - \hat{\mathbf{v}}_{eb}^n = \mathbf{v}_{eb}^n + \eta_v - \mathbf{v}_{eb}^n - \delta \mathbf{v}_{eb}^n, \quad (4.2)$$

onde a variável η_v se refere ao ruído branco do pseudo sensor.

Portanto, cancelando os termos de velocidades não corrompidas, obtém-se a Equação (4.3), em cima da qual pode-se derivar o modelo para a matriz de medição do filtro de Kalman, conforme Equação (4.4).

$$\tilde{\mathbf{v}}_{eb}^n - \hat{\mathbf{v}}_{eb}^n = \eta_v - \delta \mathbf{v}_{eb}^n, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{H}_{ZV,k}^n = \begin{bmatrix} 0_3 & -\mathbf{I}_3 & 0_3 & 0_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

A covariância dos ruídos de medição descreve a variância e a covariância da velocidade nominalmente zero devido à vibração e distúrbios. As perturbações nos veículos podem ser causadas por rajadas de vento, outros veículos passando, pessoas se movendo no interior, operações de carga e descarga, etc.

Embora as ZVUs não forneçam informações de posição absoluta, o modelo do sistema do filtro de Kalman acumula informações sobre a correlação entre os erros de velocidade e posição nos elementos fora da diagonal da matriz de covariância do erro, P , permitindo a correção destes últimos.

4.1.2 Zero Angular Rate Updates

As ZARUs (*Zero Angular Rate Updates*) são outros exemplos de ZUPTs, aplicáveis quando o veículo não está rotacionando com relação à Terra e ainda em aplicações que contêm girômetros de baixo desempenho. O contexto de utilização das ZARUs é diferente das ZVUs, de modo que em alguns casos ambas as técnicas são executadas separadamente e em outros casos, em conjunto. Quando a odometria está disponível, na aplicação veicular, essa pode ser usada para disparar uma ZARU quando o veículo estiver parado.

A inovação de medição para um INS auxiliado por ZARUs é dada por:

$$\delta \mathbf{z}_{ZA,k}^{n-} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^n - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^n. \quad (4.5)$$

Assim como nas ZVUs, considera-se que a medição do pseudo sensor ($\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^n$) pode ser modelada como sendo a velocidade angular verdadeira do veículo mais um ruído branco e que a estimativa proveniente do INS ($\hat{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^n$) pode ser modelada como a velocidade angular verdadeira mais uma perturbação linear da mesma. Substituindo-se tais modelos na Equação (4.5) obtêm-se, dessa forma:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^b - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^b = \boldsymbol{\omega}_{eb}^b + \eta_\omega - \boldsymbol{\omega}_{eb}^b - \delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b, \quad (4.6)$$

portanto,

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^b - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^b = \eta_\omega - \delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b. \quad (4.7)$$

Deve ser observado, contudo, que:

$$\boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^b. \quad (4.8)$$

Na Equação (4.8) é mostrado que a velocidade angular do corpo com relação à Terra, representado no corpo ($\boldsymbol{\omega}_{eb}^b$), é igual a velocidade do corpo com relação ao inercial ($\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$) menos a velocidade angular da Terra com relação ao inercial ($\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$). O termo $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$ pode ser obtido a partir de $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$ com:

$$\boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e. \quad (4.9)$$

Além disso, pode-se definir $\mathbf{C}_e^b = (\mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{C}_e^n$, onde \mathbf{C}_b^n representa a matriz de rotação que fornece a atitude do veículo, \mathbf{C}_e^n é uma matriz de rotação que é função exclu-

sivamente da latitude e longitude e $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$ é um vetor que depende apenas da magnitude da rotação terrestre. Logo,

$$\boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\omega}_{ie}^e. \quad (4.10)$$

Aplicando a regra da diferenciação linear na Equação (4.10), pela regra da cadeia, obtém-se:

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\delta \mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\omega}_{ie}^e - (\mathbf{C}_b^n)^T \delta \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\omega}_{ie}^e - (\mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{C}_e^n \delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^e. \quad (4.11)$$

Sabendo que $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$ é um vetor invariante no tempo, ou seja, não é função de nenhuma variável, e que \mathbf{C}_e^n é função de longitude e latitude, originando um acoplamento fraco, é razoável desconsiderar as perturbações lineares de ambos os termos. Dessa forma, e valendo-se da aproximação de pequenos ângulos para $\delta \mathbf{C}_b^n$ tem-se:

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (-\delta \boldsymbol{\psi}_{nb}^n \times \mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\omega}_{ie}^e. \quad (4.12)$$

Aplicando a propriedade da transposta do produto de duas matrizes,

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + (\mathbf{C}_b^n)^T (\delta \boldsymbol{\psi}_{nb}^n \times)^T \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\omega}_{ie}^e. \quad (4.13)$$

Pela regra do produto vetorial,

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + (\mathbf{C}_b^n)^T \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \delta \boldsymbol{\psi}_{nb}^n. \quad (4.14)$$

Multiplicando a Equação (4.14) por (-1),

$$-\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b = -\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\mathbf{C}_b^n)^T \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \delta \boldsymbol{\psi}_{nb}^n. \quad (4.15)$$

E a matriz de medição é dada por:

$$\mathbf{H}_{ZA,k}^n = \begin{bmatrix} -(\mathbf{C}_b^n)^T \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

A covariância dos ruídos de medição reflete a variação da taxa angular nominalmente nula, causada por vibrações e distúrbios. Para veículos terrestres estacionários, geralmente há menos perturbação em torno do eixo de guinada do que nos eixos de ro-

lamento e arfagem, o que deve ser considerado ao estabelecer a covariância dos ruídos de medição. Em contrapartida, para veículos em movimento, é necessário assumir um ruído de medição maior. As Atualizações de Rotação Angular Zero (ZARUs) são aplicadas somente quando os erros dos girômetros são significativos em relação às perturbações angulares. Portanto, as ZARUs são ocasionalmente aplicadas apenas no eixo de guinada e normalmente não são utilizadas em IMUs que possuem girômetros de alto desempenho.

4.2 Técnicas de Detecção de Estacionariedade

A principal dificuldade associada à utilização de ZVUs e ZARUs consiste na etapa de detecção de estacionariedade. Conforme visto anteriormente, ZVUs e ZARUs somente devem ser aplicadas como pseudo-medições ao filtro de Kalman de integração, quando o veículo se encontra parado com relação à Terra. Em um veículo instrumentado com sensores de velocidade auxiliar, tais como, odômetros ou um receptor do Sistema de Navegação Global por Satélites (GNSS), a detecção de tal situação é trivial. Por outro lado, em veículos única e exclusivamente instrumentados com INS, é difícil se detectar, com confiabilidade, a condição de estacionariedade do veículo, uma vez que a informação de velocidade fornecida pelo INS diverge rapidamente no tempo, tornando uma detecção baseada, por exemplo, na ultrapassagem de um limiar de velocidade inadequada (GROVES, 2013).

Dentre as técnicas mais recentes que buscam resolver o problema supracitado, um estudo que utiliza a análise de Fourier (RAMANANDAN; CHEN; FARRELL, 2012) foi proposto visando extrair as componentes espectrais dos sinais, oriundos da IMU e com isso, fazer a distinção das frequências características de movimento (se o veículo se encontra estacionário, acelerando, desacelerando ou com velocidade linear constante), de ruídos e vibração.

Assumindo que uma IMU embarcada em um veículo terrestre contém um triedro de acelerômetros e girômetros, seu modelo é dado por:

$$\tilde{\mathbf{y}}^b = \mathbf{y}^b + \mathbf{b}^b + \mathbf{n}, \quad (4.17)$$

onde \mathbf{y}^b representa o vetor de sinais corrompidos pelos vieses dos sensores (\mathbf{b}^b) e \mathbf{n} representa o ruído do sistema. Já as componentes espectrais de frequência que o compõe o sinal y é dado por:

$$\mathbf{y}^b = \mathbf{s} + \mathbf{e} + \boldsymbol{\nu}, \quad (4.18)$$

em que \mathbf{s} representa o movimento em grande escala do veículo, \mathbf{e} representa o modelo das vibrações originárias do motor do veículo e $\boldsymbol{\nu}$ representa as demais vibrações originárias do sistema (termos esses dependentes do movimento do veículo).

Ramanandan, Chen e Farrell (2012) ainda modelam o chassi do veículo como sendo um sistema massa-mola-amortecedor, excitado pelo conjunto composto pelo motorista, motor e forças oriundas da estrada e IMU, tendo, dessa forma, sua saída em função de um filtro passa-baixas.

Substituindo (4.18) em (4.17), obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{y}}_i^b = \mathbf{s}(iT_s) + \mathbf{e}(iT_s) + \mathbf{b}^b(iT_s) + \mathbf{n}(iT_s) + \boldsymbol{\nu}(iT_s), \quad (4.19)$$

para T_s sendo o período de amostragem da IMU e o subscrito i referindo-se ao referencial inercial.

Com base na Equação (4.19), no domínio de frequência existem diferenças que permitem distinguir um veículo em movimento (mesmo que com velocidade constante) de um veículo estacionário.

Outros estudos sugerem o uso de magnetômetros para avaliar a densidade de fluxo magnético, que será constante caso o veículo esteja estacionário e, variação na taxa angular de guinada, uma vez que o veículo não sofre rotação quando está estacionário (GROVES, 2013).

4.3 Integração INS/MC

As chamadas restrições de movimento exploram as limitações nos graus de liberdade do veículo hospedeiro ou pedestre para corrigir e calibrar os erros de um INS (GROVES, 2013). Essas restrições são eventualmente denominadas não-holonômicas, pois introduzem dependência das estimativas dos estados quanto aos valores dinâmicos

dos mesmos. Elas surgem em função dos aspectos construtivos do veículo, o qual, sendo terrestre, está sujeito a duas restrições de movimento principais:

- A velocidade do veículo é zero ao longo do eixo de rotação de qualquer roda;
- A velocidade do veículo é zero na direção perpendicular à superfície (eixo z) da estrada na qual o veículo se desloca, embora tenha movimentos de amortecimento.

Ambas as restrições, para um veículo com tração traseira, são representadas por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{er}^r = 0, \quad (4.20)$$

onde \mathbf{v}_{er}^r é a velocidade do eixo traseiro do veículo com relação à Terra, representado no sistema de coordenadas do próprio eixo traseiro⁵. Considerando-se um veículo terrestre com rodas traseiras tracionadas as inovações de medição a serem aplicadas no FK de integração podem ser expressas como:

$$\delta \mathbf{z}_{MC,k}^{n-} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\tilde{\mathbf{v}}_{er}^r - \hat{\mathbf{v}}_{er}^r). \quad (4.21)$$

Assim como foi feito para os ZUPTs, $\tilde{\mathbf{v}}_{er}^r$ pode ser modelado como sendo a velocidade verdadeira do eixo traseiro do veículo mais um ruído branco e $\hat{\mathbf{v}}_{er}^r$ como a velocidade verdadeira, mais uma perturbação linear na mesma. Substituindo-se tais modelos citados na Equação (4.30), obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{er}^r - \hat{\mathbf{v}}_{er}^r = \mathbf{v}_{er}^r + \eta_v - \mathbf{v}_{er}^r - \delta \mathbf{v}_{er}^r. \quad (4.22)$$

Cancelando os termos de velocidades não corrompidas, tem-se:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{er}^r - \hat{\mathbf{v}}_{er}^r = \eta_v - \delta \mathbf{v}_{er}^r. \quad (4.23)$$

Contudo, deve ser observado que:

$$\mathbf{v}_{er}^r = \mathbf{v}_{er}^b = (\mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{v}_{eb}^n + \boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times \mathbf{l}_{br}^b, \quad (4.24)$$

⁵ O sistema de coordenadas do eixo traseiro do veículo (subscrito r) adotado neste trabalho tem sua origem definida no centro do eixo traseiro do veículo, e seus eixos x , y e z orientados nas direções longitudinal, para a direita, e para baixo.

onde \mathbf{l}_{br}^b é o braço de alavanca do referencial r para o referencial b e os termos relacionados à rotação da Terra e taxa de transporte foram desprezados.

Perturbando-se linearmente a Equação (4.24), tem-se, pela regra da cadeia:

$$\delta \mathbf{v}_{er}^r = (\delta \mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{v}_{eb}^n + (\mathbf{C}_b^n)^T \delta \mathbf{v}_{eb}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times \mathbf{l}_{br}^b + \boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times \delta \mathbf{l}_{br}^b. \quad (4.25)$$

Assumindo um modelo de pequenos ângulos para a perturbação em \mathbf{C}_b^n e desprezando-se erros no braço de alavanca, então:

$$\delta \mathbf{v}_{er}^r = (-\delta \boldsymbol{\psi}_{nb}^n \times \mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{v}_{eb}^n + (\mathbf{C}_b^n)^T \delta \mathbf{v}_{eb}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times \mathbf{l}_{br}^b. \quad (4.26)$$

Pela propriedade da transversa aplicada ao produto de matrizes e do produto vetorial,

$$\delta \mathbf{v}_{er}^r = (\mathbf{C}_b^n)^T \delta \boldsymbol{\psi}_{nb}^n \times \mathbf{v}_{eb}^n + (\mathbf{C}_b^n)^T \delta \mathbf{v}_{eb}^n - \mathbf{l}_{br}^b \times \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b. \quad (4.27)$$

Aplicando novamente a propriedade do produto vetorial e aproximando $\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b \approx \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ (vide eq. (4.14)), devido ao seu acoplamento com o braço de alavanca:

$$\delta \mathbf{v}_{er}^r = -(\mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{v}_{eb}^n \times \delta \boldsymbol{\psi}_{nb}^n + (\mathbf{C}_b^n)^T \delta \mathbf{v}_{eb}^n - \mathbf{l}_{br}^b \times \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b. \quad (4.28)$$

Multiplicando a Equação (4.28) por (-1),

$$-\delta \mathbf{v}_{er}^r = (\mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{v}_{eb}^n \times \delta \boldsymbol{\psi}_{nb}^n - (\mathbf{C}_b^n)^T \delta \mathbf{v}_{eb}^n + \mathbf{l}_{br}^b \times \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b. \quad (4.29)$$

Logo, a matriz de medição do filtro de Kalman associada aos MCs é:

$$\mathbf{H}_{MC,k}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[(\mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{v}_{eb}^n \times \quad -(\mathbf{C}_b^n)^T \quad 0_3 \quad 0_3 \quad \mathbf{l}_{br}^b \times \right]. \quad (4.30)$$

As restrições em questão podem ser consideradas como Atualizações de Velocidade Nula (ZVUs) aplicadas apenas em dois eixos. No entanto, as pseudo-medições provenientes das restrições de movimento podem ser aplicadas de forma contínua, sem a necessidade de detecção de condição estacionária. Inicialmente, uma atualização de medição de restrição pode ser realizada sempre que houver uma atualização na solução de navegação.

No entanto, é suficiente utilizar uma taxa de atualização mais baixa, compatível com os ciclos de processamento do filtro de Kalman para outros tipos de medição.

Para citar alguns exemplos de estudo dessa técnica de integração em INSs, é válido salientar que utilização correta de restrições de movimento para veículos requer uma compensação do braço de alavanca entre o centro da IMU e o ponto dessa restrição no veículo. A questão é que a MC nem sempre é válida para qualquer lugar do veículo, uma vez que a rotação do mesmo pode produzir uma velocidade lateral ou vertical correspondente com relação a seu movimento (ZHANG; HU; NIU, 2020).

5 RESULTADOS

Neste Capítulo são apresentados os resultados obtidos tanto por meio de simulações em ambiente computacional quanto por experimentos realizados com um veículo em escala real. Essa abordagem combina a avaliação do desempenho em um ambiente controlado e a validação prática do sistema proposto. Os resultados simulados proporcionam uma análise detalhada das características e do comportamento do sistema integrado, enquanto os resultados experimentais fornecem uma avaliação mais próxima das condições reais de operação. Essa combinação de resultados busca fornecer uma compreensão abrangente do desempenho do sistema de navegação integrado, permitindo uma análise comparativa entre a teoria, a simulação e a implementação prática.

5.1 Resultados Simulados

Para fins de simulação, um veículo terrestre foi considerado em uma trajetória que envolve curvas e paradas, utilizando o ambiente MATLAB[®], conforme evidenciado na Figura 5.1. O desempenho da navegação foi comparado para os seguintes cenários:

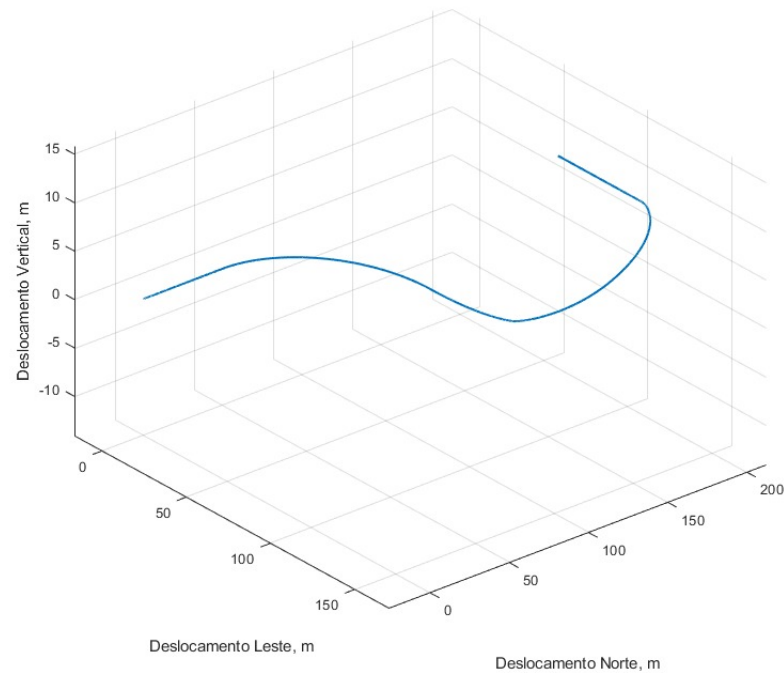
- (a) Um INS instalado no veículo simulado, sem a implementação de integração sensorial.
- (b) Um INS integrado com restrições de movimento.
- (c) Um INS integrado com atualizações estacionárias.
- (d) Um INS integrado com restrições de movimento e atualizações estacionárias.

O propósito destas comparações foi avaliar e analisar como as distintas abordagens de integração afetam a precisão e a robustez da navegação.

Para a simulação do INS, foi imperativo aplicar as equações de propagação de atitude, velocidade e posição veicular, em conformidade com as Equações (2.19), (2.23) e (2.24) previamente apresentadas. Contudo, no intuito de análise, os resultados se concentraram exclusivamente nos erros de posicionamento do veículo ao longo do tempo, assim como na análise de como esses erros se comportaram com cada técnica ou integração adotada.

Inicialmente, mostrou-se essencial estabelecer determinados parâmetros para a configuração inicial da simulação, tais como os erros intrínsecos dos sensores (acelerômetros e girômetro) e as constantes de movimento específicas do veículo simulado.

Figura 5.1 – Trajetória simulada, mostrada nos eixos x , y e z (NED).



Fonte: Do Autor (2023).

Tabela 5.1 – Erros de inicialização do INS.

Grandeza	Norte	Leste	Vertical
Posição (m)	4,00	2,00	3,00
Velocidade (m/s)	0,05	-0,05	0,10
Atitude (deg)	-0,05	0,04	1,00
Viés repetibilidade acelerômetro (mg)	900	-1300	800
Viés repetibilidade girômetro (deg/h)	-9	13	-8

Fonte: Do Autor (2023).

A Tabela 5.1 apresenta os valores dos erros de inicialização do INS (Sistema de Navegação Inercial) nas coordenadas NED (Norte, Leste e Vertical). Em seguida, a Tabela 5.2 exibe os valores simulados para os vieses de instabilidade dos acelerômetros e girômetros, com detalhes adicionais disponíveis em Farrell et al. (2021). Além disso, na Tabela 5.3, encontram-se os valores adotados para o tempo de correlação dos vieses de instabilidade do acelerômetro e girômetro. Esse parâmetro descreve a natureza temporal dos vieses nos sensores inerciais, especificando a duração durante a qual eles mantêm uma correlação antes de se tornarem independentes.

Tabela 5.2 – Viés instabilidade.

Sensores	Desvio Padrão
Acelerômetro (mg)	20
Girômetro (deg/h)	2

Fonte: Do Autor (2023).

Tabela 5.3 – Tempo de correlação dos vieses instabilidade.

Sensores	Tempo de Correlação (s)
Acelerômetro	200
Girômetro	100

Fonte: Do Autor (2023).

Tabela 5.4 – Tempo de correlação dos vieses instabilidade.

Sensores	Parametrização de erro em fator de escala.		
Acelerômetro	500	-300	200
	-150	-600	250
	-250	100	450
Girômetro	400	-300	250
	0	-300	-150
	0	0	-350

Fonte: Do Autor (2023).

Tabela 5.5 – Vieses dos girômetros dependentes da gravidade.

Vieses dependentes da gravidade		
0,9	-1,1	-0,6
-0,5	-1,9	-1,6
-0,3	1,1	450

Fonte: Do Autor (2023).

Outro componente crítico considerado na simulação é o erro de fator de escala e acoplamento cruzado, que foi incorporado de acordo com as matrizes apresentadas na Tabela 5.4. Adicionalmente, a matriz de erros de vieses do girômetro, dependentes da gravidade (matriz \mathbf{G}), é fundamental para modelar e compensar esses erros originados devido à influência da gravidade nos girômetros, como descrito na Tabela 5.5.

Foram introduzidos erros aleatórios nas saídas dos girômetros e dos acelerômetros, conforme detalhado na Tabela 5.6. Por fim, os erros de quantização da IMU (Unidade de Medição Inercial), também conhecidos como erros de resolução do instrumento, são levados em consideração, conforme especificado na Tabela 5.7. Esses erros representam a

Tabela 5.6 – Valores de erros aleatórios adotados para o INS.

Sensores	Raiz quadrada da PSD
Acelerômetro (\circ/\sqrt{h})	100
Girômetro ($mg\sqrt{Hz}$)	0,01

Fonte: Do Autor (2023).

Tabela 5.7 – Resolução dos sensores.

Sensores	Resolução
Acelerômetro (rad/s)	$1,0 \times 10^{-4}$
Girômetro (m/s^2)	$2,0 \times 10^{-4}$

Fonte: Do Autor (2023).

Tabela 5.8 – Valores adotados para a inicialização de \mathbf{P} .

Estados	Incertezas
Erros de atitude (deg)	2
Erros de velocidade (m/s)	0,2
Erros de latitude/longitude (deg)	$1,0 \times 10^{-4}$
Erros de altitude (m)	10
Viés do acelerômetro (μg)	2000
Viés do girômetro (deg/h)	20

Fonte: Do Autor (2023).

menor variação mensurável que pode ser detectada ou exibida pelo instrumento, ou seja, correspondem à menor diferença discernível entre dois valores distintos que o instrumento é capaz de discriminar.

Definidos os erros da IMU, definiu-se em seguida, parâmetros relacionados aos pseudo-sensores (ZUPTs e MCs) e ao FK. O intervalo de aplicação dos ZUPTs e MCs, em particular, foi definido como sendo dez vezes mais lento que o intervalo de amostragem da IMU (0,1 e 0,01 segundos, respetivamente), e a janela de tempo para detecção de estacionariedade foi definido em 0,5 segundos. Além disso, definiu-se alguns parâmetros de inicialização do filtro, como a matriz de covariâncias dos estados, \mathbf{P} , conforme representado na Tabela 5.8.

A matriz de densidade de ruído do sistema, \mathbf{S} , foi definida de acordo com a Tabela 5.9. Em seguida, a matriz de covariâncias dos ruídos de medição, \mathbf{R} , foi definida, incluindo os desvios padrões necessários, conforme especificado na Tabela 5.10

Tabela 5.9 – Valores adotados para **S**.

Incertezas	Raiz quadrada da PSD
Ruído aleatório do acelerômetro ($mg\sqrt{Hz}$)	100
Ruído aleatório do girômetro (deg/\sqrt{h})	0,01
Ruído diretor do viés instabilidade do acelerômetro m^2s^{-5}	$5,0 \times 10^{-10}$
Ruído diretor do viés instabilidade do girômetro (rad^2s^{-3})	$2,5 \times 10^{-12}$

Fonte: Do Autor (2023).

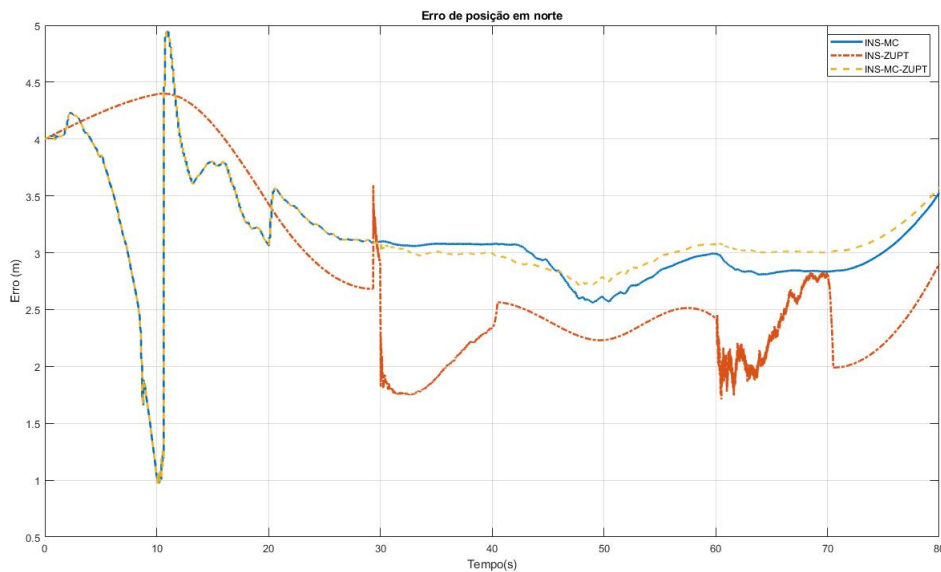
Tabela 5.10 – Valores adotados para **R**.

Inovações de medição	Desvio padrão
MCs	0,001 m/s
ZVUs	0,5 m/s
ZARUs	1×10^{-4} rad/s

Fonte: Do Autor (2023).

Após a definição dos valores de todas as variáveis de simulação do sistema, foram gerados gráficos dos erros de posição em coordenadas NED para comparar o comportamento das integrações do INS com ZUPTs e MCs. A Figura 5.2 apresenta os resultados obtidos para o deslocamento na direção norte do veículo. Observa-se que, aparentemente, a integração com MCs parece dominar o comportamento do sistema integrado em comparação com a integração com ZUPTs.

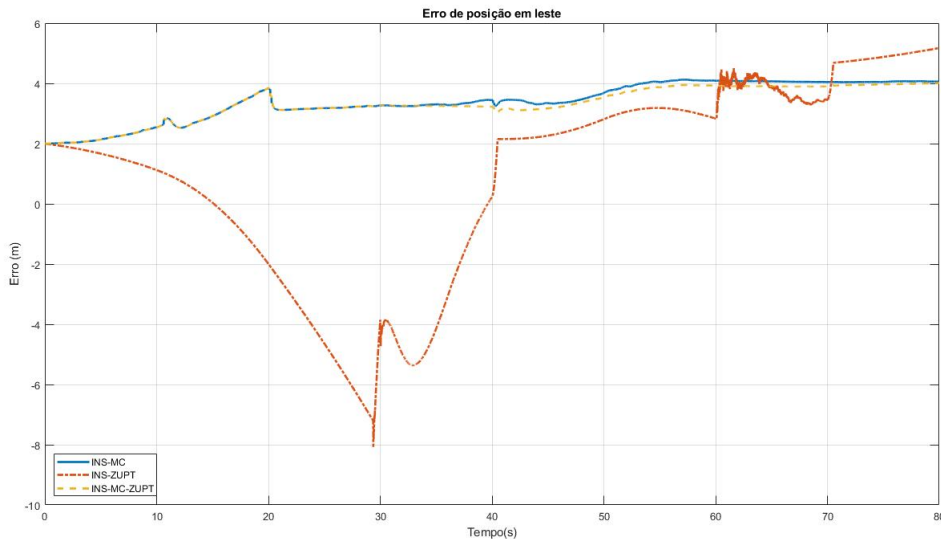
Figura 5.2 – Erros de posição em norte para a simulação.



Fonte: Do Autor (2023).

Na Figura 5.3 são representados os erros de posição de deslocamento do veículo em leste. Nesse cenário, é possível observar que tanto na integração INS-MC quanto na integração INS-MC-ZUPT, foram obtidos resultados idênticos, manifestando estabilidade ao longo de toda a extensão do trajeto.

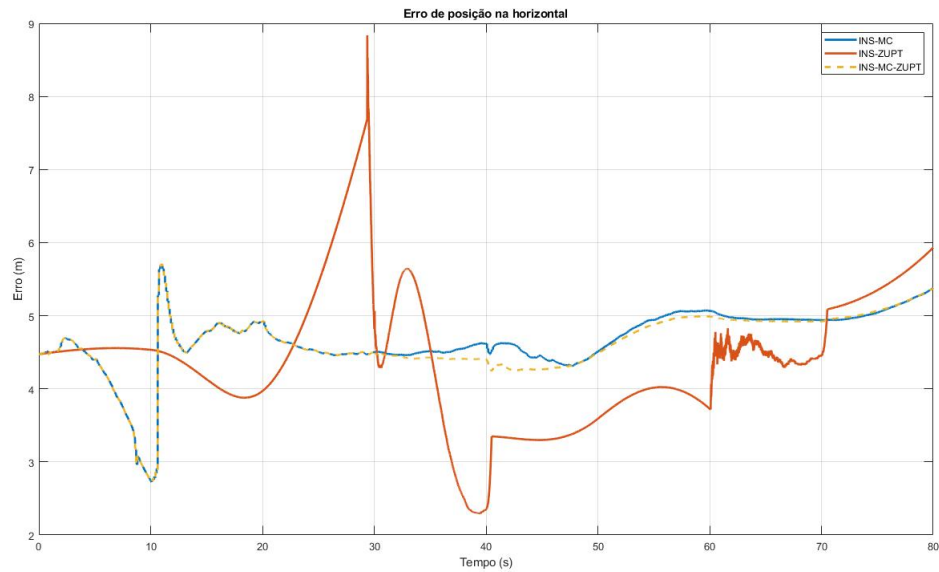
Figura 5.3 – Erros de posição em leste para a simulação.



Fonte: Do Autor (2023.)

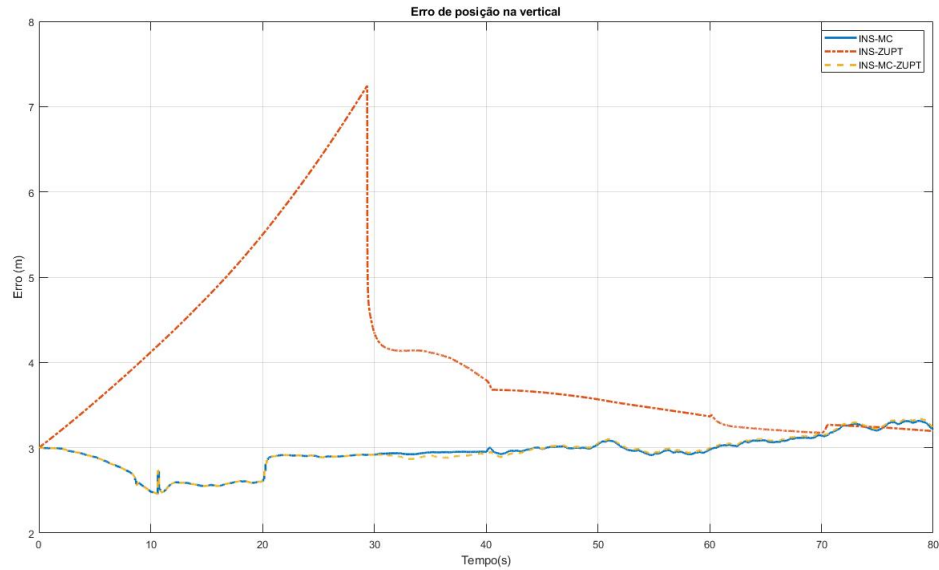
Na Figura 5.4, pode-se examinar os efeitos das abordagens de integração INS-MC e INS-MC-ZUPT. Ambas exibiram resultados semelhantes na mitigação do erro na posição horizontal, abrangendo o intervalo de tempo entre 12 e 75 segundos, onde se vislumbra um sinal de possível aumento do erro. Por outro lado o erro de posição associado à integração INS-ZUPT mostrou-se pior comportado, oscilando mais significativamente ao longo de todo o percurso. A Figura 5.5 representa os erros de posição no deslocamento vertical do veículo. Nesse cenário, ao aplicar a integração INS-MC, nota-se que o erro de posição apresenta uma notável divergência nos primeiros 30 segundos do percurso. No entanto, após esse ponto, ocorre uma queda abrupta, resultando na estabilização do erro em um patamar de 3,25 metros. Já na integração INS-MC e INS-MC-ZUPT o erro de posição bem acomodado, mantendo um padrão dos 20 aos 60 segundos de trajeto.

Figura 5.4 – Erros de posição na horizontal para a simulação.



Fonte: Do Autor (2023).

Figura 5.5 – Erros de posição na vertical para a simulação.



Fonte: Do Autor (2023).

Ao analisar as fusões sensoriais nas técnicas de integração individual, observa-se que, em integrações que envolvem atualizações estacionárias, os erros de posição nos eixos leste e vertical levam mais tempo para se estabilizar em comparação com a fusão por meio de restrições de movimento. Isso ocorre devido à aplicação dos ZUPTs e à correção do INS somente quando o veículo é detectado em condições estacionárias. A partir dos 30

segundos, quando a primeira parada do veículo é detectada, nota-se uma diminuição na propagação dos erros de posição em todas as direções, que se mantém até os 40 segundos da simulação, quando o veículo volta a se movimentar. O mesmo padrão é observado entre os instantes de 60 e 70 segundos, quando ocorre a segunda parada do veículo.

Ao recorrer à fusão sensorial com ambas as técnicas apresentadas, é possível obter resultados que se aproximam do cenário em que apenas restrições de movimento foram utilizadas, sendo essa a técnica que se destaca no desempenho de mitigação dos erros do INS apesar de tal tendência, a análise da raiz dos erros médios quadráticos (RMS) de posição (Tabela 5.11) que, devido às expressivas oscilações da solução de navegação integradas INS-ZUPT, esta, eventualmente, culmina em menores valores para os erros norte e horizontal (comportamento desejado), o que não implica, contudo, que se trate da técnica mais eficaz para mitigação dos erros do INS.

Tabela 5.11 – Valores RMS (m) dos erros de posição para a simulação.

Integração	Norte (m)	Leste (m)	Horizontal (m)	Vertical (m)
INS-PURO	3,65	32,95	33,15	12,14
INS-MC	3,14	3,46	4,68	2,94
INS-ZUPT	2,94	3,41	4,65	4,14
INS-MC-ZUPT	3,18	3,37	6,64	2,94

Fonte: Do Autor (2023).

5.2 Resultados experimentais

Com o propósito de validar os princípios de navegação inercial e as abordagens de integração sensorial exploradas neste trabalho, foi conduzido ensaios experimentais empregando veículos terrestres em escala real. Ao todo, foram executados três experimentos, visando a confirmação dos resultados obtidos.

No experimento inaugural, foi utilizado um veículo sedan (Figura 5.6) equipado com um módulo de aquisição de dados modelo MTi-7 da Xsens (XSENS, 2023b). Durante esse estágio, foi percorrido um trajeto de curta distância, intercalado por breves paradas.

Nos experimentos subsequentes, empregou-se uma minivan (Figura 5.13) equipada com um módulo de aquisição de dados modelo MTi-680G também da Xsens (XSENS, 2023a). Em ambos os experimentos, o veículo manteve-se em movimento, sendo que, no segundo, ele realizou uma única parada longa, e no terceiro, várias paradas pequenas.

5.2.1 Experimento 1

No âmbito desse experimento, foi empregado, conforme citado anteriormente, um módulo de navegação integrada INS/GNSS cujas principais especificações técnicas estão detalhadas nas Tabelas de 5.12 a 5.14. Esse módulo foi instalado no porta-malas do veículo (conforme representado na Figura 5.7), com o objetivo de alcançar uma correspondência precisa, dentro de tolerâncias aceitáveis, entre os sistemas de coordenadas r e b .

Tabela 5.12 – Especificações de desempenho dos módulos XSENS.

Parâmetro	MTi-7	MTi-680G
Rolamento, arfagem (deg RMS)	0,5	0,1
Guinada/orientação (deg RMS)	1,5	0,1
Posição (cm)	100	1
Velocidade (m/s RMS)	0,05	0,05

Fonte: (XSENS, 2023b) (XSENS, 2023a).

Tabela 5.13 – Parâmetros dos girômetros dos módulos XSENS.

Parâmetro	MTi-7	MTi-680G
Faixa completa padrão (deg/s)	2000	2000
Estabilidade do viés em execução (deg/h)	6	8
Largura de banda (-3 dB) (Hz)	230	520
Densidade de Ruído ($deg/s/\sqrt{Hz}$)	0,003	0,007
Sensibilidade à gravidade (calibração) ($deg/s/g$)	-	0,1

Fonte: (XSENS, 2023b) (XSENS, 2023a).

Tabela 5.14 – Parâmetros dos acelerômetros dos módulos XSENS.

Parâmetro	MTi-7	MTi-680G
Faixa completa padrão (g)	16	10
Estabilidade do viés em execução (μg)	40	10 (x,y), 15(z)
Largura de banda (-3 dB) (Hz)	230	500
Densidade de Ruído ($\mu g\sqrt{Hz}$)	70	60

Fonte: (XSENS, 2023b) (XSENS, 2023a).

Figura 5.6 – Veículo tipo sedan utilizado para o experimento 1.



Fonte: Do Autor (2023).

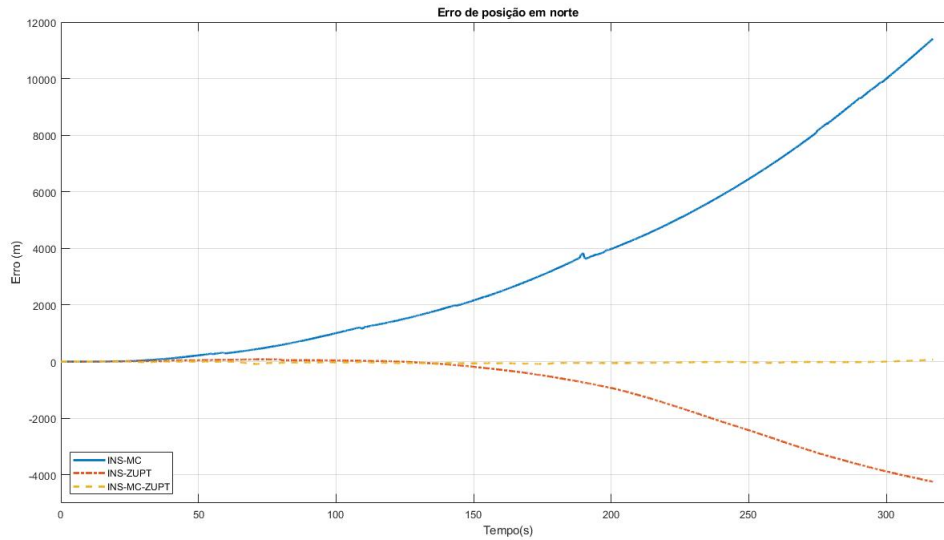
Figura 5.7 – Módulo MTi7 instalado próximo ao eixo das rodas traseiras do veículo.



Fonte: Do Autor (2023).

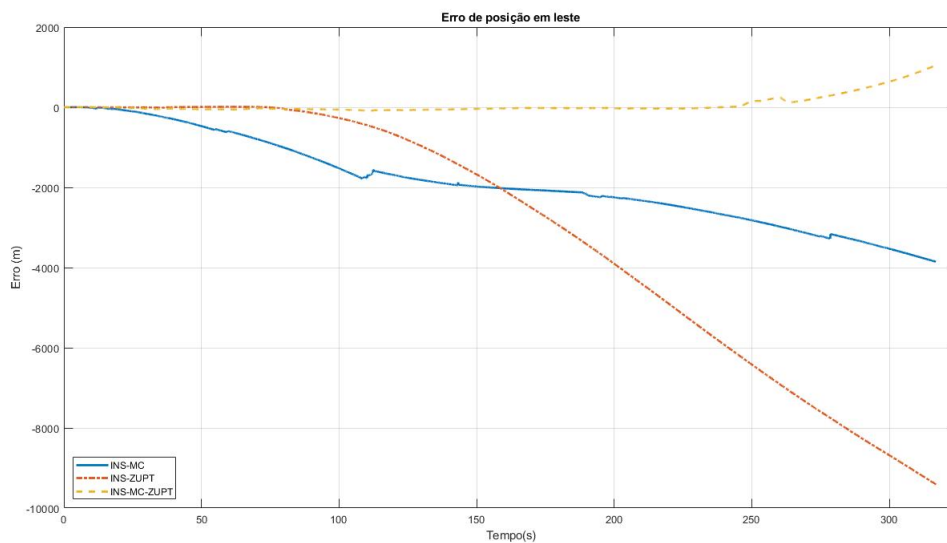
Após a instrumentação, o veículo realizou trajetos em avenidas da Universidade Federal de Lavras (UFLA), abrangendo acelerações, desacelerações e paradas características de um ambiente urbano (conforme representado na Figura 5.8). As leituras brutas provenientes dos acelerômetros e girômetros do módulo foram armazenadas e posteriormente processadas de forma *offline*, utilizando o software MATLAB[®]. Esse processo teve como objetivo avaliar o desempenho de um Sistema de Navegação Inercial (INS) assistido

Figura 5.9 – Erros de posição em norte para o experimento 1.



Fonte: Do Autor (2023).

Figura 5.10 – Erros de posição em leste para o experimento 1.

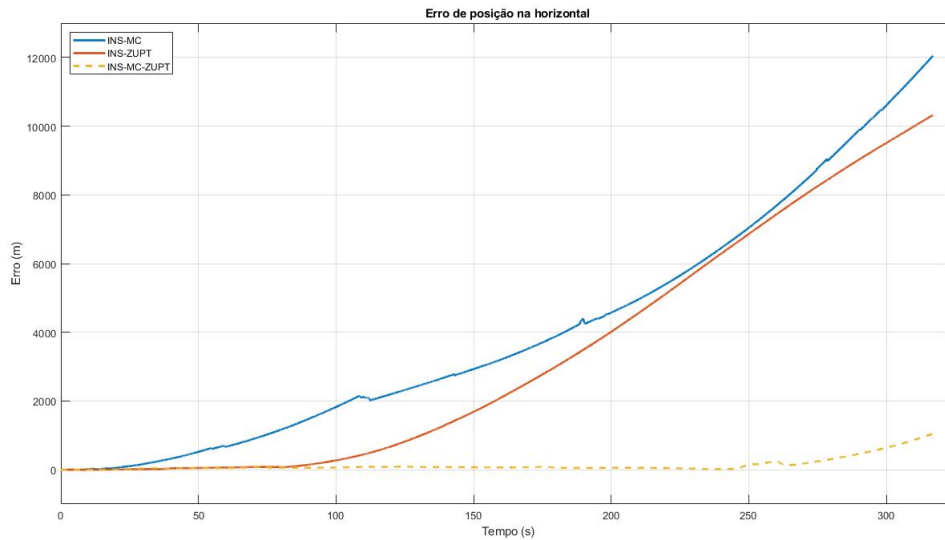


Fonte: Do Autor (2023).

Além disso, foi conduzida uma análise do erro de posição no canal horizontal da trajetória. A Figura 5.11 evidencia que a integração INS-MC-ZUPT demonstrou um desempenho eficaz ao longo de toda a janela temporal, que se estende desde 0 até 250 segundos. Esse desempenho segue uma tendência semelhante ao comportamento do erro no eixo leste. Por outro lado, na integração INS-ZUPT, observou-se um período inicial

de estabilidade até aproximadamente 80 segundos de percurso, após o qual ocorreu uma divergência temporal, acompanhando uma tendência semelhante ao erro do INS-MC.

Figura 5.11 – Erros de posição na horizontal para o experimento 1.

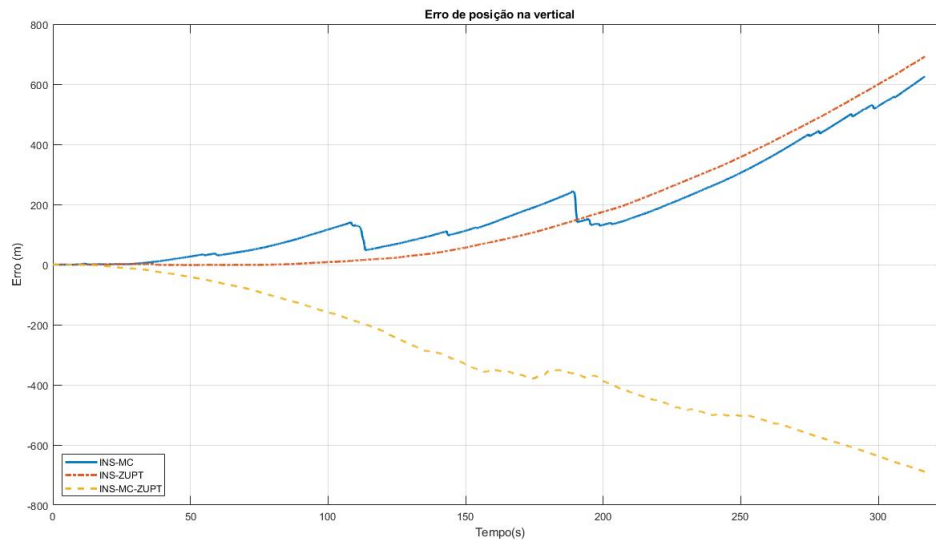


Fonte: Do Autor (2023).

Finalmente, examinou-se o padrão dos erros de posição no eixo vertical durante o experimento. Nesse contexto, a Figura 5.12 destaca que todas as integrações sensoriais sob investigação desempenharam de forma aproximadamente igual, em termos de magnitude final dos erros, a qual, por inspeção, mostrou-se próxima da magnitude final dos erros no canal horizontal para a integração INS-MC-ZUPT (vide Figura 5.17).

Em relação ao desempenho do INS auxiliado por ZUPTs, é notável que a sua aplicação resultou em uma considerável redução nos erros de posição na direção norte. No entanto, essa melhora não foi igualmente observada nos demais no eixo leste.

Figura 5.12 – Erros de posição na vertical para o experimento 1.



Fonte: Do Autor (2023).

No contexto da integração INS-MCs-ZUPTs, observa-se que essa abordagem finalmente conseguiu mitigar a natureza divergente da solução do INS, mantendo estimativas de posição com uma exatidão da ordem de poucas centenas de metros (pelo menos para o canal horizontal). No momento de 120 segundos, quando ocorreu uma breve primeira parada do veículo, nota-se, via gráfico, uma diminuição na propagação dos erros quando é feita a integração INS-MC. Essa performance também é perceptível em escala maior aos 180 segundos, onde nota-se uma nova parada do veículo visualizando a curva INS-MC. Porém, uma análise mais detalhada dessas informações pode ser realizada por meio dos valores RMS dos erros de posição, em todas as integrações investigadas. Esses valores são apresentados de forma detalhada na Tabela 5.15.

Tabela 5.15 – Valores RMS (m) dos erros de posição para o experimento 1.

Integração	Norte (m)	Leste (m)	Horizontal (m)	Vertical (m)
INS-PURO	7784,45	4492,26	8987,66	214,55
INS-MC	4800,86	2160,56	5264,62	246,92
INS-ZUPT	1742,05	4382,21	4715,77	268,61
INS-MC-ZUPT	38,22	238,92	241,98	37,38

Fonte: Do Autor (2023).

Como principal verificação, embora as abordagens de integração individual, INS-ZUPTs e INS-MCs, não tenham demonstrado melhorias significativas na exatidão do

sistema de navegação inercial, quando aplicadas conjuntamente, elas conseguiram atenuar claramente as tendências divergentes do INS, especialmente no canal horizontal (norte e leste). Além disso, os erros de posição são mantidos contidos em uma margem de poucas centenas de metros.

5.2.2 Experimento 2

Nos experimentos 2 e 3, foi feita uma montagem semelhante à d experimento 1, porém, empregou-se dessa vez um módulo de navegação integrada INS/GNSS MTi-680G da Xsens (XSENS, 2023a), que foi instalado no compartimento traseiro do veículo (conforme indicado na Figura 5.14). A instalação foi realizada de maneira a assegurar a coincidência dos sistemas de coordenadas r e b , dentro de margens aceitáveis. As especificações técnicas módulo MTi-680G podem ser consultadas nas Tabelas 5.12 a 5.15. O veículo utilizado nos experimento 2 e 3 representado na Figura 5.13, e a Figura 5.14 demonstra como o veículo foi instrumentado com os equipamentos de aquisição de dados.

Figura 5.13 – Veículo tipo minivan utilizado para o experimento 2 e 3.



Fonte: Do Autor (2023).

Figura 5.14 – Módulo MTi-680G instalado próximo ao centro do eixo das rodas traseiras do veículo.



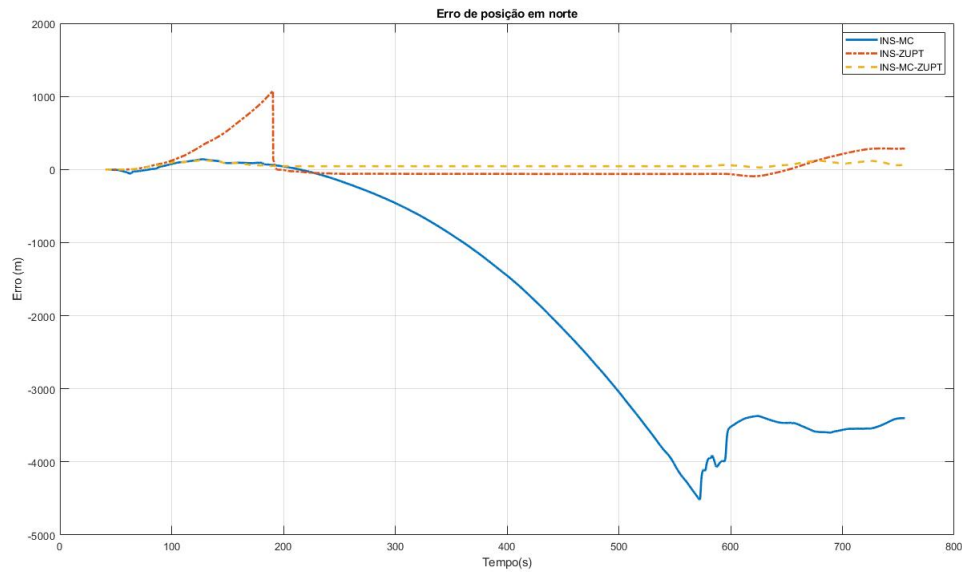
Fonte: Do Autor (2023).

Seguindo a mesma metodologia do experimento 1, os dados coletados foram submetidos a tratamento para permitir análises dos resultados obtidos para cada uma das técnicas de integração sensorial em relação às posições norte, leste, horizontal e vertical.

Os erros referentes ao eixo norte desse percurso estão apresentados na Figura 5.15. Nela, é possível notar a divergência evidenciada pela integração INS-MC desde o início do percurso. Por outro lado, a integração INS-ZUPT também revela um aumento do erro entre os instantes 0 e 200 segundos de percurso, chegando a um erro de 1000 metros nesse intervalo. No entanto, a partir do instante 200 segundos, ocorre um decréscimo e estabilização do erro, mantendo-se assim até o final da trajetória, com exceção de um pico de erro após 600 segundos.

Finalmente, o resultado mais satisfatório para o cenário norte é obtido pela integração completa de INS-MC-ZUPT, a qual mantém estabilidade ao longo de todo o percurso. Essa abordagem proporciona uma exatidão 3,6 vezes superior quando comparada ao INS-ZUPT.

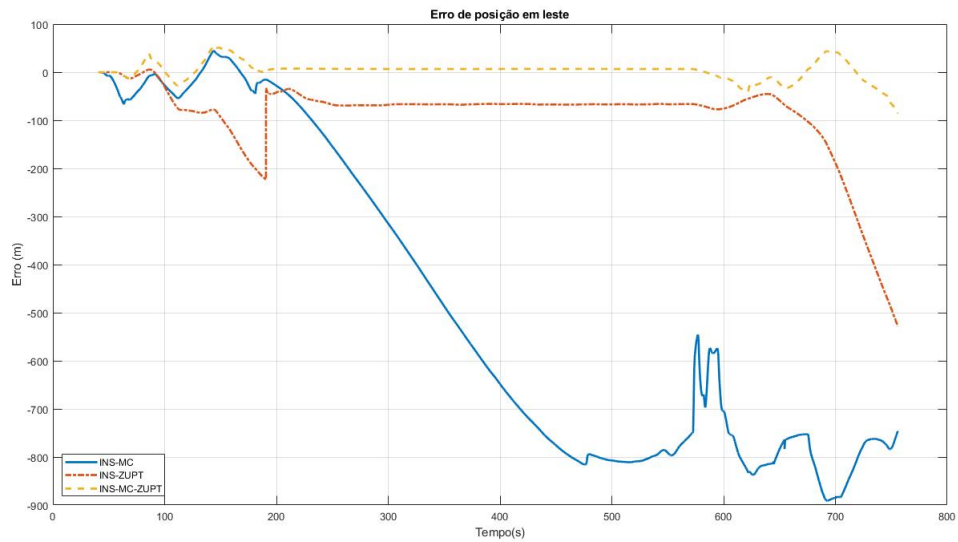
Figura 5.15 – Erros de posição em norte para o experimento 2.



Fonte: Do Autor (2023).

Em termos de erro de posição leste, observou-se um início de trajetória instável para ambas as abordagens de integração sensorial até o instante de 200 segundos, conforme pode ser visto na Figura 5.16. Na técnica de INS-MC, após os primeiros 200 segundos, ocorreu uma agravamento do erro, que se tornou divergente rapidamente, apresentando subsequente decaimento e oscilações em fases posteriores da trajetória. Por outro lado, nas abordagens de INS-ZUPT e INS-MC-ZUPT, o erro começou a se estabilizar após o instante de 200 segundos. Notavelmente, a técnica INS-MC-ZUPT demonstrou desempenho superior em relação às integrações individuais.

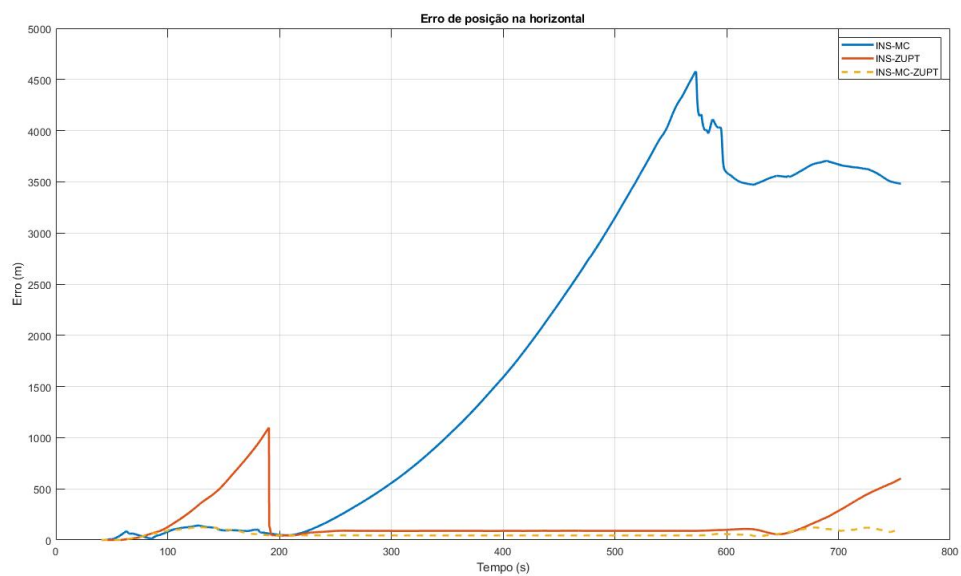
Figura 5.16 – Erros de posição em leste para o experimento 2.



Fonte: Do Autor (2023).

Em termos de erro de posição horizontal, representado na Figura 5.17, os resultados obtidos assemelham-se aos dos cenários norte e leste. Novamente, a técnica de INS-MC-ZUPT destacou-se sobre as demais, apresentando uma boa acomodação dos erros ao longo de toda trajetória do veículo.

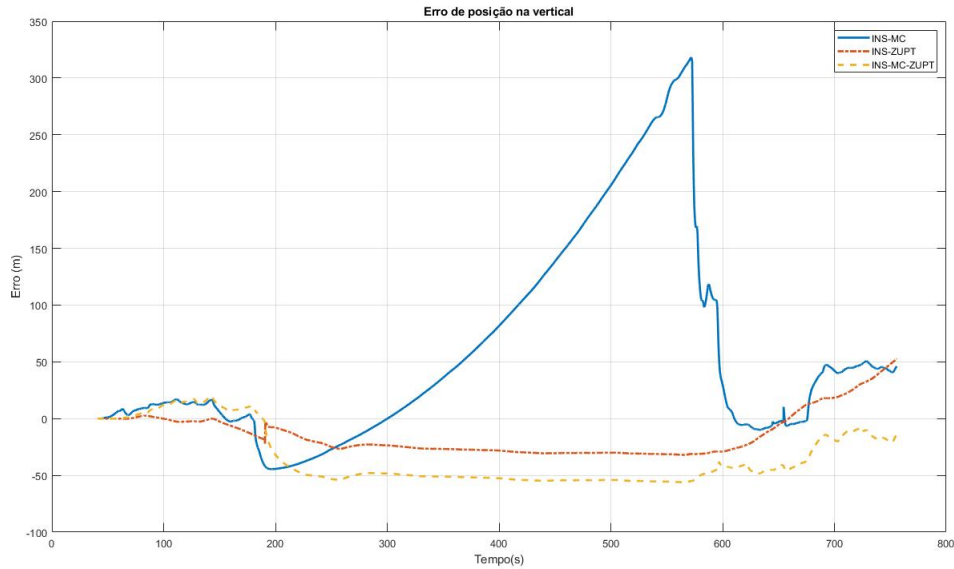
Figura 5.17 – Erros de posição na horizontal para o experimento 2.



Fonte: Do Autor (2023).

Por último, no que tange ao canal vertical, é evidente na Figura 5.18 que, nesse cenário, a abordagem de integração INS-ZUPT demonstrou uma acomodação mais eficaz dos erros até mesmo quando comparada à integração INS-MC-ZUPT.

Figura 5.18 – Erros de posição na vertical para o experimento 2.



Fonte: Do Autor (2023).

Na Tabela 5.16, é possível realizar uma comparação direta de todos os resultados apresentados em termos de valores RMS dos erros de posição. A análise dessa tabela permite concluir que a abordagem INS-MC-ZUPT demonstrou um desempenho satisfatório nos canais norte, leste e horizontal. Por outro lado, a técnica INS-ZUPT se destacou como a que melhor corrigiu os erros no canal vertical deste percurso.

Tabela 5.16 – Valores RMS (m) dos erros de posição para o experimento 2.

Integração	Norte (m)	Leste (m)	Horizontal (m)	Vertical (m)
INS-PURO	3168,00	192520,00	195110,00	35930,00
INS-MC	2358,90	582,40	2430,00	105,60
INS-ZUPT	231,72	127,93	260,00	23,70
INS-MC-ZUPT	62,96	19,21	75,00	41,96

Fonte: Do Autor (2023).

A partir dos 200 segundos, aproximadamente, quando a longa parada do veículo é detectada, nota-se uma diminuição na propagação dos erros de posição em todas as direções quando a atualização estacionária atua para diminuição do mesmo. Como conclusão, fica evidente no experimento 2 que a implementação da integração utilizando

ZUPTs mostrou-se superior em termos de mitigação dos erros nos canais norte, leste e horizontal, que são eixos cruciais para avaliar o movimento veicular. Esse efeito foi ainda mais aprimorado com a adição do método de restrições de movimento (MC), resultando em uma melhoria significativa na exatidão da navegação inercial.

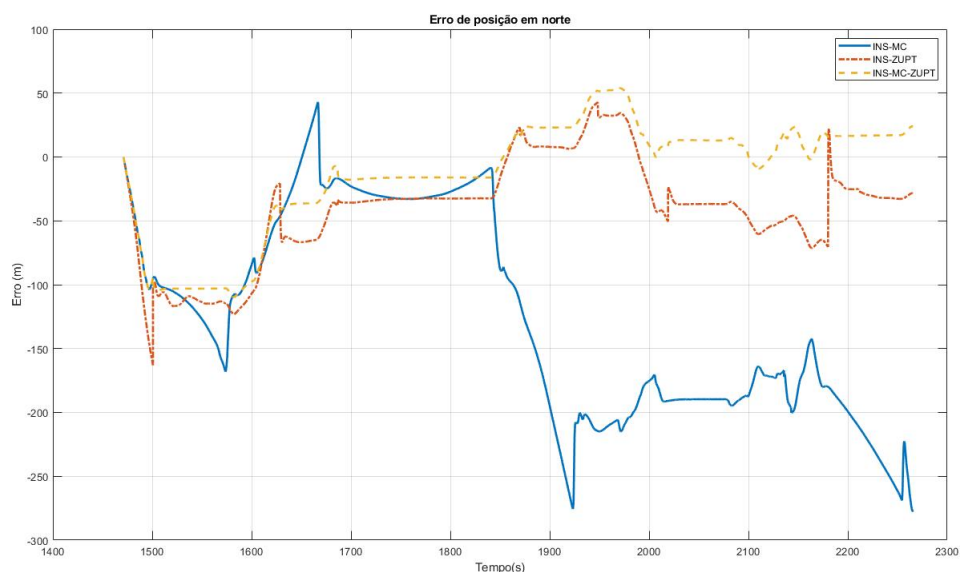
5.2.3 Experimento 3

No experimento 3, foi adotado o mesmo veículo. configuração e metodologia do experimento 2, porém, desta vez, a rota foi executada de maneira distinta. Neste caso o veículo em movimento realizou diversas paradas de curta duração, permitindo análises valiosas das orientações norte, leste, horizontal e vertical, conforme detalhado a seguir.

Ao avaliar a Figura 5.19, é possível perceber o comportamento do canal norte, onde a abordagem INS-MC apresenta um padrão notavelmente divergente, caracterizado por picos significativos nos erros de posição, principalmente a partir do instante de 1850 segundos de percurso.

No caso da integração INS-ZUPT, observa-se uma melhoria considerável, com picos de erros menos pronunciados, ainda que presentes. No entanto, é a técnica INS-MC-ZUPT que demonstra o melhor tratamento dos erros nesse trecho, exibindo um desempenho aproximadamente 3,25 vezes superior (em termos de erro RMS) em comparação à integração INS-MC.

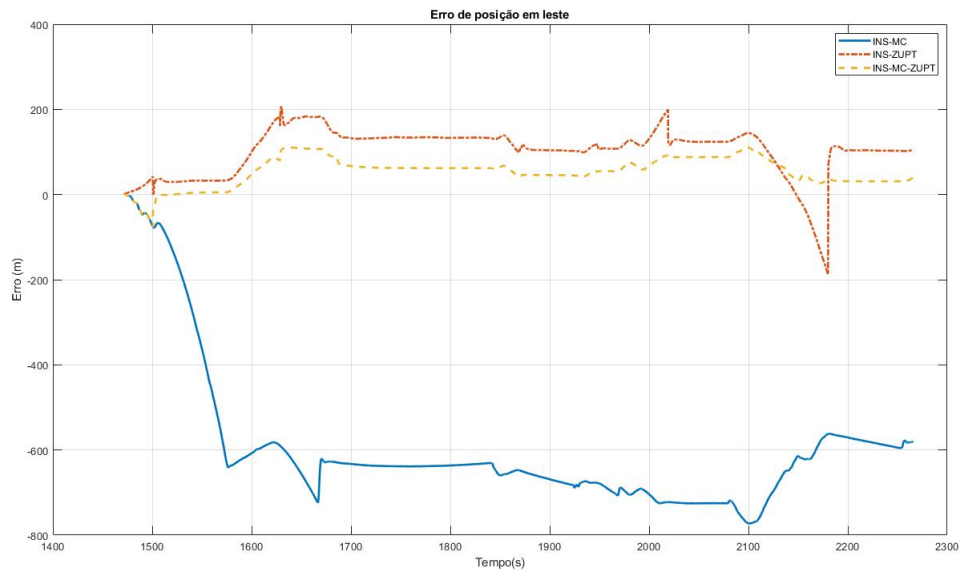
Figura 5.19 – Erros de posição em norte para o experimento 3.



Fonte: Do Autor (2023).

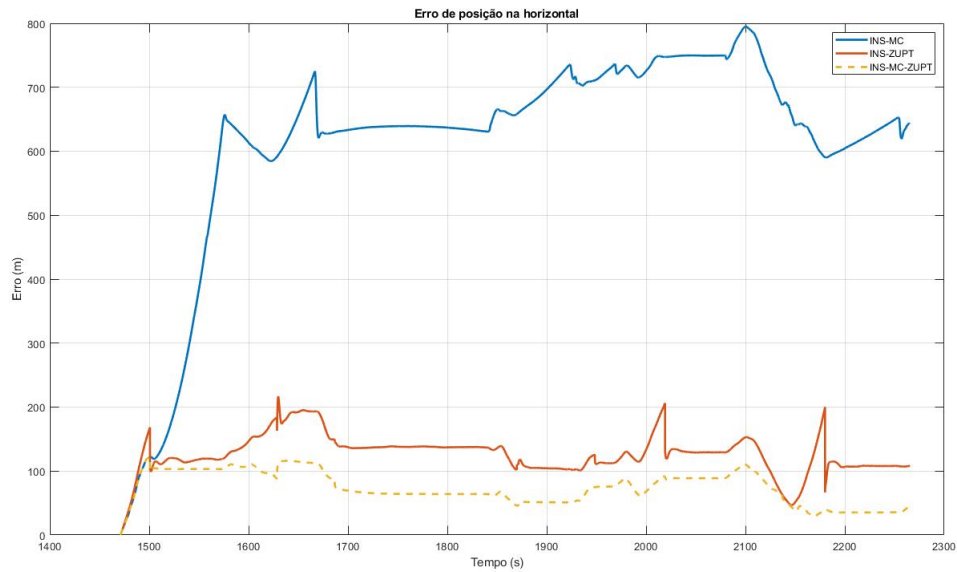
No canal leste, representado pela Figura 5.20, podemos observar um padrão semelhante ao do canal norte em relação aos erros RMS. Neste caso, as técnicas que demonstraram os melhores resultados foram a INS-MC-ZUPT e a INS-MC, respectivamente. No que diz respeito ao canal horizontal, representado pela Figura 5.21, pode-se observar que a integração INS-MC apresenta divergência ao longo do tempo, resultando em erros na faixa de 600 a 800 metros ao longo do percurso. Por outro lado, as técnicas que incorporam atualizações estacionárias, ou seja, INS-ZUPT e INS-MC-ZUPT, conseguem manter-se na faixa de erro abaixo de 200 metros. Isso implica em um desempenho 5 vezes superior em relação aos erros da técnica que utiliza apenas restrições de movimento.

Figura 5.20 – Erros de posição em leste para o experimento 3.



Fonte: Do Autor (2023).

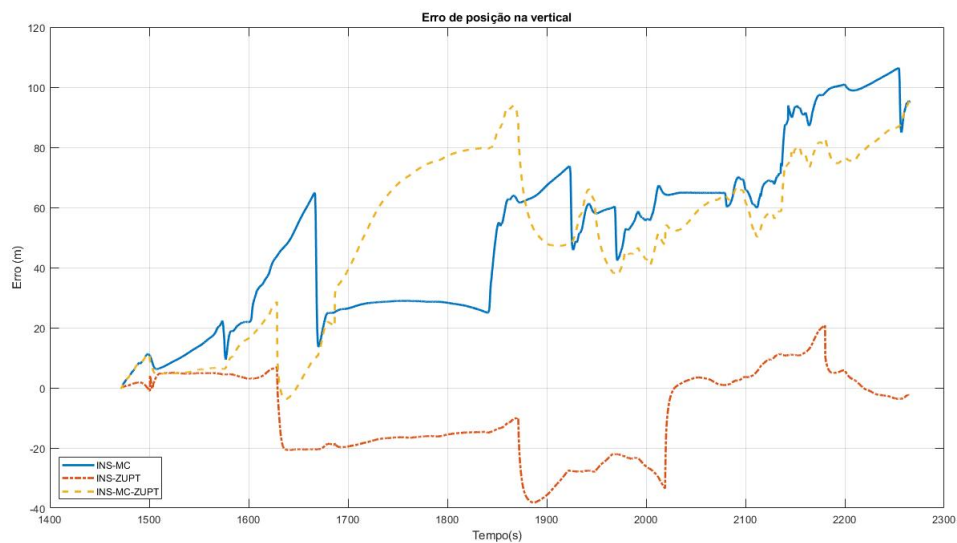
Figura 5.21 – Erros de posição na horizontal para o experimento 3.



Fonte: Do Autor (2023).

Por fim, ao analisar o erro no canal vertical, conforme representado na Figura 5.22, é possível constatar um resultado mais positivo quando se aplicou a técnica de atualizações estacionárias de forma isolada, sem o auxílio de restrições de movimento. Nesse contexto, essa abordagem apresenta um erro aproximadamente 3,5 vezes inferior se comparado com as outras técnicas de fusão sensorial.

Figura 5.22 – Erros de posição na vertical e para o experimento 3.



Fonte: Do Autor (2023).

Com o auxílio da Tabela 5.17, pode-se concluir que a abordagem INS-MC-ZUPT mais uma vez se destaca ao apresentar os resultados mais congruentes nos canais norte, leste e horizontal. Por outro lado, a técnica INS-ZUPT se destacou como a que melhor corrigiu os erros no canal vertical desse percurso, assim como ocorrido no experimento 2. Nos tempos 1500, 1625, 1650, 2010, 2100 e 2180 segundos, aproximadamente, quando as paradas do veículo são detectadas, nota-se que as atualizações estacionárias atuam para diminuição na propagação dos erros de posição em todas as direções.

Tabela 5.17 – Valores RMS (m) dos erros de posição para o experimento 3.

Integração	Norte (m)	Leste (m)	Horizontal (m)	Vertical (m)
INS-PURO	51066,00	49813,00	71338,00	19471,23
INS-MC	149,00	618,00	636,00	57,90
INS-ZUPT	57,30	116,80	130,00	16,80
INS-MC-ZUPT	45,80	63,00	78,00	56,90

Fonte: Do Autor (2023).

6 CONCLUSÃO

No estudo em questão, foram investigadas técnicas de integração de Sistemas de Navegação Inercial (INS) com restrições de movimento (MCs) e atualizações estacionárias (ZUPTs). Simulações computacionais e diversos experimentos com veículos em escala real foram realizados para validar a eficácia das fusões sensoriais em sistemas de navegação, demonstrando suas vantagens em aplicações veiculares. Além disso, uma análise comparativa das técnicas de fusão foi conduzida para evidenciar a validade e o embasamento da aplicação estudada.

Em termos de simulações, conforme apresentado na Subseção 5.1, foram observadas divergências nos erros de posição do INS no início do trajeto, quando da fusão sensorial utilizando atualizações estacionárias. Isso apontou para a necessidade de fusão de INS também com restrições de movimento a fim de alcançar resultados de navegação mais precisos na prática.

A conclusão obtida dos três experimentos reais, como analisado nas Subseções 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3, foi que as técnicas individualmente demonstraram capacidade de melhorar o desempenho do navegador inercial. No entanto, foi somente por meio da utilização conjunta das técnicas que se conseguiu mitigar efetivamente o comportamento divergente do INS nos canais norte, leste e horizontal, mantendo a solução de posição com uma exatidão de poucas dezenas de metros.

Embora essa exatidão não seja tradicionalmente suficiente para muitas aplicações em veículos ou robótica móvel, as abordagens de integração propostas destacam-se em cenários em que o INS é assistido por outros sensores, como receptores GNSS, cujos sinais podem ser momentaneamente bloqueados, como em túneis, viadutos e áreas urbanas densas. Durante intervalos de tempo limitados, como esses, as combinações do INS com ZUPTs e MCs podem manter a exatidão do sistema em níveis aceitáveis até que os sinais GNSS sejam reestabelecidos. Isso enfatiza a utilidade das abordagens de fusão de sensores para garantir a robustez da navegação em situações desafiadoras.

Sugestões para pesquisas futuras incluem a exploração da integração de ZUPTs e MCs com outros sensores frequentemente utilizados em conjunto com INSs, como receptores GNSS (Sistemas de Navegação Global por Satélites) e barômetros. Especificamente, a fusão com barômetros mostra-se promissora devido à sua capacidade reconhecida de reduzir os erros do INS no canal vertical.

Outra área de pesquisa sugerida é a investigação de algoritmos mais eficientes para detectar estacionariedade em sistemas veiculares que dependem exclusivamente de INS como sensor principal. Isso poderia aprimorar a capacidade de detectar e compensar situações em que o veículo permanece imóvel, contribuindo para a exatidão da navegação em tais cenários.

REFERÊNCIAS

- BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. **Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises**. [S.l.]: J Wiley & Sons, 1996.
- CHATFIELD, A. B. **Fundamentals of high accuracy inertial navigation**. [S.l.]: AIAA, 1997. v. 174.
- CHIANG, K.-W. et al. Assessment for INS/GNSS/odometer/barometer integration in loosely-coupled and tightly-coupled scheme in aGNSS-degraded environment. **IEEE Sensors Journal**, IEEE, v. 20, n. 6, p. 3057–3069, 2019.
- CHOI, M. J. et al. Land-vehicle navigation system for autonomous driving with averaged non-holonomic measurement. In: IEEE. **2019 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC)**. [S.l.], 2019. p. 1–5.
- CUI, J. et al. Lie group based nonlinear state errors for MEMS-IMU/GNSS/magnetometer integrated navigation. **The Journal of Navigation**, Cambridge University Press, v. 74, n. 4, p. 887–900, 2021.
- DOMINGHETTI, A. M. et al. Integração de Sistemas de Navegação Inercial com Atualizações Estacionárias e Restrições de Movimento. 2022.
- DONG, J. et al. UAV vision aided INS/odometer integration for land vehicle autonomous navigation. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, IEEE, v. 71, n. 5, p. 4825–4840, 2022.
- FARRELL, J. **Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors**. 1. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Professional, 2008. ISBN 9780071493291,0071493298.
- FARRELL, J. A. et al. IMU error modeling tutorial: INS state estimation with real-time sensor calibration. 2021.
- GAO, S.; FENG, Z.; LI, H. Random weighting estimation of white noise error characteristic in integrated INS/GPS/SAR system. In: **2006 International Conference on Computational Intelligence for Modelling Control and Automation and International Conference on Intelligent Agents Web Technologies and International Commerce (CIMCA'06)**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 50–50.
- GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P.; BARTONE, C. G. **Global navigation satellite systems, inertial navigation, and integration**. 3rd. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- GROVES, P. D. **Principles of GNSS, Inertial, and Multi-Sensor Integrated Navigation Systems (GNSS Technology and Applications)**. 2. ed. [S.l.]: Artech House Publishers, 2013. (GNSS Technology and Applications). ISBN 1580532551,9781580532556.
- HOWARD, R. M. White noise: A time domain basis. In: **2015 International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF)**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–4.

- KILIC, C. et al. Improved planetary rover inertial navigation and wheel odometry performance through periodic use of zero-type constraints. In: IEEE. **2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)**. [S.l.], 2019. p. 552–559.
- LI, Y. et al. Observability analysis of non-holonomic constraints for land-vehicle navigation systems. In: **Proceedings of the 25th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2012)**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1521–1529.
- LI, Y. et al. IMU/magnetometer/barometer/mass-flow sensor integrated indoor quadrotor UAV localization with robust velocity updates. **Remote Sensing**, MDPI, v. 11, n. 7, p. 838, 2019.
- LIU, C.-Y. et al. Performance evaluation of real-time MEMS INS/GPS integration with ZUPT/ZIHR/NHC for land navigation. In: **2012 12th International Conference on ITS Telecommunications**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 584–588.
- MOHAMED, A.; SCHWARZ, K. Adaptive Kalman filtering for INS/GPS. **Journal of geodesy**, Springer, v. 73, n. 4, p. 193–203, 1999.
- NOURELDIN, A.; KARAMAT, T. B.; GEORGY, J. **Fundamentals of inertial navigation, satellite-based positioning and their integration**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- PENG, K.-Y.; LIN, C.-A.; CHIANG, K.-W. The performance analysis of an AKF based tightly-coupled INS/GPS integrated positioning and orientation scheme with odometer and non-holonomic constraints. **Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spat. Inf. Sci.**, Citeseer, p. 481–486, 2012.
- RAMANANDAN, A.; CHEN, A.; FARRELL, J. A. Inertial navigation aiding by stationary updates. **IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems**, v. 13, n. 1, p. 235–248, 2012.
- SILVA, F. O.; HEMERLY, E. M.; FILHO, W. C. L. Influence of latitude in coarse self-alignment of strapdown inertial navigation systems. In: **2014 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium - PLANS 2014**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1219–1226.
- SUKKARIEH, S. Low Cost high integrity aided inertial navigation systems for autonomous land vehicles. **The University of Sydney**, n. March, p. 212, 2000.
- SUN, W.; YANG, Y. BDS PPP/INS tight coupling method based on non-holonomic constraint and zero velocity update. **IEEE Access**, IEEE, v. 8, p. 128866–128876, 2020.
- TITTERTON, D.; WESTON, J. L. **Strapdown inertial navigation technology**. [S.l.]: IET, 2004. v. 17.
- WANG, J.; GAO, Y. Land vehicle dynamics-aided inertial navigation. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, IEEE, v. 46, n. 4, p. 1638–1653, 2010.

- WANG, Y.; CHERNYSHOFF, A.; SHKEL, A. M. Study on estimation errors in ZUPT-aided pedestrian inertial navigation due to IMU noises. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, IEEE, v. 56, n. 3, p. 2280–2291, 2019.
- WANG, Y.; SHKEL, A. M. Adaptive threshold for zero-velocity detector in ZUPT-aided pedestrian inertial navigation. **IEEE Sensors Letters**, IEEE, v. 3, n. 11, p. 1–4, 2019.
- WON, D. et al. Performance improvement of inertial navigation system by using magnetometer with vehicle dynamic constraints. **Journal of Sensors**, Hindawi, v. 2015, 2015.
- XIAOFANG, L. et al. Applications of zero-velocity detector and Kalman filter in zero velocity update for inertial navigation system. In: IEEE. **Proceedings of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference**. [S.l.], 2014. p. 1760–1763.
- XSENS. **MTi-680G RTK GNSS/INS**. 2023. Acesso em: 20 de julho de 2023. Disponível em: <<https://www.movella.com/products/sensor-modules/xsens-mti-680g-rtk-gnss-ins#specifications>>.
- XSENS. **MTi-7 GNSS/INS**. 2023. Acesso em: 20 de julho de 2023. Disponível em: <<https://www.movella.com/products/sensor-modules/xsens-mti-7-gnss-ins#specs>>.
- ZHANG, Q.; HU, Y.; NIU, X. Required lever arm accuracy of non-holonomic constraint for land vehicle navigation. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, v. 69, n. 8, p. 8305–8316, 2020.
- ZHANG, X. et al. A navigation algorithm aided by multi-motion constraints of vehicle based on unified model. In: IEEE. **Proceedings of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference**. [S.l.], 2014. p. 749–755.
- ZHIWEN, X.; XIAOPING, H.; JUNXIANG, L. Robust innovation-based adaptive Kalman filter for INS/GPS land navigation. In: **2013 Chinese Automation Congress**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 374–379.