



LÚCIA HELENA COSTA BRAZ

**PROPOSIÇÃO DE TESTES DE COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS
MULTIVARIADAS COM O TRATAMENTO CONTROLE**

LAVRAS – MG

2025

LÚCIA HELENA COSTA BRAZ

**PROPOSIÇÃO DE TESTES DE COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS MULTIVARIADAS
COM O TRATAMENTO CONTROLE**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Análise Multivariada, para a obtenção do título de Doutor.

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

BRAZ, Lúcia Helena Costa. **Proposição de testes de comparações múltiplas multivariadas.** Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, 2025.

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pela própria autora.

Braz, Lúcia Helena Costa

Proposição de testes de comparações múltiplas multivariadas com o tratamento controle / Lúcia Helena Costa Braz. – Lavras : UFLA, 2025.

235 p. : il.

Tese(doutorado)–Universidade Federal de Lavras, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira.

Bibliografia.

1. *Bootstrap*. 2. Alta dimensionalidade. 3. Erro tipo I por experimento. 4. Poder. 5. Programa R. I. Ferreira, Daniel Furtado.

LÚCIA HELENA COSTA BRAZ

**PROPOSIÇÃO DE TESTES DE COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS MULTIVARIADAS
COM O TRATAMENTO CONTROLE**

**PROPOSAL OF MULTIVARIATE MULTIPLE COMPARISON TESTS AGAINST
THE CONTROL TREATMENT**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Análise Multivariada, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 29 de abril de 2025.

Prof. Dr. Ben Dêivide de Oliveira Batista UFSJ
Profa. Dra. Patrícia de Siqueira Ramos UNIFAL
Prof. Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães UFLA
Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes UFLA

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Daniel Furtado Ferreira, expresso minha profunda gratidão pela atenção, paciência e dedicação ao longo desta jornada. Sua orientação foi essencial para a realização deste trabalho, e sua excelência como professor e pesquisador, aliada à sua generosidade e comprometimento, despertam em mim imenso respeito e admiração.

À minha família, minha base e meu alicerce, que sempre me apoiou e incentivou em cada etapa desse percurso. Em especial, ao meu marido, que esteve ao meu lado em todos os momentos, compreendendo minhas ausências e me oferecendo apoio incondicional. Sei que não é fácil ficar distante de quem amamos, e por isso, sou imensamente grata pela paciência e compreensão de todos durante essa caminhada.

Aos colegas da Universidade Federal de Lavras, Departamento de Estatística (UFLA/DES), em especial, ao Miguel Carvalho Nascimento, pela parceria e colaboração incansáveis, e à Isabela da Silva Lima, cuja doçura e generosidade transformaram essa jornada em uma experiência ainda mais especial, tornando-se uma grande amiga ao longo do caminho.

Ao IFMG campus Formiga, minha sincera gratidão por viabilizar meu afastamento das atividades docentes, permitindo-me dedicar-me integralmente ao doutorado. Agradeço também pela disponibilização dos computadores dos laboratórios de informática, fundamentais para a obtenção dos resultados das simulações deste trabalho. Um agradecimento muito especial ao técnico de laboratório da área de informática, Ricardo José da Fonseca, cujo auxílio foi além de suas atribuições, demonstrando um espírito colaborativo e gentil que fez toda a diferença. Sua amizade foi um presente nessa jornada. Ao Alysson Fernandes Silva, técnico de laboratório da área de eletrotécnica, agradeço pela prontidão e atenção sempre que precisei de seu auxílio.

À UFLA, ao DES e a todos os professores que nos apoiam e incentivam constantemente, meu reconhecimento e gratidão. Ao Laboratório de Computação Científica (DES/UFLA), por tornar possível a obtenção de parte dos resultados científicos aqui apresentados.

Por fim, à Capes, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Problemas envolvendo comparações da eficiência de tratamentos para respostas multivariadas são comuns em diversas áreas do conhecimento. Em geral, os métodos de comparações utilizam a desigualdade de Bonferroni para construir testes conservativos, evitando as complexidades da distribuição exata da estatística T_{\max}^2 do teste (máximo de uma T^2 de Hotelling). Em cenários de alta dimensionalidade, os métodos tradicionais não são viáveis, pois dependem da inversa da matriz de covariâncias amostral, que se torna singular. Para contornar este problema, o critério do traço de Dempster pode ser usado, e uma segunda alternativa é a estatística T_{ig} do teste de Ahmad, entretanto, em ambos os casos se recorre à desigualdade de Bonferroni. Outro problema é que tanto no processo de estimação quanto no de distribuição das estatísticas para os testes de comparações múltiplas há a necessidade de lidar com métodos numéricos sofisticados e complexos. Estes fatos fazem com que estas aproximações não possam ser prontamente utilizadas. Para tentar contornar esses desafios, esta tese propõe testes de comparações múltiplas multivariadas com o tratamento controle, utilizando uma aproximação empírica para a aproximação de segunda ordem de Bonferroni e o método *bootstrap* não paramétrico. O desempenho dos testes foi avaliado por meio das taxas de erro tipo I por experimento (TEE) e poder em diferentes cenários, utilizando simulação Monte Carlo e o programa R. Os resultados mostraram que, para cenários homocedásticos, o teste *bootstrap* proposto TAB apresentou um controle mais eficaz da TEE, além de apresentar maior poder, independentemente da distribuição ser normal ou não, tanto em contextos de baixa quanto de alta dimensionalidade. Dessa forma, o teste TAB se mostrou a alternativa mais recomendada nessas situações. Para cenários heterocedásticos, não foi possível identificar um teste claramente superior, porém, em várias circunstâncias, os testes *bootstrap* propostos demonstraram desempenho superior em relação às suas respectivas versões assintóticas.

Palavras-chave: *bootstrap*; alta dimensionalidade; erro tipo I por experimento; poder; programa R.

ABSTRACT

Problems involving comparisons of treatment efficiency for multivariate responses are common in various fields of knowledge. Generally, comparison methods use the Bonferroni inequality to construct conservative tests, avoiding the complexities of the exact distribution of the T_{\max}^2 test statistic (maximum of a Hotelling's T^2). In high-dimensional scenarios, traditional methods are not viable, as they depend on the inverse of the sample covariance matrix, which becomes singular. To circumvent this problem, Dempster's trace criterion can be used, and a second alternative is Ahmad's T_{ig} test statistic; however, in both cases, the Bonferroni inequality is employed. Another issue is that both in the estimation process and in the distribution of the statistics for multiple comparison tests, it is necessary to deal with sophisticated and complex numerical methods. These facts make these approximations unsuitable for immediate use. To address these challenges, this thesis proposes multivariate multiple comparison tests with the control treatment, using an empirical approximation for the second-order Bonferroni approximation and the non parametric *bootstrap* method. The performance of the tests was evaluated through type I error rates per experiment (TEE) and power in different scenarios, using Monte Carlo simulation and the R software. The results showed that, for homoscedastic scenarios, the proposed *bootstrap* test TAB provided more effective control of TEE, in addition to exhibiting higher power, regardless of whether the distribution was normal or not, in both low and high-dimensional contexts. Thus, the TAB test proved to be the most recommended alternative in these situations. For heteroscedastic scenarios, no clearly superior test could be identified; however, in many circumstances, the proposed *bootstrap* tests demonstrated superior performance compared to their respective asymptotic versions.

Keywords: bootstrap; high dimensionality; type I error per experiment; power; software R.

INDICADORES DE IMPACTO

O desenvolvimento de novos testes de comparações múltiplas multivariadas com tratamento controle, baseados em aproximações empíricas da segunda ordem de Bonferroni e no método *bootstrap* não paramétrico, apresenta impacto potencial relevante em áreas como ciências agrárias, genética, melhoramento de plantas, ensaios clínicos, engenharia, geologia, solos e zootecnia, especialmente em contextos experimentais de alta complexidade e dimensionalidade. Os métodos *bootstrap* propostos, THTNB e TAB, mostraram desempenho superior aos concorrentes assintóticos, destacando-se o teste TAB, que controlou com mais precisão a taxa de erro do tipo I e obteve maior poder, mesmo sob alta dimensionalidade e diferentes distribuições. Essa robustez estatística pode ser aplicada em estudos clínicos, pesquisas agronômicas, investigações industriais e em ciências sociais, promovendo maior rigor na inferência estatística e apoiando decisões baseadas em evidências. O trabalho possui caráter extensionista, ao oferecer soluções metodológicas aplicáveis a instituições públicas e privadas voltadas à pesquisa, análise de dados e tomada de decisão, fortalecendo a integração entre universidade e sociedade. O território de impacto inclui instituições de ensino, centros de pesquisa e empresas no Brasil, com benefícios potenciais para estatísticos, pesquisadores de diferentes áreas, docentes e estudantes. Os impactos do trabalho se enquadram nas áreas temáticas “7 - Tecnologia e produção” e “4 - Educação” da Política Nacional de Extensão Universitária. A pesquisa também está alinhada aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da ONU, especialmente os ODS 4 (Educação de qualidade), 9 (Indústria, inovação e infraestrutura) e 3 (Saúde e bem-estar), ao contribuir com o desenvolvimento metodológico da estatística aplicada, promovendo análises mais precisas em diversos setores e impactando positivamente a qualidade das pesquisas científicas, das avaliações institucionais e das políticas públicas fundamentadas em dados confiáveis.

IMPACT INDICATORS

The development of new multivariate multiple comparison tests with a control treatment, based on empirical second-order Bonferroni approximations and the nonparametric bootstrap method, presents significant potential impact in fields such as agricultural sciences, genetics, plant breeding, clinical trials, engineering, geology, soil science, and animal science, especially in experimental contexts characterized by high complexity and dimensionality. The proposed bootstrap methods, THTNB and TAB, demonstrated superior performance compared to their asymptotic counterparts, with TAB standing out for its more accurate control of the type I error rate and higher statistical power, even under high dimensionality and various distributions. This statistical robustness can be applied to clinical studies, agronomic research, industrial investigations, and social sciences, promoting greater rigor in statistical inference and supporting evidence-based decision-making. The work has an extensionist nature by offering methodological solutions applicable to public and private institutions engaged in research, data analysis, and decision-making, thereby strengthening the interaction between university and society. The territory of impact includes higher education institutions, research centers, and companies in Brazil, with potential benefits for statisticians, researchers across different fields, faculty members, and students. The impacts of this work fall under the thematic areas “7 – Technology and production” and “4 – Education” of the National Extension Policy. Furthermore, the research aligns with the United Nations Sustainable Development Goals (SDGs), especially SDG 4 (Quality education), SDG 9 (Industry, innovation, and infrastructure), and SDG 3 (Good health

and well-being), by contributing to the methodological development of applied statistics, enabling more accurate analyses across multiple sectors, and positively influencing the quality of scientific research, institutional assessments, and data-driven public policies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Fluxograma da metodologia do teste <i>bootstrap</i> proposto THTNB.	68
Figura 3.2 – Fluxograma da metodologia de avaliação das taxas de erro tipo I por experimento.	74
Figura 3.3 – Procedimento adotado para classificação dos testes em relação ao seu tamanho.	77
Figura 4.1 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	87
Figura 4.2 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 5$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	88
Figura 4.3 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	89
Figura 4.4 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	90
Figura 4.5 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 5$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	91

Figura 4.6 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	93
Figura 4.7 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	94
Figura 4.8 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	95
Figura 4.9 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	96
Figura 4.10 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	97
Figura 4.11 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	98

- Figura 4.12 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100\}$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$ 110
- Figura 4.13 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100, 300\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$. . . 111
- Figura 4.14 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100\}$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,01$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$ 113
- Figura 4.15 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p \in \{5, 250\}$, tamanhos amostrais r_i s, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$ 114
- Figura 4.16 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100\}$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$ 115
- Figura 4.17 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100, 300\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$. . . 116

Figura 4.18 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p \in \{5, 250\}$, tamanhos amostrais r_i s, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	117
Figura 4.19 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	118
Figura 4.20 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	119
Figura 4.21 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3$, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	120
Figura 4.22 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	121
Figura 4.23 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	122

Figura 4.24 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3$, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	123
Figura 4.25 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	124
Figura 4.26 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g = 60$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3$, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	125
Figura 1 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	208
Figura 2 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	209
Figura 3 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 6$, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	210

Figura 4 –	Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	211
Figura 5 –	Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 5$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	212
Figura 6 –	Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	213
Figura 7 –	Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	214
Figura 8 –	Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	215
Figura 9 –	Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	216

Figura 10 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100\}$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	217
Figura 11 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100, 300\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	218
Figura 12 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p \in \{5, 250\}$, tamanhos amostrais $r_{is}, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	219
Figura 13 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (50, 75, 100)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	219
Figura 14 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p = 500$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	220
Figura 15 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p = 500$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$	220

- Figura 16 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$ 221
- Figura 17 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (50, 75, 100)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$ 221
- Figura 18 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p = 500$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$ 222

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resultados obtidos por Ahmad (2019) para taxa de erro tipo I do teste de Ahmad (T_{1g}) e do teste T_{\max} , nas comparações com o tratamento controle 1, considerando número de tratamentos $g = 6$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, número de variáveis (p), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR, NE), distribuições multivariadas (normal, uniforme e exponencial) e tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_6).	51
Tabela 2.2 – Resultados obtidos por Ahmad (2019) para poder do teste de Ahmad (T_{1g}) e do teste T_{\max} , nas comparações com o tratamento controle 1, considerando número de tratamentos $g = 6$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, número de variáveis (p), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR, NE), distribuições multivariadas (normal e exponencial) e tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_6).	53
Tabela 2.3 – Tipos de erros e decisões corretas, com suas respectivas probabilidades associadas entre parênteses.	58
Tabela 3.1 – Cenários de simulação considerando heterocedasticidade, número de tratamentos (g), estrutura das matrizes de covariância (Σ_i), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_i) e dimensionalidade (alta (AD) ou baixa (BD)).	70
Tabela 3.2 – Cenários de simulação considerando homocedasticidade, estrutura das matrizes de covariâncias (Σ_i), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_i), dimensionalidade (alta (AD) ou baixa (BD)).	71
Tabela 3.3 – Nomenclaturas dos testes avaliados.	79
Tabela 4.1 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade. .	81
Tabela 4.2 – Porcentagens das configurações simuladas em que os testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB foram classificados como exatos, conservativos ou liberais, considerando todas as distribuições, todos os α s, sob homocedasticidade e baixa dimensionalidade.	83

Tabela 4.3 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	84
Tabela 4.4 – Porcentagens das configurações simuladas em que os testes THTN, TA, THTNB e TAB foram classificados como exatos, conservativos ou liberais, considerando todas as distribuições, todos os α s, sob homocedasticidade e alta dimensionalidade.	86
Tabela 4.5 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.	100
Tabela 4.6 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.	101
Tabela 4.7 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.	103
Tabela 4.8 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.	105

Tabela 4.9 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade. . . .	107
Tabela 4.10 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.	108
Tabela 4.11 – Porcentagens das configurações simuladas em que os testes foram classificados como exatos, conservativos ou liberais, considerando todas as distribuições, todos os α s, sob heterocedasticidade e alta dimensionalidade. . . .	109
Tabela 4.12 – Porcentagens das configurações simuladas em que os testes THTN, TA, THTNB e TAB foram classificados de acordo com dois grupos: (I) expressivamente liberais e (II) exatos, conservativos ou levemente liberais, considerando todas as distribuições, todos os α s, sob heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, $g = 60$ e 100	127
Tabela 4.13 – Teores de areia e argila referentes ao sistema de uso da terra na Amazônia.	129
Tabela 4.14 – Vetores de médias dos sistemas de uso da terra (SUTS) na Amazônia, considerando os teores das variáveis areia e argila.	130
Tabela 4.15 – Valores- p para cada par de comparação entre vetores de médias dos SUTs com o tratamento controle FP, para cada teste.	130
Tabela 1 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	137

Tabela 2 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	139
Tabela 3 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	140
Tabela 4 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	141
Tabela 5 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.	142
Tabela 6 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.	143

Tabela 7 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.	144
Tabela 8 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.	145
Tabela 9 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.	146
Tabela 10 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.	147
Tabela 11 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade. . . .	148

Tabela 12 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade. . . .	149
Tabela 13 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade. . . .	150
Tabela 14 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade. . . .	151
Tabela 15 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.	152
Tabela 16 –	Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.	153

Tabela 17 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	154
Tabela 18 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	155
Tabela 19 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	156
Tabela 20 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	157
Tabela 21 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	158

Tabela 22 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade . . .	159
Tabela 23 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	160
Tabela 24 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	161
Tabela 25 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade	162
Tabela 26 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	163

Tabela 27 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	164
Tabela 28 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	165
Tabela 29 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	166
Tabela 30 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	167
Tabela 31 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	168
Tabela 32 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	169

Tabela 33 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	170
Tabela 34 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.	171
Tabela 35 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade	172
Tabela 36 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade	174
Tabela 37 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade	176

Tabela 38 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade	178
Tabela 39 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade	180
Tabela 40 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade	182
Tabela 41 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade	184
Tabela 42 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade	186

Tabela 43 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade	188
Tabela 44 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade	190
Tabela 45 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade	192
Tabela 46 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade	194
Tabela 47 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade	196
Tabela 48 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade	198

- Tabela 49 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade 200
- Tabela 50 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade . 202
- Tabela 51 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade . 204
- Tabela 52 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade . 206

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	32
2	REFERENCIAL TEÓRICO	36
2.1	Procedimentos de comparações múltiplas multivariadas entre vetores de médias	38
2.1.1	Procedimentos aproximados baseados na desigualdade de Bonferroni	40
2.1.2	Procedimentos para dados de alta dimensionalidade	42
2.1.2.1	Análise de quantidades relacionadas à estatística do teste de Ahmad	46
2.1.2.2	Resultados da literatura para o teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama	48
2.1.2.3	Resultados da literatura para o teste de Ahmad	49
2.2	Métodos estatísticos computacionalmente intensivos	54
2.2.1	Métodos <i>bootstrap</i>	54
2.2.1.1	<i>Bootstrap</i> não paramétrico	55
2.2.2	Método Monte Carlo	56
2.3	Erro e poder de testes	57
2.4	Teste binomial exato	59
3	MÉTODOS	61
3.1	Testes de comparações múltiplas multivariadas para baixa dimensionalidade	62
3.1.1	Teste T^2 de Hotelling com aproximação de primeira ordem de Bonferroni (T2PO)	63
3.1.2	Teste T^2 de Hotelling com aproximação de segunda ordem de Bonferroni, proposto (T2SO)	63
3.2	Testes de comparações múltiplas multivariadas para alta dimensionalidade	64
3.2.1	Testes assintóticos para comparações com o controle	64
3.2.1.1	Teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama (THTN)	64
3.2.1.2	Teste de Ahmad (TA)	65
3.2.2	Testes <i>bootstrap</i> propostos para comparações com o controle	66
3.2.2.1	Teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama via <i>bootstrap</i> (THTNB)	66
3.2.2.2	Teste de Ahmad via <i>bootstrap</i> (TAB)	67
3.3	Avaliação do desempenho	69
3.3.1	Geração das amostras aleatórias de variáveis multidimensionais	71
3.3.2	Avaliação das taxas de erro tipo I por experimento	73

3.3.2.1	Teste binomial exato considerando proteção de Bonferroni	74
3.3.2.2	Definições sobre as classificações dos testes em relação ao seu tamanho . .	75
3.3.3	Avaliação do poder	78
3.4	Nomenclatura para os testes avaliados	78
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	80
4.1	Casos homocedásticos	80
4.1.1	Taxas de erro tipo I por experimento	80
4.1.2	Poder	86
4.2	Casos heterocedásticos	98
4.2.1	Taxas de erro tipo I por experimento	99
4.2.2	Poder	109
4.3	Considerações gerais	125
4.4	Aplicação em conjunto de dados reais	127
5	CONCLUSÃO	132
	REFERÊNCIAS	133
	APENDICE A – Tabelas - Taxas de erro tipo I por experimento dos testes, casos homocedásticos	137
	APENDICE B – Tabelas - Taxas de erro tipo I por experimento dos testes, casos heterocedásticos	142
	APENDICE C – Tabelas - Poder dos testes, casos homocedásticos	154
	APENDICE D – Tabelas - Poder dos testes, casos heterocedásticos	172
	APENDICE E – Figuras - Poder dos testes	208
	APENDICE F – Rotinas com os comandos do programa R para aplicação dos testes	223

1 INTRODUÇÃO

Uma das áreas científicas que permite à Estatística lidar com problemas reais de grande complexidade, mas com soluções simples, elegantes e eficientes é a da estatística computacional. Pode-se propor novos métodos utilizando-se ferramentas básicas e avaliar o desempenho destes e o de métodos existentes (MANLY, 1997; GENTLE, 2003), sejam nos processos de estimação ou de decisão (testes de hipóteses). Os novos métodos podem ser uma solução analítica, ou seja, que tenham expressões fechadas, ou computacionalmente intensivos. A multivariada é outra área da Estatística que é extremamente importante para as pesquisas científicas, pois nos estudos dos fenômenos naturais é inerente ao processo que ele seja influenciado ou tenha resposta de várias variáveis simultaneamente que possuem relações entre si, que se constitui na base das técnicas e métodos multivariados (MARDIA; KENT; BIBBY, 1979; MUIRHEAD, 1982; SEBER, 1984; JOHNSON; WICHERN, 1998; RENCHER, 2002; TIMM, 2002; ANDERSON, 2003; GIRI, 2004; KOLLO; ROSEN, 2005; HÄRDLE; SIMAR, 2015; FERREIRA, 2018b). Dada a importância da estatística multivariada nas aplicações científicas, especificamente esse trabalho aborda o problema de comparações múltiplas multivariadas, que é relevante para as ciências agrárias, em especial para o melhoramento vegetal e animal.

Os dados multivariados ocorrem quando os pesquisadores observam mais de uma variável simultaneamente em seus experimentos. Nas ciências agrárias isso ocorre frequentemente, pois os pesquisadores mensuram as respostas dos seus tratamentos em mais de uma variável de interesse. O objetivo é verificar inicialmente se existem diferenças entre os efeitos dos tratamentos em cada uma das variáveis respostas, e isso é feito de forma separada aplicando-se um teste F em uma análise de variância univariada (ANAVA). Uma vez detectado que ao menos o efeito de um tratamento difere de outro para uma destas variáveis, o teste F é seguido de um teste de comparações múltiplas quando os níveis dos tratamentos são qualitativos e não estruturados. Isso é feito novamente para cada uma das variáveis separadamente. Essas comparações múltiplas podem ser feitas par a par entre as médias dos tratamentos ou, se for o caso, entre as médias de um tratamento controle e as médias dos demais tratamentos. Quando os níveis dos tratamentos são estruturados e qualitativos aplicam-se contrastes e quando eles são quantitativos, usa-se regressão, sendo que estes últimos dois casos estão fora do escopo deste trabalho e não serão doravante mencionados. Aqui pode-se vislumbrar uma série de deficiências, pois as respostas de múltiplas variáveis aos tratamentos são correlacionadas na vida real e a abordagem individual (marginal) de cada variável deixa de explorar esta característica presente nos

dados. Além disso, a identificação dos melhores tratamentos pode ficar obscurecida por propiciar, muitas vezes, resultados conflitantes nesta indicação, considerando as diferentes variáveis respostas. A análise de variância multivariada (MANAVA) é uma alternativa à ANAVA. Na MANAVA testa-se a igualdade dos vetores de médias dos tratamentos, levando-se em consideração todas as variáveis simultaneamente e, uma vez detectada uma diferença significativa entre os efeitos dos tratamentos, aplica-se um teste de comparações múltiplas para níveis qualitativos não estruturados dos tratamentos para se identificar onde as diferenças estão e quais os melhores tratamentos. Neste contexto, existem poucos métodos e, quando existem, são complexos e as soluções são aproximadas na maioria das vezes.

Nas ciências agrárias, na genética e melhoramento de plantas, nos ensaios clínicos, na engenharia, na geologia, nas ciências dos solos, na zootecnia, na área cirúrgica da pediatria (STAFFA; ZURAKOWSKI, 2020) e em muitas outras áreas do conhecimento humano é usual ocorrerem problemas em que comparações da eficiência de tratamentos para respostas multivariadas são necessárias. Os métodos tradicionais para realizar as comparações múltiplas (HOCHBERG; TAMHANE, 1987; DEAN; VOSS, 1999; DEAN; VOSS; DRAGULJIĆ, 2016; HSU, 1999; MACHADO et al., 2005; HINKELMAN; KEMPTHORNE, 2008), em geral, são para respostas univariadas e não são adequados, pois as medidas são obtidas em mais de uma variável resposta. As comparações múltiplas multivariadas, quando aplicadas, geralmente usam a desigualdade de Bonferroni para a construção de um teste conservativo, ou seja, um teste em que a taxa de erro tipo I empírica é significativamente inferior ao nível nominal de significância adotado, que evita as complexidades da distribuição exata da estatística do teste que é uma estatística T_{\max}^2 , ou seja, o máximo de um conjunto de estatísticas T^2 de Hotelling (KAKIZAWA, 2008; KAKIZAWA, 2009). Outra forma de abordar o problema utiliza os procedimentos multivariados de Tukey-Kramer, que são aproximações baseadas na estatística T_{\max}^2 (NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014).

O problema é que tanto no processo de estimação quanto no de distribuição das estatísticas para os testes multivariados de comparações múltiplas há a necessidade de lidar com métodos numéricos sofisticados e complexos (KAKIZAWA, 2009; NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014). Por exemplo, nas comparações duas a duas dos vetores de médias dos tratamentos há muita dificuldade de se obter um valor crítico de forma exata, o qual é usado para resolver este problema, além de que, algumas aproximações são muito conservativas, embora sejam menos difíceis de computar. Estes fatos fazem com que estas aproximações não possam ser

prontamente utilizadas. Uma alternativa para contornar estas dificuldades numéricas é a utilização do método *bootstrap* (WESTFALL; YOUNG, 1989; WESTFALL, 2011). Esta é uma das soluções apresentadas neste trabalho, conforme objetivos a seguir.

Nos procedimentos multivariados existe um problema que surge quando o número de variáveis (dimensão) p é maior que o tamanho da amostra n , que constituem os denominados casos de alta dimensionalidade. Neste contexto, não é possível utilizar os métodos existentes para baixa dimensionalidade, em razão deles dependerem da inversa da matriz de covariâncias amostral que, nesta situação, não pode ser obtida, uma vez que a matriz de covariâncias amostral é singular. Também existem problemas quando os dados multivariados não são originários de distribuições normais multivariadas e quando, análogo ao caso univariado, as matrizes de covariâncias de tratamentos não são homogêneas. Estes casos em condições gerais desfavoráveis foram abordados por Ahmad (2018, 2019) apresentando soluções assintóticas baseadas nas distribuições qui-quadrado e normal padrão.

A maioria das propostas apresentadas é baseada na distribuição do máximo das possíveis distâncias generalizadas de Mahalanobis entre dois vetores de médias amostrais considerando todos os pares de médias, no caso geral de comparações múltiplas duas as duas, ou de todos os pares de vetores de médias que envolvam o tratamento controle, no caso de comparações com o controle. Essas distâncias entre dois vetores de médias de tratamentos são as estatísticas denominadas T^2 de Hotelling (RENCHEER, 2002; GIRI, 2004; FERREIRA, 2018a). Um dos problemas é que o conjunto de todas as estatísticas T^2 de Hotelling de interesse não tem distribuição independente de seus componentes. Assim, há uma dificuldade muito grande de se obter a distribuição do seu máximo, que é necessária nos problemas de comparações múltiplas para se evitar o problema das multiplicidades.

A propriedade de um método de estimação ou de um teste de hipótese em manter suas propriedades ótimas quando se violam os seus pressupostos é denominada de robustez. Nas Estatísticas uni e multivariada, muitas vezes, os dados (ou resíduos) experimentais ou amostrais são contaminados por *outliers* ou sua distribuição não é normal ou existem problemas com heterocedasticidade. A inferência pode ficar comprometida, com resultados não realistas para explicar os fenômenos estudados ou com soluções insatisfatórias para os problemas reais. Neste caso, o presente trabalho abordou de forma computacionalmente intensiva (*bootstrap* ou Monte Carlo) o caso chamado de condições gerais e alta dimensionalidade apresentado em Ahmad (2018, 2019). Esta potencial solução foi investigada também em condições ideais, ou seja,

casos normais, identicamente distribuídos, homocedásticos, em situações de baixa e de alta dimensionalidade.

Em todos os casos, o desempenho dos novos métodos estatísticos desenvolvidos ou considerados foi avaliado, para a confirmação ou não da expectativa de que eles sejam mais eficientes do que os procedimentos existentes. Essa avaliação foi realizada computacionalmente por meio de simulações Monte Carlo (MANLY, 1997; GENTLE, 2003). A importância de novos métodos estatísticos para o desenvolvimento de novas variedades, tecnologias, máquinas, medicamentos, vacinas, entre diversos outros exemplos é indiscutível. A proposição de um novo método é justificada pela expectativa de que ele possa ser mais poderoso em detectar diferenças cada vez menores entre os efeitos de tratamentos, quando comparado aos métodos já existentes.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é propor testes de comparações múltiplas multivariadas com o tratamento controle, considerando uma aproximação empírica para a aproximação de segunda ordem de Bonferroni e o método *bootstrap* não paramétrico. Como objetivos específicos, tem-se: avaliar o desempenho dos novos testes por meio das taxas de erro tipo I por experimento e poder e comparar o desempenho das novas propostas com o de métodos já existentes, utilizando simulações Monte Carlo.

Este estudo está estruturado em cinco seções, incluindo a Introdução. Na segunda seção são abordados os principais fundamentos teóricos que sustentam o desenvolvimento desta pesquisa, com uma revisão sobre os testes de comparações múltiplas multivariadas, que servirão como referência para a formulação de novos testes. Na terceira seção é apresentada a metodologia adotada, detalhando os testes de comparações múltiplas multivariadas existentes, bem como os métodos computacionalmente intensivos propostos para a comparação entre vetores de médias multidimensionais de tratamentos em contextos de baixa e alta dimensionalidade. Ademais, estabelece-se, nesta seção, o critério de avaliação de cada teste. Na quarta seção, realiza-se a análise de desempenho dos testes propostos, considerando a taxa de erro tipo I por experimento e o poder. Por fim, na quinta e última seção são apresentadas as conclusões do trabalho, destacando os principais resultados e recomendações.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção são apresentados os principais aspectos teóricos que constituíram a base para o desenvolvimento deste trabalho. Ela está dividida em subseções para tratar separadamente dos temas alvos dos estudos propostos.

Para caracterizar o problema de comparações múltiplas multivariadas foram considerados, sem perda de generalidade, os vetores aleatórios p -dimensionais $\mathbf{X}_{ik} = [X_{ik1}, \dots, X_{ikp}]^\top \sim \mathfrak{F}_i$, que representam as observações amostrais aleatórias referentes ao i -ésimo tratamento na k -ésima unidade amostral, $i = 1, 2, \dots, g$, $k = 1, 2, \dots, r_i$, com vetor p -dimensional de médias $E(\mathbf{X}_{ik}) = \boldsymbol{\mu}_i$ e matriz de covariâncias $Cov(\mathbf{X}_{ik}) = \boldsymbol{\Sigma}_i$ positiva definida $p \times p$ simétrica, com $g \geq 2$ e \mathfrak{F}_i uma família de distribuições para o i -ésimo tratamento. Assim, foi considerado um caso bem geral, em que \mathfrak{F}_i é uma distribuição p -variada qualquer, não necessariamente normal, com matrizes de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_i$ s potencialmente desiguais (heterogêneas) e caso não balanceado, em que os r_i s são diferentes (r_i é o número de repetições do i -ésimo tratamento), contemplando situações de baixa e de alta dimensionalidade. A amostra completa é a combinação das amostras dos g tratamentos em uma única amostra, sendo n o tamanho total da amostra combinada, em que $n = \sum_{i=1}^g r_i$. Também foram considerados outros casos mais específicos de interesse particular em que a família de distribuição \mathfrak{F}_i refere-se à distribuição normal multivariada.

O interesse reside nos vetores de parâmetros p -dimensionais $\boldsymbol{\delta}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j$, para $i \neq j = 1, 2, \dots, g$. No caso de comparações múltiplas, tomam-se todos os pares de comparações e, portanto, têm-se $g(g-1)/2$ parâmetros de interesse. Já no caso das comparações com o controle, fixa-se j no valor correspondente ao tratamento controle e varia-se i , com $i \neq j$, resultando em $g-1$ parâmetros ou comparações de interesse entre os vetores de médias. Esta última situação é um caso especial da primeira e trata do tema de pesquisa deste trabalho.

Inicialmente, os dados amostrais são submetidos a uma análise de variância multivariada (MANAVA) para se testar a hipótese de igualdade entre vetores de médias dos tratamentos. As hipóteses nula e alternativa são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
 H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \dots = \boldsymbol{\mu}_g \\
 \text{versus} \\
 H_1 : \boldsymbol{\mu}_i \neq \boldsymbol{\mu}_j, \quad \text{para ao menos um par } i, j, i \neq j = 1, 2, \dots, g.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Os procedimentos de comparações múltiplas multivariadas são aplicados, geralmente, após esta fase, se a hipótese nula em (2.1) for rejeitada, para se identificar os tratamentos responsáveis pela rejeição de H_0 . Foram considerados apenas os casos em que os níveis dos tratamentos são qualitativos não estruturados, que são as situações apropriadas para a utilização dos procedimentos de comparações múltiplas multivariadas (PCMM). Os estimadores não viesados do vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_i$ e da matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_i$ do i -ésimo tratamento são dados, respectivamente, por

$$\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_i = \frac{1}{r_i - 1} \sum_{k=1}^{r_i} (\mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i)^\top, \quad i = 1, 2, \dots, g. \quad (2.2)$$

Quando as matrizes de covariâncias dos tratamentos são iguais, ou seja, o caso homogêneo, em que $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \dots = \boldsymbol{\Sigma}_g = \boldsymbol{\Sigma}$, o estimador da matriz de covariâncias comum $\boldsymbol{\Sigma}$ é dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n - g} \sum_{i=1}^g (r_i - 1) \mathbf{S}_i, \quad (2.3)$$

associado a $\nu = n - g$ graus de liberdade. Em uma MANOVA esta matriz é a matriz de covariâncias residual e muitas vezes denotada por \mathbf{E}/ν , em que \mathbf{E} é a matriz de somas de quadrados e produtos dos resíduos.

O caso de interesse geral refere-se às combinações lineares $\mathbf{a}^\top \boldsymbol{\delta}_{ij}$, para um vetor não nulo conhecido $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, em que $\boldsymbol{\delta}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j$ é o vetor de diferenças entre dois vetores de médias distintos, $i \neq j$. Um caso de particular interesse é o caso de $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ *per se*, que inclui todas as possíveis diferenças, bem como os casos especiais, como as comparações com um tratamento controle. O estimador de $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ é $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{ij} = \bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_j$.

A revisão que segue é iniciada apresentando uma subseção baseada no trabalho de Nishiyama, Hyodo e Seo (2014), com desenvolvimentos de procedimentos de comparações múltiplas multivariadas entre vetores de médias. Posteriormente, outros temas relevantes e mais recentes em relação ao trabalho mencionado ou que não foram abordados pelos autores são apresentados.

2.1 Procedimentos de comparações múltiplas multivariadas entre vetores de médias

Esta parte da revisão é baseada essencialmente no artigo de Nishiyama, Hyodo e Seo (2014) que, por sua vez, trata de uma revisão de procedimentos de comparações múltiplas multivariadas até a data da publicação do referido artigo. Algumas adaptações foram feitas nas notações originais para que fiquem em conformidade com as notações adotadas nesta tese. Inicialmente os autores tratam dos procedimentos para obtenção de intervalos de confiança simultâneos. Considere a matriz $\mathbf{M} = [\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_g]^\top$ das médias $g \times p$ formada pelos g vetores de médias de tratamentos em p variáveis e a correspondente matriz que é estimador de \mathbf{M} dada por $\hat{\mathbf{M}} = [\bar{\mathbf{X}}_1, \dots, \bar{\mathbf{X}}_g]^\top$, então a distribuição normal pg -variada dada por $\text{vec}(\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}) \sim N_{pg}(\mathbf{0}, r^{-1}\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{V})$ é estabelecida, sendo \mathbf{V} uma matriz conhecida $g \times g$ positiva definida, $\boldsymbol{\Sigma}$ uma matriz $p \times p$ desconhecida positiva definida e r o número de repetições por tratamento, sendo, no caso balanceado (r_i s iguais), dado pelo valor comum r ou, no caso não balanceado, pela média harmônica dos r_i s. O operador vec transforma uma matriz em um vetor, empilhando os vetores colunas da matriz um embaixo do outro.

Neste caso, está se considerando que os g tratamentos possuem matriz de covariâncias comum $\boldsymbol{\Sigma}$ e a distribuição conjunta é a normal multivariada, sendo que as observações multivariadas podem ser correlacionadas ou não, o que depende exclusivamente da estrutura da matriz \mathbf{V} , e \mathbf{S} de (2.3), o estimador da matriz de covariâncias comum $\boldsymbol{\Sigma}$, tal que \mathbf{vS} é independente de $\hat{\mathbf{M}}$ e possui distribuição Wishart p -variada com \mathbf{v} graus de liberdade e parâmetro $\boldsymbol{\Sigma}$. Portanto, os intervalos de confiança simultâneos para comparações múltiplas duas a duas entre vetores de médias ou comparações com o controle podem ser escritos por

$$IC_{1-\alpha}(\mathbf{b}^\top \mathbf{M} \mathbf{a}) : \left[\mathbf{b}^\top \hat{\mathbf{M}} \mathbf{a} \pm \sqrt{t_{\alpha}^2 (\mathbf{b}^\top \mathbf{V} \mathbf{b}) (r^{-1} \mathbf{a}^\top \mathbf{S} \mathbf{a})^{1/2}} \right], \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p, \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^g, \quad (2.4)$$

em que \mathbf{a} é um vetor que seleciona as variáveis, \mathbf{b} é um vetor de combinações lineares de interesse dos componentes dos vetores de médias dos tratamentos, \mathbb{R}^p e \mathbb{R}^g são conjuntos não nulos de vetores reais p e g dimensionais, respectivamente. O valor t_{α}^2 em (2.4) é o quantil superior 100 α % da estatística T_{\max}^2 dada por

$$T_{\max}^2 = \max_{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^g} \left\{ \frac{\mathbf{b}^\top (\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}) r \mathbf{S}^{-1} (\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M})^\top \mathbf{b}}{\mathbf{b}^\top \mathbf{V} \mathbf{b}} \right\},$$

em que $0 < \alpha < 1$ e $1 - \alpha$ é a probabilidade de cobertura de (2.4). A grande dificuldade para se construir intervalos simultâneos como o (2.4) é a obtenção de percentis superiores exatos t_α^2 (NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014), sejam considerando comparações duas as duas ou comparações com o tratamento controle. Em geral, são obtidas aproximações, que por sua vez são conservativas. Uma delas são os procedimentos baseados na desigualdade de Bonferroni (SEO; NISHIYAMA, 2008; NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014).

No caso de comparações com o controle, o subconjunto dado pelos vetores $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^g$ de combinações lineares de interesse é

$$\mathbb{B} = \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^g : \mathbf{b} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_g, 1 \leq i \leq g-1 \}, \quad (2.5)$$

em que \mathbf{e}_i é um vetor do espaço g -dimensional contendo 1 na i -ésima posição e 0 nas outras e g é o tratamento controle, sem perda de generalidade. Assim, pode-se expressar (2.4) por

$$IC_{1-\alpha}(\mathbf{a}^\top(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_g)) : \left[\mathbf{a}^\top(\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g) \pm \sqrt{t_{\alpha;c,v}^2 d_{ig} r_{ig}^{-1} \mathbf{a}^\top \mathbf{S} \mathbf{a}} \right], \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p, 1 \leq i \leq g-1, \quad (2.6)$$

em que r_{ig} corresponde à média harmônica entre r_i e r_g e $t_{\alpha;c,v}^2$ é o quantil superior 100 α % da estatística $T_{\max_c}^2$ dada por

$$T_{\max_c}^2 = \max_{1 \leq i \leq g-1} \left\{ (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_i - \bar{\mathbf{X}}_g + \boldsymbol{\mu}_g)^\top (r_{ig}^{-1} d_{ig} \mathbf{S})^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_i - \bar{\mathbf{X}}_g + \boldsymbol{\mu}_g) \right\}, \quad (2.7)$$

em que $d_{ig} = v_{ii} - 2v_{ig} + v_{gg}$, sendo os componentes v_s elementos correspondentes aos seus índices na matriz \mathbf{V} .

Com $\mathbf{V} = \mathbf{I}$, $d_{ig} = 2$ e, então, pode-se expressar (2.7) por

$$\begin{aligned} T_{\max_c}^2 &= \max_{1 \leq i \leq g-1} \left\{ (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_i - \bar{\mathbf{X}}_g + \boldsymbol{\mu}_g)^\top (r_{ig}^{-1} 2\mathbf{S})^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_i - \bar{\mathbf{X}}_g + \boldsymbol{\mu}_g) \right\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq g-1} \left\{ \frac{r_{ig}}{2} (\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g - \boldsymbol{\delta}_{ig})^\top \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g - \boldsymbol{\delta}_{ig}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

ou seja, a estatística $T_{\max_c}^2$ se reduz à metade da estatística da amplitude estudentizada externamente multivariada R_{\max}^2 (SEO; SIOTANI, 1992; SEO; SIOTANI, 1993; SEO; MANO; FUJIKOSHI, 1994), que é definida como a raiz quadrada do máximo de todos os pares de distâncias de Mahalanobis obtidas entre dois vetores de médias que envolvam o tratamento controle, no

caso de comparações com o controle. Seo, Mano e Fujikoshi (1994) propuseram um procedimento do tipo Tukey-Kramer (TK) que consiste simplesmente em substituir o quantil superior da estatística R_{\max}^2 univariada por uma aproximação de outra, derivada da estatística T_{\max}^2 para qualquer estrutura da matriz \mathbf{V} . A versão multivariada do procedimento Tukey-Kramer (TKM) mostrou ser uma alternativa conservativa para os testes de comparações múltiplas multivariadas, como acontece também no caso univariado.

Para o procedimento TKM nas comparações com o controle, Seo (1995) apresentou uma aproximação conservativa para os intervalos simultâneos de confiança. Para o caso de dimensão três ou quatro, este resultado foi confirmado em Nishiyama (2007) no caso de vetores de médias correlacionados. Kakizawa (2006) discute algumas aproximações para os percentis superiores da estatística T_{\max}^2 baseadas na desigualdade de Bonferroni para várias situações, sob distribuições gerais. Okamoto e Seo (2013) discutem o caso das comparações multivariadas com o controle em distribuições elípticas, sendo a situação da normal multivariada um caso particular.

Os intervalos de confiança simultâneos para as comparações com o tratamento controle, pelo procedimento TKM, são dados por (NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014)

$$IC_{1-\alpha}(\mathbf{a}^\top(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_g)) : \left[\mathbf{a}^\top(\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g) \pm \sqrt{t_{\alpha;c,I}^2 d_{ig} r_{ig}^{-1} \mathbf{a}^\top \mathbf{S} \mathbf{a}} \right], \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p, 1 \leq i \leq g-1,$$

onde $t_{\alpha;c,I}^2$ é o quantil superior 100 α % da estatística $T_{\max_c}^2$ com $\mathbf{V} = \mathbf{I}$.

Nishiyama, Hyodo e Seo (2014) discutem alguns aspectos teóricos sobre a probabilidade de cobertura simultânea $1 - \alpha$ desses procedimentos considerando vários casos que envolvem a distribuição, a estrutura de correlação entre médias e o número de tratamentos g . Eles descrevem, principalmente, o aspecto conservativo de tais procedimentos e demonstram isso em alguns teoremas. Os resultados da maioria dos trabalhos mencionados apresentam aproximações para o TKM considerando $p \leq 5$, $g = 3, 4, 5$ no caso normal multivariado com matriz de covariâncias entre os estimadores das médias $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ (SEO; MANO; FUJIKOSHI, 1994; NISHIYAMA, 2007; NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014).

2.1.1 Procedimentos aproximados baseados na desigualdade de Bonferroni

Os principais procedimentos aproximados que são baseados na desigualdade de Bonferroni são o de primeira ordem e o modificado de segunda ordem de Bonferroni (NISHIYAMA;

HYODO; SEO, 2014). Essas aproximações são apresentadas para o caso de normalidade multivariada (SEO; SIOTANI, 1992; SEO, 1995).

Considerando o conjunto de contrastes \mathbb{B} definido em (2.5), para o caso de comparações com o controle, têm-se $m = g - 1$ comparações. Assim, pela desigualdade de Bonferroni, tem-se que o quantil superior $t_{\alpha; c.V}^2$ de (2.6), usando a aproximação de primeira ordem de Bonferroni, é dado (NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014) por

$$t_1^2 = \frac{vp}{v-p+1} F_{p, v-p+1} \left(\frac{\alpha}{m} \right),$$

em que $F_{p, v-p+1}(\alpha/m)$ é o quantil superior $100\alpha/m\%$ da distribuição F com p e $v - p + 1$ graus de liberdade.

A aproximação de segunda ordem modificada, t_M^2 , obtida pela segunda ordem do procedimento de Bonferroni modificado (NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014), é dada por

$$t_M^2 = \frac{vp}{v-p+1} F_{p, v-p+1} \left(\frac{\alpha + \beta(t_1^2)}{m} \right),$$

em que a quantidade $\beta(t_1^2)$ é dada por

$$\beta(t_1^2) = \sum_{i=1}^{g-1} \sum_{j=i+1}^g P \left(\mathbf{z}_i^\top \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}_i > t_1^2, \mathbf{z}_j^\top \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}_j > t_1^2 \right),$$

considerando $\mathbf{z}_i^\top = (\mathbf{b}_i^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b}_i)^{-1/2} (\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M})^\top \mathbf{b}_i$.

Segundo Nishiyama, Hyodo e Seo (2014), a avaliação de $\beta(t_1^2)$ é muito difícil. Seo (1995) e Seo e Siotani (1992) apresentam uma aproximação para esta quantidade, mas cuja obtenção depende um grande esforço computacional por envolver somas de séries infinitas e integrações numéricas, o que torna a aproximação de segunda ordem de Bonferroni praticamente inacessível. Como, em geral, $t_M^2 < t_1^2$, a aproximação de segunda ordem modificada é menos conservativa que a aproximação de primeira ordem. A aproximação de primeira ordem é considerada e demonstrada como sendo extremamente conservativa (NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014).

2.1.2 Procedimentos para dados de alta dimensionalidade

Como foi visto até aqui, os métodos de comparações múltiplas multivariadas em relação ao controle são baseados na estatística T^2 de Hotelling. Quando o número de variáveis é maior que o tamanho amostral total, a matriz de covariâncias se torna singular e, portanto, é impossível computar a estatística T^2 do teste (NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014). Para contornar este problema, o critério do traço de Dempster (critério D) pode ser usado (DEMPSTER, 1958; DEMPSTER, 1960).

Considerando os estimadores $\bar{\mathbf{X}}_i$ de (2.2) e \mathbf{S} de (2.3) do vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_i$ do i -ésimo tratamento e da matriz de covariâncias comum $\boldsymbol{\Sigma}$ associado a $\nu = \sum_{i=1}^g r_i - g = n - g$ graus de liberdade, respectivamente, para o caso de comparações múltiplas de vetores de médias com o controle, a estatística baseada no critério D de Dempster, proposta por Hyodo, Takahashi e Nishiyama (2014), é

$$D_{\max_c} = \max_{1 \leq i \leq g-1} \{D_{ig}\}, \quad (2.9)$$

$$D_{ig} = \frac{p}{\hat{\sigma}} \left\{ \frac{(\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g - \boldsymbol{\delta}_{ig})^\top (\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g - \boldsymbol{\delta}_{ig})}{r_{ig} \text{tr}(\mathbf{S})} - 1 \right\},$$

em que g é o índice, sem perda de generalidade, do tratamento controle, e $r_{ig} = 1/r_i + 1/r_g$, $\hat{\sigma} = \sqrt{2p\hat{a}_2/\hat{a}_1^2}$, $\text{tr}(\mathbf{S})$ é o traço da matriz \mathbf{S} , e as constantes \hat{a}_1 e \hat{a}_2 são dadas por

$$\hat{a}_1 = \frac{\text{tr}(\mathbf{S})}{p} \quad \text{e} \quad \hat{a}_2 = \frac{\nu^2}{(\nu+2)(\nu-1)p} \left[\text{tr}(\mathbf{S}^2) - \frac{\text{tr}^2(\mathbf{S})}{\nu} \right].$$

Assim, os intervalos de confiança simultâneos para as comparações dos vetores de médias com o tratamento controle são dados por

$$IC_{1-\alpha}(\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_g)) : \left[\mathbf{a}^\top (\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g) \pm d_c \sqrt{r_{ig} \text{tr}(\mathbf{S}) \mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \right], \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p, 1 \leq i \leq g-1, \quad (2.10)$$

em que $d_c^2 = 1 + (\hat{\sigma}/p)z_c$ e $z_c = z_c(\alpha)$ é o quantil superior $100\alpha\%$ da estatística D_{\max_c} , obtido por meio da aproximação baseada na desigualdade de Bonferroni (HYODO; TAKAHASHI;

NISHIYAMA, 2014; NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014), sendo dado por

$$z_c(\alpha_c; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4) = z_{\alpha_c} + \frac{\sqrt{2}\hat{a}_3(z_{\alpha_c}^2 - 1)}{3\sqrt{p\hat{a}_2^3}} + \frac{1}{p} \left[\frac{\hat{a}_4}{2\hat{a}_2^2} z_{\alpha_c} (z_{\alpha_c}^2 - 3) - \frac{2\hat{a}_3^2}{9\hat{a}_2^3} z_{\alpha_c} (2z_{\alpha_c}^2 - 5) \right] + \frac{1}{2v} z_{\alpha_c},$$

em que z_{α_c} é o quantil superior $100\alpha_c\%$ da normal padrão. As demais quantidades necessárias não definidas ainda são dadas por

$$\alpha_c = \frac{\alpha}{m},$$

$$\hat{a}_3 = \frac{v^4}{(v+4)(v+2)(v-1)(v-2)p} \left[tr(\mathbf{S}^3) - \frac{3tr(\mathbf{S}^2)tr(\mathbf{S})}{v} + \frac{2tr^3(\mathbf{S})}{v^2} \right],$$

$$\hat{a}_4 = \frac{v^3 [b_1 tr(\mathbf{S}^4) + b_2 tr(\mathbf{S}^3)tr(\mathbf{S}) + b_3 tr^2(\mathbf{S}^2) + b_4 tr(\mathbf{S}^2)tr^2(\mathbf{S}) + b_5 tr^4(\mathbf{S})]}{(v+6)(v+4)(v+2)(v+1)(v-1)(v-2)(v-3)p},$$

sendo ainda que os b_i s são

$$b_1 = v^2(v^2 + v + 2), \quad b_2 = -4v(v^2 + v + 2), \quad b_3 = -v(2v^2 + 3v - 6),$$

$$b_4 = 2v(5v + 6) \quad \text{e} \quad b_5 = -(5v + 6).$$

O valor- p é dado por (HYODO; TAKAHASHI; NISHIYAMA, 2014)

$$\text{valor-}p = 1 - \text{prob},$$

em que prob é igual a

$$\left\{ \Phi(D_{ig}) - \phi(D_{ig}) \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{2}\hat{a}_3}{\sqrt{\hat{a}_2^3}} h_2(D_{ig}) + \frac{1}{p} \left(\frac{\hat{a}_4}{2\hat{a}_2^2} h_3(D_{ig}) + \frac{\hat{a}_3^2}{9\hat{a}_2^3} h_5(D_{ig}) \right) + \frac{1}{2v} h_1(D_{ig}) \right] \right\},$$

$\Phi(D_{ig})$ e $\phi(D_{ig})$ são a função de distribuição e a função de densidade da distribuição normal padrão, respectivamente, e $h_j(D_{ig})$ s, $j = 1, 2, 3, 5$, são os polinômios de Hermite dados por

$$h_1(D_{ig}) = D_{ig}, \quad h_2(D_{ig}) = D_{ig}^2 - 1, \quad h_3(D_{ig}) = D_{ig}^3 - 3D_{ig} \quad \text{e}$$

$$h_5(D_{ig}) = D_{ig}^5 - 10D_{ig}^3 + 15D_{ig}.$$

É conveniente salientar que as comparações múltiplas multivariadas apresentadas até o presente momento são todas baseadas nas aproximações baseadas na desigualdade de Bonferroni. Este fato torna estas comparações muito conservativas e, portanto, os testes pouco poderosos. Isto decorre da dificuldade de se obterem os quantis exatos das estatísticas T_{\max}^2 ou D_{\max} e a desigualdade de Bonferroni ter de ser usada.

Uma segunda alternativa para alta dimensionalidade foi proposta por Ahmad (2018, 2019). Este autor considera situações bem gerais em que nem a distribuição é especificada e nem a suposição de homocedasticidade das matrizes de covariâncias é exigida, e considera casos de alta dimensionalidade aqueles em que $p > n - g$ ou, mais geralmente, $p > r_i$. A ideia é testar simultaneamente as m hipóteses do tipo $H_{0_{ig}} : \boldsymbol{\delta}_{ig} = \mathbf{0}$. Assim, o vetor de todos os m parâmetros das hipóteses nulas a serem testadas é $\boldsymbol{\delta}_m \in \mathbb{R}^{pm}$, com $m = g - 1$ para o caso de comparações com o controle. A estatística associada a cada hipótese é um dos elementos do vetor $\mathbf{T}_m \in \mathbb{R}^m$ de estatísticas para o teste simultâneo $H_0 : \boldsymbol{\delta}_m = \mathbf{0}$ definido por

$$\mathbf{T}_m = [T_{1g}, T_{2g}, \dots, T_{(g-2)g}, T_{(g-1)g}]^\top.$$

Em Ahmad (2018), o autor aborda o caso de uma e duas amostras, e a estatística do teste é dada por (algumas adaptações foram feitas nas notações originais para que fiquem em conformidade com as notações adotadas nesta tese)

$$T_{ig} = 1 + \frac{(r_i + r_g)Q_{ig0}}{(r_i + r_g)Q_{ig1}/p}, \quad (2.11)$$

em que $Q_{ig1} = Q_{i1} + Q_{g1}$, sendo

$$Q_{i1} = \frac{E_i - U_i}{r_i}, \quad E_i = \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik}}{r_i}, \quad U_i = \frac{1}{r_i(r_i - 1)} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\substack{\ell=1, \\ k \neq \ell}}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell},$$

e $Q_{ig0} = U_{ig0}/p$, em que

$$U_{ig0} = U_i + U_g - 2U_{ig}, \quad U_{ig} = \frac{1}{r_i r_g} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_g} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{g\ell}.$$

Já em Ahmad (2019), o autor trata de comparações múltiplas multivariadas ($i = 1, \dots, g, g \geq 2$) e considera a mesma estatística (2.11) de Ahmad (2018) e demais quantidade, porém, neste caso, as estatísticas U são definidas como

$$U_i = \frac{1}{r_i(r_i - 1)} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\substack{\ell=1, \\ k \neq \ell}}^{r_i} h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{i\ell}), \quad U_{ig} = \frac{1}{r_i r_g} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_g} h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{g\ell}),$$

em que

$$h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{i\ell}) = \frac{\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell}}{p}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, r_i, \quad (2.12)$$

$$h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{g\ell}) = \frac{\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{g\ell}}{p}, \quad k \neq \ell, \ell = 1, 2, \dots, r_g, k = 1, 2, \dots, r_i, i \neq g,$$

A distribuição de T_{ig} é apresentada em Ahmad (2018, 2019) sob as seguintes suposições: momentos de ordem 4 das variáveis aleatórias são finitos; se os tamanhos amostrais tendem para infinito, a razão r_i/n é finita, $i = 1, 2, \dots, g$; se p tende para infinito, $tr(\boldsymbol{\Sigma}_i)/p$ converge para um valor finito (convergência de ordem 1) e $\boldsymbol{\mu}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_k \boldsymbol{\mu}_j/p^2$ é finito, $i = 1, 2, \dots, g, k = i$ ou $k = j$.

O autor considerou que para cada par i e g , a distribuição assintótica de T_{ig} é uma qui-quadrado dada por $\chi_{f_{ig}}^2/f_{ig}$, em que os graus de liberdade f_{ig} devem ser estimados por

$$f_{ig} = \frac{[tr(\boldsymbol{\Omega}_{0ig})]^2}{tr(\boldsymbol{\Omega}_{0ig}^2)},$$

em que

$$\boldsymbol{\Omega}_{0ig} = \frac{n}{p} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0ig} \quad \text{e} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0ig} = \frac{\mathbf{S}_i}{r_i} + \frac{\mathbf{S}_g}{r_g}.$$

Ahmad (2018, 2019) também propôs uma distribuição normal para cada par da estatística, considerando que $E(T_{ig}) = 1$ e $Var(T_{ig}) = 2/f_{ig}$. Assim, $T_{ig} \sim N(1, 2/f_{ig})$. Considerando a distribuição conjunta, o autor percebeu uma quase independência entre os diferentes pares de estatística e, portanto, a distribuição conjunta do vetor m -dimensional das estatísticas do teste, \mathbf{T}_m , é $\mathbf{T}_m \sim N_m(\mathbf{1}, \boldsymbol{\Lambda})$, em que $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(2/f_{1g}, 2/f_{2g}, \dots, 2/f_{(g-2)g}, 2/f_{(g-1)g})$ e $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de uns.

Para as realizações dos testes nas simulações consideradas, Ahmad (2019) procedeu verificações em cada par separadamente e nos diferentes pares de interesse usando essas distribuições mencionadas e a taxa de erro tipo I, recorreu ao T_{\max} , que usava a desigualdade de Bonferroni e, portanto, considerava um nível de significância igual a α/m . Assim, potencialmente o teste apresentado pode ser extremamente conservativo, na medida que g aumenta. Ahmad (2019) usou um número de tratamentos do maior caso dado por $g = 6$, que é muito pequeno. Com número reduzido de tratamentos e, portanto, de comparações com o controle ($m = 5$), a possibilidade de se ter um teste muito conservativo é reduzida. Mesmo assim, as taxas de erro tipo I foram as menores, quando as taxas de todos os testes foram comparadas com o nível nominal de significância de 5%. Portanto, novamente vê-se a necessidade de buscar uma abordagem que não utiliza a aproximação de Bonferroni, como, por exemplo, os métodos *bootstrap*, os quais serão abordados na subseção 2.2.

Na subseção seguinte é apresentada uma análise de quantidades relacionadas à estatística do teste de Ahmad, decorrente da forma como as estatísticas U são definidas em cada um dos trabalhos, Ahmad (2018) e Ahmad (2019).

2.1.2.1 Análise de quantidades relacionadas à estatística do teste de Ahmad

Ahmad (2018, 2019) apresenta algumas quantidades no desenvolvimento da teoria de seu teste e, dentre estas, duas importantes equivalências são feitas

$$Q_{i1} = \frac{tr(\mathbf{S}_i)}{r_i} \quad \text{e} \quad Q_{ig1} = tr(\hat{\Sigma}_{ig0}). \quad (2.13)$$

Mas considerando as definições das funções h , dadas em (2.12) (AHMAD, 2019), estas equivalências não se verificam. Redefinindo as funções h ou, equivalentemente, considerando as funções h como em Ahmad (2018), ou seja,

$$h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{i\ell}) = \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \quad \text{e} \quad h(\mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_{g\ell}) = \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{g\ell}, \quad (2.14)$$

tem-se

$$U_i = \frac{1}{r_i(r_i - 1)} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\substack{\ell=1, \\ k \neq \ell}}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell}$$

e

$$\begin{aligned}
Q_{i1} &= \frac{1}{r_i}(E_i - U_i) \\
&= \frac{1}{r_i} \left[\frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{r_i(r_i-1)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right],
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, g$. Pode-se, ainda, reestruturar a expressão de Q_{i1} da seguinte forma

$$\begin{aligned}
Q_{i1} &= \frac{1}{r_i(r_i-1)} \left[\frac{r_i-1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{r_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right] \\
&= \frac{1}{r_i(r_i-1)} \left[\sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{r_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right] \\
&= \frac{1}{r_i(r_i-1)} \left[\sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right].
\end{aligned}$$

Deve-se provar que Q_{i1} é igual a $tr(\mathbf{S}_i)/r_i$, como em (2.13). Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{tr(\mathbf{S}_i)}{r_i} &= \frac{1}{r_i} tr \left[\frac{1}{r_i-1} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{ik}^\top - \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik} \sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \right) \right] \\
&= \frac{1}{r_i(r_i-1)} \left[\sum_{k=1}^{r_i} tr(\mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{ik}^\top) - \frac{1}{r_i} tr \left(\sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik} \sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \right) \right] \\
&= \frac{1}{r_i(r_i-1)} \left[\sum_{k=1}^{r_i} tr(\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik}) - \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_i} tr(\mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{i\ell}^\top) \right] \\
&= \frac{1}{r_i(r_i-1)} \left[\sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_i} tr(\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell}) \right] \\
&= \frac{1}{r_i(r_i-1)} \left[\sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik} - \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell} \right],
\end{aligned}$$

que corresponde exatamente a Q_{i1} . Da mesma forma, como $Q_{ig1} = Q_{i1} + Q_{g1}$, então trivialmente tem-se que $Q_{ig1} = tr(\hat{\mathbf{\Sigma}}_{ig0})$, conforme previsto. Com as definições de Ahmad (2019), em que os núcleos de U_i e U_{ig} foram divididos por p nas funções h , as igualdades de (2.13) não se verificam.

Nas subseções seguintes são apresentados resultados obtidos por Takahashi et al. (2013) e Hyodo, Takahashi e Nishiyama (2014) para o teste baseado no critério do traço de Dempster (DEMPSTER, 1958; DEMPSTER, 1960), proposto por Hyodo, Takahashi e Nishiyama (2014), e os resultados obtidos por Ahmad (2019) para o teste que o autor propôs. As estatísticas desses testes foram consideradas na proposição dos testes de comparações múltiplas multivariadas com o tratamento controle, via *bootstrap*, para casos de alta dimensionalidade.

2.1.2.2 Resultados da literatura para o teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama

Para verificar o desempenho do teste proposto, Hyodo, Takahashi e Nishiyama (2014) avaliaram a precisão das aproximações dos quantis superiores da estatística D_{\max_c} , em (2.9), por meio de simulação Monte Carlo. Para isso, consideraram vetores p -dimensionais independentes e identicamente distribuídos gerados a partir da distribuição normal multivariada, tamanhos amostrais iguais e matriz de covariâncias comum para os g tratamentos, com as seguintes combinações de parâmetros: $\alpha = 0,10, 0,05, 0,01$; $g = 3, 6$; $\sum_{i=1}^g r_i = 60$ ou 120 ; $p = 30, 60, 90, 120, 150, 200$ e, para as estruturas das matrizes de covariâncias, foram consideradas matriz identidade, $\Sigma = I_p$, e autorregressiva de ordem 1, $\Sigma = \rho^{|i-j|}$ com $\rho = 0,2$ e $0,5$.

Para os casos de comparações com o tratamento controle e alta dimensionalidade, os autores compararam os valores obtidos para as probabilidades de $D_{\max_c} < z_{\alpha_c}$ e $D_{\max_c} < \hat{z}_{1_c}$, denotados, respectivamente, por $\Pr(z_{\alpha_c})$ e $\Pr(\hat{z}_{1_c})$, em que z_{α_c} é o quantil superior $100\alpha_c\%$ da distribuição normal padrão e $\alpha_c = \alpha/m$, e \hat{z}_{1_c} é a aproximação proposta pelos autores para os quantis superiores das estatísticas (2.10). E, nos casos de baixa dimensionalidade, também compararam com a probabilidade de $T_{\max_c}^2 < t_{1_c}^2$, denotada por $\Pr(t_{1_c}^2)$, em que $t_{1_c}^2$ é a aproximação de primeira ordem de Bonferroni para os quantis superiores da estatística $T_{\max_c}^2$, ou seja, essencialmente os quantis superiores $100\alpha_c\%$ da distribuição F com p e $n - p - 1$ graus de liberdade.

Os resultados obtidos nas simulações mostram que $\Pr(\hat{z}_{1_c})$ é sempre maior que $\Pr(z_{\alpha_c})$ e quase maior ou igual a $1 - \alpha$, ou seja, \hat{z}_{1_c} é quase conservativo; $\Pr(\hat{z}_{1_c})$ não depende do tamanho da amostra e da dimensão; a mesma tendência se mantém independente das estruturas de covariâncias; e nos casos de baixa dimensionalidade, o procedimento existente é mais conservativo do que o proposto, ou seja, $\Pr(t_{1_c}^2) \geq \Pr(\hat{z}_{1_c})$. Por fim, os autores concluem que, a partir

desses resultados, as aproximações por expansão assintótica propostas são úteis (HYODO; TAKAHASHI; NISHIYAMA, 2014).

Takahashi et al. (2013) avaliaram o teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama (2014) para o caso não balanceado e realizaram simulações a fim de avaliar a probabilidade de cobertura dos procedimentos propostos. Os autores também investigaram a robustez dos procedimentos de comparações múltiplas estendidos sob não normalidade, considerando as distribuições multivariadas normal, t com 7 graus de liberdade e normal contaminada. Consideraram $g = 3$ com $(r_1, r_2, r_3) = (20, 20, 20), (30, 20, 10), (40, 10, 10)$ e as demais configurações de Hyodo, Takahashi e Nishiyama (2014).

Os resultados obtidos indicam que os procedimentos estendidos parecem funcionar bem para uma série de distribuições não normais e em situações de alta dimensionalidade, apresentando melhor desempenho quando a distribuição subjacente aos dados não é de cauda pesada, pois, nesta situação, mostraram-se sensíveis a grandes valores de p (TAKAHASHI et al., 2013). Os autores então recomendam o uso da estatística para o caso não balanceado com tamanhos amostrais pequenos.

2.1.2.3 Resultados da literatura para o teste de Ahmad

Para avaliar o desempenho de seu teste, em termos de controle do erro tipo I, poder e, também, sua robustez à violação de suposições, Ahmad (2019) fez um estudo de simulação. Para isso, considerou $g = 3$, com $(r_1, r_2, r_3) = (10, 15, 20), (20, 30, 40), (10, 30, 60), (50, 75, 100)$; $g = 6$, com $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) = (10, 10, 10, 20, 20, 20), (30, 40, 50, 30, 40, 50), (30, 40, 50, 60, 70, 80)$; vetores p -dimensionais independentes e identicamente distribuídos gerados a partir de distribuições multivariadas normal, uniforme e exponencial; $p \in \{50, 300, 500, 1.000\}$; três estruturas de matrizes de covariâncias, simetria composta (SC), autorregressiva de ordem 1 (AR(1)) e não estruturada (NE), definidas, respectivamente, como $\kappa \mathbf{I} + \rho \mathbf{J}$, $Cov(X_i, X_j) = \kappa \rho^{|i-j|}$, $\forall i, j$, $\kappa = 1$ e $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^p$ com $\sigma_{ij} = 1(1-p)$ ($i = j$), $\rho_{ij} = (i-1)/p$ ($i > j$), onde \mathbf{I} é uma matriz identidade e $\mathbf{J} = \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ é uma matriz de uns.

Para incluir a violação da suposição de homocedasticidade, no caso de $g = 3$, foram consideradas duas configurações para as estruturas de Σ_i , $i = 1, 2, 3$, combinadas como (SC, AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)) e (AR(1, 0,5), AR(1, 0,7), NE), onde 0,5 e 0,7 foram os valores de ρ adotados. No caso de $g = 6$, foram consideradas as mesmas combinações de estruturas para as

matrizes de covariâncias usadas para $g = 3$, repetidas para os três primeiros e os próximos três tratamentos, ou seja, (SC, AR(1, 0,5), AR(1, 0,7), SC, AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)) e (AR(1, 0,5), AR(1, 0,7), NE, AR(1, 0,5), AR(1, 0,7), NE).

Para taxa de erro tipo I e poder, o autor considerou $\alpha = 0,05$, realizou 1.000 simulações, e testou, para $g = 3$, todas as (três) hipóteses de pares $\boldsymbol{\delta}_{ij} = \mathbf{0}$, $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$ e, para $g = 6$, foram feitas comparações com o tratamento 1, considerado como o controle, ou seja, $\boldsymbol{\delta}_{1j} = \mathbf{0}$, $j = 2, 3, \dots, 6$. Além disso, para o poder, foi adicionado o parâmetro de não centralidade ao tratamento 1, para ambos $g = 3$ e $g = 6$, definido como $\boldsymbol{\vartheta} = \Delta \mathbf{q}$, em que $\Delta = 0,2(0,2)1$ e $\mathbf{q} = [1/p, 2/p, \dots, p/p]$. Isso, para $g = 3$, afetou os testes de $\boldsymbol{\delta}_{12}$ e $\boldsymbol{\delta}_{13}$, enquanto para $g = 6$ e as comparações com o controle, afetou todos os testes.

Para fins de comparação, o autor também calculou, sob as mesmas configurações, a taxa de erro tipo I e poder para o teste multivariado de comparações múltiplas mais comumente usado, ou seja, T_{\max} , com o controle de Bonferroni. Portanto, calculou $T_{\max} = \max\{T_{ij} : i, j = 1, \dots, m, i < j\}$ e usou α/m como nível de significância para exercer o controle de Bonferroni.

Ahmad (2019) restringiu a apresentação dos resultados obtidos para o poder, no caso de $g = 3$, à combinação (SC, AR, AR) e, de $g = 6$, aos dois primeiros sextuplos e para as distribuições normal e exponencial, justificando grande semelhança entre eles.

O autor destaca um controle preciso do erro tipo I para $g = 3$ e 6 amostras, em todas as estruturas de covariâncias e para todas as distribuições consideradas, a precisão da distribuição exponencial como um caso não normal e, da mesma forma, o caso das estruturas de covariâncias envolvendo SC, sendo uma matriz de covariâncias altamente pontiaguda, com apenas dois autovalores distintos. Esses resultados, segundo Ahmad (2019), demonstram a robustez do teste proposto contra várias violações de suposições usuais. A Tabela 2.1 apresenta os resultados obtidos pelo autor para taxa de erro tipo I de seu teste (T_{1g}) e do T_{\max} , no caso $g = 6$.

Tabela 2.1 – Resultados obtidos por Ahmad (2019) para taxa de erro tipo I do teste de Ahmad (T_{1g}) e do teste T_{\max} , nas comparações com o tratamento controle 1, considerando número de tratamentos $g = 6$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, número de variáveis (p), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR, NE), distribuições multivariadas (normal, uniforme e exponencial) e tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_6).
(Continua)

$g = 6 ; \alpha = 0,05$												
p	$\Sigma_i : \text{SC, AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7)$						$\Sigma_i : \text{AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7), \text{NE}$					
	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{\max}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{\max}
Distribuição normal multivariada												
$(r_1, \dots, r_6) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$												
50	0,061	0,053	0,054	0,065	0,054	0,055	0,059	0,058	0,048	0,058	0,056	0,040
300	0,062	0,064	0,055	0,059	0,053	0,034	0,053	0,059	0,060	0,056	0,058	0,037
500	0,059	0,057	0,043	0,056	0,054	0,026 ⁻	0,047	0,060	0,056	0,060	0,055	0,029 ⁻
1.000	0,054	0,046	0,048	0,047	0,052	0,035	0,060	0,051	0,050	0,046	0,056	0,030 ⁻
$(r_1, \dots, r_6) = (30, 40, 50, 30, 40, 50)$												
50	0,056	0,057	0,057	0,061	0,054	0,053	0,060	0,057	0,058	0,054	0,053	0,047
300	0,054	0,060	0,058	0,058	0,054	0,035	0,055	0,057	0,041	0,053	0,056	0,025 ⁻
500	0,056	0,050	0,055	0,048	0,055	0,020 ⁻	0,055	0,053	0,049	0,053	0,052	0,019 ⁻
1.000	0,049	0,054	0,047	0,051	0,059	0,039	0,053	0,051	0,050	0,039	0,055	0,027 ⁻
$(r_1, \dots, r_6) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$												
50	0,040	0,056	0,049	0,051	0,052	0,047	0,054	0,053	0,054	0,058	0,057	0,043
300	0,047	0,046	0,045	0,060	0,057	0,019 ⁻	0,046	0,052	0,037	0,052	0,060	0,025 ⁻
500	0,060	0,056	0,058	0,052	0,055	0,024 ⁻	0,059	0,056	0,054	0,058	0,054	0,035
1.000	0,053	0,052	0,042	0,049	0,056	0,052	0,055	0,049	0,059	0,051	0,053	0,059
Distribuição uniforme multivariada												
$(r_1, \dots, r_6) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$												
50	0,062	0,058	0,059	0,060	0,055	0,060	0,057	0,063	0,057	0,055	0,048	0,047
300	0,057	0,056	0,058	0,048	0,055	0,026 ⁻	0,057	0,060	0,054	0,057	0,050	0,019 ⁻
500	0,059	0,056	0,058	0,057	0,058	0,038	0,059	0,053	0,056	0,051	0,060	0,027 ⁻
1.000	0,056	0,056	0,050	0,041	0,055	0,028 ⁻	0,058	0,052	0,049	0,040	0,059	0,025 ⁻
$(r_1, \dots, r_6) = (30, 40, 50, 30, 40, 50)$												
50	0,048	0,054	0,053	0,056	0,051	0,037	0,039	0,053	0,059	0,052	0,052	0,029 ⁻
300	0,051	0,057	0,054	0,050	0,050	0,026 ⁻	0,051	0,046	0,051	0,059	0,049	0,023 ⁻
500	0,050	0,054	0,047	0,060	0,056	0,025 ⁻	0,049	0,049	0,058	0,042	0,045	0,022 ⁻
1.000	0,052	0,041	0,048	0,056	0,059	0,009 ⁻	0,058	0,050	0,044	0,058	0,045	0,012 ⁻
$(r_1, \dots, r_6) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$												
50	0,072	0,057	0,049	0,040	0,059	0,032 ⁻	0,051	0,041	0,060	0,044	0,052	0,031 ⁻
300	0,047	0,058	0,051	0,055	0,050	0,018 ⁻	0,060	0,044	0,046	0,051	0,056	0,027 ⁻
500	0,047	0,050	0,050	0,052	0,056	0,027 ⁻	0,052	0,060	0,048	0,060	0,054	0,015 ⁻
1.000	0,043	0,042	0,051	0,049	0,052	0,062	0,045	0,048	0,059	0,057	0,060	0,061

Tabela 2.1 – Resultados obtidos por Ahmad (2019) para taxa de erro tipo I do teste de Ahmad (T_{1g}) e do teste T_{\max} , nas comparações com o tratamento controle 1, considerando número de tratamentos $g = 6$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, número de variáveis (p), estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR, NE), distribuições multivariadas (normal, uniforme e exponencial) e tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_6).
(Conclusão)

$g = 6 ; \alpha = 0,05$												
p	$\Sigma_i : \text{SC, AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7)$						$\Sigma_i : \text{AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7), \text{NE}$					
	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{\max}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{\max}
Distribuição exponencial multivariada												
$(r_1, \dots, r_6) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$												
50	0,057	0,055	0,069	0,064	0,062	0,042	0,050	0,044	0,051	0,040	0,042	0,043
300	0,046	0,054	0,059	0,058	0,050	0,032 ⁻	0,052	0,055	0,053	0,051	0,054	0,036
500	0,053	0,050	0,044	0,054	0,039	0,023 ⁻	0,053	0,052	0,051	0,055	0,046	0,025 ⁻
1.000	0,047	0,054	0,047	0,041	0,045	0,028 ⁻	0,050	0,052	0,042	0,042	0,054	0,023 ⁻
$(r_1, \dots, r_6) = (30, 40, 50, 30, 40, 50)$												
50	0,052	0,049	0,040	0,053	0,052	0,035	0,055	0,050	0,048	0,053	0,045	0,035
300	0,057	0,057	0,055	0,054	0,049	0,028 ⁻	0,054	0,037	0,058	0,044	0,054	0,026 ⁻
500	0,044	0,050	0,045	0,053	0,044	0,020 ⁻	0,051	0,054	0,059	0,052	0,055	0,027 ⁻
1.000	0,058	0,065	0,058	0,051	0,057	0,025 ⁻	0,056	0,062	0,054	0,055	0,048	0,019 ⁻
$(r_1, \dots, r_6) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$												
50	0,049	0,054	0,055	0,051	0,048	0,037	0,048	0,054	0,055	0,059	0,055	0,042
300	0,054	0,059	0,054	0,045	0,057	0,032 ⁻	0,059	0,038	0,055	0,047	0,046	0,044
500	0,052	0,059	0,055	0,056	0,049	0,022 ⁻	0,054	0,048	0,051	0,053	0,046	0,022 ⁻
1.000	0,044	0,052	0,039	0,047	0,050	0,015 ⁻	0,046	0,049	0,047	0,053	0,056	0,018 ⁻

⁻: significativamente (valor- $p < 1\%$) menor que $\alpha = 0,05$.

Fonte: Elaborada pela autora com base em Ahmad (2019).

Situação semelhante ocorreu com o poder, que aumentou constantemente não apenas à medida que aumentava o tamanho da amostra, mas também com o aumento da dimensão. O poder convergiu rapidamente para 1 para tamanhos de amostra tão pequenos quanto 10 ou 20, mesmo para distribuição exponencial e, devido a isso, o autor reduziu os valores de ϑ para cada p assim que o poder se aproximava do seu valor máximo. Em comparação com T_{\max} , Ahmad (2019) notou que este se moveu entre liberal ($g = 3$) e conservativo ($g = 6$), e perdeu sua estabilidade, embora geralmente tenha mostrado um bom poder. A Tabela 2.2 apresenta os resultados obtidos pelo autor para o poder de seu teste (T_{1g}) e do T_{\max} , no caso $g = 6$ e distribuições multivariadas normal e exponencial.

Tabela 2.2 – Resultados obtidos por Ahmad (2019) para poder do teste de Ahmad (T_{1g}) e do teste T_{\max} , nas comparações com o tratamento controle 1, considerando número de tratamentos $g = 6$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, número de variáveis (p), $\Delta = 0,2(0,2)1$, estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR, NE), distribuições multivariadas (normal e exponencial) e tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_6).

(Conclusão)

$g = 6 ; \alpha = 0,05$													
p	Δ	$\Sigma_i : \text{SC}, \text{AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7)$						$\Sigma_i : \text{AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7), \text{NE}$					
		T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{\max}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{\max}
$(r_1, \dots, r_6) = (30, 40, 50, 30, 40, 50)$													
50	0,2	0,339	0,366	0,310	0,335	0,339	0,344	0,351	0,365	0,275	0,331	0,369	0,334
	0,4	0,975	0,987	0,954	0,977	0,995	0,999	0,977	0,979	0,935	0,978	0,987	0,989
	0,6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
100	0,2	0,453	0,545	0,402	0,502	0,528	0,500	0,489	0,541	0,413	0,516	0,511	0,494
	0,4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Fonte: Elaborada pela autora com base em Ahmad (2019).

Por fim, o autor conclui que o teste proposto pode ser geralmente considerado para a maioria das distribuições e estruturas de covariâncias usadas na prática, onde a dimensão pode exceder em muito o tamanho da amostra, e para um número moderado de amostras independentes.

2.2 Métodos estatísticos computacionalmente intensivos

Os métodos estatísticos computacionais são baseados no uso intensivo do computador para realizar inferências e resolver problemas de natureza estatística, ou seja, problemas que possuam componentes aleatórios (FERREIRA, 2013).

2.2.1 Métodos *bootstrap*

O método *bootstrap* consiste em uma técnica que faz parte de uma grande cobertura de técnicas não paramétricas que são comumente chamadas de métodos de reamostragem (EFRON; TIBSHIRANI, 1994). De acordo com Ferreira (2013), é um dos principais temas envolvendo os métodos computacionalmente intensivos e, talvez, o maior responsável pela popularidade desses métodos. Ele envolve reamostragens com reposição da amostra original formando-se uma nova amostra com a mesma estrutura da amostra original.

A grande vantagem de se utilizar o método *bootstrap* para realizar inferência é quando a distribuição de probabilidade da população não é conhecida e a condição de normalidade

é violada. Nesses casos, a utilização de *bootstrap* para realizar procedimentos complexos de inferência é factível e simples (FERREIRA, 2013).

O processo de reamostragem deve ser repetido um número grande de vezes, diga-se B vezes e, em cada reamostra *bootstrap* obtida, é computado o valor de uma estatística de interesse. A distribuição dessa quantidade de interesse é denominada distribuição de *bootstrap*, sendo a inferência realizada com base nessa distribuição (FERREIRA, 2013). Na medida que a distribuição de reamostragem “imita” a distribuição original, as inferências são precisas, e a precisão melhora à medida que o tamanho da amostra original aumenta (EFRON; TIBSHIRANI, 1994). A obtenção dessas reamostras *bootstrap* pode ser feita de acordo com algum modelo de probabilidade ou de forma empírica. Nesse sentido, o método *bootstrap* pode ser classificado em paramétrico ou não paramétrico.

O *bootstrap* paramétrico é utilizado quando se tem alguma suposição sobre a distribuição de probabilidade dos dados. Ou seja, no caso do método *bootstrap* paramétrico existe uma suposição sobre a distribuição que originou os dados e as B reamostras *bootstrap* são geradas utilizando esse modelo, a partir dos parâmetros estimados com os dados da amostra original (FERREIRA, 2013). Já o *bootstrap* não paramétrico é utilizado quando não se tem nenhuma suposição sobre a distribuição da população. Nesta pesquisa foi utilizado o método *bootstrap* não paramétrico, o qual é descrito a seguir.

2.2.1.1 *Bootstrap* não paramétrico

No *bootstrap* não paramétrico a ideia é realizar reamostragens da amostra original e substituir a distribuição desconhecida da população pela distribuição empírica, que é conhecida. Por essa razão, esse método é denominado *bootstrap* não paramétrico. Ele é utilizado quando não se tem nenhuma suposição (ou não se deseja fazer nenhuma suposição) sobre a distribuição da população, ou seja, a população da qual a amostra foi obtida tem função de distribuição desconhecida. Neste caso, utiliza-se a amostra diretamente para gerar as reamostragens. Esse processo se baseia no fato de que a amostra obtida da população contém toda a informação dessa população subjacente. Então ela passa a representar a “população” para o processo de reamostragem (FERREIRA, 2013).

As B reamostras, de tamanho n , são obtidas de reamostragens com reposição da amostra original. A probabilidade de selecionar qualquer valor do conjunto de dados é igual a $1/n$, pois

considera-se que a amostra original, também de tamanho n , é independente e identicamente distribuída com uma função de distribuição desconhecida. O passo seguinte é calcular a estatística de interesse para cada uma das B reamostras. Assim, tem-se a distribuição de *bootstrap* nula dessa estatística, a partir da qual podem-se fazer inferências.

Uma vez apresentado o método utilizado na proposição de novos testes de comparações múltiplas multivariadas, torna-se necessário apresentar o método utilizado para avaliar a taxa de erro tipo I por experimento e o poder destes mesmos testes, que é o método Monte Carlo.

2.2.2 Método Monte Carlo

Simulações computacionais referem-se à reprodução de processos, com um programa computacional adequado, e a observação desses resultados. Métodos Monte Carlo são aqueles baseados em simulações computacionais envolvendo números aleatórios. Então, de maneira geral, o método Monte Carlo pode ser considerado como sendo um método que envolve simulação de experimentos em que pelo menos um componente aleatório esteja presente (FERREIRA, 2013). Trata-se de uma técnica que consiste na simulação de dados pela geração de números aleatórios, por meio de algum algoritmo em linguagem de programação, de acordo com determinada distribuição de probabilidade.

O método Monte Carlo pode ser utilizado, por exemplo, na avaliação das propriedades de um estimador, na avaliação das propriedades de um método de estimação intervalar, na determinação de tamanhos amostrais, na solução direta de problemas estatísticos, tais como testes e métodos de estimação que sejam computacionalmente intensivos e na avaliação de um teste estatístico (FERREIRA, 2013). Para este último caso, o método é utilizado para avaliar testes quanto ao controle da taxa de erro tipo I e poder, e é com esta finalidade que o método Monte Carlo foi utilizado neste trabalho, ou seja, para avaliar o desempenho dos testes de comparações múltiplas multivariadas propostos, considerando a taxa de erro tipo I por experimento empírica e o poder empírico dos testes.

Na subseção seguinte são apresentados os tipos de erros que podem ocorrer numa tomada de decisão sob uma hipótese nula H_0 e o poder de um teste.

2.3 Erro e poder de testes

Neste trabalho, o objetivo de utilizar os procedimentos de comparações múltiplas multivariadas foi verificar um conjunto de parâmetros provenientes da combinação linear de vetores de diferenças entre dois vetores de médias distintos, aqui denotados por $\delta_{ij} = \mu_i - \mu_j, i \neq j = 1, 2, \dots, g$, sendo o número de parâmetros, m , dado por $m = g - 1$, para comparações com um tratamento controle.

Cada parâmetro é avaliado por meio de um teste de hipótese e, ao se tomar uma decisão, ou de rejeição ou de não rejeição de uma hipótese nula, é possível estar incorrendo em erros, ou seja, cada teste está associado a erros de decisão: erro tipo I e erro tipo II. O erro tipo I ocorre quando se toma a decisão equivocada de rejeitar a hipótese nula H_0 , sendo esta verdadeira, e o tamanho desse erro é definido pela probabilidade $\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$, que pode ser fixado pelo pesquisador (FERREIRA, 2018a). O ideal para um teste é manter o tamanho do erro tipo I no nível de significância adotado.

Por outro lado, quando se toma a decisão equivocada de não rejeitar a hipótese nula H_0 , sendo esta falsa, comete-se o erro tipo II, e o tamanho desse erro é definido pela probabilidade $\beta = P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$. O complemento da probabilidade de ocorrência do erro tipo II, $1 - \beta$, é denominado de poder do teste, ou seja, o poder de um teste é a probabilidade de rejeitar uma hipótese H_0 que é falsa e que deveria, de fato, ser rejeitada (FERREIRA, 2018a).

Se por um lado, a probabilidade de cometer o erro tipo I é conhecida e fixada pelo pesquisador, por outro, a probabilidade de se incorrer no erro tipo II não é conhecida e nem pode ser especificada *a priori*. O que se sabe é que a probabilidade α é inversamente proporcional à probabilidade β (FERREIRA, 2018a).

A Tabela 2.3 apresenta um resumo dos dois tipos de erros que podem ocorrer numa tomada de decisão sob uma hipótese nula H_0 e suas respectivas probabilidades entre parênteses.

Quando se tem o interesse em testar inúmeras hipóteses, em particular as do tipo $H_{0\ell} : \mu_i - \mu_j = 0, i \neq j = 1, 2, \dots, g, \ell = 1, 2, \dots, m$ parâmetros, nos testes tradicionais ocorre um crescimento da taxa de erro tipo I. Este é o efeito de multiplicidade, ou seja, o crescimento da taxa de erro tipo I com o aumento do número de testes (BATISTA, 2016). Segundo Rao e Swarupchand (2009), os procedimentos de comparações múltiplas são os procedimentos estatísticos designados ao controle adequado de efeitos de multiplicidade.

Tabela 2.3 – Tipos de erros e decisões corretas, com suas respectivas probabilidades associadas entre parênteses.

Decisão	Realidade	
	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Não rejeitar H_0	Decisão correta ($1 - \alpha$)	Erro tipo II (β)
Rejeitar H_0	Erro tipo I (α)	Decisão correta ($1 - \beta$)

Fonte: Da autora (2025).

A forma de medir esse crescimento é por meio da taxa de erro em inferências simultâneas, definida como sendo a probabilidade de pelo menos uma hipótese nula ser rejeitada num conjunto de hipóteses nulas H_{0_ℓ} s verdadeiras e independentes, com $\ell = 1, 2, \dots, m$, ou seja, (BATISTA, 2016)

$$\text{Taxa de erro} = 1 - \prod_{\ell=1}^m [1 - P(\text{Rejeitar } H_{0_\ell} | H_{0_\ell} \text{ verdadeira})].$$

As m comparações, na realidade, não são independentes, de modo que essa não é a probabilidade exata, mas uma aproximação conservativa (HOCKING, 2003). Esta probabilidade corresponde, então, à probabilidade máxima ou a um limite superior de cometer pelo menos um erro tipo I. Portanto, é com base nas taxas de erro tipo I que os procedimentos de comparações múltiplas são desenvolvidos, com o objetivo de controlar adequadamente a probabilidade de pelo menos uma hipótese verdadeira ser rejeitada, isto é, mesmo com o aumento dos testes de hipóteses, não haja também o aumento na taxa de erro.

O'Neill e Wetherill (1971) definem duas maneiras para se calcular a taxa de erro tipo I:

a) taxa de erro tipo I por comparação (TEC) =

$$\frac{\text{Número de comparações rejeitadas indevidamente}}{\text{Número total de comparações}}, \quad (2.15)$$

b) taxa de erro tipo I por experimento (TEE) =

$$\frac{\text{Número de experimentos com pelo menos uma hipótese nula rejeitada indevidamente}}{\text{Número total de experimentos}}. \quad (2.16)$$

Em (2.15) a avaliação é feita verificando-se a proporção de comparações rejeitadas indevidamente em todas as comparações possíveis dos tratamentos tomados dois a dois ou, no caso de comparações com o controle, em todas as combinações possíveis que envolvam o tratamento controle. Em (2.16) a avaliação é feita verificando-se a proporção de experimentos com pelo menos uma diferença detectada incorretamente em relação ao total de experimentos.

A relação entre esses dois tipos de taxas de erro é dada por (HOCHBERG; TAMHANE, 1987)

$$TEE = 1 - (1 - TEC)^m,$$

sendo $m = g - 1$, no caso de comparações com o tratamento controle.

A questão sobre qual das taxas de erro deve ser controlada foi motivo de muitas discussões (BATISTA, 2016). Mas com base em Miller (1981) e Hochberg e Tamhane (1987), a taxa de erro tipo I por experimento deve ser padrão, pois, além de proteger o nível de significância adotado pelo pesquisador, permite calibrar uniformemente procedimentos diferentes para um referencial comum, e assim, comparar as suas características de maneira mais justa. Portanto, a probabilidade considerada para medir a taxa do erro tipo I, neste trabalho, será a por experimento.

Como dito anteriormente, as taxas de erro tipo I por experimento foram avaliadas via simulação Monte Carlo. Como essa avaliação não está livre de erros, foi utilizado o teste binomial exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010) para definir se os testes estatísticos são liberais, conservativos ou exatos, o qual é apresentado na próxima subseção.

2.4 Teste binomial exato

As hipóteses nula (H_0) e alternativa (H_1) do teste binomial exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010) com $(100 - \alpha^*)\%$ confiança são

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha &= \alpha_0 \\ \text{versus} & \\ H_1 : \alpha &\neq \alpha_0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Se a hipótese nula em (2.17) for rejeitada e a taxa de erro tipo I por experimento empírica for considerada significativamente inferior ao nível nominal de significância adotado, o teste é considerado conservativo; se a hipótese nula em (2.17) for rejeitada e a taxa de erro tipo I por experimento empírica for considerada significativamente superior ao nível nominal de significância adotado, o teste é considerado liberal; e se a hipótese nula em (2.17) não for rejeitada, o teste é considerado exato.

Considerando y o número de rejeições de H_0 em N simulações Monte Carlo, para um nível de significância α_0 , a estatística do teste binomial exato é obtida utilizando a relação entre a distribuição F e a distribuição binomial, com probabilidade de sucesso $p = \alpha_0$, e é dada (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010) por

$$F = \left(\frac{y+1}{N-y} \right) \left(\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0} \right),$$

sob H_0 . Essa estatística segue uma distribuição F com $\nu_1 = 2(N-y)$ e $\nu_2 = 2(y+1)$ graus de liberdade. Se $F_c \leq F_{\nu_1, \nu_2}(\alpha^*/2)$ ou $F_c > F_{\nu_1, \nu_2}(1 - \alpha^*/2)$, então rejeita-se a hipótese nula em (2.17) ao nível de significância de α^* de probabilidade, em que $F_{\nu_1, \nu_2}(\alpha^*/2)$ e $F_{\nu_1, \nu_2}(1 - \alpha^*/2)$ são os quantis $100\alpha^*/2\%$ e $100(1 - \alpha^*/2)\%$, respectivamente, da distribuição F com ν_1 e ν_2 graus de liberdade. Os autores recomendam o uso de $\alpha^* = 1\%$.

3 MÉTODOS

Para o desenvolvimento deste trabalho destacam-se algumas subdivisões metodológicas visando atender aos objetivos. Nas subseções seguintes, os métodos de cada subdivisão são apresentados.

Foram considerados, sem perda de generalidade, os vetores aleatórios p -dimensionais (p é o número de variáveis) $\mathbf{X}_{ik} = [X_{ik1}, \dots, X_{ikp}]^\top \sim \mathfrak{F}_i$, que representam as observações amostrais referentes ao i -ésimo tratamento na k -ésima unidade amostral, $i = 1, 2, \dots, g$, $k = 1, 2, \dots, r_i$, com vetor p -dimensional de médias $E(\mathbf{X}_{ik}) = \boldsymbol{\mu}_i$ e matriz de covariâncias $Cov(\mathbf{X}_{ik}) = \boldsymbol{\Sigma}_i$ positiva definida $p \times p$ simétrica, com $g \geq 2$ e \mathfrak{F}_i uma família de distribuição para o i -ésimo tratamento. Foi considerado o caso bem geral, em que \mathfrak{F}_i é uma distribuição p -variada qualquer, não necessariamente normal, com matrizes de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_i$ s potencialmente desiguais (heterogêneas) e caso não balanceado, em que os r_i s são diferentes (r_i é o número de repetições do i -ésimo tratamento). A amostra completa é a combinação das amostras dos g tratamentos em uma única amostra, sendo n o tamanho total da amostra combinada, em que $n = \sum_{i=1}^g r_i$. Foram considerados casos em que $p < n - g$, mas os casos com $p \geq n - g$, de alta dimensionalidade, foram considerados também, em que $n - g = v$ são os graus de liberdade associados ao estimador da matriz de covariâncias populacional comum. Também foram considerados outros casos mais específicos de interesse particular em que a família de distribuição \mathfrak{F}_i refere-se à distribuição normal multivariada.

O interesse da inferência é nos vetores de parâmetros p -dimensionais $\boldsymbol{\delta}_{ig} = \boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_g$, para $i = 1, 2, \dots, g - 1$, ou seja, tem-se o interesse nas comparações múltiplas multivariadas com o tratamento controle g , resultando em $m = g - 1$ parâmetros ou comparações de interesse entre os vetores de médias.

São considerados doravante apenas os casos em que os níveis dos tratamentos são qualitativos não estruturados, que são as situações apropriadas para a utilização dos procedimentos de comparações múltiplas multivariadas (PCMM). Os estimadores não viesados do vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_i$ e da matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_i$ do i -ésimo tratamento são dados, respectivamente, por

$$\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} \mathbf{X}_{ik} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_i = \frac{1}{r_i - 1} \sum_{k=1}^{r_i} (\mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i)^\top, \quad i = 1, 2, \dots, g. \quad (3.1)$$

Quando as matrizes de covariâncias dos tratamentos são iguais, ou seja, o caso homogêneo em que $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \dots = \boldsymbol{\Sigma}_g = \boldsymbol{\Sigma}$, o estimador da matriz de covariâncias comum $\boldsymbol{\Sigma}$ é dado

por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-g} \sum_{i=1}^g (r_i - 1) \mathbf{S}_i, \quad (3.2)$$

associado à $v = n - g$ graus de liberdade.

O caso de interesse geral para comparações com o tratamento controle refere-se às combinações lineares $\mathbf{a}^\top \boldsymbol{\delta}_{ig}$, para um vetor não nulo conhecido $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, em que $\boldsymbol{\delta}_{ig} = \boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_g$ é o vetor de diferenças entre dois vetores de médias distintos, $i = 1, 2, \dots, g-1$ e g é o tratamento controle. O estimador de $\boldsymbol{\delta}_{ig}$ é $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{ig} = \bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g$. A hipótese nula que será testada é

$$H_0 : \boldsymbol{\delta}_{ig} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, g-1, \quad (3.3)$$

contra a alternativa $\boldsymbol{\delta}_{ig} \neq \mathbf{0}$. A seguir serão descritos os testes supondo as estruturas amostrais descritas anteriormente.

3.1 Testes de comparações múltiplas multivariadas para baixa dimensionalidade

Nesta subseção é apresentada a metodologia dos testes de comparações múltiplas multivariadas para o caso de baixa dimensionalidade e que consideram os principais procedimentos aproximados que são baseados na desigualdade de Bonferroni, mais especificamente, o teste assintótico existente, que considera a aproximação de primeira ordem de Bonferroni, e o teste assintótico proposto, que considera uma aproximação empírica da estatística com aproximação de segunda ordem, desenvolvida no presente trabalho. As rotinas com os comandos do programa R (R Core Team, 2024) para aplicação dos testes estão descritas no Apêndice F.

Os testes de comparações múltiplas multivariadas para o caso de alta dimensionalidade, apresentados na próxima subseção, 3.2, também foram aplicados no caso de baixa dimensionalidade para fins de comparação.

3.1.1 Teste T^2 de Hotelling com aproximação de primeira ordem de Bonferroni (T2PO)

Sob H_0 dada em (3.3), o valor de $\boldsymbol{\delta}_{ig}$ é o vetor nulo $\mathbf{0}$, $\forall i = 1, 2, \dots, g - 1$. Assim, substituindo este valor, a estatística

$$T_{ig}^2 = \frac{r_i r_g}{r_i + r_g} (\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g - \boldsymbol{\delta}_{ig})^\top \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g - \boldsymbol{\delta}_{ig}), \quad i = 1, 2, \dots, g - 1, \quad (3.4)$$

foi computada para todos os pares envolvendo o tratamento controle g , sem perda de generalidade. Assim, foram obtidos $m = g - 1$ valores da estatística T^2 no caso de comparações com o tratamento controle.

O valor da estatística de cada par foi confrontado com o valor crítico baseado na distribuição do T_{\max}^2 . Assim, quando o valor computado em (3.4) foi superior ao valor crítico apresentado em Nishiyama, Hyodo e Seo (2014) e dado por

$$t_1^2 = \frac{vp}{v - p + 1} F_{p, v-p+1} \left(\frac{\alpha}{m} \right), \quad (3.5)$$

os pares de vetores de médias foram considerados significativamente diferentes no nível de significância nominal α , sendo $F_{p, v-p+1}(\alpha/m)$ o quantil $100\alpha/m\%$ da distribuição F com p e $v - p + 1$ graus de liberdade.

3.1.2 Teste T^2 de Hotelling com aproximação de segunda ordem de Bonferroni, proposto (T2SO)

Da mesma forma, a estatística com aproximação de segunda ordem foi usada. Neste caso, foi considerada uma aproximação desenvolvida no presente trabalho, haja vista as dificuldades de computar esta aproximação original. Assim, como no caso anterior, quando o valor de T_{ig}^2 computado em (3.4) foi superior ao valor crítico baseado em uma aproximação empírica de segunda ordem da desigualdade de Bonferroni e dado por

$$t_{M^*}^2 = \frac{vp}{v - p + 1} F_{p, v-p+1} \left(\frac{\alpha + \alpha/m}{m} \right), \quad (3.6)$$

os pares de vetores de médias foram considerados significativamente diferentes no nível de significância nominal α .

3.2 Testes de comparações múltiplas multivariadas para alta dimensionalidade

Nas próximas subseções é apresentada a metodologia dos testes de comparações múltiplas multivariadas existentes e os métodos computacionalmente intensivos propostos para comparações entre vetores de médias multidimensionais de tratamentos em situações de alta dimensionalidade.

3.2.1 Testes assintóticos para comparações com o controle

Nesta subseção é apresentada a metodologia dos testes assintóticos existentes para comparações com o tratamento controle no caso de alta dimensionalidade.

3.2.1.1 Teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama (THTN)

Sob H_0 dada em (3.3), tem-se que $\boldsymbol{\delta}_{ig} = \mathbf{0}, \forall i = 1, 2, \dots, g-1$. Assim, substituindo esse valor, a estatística do teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama (2014) (THTN) foi computada por

$$D_{ig} = \frac{p}{\hat{\sigma}} \left\{ \frac{(\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g - \boldsymbol{\delta}_{ig})^\top (\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_g - \boldsymbol{\delta}_{ig})}{r_{ig} \text{tr}(\mathbf{S})} - 1 \right\}, \quad (3.7)$$

em que $r_{ig} = 1/r_i + 1/r_g$, $\hat{\sigma} = \sqrt{2p\hat{a}_2/\hat{a}_1^2}$, $\text{tr}(\mathbf{S})$ corresponde ao traço da matriz \mathbf{S} , e as constantes \hat{a}_1 e \hat{a}_2 são dadas por

$$\hat{a}_1 = \frac{\text{tr}(\mathbf{S})}{p} \quad \text{e} \quad \hat{a}_2 = \frac{v^2}{(v+2)(v-1)p} \left[\text{tr}(\mathbf{S}^2) - \frac{\text{tr}^2(\mathbf{S})}{v} \right].$$

O valor- p foi obtido por (HYODO; TAKAHASHI; NISHIYAMA, 2014)

$$\text{valor-}p = 1 - \text{prob},$$

em que prob é igual a

$$\left\{ \Phi(D_{ig}) - \phi(D_{ig}) \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{2}\hat{a}_3}{\sqrt{\hat{a}_2^3}} h_2(D_{ig}) + \frac{1}{p} \left(\frac{\hat{a}_4}{2\hat{a}_2^2} h_3(D_{ig}) + \frac{\hat{a}_3^2}{9\hat{a}_2^3} h_5(D_{ig}) \right) + \frac{1}{2v} h_1(D_{ig}) \right] \right\},$$

$\Phi(D_{ig})$ e $\phi(D_{ig})$ são a função de distribuição e a função de densidade da distribuição normal padrão, respectivamente, e $h_j(D_{ig})$ s, $j = 1, 2, 3, 5$, são os polinômios de Hermite dados por

$$\begin{aligned} h_1(D_{ig}) &= D_{ig}, & h_2(D_{ig}) &= D_{ig}^2 - 1, & h_3(D_{ig}) &= D_{ig}^3 - 3D_{ig} & \text{e} \\ h_5(D_{ig}) &= D_{ig}^5 - 10D_{ig}^3 + 15D_{ig}. \end{aligned}$$

As demais quantidades necessárias não definidas ainda são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{a}_3 &= \frac{v^4}{(v+4)(v+2)(v-1)(v-2)p} \left[tr(\mathbf{S}^3) - \frac{3tr(\mathbf{S}^2)tr(\mathbf{S})}{v} + \frac{2tr^3(\mathbf{S})}{v^2} \right], \\ \hat{a}_4 &= \frac{v^3 [b_1 tr(\mathbf{S}^4) + b_2 tr(\mathbf{S}^3)tr(\mathbf{S}) + b_3 tr^2(\mathbf{S}^2) + b_4 tr(\mathbf{S}^2)tr^2(\mathbf{S}) + b_5 tr^4(\mathbf{S})]}{(v+6)(v+4)(v+2)(v+1)(v-1)(v-2)(v-3)p}, \end{aligned}$$

sendo ainda que os b_i s são

$$\begin{aligned} b_1 &= v^2(v^2 + v + 2), & b_2 &= -4v(v^2 + v + 2), & b_3 &= -v(2v^2 + 3v - 6), \\ b_4 &= 2v(5v + 6) & \text{e} & & b_5 &= -(5v + 6). \end{aligned}$$

Portanto, no caso de comparações com o controle, a rejeição da hipótese nula se deu quando o valor- p foi menor ou igual ao nível nominal de significância adotado com a proteção de Bonferroni, ou seja, quando $\text{valor-}p \leq \alpha/m$.

3.2.1.2 Teste de Ahmad (TA)

A estatística do teste, T_{ig} , foi computada por

$$T_{ig} = 1 + \frac{Q_{ig0}}{Q_{ig1}/p}, \quad (3.8)$$

em que $Q_{ig1} = Q_{i1} + Q_{g1}$, sendo

$$Q_{i1} = \frac{E_i - U_i}{r_i}, \quad E_i = \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{ik}}{r_i}, \quad U_i = \frac{1}{r_i(r_i - 1)} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\substack{\ell=1, \\ k \neq \ell}}^{r_i} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{i\ell}$$

e a quantidade $Q_{ig0} = U_{ig0}/p$, em que $Q_{ig0} = U_i + U_g - 2U_{ig}$, sendo

$$U_{ig} = \frac{1}{r_i r_g} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{r_g} \mathbf{X}_{ik}^\top \mathbf{X}_{g\ell},$$

como em Ahmad (2018).

A rejeição da hipótese nula $H_0 : \boldsymbol{\delta}_{ig} = \mathbf{0}$ ocorreu se $T_{ig} \geq T_{\alpha/m}$, em que $T_{\alpha/m}$ é dado por $T_{\alpha/m} = \chi_{\alpha/m; f_{ig}}^2 / f_{ig}$, sendo $\chi_{\alpha/m; f_{ig}}^2$ o quantil superior $100\alpha/m\%$ da distribuição qui-quadrado com graus de liberdade f_{ig} dados por

$$f_{ig} = \frac{[tr(\boldsymbol{\Omega}_{0ig})]^2}{tr(\boldsymbol{\Omega}_{0ig}^2)},$$

em que

$$\boldsymbol{\Omega}_{0ig} = \frac{n}{p} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0ig} \quad \text{e} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0ig} = \frac{\mathbf{S}_i}{r_i} + \frac{\mathbf{S}_g}{r_g}.$$

3.2.2 Testes *bootstrap* propostos para comparações com o controle

Nesta subseção é apresentada a metodologia dos testes *bootstrap* propostos para comparações com o tratamento controle no caso de alta dimensionalidade. A justificativa para o presente procedimento é o fato de as opções assintóticas serem, neste caso também, potencialmente conservativas, como mencionado anteriormente em várias oportunidades.

3.2.2.1 Teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama via *bootstrap* (THTNB)

A estatística D_{ig} foi computada na amostra original, usando a expressão (3.7), para os m pares nas comparações com o controle. De posse das estimativas $\bar{\mathbf{X}}_i$ de (3.1) da amostra original foi obtida a amostra modificada dada por

$$\mathbf{Y}_{ik} = \mathbf{X}_{ik} - \bar{\mathbf{X}}_i,$$

para $i = 1, 2, \dots, g$ e $k = 1, 2, \dots, r_i$.

Esta amostra foi combinada agrupando as $n = \sum_{i=1}^g r_i$ observações \mathbf{Y}_{ik} em uma amostra única p -dimensional de tamanho n , realizando, dessa forma, a imposição da hipótese nula de

igualdade de vetores de médias. Esta amostra combinada foi reamostrada com reposição, recriando a estrutura da amostra original de g tratamentos com r_i observações p -variadas do i -ésimo tratamento, com $i = 1, 2, \dots, g$. Esse processo foi repetido $B = 2.000$ vezes.

Em cada conjunto de dados gerado, as m estatísticas D_{ig} em (3.7) foram obtidas para todos os pares de tratamentos para as comparações com o controle, perfazendo $m = g - 1$ valores. Assim, a estatística final D_ℓ , na ℓ -ésima reamostragem *bootstrap*, $\ell = 1, 2, \dots, B$, ou na amostra original, quando $\ell = B + 1$, derivada da estatística D_{\max} , foi obtida por

$$D_\ell = \max \{D_{1g}, D_{2g}, \dots, D_{(g-2)g}, D_{(g-1)g}\}, \quad (3.9)$$

nas comparações com o controle.

Os valores D_ℓ s, obtidos nas B reamostragens *bootstrap*, foram armazenados juntamente com o valor D_ℓ obtido na amostra original, formando um vetor de dimensão $B + 1$, dado por $\mathbf{D} = [D_1, D_2, \dots, D_\ell, \dots, D_B, D_{B+1}]^\top$.

Em seguida, o valor- p foi computado por

$$\text{valor-}p = \frac{\sum_{\ell=1}^{B+1} I(D_\ell \geq D_{B+1})}{B + 1},$$

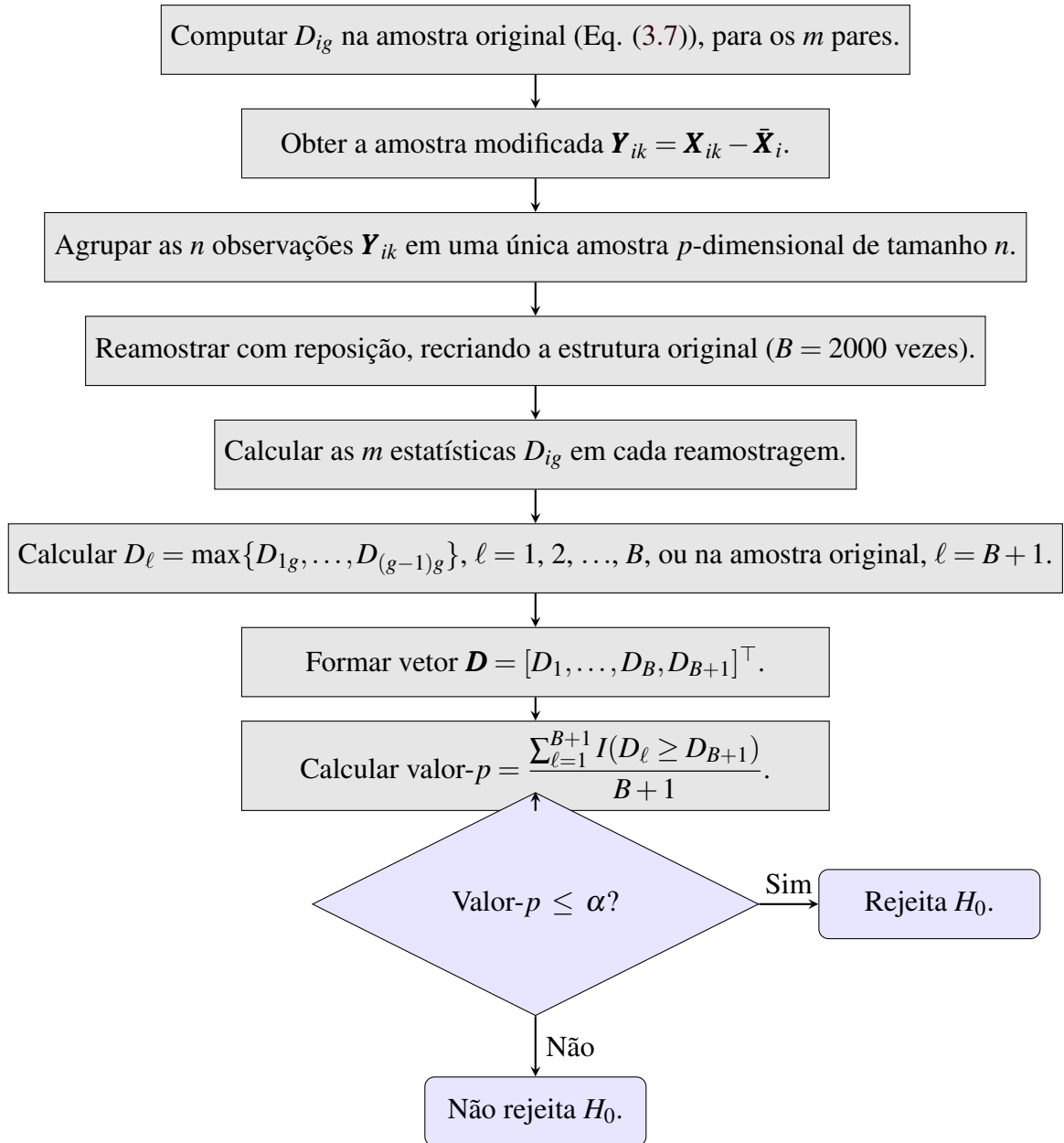
em que $I(D_\ell \geq D_{B+1})$ é a função indicadora que retorna 1 se $D_\ell \geq D_{B+1}$ e 0, caso contrário. A rejeição da hipótese nula se deu quando o valor- p obtido foi menor ou igual ao nível nominal de significância adotado.

A Figura 3.1 apresenta o fluxograma da metodologia do teste *bootstrap* proposto THTNB.

3.2.2.2 Teste de Ahmad via *bootstrap* (TAB)

Da mesma forma como descrito para a estatística D_{ig} , foi considerado o uso da estatística T_{ig} , usando a expressão (3.8). Assim, na amostra original, foram computadas as estatísticas T_{ig} em (3.8). Nas reamostragens *bootstrap*, as estatísticas foram computadas e o conjunto de interesse dado em (3.9) computado e o máximo obtido, com os valores de D_{ig} substituídos por T_{ig} . Um conjunto \mathbf{T} dos máximos foi obtido nas B reamostragens e na amostra original, $\mathbf{T} = [T_1,$

Figura 3.1 – Fluxograma da metodologia do teste *bootstrap* proposto THTNB.



Fonte: Da autora (2025).

$T_2, \dots, T_\ell, \dots, T_B, T_{B+1}]^\top$, e o valor- p foi computado por

$$\text{valor-}p = \frac{\sum_{\ell=1}^{B+1} I(T_\ell \geq T_{B+1})}{B+1},$$

em que $I(T_\ell \geq T_{B+1})$ é a função indicadora que retorna 1 se $T_\ell \geq T_{B+1}$ e 0, caso contrário. A rejeição da hipótese nula se deu quando o valor- p obtido foi menor ou igual ao nível nominal de significância adotado.

3.3 Avaliação do desempenho

Duas estratégias foram consideradas neste trabalho para avaliar o desempenho dos testes. A primeira teve o intuito de avaliar as taxas de erro tipo I por experimento e a segunda foi delineada para avaliar o poder dos testes e assim, conseqüentemente, também foi avaliada a robustez à violação de suposições. Em ambos os casos, foi usada a simulação Monte Carlo. Em cada simulação foram aplicados os testes multivariados de comparações múltiplas existentes e propostos em um nível nominal pré-estabelecido de significância α , verificando se a hipótese nula de igualdade dos vetores de médias será ou não rejeitada. Este processo, em cada caso, foi repetido $N = 2.000$ vezes, e a proporção de experimentos com pelo menos uma decisão incorreta, no primeiro caso, é a taxa de erro tipo I por experimento empírica e, no segundo caso, a proporção de decisões (rejeições) corretas é o poder empírico. Os níveis de significância nominal α adotados são $\alpha = 0,10, 0,05$ e $0,01$. O número de reamostragens *bootstrap* foi $B = 2.000$. Os valores da taxa de erro tipo I por experimento empírica foram comparados com o valor nominal por meio de um teste binomial exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010), considerando a proteção de Bonferroni, para a hipótese nula $H_0 : \alpha = 0,05$ (ou $0,01$ ou $0,10$).

Dentre as configurações utilizadas por Ahmad (2019) nas simulações, foram considerados: $g = 3$, com $(r_1, r_2, r_3) = (10, 15, 20), (50, 75, 100)$; $g = 6$, com $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) = (10, 10, 10, 20, 20, 20), (30, 40, 50, 60, 70, 80)$; vetores p -dimensionais independentes e identicamente distribuídos gerados a partir de distribuições multivariadas normal e uniforme(0,1); $p \in \{50, 300, 500\}$; duas estruturas de matrizes de covariâncias: simetria composta (SC) e autorregressiva de ordem 1 (AR(1)), definidas, respectivamente, como $\sigma^2[(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J}]$ e $Cov(X_i, X_j) = \kappa\rho^{|i-j|} \forall i, j$, em que \mathbf{I} é uma matriz identidade e $\mathbf{J} = \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ é uma matriz de uns. Foram adotados σ^2 e κ iguais a 1.

Para incluir a violação da suposição de homocedasticidade, foi considerada, no caso de $g = 3$, a seguinte configuração para as estruturas de $\Sigma_i, i = 1, 2, 3$: SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7), respectivamente, em que 0,5 e 0,7 são os valores de ρ . No caso de $g = 6$, foram utilizadas as mesmas combinações de estruturas para as matrizes de covariâncias usadas para $g = 3$, repetidas para os três primeiros e os próximos três tratamentos.

Além das configurações de Ahmad (2019), também foram considerados $p = 5$, para contemplar um valor de p pequeno, $p = 100$ e a distribuição t_3 multivariada e, para contemplar valores maiores de g , foram considerados $g = 60$ e $g = 100$, com $r_i = 3$ ou $6, \forall i = 1, 2, \dots$,

g e, para estes casos, $p \in \{5, 250\}$. Tanto para $g = 60$ quanto para $g = 100$, foi utilizada a mesma combinação das estruturas de matrizes de covariâncias de $g = 3$, que foram repetidas até completar Σ_{60} ou Σ_{100} .

A Tabela 3.1 apresenta os cenários de simulação para os casos de heterocedasticidade. Cada uma das configurações apresentadas na Tabela 3.1 foi simulada para as três distribuições multivariadas consideradas (normal, t_3 e uniforme(0,1)) e, cada um desses cenários, considerando essas distribuições, foi simulado para os três níveis de significância nominal adotados.

Tabela 3.1 – Cenários de simulação considerando heterocedasticidade, número de tratamentos (g), estrutura das matrizes de covariância (Σ_i), dimensão (p), tamanhos amostrais (r_i) e dimensionalidade (alta (AD) ou baixa (BD)).

g	Σ_i	p	BD: $p < n - g$	AD: $p \geq n - g$
			(r_1, \dots, r_g)	(r_1, \dots, r_g)
3	Configuração 1: (SC(0,5), AR(1, 0,5), AR (1, 0,7))	5	(10, 15, 20) (50, 75, 100)	– –
		50	(50, 75, 100)	(10, 15, 20)
		100	(50, 75, 100)	(10, 15, 20)
		300	– –	(10, 15, 20) (50, 75, 100)
		500	– –	(10, 15, 20) (50, 75, 100)
		6	Repete configuração 1 duas vezes.	5
6	Repete configuração 1 duas vezes.	50	(10, 10, 10, 20, 20, 20) (30, 40, 50, 60, 70, 80)	– –
		100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	(10, 10, 10, 20, 20, 20)
		300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	(10, 10, 10, 20, 20, 20)
		500	– –	(10, 10, 10, 20, 20, 20) (30, 40, 50, 60, 70, 80)
60	Repete configuração 1 vinte vezes.	5	$r_i = 3, \forall i = 1, 2, \dots, 60$	–
		250	$r_i = 6, \forall i = 1, 2, \dots, 60$	$r_i = 3, \forall i = 1, 2, \dots, 60$
100	Σ_i^*	5	$r_i = 3, \forall i = 1, 2, \dots, 100$	–
		250	$r_i = 6, \forall i = 1, 2, \dots, 100$	$r_i = 3, \forall i = 1, 2, \dots, 100$

Σ_i^* : Considera a sequência da configuração 1 e preenche até Σ_{100} .

Fonte: Da autora (2025).

Por fim, diferentemente de Ahmad (2019), também foram simulados e avaliados casos homocedásticos, com $g = 3, 6, 60, 100, p = 5, 250, (r_1, r_2, r_3) = (10, 10, 10), (10, 15, 20), (r_1,$

$r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) = (10, 10, 10, 10, 10, 10), (10, 10, 10, 20, 20, 20), r_i = 3$ ou $6, \forall i = 1, 2, \dots, 60$ ou 100 , e a estrutura das matrizes de covariâncias considerada foi $SC(0,5), \forall i = 1, 2, \dots, g$. Os cenários dos casos homocedásticos estão indicados na Tabela 3.2 e, assim como nos casos de heterocedasticidade, esses também foram simulados para as três distribuições multivariadas consideradas e, cada um desses cenários, considerando as distribuições, foi simulados para os três níveis de significância nominal adotados.

Tabela 3.2 – Cenários de simulação considerando homocedasticidade, estrutura das matrizes de covariâncias (Σ_i), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_i), dimensionalidade (alta (AD) ou baixa (BD)).

$\Sigma_i, \forall i = 1, 2, \dots, g: SC(0,5)$			
g	p	BD: $p < n - g$	AD: $p \geq n - g$
		(r_1, \dots, r_g)	(r_1, \dots, r_g)
3	5	(10, 10, 10)	–
		(10, 15, 20)	–
	250	–	(10, 10, 10)
		–	(10, 15, 20)
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	–
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	–
	250	–	(10, 10, 10, 10, 10, 10)
		–	(10, 10, 10, 20, 20, 20)
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, 2, \dots, 60$	–
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, 2, \dots, 60$	$r_i = 3, \forall i = 1, 2, \dots, 60$
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, 2, \dots, 100$	–
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, 2, \dots, 100$	$r_i = 3, \forall i = 1, 2, \dots, 100$

Fonte: Da autora (2025).

3.3.1 Geração das amostras aleatórias de variáveis multidimensionais

Para a normal multivariada, gerou-se, inicialmente, um vetor aleatório $\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_p]^T$ de p variáveis normais padrão independentes, ou seja, $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, em que $\mathbf{0}$ é um vetor p -dimensional de zeros e \mathbf{I} matriz identidade $p \times p$, utilizando a transformação de Box-Müller

(PRESS et al., 1992). Em seguida, este vetor foi transformado por

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}, \quad (3.10)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ é a matriz raiz quadrada da matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$ e $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor p -dimensional de médias populacional. Logo, $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, dado $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\mathbf{P}^\top$, em que $\boldsymbol{\Lambda}$ é a matriz diagonal dos autovalores, $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$ é a matriz diagonal contendo a raiz quadrada destes elementos e \mathbf{P} é a matriz de autovetores, cada um destes vetores dispostos em uma de suas colunas (GENTLE, 2003). Para gerar as amostras, como descrito acima, foi utilizada a função *mvrnorm()* da biblioteca *MASS* do programa R (R Core Team, 2024).

Para a t multivariada, o vetor aleatório $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, gerado na obtenção da normal multivariada, foi transformado por

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{\frac{U}{v}}},$$

em que U é a variável aleatória com distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade. Nesse caso, o vetor aleatório \mathbf{Y} possui distribuição t multivariada esférica com v graus de liberdade. Este vetor, por sua vez, foi transformado por

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}.$$

O vetor \mathbf{X} , assim obtido, possui distribuição t multivariada elíptica com v graus de liberdade e parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ (GENTLE, 2003). Foi utilizada a função *rmvt()*, da biblioteca *mvtnorm* do programa R (R Core Team, 2024), para gerar amostras como descrita acima.

Por fim, para obter a uniforme multivariada, foi considerado $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})$, obtido pela transformação $\mathbf{Y} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{1/2} \mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ (GENTLE, 2003), em que $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e a matriz de covariâncias $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ é estabelecida com estrutura AR ou SC pré-escolhida a partir da correlação $\tilde{\rho} = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$. Em seguida, foi feita a transformação

$$X_i = \Phi(Y_i),$$

em que $\Phi(\bullet)$ é a função de distribuição normal padrão. O vetor $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]^\top$, obtido assim, possui distribuição uniforme multivariada. A função seno foi aplicada à ρ , obtendo-se

$\tilde{\rho}$, na construção de $\tilde{\Sigma}$, para que, ao final, a matriz de covariâncias de \mathbf{X} , Σ , tivesse exatamente a correlação ρ dentro da estrutura pré-estabelecida (AR ou SC).

3.3.2 Avaliação das taxas de erro tipo I por experimento

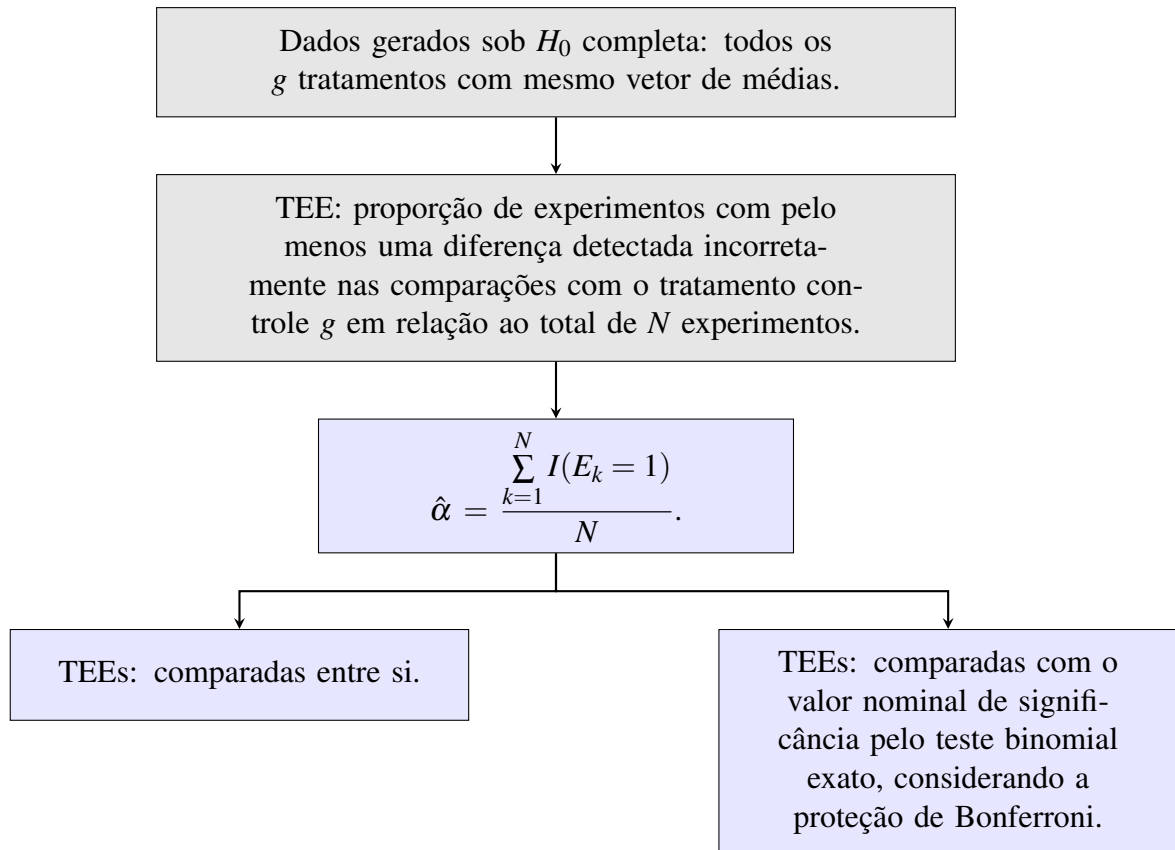
Na primeira etapa, de avaliação das taxas de erro tipo I por experimento, os dados foram gerados sob a hipótese nula completa, ou seja, com todos os g tratamentos tendo os mesmos vetores de médias paramétricas, de acordo com a distribuição, e o controle foi considerado sempre o tratamento número g . Logo, a rejeição da hipótese nula, de igualdade de dois vetores de médias, um sendo de um tratamento regular e o outro sendo do tratamento controle, foi considerada como um erro do tipo I. Nesse trabalho, a probabilidade considerada para medir o erro tipo I foi a por experimento. Essa probabilidade é estimada pela proporção de experimentos com pelo menos uma diferença detectada incorretamente nas comparações dos tratamentos regulares com o controle em relação ao total de N experimentos simulados. Assim, a taxa de erro tipo I por experimento real foi estimada por

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^N I(E_k = 1)}{N}, \quad (3.11)$$

em que E_k é uma variável binária que assume o valor 1 se ocorreu pelo menos um erro do tipo I no k -ésimo experimento ou 0, caso contrário, para $k = 1, 2, \dots, N$, e $I(E_k = 1)$ é a função indicadora que retorna 1 se a igualdade for verificada e 0, caso contrário.

As taxas de erro tipo I por experimento foram estimadas para cada teste proposto e para os assintóticos existentes considerados neste trabalho, sendo comparadas entre si e comparadas com o valor nominal de significância pelo teste binomial exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010), considerando a proteção de Bonferroni, para verificar se os testes são considerados liberais, conservativos ou exatos. A Figura 3.2 apresenta um fluxograma com a metodologia de avaliação das taxas de erro tipo I por experimento.

Figura 3.2 – Fluxograma da metodologia de avaliação das taxas de erro tipo I por experimento.



Fonte: Da autora (2025).

3.3.2.1 Teste binomial exato considerando proteção de Bonferroni

As hipóteses nula (H_0) e alternativa (H_1) consideradas para o teste binomial exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010) com $(100 - \alpha^*)\%$ confiança foram

$$\begin{aligned}
 H_0 : \alpha = \alpha_0 = 0,05 \text{ (ou } 0,01 \text{ ou } 0,10) \\
 \text{versus} \\
 H_1 : \alpha \neq \alpha_0 = 0,05 \text{ (ou } 0,01 \text{ ou } 0,10).
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Se a hipótese nula em (3.12) foi rejeitada e a taxa de erro tipo I por experimento empírica foi considerada significativamente inferior ao nível nominal de significância adotado, o teste foi considerado conservativo; se a hipótese nula em (3.12) foi rejeitada e a taxa de erro tipo I por experimento empírica foi considerada significativamente superior ao nível nominal de

significância adotado, o teste foi considerado liberal; e se a hipótese nula em (3.12) não foi rejeitada, o teste foi considerado exato.

Considerando y o número de rejeições de H_0 em N simulações Monte Carlo, para um nível de significância α_0 , a estatística do teste binomial exato foi obtida utilizando a relação entre a distribuição F e a distribuição binomial, com probabilidade de sucesso $p = \alpha_0$, e é dada (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010) por

$$F = \left(\frac{y+1}{N-y} \right) \left(\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0} \right),$$

sob H_0 . Essa estatística segue uma distribuição F com $v_1 = 2(N-y)$ e $v_2 = 2(y+1)$ graus de liberdade. Se $F_c \leq F_{v_1, v_2}(\alpha^*/2)$ ou $F_c > F_{v_1, v_2}(1 - \alpha^*/2)$, então rejeitou-se a hipótese nula em (3.12) ao nível de significância de 1% de probabilidade com proteção de Bonferroni, em que $F_{v_1, v_2}(\alpha^*/2)$ e $F_{v_1, v_2}(1 - \alpha^*/2)$ são os quantis 100 $\alpha^*/2\%$ e 100(1 - $\alpha^*/2$)%, respectivamente, da distribuição F com v_1 e v_2 graus de liberdade e $\alpha^* = 1\%/s$, sendo s o número de inferências simultâneas realizadas, que foi:

- a) $s = 48$, nos casos homocedásticos em baixa dimensionalidade (são 6 testes e, para cada um destes, são 8 combinações de g , p e $r_i s$, o que totaliza $6 \times 8 = 48$ inferências simultâneas neste caso);
- b) $s = 24$, nos casos homocedásticos em alta dimensionalidade;
- c) $s = 84$, nos casos heterocedásticos em baixa dimensionalidade;
- d) $s = 48$, nos casos heterocedásticos em alta dimensionalidade.

3.3.2.2 Definições sobre as classificações dos testes em relação ao seu tamanho

Aplicado o teste binomial exato considerando a proteção de Bonferroni, se a hipótese nula em (3.12) foi rejeitada e a taxa de erro tipo I por experimento empírica foi considerada significativamente superior (ou inferior) ao nível nominal de significância adotado, o teste foi considerado liberal (ou conservativo) e, então, foi adotado um procedimento para avaliá-lo como levemente ou expressivamente liberal (ou conservativo).

Para isso, foi obtido um intervalo de confiança, usando o nível nominal de confiança de 1% com proteção de Bonferroni, protegendo o nível global de significância nas s inferências simultâneas realizadas.

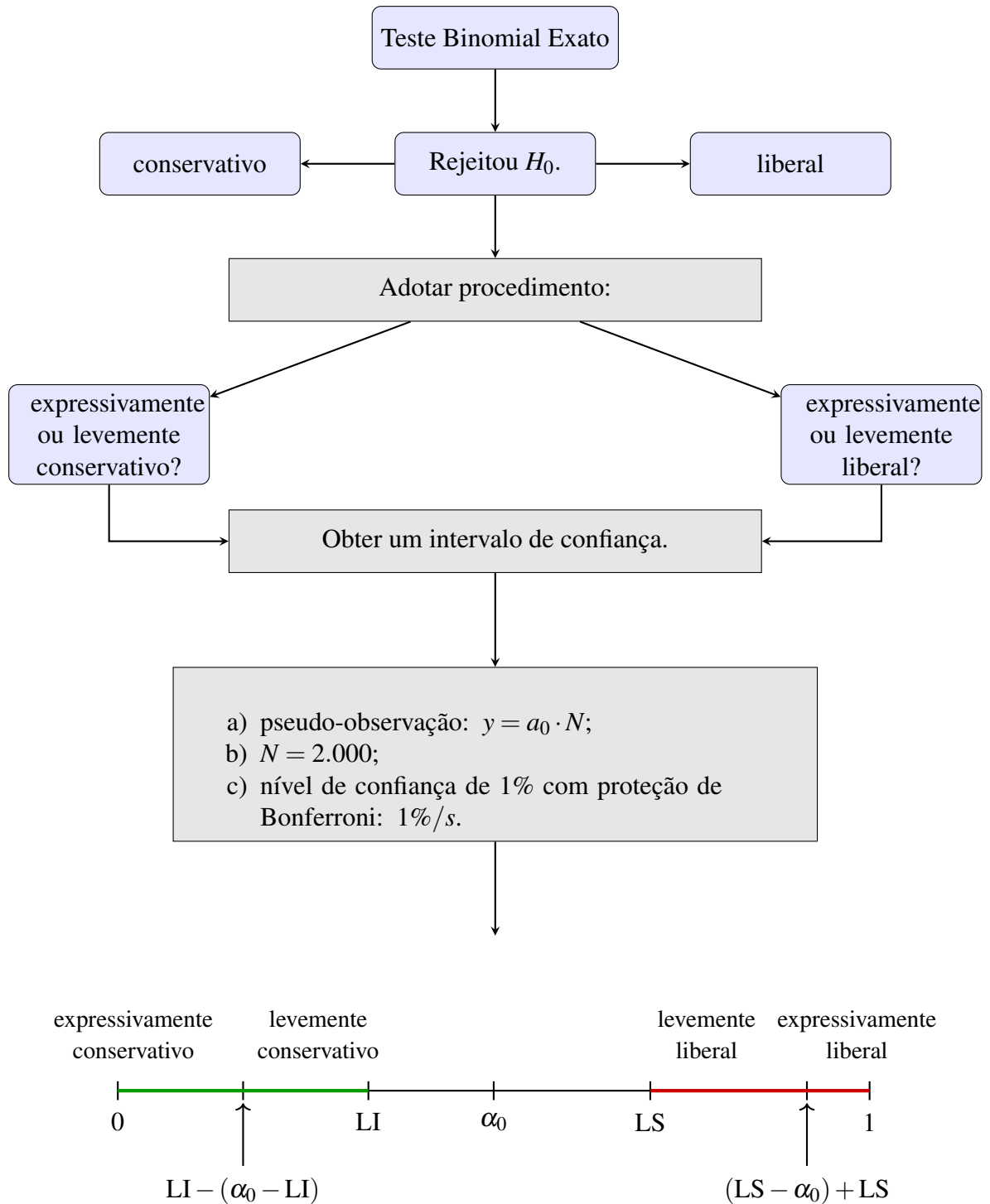
Como não existe aleatoriedade, foi obtida uma pseudo-observação, y , multiplicando o nível de significância α_0 (0,01, 0,05 ou 0,10) por N e arredondando para o inteiro mais próximo, em que $N = 2.000$. Uma vez obtido esse intervalo, ou seja, os limites inferior (LI) e superior (LS), que seriam os valores equivalentes em que, abaixo do LI e acima do LS, o teste binomial exato rejeitaria a hipótese nula (3.12), foi feito o seguinte procedimento:

- a) se a taxa de erro tipo I por experimento empírica foi maior que LS e menor que $(LS - \alpha_0) + LS$, o teste, que havia sido classificado como liberal pelo teste binomial exato, foi considerado levemente liberal; e se foi maior que $(LS - \alpha_0) + LS$, o teste foi considerado expressivamente liberal;
- b) de maneira análoga, se a taxa de erro tipo I por experimento empírica foi menor que LI e maior que $LI - (\alpha_0 - LI)$, o teste, que havia sido classificado como conservativo pelo teste binomial exato, foi considerado levemente conservativo; e se foi menor que $LI - (\alpha_0 - LI)$, o teste foi considerado expressivamente conservativo.

Justifica-se essa avaliação dos testes por acreditar que testes levemente liberais possam ser considerados como plausíveis para uso em pesquisas, caso estejam dentro do risco aceitável pelo pesquisador em um experimento, uma vez que, como consequência, espera-se um poder maior para estes testes. Valendo reforçar que o ideal é ter um teste exato ou conservativo, desde que, neste último caso, o teste tenha poder tão alto ou próximo aos dos testes que foram exatos no controle da TEE.

A Figura 3.3 apresenta um fluxograma com a metodologia definida para classificação dos testes em relação ao seu tamanho.

Figura 3.3 – Procedimento adotado para classificação dos testes em relação ao seu tamanho.



Fonte: Da autora (2025).

3.3.3 Avaliação do poder

Na segunda etapa, de avaliação do poder, sob a hipótese alternativa, as simulações foram realizadas seguindo os procedimentos descritos para a taxa de erro tipo I por experimento, exceto pelo fato de que, neste caso, $\boldsymbol{\mu}_g = \boldsymbol{\mu}_0$, para algum $\boldsymbol{\mu}_0$, sem perda de generalidade, e

$$\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}_g + \boldsymbol{\Delta}_{ig}, \quad i = 1, \dots, g-1,$$

em que $\boldsymbol{\Delta}_{ig}$ foi obtido de acordo com a distribuição multivariada simulada, sendo:

- a) $\boldsymbol{\Delta}_{ig} = \phi \sqrt{\frac{1}{r_i} \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_i) + \frac{1}{r_g} \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_g)}$, para distribuição normal multivariada;
- b) $\boldsymbol{\Delta}_{ig} = \phi \sqrt{\frac{1}{r_i} \text{diag} \left[\frac{v}{v-2} \boldsymbol{\Sigma}_i \right] + \frac{1}{r_g} \text{diag} \left[\frac{v}{v-2} \boldsymbol{\Sigma}_g \right]}$, para distribuição t_3 multivariada;
- c) $\boldsymbol{\Delta}_{ig} = \phi \sqrt{\frac{1}{r_i} \text{diag} \left[\frac{1}{12} \boldsymbol{\Sigma}_i \right] + \frac{1}{r_g} \text{diag} \left[\frac{1}{12} \boldsymbol{\Sigma}_g \right]}$, para distribuição uniforme (0, 1) multivariada,

$i = 1, \dots, g-1$, $\boldsymbol{\Sigma}_i$ a matriz de covariâncias do vetor de dados simulados do i -ésimo tratamento e $\phi = 1, 2, 4$ e 8 .

Ao definir $\boldsymbol{\mu}_g$ e $\boldsymbol{\mu}_i$ conforme descrito anteriormente, o objetivo foi criar tratamentos cujo vetor de médias do tratamento i , $i = 1, \dots, g-1$, fosse diferente do vetor de médias do tratamento controle g por uma diferença de ϕ erros padrões da diferença entre duas médias para cada componente univariado destes vetores.

O poder foi computado pelo método do poder médio, que é dado pela proporção média de rejeições corretas entre todas as hipóteses falsas (BRETZ; HOTHORN; WESTFALL, 2011), e foi estimado para cada teste proposto e para os assintóticos existentes considerados neste trabalho, sendo comparados entre si.

3.4 Nomenclatura para os testes avaliados

As nomenclaturas dos testes avaliados, existentes e propostos, estão organizadas na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Nomenclaturas dos testes avaliados.

Descrição	Nomenclatura	Número da expressão da estatística
Testes para o caso de baixa dimensionalidade		
Testes assintóticos		
Teste T^2 de Hotelling com aproximação de primeira ordem de Bonferroni	T2PO	(3.4) (Valor crítico: (3.5))
Teste T^2 de Hotelling com aproximação de segunda ordem de Bonferroni, proposto	T2SO	(3.4) (Valor crítico: (3.6))
Testes para o caso de alta dimensionalidade		
Testes assintóticos		
Teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama	THTN	(3.7)
Teste de Ahmad	TA	(3.8)
Testes <i>bootstrap</i> propostos		
Teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama via <i>bootstrap</i>	THTNB	(3.7)
Teste de Ahmad via <i>bootstrap</i>	TAB	(3.8)

Fonte: Da autora (2025).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados foram apresentados e discutidos utilizando-se tabelas e gráficos, buscando, assim, melhor visualização e compreensão. Foi realizada uma avaliação dos resultados obtidos nas simulações para os três níveis de significância adotados (0,01, 0,05 e 0,10), o que permitiu perceber comportamentos semelhantes quando se considera as mesmas configurações para cada α . Portanto, foram apresentados e discutidos os resultados das simulações considerando $\alpha = 0,05$. Eventualmente, quando o padrão não se manteve, também foram avaliados os resultados dos demais níveis de significância adotados, cujas tabelas de taxas de erro tipo I por experimento encontram-se nos Apêndices A e B, casos homocedásticos e heterocedásticos, respectivamente. As tabelas de poder, para os três níveis de significância adotados, estão nos Apêndices C e D, casos homocedásticos e heterocedásticos, respectivamente.

Considerando o teste binomial exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010) e a metodologia definida na subseção 3.3.2.2, que trata das definições sobre as classificações dos testes em relação ao seu tamanho, os resultados obtidos para as taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) foram sinalizados com símbolos para classificar os testes como levemente liberal (+), expressivamente liberal (++) , levemente conservativo (-), expressivamente conservativo (--) ou exato (sem símbolo).

Nos gráficos de poder, as linhas pontilhadas na horizontal indicam os limites inferior e superior, obtidos na classificação dos testes em relação ao tamanho, que seriam os valores equivalentes em que, abaixo do LI e acima do LS, o teste binomial exato, considerando a proteção de Bonferroni, rejeitaria a hipótese (3.12).

4.1 Casos homocedásticos

Para avaliar o desempenho dos testes nos casos homocedásticos, as taxas de erro tipo I por experimento dos testes propostos (T2SO, THTNB e TAB) foram comparadas com as dos testes existentes e considerados neste trabalho (T2PO, THTN, TA).

4.1.1 Taxas de erro tipo I por experimento

Na Tabela 4.1 são apresentados os resultados obtidos para TEE, sob homocedasticidade e baixa dimensionalidade, para as três distribuições multivariadas consideradas: normal, t_3 e

uniforme $(0, 1)$. Na situação considerada ideal, ou seja, normal multivariada, homocedasticidade e baixa dimensionalidade, apenas THTNB e TAB controlaram a TEE de maneira exata em todas as configurações. Os testes T2PO e T2SO também apresentaram bom desempenho, uma vez que foram levemente conservativos apenas em $g = 60, p = 250$ e $g = 100, p = 5$, e T2SO foi levemente liberal em $g = 3, p = 5$, caso desbalanceado. Nas demais configurações, T2PO e T2SO foram exatos. Nas simulações realizadas por Hyodo, Takahashi e Nishiyama (2014), T2PO também apresentou comportamento conservativo em algumas situações, embora os autores tenham considerado apenas $g = 3$ e 6 .

Os testes THTN e TA foram expressivamente liberais nos casos de $g = 60$ e 100 , TA também foi levemente liberal em $g = 6$ e, THTN, levemente conservativo em $g = 3, p = 5$, caso balanceado. Em particular, para $\alpha = 0,01$, Tabela 2 do Apêndice A, T2PO e T2SO passaram a controlar a TEE de maneira exata em todas as configurações, enquanto THTN e TA passaram a ser expressivamente liberais também em $g = 6$.

Tabela 4.1 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Continua)

Baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05, \Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
Normal multivariada								
3	5	(10, 10, 10)	0,0465	0,0705	0,0335 ⁻	0,0550	0,0425	0,0420
		(10, 15, 20)	0,0445	0,0715 ⁺	0,0375	0,0640	0,0535	0,0530
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0480	0,0545	0,0565	0,0790 ⁺	0,0550	0,0560
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0475	0,0525	0,0510	0,0765 ⁺	0,0510	0,0525
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0380	0,0380	0,1495 ⁺⁺	0,2030 ⁺⁺	0,0555	0,0470
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0335 ⁻	0,0335 ⁻	0,1355 ⁺⁺	0,1800 ⁺⁺	0,0480	0,0470
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0300 ⁻	0,0300 ⁻	0,1540 ⁺⁺	0,2070 ⁺⁺	0,0515	0,0385
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0370	0,0370	0,1700 ⁺⁺	0,2100 ⁺⁺	0,0485	0,0520
t_3 multivariada								
3	5	(10, 10, 10)	0,0420	0,0630	0,0345	0,0505	0,0460	0,0430
		(10, 15, 20)	0,0400	0,0605	0,0235 ⁻	0,0425	0,0465	0,0400
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0400	0,0470	0,0495	0,0480	0,0520	0,0460
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0590	0,0685	0,0485	0,0440	0,0470	0,0440
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,3610 ⁺⁺	0,3635 ⁺⁺	0,5245 ⁺⁺	0,1195 ⁺⁺	0,1355 ⁺⁺	0,0470
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,2855 ⁺⁺	0,2875 ⁺⁺	0,4785 ⁺⁺	0,0740 ⁺	0,0955 ⁺⁺	0,0420

Tabela 4.1 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,05$, $\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,5790 ⁺⁺	0,5810 ⁺⁺	0,6825 ⁺⁺	0,1325 ⁺⁺	0,1810 ⁺⁺	0,0390
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,8045 ⁺⁺	0,8065 ⁺⁺	0,6685 ⁺⁺	0,0825 ⁺	0,1155 ⁺⁺	0,0390
Uniforme (0, 1) multivariada								
3	5	(10, 10, 10)	0,0465	0,0675	0,0430	0,0575	0,0470	0,0475
		(10, 15, 20)	0,0480	0,0755 ⁺	0,0285 ⁻	0,0610	0,0440	0,0455
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0475	0,0555	0,0540	0,0830 ⁺	0,0550	0,0570
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0430	0,0510	0,0430	0,0730 ⁺	0,0460	0,0500
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0240 ⁻	0,0245 ⁻	0,1190 ⁺⁺	0,2695 ⁺⁺	0,0425	0,0905 ⁺
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0670	0,0685	0,1205 ⁺⁺	0,2035 ⁺⁺	0,0350	0,0480
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0215 ⁻	0,0220 ⁻	0,0960 ⁺⁺	0,2595 ⁺⁺	0,0240 ⁻	0,0715 ⁺
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,1515 ⁺⁺	0,1520 ⁺⁺	0,1515 ⁺⁺	0,2295 ⁺⁺	0,0430	0,0560

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Para a distribuição t_3 multivariada, pode-se observar (Tabela 4.1) que T2PO, T2SO e THTNB passaram a ser expressivamente liberais em $g = 60$ e 100 . Já THTN e TA mantiveram comportamentos semelhantes aos observados para a normal multivariada, e TAB continuou exato no controle da TEE em todas as configurações. Ainda na Tabela 4.1, considerando agora a distribuição uniforme (0, 1) multivariada, é possível notar que o comportamento dos testes foi semelhante ao observado para a normal multivariada, cabendo apenas destacar que, diferentemente, T2PO e T2SO foram expressivamente liberais em $g = 100$, $p = 250$.

Pode-se constatar então que, para as situações de homocedasticidade e baixa dimensionalidade simuladas, com número menor de tratamentos ($g = 3$ e 6), THTNB e TAB foram os únicos que controlaram a TEE de maneira exata em todas as configurações (todos os α s e todas as distribuições), e T2PO só não foi exato em duas situações para a distribuição t_3 multivariada (Tabelas 1 e 2 do Apêndice A), mas foi levemente conservativo, o que não é necessariamente um problema, caso apresente poder relativamente competitivo. Vale destacar que na situação considerada ideal e com número menor de tratamentos, T2PO foi exato, como era de se esperar.

Para número maior de tratamentos ($g = 60$ e 100), TAB foi o único que controlou a TEE de forma exata em todas as configurações, com exceções apenas no caso da distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, em que foi levemente liberal em $g = 60$, $p = 5$ para todos os α s (Tabelas 1 e 2 do Apêndice A, Tabela 4.1) e $g = 100$, $p = 5$ para $\alpha = 0,05$ (Tabela 4.1), valendo destacar que THTN e TA foram expressivamente liberais em praticamente todas as configurações e, em particular, no caso da normal multivariada, T2PO e T2SO oscilaram entre exato e conservativo, já na distribuição t_3 multivariada, estes foram expressivamente liberais em todas as configurações.

Na Tabela 4.2 são apresentadas as porcentagens das configurações simuladas em que os testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB foram classificados como exatos, conservativos ou liberais, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, todas as distribuições e todos os α s.

Tabela 4.2 – Porcentagens das configurações simuladas em que os testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB foram classificados como exatos, conservativos ou liberais, considerando todas as distribuições, todos os α s, sob homocedasticidade e baixa dimensionalidade.

	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$ e 6						
Exato	94,4%	83,3%	55,6%	72,2%	100,0%	100,0%
Conservativo	5,6%	0,0%	25,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Liberal	0,0%	16,7%	19,4%	27,8%	0,0%	0,0%
$g = 60$ e 100						
Exato	27,8%	27,8%	2,8%	5,6%	63,9%	88,9%
Conservativo	30,5%	30,5%	0,0%	0,0%	8,3%	0,0%
Liberal	41,7%	41,7%	97,2%	94,4%	27,8%	11,1%

Fonte: Da autora (2025).

Convém salientar que os resultados de elevadas TEEs, apresentadas na Tabela 4.1, ocorreram para uma distribuição com cauda mais pesada (t multivariada com $v = 3$ graus de liberdade) nas situações com mais tratamentos e número de repetições reduzido por tratamento.

Além disso, é pertinente destacar que, conforme esperado, o aumento no número de tratamentos e, conseqüentemente, no número de comparações, deveria tornar os testes assintóticos considerados neste trabalho, muito conservativos, uma vez que estes são todos baseados na desigualdade de Bonferroni (SEO; MANO; FUJIKOSHI, 1994; NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014). No entanto, no caso homocedástico, essa tendência não foi verificada para os testes

THTN e TA, os quais, ao contrário, apresentaram um comportamento expressivamente liberal quando o número de tratamentos foi elevado ($g = 60$ e 100). No caso específico da distribuição t_3 multivariada, todos os testes seguiram essa mesma tendência liberal, exceto TAB, que manteve-se exato no controle da TEE.

Para o caso de alta dimensionalidade, os resultados obtidos para TEE são apresentados na Tabela 4.3. Os testes T2PO e T2SO não se aplicam neste caso por dependerem da inversa da matriz de covariâncias amostral, como foi apresentado nas seções 2 e 3 e, por esta razão, não constam na Tabela 4.3.

Em geral, o comportamento dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, em alta dimensionalidade, foi semelhante ao verificado nos casos de baixa dimensionalidade, o que também foi constatado por Hyodo, Takahashi e Nishiyama (2014) para THTN, nas simulações que os autores realizaram. Uma alteração que vale a pena destacar é que TA passou de levemente e expressivamente liberal (Tabela 4.1) para exato na distribuição t_3 multivariada em $g = 60$ e 100 , $p = 250$ (Tabela 4.3), respectivamente. Vale destacar também que, para a normal multivariada (Tabela 4.3), THTNB e TAB continuaram exatos em todas as configurações, enquanto TA foi expressivamente liberal, em sua maioria. Em particular, para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada com $\alpha = 0,01$ (Tabela 4 do Apêndice A), assim como TA, THTN também foi expressivamente liberal em todas as situações simuladas.

Tabela 4.3 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$, $\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$					
g	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$					
Normal multivariada					
3	(10, 10, 10)	0,0450	0,0765 ⁺	0,0540	0,0590
	(10, 15, 20)	0,0335 ⁻	0,0670	0,0485	0,0505
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0580	0,0870 ⁺	0,0560	0,0560
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0565	0,0965 ⁺⁺	0,0540	0,0570
60	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1550 ⁺⁺	0,1610 ⁺⁺	0,0580	0,0565
100	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,2075 ⁺⁺	0,1915 ⁺⁺	0,0645	0,0580

Tabela 4.3 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)					
Alta dimensionalidade, $\alpha = 0,05$, $\Sigma_i : SC (0,5)$, $\forall i = 1, \dots, g$					
g	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$					
t_3 multivariada					
3	(10, 10, 10)	0,0245 ⁻	0,0400	0,0435	0,0345
	(10, 15, 20)	0,0300 ⁻	0,0530	0,0540	0,0505
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0530	0,0555	0,0560	0,0455
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0570	0,0460	0,0530	0,0415
60	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,5810 ⁺⁺	0,0490	0,1500 ⁺⁺	0,0305 ⁻
100	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,7585 ⁺⁺	0,0615	0,2040 ⁺⁺	0,0350
Uniforme (0, 1) multivariada					
3	(10, 10, 10)	0,0480	0,0770 ⁺	0,0570	0,0565
	(10, 15, 20)	0,0365	0,0765 ⁺	0,0525	0,0550
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0695	0,1045 ⁺⁺	0,0655	0,0690
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0605	0,1090 ⁺⁺	0,0590	0,0610
60	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1065 ⁺⁺	0,2055 ⁺⁺	0,0370	0,0735 ⁺
100	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1280 ⁺⁺	0,2180 ⁺⁺	0,0330 ⁻	0,0735 ⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Assim como em baixa dimensionalidade, THTNB e TAB foram os únicos que controlaram a TEE de maneira exata para todos os α s e todas as distribuições quando se considera número menor de tratamentos ($g = 3$ e 6), com apenas duas exceções para TAB, que controlou a TEE de maneira conservativa na distribuição t_3 multivariada, em $g = 3$, caso balanceado, $\alpha = 0,10$ e $0,01$ (Tabelas 3 e 4 do Apêndice A, respectivamente), o que, como já foi citado anteriormente em outra situação, não necessariamente reflete um problema para o teste, desde que apresente poder relativamente competitivo, o que é esperado, pois ele não foi expressivamente conservativo.

Para número maior de tratamentos ($g = 60$ e 100), ainda considerando todos os α s e todas as distribuições, TAB foi o que apresentou melhor desempenho, tendo oscilado entre exato, levemente conservativo e levemente liberal, cabendo destacar que, para a distribuição

normal multivariada, TAB, assim como THTNB, foi exato em todos os α s. Os demais testes, em sua maioria, foram expressivamente liberais. Vale a observação de que, assim como ocorreu em baixa dimensionalidade, os testes assintóticos baseados na desigualdade de Bonferroni, THTN e TA, não foram expressivamente conservativos, como era esperado quando se usa o critério de Bonferroni, devido ao aumento no número de tratamentos e, conseqüentemente, no número de comparações (SEO; MANO; FUJIKOSHI, 1994; NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014).

Na Tabela 4.4 são apresentadas as porcentagens das configurações simuladas em que os testes THTN, TA, THTNB e TAB foram classificados como exatos, conservativos ou liberais, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, todas as distribuições e todos os α s.

Tabela 4.4 – Porcentagens das configurações simuladas em que os testes THTN, TA, THTNB e TAB foram classificados como exatos, conservativos ou liberais, considerando todas as distribuições, todos os α s, sob homocedasticidade e alta dimensionalidade.

	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$ e 6				
Exato	44,4%	41,7%	100,0%	94,4%
Conservativo	25,0%	2,8%	0,0%	5,6%
Liberal	30,6%	55,5%	0,0%	0,0%
$g = 60$ e 100				
Exato	5,6%	22,2%	55,5%	55,5%
Conservativo	0,0%	5,6%	11,1%	16,7%
Liberal	94,4%	72,2%	33,4%	27,8%

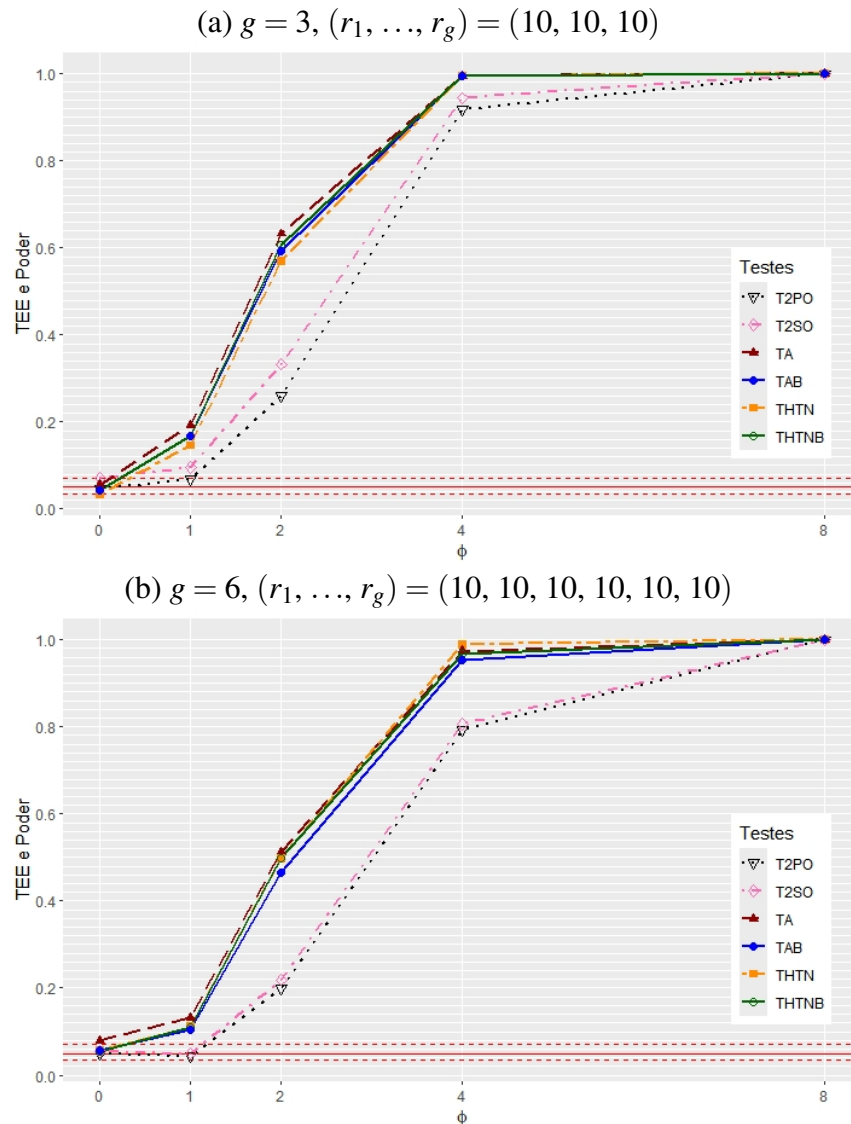
Fonte: Da autora (2025).

4.1.2 Poder

O poder foi avaliado, inicialmente, sob homocedasticidade e baixa dimensionalidade. Foi realizada uma análise dos resultados obtidos nos casos balanceados e desbalanceados, em $g = 3$ e 6 , o que permitiu perceber comportamentos semelhantes dos testes nas duas situações. Portanto, nesta subseção, foram apresentados e discutidos apenas os casos balanceados. Esta conclusão corrobora os achados de Takahashi et al. (2013) para o teste THTN. Em suas simulações, cujas configurações não são exatamente as mesmas consideradas neste estudo, os autores obtiveram valores de poder muito próximos para o teste THTN nos cenários balanceados e desbalanceados. Os gráficos dos casos desbalanceados estão no Apêndice E.

Na Figura 4.1 são apresentados os resultados obtidos considerando a distribuição normal multivariada, $g = 3$ (Figura 4.1(a)), $g = 6$ (Figura 4.1(b)), $p = 5$ e casos balanceados.

Figura 4.1 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.

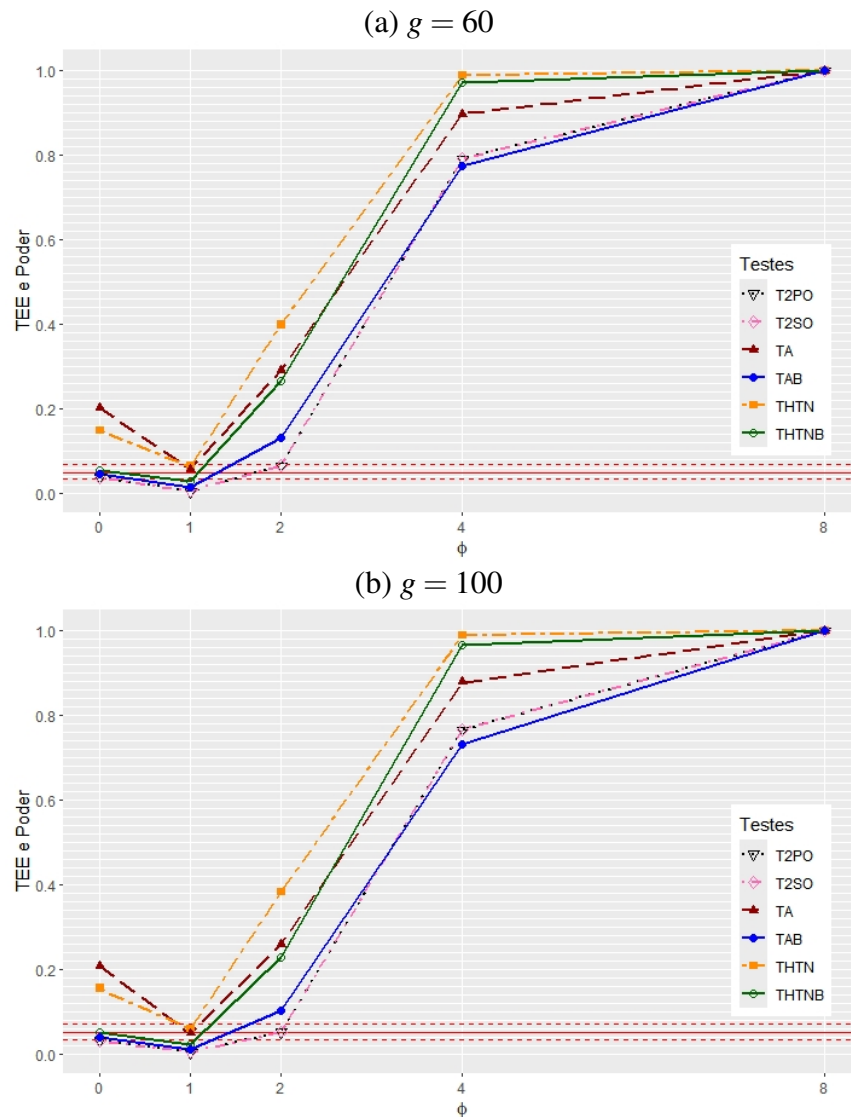


Fonte: Da autora (2025).

É possível notar que o comportamento dos testes foi semelhante em $g = 3$ e 6 . Os testes T2PO e T2SO foram os que apresentaram menor poder, ficando bem abaixo dos demais, exceto em $\phi = 8$. Os testes THTN, TA, THTNB e TAB apresentaram valores de poder muito próximos e, a partir de $\phi = 4$, estes se tornaram equivalentes assintoticamente, com valores próximos ou iguais a 1. Em $g = 3$ (Figura 4.1(a)), TA foi levemente superior aos demais em $\phi = 1$ e 2 .

Para valores maiores de g , assim como ocorreu em $g = 3$ e 6 , é possível observar, Figura 4.2, que o comportamento dos testes foi semelhante em $g = 60$ e 100 , com $p = 5$.

Figura 4.2 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 5$, tamanhos amostrais $r_i = 3$, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



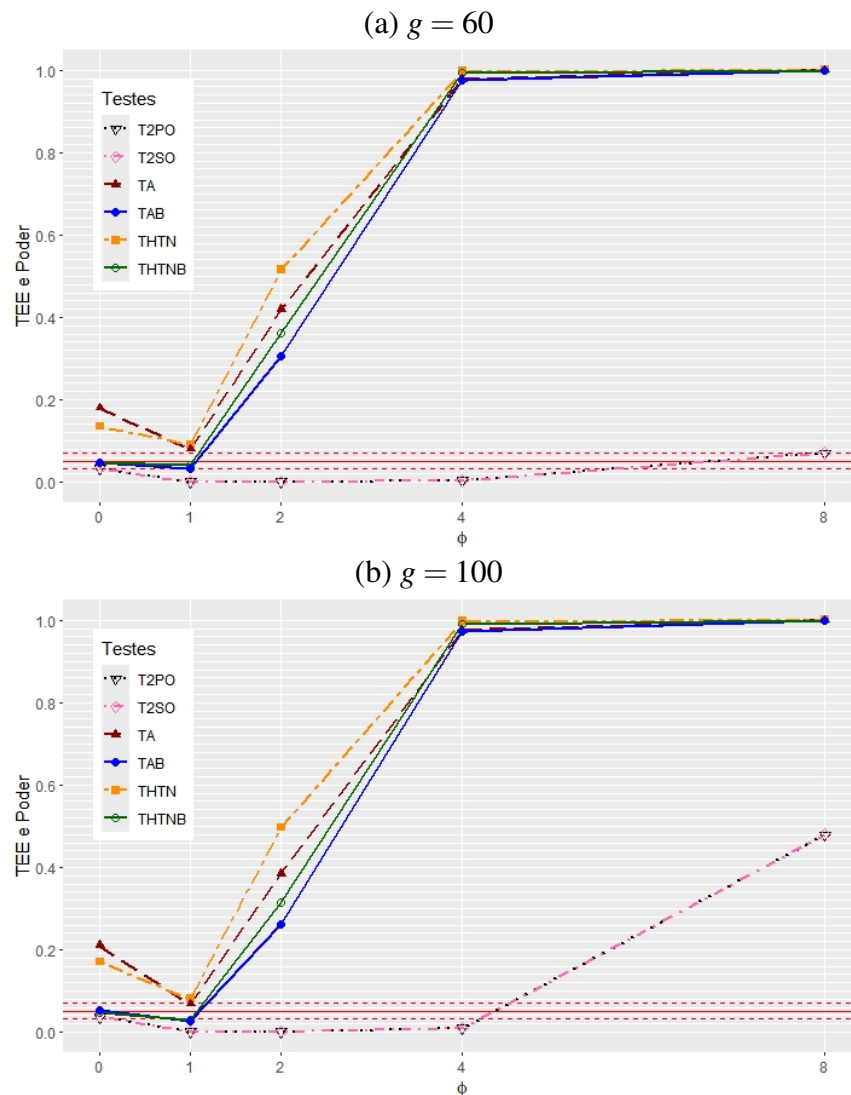
Fonte: Da autora (2025).

Dentre os que controlaram a TEE, THTNB foi o que apresentou maior poder, e os demais (T2PO, T2SO, TAB) apresentaram poderes próximos, com a observação de que, em $\phi = 2$, TAB foi superior a T2PO e T2SO e, em $\phi = 4$, ocorreu o contrário, ou seja, T2PO e T2SO superaram TAB.

Vale ressaltar que, mesmo THTN e TA tendo sido expressivamente liberais no controle da TEE, estes não apresentaram alto poder, como seria esperado, em especial quando comparados com THTNB, que foi exato e o mais poderoso.

Considerando agora $p = 250$ e os testes que controlaram a TEE, é possível notar, na Figura 4.3, que o aumento de p não impactou no desempenho de THTNB e TAB, que mantiveram-se os mais poderosos, sendo THTNB seguido de TAB e, a partir de $\phi = 4$, estes se tornaram equivalentes assintoticamente, com valores próximos ou iguais a 1. Já T2PO e T2SO apresentaram valores irrisórios de poder, tendo, então, desempenhos altamente influenciados pelo aumento de p .

Figura 4.3 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 6$, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



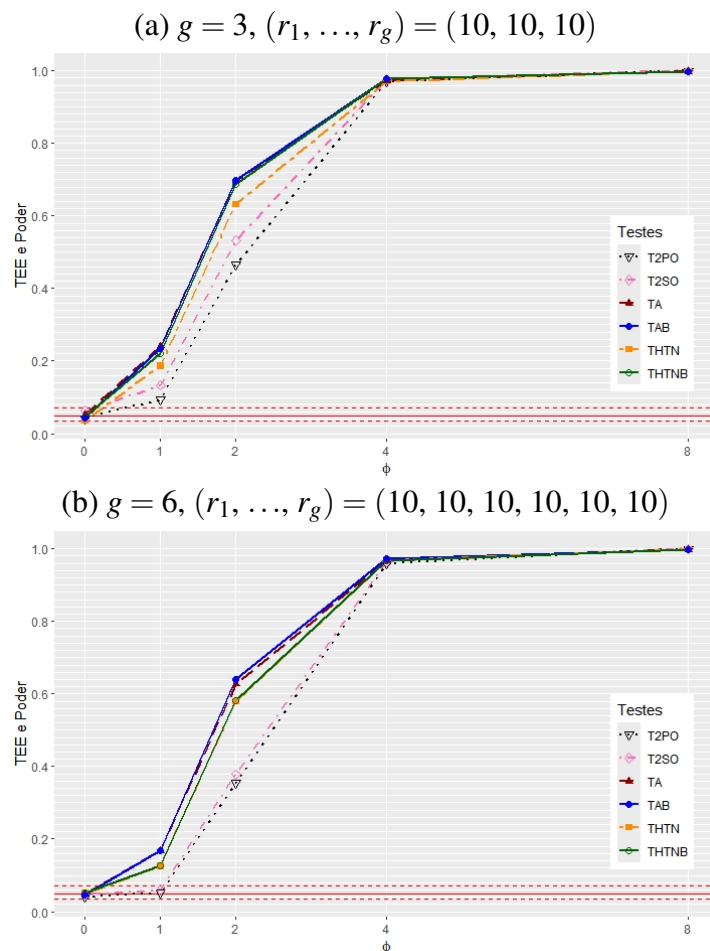
Fonte: Da autora (2025).

Os valores de poder obtidos neste estudo para T2PO e T2SO, no cenário homocedástico de baixa dimensionalidade e distribuição normal multivariada, são comparáveis aos relatados

por Santos e Ferreira (2012) para o teste de comparações múltiplas multivariadas usando *bootstrap*, baseado no teste T^2 de Hotelling, proposto pelo autores. A proximidade entre os resultados acontece quando as configurações analisadas nos dois estudos são semelhantes.

Na Figura 4.4 são apresentados os resultados para a distribuição t_3 multivariada, $g = 3$ e 6 , $p = 5$, casos balanceados. De maneira geral, pode-se verificar que o comportamento dos testes foi semelhante ao observado para a normal multivariada, ou seja, T2PO e T2SO continuaram sendo os menos poderosos e os demais tiveram valores de poder próximos. Vale destacar algumas diferenças: em $g = 3$, os testes TA, TAB e THTNB foram equivalentes assintoticamente independente do valor de ϕ , em $g = 6$, TA e TAB foram levemente superiores a THTN e THTNB e, tanto em $g = 3$ quanto em $g = 6$, todos os testes tornaram-se equivalentes assintoticamente a partir de $\phi = 4$.

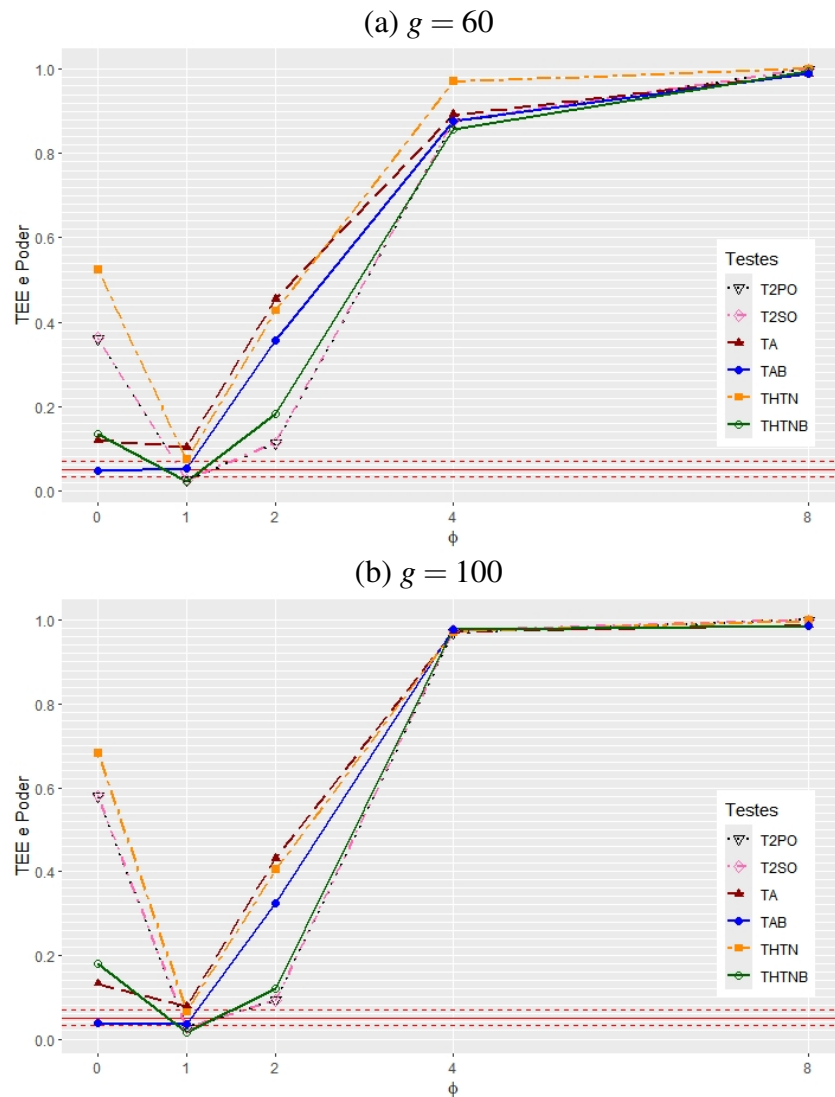
Figura 4.4 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Para a distribuição t_3 multivariada, com $g = 60$ e 100 e $p = 5$, os resultados são apresentados na Figura 4.5. Vale lembrar que, nesta configuração, diferentemente do observado para a normal multivariada, somente TAB controlou a TEE, os demais testes foram expressivamente liberais. É possível notar que, para $\phi = 1$, TAB tem poder próximo da TEE, mas este valor aumenta com o aumento de ϕ . Diferentemente do esperado, os testes expressivamente liberais não apresentaram altos valores de poder, principalmente quando comparados ao poder de TAB.

Figura 4.5 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 5$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

O comportamento dos testes em $g = 60$ e 100 com $p = 250$, Figura 3 do Apêndice E, foi praticamente o mesmo do caso em que $p = 5$, com a diferença de que T2PO e T2SO passaram a ter valores ínfimos de poder, mesmo tendo sido expressivamente liberais no controle da TEE.

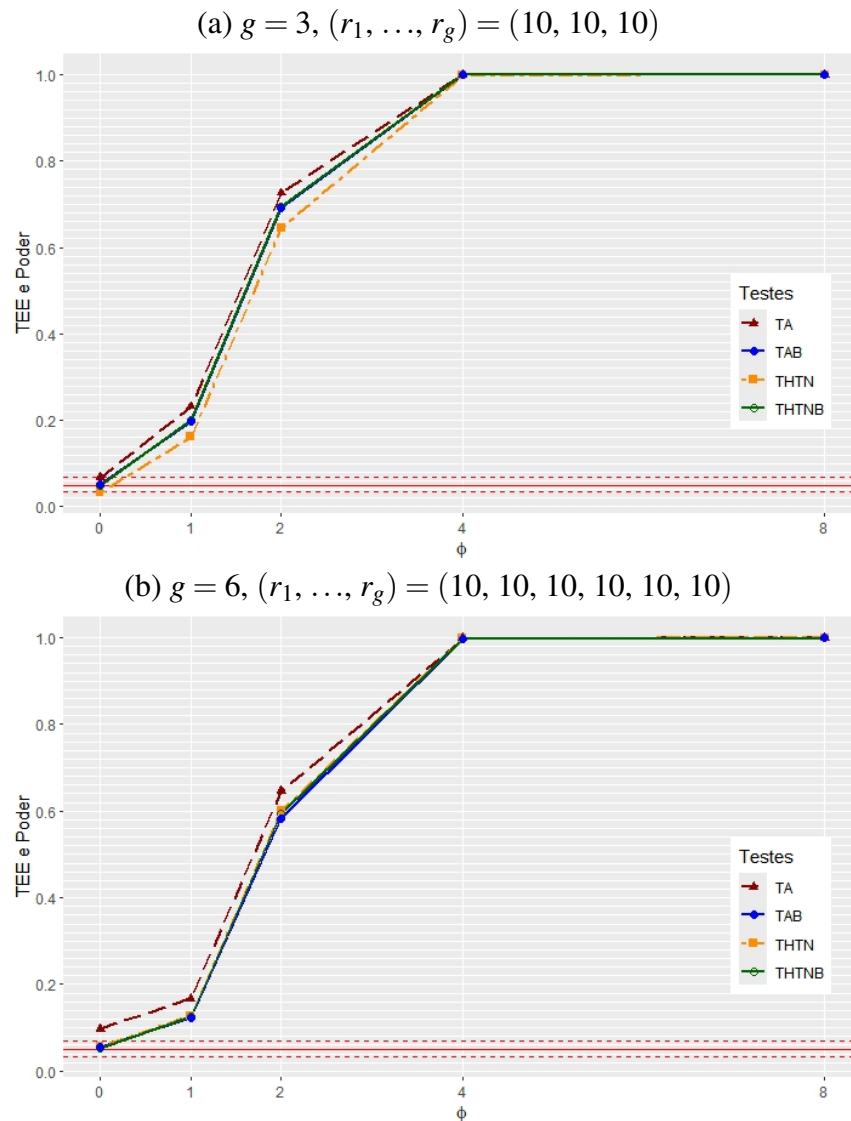
Para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, o desempenho dos testes foi muito próximo do observado para a normal multivariada, tanto em $g = 3$ e 6 , quanto em $g = 60$ e 100 e, por esse motivo, os gráficos de poder para a uniforme $(0, 1)$ multivariada estão no Apêndice E (Figuras 4, 5 e 6).

A partir de agora serão considerados os casos homocedásticos em alta dimensionalidade. Assim como ocorreu nas situações de baixa dimensionalidade, não houve diferença no comportamento dos testes nos casos balanceados e desbalanceados. Portanto, serão apresentados e discutidos apenas os casos balanceados. Os gráficos dos casos desbalanceados estão no Apêndice E. Vale recordar que, em alta dimensionalidade, o único valor de p considerado foi 250.

Iniciando pela distribuição normal multivariada, em $g = 3$, Figura 4.6(a), dentre os testes que controlaram a TEE, THTNB e TAB foram os mais poderosos, além de equivalentes assintoticamente independente do valor de ϕ , e THTN foi o menos poderoso. Já em $g = 6$, Figura 4.6(b), o poder de THTN se aproximou do de THTNB e TAB e, neste caso, os três testes apresentaram bom desempenho e foram equivalentes assintoticamente, também independente de ϕ .

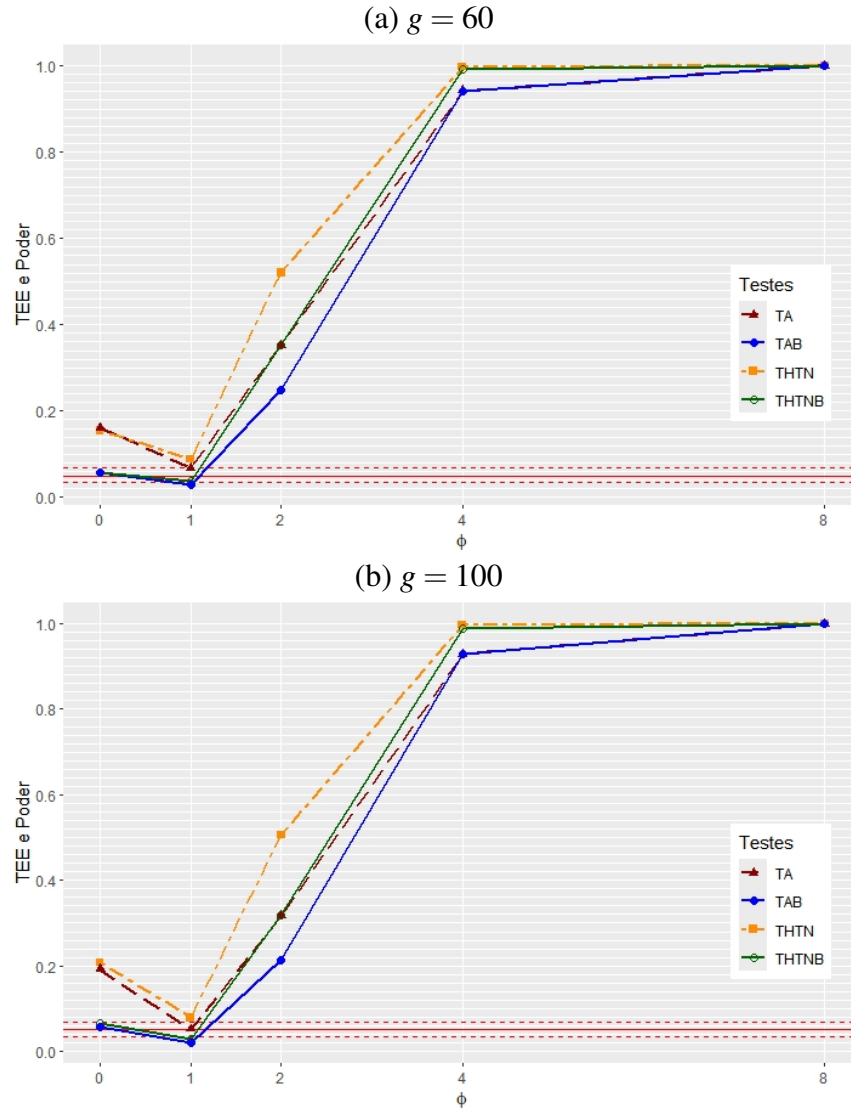
O desempenho dos testes em $g = 60$ foi muito próximo do desempenho em $g = 100$, como se pode ver na Figura 4.7. Em ambos os casos, dentre os que controlaram a TEE, THTNB foi o mais poderoso, seguido de TAB.

Figura 4.6 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

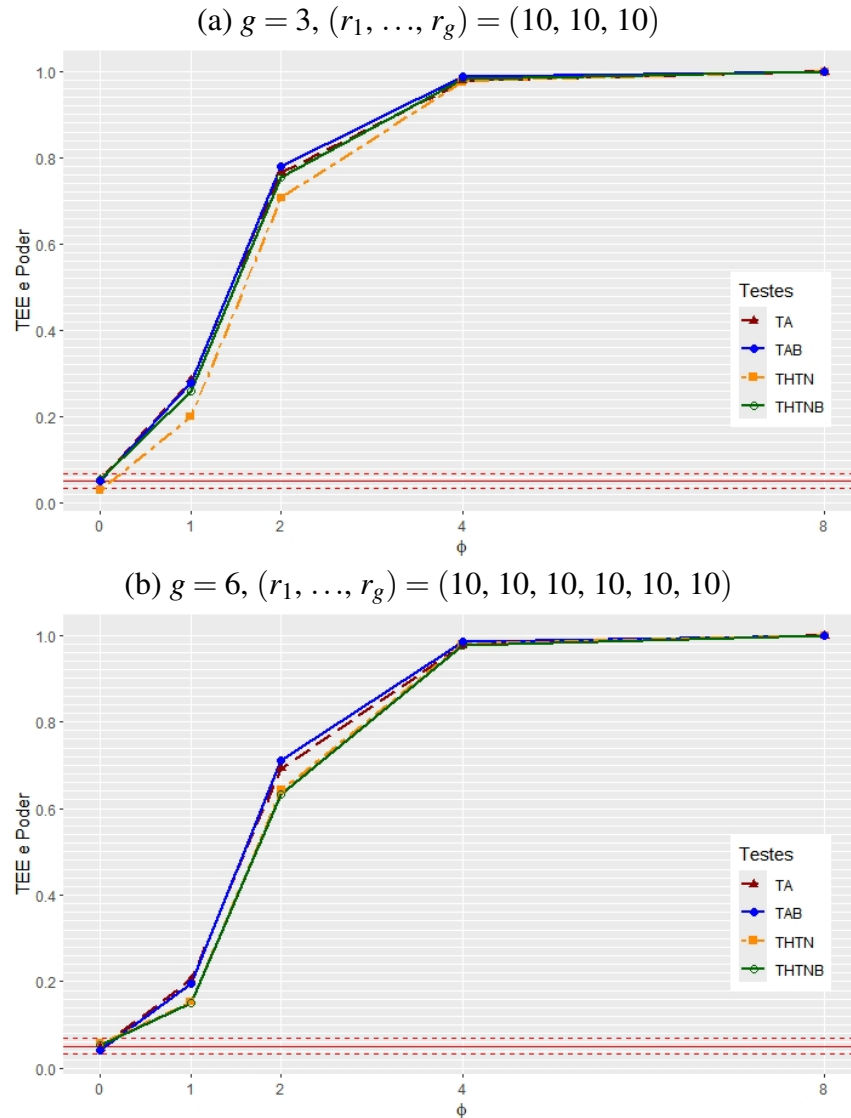
Figura 4.7 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Considerando agora a distribuição t_3 multivariada, pode-se verificar, na Figura 4.8(a), que, em $g = 3$, THTN foi o menos poderoso, como já era esperado, uma vez que foi conservativo no controle da TEE, e os demais tiveram valores de poder muito próximos e com bom desempenho. Em $g = 6$, Figura 4.8(b), TA e TAB foram os mais poderosos, seguidos de THTN e THTNB.

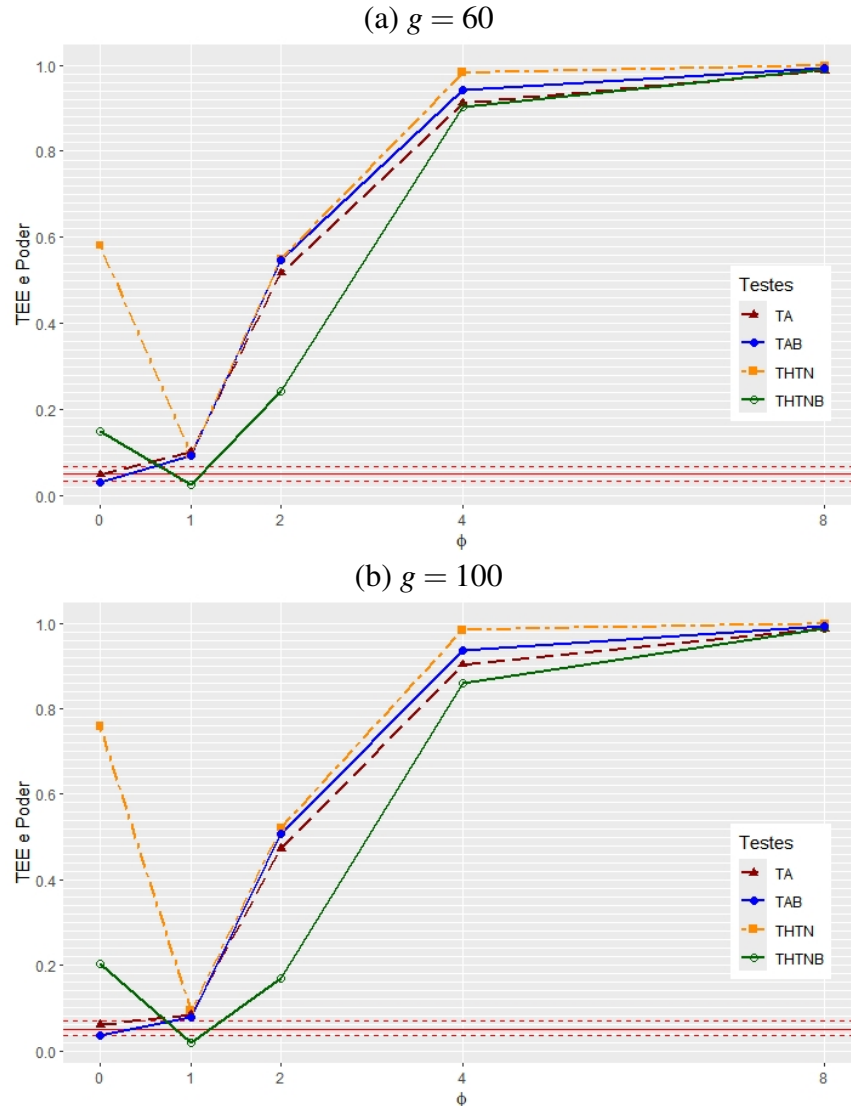
Figura 4.8 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Assim como ocorreu com a normal multivariada, o comportamento dos testes em $g = 60$ foi próximo do comportamento em $g = 100$, como se pode ver na Figura 4.9. Em ambos os casos, dentre os que controlaram a TEE, TAB foi levemente mais poderoso que TA, mesmo tendo sido levemente conservativo no controle da TEE, enquanto TA foi exato, ou seja, neste caso, era esperado que TA apresentasse poder maior, ainda que não expressivamente maior, que TAB, o que não ocorreu. Este fato reforça o bom desempenho de TAB nos casos homocedásticos.

Figura 4.9 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



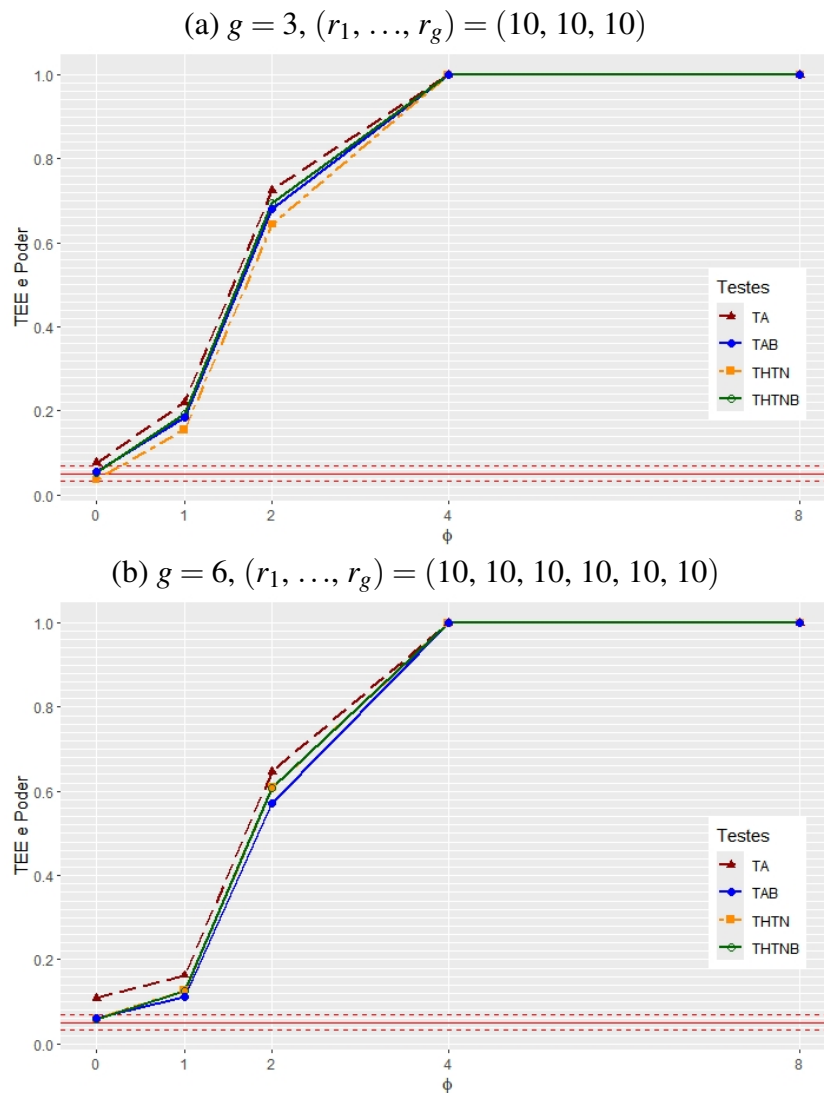
Fonte: Da autora (2025).

Cabe observar que THTN foi o teste que apresentou pior desempenho no caso da t_3 multivariada, o que pode ser decorrente do fato da distribuição em questão ser de cauda mais pesada e, também, devido ao alto valor de p considerado nas situações de alta dimensionalidade, uma vez que Takahashi et al. (2013) já haviam observado que o teste apresentou melhor desempenho quando a distribuição subjacente aos dados não é de cauda pesada, pois, nesta situação, THTN já havia mostrado ser sensível a grande valores de p , de acordo com os resultados obtidos pelos autores.

Para a uniforme $(0, 1)$ multivariada, o comportamento dos testes em $g = 3$ e 6 foi semelhante ao que se verificou para a normal multivariada, como se pode ver na Figura 4.10, com a observação de que, em $g = 6$, THTN e THTNB foram levemente superiores a TAB.

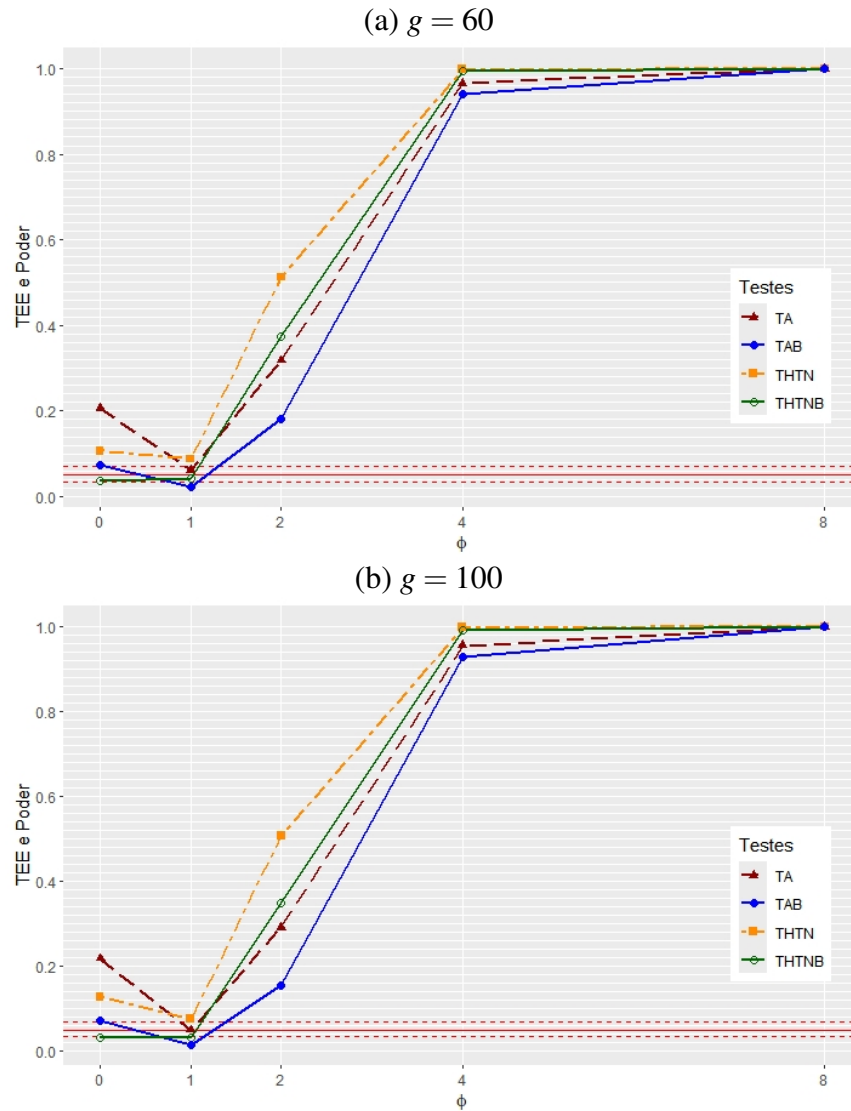
Por fim, para $g = 60$ e 100 , vale recordar que apenas THTNB controlou a TEE. Com exceção de quando $\phi = 1$, o teste apresentou bom desempenho de poder, como é possível verificar na Figura 4.11.

Figura 4.10 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos balanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Figura 4.11 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

4.2 Casos heterocedásticos

Para avaliar o desempenho dos testes nos casos heterocedásticos, as taxas de erro tipo I por experimento dos testes propostos (T2SO, THTNB e TAB) foram comparadas com as dos testes T2PO, THTN e TA. Para este último caso, além das simulações realizadas neste trabalho, foram considerados os resultados encontrados na literatura e apresentados na subseção 2.1.2.3.

4.2.1 Taxas de erro tipo I por experimento

Na Tabela 4.5 são apresentados os resultados obtidos para TEE, sob heterocedasticidade e baixa dimensionalidade, para a distribuição normal multivariada. Pode-se notar que, para $g = 3$ e 6 , T2PO foi o que apresentou melhor desempenho, pois foi o único exato em todas as configurações, seguido de TA, que foi levemente liberal apenas em $g = 6$, $p = 5$, primeiro sextuplo, e exato nas demais configurações, o que corrobora os resultados obtidos por Ahmad (2019) para TA, apresentados na Tabela 2.1, em que é possível notar o controle exato da taxa de erro tipo I deste teste nas comparações duas a duas (com o tratamento controle) realizadas pelo autor. O teste T2SO passou de liberal (expressivamente ou não) em $g = 3$ para exato em $g = 6$, exceto em $p = 100$, em que foi levemente liberal. Os demais testes apresentaram comportamentos semelhantes, THTN, THTNB e TAB passaram de exato para expressivamente liberal à medida em que p aumentou, e isso ocorreu tanto em $g = 3$ quanto em $g = 6$. Takahashi et al. (2013) já haviam observado, nas simulações realizadas pelos autores para casos homocedásticos, que THTN era sensível a grandes valores de p (em distribuições de causa pesada). É possível notar então que esse comportamento se manteve nos casos heterocedásticos apresentados na Tabela 4.5. Cabe a ressalva de que, em $\alpha = 0,10$, Tabela 5 do Apêndice B, THTN não manteve esse comportamento, sendo exato em $g = 3$ e, em $g = 6$, à medida que p aumentou, passou de levemente conservativo para exato.

Para $g = 60$ e 100 , é possível observar, na Tabela 4.5, que todos os testes foram expressivamente liberais em $g = 100$, $p = 250$ e, em particular, THTN teve este comportamento em todas as configurações. Para as demais, T2PO e T2SO foram os que apresentaram melhor desempenho, pois oscilaram entre exato e levemente conservativo, enquanto TA, THTNB e TAB foram expressivamente liberais na maioria das configurações, valendo destacar que, assim como T2PO e T2SO, THTNB e TAB foram exatos em $g = 100$, $p = 5$ e TA foi exato em $g = 60$, $p = 250$.

Em particular, para $\alpha = 0,01$, Tabela 6 do Apêndice B, T2SO passou a controlar a TEE de maneira exata em todas as configurações para $g = 3$, 6 e 60 (assim como ocorreu em homocedasticidade e baixa dimensionalidade), e em $g = 100$, foi levemente liberal.

Portanto, quando se considera a distribuição normal multivariada, o teste que apresentou melhor desempenho no controle da TEE foi T2PO, independentemente se g é pequeno (3 ou 6) ou grande (60 ou 100), seguido de TA, que também apresentou bom desempenho para valores

pequenos de g , corroborando os resultados de Ahmad (2019). Vale a observação de que, em $\alpha = 0,01$, também independentemente de g , os melhores testes foram T2PO e T2SO.

Tabela 4.5 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,05$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$							
5	(10, 15, 20)	0,0625	0,0885 ⁺	0,0385	0,0645	0,0515	0,0540
	(50, 75, 100)	0,0525	0,0740 ⁺	0,0240 ⁻	0,0470	0,0480	0,0445
50	(50, 75, 100)	0,0615	0,0930 ⁺⁺	0,0540	0,0510	0,0815 ⁺	0,0740 ⁺
100	(50, 75, 100)	0,0650	0,0860 ⁺	0,0730 ⁺	0,0500	0,0935 ⁺⁺	0,0875 ⁺
$g = 6$							
5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0395	0,0500	0,0545	0,0735 ⁺	0,0580	0,0605
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0415	0,0475	0,0440	0,0540	0,0495	0,0500
50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0355	0,0445	0,0580	0,0405	0,0660	0,0565
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0490	0,0590	0,0825 ⁺	0,0700	0,0955 ⁺⁺	0,0960 ⁺⁺
100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0665	0,0785 ⁺	0,0865 ⁺	0,0610	0,1005 ⁺⁺	0,1030 ⁺⁺
300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0410	0,0495	0,1130 ⁺⁺	0,0515	0,1300 ⁺⁺	0,1240 ⁺⁺
$g = 60$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0235 ⁻	0,0240 ⁻	0,1530 ⁺⁺	0,2110 ⁺⁺	0,0725 ⁺	0,0750 ⁺
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0385	0,0385	0,2785 ⁺⁺	0,0405	0,1095 ⁺⁺	0,1605 ⁺⁺
$g = 100$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0655	0,0660	0,1655 ⁺⁺	0,2025 ⁺⁺	0,0540	0,0540
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0990 ⁺⁺	0,0995 ⁺⁺	0,5560 ⁺⁺	0,1105 ⁺⁺	0,3080 ⁺⁺	0,4325 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Na Tabela 4.6 são apresentados os resultados obtidos para TEE, sob heterocedasticidade e baixa dimensionalidade, para a distribuição t_3 multivariada. Considerando $g = 3$ e 6, pode-se verificar que T2PO continuou controlando a TEE de maneira exata em todas as configurações, e T2SO apresentou desempenho melhor que na normal multivariada, tendo oscilado entre exato

e levemente liberal. O teste TA passou de exato para conservativo (expressivamente ou não) à medida que p aumentou. Por fim, os demais testes apresentaram comportamentos muito próximo do que se verificou para a normal multivariada.

Em $g = 60$ e 100 , T2PO, T2SO, THTN e THTNB foram expressivamente liberais em todas as configurações. Os testes TA e TAB apresentaram comportamentos opostos: em p pequeno (5), TA foi expressivamente liberal, enquanto TAB foi exato e, em grandes valores de p (250), TA foi levemente conservativo ($g = 60$) e exato ($g = 100$), enquanto TAB foi expressivamente liberal. As mesmas observações feitas para a normal multivariada em $\alpha = 0,10$ e $0,01$ também são válidas para a t_3 multivariada, conforme se pode verificar nas Tabelas 7 e 8 do Apêndice B, respectivamente.

Tabela 4.6 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Continua)

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,05$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$							
5	(10, 15, 20)	0,0460	0,0680	0,0240 ⁻	0,0365	0,0395	0,0355
	(50, 75, 100)	0,0455	0,0700	0,0240 ⁻	0,0405	0,0430	0,0440
50	(50, 75, 100)	0,0500	0,0745 ⁺	0,0480	0,0380	0,0785 ⁺	0,0640
100	(50, 75, 100)	0,0515	0,0745 ⁺	0,0510	0,0305 ⁻	0,0790 ⁺	0,0770 ⁺
$g = 6$							
5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0505	0,0585	0,0580	0,0530	0,0560	0,0545
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0410	0,0515	0,0475	0,0410	0,0540	0,0470
50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0510	0,0610	0,0765 ⁺	0,0135 ⁻⁻	0,0715 ⁺	0,0465
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0595	0,0695	0,0645	0,0275 ⁻	0,0720 ⁺	0,0630
100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0660	0,0765 ⁺	0,0850 ⁺	0,0285 ⁻	0,0845 ⁺	0,0865 ⁺
300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0500	0,0660	0,0875 ⁺	0,0230 ⁻	0,0885 ⁺	0,1055 ⁺⁺
$g = 60$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,3475 ⁺⁺	0,3475 ⁺⁺	0,5380 ⁺⁺	0,1150 ⁺⁺	0,1445 ⁺⁺	0,0545
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,2740 ⁺⁺	0,2770 ⁺⁺	0,8720 ⁺⁺	0,0095 ⁻⁻	0,1735 ⁺⁺	0,1310 ⁺⁺

Tabela 4.6 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,05$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 100$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,5920 ⁺⁺	0,5945 ⁺⁺	0,7150 ⁺⁺	0,1140 ⁺⁺	0,1740 ⁺⁺	0,0400
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,8245 ⁺⁺	0,8265 ⁺⁺	0,9560 ⁺⁺	0,0340	0,2780 ⁺⁺	0,3950 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Portanto, quando se considera a distribuição t_3 multivariada e valores pequenos de g (3 ou 6), o teste que apresentou melhor desempenho no controle da TEE foi T2PO (exato em todas as configurações), seguido de TA, que oscilou entre exato, levemente e expressivamente conservativo. Nos casos em que TA foi expressivamente conservativo, é esperado que apresente baixo poder. Para número maior de tratamentos ($g = 60$ ou 100) e para p pequeno, TAB teve melhor desempenho e, para grandes valores de p , foi TA.

Para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, os resultados obtidos para TEE, sob heterocedasticidade e baixa dimensionalidade, são apresentados na Tabela 4.7. É possível notar que, independente de g , o comportamento dos testes foi praticamente igual ao observado para a normal multivariada, e o mesmo ocorre em relação a $\alpha = 0,10$ e $0,01$ (Tabelas 9 e 10 do Apêndice B, respectivamente). Em particular, pode-se destacar o controle preciso da TEE pelo teste TA nas configurações simuladas por Ahmad (2019), corroborando os resultados obtidos pelo autor para taxa de erro tipo I em cada par de comparações com o tratamento controle.

Tabela 4.7 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,05$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$							
5	(10, 15, 20)	0,0485	0,0720 ⁺	0,0380	0,0640	0,0550	0,0520
	(50, 75, 100)	0,0545	0,0815 ⁺	0,0295 ⁻	0,0500	0,0445	0,0445
50	(50, 75, 100)	0,0660	0,0965 ⁺⁺	0,0685	0,0640	0,0905 ⁺	0,0860 ⁺
100	(50, 75, 100)	0,0665	0,0935 ⁺⁺	0,0800 ⁺	0,0600	0,1010 ⁺⁺	0,1010 ⁺⁺
$g = 6$							
5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0340	0,0410	0,0485	0,0840 ⁺	0,0555	0,0595
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0445	0,0515	0,0445	0,0595	0,0510	0,0500
50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0420	0,0505	0,0635	0,0505	0,0745 ⁺	0,0665
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0610	0,0690	0,0785 ⁺	0,0675	0,0925 ⁺	0,0980 ⁺⁺
100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0645	0,0745 ⁺	0,1110 ⁺⁺	0,0635	0,1225 ⁺⁺	0,1230 ⁺⁺
300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0550	0,0675	0,1235 ⁺⁺	0,0555	0,1355 ⁺⁺	0,1310 ⁺⁺
$g = 60$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0210 ⁻	0,0210 ⁻	0,1180 ⁺⁺	0,2395 ⁺⁺	0,0520	0,0920 ⁺⁺
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0360	0,0370	0,2350 ⁺⁺	0,0675	0,0915 ⁺	0,1805 ⁺⁺
$g = 100$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0340	0,0345	0,1220 ⁺⁺	0,2570 ⁺⁺	0,0485	0,0955 ⁺⁺
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,1185 ⁺⁺	0,1205 ⁺⁺	0,5425 ⁺⁺	0,1280 ⁺⁺	0,3235 ⁺⁺	0,4285 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

As situações analisadas até o momento são de baixa dimensionalidade e, nestas, quando se considera todas as distribuições e todos os α s, pode-se fazer as seguintes considerações em relação ao desempenho dos testes no controle da TEEE, para $g = 3$ e 6:

- a) T2PO foi o único teste que controlou a TEE de maneira exata em todas as configurações, com apenas uma exceção na uniforme (0, 1) multivariada, em que foi levemente

conservativo ($\alpha = 0,10$, Tabela 9 do Apêndice B), sendo, então, exato ou levemente conservativo em 100,0% das configurações;

- b) TA foi o segundo teste com melhor desempenho, sendo exato em 72,2% das configurações e não apresentando nenhuma situação expressivamente liberal;
- c) T2SO teve o terceiro melhor desempenho no controle da TEE, sendo exato em 68,9% das configurações e expressivamente liberal em 7,8%;
- d) TAB, THTNB e THTN tiveram desempenhos próximos, pois foram exatos em, respectivamente, 55,5%, 47,8% e 46,7% das configurações e, expressivamente liberais em 15,6%, 17,8% e 16,7%, respectivamente.

Ainda levando em conta todas as distribuições e todos os α s, mas agora $g = 60$ e 100 , pode-se fazer as seguintes considerações:

- a) de maneira geral, os testes não apresentaram bom desempenho no controle da TEE;
- b) THTN e TA não foram expressivamente conservativos, como era esperado ao considerar um número elevado de tratamentos e, conseqüentemente, maior número de comparações (por serem testes que usam a desigualdade de Bonferroni). Ao contrário, apresentaram um comportamento expressivamente liberal, de maneira geral;
- c) THTN foi expressivamente liberal em 94,4% das configurações, seguido de TA (58,3%), THTNB e TAB (50,0%), T2PO e T2SO (44,4%);
- d) os testes *bootstrap* propostos, THTNB e TAB, tiveram desempenho relativamente melhor do que o de seus respectivos concorrentes assintóticos, THTN e TA;
- e) em $g = 100$, $p = 250$, todos os testes foram expressivamente liberais, com exceção para TA, que foi exato ou expressivamente conservativo no caso da distribuição t_3 multivariada, e T2PO e T2SO, que foram levemente liberais em $\alpha = 0,01$ para as distribuições normal e uniforme $(0, 1)$ multivariadas;
- f) recomendar o uso de T2PO e T2SO quando se tem distribuições multivariadas normal e uniforme $(0, 1)$, pois, nestes casos, estes foram os únicos testes exatos ou conservativos (expressivamente ou não), exceto apenas em $g = 100$, $p = 250$.

Considerando, agora, os casos de alta dimensionalidade e a distribuição normal multivariada, na Tabela 4.8 são apresentados os resultados obtidos para TEE. É possível notar que, em $g = 100$, todos os testes foram expressivamente liberais. Nas demais configurações, o teste com melhor desempenho no controle da TEE foi TA, pois foi o único exato na maior parte das situações simuladas, tendo oscilado entre exato e levemente conservativo em $g = 3$ e 6 e,

em $g = 60$, foi expressivamente conservativo. Neste último caso, é esperado que TA apresente baixo poder.

Os resultados obtidos, de maneira geral, são semelhantes aos apresentados por Ahmad (2019) para TA no controle da taxa de erro tipo I nas comparações duas a duas (com o tratamento controle), uma vez que, como observado na Tabela 4.8, TA controlou a TEE. Vale ressaltar que o autor fez metade do número de simulações Monte Carlo feitas neste trabalho para avaliação dos testes e, portanto, esta pode ser uma justificativa para as pequenas diferenças de resultados encontradas entre os dois trabalhos.

Ainda considerando a Tabela 4.8, observa-se que os demais testes foram expressivamente liberais na maior parte das configurações. Em $g = 6$, o teste THTN apresentou aumento da TEE à medida em que se aumentou p , passando de exato em $p = 100$ para expressivamente liberal em $p = 500$, o que corrobora as conclusões de Takahashi et al. (2013) quanto à sensibilidade do teste para valores grandes de p , lembrando que o maior valor de p que os autores utilizaram foi 200 e que essa conclusão foi para distribuições de cauda pesada em situações homocedásticas. Em particular, para $\alpha = 0,01$ (Tabela 12 do Apêndice B), THTN foi expressivamente liberal em todas as configurações. Por fim, TAB foi exato somente em $g = 3$, $p = 50$, oscilando entre levemente (33,3%) e expressivamente liberal (58,3%) nas demais configurações.

Tabela 4.8 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,05$						
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	0,0840 ⁺	0,0540	0,0925 ⁺⁺	0,0695
	100	(10, 15, 20)	0,1060 ⁺⁺	0,0545	0,1165 ⁺⁺	0,0905 ⁺
	300	(10, 15, 20)	0,1165 ⁺⁺	0,0325 ⁻	0,1365 ⁺⁺	0,0965 ⁺⁺
		(50, 75, 100)	0,1010 ⁺⁺	0,0490	0,1315 ⁺⁺	0,1245 ⁺⁺
	500	(10, 15, 20)	0,1395 ⁺⁺	0,0460	0,1670 ⁺⁺	0,1155 ⁺⁺
		(50, 75, 100)	0,0900 ⁺	0,0320 ⁻	0,1170 ⁺⁺	0,1075 ⁺⁺

Tabela 4.8 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,05$						
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0690	0,0415	0,0835 ⁺	0,0710 ⁺
6	300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0780 ⁺	0,0440	0,0945 ⁺⁺	0,0850 ⁺
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0725 ⁺	0,0410	0,0870 ⁺	0,0765 ⁺
		(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,1350 ⁺⁺	0,0555	0,1490 ⁺⁺	0,1490 ⁺⁺
60	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,3040 ⁺⁺	0,0045 ⁻⁻	0,1200 ⁺⁺	0,1325 ⁺⁺
100	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,5770 ⁺⁺	0,0940 ⁺⁺	0,2900 ⁺⁺	0,3975 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Para o caso de alta dimensionalidade e distribuição t_3 multivariada, pode-se observar, na Tabela 4.9, que, de maneira geral, os testes apresentaram melhor desempenho no controle da TEE em relação à normal multivariada. Em $g = 3$ e 6, THTN, THTNB e TAB foram exatos na maioria das configurações, enquanto haviam sido expressivamente liberais na normal multivariada. Já o teste TA passou a ser expressivamente conservativo e, então, é esperado baixo poder. Para $g = 60$ e 100, THTN e THTNB continuaram sendo expressivamente liberais, TA passou a ser expressivamente conservativo em $g = 100$ e, TAB, exato em $g = 60$.

Analisando apenas a Tabela 4.9, nota-se que THTNB e TAB tiveram seus desempenhos afetados ao aumentar os tamanhos amostrais, passando de exatos para liberais (expressivamente ou não) com o aumento dos r_i s, e isso ocorreu tanto em $g = 3$ quanto em $g = 6$. Esse comportamento também foi observado para THTN em $g = 6, p = 500$.

Tabela 4.9 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,05$						
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	0,0410	0,0235 ⁻	0,0585	0,0415
	100	(10, 15, 20)	0,0380	0,0210 ⁻	0,0570	0,0425
	300	(10, 15, 20)	0,0455	0,0210 ⁻	0,0660	0,0495
		(50, 75, 100)	0,0500	0,0215 ⁻	0,0775 ⁺	0,0745 ⁺
	500	(10, 15, 20)	0,0430	0,0140 ⁻⁻	0,0610	0,0490
		(50, 75, 100)	0,0600	0,0260 ⁻	0,0920 ⁺⁺	0,0845 ⁺
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0560	0,0110 ⁻⁻	0,0505	0,0400
	300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0810 ⁺	0,0140 ⁻⁻	0,0775 ⁺	0,0460
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0675	0,0070 ⁻⁻	0,0630	0,0455
(30, 40, 50, 60, 70, 80)		0,0935 ⁺⁺	0,0260 ⁻	0,0925 ⁺⁺	0,0990 ⁺⁺	
60	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,9110 ⁺⁺	0,0030 ⁻⁻	0,3085 ⁺⁺	0,0580
100	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,9805 ⁺⁺	0,0190 ⁻	0,4755 ⁺⁺	0,2570 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Em particular, para $\alpha = 0,10$, Tabela 13 do Apêndice B, THTN não se mostrou sensível a grandes valores de p em $g = 3$ e 6 , sendo levemente conservativo em apenas uma configuração e exato nas demais. Este comportamento não se manteve em $\alpha = 0,01$, Tabela 14 do Apêndice B, em que THTN voltou a ser expressivamente liberal na maior parte das configurações.

Na Tabela 4.10 são apresentados os resultados obtidos para a uniforme $(0, 1)$ multivariada. Pode-se notar que o comportamento dos testes no controle da TEE foi praticamente o mesmo observado para a normal multivariada (Tabela 4.8), novamente com o bom desempenho de TA, como também ocorreu em Ahmad (2019), em que o teste controlou a taxa de erro tipo I de maneira exata tanto para normal multivariada quanto para a uniforme $(0, 1)$ multivariada.

Tabela 4.10 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,05$						
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	0,0775 ⁺	0,0560	0,0860 ⁺	0,0700
	100	(10, 15, 20)	0,0990 ⁺⁺	0,0400	0,1085 ⁺⁺	0,0800 ⁺
	300	(10, 15, 20)	0,1145 ⁺⁺	0,0430	0,1350 ⁺⁺	0,0930 ⁺⁺
		(50, 75, 100)	0,0905 ⁺	0,0405	0,1155 ⁺⁺	0,1105 ⁺⁺
	500	(10, 15, 20)	0,1260 ⁺⁺	0,0510	0,1470 ⁺⁺	0,1040 ⁺⁺
		(50, 75, 100)	0,0985 ⁺⁺	0,0395	0,1310 ⁺⁺	0,1235 ⁺⁺
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0720 ⁺	0,0490	0,0860 ⁺	0,0780 ⁺
	300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0765 ⁺	0,0430	0,0925 ⁺⁺	0,0795 ⁺
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0855 ⁺	0,0530	0,1070 ⁺⁺	0,0900 ⁺
(30, 40, 50, 60, 70, 80)		0,1140 ⁺⁺	0,0480	0,1300 ⁺⁺	0,1250 ⁺⁺	
60	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,2290 ⁺⁺	0,0045 ⁻⁻	0,0765 ⁺	0,1685 ⁺⁺
100	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,5210 ⁺⁺	0,1300 ⁺⁺	0,2645 ⁺⁺	0,4105 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Para as situações de alta dimensionalidade, considerando todas as distribuições e todos os α s, na Tabela 4.11 são apresentadas as porcentagens das configurações simuladas em que os testes foram classificados como exatos, conservativos ou liberais. Pode-se notar que, para $g = 3$ e 6, TA foi o teste com melhor desempenho, seguido de TAB, THTN e, por fim, THTNB. Para $g = 60$ e 100, o teste TA permaneceu com melhor desempenho, enquanto os demais apresentaram resultados ruins e próximos, valendo destacar que THTN foi expressivamente liberal em 100% das situações.

Tabela 4.11 – Porcentagens das configurações simuladas em que os testes foram classificados como exatos, conservativos ou liberais, considerando todas as distribuições, todos os α s, sob heterocedasticidade e alta dimensionalidade.

	TA	TAB	THTN	THTNB
$g = 3$ e 6				
Liberal	11,1%	63,3%	65,6%	77,8%
Exato	44,4%	31,1%	33,3%	22,2%
Conservativo	44,5%	5,6%	1,1%	0,0%
$g = 60$ e 100				
Liberal	27,8%	83,3%	100,0%	94,5%
Exato	11,1%	16,7%	0,0%	5,5%
Conservativo	61,1%	0,0%	0,0%	0,0%

Fonte: Da autora (2025).

Vale a observação de que, na situação específica da distribuição t_3 multivariada, $g = 3$ e 6 com $\alpha = 0,10$, THTN foi exato no controle da TEE em todas as configurações, exceto em uma (ver Tabela 13), enquanto TA foi expressivamente conservativo e, então, é esperado baixo poder para este teste nesta situação.

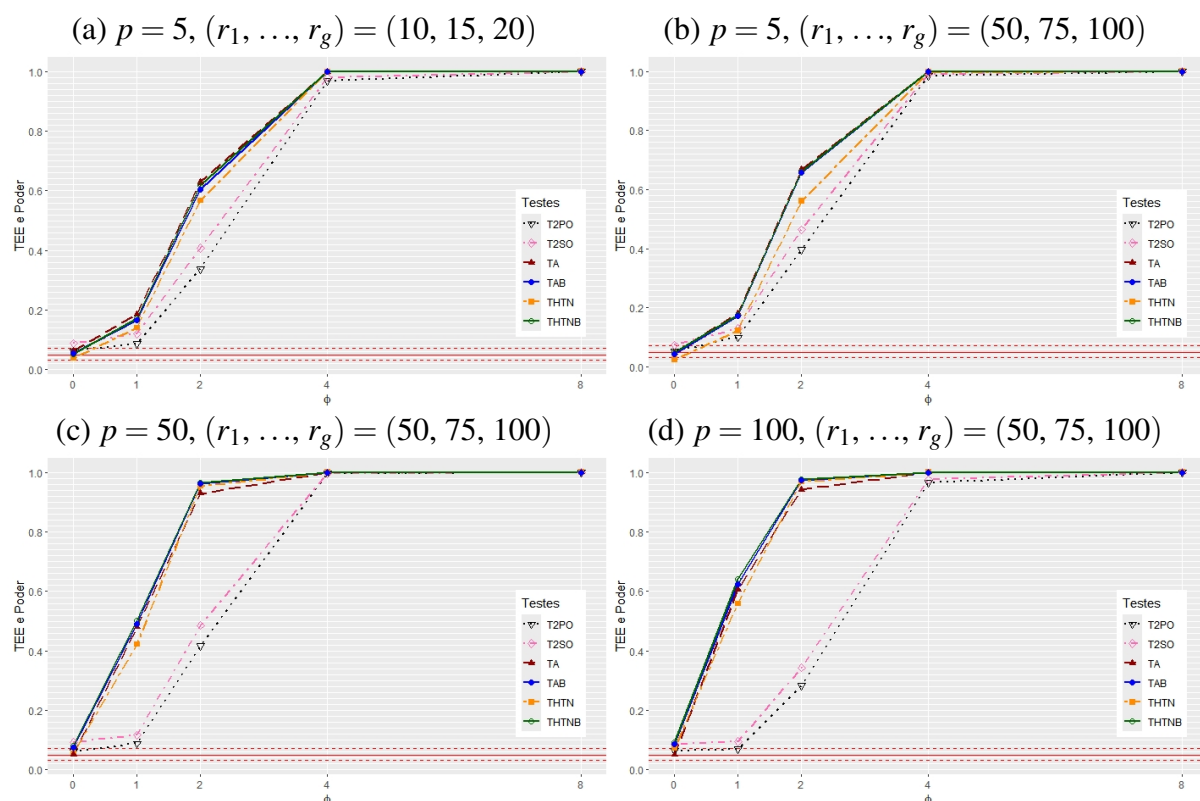
Por fim, lembrando que um número elevado de tratamentos e , conseqüentemente, o aumento no número de comparações, potencialmente deveria tornar os testes assintóticos baseados na desigualdade de Bonferroni expressivamente conservativos (SEO; MANO; FUJIKOSHI, 1994; NISHIYAMA; HYODO; SEO, 2014), cabe destacar que esse efeito não foi observado. A exceção ocorreu apenas para o teste TA, em cenários de heterocedasticidade e alta dimensionalidade, com $g = 60$.

4.2.2 Poder

Inicialmente o poder será avaliado sob baixa dimensionalidade. Na Figura 4.12 são apresentados os resultados obtidos considerando a distribuição normal multivariada, $g = 3$, $p = 5$ com tamanhos amostrais (10, 15, 20) (Figura 4.12(a)) e (50, 75, 100) (Figura 4.12(b)), $p = 50$ (Figura 4.12(c)) e $p = 100$ (Figura 4.12(d)), sendo que, para estes dois últimos casos, os tamanhos amostrais são (50, 75, 100). Na Figura 4.13 estão os resultados da normal multivariada para $g = 6$, $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, $p = 5$ (Figura 4.13(a)), $p = 50$ (Figura 4.13(b)), $p = 100$ (Figura 4.13(c)) e $p = 300$ (Figura 4.13(d)). No caso de $g = 6$ com $p = 5$ e 50, observou-se que os valores de poder obtidos para os diferentes tamanhos amostrais con-

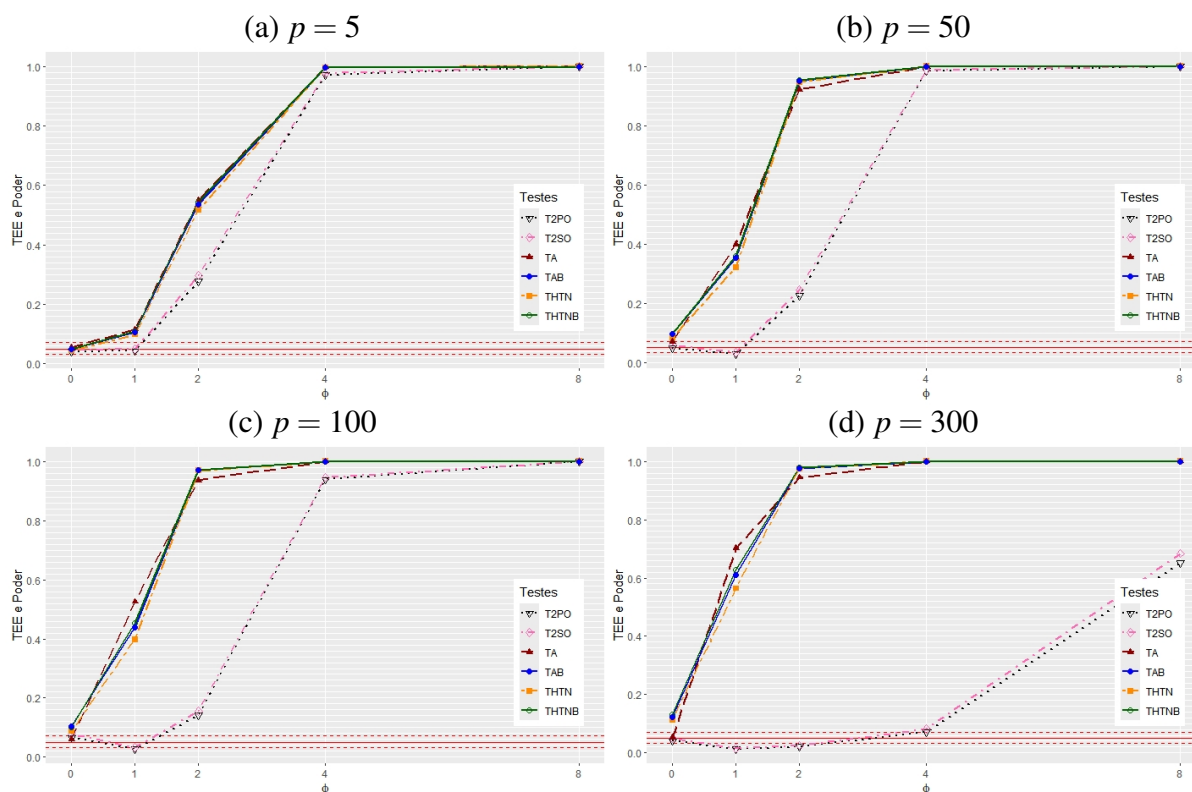
siderados foram similares e, por esse motivo, serão apresentados apenas os resultados para $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$.

Figura 4.12 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100\}$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Figura 4.13 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100, 300\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Considerando os resultados apresentados nas Figuras 4.12 e 4.13, pode-se notar que:

- o comportamento dos testes em $g = 3$, $p = 5$, para os dois diferentes tamanhos amostrais considerados, foi semelhante, com a observação de que, quando $(r_1, \dots, r_g) = (50, 75, 100)$ (Figura 4.12(b)), THTN foi menos poderoso do que em $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$ (Figura 4.12(a)), como era de se esperar, uma vez que, nesta primeira situação, o teste foi conservativo no controle da TEE e, na segunda, foi exato;
- em $g = 3$ com $p = 5$ e tamanhos amostrais $(50, 75, 100)$ (Figura 4.12(b)) e $p = 50$ (Figura 4.12(c)), todos os testes se tornaram equivalentes assintoticamente a partir de $\phi = 4$, com valores de poder próximos ou iguais a 1, e o mesmo pode ser observado em $g = 6$ com $p = 50$ (Figura 4.13(b)). Nas demais configurações das Figuras 4.12 e 4.13, somente T2PO e T2SO não mantiveram esse mesmo comportamento;
- apesar de T2SO ter sido expressivamente liberal no controle da TEE em $g = 3$, este não apresentou alto poder, como era esperado. O teste foi, inclusive, o segundo com

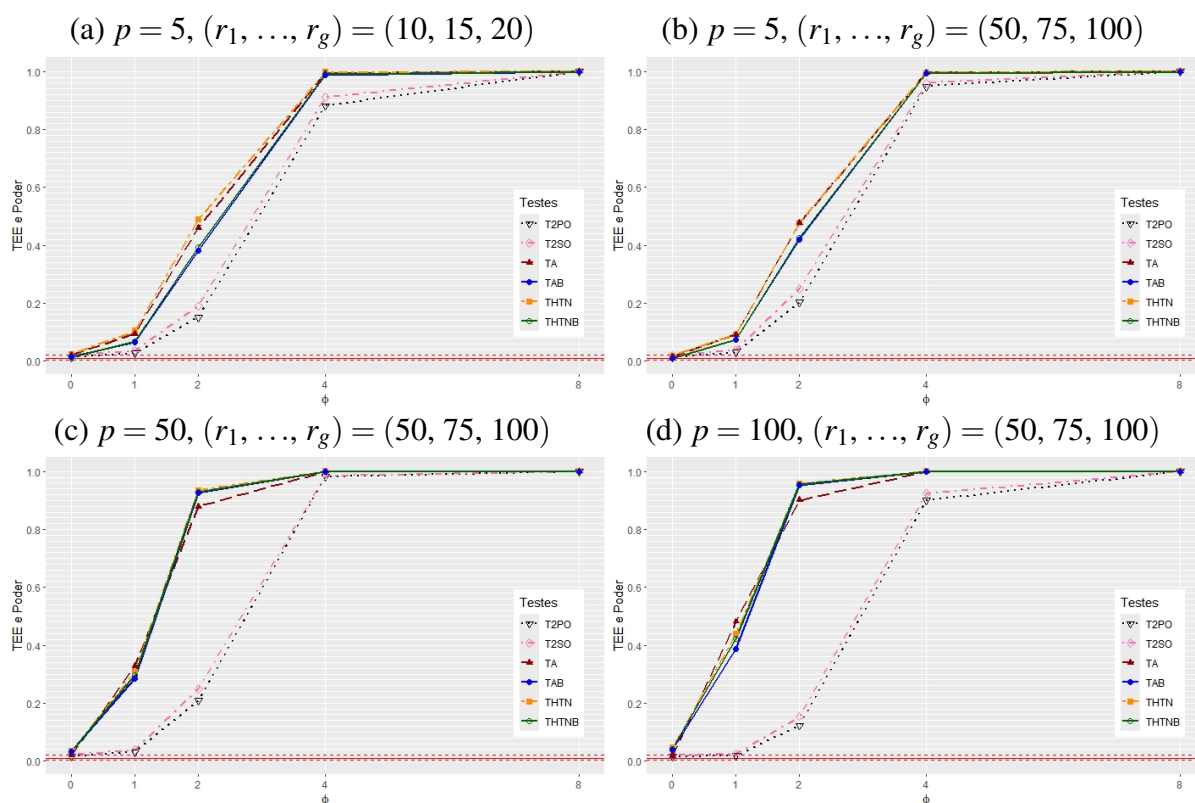
menor poder, e manteve esse comportamento em $g = 6$, em que havia sido exato em praticamente todas as configurações;

- d) embora T2PO tenha apresentado o melhor controle da TEE, este foi o teste com menores valores de poder;
- e) o desempenho de T2PO e T2SO foi influenciado negativamente pelo aumento da dimensão. À medida que p aumentou, o poder destes dois testes foi diminuindo. Isso fica evidente ao se comparar seus desempenhos, por exemplo, em $g = 6$, $p = 5$ (Figura 4.13(a)) e $p = 300$ (Figura 4.13(d));
- f) os desempenhos dos testes assintóticos THTN e TA, bem como de suas respectivas versões *bootstrap*, THTNB e TAB, propostas neste estudo, revelaram-se bastante semelhantes. Dentre eles, o teste THTN demonstrou ser o menos poderoso, mesmo em cenários nos quais apresentou um comportamento expressivamente liberal, como exemplificado no caso de $g = 6$ com $p = 300$ (Figura 4.13(d)). Uma possível explicação para esse desempenho de THTN reside na sua sensibilidade a valores elevados de p , fenômeno já observado por Takahashi et al. (2013) em distribuições com caudas mais pesadas;
- g) TA, que manteve-se exato no controle da TEE mesmo com o aumento de p , apresentou bom desempenho de poder, tendo seus valores crescendo à medida que a dimensão crescia. Pode-se observar, por exemplo, o poder de TA em $\phi = 1$ nos diferentes valores de p . Cabe destacar que, em particular, Ahmad (2019) observou esse mesmo comportamento para TA, nas simulações que o autor realizou.

Como T2PO e TA foram os testes com melhor controle da TEE (Tabela 4.5) e, considerando agora a avaliação do poder (Figuras 4.12 e 4.13), pode-se dizer que, nos casos de $g = 3$ e 6 e distribuição normal multivariada, TA foi o melhor teste.

Vale recordar que, em particular, para $\alpha = 0,01$ (Tabela 6, Apêndice B), T2SO passou a controlar a TEE de maneira exata em todas as configurações, exceto em $g = 100$, em que foi levemente liberal. Para avaliar o desempenho deste teste quanto ao poder, nesta situação, na Figura 4.14 são apresentados os resultados obtidos para $g = 3$. Apesar de T2SO ter alcançado melhor desempenho no controle da TEE, é possível observar, ao comparar as Figuras 4.12 e 4.14, que este não obteve maior eficácia de poder, mantendo-se, inclusive, como um dos testes menos poderosos.

Figura 4.14 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100\}$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,01$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.

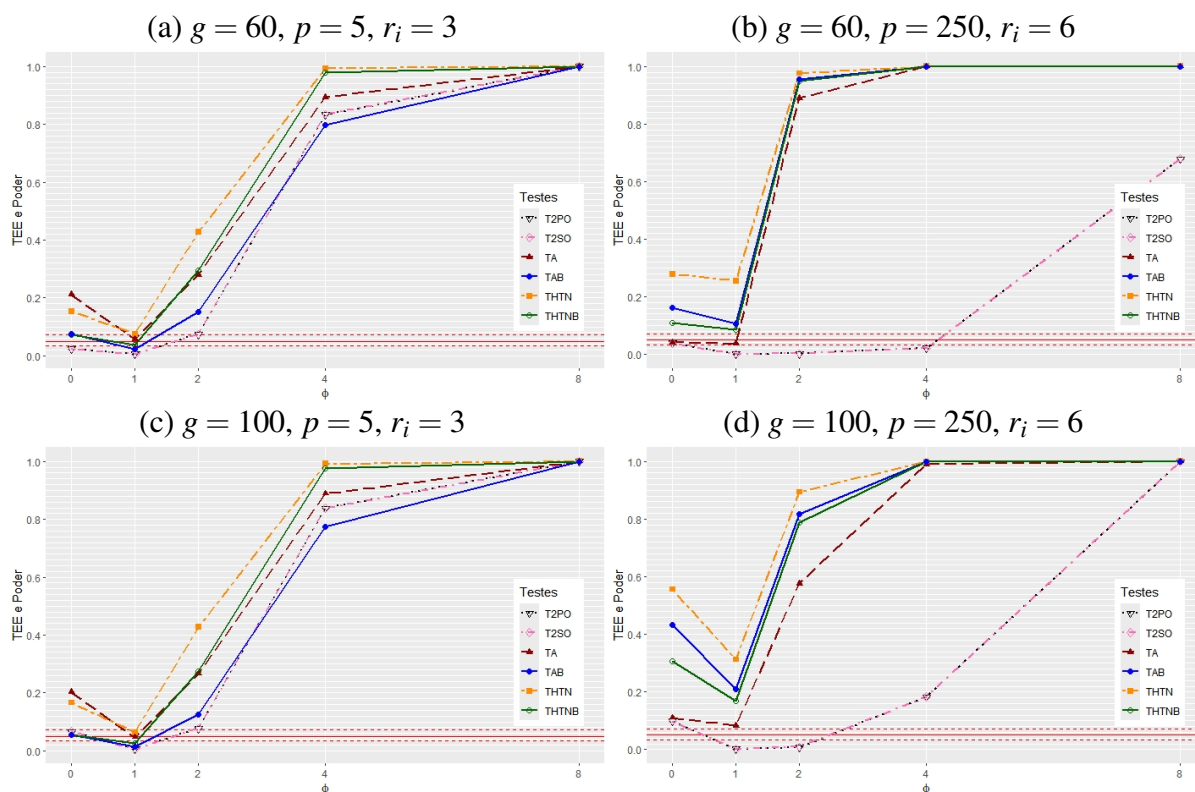


Fonte: Da autora (2025).

Ainda considerando a distribuição normal multivariada, os resultados obtidos para poder nos casos de $g = 60$ e 100 são apresentados na Figura 4.15. Recordando que todos os testes foram expressivamente liberais no controle da TEE em $g = 100, p = 250$ (Tabela 4.5), pode-se concluir que estes não são satisfatórios nesta configuração. Uma alternativa seria baixar o nível nominal de significância para um nível menor, no caso, para $\alpha = 0,01$, para que a TEE fique próxima dos 5%, e utilizar o teste TA (ver Tabela 6, apêndice B).

Em particular, THTN foi expressivamente liberal em todas as configurações ($g = 60$ e 100), portanto, este não é um teste que atende bem a estes casos e, então, seu poder não será levado em consideração na comparação com os demais testes.

Figura 4.15 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p \in \{5, 250\}$, tamanhos amostrais $r_i s, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Em $g = 60, p = 5$ (Figura 4.15(a)), T2PO e T2SO foram os testes com menor poder (e equivalentes assintoticamente), o que era esperado, uma vez que foram conservativos no controle da TEE, com a ressalva de que, para valores de ϕ maiores ou iguais a 4, estes tiveram poder maior que TAB, que foi levemente liberal. O teste THTNB teve o mesmo comportamento de TAB no controle da TEE, mas apresentou poder maior, sendo o mais indicado nesta configuração.

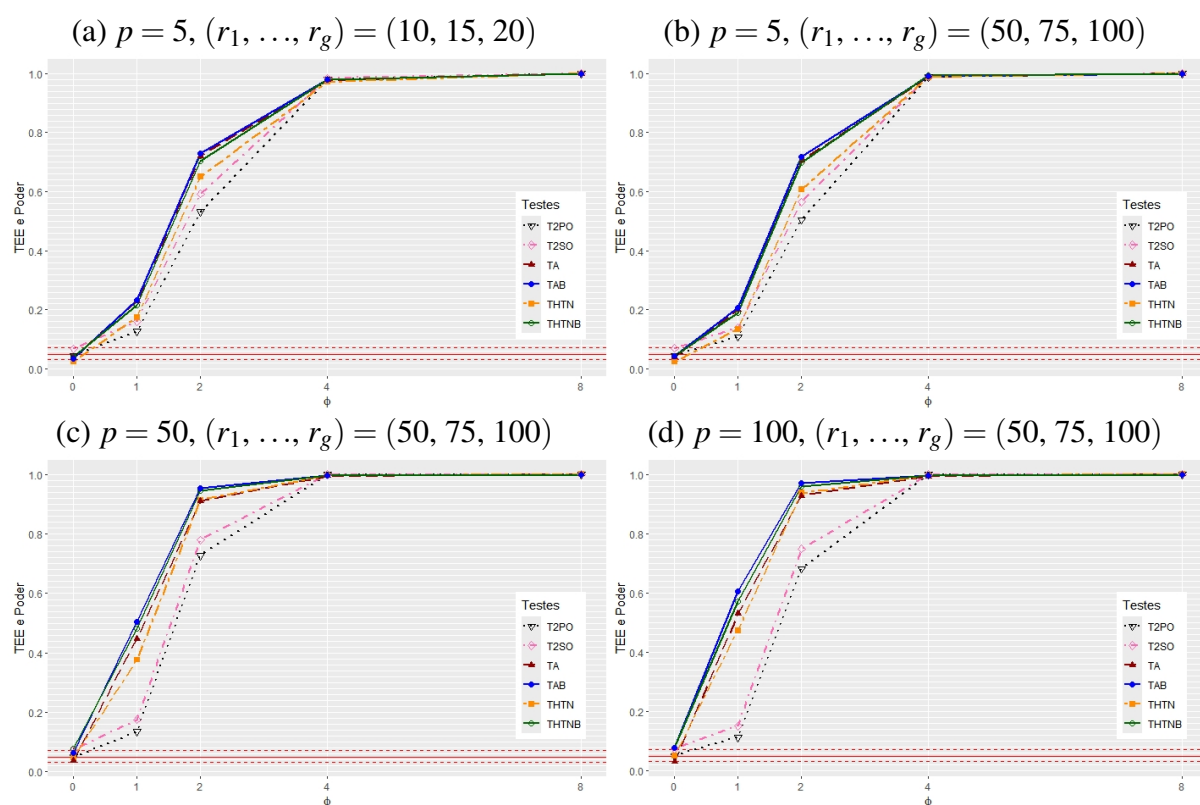
Em $g = 60, p = 250$ (Figura 4.15(b)), é possível notar o quanto T2PO e T2SO são influenciados pelo aumento da dimensão, tendo seus valores de poder reduzidos drasticamente quando comparados com a situação em que $p = 5$ (Figura 4.15(a)). Mesmo tendo sido exatos no controle da TEE, estes não apresentaram valores de poder plausíveis. Para esta configuração, THTNB e TAB foram expressivamente liberais, enquanto TA foi exato e apresentou alto poder. Por fim, o comportamento dos testes em $g = 100, p = 5$ foi muito semelhante ao da con-

figuração com $g = 60$, $p = 5$, como se pode verificar ao observar as Figuras 4.15(c) e 4.15(a), respectivamente.

Considerando agora a distribuição t_3 multivariada, nas Figuras 4.16 e 4.17 são apresentados os resultados de poder obtidos para $g = 3$ e 6, respectivamente. Pode-se notar que, de maneira geral, o comportamento dos testes foi semelhante ao observado para a normal multivariada, assim como ocorreu com a TEE.

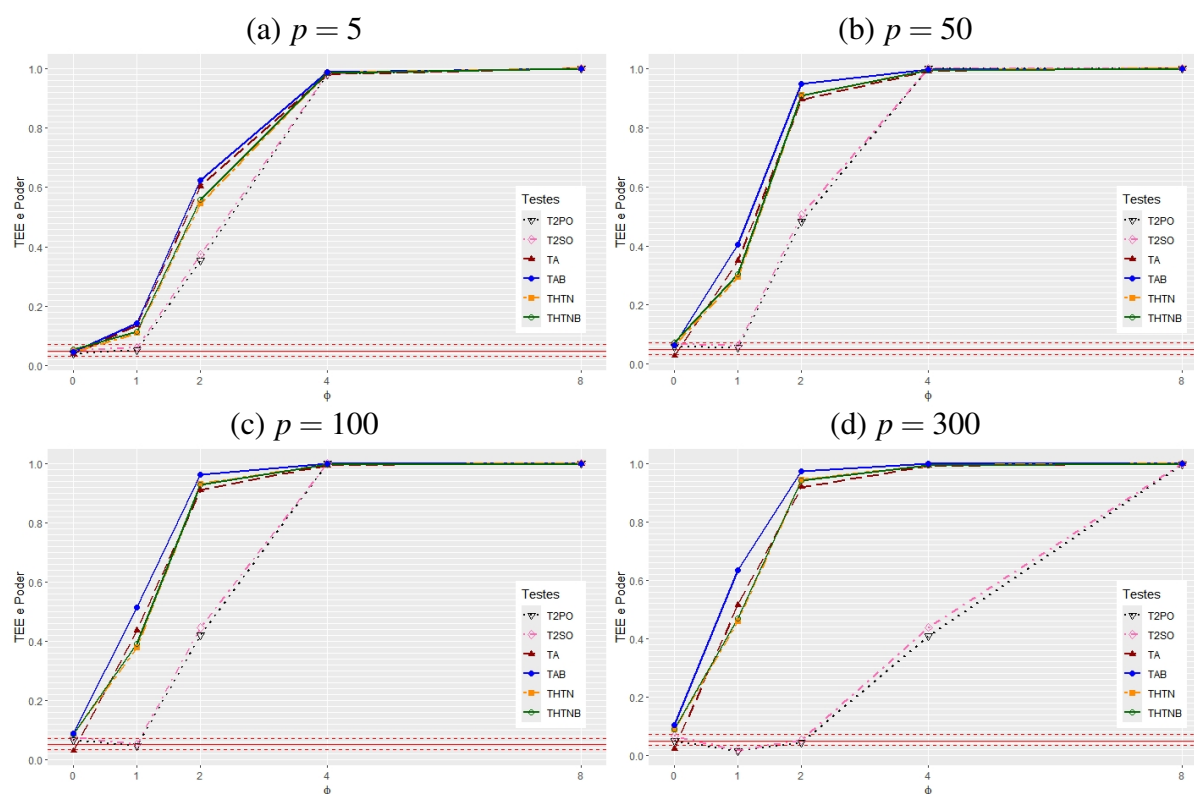
Vale destacar que, em $g = 6$, $p = 300$ (Figura 4.17 (d)), era esperado que TA apresentasse baixo poder, uma vez que foi conservativo no controle da TEE, no entanto, isso não ocorreu, o que corrobora o bom desempenho de TA já observado por Ahmad (2019).

Figura 4.16 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100\}$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

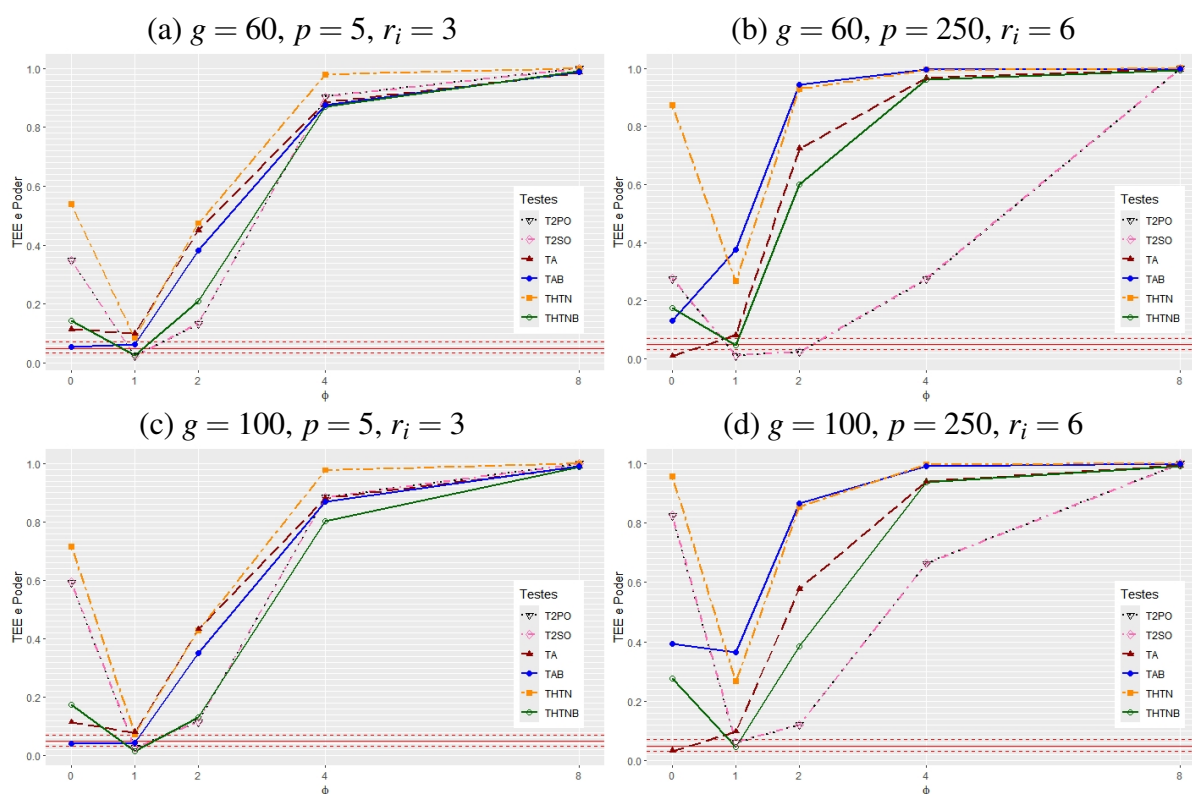
Figura 4.17 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100, 300\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

A Figura 4.18 apresenta os resultados para $g = 60$ e 100 . Nestes casos, T2PO, T2SO, THTN e THTNB foram expressivamente liberais no controle da TEE, então pode-se desconsiderar o uso destes nestas situações. Observando a Figura 4.18, é possível notar que os testes que controlaram a TEE e apresentaram bom desempenho de poder foram TAB, em $p = 5$, e TA, em $p = 250$.

Figura 4.18 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p \in \{5, 250\}$, tamanhos amostrais r_i s, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.

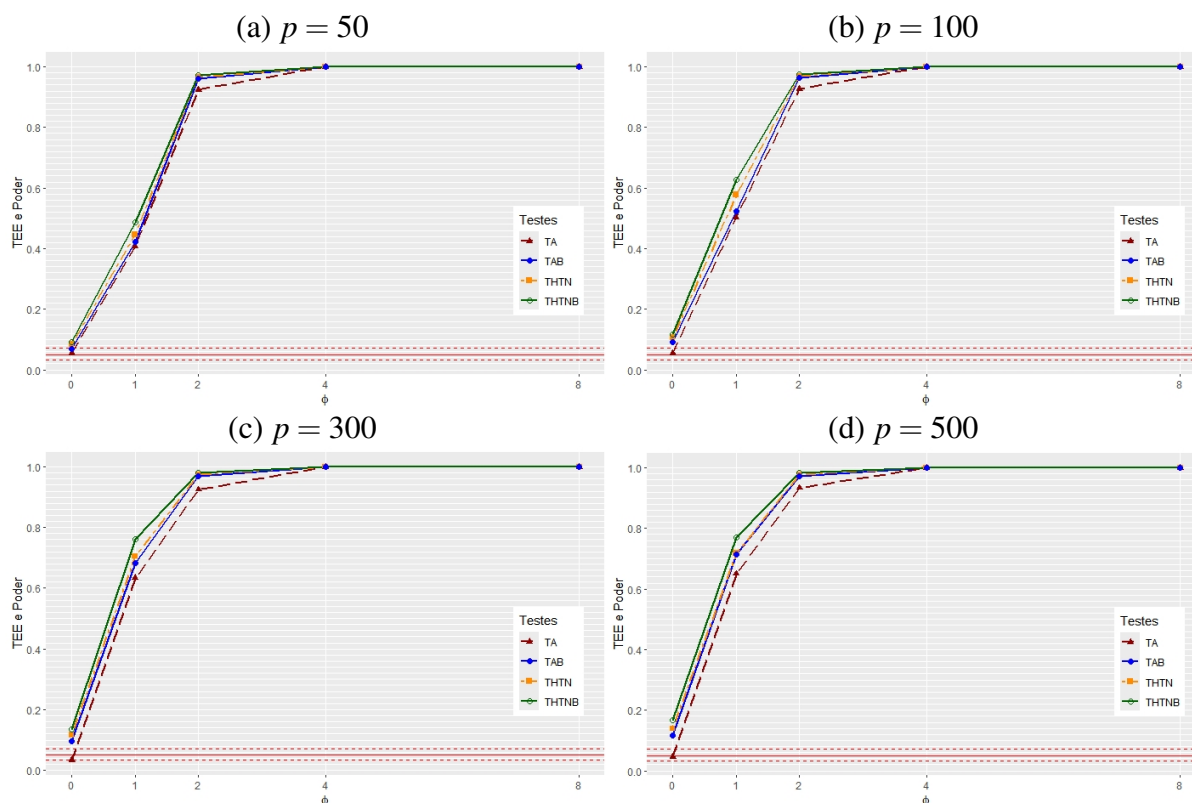


Fonte: Da autora (2025).

Para a distribuição uniforme $(0, 1)$ multivariada, o comportamento dos testes foi praticamente igual ao observado para a normal multivariada, assim como ocorreu com as TEEs, tanto em $g = 3$ e 6 , quanto em $g = 60$ e 100 e, por esse motivo, os gráficos de poder para a uniforme $(0, 1)$ multivariada estão no Apêndice E (Figuras 10, 11 e 12).

A partir de agora serão analisados os casos de alta dimensionalidade. Na Figura 4.19 são apresentados os resultados de poder obtidos para a distribuição normal multivariada considerando $g = 3$, $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$. Pode-se notar que, em $p = 50$ (Figura 4.19(a)), somente TA e TAB controlaram a TEE, e estes apresentaram bom desempenho de poder e com valores próximos, com TAB sendo levemente superior a TA em $\phi = 2$ e, a partir de $\phi = 4$, estes se tornaram equivalentes, com poder igual a 1. Para os demais valores de p da Figura 4.19, somente TA controlou a TEE, além de ter tido valores altos de poder, sendo, então, somente este indicado para as situações analisadas.

Figura 4.19 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

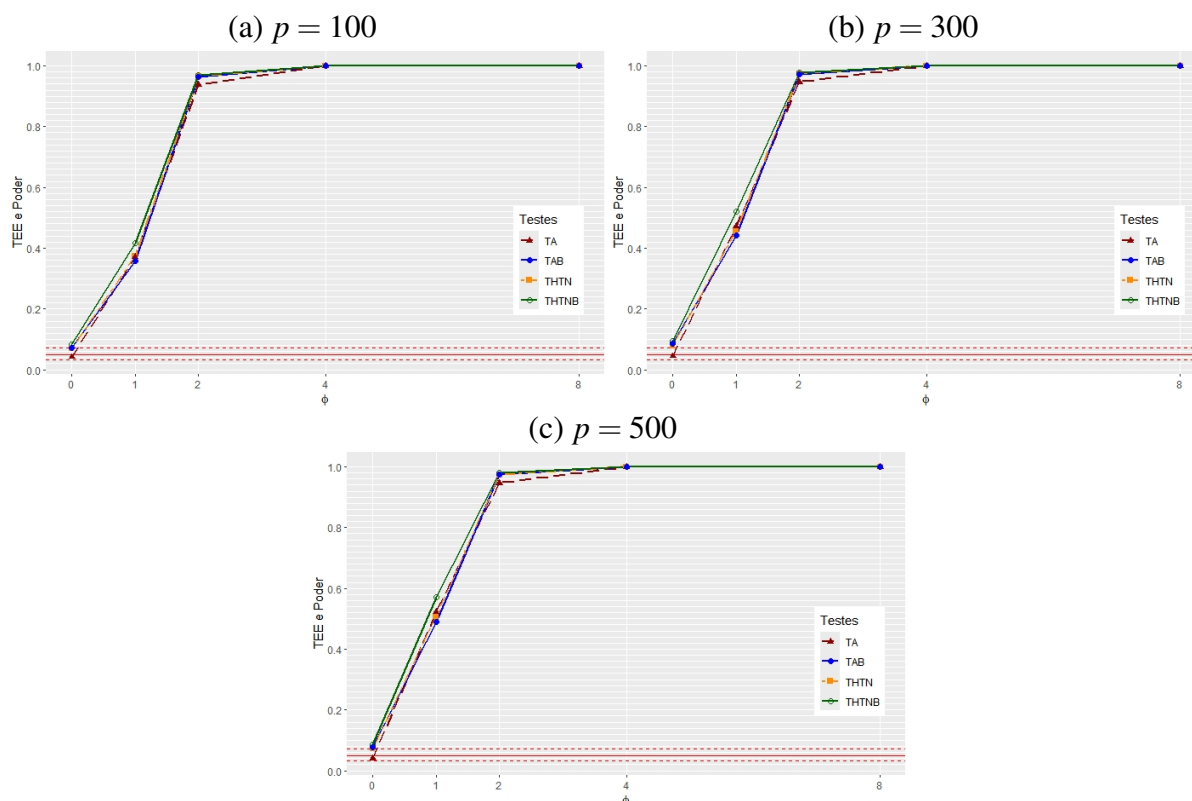
Considerando agora $g = 6$, $p \in \{100, 300, 500\}$, $(r_1, \dots, r_g) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$, na Figura 4.20 são apresentados os resultados obtidos. Recordando que, em $p = 100$, somente THTN e TA controlaram a TEE, pode-se verificar, Figura 4.20(a), que estes apresentaram bom desempenho de poder e com valores próximos, com THTN sendo levemente superior a TA em $\phi = 2$ e, a partir de $\phi = 4$, estes se tornaram equivalentes, com poder igual a 1. Vale a observação de que, embora THTNB e TAB não tenham controlado a TEE de maneira exata, estes foram apenas levemente liberais e, em especial, TAB teve poder muito próximo do de THTN e TA.

Para $p = 300$ e 500 , Figuras 4.20(b) e (c), respectivamente, assim como ocorreu em $g = 3$, somente TA controlou a TEE, sendo, então, somente este indicado para as situações analisadas, uma vez que também teve altos valores de poder. Os resultados obtidos para $g = 3$ e 6 reforçam o bom desempenho de TA já observado por Ahmad (2019).

Ao aumentar os tamanhos amostrais, tanto nas configurações de $g = 3$ quanto de $g = 6$, o comportamento dos testes foi praticamente o mesmo observado de quando r_i s eram menores

e, por este motivo, os gráficos de poder para estas configurações estão no Apêndice E, Figuras 13 e 14.

Figura 4.20 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.

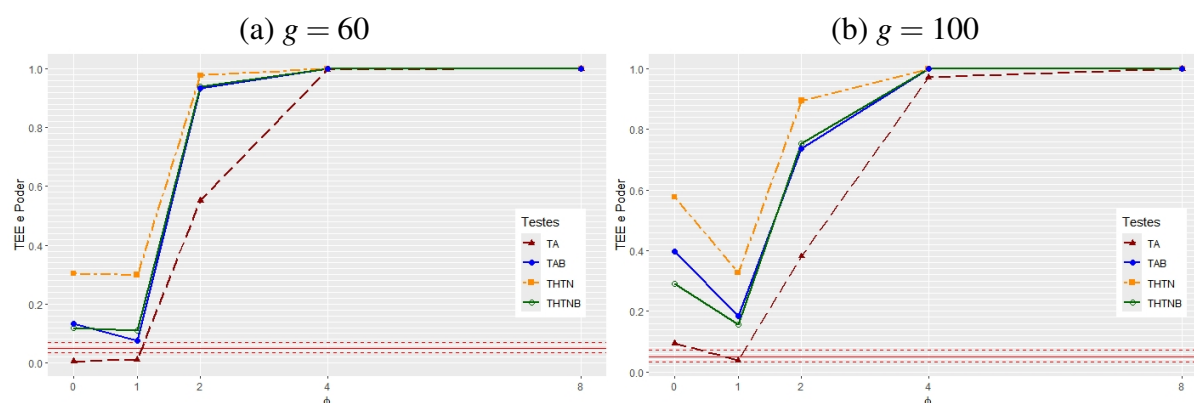


Fonte: Da autora (2025).

Por fim, na Figura 4.21 são apresentados os resultados de poder obtidos para a normal multivariada quando $g = 60$ e 100 . Vale recordar que, em $g = 100$, todos os testes foram expressivamente liberais no controle da TEE (Tabela 4.8), o que levaria à conclusão de que nenhum deles poderia ser considerado para uso na configuração analisada. Caso o pesquisador julgue que uma TEE de 0,0940 seja aceitável quando se estipula $\alpha = 0,05$, TA poderia ser usado, pois, com exceção de quando ϕ assumiu valor 1, o teste apresentou bom poder, como se pode ver na Figura 4.21(b), o que já era esperado, uma vez que foi expressivamente liberal.

Em $g = 60$ (Figura 4.21(a)), somente TA pode, novamente, ser considerado para aplicação, uma vez que controlou a TEE de maneira expressivamente conservativa e, ainda assim, apresentou bom desempenho de poder, o que não era esperado. Os demais testes foram expressivamente liberais.

Figura 4.21 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.

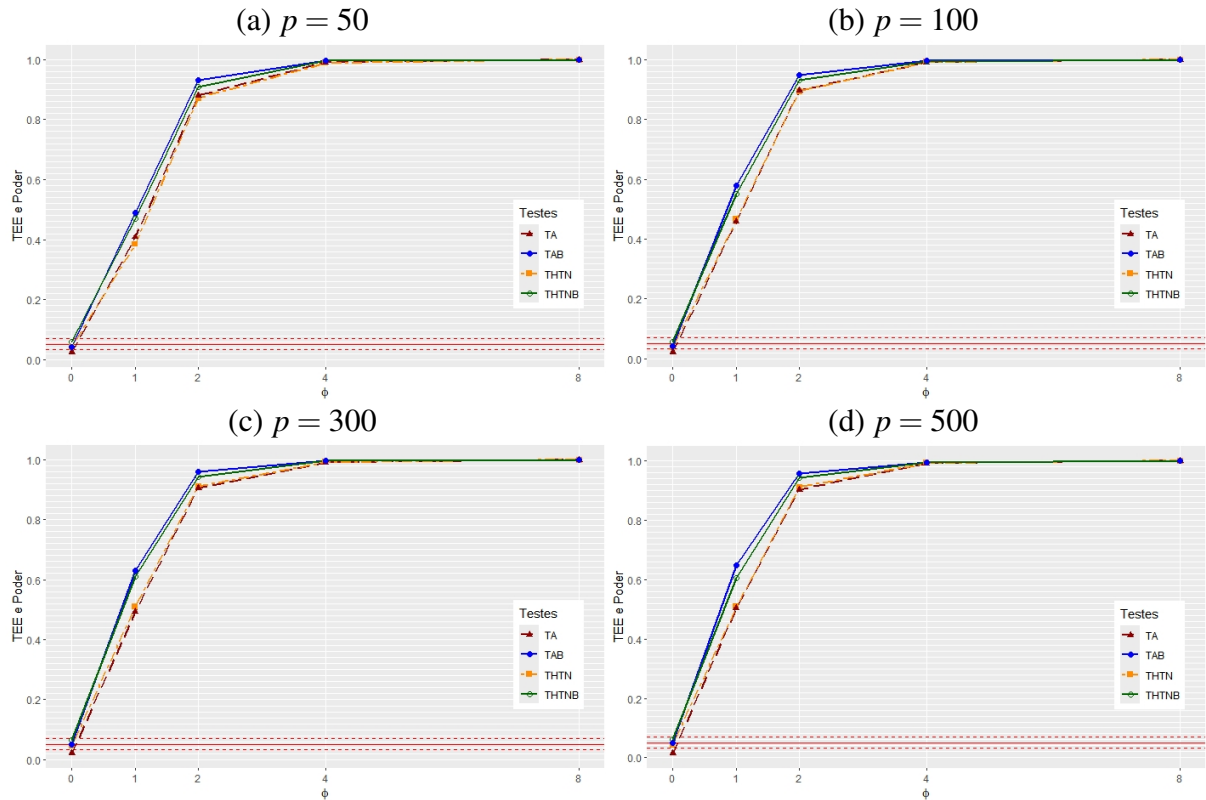


Fonte: Da autora (2025).

Considerando agora a distribuição t_3 multivariada, na Figura 4.22 são apresentados os resultados de poder obtidos para $g = 3$, $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$, $p \in \{50, 100, 300, 500\}$. Vale recordar que o desempenho dos testes no controle da TEE foi melhor na t_3 multivariada do que na normal multivariada. Pode-se notar, na Figura 4.22, que, independente do valor de p , THTNB e TAB foram os testes com maior poder, com TAB sendo levemente superior a THTNB para valores de ϕ menores que 4 e, a partir de $\phi = 4$, estes, juntamente com THTN e TA, se tornaram equivalentes assintoticamente, com valores de poder próximos de 1.

Para o teste TA, era esperado um baixo poder, uma vez que se mostrou conservativo no controle da TEE. No entanto, observa-se que TA apresentou um desempenho satisfatório em relação ao poder, sendo, inclusive, assintoticamente equivalente ao THTN, que foi exato. Contudo, é importante ressaltar que esses dois testes foram os menos poderosos. Assim, embora o TA não tenha exibido um poder tão reduzido, em comparação com seus concorrentes, ele permaneceu entre os de menor desempenho, juntamente com o THTN.

Figura 4.22 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.

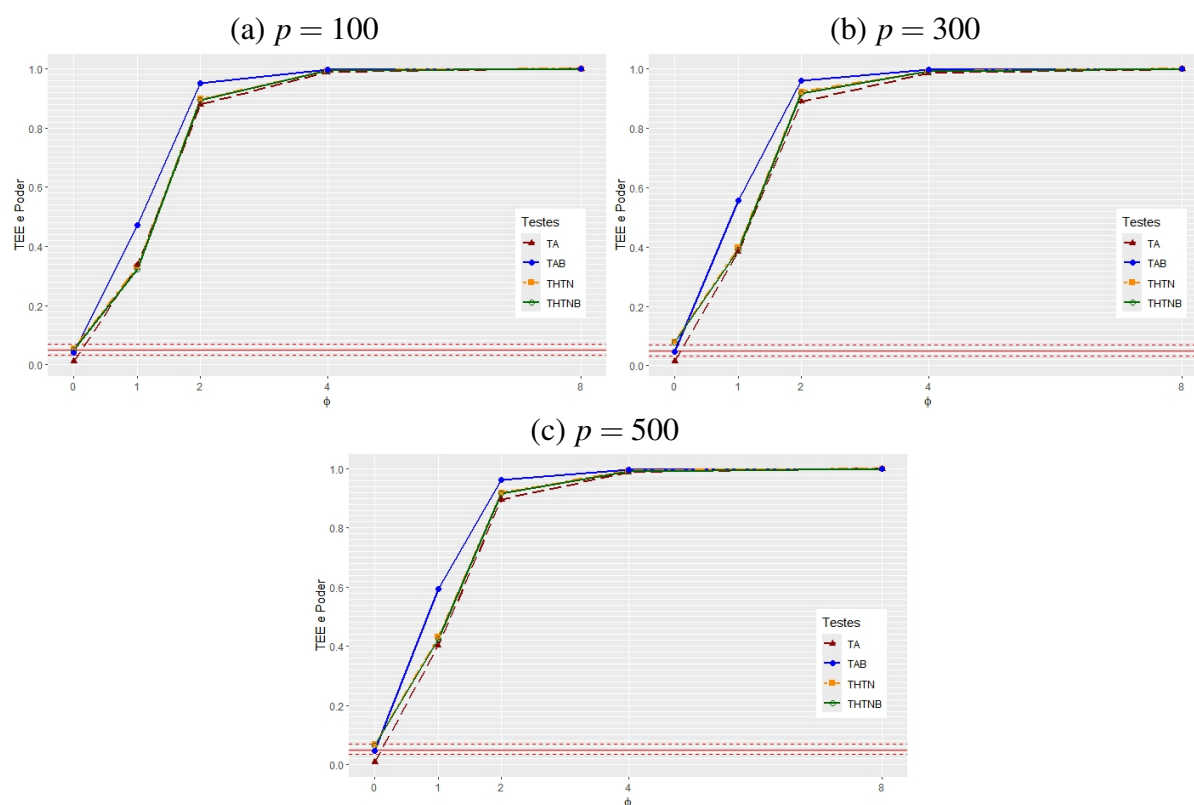


Fonte: Da autora (2025).

Considerando agora $g = 6$, $p \in \{100, 300, 500\}$, $(r_1, \dots, r_g) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$, na Figura 4.23 são apresentados os resultados de poder obtidos. É possível perceber que o teste com melhor desempenho foi TAB, pois, além de ter controlado a TEE de maneira exata, foi o mais poderoso. A partir de $\phi = 4$, este se tornou equivalente assintoticamente aos demais, com valores próximos de 1.

Para $g = 6$, $p = 500$ e $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, vale recordar que THTN, THTNB e TAB foram expressivamente liberais no controle da TEE, enquanto TA foi levemente conservativo (Tabela 4.9), sendo, então, somente TA indicado para a situação analisada, uma vez que também teve altos valores de poder (Figura 15, Apêndice E).

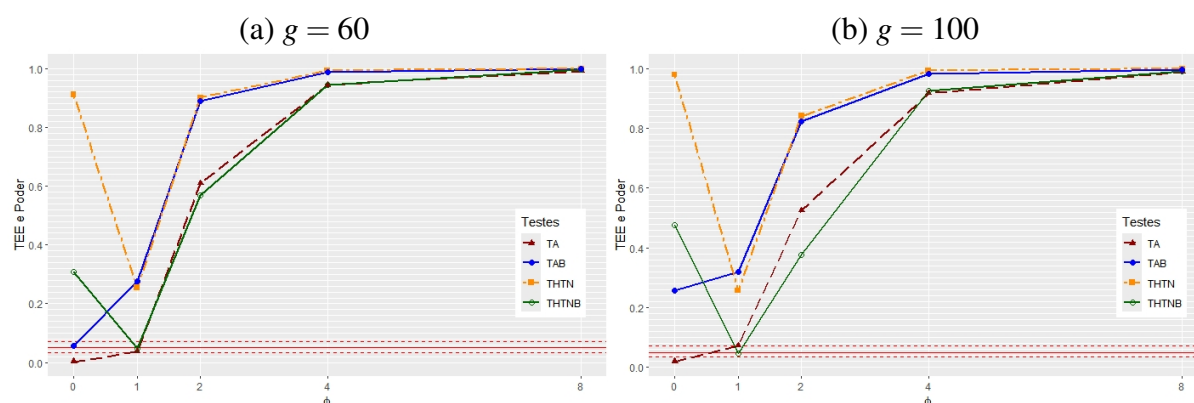
Figura 4.23 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Para $g = 60$, TAB foi o teste com melhor desempenho, como se pode ver na Figura 4.24(a), pois controlou a TEE de forma exata e teve valores altos de poder. TA foi expressivamente conservativo e, como esperado, apresentou poder menor que TAB. Já em $g = 100$, Figura 4.24(b), somente TA pode ser considerado para aplicação, uma vez que controlou a TEE de maneira expressivamente conservativa e, ainda assim, com exceção de quando $\phi = 1$, apresentou bom desempenho de poder, o que não era esperado. THTN e THTNB foram expressivamente liberais em $g = 60$ e 100.

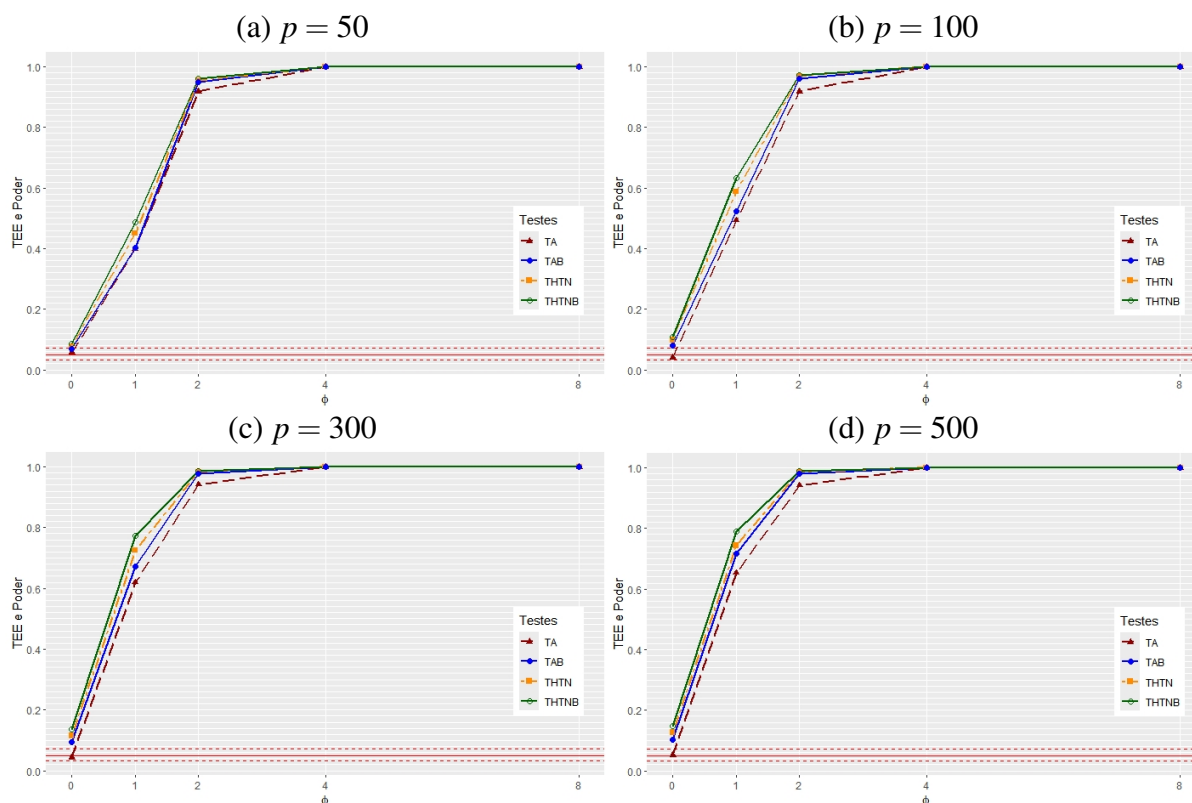
Figura 4.24 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Por fim, agora será considerada a uniforme $(0, 1)$ multivariada. Assim como ocorreu com a TEE, o comportamento dos testes quanto ao poder, nesta distribuição, foi praticamente o mesmo da normal multivariada. Na Figura 4.25 são apresentados os resultados para $g = 3$, $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$. Pode-se notar, por exemplo, que, em $p = 50$ (Figura 4.25(a)), novamente somente TA e TAB controlaram a TEE e apresentaram bom desempenho de poder, com valores próximos e TAB sendo levemente superior a TA em $\phi = 2$ e, a partir de $\phi = 4$, estes passaram a ter poder igual a 1. Para $p = 100$ (Figura 4.25(b)), 300 (Figura 4.25(c)) e 500 (Figura 4.25(d)), somente TA controlou a TEE, além de ter tido valores altos de poder, sendo, então, somente este indicado para as situações analisadas, assim como também ocorreu com a normal multivariada. O comportamento dos testes observado nestes três últimos casos de $g = 3$ também foi detectado em $g = 6$ (Figura 16, Apêndice E) e, para os tamanhos amostrais maiores considerados em $g = 3$ e 6 (Figuras 17 e 18, Apêndice E, respectivamente), os testes tiveram o mesmo desempenho que tiveram na normal multivariada, ou seja, sem alterações em relação a quando r_i s eram menores.

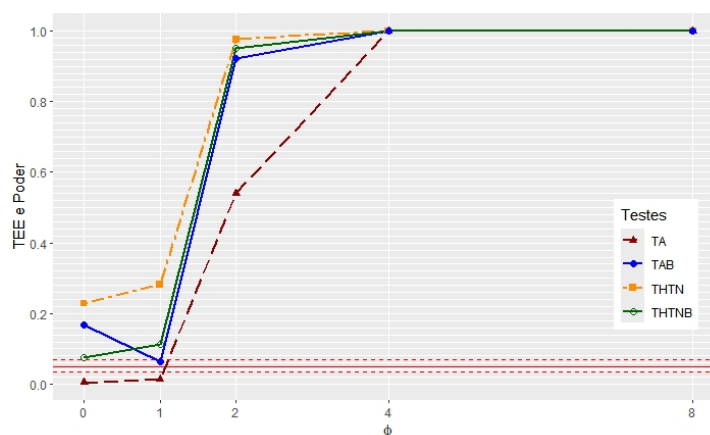
Figura 4.25 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{50, 100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Vale recordar que, assim como ocorreu com a normal multivariada, todos os testes foram expressivamente liberais no controle da TEE em $g = 100$ (Tabela 4.10), mas, no caso da uniforme $(0, 1)$ multivariada, a menor TEE foi 0,13 (para $\alpha = 0,05$) e, então, o poder não será avaliado nesta configuração. Por fim, na Figura 4.26 são apresentados os resultados de poder obtidos para a uniforme $(0, 1)$ multivariada quando $g = 60$. Neste caso, THTN e TAB foram expressivamente liberais no controle da TEE, TA foi o menos poderoso, conforme já era esperado, por ter sido expressivamente conservativo, e THTNB foi o teste com melhor desempenho, uma vez que foi levemente liberal no controle da TEE e apresentou poder maior que TA, para valores de ϕ menores que 4 e, a partir deste valor, estes se tornaram equivalentes, com poder igual a 1.

Figura 4.26 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g = 60$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

4.3 Considerações gerais

Para os casos homocedásticos, os testes *bootstrap* propostos, THTNB e TAB, foram os que apresentaram os melhores desempenhos. O teste TAB pode ser considerado superior à THTNB por ter controlado a TEE de forma exata em praticamente todas as configurações, diferentemente de THTNB, que apresentou mais exceções. Nas vezes em que TAB não foi exato, este foi levemente liberal, enquanto THTNB foi expressivamente liberal na maior parte das exceções, que ocorreram para uma distribuição de cauda mais pesada, a t_3 multivariada. Cabe lembrar que o bom desempenho dos testes *bootstrap* propostos, THTNB e TAB, se manteve nos casos em que se considerou um número maior de tratamentos. Já os seus respectivos concorrentes assintóticos, THTN e TA, foram expressivamente liberais em praticamente todas as configurações em que $g = 60$ e 100.

O comportamento dos testes T2PO e T2SO foi praticamente o mesmo, não havendo, então, melhora de desempenho do teste assintótico existente, que considera a aproximação de primeira ordem de Bonferroni (T2PO) para o teste assintótico proposto (T2SO), que considera uma aproximação empírica da estatística com aproximação de segunda ordem, desenvolvida no presente trabalho. De modo geral, ambos demonstraram um bom controle da TEE, exceto na distribuição t_3 multivariada para valores maiores de g . No entanto, foram os testes com menor

poder, sendo negativamente impactados pelo aumento da dimensão (à medida que p crescia, o poder diminuía). Nos casos em que $p = 250$, tiveram valores irrisórios de poder.

Portanto, para os casos homocedásticos, o teste com melhor desempenho foi TAB, pois controlou a TEE de forma exata e seu poder foi, de maneira geral, próximo ou superior ao dos demais. Além disso, o teste TAB manteve esse excelente desempenho mesmo nos contextos de alta dimensionalidade, permanecendo, assim, como o teste mais robusto também nesse cenário.

Nos casos heterocedásticos, o desempenho dos testes variou bastante conforme as configurações adotadas. Essa oscilação pode ser explicada pela complexidade dessas situações, que são muito abrangentes, pois envolvem não apenas a heterogeneidade das matrizes de covariância, mas também a consideração de distribuições não normais, dados desbalanceados e alta dimensionalidade.

Ao contrário do que ocorre nas situações homocedásticas, o desempenho dos testes T2PO e T2SO diferiu em cenários heterocedásticos. O teste T2PO apresentou melhor eficácia no controle da TEE do que T2SO, porém ambos continuaram sendo os menos poderosos, em especial nos casos com valores maiores de g .

Em cenários de baixa dimensionalidade e com um número menor de tratamentos (3 e 6), os testes THTN, TA, THTNB e TAB apresentaram desempenhos de poder bastante semelhantes, sendo o THTN ligeiramente menos poderoso que os demais. No que se refere ao controle da TEE, o teste TA apresentou melhor desempenho, pois obteve um controle mais consistente nas diversas configurações. No entanto, os testes propostos THTNB e TAB também apresentaram resultados satisfatórios, sendo superados pelos seus respectivos concorrentes assintóticos (THTN e TA) apenas em situações que envolviam um número maior de variáveis.

Para um número mais elevado de tratamentos (60 e 100), o teste THTNB apresentou desempenho superior no controle da TEE em comparação com seu concorrente assintótico, THTN. O teste TAB apresentou melhor desempenho do que TA quando o número de variáveis era reduzido ($p = 5$), enquanto, para $p = 250$, observou-se o resultado oposto. As porcentagens apresentadas na Tabela 4.12 auxiliam na visualização dessas conclusões. Considerando todas as distribuições, todos os α s, sob heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, $g = 60$ e 100 , nesta são apresentadas as porcentagens das configurações simuladas em que os testes THTN, TA, THTNB e TAB foram classificados de acordo com dois grupos: (I) expressivamente liberais e (II) exatos, conservativos ou levemente liberais.

Tabela 4.12 – Porcentagens das configurações simuladas em que os testes THTN, TA, THTNB e TAB foram classificados de acordo com dois grupos: (I) expressivamente liberais e (II) exatos, conservativos ou levemente liberais, considerando todas as distribuições, todos os α s, sob heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, $g = 60$ e 100 .

p	g	THTN		THTNB		TA		TAB	
		I	II	I	II	I	II	I	II
5	60	88,9%	11,1%	22,2%	77,8%	88,9%	11,1%	–	100,0%
	100	88,9%	11,1%	22,2%	77,8%	88,9%	11,1%	11,1%	88,9%
250	60	100,0%	–	55,6%	44,4%	–	100,0%	88,9%	11,1%
	100	100,0%	–	100,0%	–	55,6%	44,4%	100,0%	–

Fonte: Da autora (2025).

Portanto, de maneira geral, os testes *bootstrap* propostos, THTNB e TAB, tiveram desempenho relativamente melhor do que o de seus respectivos concorrentes assintóticos, THTN e TA, nestas situações.

Nos casos heterocedásticos em alta dimensionalidade, os testes THTN, TA, THTNB e TAB apresentaram comportamentos bastante semelhantes para as distribuições multivariadas normal e uniforme $(0, 1)$, sendo o teste TA, de modo geral, o que obteve o melhor desempenho, tanto no controle da TEE quanto em relação ao poder. No entanto, para a distribuição t_3 multivariada, que é uma distribuição de cauda mais pesada, os testes propostos, THTNB e TAB, apresentaram uma melhora significativa em seus desempenhos, chegando a superar seus concorrentes assintóticos na maioria das configurações, especialmente em relação aos valores de poder. O teste TA, por sua vez, foi expressivamente conservativo em praticamente todas as configurações nesta distribuição e, conseqüentemente, apresentou poder menor que os demais testes.

4.4 Aplicação em conjunto de dados reais

Os testes de comparações múltiplas multivariadas analisados neste trabalho foram aplicados a um conjunto de dados reais, caracterizado por Fidalgo et al. (2005), que faz parte do projeto *Conservation and Sustainable Management of Below-Ground Biodiversity* (CSM-BGBD), desenvolvido em sete países e coordenado, em nível global, pelo *Tropical Soil Biology and Fertility Institute do CIAT* (TSBF-CIAT), denominado no Brasil de BiosBrasil e coordenado pela Universidade Federal de Lavras. Este projeto teve como objetivo investigar os impactos

ambientais e ecológicos decorrentes de diferentes sistemas de uso da terra (SUTs) na região amazônica e, dentro desse contexto, foram analisados 6 SUTs (NÓBREGA, 2006):

- a) floresta nativa ou floresta primária (FP);
- b) floresta secundária em estágio inicial de regeneração com menos de 5 anos de formação, após ter sido área de cultivo (FI);
- c) floresta secundária em estágio avançado de regeneração com mais de 5 anos de formação, após ter sido área de cultivo (FA);
- d) pastagem, frequentemente estabelecidas após o desmatamento (P);
- e) agrofloresta, integra árvores e cultivos agrícolas (A);
- f) agricultura, cultivos agrícolas anuais (mandioca, milho, cana-de-açúcar, abacaxi) e semiperenes (bananas) (AG).

Foram coletadas 98 amostras de solo na camada de 0-20 cm, totalizando 17 pontos amostrados em FP, 30 em FI, 10 em FA, 13 em P, 10 em A e 18 em AG (NÓBREGA, 2006).

A floresta primária corresponde à condição original do ecossistema, servindo como parâmetro de referência para a comparação com áreas antropizadas, ou seja, aquelas que foram modificadas pela intervenção humana, resultando em alterações em suas características naturais. Por essa razão, foi adotada como tratamento controle nesta análise. Além disso, nesta aplicação foram avaliadas duas variáveis associadas à textura do solo, areia e argila, assim como em Santos e Ferreira (2012), cujos dados são apresentados na Tabela 4.13.

Para identificar a qual dos cenários analisados neste estudo o conjunto de dados da Tabela 4.13 pertence, foram aplicados os seguintes testes:

- a) teste de Shapiro-Wilk multivariado de Royston (ROYSTON, 1983), para testar a hipótese nula de que os resíduos do modelo linear multivariado ajustado seguem uma distribuição normal multivariada. Neste caso, o valor- p obtido foi 0,0004 que, ao nível nominal de significância de 5%, indica que deve-se rejeitar a hipótese nula;
- b) teste de Bartlett utilizando aproximação F (BOX, 1949), para testar a homogeneidade das matrizes de covariâncias dos 6 tratamentos (SUTs). Neste caso, o valor- p obtido foi 0,0003, indicando que a hipótese nula de homogeneidade das matrizes de covariâncias deve ser rejeitada no nível nominal de significância de 5%.

Tabela 4.13 – Teores de areia e argila referentes ao sistema de uso da terra na Amazônia.

SUTs	Rep.	Variáveis		SUTs	Rep.	Variáveis		SUTs	Rep.	Variáveis	
		areia	argila			areia	argila			areia	argila
A	1	11	42	P	1	11	38	1	26	32	
	2	10	37		2	13	47	2	20	32	
	3	13	35		3	18	34	3	20	29	
	4	30	31		4	16	49	4	12	35	
	5	7	52		5	11	45	5	24	29	
	6	11	46		6	30	32	6	10	45	
	7	16	30		7	5	64	7	46	26	
	8	11	42		8	7	59	8	47	43	
	9	11	43		9	11	50	9	15	41	
	10	16	32		10	17	38	10	50	24	
AG	1	24	29	FI	11	21	35	11	27	34	
	2	29	30		12	22	36	12	32	27	
	3	12	55		13	13	40	13	38	26	
	4	15	43		14	12	36	1	14	33	
	5	22	46		15	25	28	2	10	41	
	6	16	50		16	20	32	3	16	44	
	7	10	51		17	24	25	4	17	32	
	8	19	43		18	17	39	5	12	36	
	9	28	36		19	27	36	6	14	42	
	10	30	32		20	45	24	7	27	34	
	11	12	45		21	11	40	8	16	35	
	12	27	30		22	41	21	9	9	46	
	13	30	33		23	9	40	FP	10	5	48
	14	24	28		24	48	21		11	11	41
	15	36	32		25	14	32		12	11	55
	16	34	25		26	53	21		13	4	65
	17	21	31		27	31	32		14	18	37
	18	14	42		28	28	32		15	19	43
FA	1	7	45	29	18	34	16	16	43		
	2	27	31	30	42	23	17	12	44		
	3	26	34	—	—	—	—	—	—		
	4	14	36	—	—	—	—	—	—		
	5	8	45	—	—	—	—	—	—		
	6	7	42	—	—	—	—	—	—		
	7	9	43	—	—	—	—	—	—		
	8	17	34	—	—	—	—	—	—		
	9	6	47	—	—	—	—	—	—		
	10	11	38	—	—	—	—	—	—		

Fonte: Nóbrega (2006).

Portanto, nas notações deste trabalho, tem-se $g = 6$ tratamentos, $p = 2$ variáveis, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_6) = (r_A, r_{AG}, r_{FA}, r_{FI}, r_P, r_{FP}) = (10, 18, 10, 30, 13, 17)$, $n = \sum_{i=1}^6 r_i = 98$ e, conseqüentemente, um cenário de baixa dimensionalidade ($p < n - g$). Com base nos testes aplicados e descritos acima, tem-se distribuição multivariada não normal e heterocedasticidade.

Considerando os teores de areia e argila apresentados na Tabela 4.13, foram obtidos os vetores de médias dos SUTs, que estão indicados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 – Vetores de médias dos sistemas de uso da terra (SUTs) na Amazônia, considerando os teores das variáveis areia e argila.

Variáveis	SUTs					
	A	AG	FA	FI	P	FP
Areia	13,6000	22,3889	13,2000	22,0000	28,2308	13,5882
Argila	39,0000	37,8333	39,5000	36,1000	32,5385	42,2941

Fonte: Da autora (2025).

O objetivo, ao aplicar os testes estudados e avaliados neste trabalho, é verificar se o vetor de médias do tratamento controle FP é estatisticamente igual aos demais vetores de médias. Antes da aplicação dos testes, fixou-se o nível nominal de significância em 5%. Os valores-*p* obtidos para cada par de comparações com o controle FP, para cada teste, estão representados na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 – Valores-*p* para cada par de comparação entre vetores de médias dos SUTs com o tratamento controle FP, para cada teste, considerando os teores das variáveis areia e argila.

Par de comparação	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
A - FP	0,4063	0,4063	0,5744	0,4346	0,9820	0,9005
AG - FP	0,0380	0,0380	0,0550	0,0048*	0,1524	0,0375***
FA - FP	0,4613	0,4613	0,6299	0,5088	0,9930	0,9475
FI - FP	0,0249	0,0249	0,0016*	0,0034*	0,0680	0,0345***
P - FP	0,0008*	0,0008**	0,0000*	0,0000*	0,0075***	0,0025***

*: significativamente diferente (valor-*p* < α/m) do vetor de médias do controle FP.

**: significativamente diferente (valor-*p* < $(\alpha + \alpha/m)/m$) do vetor de médias do controle FP.

***: significativamente diferente (valor-*p* < α) do vetor de médias do controle FP.

Fonte: Da autora (2025).

Observa-se que os testes T2PO, T2SO e THTNB identificaram o mesmo conjunto de pares estatisticamente distintos, indicando exclusivamente que o vetor de médias referente ao SUT pastagem (P) difere de maneira significativa daquele correspondente ao SUT floresta primária (FP). Por outro lado, o teste THTN, além de apontar essa distinção, também evidenciou diferenças estatisticamente significativas entre os vetores de médias do par FI - FP. Por fim, os testes TA e TAB apresentaram resultados iguais, identificando três pares com diferenças estatisticamente relevantes: AG - FP, FI - FP e P - FP.

Nota-se que o vetor de médias do SUT pastagem (P) foi identificado como estatisticamente diferente do vetor de médias correspondente ao SUT floresta primária (FP) por todos os testes. Santos e Ferreira (2012) aplicaram seu teste em todos os pares de comparações, e detectaram que o SUT pastagem esteve presente em todos os pares cujos vetores de médias diferiram, resultado este que corrobora os encontrados por Nóbrega (2006), que utilizou outras técnicas multivariadas, como a análise de agrupamento.

5 CONCLUSÃO

Os testes *bootstrap* propostos, THTNB e TAB, apresentaram os melhores desempenhos nos cenários homocedásticos, com TAB superando THTNB. O teste TAB revelou um controle mais eficaz da TEE, além de apresentar maior poder, independentemente da distribuição ser normal ou não, e tanto em contextos de baixa quanto de alta dimensionalidade. Dessa forma, o teste TAB se mostra como a opção mais recomendada nessas situações.

De modo distinto, não foi possível identificar um teste que tenha se destacado como o mais eficaz para os casos heterocedásticos, o que pode ser explicado pela complexidade e abrangência dessas situações. No entanto, é relevante salientar que, em diversas circunstâncias, os testes *bootstrap* propostos apresentaram desempenho superior em relação às suas respectivas versões assintóticas existentes. De maneira geral, não existem testes que sejam uniformemente mais poderosos e que, simultaneamente, garantam o controle da taxa de erro do tipo I nos cenários gerais de comparações múltiplas.

REFERÊNCIAS

- AHMAD, M. R. A unified approach to testing mean vectors with large dimensions. **AStA Advances in Statistical Analysis**, v. 103, n. 4, p. 593–618, 2018.
- AHMAD, M. R. Multiple comparisons of mean vectors with large dimension under general conditions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 89, n. 6, p. 1044–1059, 2019.
- ANDERSON, T. W. **An introduction to multivariate statistical analysis**. 3. ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2003. 722 p.
- BATISTA, B. D. de O. **Testes de comparações múltiplas baseados na distribuição da midrange estudentizada externamente**. 194 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2016.
- BOX, G. P. A general distribution theory for a class of likelihood criteria. **Biometrika**, London, v. 36, p. 317–346, 1949.
- BRETZ, F.; HOTHORN, T.; WESTFALL, P. **Multiple comparisons using R**. USA: Chapman and Hall, 2011. 182 p.
- DEAN, A.; VOSS, D. **Design and analysis of experiments**. New Jersey: Springer, 1999. 740 p.
- DEAN, A.; VOSS, D.; DRAGULJIĆ, D. **Design and analysis of experiments**. New York: Springer, 2016. 840 p.
- DEMPSTER, A. P. A high dimensional two sample significance test. **The Annals of Mathematical Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 29, n. 1, p. 995–1010, 1958.
- DEMPSTER, A. P. A significance test for the separation of two highly multivariate small samples. **Biometrics**, Wiley, International Biometric Society, v. 16, n. 1, p. 41–50, 1960.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. **An introduction to the bootstrap**. University of Toronto: CRC press, 1994. 452 p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística computacional em java**. 1. ed. Lavras: Editora UFLA, 2013. 695 p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística básica**. 2. ed. Lavras: Editora UFLA, 2018. 664 p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística multivariada**. 3. ed. Lavras: Editora UFLA, 2018. 622 p.
- FIDALGO, E. C. C. et al. **Levantamento do uso e cobertura da terra de seis áreas amostrais relacionadas ao projeto Conservation and Sustainable Management of Below-Ground Biodiversity: Phase 1, Município de Benjamin Constant (AM)**. Rio de Janeiro: Embrapa Solos, 2005. Apostila.
- GENTLE, J. E. **Random number generation and Monte Carlo methods**. 2. ed. New York: Springer, 2003. 381 p.
- GIRI, N. C. **Multivariate statistical analysis**. New York: Marcel Dekker, 2004. 558 p.

- HÄRDLE, W.; SIMAR, L. **Applied multivariate statistical analysis**. 4. ed. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015. 580 p.
- HINKELMAN, K.; KEMPTHORNE, O. **Design and analysis of experiments**. 2. ed. New Jersey: John Wiley and Sons, 2008. v. 1. 632 p.
- HOCHBERG, Y.; TAMHANE, A. C. **Multiple comparisons procedures**. Canadian: John Wiley and Sons, 1987. 450 p.
- HOCKING, R. R. **Methods and Applications of Linear Models: Regression and the analysis of variance**. 2. ed. New Jersey: Wiley, 2003. 741 p.
- HSU, J. C. **Multiple comparisons - theory and methods**. USA: Chapman and Hall, 1999. 277 p.
- HYODO, M.; TAKAHASHI, S.; NISHIYAMA, T. Multiple comparisons among mean vectors when the dimension is larger than the total sample size. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, Taylor & Francis, v. 43, n. 10, p. 2283–2306, 2014.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 4. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998. 816 p.
- KAKIZAWA, Y. Siotani's modified second approximation for multiple comparisons of mean vectors. **SUT Journal of Mathematics**, v. 42, n. 1, p. 59–96, 2006.
- KAKIZAWA, Y. Multiple comparisons of several heteroscedastic multivariate populations. **Statistics and Probability Letters**, Elsevier, v. 78, n. 11, p. 1328–1338, 2008.
- KAKIZAWA, Y. Multiple comparisons of several homoscedastic multivariate populations. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, Springer, v. 61, n. 1, p. 1–26, 2009.
- KOLLO, T.; ROSEN, D. von. **Advanced multivariate statistics with matrices**. 1. ed. Dordrecht: Springer Netherlands, 2005. (Mathematics and Its Applications, 579).
- MACHADO, A. A. et al. Estatística experimental: uma abordagem fundamentada no planejamento e no uso de recursos computacionais. In: RBRAS. **Reunião anual da região brasileira da sociedade internacional de biometria**. Londrina: Simpósio de estatística aplicada a experimentação agrônômica, 2005. v. 11, n. 50, p. 290.
- MANLY, B. F. J. **Randomization, bootstrap and Monte Carlo methods in biology**. 2. ed. New Zealand: University of Otago, 1997. 356 p.
- MARDIA, K. V.; KENT, J. T.; BIBBY, J. M. **Multivariate analysis**. London: Academic Press, 1979. 518 p.
- MILLER, R. **Simultaneous statistical inference**. New York: Springer-Verlag, 1981. 299 p.
- MUIRHEAD, R. J. **Aspects of multivariate statistical theory**. New York: John Wiley, 1982. 673 p.
- NISHIYAMA, T. On the simultaneous confidence procedure for multiple comparisons with a control. **SUT Journal of Mathematics**, v. 43, n. 2, p. 137–147, 2007.

NISHIYAMA, T.; HYODO, M.; SEO, T. Recent developments of multivariate multiple comparisons among mean vectors. **SUT Journal of Mathematics**, v. 50, n. 2, p. 247–270, 2014.

NÓBREGA, R. S. A. **Efeito de sistemas de uso da terra na Amazônia sobre atributos do solo, ocorrência, eficiência e diversidade de bactérias que nodulam caupi [*Vigna unguiculata* (L.) Walp]**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, 2006.

OKAMOTO, N.; SEO, T. Multivariate multiple comparisons with a control in elliptical populations. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Elsevier, v. 33, n. 1-2, p. 191–205, 2013.

OLIVEIRA, I. R. C.; FERREIRA, D. F. Multivariate extension of chi-squared univariate normality test. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 80, n. 5, p. 513–526, 2010.

O'NEILL, R.; WETHERILL, G. B. The present state of multiple comparison methods. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 33, n. 2, p. 218–250, 1971.

PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes in Fortran: the art of scientific computing**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 994 p.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2024. Version 4.4.2. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

RAO, C. R.; SWARUPCHAND, U. Multiple comparison procedure: a note and a bibliography. **Journal of Statistical**, v. 16, p. 6–109, 2009.

RENCHER, A. C. **Methods of multivariate analysis**. 2. ed. New York: John Wiley, 2002. 708 p.

ROYSTON, J. P. Some techniques for assessing multivariate normality based on the Shapiro-Wilk *W*. **Applied Statistics - Journal of the Royal Statistical Society - Series C**, London, v. 32, n. 2, p. 121–133, 1983.

SANTOS, E. N. F.; FERREIRA, D. F. Multivariate multiple comparisons by bootstrap and permutation tests. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 30, n. 3, p. 381–400, 2012.

SEBER, G. A. F. **Multivariate observations**. New York: John Wiley, 1984. 686 p.

SEO, T. Simultaneous confidence procedures for multiple comparisons of mean vectors in multivariate normal populations. **Hiroshima Mathematical Journal**, v. 25, n. 2, p. 387–422, 1995.

SEO, T.; MANO, S.; FUJIKOSHI, Y. A generalized Tukey conjecture for multiple comparisons among mean vectors. **Journal of the American Statistical Association**, American Statistical Association, Taylor & Francis, v. 89, n. 426, p. 676–679, 1994.

SEO, T.; NISHIYAMA, T. On the conservative simultaneous confidence procedures for multiple comparisons among mean vectors. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 138, n. 11, p. 3448–3456, 2008.

- SEO, T.; SIOTANI, M. The multivariate studentized range and its upper percentiles. **Journal of the Japan Statistical Society**, Matusita, K., v. 22, n. 2, p. 123–137, 1992.
- SEO, T.; SIOTANI, M. Approximation to the upper percentiles of T_{\max}^2 -type statistics. In: _____. **Statistical Sciences and Data Analysis**. [S.l.]: De Gruyter, 1993. p. 265–276.
- STAFFA, S. J.; ZURAKOWSKI, D. Strategies in adjusting for multiple comparisons: A primer for pediatric surgeons. **Journal of Pediatric Surgery**, v. 55, n. 9, p. 1699–1705, 2020.
- TAKAHASHI, S. et al. Multiple comparisons procedures for high-dimensional data and their robustness under non-normality. **Journal of the Japanese Society of Computational Statistics**, v. 26, n. 1, p. 71–82, 2013.
- TIMM, N. H. **Applied multivariate analysis**. New York: Springer-Verlag, 2002. 693 p.
- WESTFALL, P. H. On using the bootstrap for multiple comparisons. **Journal of Biopharmaceutical Statistics**, v. 21, n. 6, p. 1187–1205, 2011.
- WESTFALL, P. H.; YOUNG, S. S. p Value adjustments for multiple tests in multivariate binomial models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 84, n. 407, p. 780–786, 1989.

**APÊNDICE A – Tabelas - Taxas de erro tipo I por experimento dos testes, casos
homocedásticos**

Tabela 1 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Continua)

Baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$, $\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
Normal multivariada								
3	5	(10, 10, 10)	0,0945	0,1345 ⁺	0,0810	0,0940	0,0855	0,0895
		(10, 15, 20)	0,1010	0,1520 ⁺	0,1025	0,1040	0,1055	0,1015
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0900	0,1005	0,0645 ⁻	0,1155	0,1010	0,1000
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0825	0,0980	0,0645 ⁻	0,1210	0,1080	0,0985
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0675 ⁻	0,0685 ⁻	0,1665 ⁺⁺	0,2550 ⁺⁺	0,1100	0,0970
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0685 ⁻	0,0690 ⁻	0,1580 ⁺⁺	0,2320 ⁺⁺	0,0975	0,0985
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0500 ⁻⁻	0,0500 ⁻⁻	0,1715 ⁺⁺	0,2525 ⁺⁺	0,0975	0,0820
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0690 ⁻	0,0700 ⁻	0,1930 ⁺⁺	0,2535 ⁺⁺	0,0970	0,0995
t_3 multivariada								
3	5	(10, 10, 10)	0,0840	0,1225	0,0855	0,0790	0,0930	0,0880
		(10, 15, 20)	0,0760 ⁻	0,1195	0,0990	0,0790	0,1025	0,0890
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0800	0,0925	0,0605 ⁻	0,0825	0,0960	0,0880
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,1095	0,1220	0,0595 ⁻	0,0830	0,1035	0,0905
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,4415 ⁺⁺	0,4430 ⁺⁺	0,5500 ⁺⁺	0,1550 ⁺⁺	0,2475 ⁺⁺	0,0820
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,3760 ⁺⁺	0,3775 ⁺⁺	0,5020 ⁺⁺	0,0960	0,1850 ⁺⁺	0,0885
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,6675 ⁺⁺	0,6685 ⁺⁺	0,7075 ⁺⁺	0,1695 ⁺⁺	0,3180 ⁺⁺	0,0840
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,8515 ⁺⁺	0,8525 ⁺⁺	0,6910 ⁺⁺	0,1095	0,2175 ⁺⁺	0,0820
Uniforme (0, 1) multivariada								
3	5	(10, 10, 10)	0,0930	0,1345 ⁺	0,0800	0,1010	0,0950	0,0940
		(10, 15, 20)	0,1005	0,1495 ⁺	0,0925	0,0960	0,0865	0,0885
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0800	0,0950	0,0685 ⁻	0,1180	0,0970	0,0995
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0845	0,0985	0,0565 ⁻	0,1140	0,0905	0,0940

Tabela 1 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,10$, $\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0535 ⁻⁻	0,0545 ⁻	0,1355 ⁺	0,3195 ⁺⁺	0,0980	0,1385 ⁺
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,1120	0,1130	0,1320 ⁺	0,2485 ⁺⁺	0,0840	0,0925
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0440 ⁻⁻	0,0440 ⁻⁻	0,1155	0,3020 ⁺⁺	0,0620 ⁻	0,1220
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,2160 ⁺⁺	0,2185 ⁺⁺	0,1690 ⁺⁺	0,2745 ⁺⁺	0,0950	0,1065

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 2 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, $\alpha = 0,01$, $\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
Normal multivariada								
3	5	(10, 10, 10)	0,0105	0,0130	0,0180	0,0180	0,0060	0,0070
		(10, 15, 20)	0,0100	0,0130	0,0205	0,0230 ⁺	0,0100	0,0115
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0115	0,0120	0,0405 ⁺⁺	0,0330 ⁺⁺	0,0180	0,0160
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0095	0,0110	0,0395 ⁺⁺	0,0355 ⁺⁺	0,0135	0,0135
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0095	0,0100	0,1140 ⁺⁺	0,1195 ⁺⁺	0,0170	0,0075
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0075	0,0075	0,1075 ⁺⁺	0,1150 ⁺⁺	0,0115	0,0100
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0085	0,0085	0,1200 ⁺⁺	0,1245 ⁺⁺	0,0090	0,0085
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0065	0,0065	0,1360 ⁺⁺	0,1325 ⁺⁺	0,0100	0,0100
t_3 multivariada								
3	5	(10, 10, 10)	0,0060	0,0125	0,0200	0,0135	0,0100	0,0060
		(10, 15, 20)	0,0035 ⁻	0,0085	0,0120	0,0090	0,0070	0,0060
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0085	0,0090	0,0355 ⁺⁺	0,0155	0,0090	0,0090
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0135	0,0165	0,0325 ⁺⁺	0,0135	0,0105	0,0100
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1960 ⁺⁺	0,1985 ⁺⁺	0,4705 ⁺⁺	0,0665 ⁺⁺	0,0265 ⁺	0,0100
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,1450 ⁺⁺	0,1480 ⁺⁺	0,4255 ⁺⁺	0,0340 ⁺⁺	0,0190	0,0070
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,4195 ⁺⁺	0,4210 ⁺⁺	0,6445 ⁺⁺	0,0750 ⁺⁺	0,0285 ⁺	0,0060
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,6740 ⁺⁺	0,6740 ⁺⁺	0,6185 ⁺⁺	0,0430 ⁺⁺	0,0170	0,0070
Uniforme (0, 1) multivariada								
3	5	(10, 10, 10)	0,0120	0,0145	0,0275 ⁺	0,0245 ⁺	0,0120	0,0125
		(10, 15, 20)	0,0100	0,0165	0,0180	0,0200	0,0090	0,0085
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0135	0,0165	0,0370 ⁺⁺	0,0400 ⁺⁺	0,0125	0,0170
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0080	0,0090	0,0290 ⁺	0,0305 ⁺	0,0100	0,0105
60	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0035 ⁻	0,0035 ⁻	0,0835 ⁺⁺	0,1850 ⁺⁺	0,0075	0,0290 ⁺
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0160	0,0160	0,0860 ⁺⁺	0,1275 ⁺⁺	0,0070	0,0105
100	5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0040	0,0040	0,0680 ⁺⁺	0,1715 ⁺⁺	0,0035 ⁻	0,0170
	250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0530 ⁺⁺	0,0530 ⁺⁺	0,1175 ⁺⁺	0,1585 ⁺⁺	0,0075	0,0135

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 3 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, $\alpha = 0,10, \Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$					
g	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$					
Normal multivariada					
3	(10, 10, 10)	0,1305 ⁺	0,1200	0,1080	0,1130
	(10, 15, 20)	0,1155	0,1060	0,1005	0,0985
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0695 ⁻	0,1280 ⁺	0,1155	0,1075
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0640 ⁻	0,1395 ⁺	0,1030	0,1015
60	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1765 ⁺⁺	0,2060 ⁺⁺	0,1100	0,1075
100	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,2245 ⁺⁺	0,2345 ⁺⁺	0,1185	0,1175
t_3 multivariada					
3	(10, 10, 10)	0,0765 ⁻	0,0695 ⁻	0,0810	0,0720 ⁻
	(10, 15, 20)	0,1220	0,0855	0,0985	0,0915
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0670 ⁻	0,0860	0,1130	0,1010
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0665 ⁻	0,0815	0,1075	0,0875
60	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,6110 ⁺⁺	0,0735 ⁻	0,2760 ⁺⁺	0,0735 ⁻
100	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,7755 ⁺⁺	0,0890	0,3515 ⁺⁺	0,0775 ⁻
Uniforme (0, 1) multivariada					
3	(10, 10, 10)	0,1255	0,1160	0,1080	0,1085
	(10, 15, 20)	0,1350 ⁺	0,1205	0,1055	0,1080
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0795	0,1410 ⁺	0,1135	0,1130
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0700 ⁻	0,1580 ⁺⁺	0,1100	0,1090
60	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1215	0,2465 ⁺⁺	0,0840	0,1305 ⁺
100	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1435 ⁺	0,2630 ⁺⁺	0,0795	0,1250

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 4 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuições multivariadas e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, $\alpha = 0,01$, $\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$					
g	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$					
Normal multivariada					
3	(10, 10, 10)	0,0295 ⁺	0,0340 ⁺⁺	0,0130	0,0145
	(10, 15, 20)	0,0175	0,0280 ⁺	0,0095	0,0100
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0420 ⁺⁺	0,0445 ⁺⁺	0,0110	0,0160
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0375 ⁺⁺	0,0430 ⁺⁺	0,0105	0,0100
60	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1240 ⁺⁺	0,0975 ⁺⁺	0,0170	0,0090
100	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1670 ⁺⁺	0,1140 ⁺⁺	0,0150	0,0115
t_3 multivariada					
3	(10, 10, 10)	0,0115	0,0120	0,0060	0,0035 ⁻
	(10, 15, 20)	0,0190	0,0195	0,0135	0,0100
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0380 ⁺⁺	0,0220 ⁺	0,0115	0,0100
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0385 ⁺⁺	0,0165	0,0050	0,0070
60	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,5275 ⁺⁺	0,0205	0,0310 ⁺	0,0055
100	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,7160 ⁺⁺	0,0330 ⁺⁺	0,0355 ⁺⁺	0,0090
Uniforme (0, 1) multivariada					
3	(10, 10, 10)	0,0320 ⁺⁺	0,0390 ⁺⁺	0,0125	0,0140
	(10, 15, 20)	0,0265 ⁺	0,0340 ⁺	0,0120	0,0125
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	0,0465 ⁺⁺	0,0550 ⁺⁺	0,0140	0,0165
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0405 ⁺⁺	0,0530 ⁺⁺	0,0100	0,0130
60	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0835 ⁺⁺	0,1290 ⁺⁺	0,0050	0,0220 ⁺
100	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0965 ⁺⁺	0,1395 ⁺⁺	0,0025 ⁻	0,0255 ⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

APÊNDICE B – Tabelas - Taxas de erro tipo I por experimento dos testes, casos heterocedásticos

Tabela 5 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,10$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$							
5	(10, 15, 20)	0,1095	0,1530 ⁺	0,0845	0,1120	0,1030	0,1045
	(50, 75, 100)	0,0955	0,1430 ⁺	0,1155	0,0955	0,1025	0,0995
50	(50, 75, 100)	0,1165	0,1720 ⁺⁺	0,1115	0,0855	0,1350 ⁺	0,1285 ⁺
100	(50, 75, 100)	0,1185	0,1730 ⁺⁺	0,1070	0,0915	0,1435 ⁺	0,1315 ⁺
$g = 6$							
5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0790	0,0985	0,0685 ⁻	0,1190	0,1130	0,1180
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0890	0,1035	0,0545 ⁻	0,0855	0,0935	0,0980
50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0765	0,0950	0,0720 ⁻	0,0675 ⁻	0,1090	0,1010
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0975	0,1155	0,1030	0,1095	0,1570 ⁺⁺	0,1450 ⁺⁺
100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,1135	0,1295 ⁺	0,1010	0,0970	0,1535 ⁺	0,1510 ⁺
300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0830	0,1045	0,1270	0,0705 ⁻	0,1720 ⁺⁺	0,1715 ⁺⁺
$g = 60$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0495 ⁻⁻	0,0505 ⁻⁻	0,1710 ⁺⁺	0,2495 ⁺⁺	0,1225	0,1345 ⁺
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0660 ⁻	0,0665 ⁻	0,3060 ⁺⁺	0,0660 ⁻	0,1885 ⁺⁺	0,2755 ⁺⁺
$g = 100$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1015	0,1025	0,1905 ⁺⁺	0,2490 ⁺⁺	0,1030	0,1100
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,1605 ⁺⁺	0,1620 ⁺⁺	0,5790 ⁺⁺	0,1430 ⁺	0,4230 ⁺⁺	0,5275 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 6 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,01$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$							
5	(10, 15, 20)	0,0125	0,0195	0,0225 ⁺	0,0205	0,0125	0,0140
	(50, 75, 100)	0,0110	0,0175	0,0165	0,0150	0,0075	0,0085
50	(50, 75, 100)	0,0160	0,0195	0,0330 ⁺	0,0180	0,0315 ⁺	0,0310 ⁺
100	(50, 75, 100)	0,0150	0,0200	0,0450 ⁺⁺	0,0160	0,0400 ⁺	0,0390 ⁺
$g = 6$							
5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0070	0,0070	0,0340 ⁺	0,0250 ⁺	0,0130	0,0130
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0100	0,0105	0,0265 ⁺	0,0145	0,0085	0,0105
50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0080	0,0105	0,0405 ⁺	0,0155	0,0220 ⁺	0,0215
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0135	0,0160	0,0605 ⁺⁺	0,0310 ⁺	0,0400 ⁺	0,0400 ⁺
100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0130	0,0180	0,0665 ⁺⁺	0,0295 ⁺	0,0505 ⁺⁺	0,0520 ⁺⁺
300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0095	0,0115	0,0840 ⁺⁺	0,0220 ⁺	0,0635 ⁺⁺	0,0610 ⁺⁺
$g = 60$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0050	0,0055	0,1200 ⁺⁺	0,1300 ⁺⁺	0,0145	0,0140
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0080	0,0085	0,2290 ⁺⁺	0,0175	0,0275 ⁺	0,0525 ⁺⁺
$g = 100$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0240 ⁺	0,0245 ⁺	0,1270 ⁺⁺	0,1260 ⁺⁺	0,0115	0,0145
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0290 ⁺	0,0295 ⁺	0,5150 ⁺⁺	0,0675 ⁺⁺	0,1515 ⁺⁺	0,2505 ⁺⁺

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 7 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,10$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$							
5	(10, 15, 20)	0,0930	0,1270	0,0780	0,0770	0,0885	0,0875
	(50, 75, 100)	0,0895	0,1325 ⁺	0,1065	0,0825	0,1010	0,0965
50	(50, 75, 100)	0,0935	0,1385 ⁺	0,1005	0,0620 ⁻	0,1255	0,1050
100	(50, 75, 100)	0,1040	0,1560 ⁺	0,0950	0,0540 ⁻	0,1240	0,1165
$g = 6$							
5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0860	0,1015	0,0735 ⁻	0,0840	0,1120	0,1045
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0910	0,1070	0,0675 ⁻	0,0745 ⁻	0,1095	0,0945
50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0970	0,1135	0,1060	0,0245 ⁻⁻	0,1355 ⁺	0,0880
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,1020	0,1205	0,0885	0,0455 ⁻⁻	0,1205	0,1065
100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,1190	0,1360 ⁺	0,1040	0,0435 ⁻⁻	0,1420 ⁺	0,1290 ⁺
300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,1025	0,1190	0,1020	0,0385 ⁻⁻	0,1400 ⁺	0,1435 ⁺
$g = 60$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,4335 ⁺⁺	0,4360 ⁺⁺	0,5670 ⁺⁺	0,1520 ⁺	0,2565 ⁺⁺	0,0980
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,3590 ⁺⁺	0,3615 ⁺⁺	0,8875 ⁺⁺	0,0135 ⁻⁻	0,3695 ⁺⁺	0,2160 ⁺⁺
$g = 100$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,6690 ⁺⁺	0,6705 ⁺⁺	0,7320 ⁺⁺	0,1455 ⁺	0,3250 ⁺⁺	0,0845
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,8630 ⁺⁺	0,8645 ⁺⁺	0,9620 ⁺⁺	0,0480 ⁻⁻	0,4425 ⁺⁺	0,5015 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 8 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,01$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$							
5	(10, 15, 20)	0,0085	0,0125	0,0100	0,0085	0,0040	0,0060
	(50, 75, 100)	0,0115	0,0160	0,0110	0,0095	0,0070	0,0085
50	(50, 75, 100)	0,0090	0,0115	0,0310 ⁺	0,0115	0,0320 ⁺	0,0280 ⁺
100	(50, 75, 100)	0,0095	0,0155	0,0300 ⁺	0,0080	0,0335 ⁺	0,0340 ⁺
$g = 6$							
5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0140	0,0180	0,0340 ⁺	0,0155	0,0085	0,0105
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0080	0,0105	0,0280 ⁺	0,0105	0,0085	0,0080
50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0100	0,0130	0,0410 ⁺	0,0055	0,0130	0,0105
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0130	0,0155	0,0425 ⁺	0,0095	0,0230 ⁺	0,0230 ⁺
100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0160	0,0185	0,0575 ⁺⁺	0,0130	0,0270 ⁺	0,0365 ⁺
300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0110	0,0120	0,0615 ⁺⁺	0,0085	0,0330 ⁺	0,0430 ⁺
$g = 60$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1955 ⁺⁺	0,1970 ⁺⁺	0,4760 ⁺⁺	0,0650 ⁺⁺	0,0305 ⁺	0,0125
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,1420 ⁺⁺	0,1425 ⁺⁺	0,8280 ⁺⁺	0,0030 ⁻	0,0225 ⁺	0,0320 ⁺
$g = 100$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,4360 ⁺⁺	0,4360 ⁺⁺	0,6725 ⁺⁺	0,0665 ⁺⁺	0,0370 ⁺	0,0095
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,7125 ⁺⁺	0,7135 ⁺⁺	0,9400 ⁺⁺	0,0165	0,0550 ⁺⁺	0,2125 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 9 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,10$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$							
5	(10, 15, 20)	0,0945	0,1450 ⁺	0,0855	0,0995	0,0935	0,0935
	(50, 75, 100)	0,1070	0,1560 ⁺	0,1140	0,0915	0,0935	0,0970
50	(50, 75, 100)	0,1260	0,1735 ⁺⁺	0,1150	0,1050	0,1305 ⁺	0,1280
100	(50, 75, 100)	0,1195	0,1735 ⁺⁺	0,1225	0,0965	0,1555 ⁺	0,1440 ⁺
$g = 6$							
5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0695 ⁻	0,0870	0,0675 ⁻	0,1230	0,1070	0,1085
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0850	0,1035	0,0575 ⁻	0,1015	0,1035	0,1015
50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0825	0,1035	0,0785	0,0840	0,1235	0,1175
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0925	0,1070	0,0975	0,1105	0,1470 ⁺	0,1450 ⁺
100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,1135	0,1335 ⁺	0,1230	0,1060	0,1665 ⁺⁺	0,1665 ⁺⁺
300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,1025	0,1165	0,1350 ⁺	0,0790	0,1880 ⁺⁺	0,1825 ⁺⁺
$g = 60$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0350 ⁻⁻	0,0360 ⁻⁻	0,1330 ⁺	0,2875 ⁺⁺	0,1000	0,1560 ⁺
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0695 ⁻	0,0700 ⁻	0,2615 ⁺⁺	0,0940	0,1765 ⁺⁺	0,3005 ⁺⁺
$g = 100$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0620 ⁻	0,0625 ⁻	0,1400 ⁺	0,2980 ⁺⁺	0,0950	0,1495 ⁺
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,1795 ⁺⁺	0,1795 ⁺⁺	0,5670 ⁺	1595 ⁺⁺	0,4400 ⁺⁺	0,5255 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 10 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,01$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
p	(r_1, \dots, r_g)	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
$g = 3$							
5	(10, 15, 20)	0,0130	0,0205	0,0210	0,0205	0,0080	0,0110
	(50, 75, 100)	0,0130	0,0195	0,0160	0,0175	0,0115	0,0115
50	(50, 75, 100)	0,0140	0,0235 ⁺	0,0440 ⁺⁺	0,0170	0,0390 ⁺	0,0385 ⁺
100	(50, 75, 100)	0,0110	0,0210	0,0600 ⁺⁺	0,0170	0,0580 ⁺⁺	0,0530 ⁺⁺
$g = 6$							
5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0085	0,0110	0,0330 ⁺	0,0290 ⁺	0,0120	0,0105
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0100	0,0115	0,0280 ⁺	0,0170	0,0085	0,0090
50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0090	0,0115	0,0450 ⁺⁺	0,0245 ⁺	0,0305 ⁺	0,0290 ⁺
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0150	0,0185	0,0555 ⁺⁺	0,0235 ⁺	0,0340 ⁺	0,0365 ⁺
100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0180	0,0200	0,0765 ⁺⁺	0,0260 ⁺	0,0500 ⁺⁺	0,0515 ⁺⁺
300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0175	0,0195	0,0985 ⁺⁺	0,0265 ⁺	0,0710 ⁺⁺	0,0660 ⁺⁺
$g = 60$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0030 ⁻	0,0030 ⁻	0,0850 ⁺⁺	0,1690 ⁺⁺	0,0100	0,0300 ⁺
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0080	0,0080	0,1925 ⁺⁺	0,0285 ⁺	0,0130	0,0565 ⁺⁺
$g = 100$							
5	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,0095	0,0100	0,0975 ⁺⁺	0,1790 ⁺⁺	0,0105	0,0260 ⁺
250	$r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$	0,0395 ⁺	0,0400 ⁺	0,4950 ⁺⁺	0,0800 ⁺⁺	0,1495 ⁺⁺	0,2380 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 11 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,10$						
$\Sigma_i : \text{SC}(0,5), \text{AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
	50	(10, 15, 20)	0,1255	0,0825	0,1340 ⁺	0,1140
	100	(10, 15, 20)	0,1545 ⁺⁺	0,0745 ⁻	0,1665 ⁺⁺	0,1255
3	300	(10, 15, 20)	0,1590 ⁺⁺	0,0580 ⁻	0,1795 ⁺⁺	0,1300 ⁺
		(50, 75, 100)	0,1315 ⁺	0,0775	0,1815 ⁺⁺	0,1645 ⁺⁺
	500	(10, 15, 20)	0,1780 ⁺⁺	0,0730 ⁻	0,2025 ⁺⁺	0,1440 ⁺
		(50, 75, 100)	0,1220	0,0535 ⁻⁻	0,1470 ⁺	0,1380 ⁺
	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0860	0,0620 ⁻	0,1270	0,1115
6	300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0905	0,0620 ⁻	0,1435 ⁺	0,1315 ⁺
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0820	0,0575 ⁻	0,1360 ⁺	0,1165
		(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,1470 ⁺	0,0775	0,2030 ⁺⁺	0,1945 ⁺⁺
60	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,3350 ⁺⁺	0,0100 ⁻⁻	0,2045 ⁺⁺	0,2375 ⁺⁺
100	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,6020 ⁺⁺	0,1255	0,4020 ⁺⁺	0,5200 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 12 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,01$						
$\Sigma_i : \text{SC}(0,5), \text{AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	0,0475 ⁺⁺	0,0215 ⁺	0,0420 ⁺	0,0345 ⁺
	100	(10, 15, 20)	0,0735 ⁺⁺	0,0285 ⁺	0,0700 ⁺⁺	0,0525 ⁺⁺
	300	(10, 15, 20)	0,0900 ⁺⁺	0,0150	0,0920 ⁺⁺	0,0495 ⁺⁺
		(50, 75, 100)	0,0770 ⁺⁺	0,0150	0,0775 ⁺⁺	0,0700 ⁺⁺
	500	(10, 15, 20) (50, 75, 100)	0,1170 ⁺⁺ 0,0695 ⁺⁺	0,0240 ⁺ 0,0145	0,1190 ⁺⁺ 0,0720 ⁺⁺	0,0675 ⁺⁺ 0,0610 ⁺⁺
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0460 ⁺⁺	0,0195	0,0310 ⁺	0,0285 ⁺
	300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0630 ⁺⁺	0,0230 ⁺	0,0420 ⁺	0,0365 ⁺
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20) (30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0555 ⁺⁺ 0,1095 ⁺⁺	0,0190 0,0255 ⁺	0,0390 ⁺ 0,0745 ⁺⁺	0,0305 ⁺ 0,0730 ⁺⁺
60	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,2560 ⁺⁺	0,0020 ⁻	0,0295 ⁺	0,0270 ⁺
100	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,5300 ⁺⁺	0,0455 ⁺⁺	0,1415 ⁺⁺	0,1950 ⁺⁺

-: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

+: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

++: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 13 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,10$						
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	0,0845	0,0370 ⁻⁻	0,1020	0,0745 ⁻
	100	(10, 15, 20)	0,0770	0,0315 ⁻⁻	0,1060	0,0710 ⁻
	300	(10, 15, 20)	0,0820	0,0330 ⁻⁻	0,1020	0,0795
		(50, 75, 100)	0,0850	0,0390 ⁻⁻	0,1080	0,1030
	500	(10, 15, 20) (50, 75, 100)	0,0740 ⁻ 0,1015	0,0290 ⁻⁻ 0,0425 ⁻⁻	0,0890 0,1235	0,0725 ⁻ 0,1105
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0785	0,0230 ⁻⁻	0,1250	0,0670 ⁻
	300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,1130	0,0220 ⁻⁻	0,1505 ⁺	0,0830
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20) (30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,1060 0,1090	0,0185 ⁻⁻ 0,0425 ⁻⁻	0,1520 ⁺ 0,1385 ⁺	0,0750 ⁻ 0,1395 ⁺
60	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,9210 ⁺⁺	0,0055 ⁻⁻	0,5560 ⁺⁺	0,1110
100	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,9840 ⁺⁺	0,0315 ⁻⁻	0,6785 ⁺⁺	0,3755 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 14 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,01$						
$\Sigma_i : \text{SC}(0,5), \text{AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	0,0190	0,0065	0,0180	0,0165
	100	(10, 15, 20)	0,0215 ⁺	0,0050	0,0205	0,0175
	300	(10, 15, 20)	0,0310 ⁺	0,0055	0,0295 ⁺	0,0220 ⁺
		(50, 75, 100)	0,0330 ⁺⁺	0,0070	0,0390 ⁺⁺	0,0355 ⁺⁺
	500	(10, 15, 20)	0,0325 ⁺⁺	0,0050	0,0315 ⁺	0,0170
		(50, 75, 100)	0,0410 ⁺⁺	0,0100	0,0470 ⁺⁺	0,0400 ⁺⁺
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0315 ⁺	0,0035 ⁻	0,0155	0,0105
	300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0490 ⁺⁺	0,0080	0,0170	0,0180
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0415 ⁺⁺	0,0035 ⁻	0,0140	0,0110
		(30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0670 ⁺⁺	0,0095	0,0395 ⁺⁺	0,0485 ⁺⁺
60	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,8805 ⁺⁺	0,0010 ⁻	0,0230 ⁺	0,0135
100	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,9685 ⁺⁺	0,0090	0,0520 ⁺⁺	0,1025 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 15 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,10$						
$\Sigma_i : \text{SC}(0,5), \text{AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	0,1255	0,0795	0,1365 ⁺	0,1100
	100	(10, 15, 20)	0,1405 ⁺	0,0665 ⁻	0,1500 ⁺	0,1145
	300	(10, 15, 20)	0,1530 ⁺	0,0570 ⁻	0,1685 ⁺⁺	0,1185
		(50, 75, 100)	0,1165	0,0630 ⁻	0,1535 ⁺	0,1440 ⁺
	500	(10, 15, 20)	0,1575 ⁺⁺	0,0650 ⁻	0,1785 ⁺⁺	0,1285 ⁺
		(50, 75, 100)	0,1325 ⁺	0,0610 ⁻	0,1670 ⁺⁺	0,1550 ⁺⁺
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0860	0,0740 ⁻	0,1270	0,1185
	300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0895	0,0605 ⁻	0,1375 ⁺	0,1220
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0990	0,0685 ⁻	0,1470 ⁺	0,1295 ⁺
(30, 40, 50, 60, 70, 80)		0,1260	0,0695 ⁻	0,1790 ⁺⁺	0,1750 ⁺⁺	
60	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,2600 ⁺⁺	0,0080 ⁻⁻	0,1555 ⁺⁺	0,3100 ⁺⁺
100	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,5460 ⁺⁺	0,1630 ⁺⁺	0,3765 ⁺⁺	0,5265 ⁺⁺

⁻: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

⁻⁻: TEE significativamente inferior a α , expressivamente conservativo.

⁺: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

⁺⁺: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 16 – Taxas de erro tipo I por experimento (TEEs) dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_0 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,01$						
$\Sigma_i : \text{SC}(0,5), \text{AR}(1, 0,5), \text{AR}(1, 0,7)$						
g	p	(r_1, \dots, r_g)	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	0,0490 ⁺⁺	0,0250 ⁺	0,0440 ⁺⁺	0,0385 ⁺⁺
	100	(10, 15, 20)	0,0595 ⁺⁺	0,0185	0,0545 ⁺⁺	0,0400 ⁺⁺
	300	(10, 15, 20)	0,0895 ⁺⁺	0,0220 ⁺	0,0905 ⁺⁺	0,0525 ⁺⁺
		(50, 75, 100)	0,0675 ⁺⁺	0,0185	0,0665 ⁺⁺	0,0585 ⁺⁺
	500	(10, 15, 20) (50, 75, 100)	0,1000 ⁺⁺ 0,0705 ⁺⁺	0,0290 ⁺ 0,0150	0,1085 ⁺⁺ 0,0715 ⁺⁺	0,0645 ⁺⁺ 0,0645 ⁺⁺
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0505 ⁺⁺	0,0220 ⁺	0,0350 ⁺⁺	0,0330 ⁺⁺
	300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	0,0615 ⁺⁺	0,0190	0,0360 ⁺⁺	0,0305 ⁺
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20) (30, 40, 50, 60, 70, 80)	0,0640 ⁺⁺ 0,0950 ⁺⁺	0,0315 ⁺ 0,0185	0,0495 ⁺⁺ 0,0685 ⁺⁺	0,0405 ⁺⁺ 0,0630 ⁺⁺
60	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,1720 ⁺⁺	0,0000 ⁻	0,0110	0,0335 ⁺⁺
100	250	$r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$	0,4755 ⁺⁺	0,0895 ⁺⁺	0,1255 ⁺⁺	0,2205 ⁺⁺

-: TEE significativamente inferior a α , levemente conservativo.

+: TEE significativamente superior a α , levemente liberal.

++: TEE significativamente superior a α , expressivamente liberal.

Fonte: Da autora (2025).

APÊNDICE C – Tabelas - Poder dos testes, casos homocedásticos

Tabela 17 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,01$										
$\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$										
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB	
3	5	(10, 10, 10)	1	0,0160	0,0240	0,1067	0,0945	0,0570	0,0580	
			2	0,1010	0,1325	0,4908	0,4570	0,3610	0,3568	
			4	0,7520	0,7968	0,9905	0,9870	0,9750	0,9745	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		(10, 15, 20)	1	0,0240	0,0315	0,0978	0,0905	0,0635	0,0587	
			2	0,1227	0,1548	0,4805	0,4468	0,3685	0,3588	
			4	0,8403	0,8745	0,9912	0,9858	0,9830	0,9780	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,0119	0,0141	0,0848	0,0674	0,0391	0,0351	
			2	0,0825	0,0913	0,4339	0,3539	0,2790	0,2491	
			4	0,7925	0,8065	0,9886	0,9739	0,9668	0,9521	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0104	0,0122	0,0767	0,0605	0,0321	0,0282	
			2	0,0938	0,1019	0,4321	0,3640	0,2822	0,2593	
			4	0,8209	0,8359	0,9895	0,9743	0,9683	0,9566	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0014	0,0015	0,0519	0,0344	0,0084	0,0031	
			2	0,0273	0,0275	0,3608	0,2114	0,1309	0,0429	
			4	0,6429	0,6446	0,9861	0,8295	0,9149	0,5265	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	0,9982	
		250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0002	0,0002	0,0744	0,0511	0,0117	0,0094
				2	0,0003	0,0003	0,4756	0,3233	0,1941	0,1522
				4	0,0007	0,0007	0,9966	0,9544	0,9708	0,9241
				8	0,0242	0,0245	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0010	0,0010	0,0478	0,0297	0,0058	0,0022	
			2	0,0202	0,0203	0,3452	0,1870	0,1071	0,0317	
			4	0,6199	0,6208	0,9864	0,8083	0,9048	0,4654	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	0,9978	
		250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0001	0,0001	0,0672	0,0443	0,0089	0,0069
				2	0,0003	0,0003	0,4595	0,2973	0,1613	0,1241
				4	0,0028	0,0029	0,9968	0,9504	0,9655	0,9133
				8	0,3078	0,3089	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 18 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,05$									
$\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
3	5	(10, 10, 10)	1	0,0690	0,0955	0,1455	0,1928	0,1690	0,1685
			2	0,2605	0,3325	0,5695	0,6318	0,6072	0,5933
			4	0,9185	0,9442	0,9952	0,9952	0,9962	0,9948
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		(10, 15, 20)	1	0,0690	0,1003	0,1298	0,1820	0,1588	0,1592
			2	0,2978	0,3592	0,5528	0,6185	0,5990	0,5898
			4	0,9482	0,9655	0,9940	0,9962	0,9958	0,9960
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,0443	0,0493	0,1103	0,1311	0,1107	0,1032
			2	0,1989	0,2186	0,4975	0,5128	0,4972	0,4646
			4	0,7925	0,8065	0,9886	0,9739	0,9668	0,9521
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0376	0,0444	0,1032	0,1234	0,1041	0,0964
			2	0,2159	0,2366	0,4942	0,5214	0,4955	0,4675
			4	0,9267	0,9350	0,9938	0,9922	0,9936	0,9900
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0053	0,0053	0,0641	0,0571	0,0287	0,0153
			2	0,0659	0,0665	0,3997	0,2919	0,2650	0,1314
			4	0,7911	0,7926	0,9896	0,8965	0,9711	0,7756
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0008	0,0008	0,0898	0,0800	0,0403	0,0337
			2	0,0012	0,0012	0,5159	0,4185	0,3609	0,3069
			4	0,0032	0,0033	0,9975	0,9776	0,9921	0,9771
			8	0,0698	0,0708	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0033	0,0033	0,0585	0,0478	0,0220	0,0106
			2	0,0507	0,0509	0,3822	0,2581	0,2281	0,1022
			4	0,7655	0,7664	0,9895	0,8787	0,9670	0,7304
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0007	0,0007	0,0807	0,0682	0,0307	0,0255
			2	0,0012	0,0013	0,4970	0,3843	0,3142	0,2619
			4	0,0096	0,0096	0,9976	0,9752	0,9901	0,9733
			8	0,4789	0,4800	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 19 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,10$									
$\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
3	5	(10, 10, 10)	1	0,1168	0,1635	0,2265	0,2565	0,2547	0,2500
			2	0,3852	0,4690	0,6732	0,7163	0,7188	0,7138
			4	0,9598	0,9735	0,9975	0,9975	0,9980	0,9975
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		(10, 15, 20)	1	0,1262	0,1718	0,2235	0,2425	0,2430	0,2387
			2	0,4055	0,4892	0,6558	0,7048	0,7108	0,6970
			4	0,9758	0,9852	0,9962	0,9972	0,9982	0,9972
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,0693	0,0798	0,1288	0,1777	0,1778	0,1664
			2	0,2826	0,3055	0,5327	0,5879	0,6090	0,5783
			4	0,9507	0,9592	0,9940	0,9952	0,9965	0,9954
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0655	0,0748	0,1178	0,1657	0,1581	0,1529
			2	0,2994	0,3252	0,5285	0,6059	0,6062	0,5840
			4	0,9555	0,9621	0,9955	0,9961	0,9978	0,9964
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0094	0,0095	0,0707	0,0715	0,0500	0,0298
			2	0,0948	0,0956	0,4193	0,3364	0,3514	0,2053
			4	0,8445	0,8457	0,9910	0,9220	0,9850	0,8655
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0017	0,0017	0,0980	0,0982	0,0687	0,0590
			2	0,0024	0,0024	0,5347	0,4668	0,4582	0,4042
			4	0,0062	0,0063	0,9979	0,9845	0,9961	0,9889
			8	0,1067	0,1079	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0058	0,0058	0,0643	0,0594	0,0391	0,0221
			2	0,0748	0,0751	0,4010	0,2978	0,3091	0,1668
			4	0,8206	0,8213	0,9908	0,9058	0,9821	0,8340
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0014	0,0014	0,0879	0,0832	0,0523	0,0453
			2	0,0023	0,0024	0,5155	0,4293	0,4088	0,3545
			4	0,0160	0,0161	0,9979	0,9829	0,9951	0,9868
			8	0,5625	0,5637	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 20 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,01$									
$\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
3	5	(10, 10, 10)	1	0,0275	0,0362	0,1400	0,1260	0,0920	0,1010
			2	0,2480	0,2958	0,5758	0,5405	0,4892	0,5150
			4	0,9107	0,9285	0,9622	0,9520	0,9580	0,9605
			8	0,9995	0,9998	0,9970	0,9960	0,9972	0,9968
		(10, 15, 20)	1	0,0302	0,0408	0,1250	0,1250	0,0865	0,1045
			2	0,2670	0,3142	0,5640	0,5552	0,4963	0,5347
			4	0,9308	0,9460	0,9650	0,9542	0,9598	0,9628
			8	1,0000	1,0000	0,9982	0,9958	0,9980	0,9975
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,0159	0,0174	0,0987	0,0912	0,0464	0,0679
			2	0,1949	0,2090	0,5248	0,4881	0,3795	0,4607
			4	0,9044	0,9121	0,9619	0,9394	0,9406	0,9501
			8	0,9998	1,0000	0,9975	0,9938	0,9968	0,9966
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0177	0,0215	0,0931	0,0820	0,0465	0,0633
			2	0,1772	0,1929	0,5070	0,4782	0,3461	0,4468
			4	0,9199	0,9269	0,9684	0,9445	0,9411	0,9543
			8	0,9999	0,9999	0,9975	0,9964	0,9965	0,9978
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0131	0,0132	0,0626	0,0668	0,0057	0,0145
			2	0,0605	0,0610	0,3868	0,3673	0,0783	0,1828
			4	0,7765	0,7776	0,9661	0,8541	0,7293	0,7723
			8	0,9999	0,9999	0,9994	0,9820	0,9890	0,9758
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0044	0,0044	0,0778	0,0637	0,0068	0,0353
			2	0,0078	0,0079	0,4787	0,4384	0,0998	0,4068
			4	0,0252	0,0254	0,9848	0,9065	0,8115	0,9322
			8	0,4179	0,4199	0,9985	0,9894	0,9879	0,9942
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0162	0,0163	0,0563	0,0500	0,0046	0,0108
			2	0,0516	0,0518	0,3638	0,3470	0,0449	0,1634
			4	0,9107	0,9285	0,9622	0,9520	0,9580	0,9605
			8	0,9994	0,9994	0,9980	0,9825	0,9722	0,9753
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0384	0,0385	0,0778	0,0582	0,0050	0,0297
			2	0,0476	0,0477	0,4680	0,4052	0,0607	0,3677
			4	0,1228	0,1231	0,9844	0,8960	0,7272	0,9261
			8	0,9239	0,9242	0,9995	0,9874	0,9845	0,9946

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 21 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,05$									
$\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
3	5	(10, 10, 10)	1	0,0932	0,1332	0,1862	0,2405	0,2212	0,2338
			2	0,4662	0,5312	0,6318	0,6958	0,6858	0,6988
			4	0,9695	0,9755	0,9710	0,9725	0,9790	0,9782
			8	1,0000	1,0000	0,9982	0,9978	0,9988	0,9988
		(10, 15, 20)	1	0,1118	0,1485	0,1693	0,2362	0,2130	0,2338
			2	0,4778	0,5465	0,6260	0,7000	0,6830	0,7098
			4	0,9760	0,9835	0,9728	0,9775	0,9812	0,9822
			8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9978	0,9995	0,9998
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,0522	0,0594	0,1257	0,1673	0,1273	0,1671
			2	0,3551	0,3780	0,5792	0,6266	0,5811	0,6409
			4	0,9584	0,9634	0,9678	0,9663	0,9686	0,9741
			8	1,0000	1,0000	0,9976	0,9969	0,9980	0,9976
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0583	0,0648	0,1192	0,1544	0,1174	0,1503
			2	0,3413	0,3631	0,5626	0,6133	0,5556	0,6261
			4	0,9652	0,9690	0,9739	0,9652	0,9715	0,9754
			8	0,9999	0,9999	0,9983	0,9977	0,9977	0,9988
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0254	0,0256	0,0738	0,1029	0,0210	0,0523
			2	0,1133	0,1141	0,4267	0,4550	0,1821	0,3560
			4	0,8746	0,8754	0,9702	0,8921	0,8584	0,8757
			8	0,9999	0,9999	0,9994	0,9879	0,9956	0,9881
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0107	0,0108	0,0912	0,0993	0,0242	0,0874
			2	0,0173	0,0174	0,5198	0,5271	0,2252	0,5594
			4	0,0549	0,0554	0,9870	0,9313	0,9094	0,9597
			8	0,6087	0,6109	0,9985	0,9921	0,9931	0,9960
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0262	0,0262	0,0656	0,0785	0,0147	0,0367
			2	0,0922	0,0926	0,4039	0,4315	0,1195	0,3243
			4	0,9695	0,9755	0,9710	0,9725	0,9790	0,9782
			8	0,9998	0,9998	0,9981	0,9869	0,9853	0,9874
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0572	0,0574	0,0899	0,0897	0,0167	0,0764
			2	0,0708	0,0710	0,5065	0,4912	0,1567	0,5230
			4	0,1766	0,1770	0,9866	0,9225	0,8454	0,9542
			8	0,9634	0,9635	0,9995	0,9910	0,9906	0,9968

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 22 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,10$									
$\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
3	5	(10, 10, 10)	1	0,1620	0,2115	0,2808	0,3245	0,3190	0,3365
			2	0,5842	0,6577	0,7198	0,7580	0,7650	0,7772
			4	0,9812	0,9885	0,9800	0,9805	0,9865	0,9840
			8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9990	0,9992	0,9992
		(10, 15, 20)	1	0,1798	0,2303	0,2758	0,3108	0,3010	0,3208
			2	0,5958	0,6658	0,7248	0,7690	0,7648	0,7805
			4	0,9872	0,9920	0,9845	0,9840	0,9860	0,9868
			8	1,0000	1,0000	0,9995	0,9992	0,9995	0,9998
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,0886	0,1007	0,1439	0,2156	0,1895	0,2310
			2	0,4497	0,4761	0,6109	0,6883	0,6744	0,7210
			4	0,9726	0,9761	0,9703	0,9740	0,9784	0,9809
			8	1,0000	1,0000	0,9980	0,9972	0,9992	0,9981
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0932	0,1042	0,1361	0,2107	0,1788	0,2235
			2	0,4334	0,4608	0,5935	0,6845	0,6523	0,7101
			4	0,9780	0,9807	0,9767	0,9738	0,9812	0,9818
			8	1,0000	1,0000	0,9985	0,9984	0,9986	0,9992
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0337	0,0339	0,0799	0,1254	0,0363	0,0882
			2	0,1470	0,1479	0,4478	0,5011	0,2598	0,4539
			4	0,9073	0,9080	0,9724	0,9088	0,8999	0,9106
			8	0,9999	0,9999	0,9994	0,9899	0,9964	0,9924
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0154	0,0155	0,0986	0,1214	0,0411	0,1303
			2	0,0248	0,0251	0,5394	0,5697	0,3127	0,6323
			4	0,0763	0,0768	0,9880	0,9414	0,9366	0,9695
			8	0,6925	0,6947	0,9986	0,9932	0,9945	0,9967
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0328	0,0329	0,0706	0,0966	0,0240	0,0626
			2	0,1191	0,1196	0,4241	0,4734	0,1815	0,4193
			4	0,9812	0,9885	0,9800	0,9805	0,9865	0,9840
			8	0,9999	0,9999	0,9981	0,9884	0,9877	0,9899
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0685	0,0688	0,0965	0,1094	0,0280	0,1153
			2	0,0842	0,0844	0,5254	0,5328	0,2267	0,5978
			4	0,2067	0,2071	0,9876	0,9325	0,8811	0,9644
			8	0,9749	0,9750	0,9995	0,9925	0,9923	0,9974

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 23 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,01$									
$\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
3	5	(10, 10, 10)	1	0,0173	0,0243	0,1000	0,0882	0,0573	0,0555
			2	0,0825	0,1110	0,4682	0,4265	0,3288	0,3070
			4	0,7215	0,7770	0,9958	0,9938	0,9835	0,9805
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		(10, 15, 20)	1	0,0187	0,0253	0,0912	0,0855	0,0515	0,0480
			2	0,1133	0,1440	0,4715	0,4387	0,3618	0,3375
			4	0,8282	0,8630	0,9955	0,9938	0,9875	0,9840
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,0112	0,0128	0,0870	0,0702	0,0422	0,0340
			2	0,0801	0,0880	0,4241	0,3476	0,2762	0,2200
			4	0,7562	0,7751	0,9902	0,9824	0,9713	0,9520
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0125	0,0138	0,0761	0,0613	0,0364	0,0293
			2	0,0834	0,0918	0,4289	0,3539	0,2830	0,2264
			4	0,8224	0,8368	0,9907	0,9833	0,9752	0,9625
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0007	0,0007	0,0565	0,0389	0,0114	0,0042
			2	0,0241	0,0244	0,3776	0,1925	0,1595	0,0292
			4	0,6132	0,6148	0,9877	0,8391	0,9315	0,3565
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0003	0,0003	0,0727	0,0515	0,0148	0,0086
			2	0,0007	0,0007	0,4629	0,2875	0,2007	0,0929
			4	0,0010	0,0010	0,9966	0,9716	0,9748	0,9061
			8	0,0136	0,0138	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0004	0,0004	0,0473	0,0313	0,0078	0,0024
			2	0,0183	0,0185	0,3520	0,1631	0,1356	0,0218
			4	0,6300	0,6309	0,9866	0,8250	0,9285	0,3212
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0011	0,0011	0,0657	0,0423	0,0097	0,0048
			2	0,0017	0,0017	0,4519	0,2745	0,1808	0,0795
			4	0,0059	0,0059	0,9964	0,9684	0,9709	0,8829
			8	0,2323	0,2330	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 24 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,05$									
$\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
3	5	(10, 10, 10)	1	0,0653	0,0867	0,1360	0,1770	0,1568	0,1450
			2	0,2372	0,2900	0,5452	0,6062	0,5795	0,5635
			4	0,9102	0,9432	0,9980	0,9992	0,9985	0,9980
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		(10, 15, 20)	1	0,0670	0,0895	0,1238	0,1718	0,1548	0,1452
			2	0,2758	0,3398	0,5485	0,6172	0,6012	0,5738
			4	0,9532	0,9685	0,9978	0,9990	0,9988	0,9990
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,0379	0,0433	0,1119	0,1294	0,1134	0,0992
			2	0,1895	0,2094	0,4859	0,4947	0,4853	0,4363
			4	0,8986	0,9111	0,9940	0,9948	0,9939	0,9917
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0385	0,0432	0,1005	0,1180	0,1036	0,0884
			2	0,2007	0,2200	0,4890	0,5086	0,4932	0,4427
			4	0,9268	0,9355	0,9947	0,9962	0,9949	0,9934
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0035	0,0036	0,0692	0,0598	0,0365	0,0161
			2	0,0667	0,0674	0,4169	0,2680	0,3014	0,0950
			4	0,7669	0,7683	0,9909	0,9192	0,9781	0,6869
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0016	0,0016	0,0876	0,0781	0,0449	0,0293
			2	0,0027	0,0027	0,5039	0,3839	0,3662	0,2312
			4	0,0042	0,0043	0,9975	0,9894	0,9929	0,9819
			8	0,0405	0,0410	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0024	0,0024	0,0582	0,0485	0,0263	0,0108
			2	0,0498	0,0501	0,3897	0,2276	0,2606	0,0709
			4	0,7683	0,7691	0,9898	0,9038	0,9739	0,6467
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0036	0,0037	0,0789	0,0646	0,0332	0,0197
			2	0,0052	0,0053	0,4896	0,3593	0,3304	0,2004
			4	0,0164	0,0165	0,9972	0,9876	0,9913	0,9761
			8	0,3706	0,3715	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 25 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de baixa dimensionalidade.

Baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,10$										
$\Sigma_i : SC(0,5), \forall i = 1, \dots, g$										
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB	
3	5	(10, 10, 10)	1	0,1113	0,1502	0,2108	0,2357	0,2375	0,2272	
			2	0,3340	0,4132	0,6508	0,6972	0,6988	0,6832	
			4	0,9645	0,9810	0,9992	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		(10, 15, 20)	1	0,1143	0,1560	0,2165	0,2370	0,2375	0,2270	
			2	0,3885	0,4648	0,6615	0,7008	0,7018	0,6922	
	4		0,9780	0,9890	0,9990	0,9998	0,9995	0,9995		
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	6	5	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,0636	0,0737	0,1315	0,1742	0,1771	0,1586
				2	0,2676	0,2932	0,5176	0,5779	0,6004	0,5555
				4	0,9420	0,9499	0,9956	0,9977	0,9973	0,9974
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
(10, 10, 10, 20, 20, 20)			1	0,0630	0,0732	0,1176	0,1645	0,1634	0,1444	
			2	0,2869	0,3124	0,5232	0,5958	0,6059	0,5621	
		4	0,9591	0,9646	0,9961	0,9983	0,9983	0,9983		
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
60		5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0069	0,0070	0,0767	0,0738	0,0608	0,0296
				2	0,0979	0,0987	0,4372	0,3118	0,3900	0,1566
				4	0,8249	0,8263	0,9923	0,9467	0,9888	0,8353
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0033	0,0033	0,0956	0,0944	0,0726	0,0510	
			2	0,0047	0,0048	0,5235	0,4357	0,4630	0,3334	
			4	0,0079	0,0080	0,9980	0,9937	0,9966	0,9933	
			8	0,0636	0,0643	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0044	0,0044	0,0646	0,0590	0,0452	0,0203
				2	0,0739	0,0743	0,4082	0,2645	0,3433	0,1209
				4	0,8215	0,8222	0,9912	0,9332	0,9856	0,7988
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250		$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0059	0,0059	0,0863	0,0787	0,0560	0,0360	
			2	0,0084	0,0085	0,5080	0,4055	0,4217	0,2909	
			4	0,0256	0,0257	0,9976	0,9925	0,9954	0,9911	
			8	0,4415	0,4426	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 26 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,01$						
$\Sigma_i : SC (0,5), \forall i = 1, \dots, g$						
g	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$						
3	(10, 10, 10)	1	0,1360	0,1375	0,0795	0,0850
		2	0,5942	0,5702	0,4458	0,4515
		4	0,9978	0,9968	0,9912	0,9922
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 15, 20)	1	0,1248	0,1335	0,0727	0,0778
		2	0,5770	0,5718	0,4475	0,4528
		4	0,9980	0,9970	0,9945	0,9942
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,1035	0,0938	0,0417	0,0405
		2	0,5610	0,5108	0,3815	0,3686
		4	0,9981	0,9924	0,9900	0,9856
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,1026	0,1002	0,0432	0,0446
		2	0,5408	0,5024	0,3640	0,3567
		4	0,9980	0,9954	0,9933	0,9901
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0736	0,0420	0,0113	0,0087
		2	0,4806	0,2609	0,1851	0,1118
		4	0,9964	0,8968	0,9647	0,8377
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0664	0,0322	0,0089	0,0058
		2	0,4679	0,2347	0,1644	0,0929
		4	0,9960	0,8787	0,9587	0,8164
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 27 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,05$						
$\Sigma_i : SC (0,5), \forall i = 1, \dots, g$						
g	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$						
3	(10, 10, 10)	1	0,1750	0,2313	0,1968	0,1983
		2	0,6577	0,7160	0,6875	0,6852
		4	0,9995	0,9995	0,9995	0,9992
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 15, 20)	1	0,1618	0,2320	0,1995	0,1965
		2	0,6448	0,7255	0,6948	0,6910
		4	0,9985	0,9992	0,9995	0,9990
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,1278	0,1592	0,1247	0,1193
		2	0,6152	0,6457	0,6064	0,5914
		4	0,9992	0,9990	0,9990	0,9985
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,1274	0,1675	0,1268	0,1240
		2	0,6001	0,6455	0,5943	0,5824
		4	0,9985	0,9986	0,9985	0,9981
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0885	0,0677	0,0384	0,0306
		2	0,5210	0,3526	0,3540	0,2478
		4	0,9975	0,9420	0,9907	0,9402
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0792	0,0521	0,0294	0,0214
		2	0,5063	0,3166	0,3186	0,2128
		4	0,9971	0,9291	0,9881	0,9286
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 28 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,10$						
$\Sigma_i : SC (0,5), \forall i = 1, \dots, g$						
g	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$						
3	(10, 10, 10)	1	0,2892	0,2985	0,2992	0,2938
		2	0,7635	0,7800	0,7832	0,7772
		4	0,9995	0,9998	1,0000	0,9998
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 15, 20)	1	0,2995	0,2990	0,2948	0,2948
		2	0,7640	0,7890	0,7948	0,7867
		4	1,0000	0,9992	0,9995	0,9995
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,1441	0,2059	0,1945	0,1866
		2	0,6453	0,7099	0,7134	0,7026
		4	0,9992	0,9997	0,9996	0,9996
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,1454	0,2152	0,1912	0,1878
		2	0,6299	0,7140	0,7038	0,6891
		4	0,9987	0,9992	0,9995	0,9991
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0967	0,0837	0,0658	0,0532
		2	0,5408	0,4016	0,4542	0,3420
		4	0,9978	0,9577	0,9956	0,9679
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0860	0,0647	0,0502	0,0379
		2	0,5249	0,3619	0,4143	0,3005
		4	0,9975	0,9475	0,9940	0,9602
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 29 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,01$						
$\Sigma_i : SC (0,5), \forall i = 1, \dots, g$						
g	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$						
3	(10, 10, 10)	1	0,1752	0,1708	0,1255	0,1383
		2	0,6662	0,6555	0,5952	0,6330
		4	0,9760	0,9653	0,9720	0,9755
		8	0,9982	0,9975	0,9982	0,9985
	(10, 15, 20)	1	0,1555	0,1632	0,1163	0,1305
		2	0,6535	0,6498	0,5828	0,6290
		4	0,9722	0,9633	0,9663	0,9722
		8	0,9988	0,9972	0,9988	0,9988
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,1295	0,1254	0,0616	0,0965
		2	0,6146	0,5867	0,4670	0,5685
		4	0,9787	0,9521	0,9653	0,9663
		8	0,9971	0,9942	0,9964	0,9960
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,1237	0,1210	0,0592	0,0877
		2	0,5915	0,5734	0,4332	0,5430
		4	0,9751	0,9590	0,9559	0,9734
		8	0,9987	0,9964	0,9978	0,9984
60	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0826	0,0633	0,0074	0,0347
		2	0,5089	0,4264	0,1137	0,3815
		4	0,9796	0,8816	0,8059	0,8986
		8	0,9984	0,9840	0,9832	0,9884
100	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0817	0,0537	0,0056	0,0284
		2	0,4819	0,3902	0,0697	0,3483
		4	0,9815	0,8684	0,7305	0,8928
		8	0,9988	0,9823	0,9768	0,9884

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 30 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,05$						
$\Sigma_i : SC (0,5), \forall i = 1, \dots, g$						
g	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$						
3	(10, 10, 10)	1	0,2275	0,2930	0,2730	0,2932
		2	0,7202	0,7748	0,7718	0,7910
		4	0,9820	0,9835	0,9875	0,9888
		8	0,9990	0,9985	0,9995	0,9995
	(10, 15, 20)	1	0,2000	0,2852	0,2595	0,2790
		2	0,7070	0,7655	0,7560	0,7810
		4	0,9765	0,9782	0,9832	0,9872
		8	0,9988	0,9985	0,9990	0,9995
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,1633	0,2064	0,1642	0,2047
		2	0,6626	0,7040	0,6636	0,7310
		4	0,9818	0,9692	0,9822	0,9817
		8	0,9977	0,9957	0,9981	0,9981
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,1538	0,2045	0,1497	0,1949
		2	0,6414	0,6922	0,6312	0,7094
		4	0,9798	0,9755	0,9769	0,9843
		8	0,9988	0,9979	0,9988	0,9989
60	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0957	0,1025	0,0273	0,0939
		2	0,5491	0,5168	0,2441	0,5471
		4	0,9825	0,9122	0,9021	0,9413
		8	0,9986	0,9870	0,9896	0,9926
100	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0937	0,0846	0,0201	0,0771
		2	0,5217	0,4730	0,1696	0,5069
		4	0,9837	0,9033	0,8584	0,9371
		8	0,9989	0,9863	0,9883	0,9930

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 31 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,10$						
$\Sigma_i : SC (0,5), \forall i = 1, \dots, g$						
g	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$						
3	(10, 10, 10)	1	0,3275	0,3698	0,3688	0,3912
		2	0,8012	0,8285	0,8410	0,8515
		4	0,9872	0,9880	0,9915	0,9930
		8	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
	(10, 15, 20)	1	0,3355	0,3618	0,3625	0,3848
		2	0,7925	0,8158	0,8228	0,8360
		4	0,9850	0,9850	0,9895	0,9915
		8	0,9998	0,9990	0,9995	1,0000
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,1837	0,2575	0,2358	0,2825
		2	0,6878	0,7574	0,7455	0,7959
		4	0,9832	0,9767	0,9874	0,9862
		8	0,9981	0,9967	0,9984	0,9986
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,1745	0,2630	0,2193	0,2739
		2	0,6655	0,7466	0,7236	0,7801
		4	0,9814	0,9809	0,9846	0,9880
		8	0,9988	0,9985	0,9988	0,9991
60	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,1031	0,1260	0,0453	0,1409
		2	0,5689	0,5612	0,3335	0,6265
		4	0,9838	0,9256	0,9300	0,9557
		8	0,9987	0,9883	0,9924	0,9944
100	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,1003	0,1042	0,0324	0,1167
		2	0,5409	0,5143	0,2456	0,5848
		4	0,9846	0,9168	0,8962	0,9522
		8	0,9990	0,9884	0,9901	0,9947

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 32 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,01$						
$\Sigma_i : SC (0,5), \forall i = 1, \dots, g$						
g	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$						
3	(10, 10, 10)	1	0,1265	0,1222	0,0678	0,0678
		2	0,5972	0,5755	0,4343	0,4280
		4	0,9982	0,9978	0,9940	0,9942
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 15, 20)	1	0,1180	0,1262	0,0775	0,0757
		2	0,5720	0,5692	0,4445	0,4310
		4	0,9992	0,9992	0,9970	0,9965
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,1113	0,1008	0,0469	0,0419
		2	0,5465	0,4899	0,3626	0,3225
		4	0,9985	0,9969	0,9941	0,9925
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0984	0,0940	0,0430	0,0373
		2	0,5517	0,5045	0,3750	0,3313
		4	0,9984	0,9971	0,9928	0,9903
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0724	0,0391	0,0126	0,0066
		2	0,4736	0,2330	0,2104	0,0729
		4	0,9974	0,9180	0,9760	0,7652
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0630	0,0313	0,0093	0,0045
		2	0,4679	0,2144	0,1929	0,0594
		4	0,9974	0,9050	0,9727	0,7357
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 33 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,05$						
$\Sigma_i : SC (0,5), \forall i = 1, \dots, g$						
g	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$						
3	(10, 10, 10)	1	0,1680	0,2220	0,1928	0,1872
		2	0,6672	0,7415	0,7002	0,6892
		4	0,9992	0,9995	0,9992	0,9995
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 15, 20)	1	0,1560	0,2202	0,1918	0,1840
		2	0,6440	0,7250	0,6955	0,6792
		4	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,1383	0,1709	0,1350	0,1235
		2	0,6029	0,6325	0,5955	0,5594
		4	0,9990	0,9994	0,9989	0,9989
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,1269	0,1629	0,1265	0,1126
		2	0,6085	0,6461	0,6067	0,5705
		4	0,9987	0,9992	0,9988	0,9987
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0878	0,0616	0,0424	0,0238
		2	0,5130	0,3178	0,3747	0,1816
		4	0,9982	0,9647	0,9939	0,9411
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0760	0,0498	0,0322	0,0163
		2	0,5067	0,2911	0,3477	0,1540
		4	0,9981	0,9554	0,9927	0,9279
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 34 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC), número de tratamentos (g), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de variáveis (p), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos homocedásticos e de alta dimensionalidade.

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,10$						
$\Sigma_i : SC (0,5), \forall i = 1, \dots, g$						
g	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
$p = 250$						
3	(10, 10, 10)	1	0,3035	0,2978	0,2920	0,2852
		2	0,7730	0,8072	0,8098	0,8040
		4	0,9995	1,0000	0,9998	0,9998
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 15, 20)	1	0,2898	0,2765	0,2780	0,2645
		2	0,7575	0,7980	0,7985	0,7918
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	(10, 10, 10, 10, 10, 10)	1	0,1570	0,2142	0,2059	0,1910
		2	0,6343	0,6989	0,7010	0,6756
		4	0,9991	0,9997	0,9997	0,9998
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,1426	0,2094	0,1936	0,1777
		2	0,6387	0,7144	0,7075	0,6840
		4	0,9990	0,9995	0,9993	0,9992
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0957	0,0762	0,0712	0,0418
		2	0,5324	0,3643	0,4704	0,2686
		4	0,9985	0,9782	0,9973	0,9794
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0832	0,0616	0,0542	0,0303
		2	0,5252	0,3336	0,4405	0,2314
		4	0,9984	0,9715	0,9966	0,9733
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 35 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,01$										
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$										
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0075	0,0083	0,3016	0,3939	0,2098	0,1963	
			2	0,0576	0,0632	0,9602	0,9052	0,9480	0,9447	
			4	0,8536	0,8677	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0037	0,0044	0,4501	0,6273	0,2797	0,2362	
			2	0,0040	0,0049	0,9699	0,9148	0,9596	0,9577	
			4	0,0216	0,0251	1,0000	0,9998	1,0000	1,0000	
			8	0,3880	0,4150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0018	0,0018	0,0612	0,0348	0,0130	0,0053
				2	0,0312	0,0314	0,3862	0,2024	0,1527	0,0548
				4	0,7014	0,7030	0,9898	0,8223	0,9360	0,5543
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991
250		$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0002	0,0002	0,1966	0,0217	0,0321	0,0418	
			2	0,0004	0,0004	0,9716	0,8499	0,8794	0,9095	
			4	0,0066	0,0067	1,0000	0,9995	1,0000	1,0000	
			8	0,4723	0,4743	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
100		5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0018	0,0018	0,0509	0,0286	0,0079	0,0029
				2	0,0345	0,0347	0,3887	0,1924	0,1383	0,0419
				4	0,7206	0,7213	0,9893	0,8203	0,9306	0,5219
				8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	0,9985
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0006	0,0006	0,2879	0,0499	0,0782	0,1138	
			2	0,0029	0,0029	0,8803	0,4787	0,6439	0,6930	
			4	0,0990	0,0995	0,9999	0,9797	0,9995	0,9994	
			8	0,9962	0,9962	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 36 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,05$										
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$										
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0275	0,0329	0,3978	0,5252	0,4543	0,4375	
			2	0,1412	0,1560	0,9689	0,9364	0,9717	0,9697	
			4	0,9389	0,9464	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0130	0,0151	0,5640	0,7017	0,6265	0,6106	
			2	0,0214	0,0252	0,9748	0,9448	0,9779	0,9768	
			4	0,0716	0,0819	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	
			8	0,6515	0,6838	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0060	0,0061	0,0744	0,0574	0,0374	0,0217
				2	0,0741	0,0748	0,4273	0,2801	0,2941	0,1510
				4	0,8338	0,8350	0,9926	0,8928	0,9793	0,7981
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250		$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0008	0,0008	0,2545	0,0368	0,0865	0,1050	
			2	0,0018	0,0018	0,9758	0,8904	0,9505	0,9553	
			4	0,0213	0,0216	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	
			8	0,6781	0,6803	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
100		5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0058	0,0058	0,0628	0,0470	0,0258	0,0137
				2	0,0769	0,0772	0,4276	0,2660	0,2731	0,1263
				4	0,8378	0,8384	0,9919	0,8887	0,9754	0,7752
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0021	0,0022	0,3127	0,0825	0,1692	0,2111	
			2	0,0087	0,0088	0,8937	0,5767	0,7867	0,8169	
			4	0,1827	0,1834	0,9999	0,9901	0,9998	0,9998	
			8	0,9988	0,9988	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 37 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,10$									
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
6	100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0487	0,0572	0,4605	0,5932	0,5782	0,5668
			2	0,2024	0,2219	0,9722	0,9519	0,9795	0,9779
			4	0,9636	0,9688	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0232	0,0270	0,6274	0,7302	0,7591	0,7556
			2	0,0390	0,0446	0,9777	0,9568	0,9844	0,9824
			4	0,1212	0,1381	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000
			8	0,7689	0,7949	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0101	0,0101	0,0824	0,0713	0,0613	0,0391
			2	0,1054	0,1063	0,4480	0,3235	0,3840	0,2278
			4	0,8795	0,8805	0,9936	0,9191	0,9892	0,8825
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0016	0,0017	0,2884	0,0485	0,1605	0,1948
			2	0,0033	0,0034	0,9777	0,9069	0,9668	0,9693
			4	0,0344	0,0348	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	0,7616	0,7637	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0094	0,0094	0,0696	0,0587	0,0442	0,0266
			2	0,1076	0,1082	0,4474	0,3060	0,3587	0,1959
			4	0,8789	0,8794	0,9930	0,9153	0,9866	0,8673
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0036	0,0037	0,3251	0,1029	0,2303	0,2681
			2	0,0141	0,0142	0,8997	0,6237	0,8423	0,8612
			4	0,2329	0,2336	1,0000	0,9933	0,9999	0,9999
			8	0,9993	0,9994	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 38 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Continua)

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,01$									
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
3	5	(10, 15, 20)	1	0,0398	0,0540	0,1280	0,1217	0,0948	0,1052
			2	0,3060	0,3572	0,5870	0,5720	0,5190	0,5600
			4	0,9432	0,9562	0,9650	0,9530	0,9588	0,9663
			8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9975	0,9988	0,9985
		(50, 75, 100)	1	0,0335	0,0472	0,0965	0,0963	0,0853	0,0912
			2	0,2900	0,3320	0,5370	0,5400	0,4998	0,5250
			4	0,9683	0,9745	0,9825	0,9760	0,9815	0,9825
			8	1,0000	1,0000	0,9988	0,9982	0,9988	0,9992
	50	(50, 75, 100)	1	0,0418	0,0552	0,2650	0,2800	0,2798	0,2950
			2	0,5270	0,5820	0,8872	0,8588	0,8982	0,9132
			4	0,9995	0,9995	0,9952	0,9898	0,9958	0,9965
			8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	1,0000	1,0000
		(50, 75, 100)	1	0,0272	0,0392	0,3545	0,3715	0,3840	0,3870
			2	0,4435	0,5000	0,9145	0,8810	0,9252	0,9422
			4	0,9995	0,9998	0,9912	0,9892	0,9938	0,9970
			8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	1,0000	1,0000
6	5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0204	0,0235	0,1018	0,0857	0,0509	0,0783
			2	0,1983	0,2165	0,5093	0,4740	0,3605	0,4697
			4	0,9404	0,9469	0,9653	0,9417	0,9434	0,9556
			8	1,0000	1,0000	0,9971	0,9954	0,9966	0,9973
		(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0173	0,0193	0,0821	0,0641	0,0426	0,0596
			2	0,1943	0,2079	0,4852	0,4495	0,3605	0,4369
			4	0,9452	0,9508	0,9806	0,9625	0,9655	0,9713
			8	0,9999	0,9999	0,9995	0,9975	0,9988	0,9989
	50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0085	0,0100	0,2194	0,1714	0,1227	0,2114
			2	0,1246	0,1354	0,8504	0,7863	0,7536	0,8794
			4	0,9410	0,9491	0,9846	0,9717	0,9766	0,9901
			8	1,0000	1,0000	0,9987	0,9982	0,9974	0,9993
		(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0195	0,0216	0,2233	0,2157	0,1458	0,2169
			2	0,3001	0,3171	0,8870	0,8353	0,8304	0,9078
			4	0,9978	0,9984	0,9922	0,9851	0,9893	0,9962
			8	1,0000	1,0000	0,9995	0,9992	0,9991	0,9998

Tabela 38 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,01$										
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$										
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0127	0,0148	0,2874	0,2952	0,1918	0,2806	
			2	0,2395	0,2579	0,9145	0,8620	0,8711	0,9395	
			4	0,9984	0,9985	0,9958	0,9894	0,9932	0,9979	
			8	1,0000	1,0000	0,9996	0,9988	0,9996	0,9999	
	300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0039	0,0049	0,3655	0,3807	0,2356	0,3435	
			2	0,0106	0,0128	0,9318	0,8764	0,8938	0,9563	
			4	0,1876	0,2066	0,9935	0,9862	0,9894	0,9981	
			8	0,9867	0,9896	0,9997	0,9990	0,9994	1,0000	
	60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0118	0,0119	0,0716	0,0647	0,0085	0,0201
				2	0,0736	0,0741	0,4296	0,3617	0,0893	0,2051
				4	0,8181	0,8191	0,9739	0,8452	0,7486	0,7752
				8	0,9996	0,9996	0,9979	0,9801	0,9829	0,9773
100	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0045	0,0046	0,2279	0,0388	0,0106	0,1715	
			2	0,0103	0,0104	0,9172	0,6434	0,3580	0,8934	
			4	0,1497	0,1507	0,9942	0,9538	0,9333	0,9930	
			8	0,9966	0,9967	0,9999	0,9936	0,9904	0,9986	
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0158	0,0159	0,0617	0,0513	0,0047	0,0125	
			2	0,0668	0,0671	0,3870	0,3485	0,0516	0,1831	
			4	0,7956	0,7963	0,9723	0,8409	0,6412	0,7615	
			8	0,9999	0,9999	0,9989	0,9849	0,9798	0,9819	
100	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0418	0,0419	0,2417	0,0595	0,0170	0,2316	
			2	0,0837	0,0839	0,8379	0,4986	0,2079	0,7952	
			4	0,5571	0,5577	0,9960	0,9186	0,8946	0,9862	
			8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9910	0,9875	0,9991	

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 39 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Continua)

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,05$										
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$										
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB	
3	5	(10, 15, 20)	1	0,1265	0,1615	0,1747	0,2295	0,2150	0,2323	
			2	0,5322	0,5928	0,6505	0,7210	0,7045	0,7300	
			4	0,9795	0,9845	0,9718	0,9775	0,9798	0,9800	
			8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9982	0,9995	0,9992	
		(50, 75, 100)	1	0,1085	0,1403	0,1340	0,1988	0,1908	0,2060	
			2	0,5052	0,5650	0,6072	0,7045	0,6970	0,7178	
	4		0,9892	0,9912	0,9872	0,9882	0,9925	0,9908		
	8		1,0000	1,0000	0,9992	0,9992	0,9995	0,9995		
	50	(50, 75, 100)	1	0,1350	0,1755	0,3765	0,4475	0,4810	0,5040	
			2	0,7282	0,7798	0,9142	0,9110	0,9458	0,9528	
			4	0,9998	0,9998	0,9962	0,9942	0,9978	0,9975	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	1,0000	1,0000	
100			(50, 75, 100)	1	0,1143	0,1512	0,4738	0,5300	0,5728	0,6072
				2	0,6822	0,7498	0,9375	0,9275	0,9600	0,9705
	4	1,0000		1,0000	0,9952	0,9932	0,9962	0,9980		
	8	1,0000		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
6	5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0588	0,0661	0,1308	0,1566	0,1280	0,1680	
			2	0,3656	0,3890	0,5708	0,6190	0,5658	0,6469	
			4	0,9760	0,9788	0,9716	0,9633	0,9695	0,9748	
			8	1,0000	1,0000	0,9973	0,9971	0,9971	0,9981	
		(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0533	0,0621	0,1089	0,1355	0,1157	0,1446	
			2	0,3552	0,3750	0,5458	0,6043	0,5592	0,6236	
	4		0,9790	0,9815	0,9850	0,9806	0,9845	0,9870		
	8		0,9999	0,9999	0,9998	0,9985	0,9998	0,9993		
	50	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0327	0,0375	0,2859	0,2950	0,2813	0,3943	
			2	0,2835	0,3097	0,8776	0,8552	0,8727	0,9335	
			4	0,9845	0,9874	0,9868	0,9803	0,9858	0,9940	
			8	1,0000	1,0000	0,9987	0,9987	0,9987	0,9995	
(30, 40, 50, 60, 70, 80)			1	0,0554	0,0624	0,2929	0,3495	0,3040	0,4038	
			2	0,4815	0,5054	0,9092	0,8939	0,9091	0,9479	
	4	0,9993	0,9995	0,9927	0,9908	0,9923	0,9972			
	8	1,0000	1,0000	0,9995	0,9995	0,9995	0,9999			

Tabela 39 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,05$									
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
6	100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0451	0,0516	0,3774	0,4357	0,3914	0,5126
			2	0,4192	0,4455	0,9311	0,9099	0,9291	0,9631
			4	0,9993	0,9995	0,9963	0,9931	0,9961	0,9987
			8	1,0000	1,0000	0,9996	0,9994	0,9996	0,9999
	300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0150	0,0178	0,4584	0,5156	0,4679	0,6335
			2	0,0433	0,0516	0,9436	0,9187	0,9416	0,9733
			4	0,4086	0,4386	0,9943	0,9915	0,9941	0,9986
			8	0,9978	0,9987	0,9997	0,9996	0,9997	1,0000
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0237	0,0239	0,0843	0,1007	0,0264	0,0634
			2	0,1332	0,1340	0,4736	0,4506	0,2102	0,3812
			4	0,9032	0,9040	0,9781	0,8847	0,8700	0,8772
			8	0,9999	0,9999	0,9980	0,9853	0,9905	0,9876
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0107	0,0108	0,2661	0,0818	0,0472	0,3770
			2	0,0242	0,0244	0,9284	0,7240	0,6007	0,9439
			4	0,2745	0,2761	0,9947	0,9664	0,9609	0,9957
			8	0,9992	0,9992	1,0000	0,9960	0,9931	0,9997
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0270	0,0271	0,0722	0,0801	0,0157	0,0437
			2	0,1151	0,1155	0,4279	0,4329	0,1322	0,3504
			4	0,8841	0,8845	0,9763	0,8797	0,8037	0,8694
			8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9891	0,9869	0,9903
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0623	0,0625	0,2670	0,0990	0,0477	0,3646
			2	0,1212	0,1215	0,8539	0,5778	0,3853	0,8663
			4	0,6634	0,6641	0,9966	0,9392	0,9379	0,9907
			8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9932	0,9903	0,9996

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 40 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Continua)

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,10$										
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$										
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB	
3	5	(10, 15, 20)	1	0,1915	0,2545	0,2750	0,3113	0,3015	0,3205	
			2	0,6400	0,7040	0,7402	0,7827	0,7878	0,7970	
			4	0,9892	0,9925	0,9810	0,9800	0,9855	0,9838	
			8	1,0000	1,0000	0,9992	0,9992	0,9995	0,9995	
		(50, 75, 100)	1	0,1705	0,2220	0,2387	0,2685	0,2785	0,2895	
			2	0,6080	0,6732	0,7218	0,7715	0,7842	0,7928	
			4	0,9935	0,9962	0,9905	0,9915	0,9935	0,9942	
			8	1,0000	1,0000	0,9995	0,9992	0,9998	0,9998	
	50	(50, 75, 100)	1	0,2130	0,2720	0,5200	0,5317	0,5825	0,6028	
			2	0,8122	0,8592	0,9422	0,9330	0,9600	0,9668	
			4	0,9998	0,9998	0,9968	0,9960	0,9980	0,9985	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		100	(50, 75, 100)	1	0,1868	0,2512	0,6005	0,6058	0,6635	0,6935
				2	0,7930	0,8430	0,9562	0,9470	0,9708	0,9760
				4	1,0000	1,0000	0,9970	0,9958	0,9978	0,9988
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	6	5	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0945	0,1076	0,1501	0,2098	0,1889	0,2366
				2	0,4619	0,4907	0,6039	0,6881	0,6625	0,7259
				4	0,9843	0,9870	0,9744	0,9713	0,9781	0,9804
				8	1,0000	1,0000	0,9974	0,9976	0,9976	0,9982
			(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0864	0,0986	0,1266	0,1849	0,1743	0,2071
				2	0,4415	0,4662	0,5828	0,6714	0,6576	0,7049
				4	0,9870	0,9886	0,9873	0,9855	0,9904	0,9916
				8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9991	0,9999	0,9995
50		(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,0580	0,0681	0,3317	0,3702	0,3774	0,4981	
			2	0,3870	0,4151	0,8913	0,8837	0,9056	0,9506	
			4	0,9927	0,9940	0,9876	0,9847	0,9888	0,9951	
			8	1,0000	1,0000	0,9988	0,9989	0,9988	0,9996	
		(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0879	0,0998	0,3403	0,4228	0,4093	0,5076	
			2	0,5752	0,6021	0,9194	0,9151	0,9342	0,9604	
			4	0,9996	0,9997	0,9929	0,9928	0,9943	0,9974	
			8	1,0000	1,0000	0,9996	0,9995	0,9996	0,9999	

Tabela 40 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,10$									
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
6	100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0736	0,0842	0,4323	0,5139	0,5026	0,6211
			2	0,5180	0,5433	0,9391	0,9296	0,9485	0,9701
			4	0,9999	0,9999	0,9964	0,9949	0,9969	0,9989
			8	1,0000	1,0000	0,9996	0,9997	0,9996	0,9999
	300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0307	0,0360	0,5202	0,5822	0,5878	0,7361
			2	0,0799	0,0923	0,9499	0,9366	0,9569	0,9797
			4	0,5306	0,5689	0,9950	0,9936	0,9964	0,9990
			8	0,9996	0,9997	0,9997	0,9996	1,0000	1,0000
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0320	0,0321	0,0913	0,1230	0,0425	0,1015
			2	0,1725	0,1735	0,4945	0,4954	0,2957	0,4762
			4	0,9300	0,9306	0,9800	0,9008	0,9088	0,9102
			8	1,0000	1,0000	0,9980	0,9876	0,9926	0,9906
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0155	0,0157	0,2869	0,1148	0,0766	0,4923
			2	0,0351	0,0354	0,9335	0,7602	0,6789	0,9583
			4	0,3486	0,3506	0,9948	0,9712	0,9674	0,9970
			8	0,9995	0,9995	1,0000	0,9967	0,9941	0,9997
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0351	0,0353	0,0782	0,0978	0,0258	0,0728
			2	0,1457	0,1461	0,4481	0,4756	0,1940	0,4444
			4	0,9139	0,9142	0,9781	0,8966	0,8572	0,9052
			8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9910	0,9899	0,9931
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0740	0,0742	0,2793	0,1225	0,0685	0,4320
			2	0,1426	0,1430	0,8615	0,6150	0,4622	0,8923
			4	0,7107	0,7114	0,9969	0,9473	0,9466	0,9921
			8	1,0000	1,0000	0,9990	0,9942	0,9907	0,9997

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 41 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,01$									
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB
6	100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0058	0,0075	0,3145	0,3973	0,2162	0,1953
			2	0,0468	0,0516	0,9563	0,9033	0,9449	0,9407
			4	0,7905	0,8067	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0022	0,0031	0,4499	0,6219	0,2774	0,2354
			2	0,0039	0,0042	0,9746	0,9145	0,9649	0,9610
			4	0,0119	0,0143	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000
			8	0,1388	0,1508	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0005	0,0005	0,0579	0,0363	0,0129	0,0048
			2	0,0305	0,0309	0,4010	0,1901	0,1926	0,0404
			4	0,6990	0,7006	0,9909	0,8440	0,9522	0,4229
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0003	0,0003	0,1918	0,0232	0,0366	0,0363
			2	0,0003	0,0003	0,9723	0,8463	0,9073	0,8926
			4	0,0028	0,0029	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	0,2140	0,2154	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0011	0,0011	0,0524	0,0328	0,0100	0,0037
			2	0,0313	0,0315	0,3724	0,1682	0,1607	0,0255
			4	0,7029	0,7038	0,9912	0,8321	0,9468	0,3740
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0010	0,0010	0,2655	0,0511	0,0923	0,0950
			2	0,0027	0,0027	0,8718	0,4427	0,6704	0,6378
			4	0,0640	0,0643	1,0000	0,9886	0,9997	0,9998
			8	0,9719	0,9720	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 42 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,05$										
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$										
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0247	0,0278	0,4056	0,5385	0,4593	0,4390	
			2	0,1145	0,1275	0,9673	0,9360	0,9704	0,9684	
			4	0,9049	0,9142	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0140	0,0164	0,5691	0,6977	0,6313	0,6021	
			2	0,0166	0,0193	0,9786	0,9476	0,9810	0,9801	
			4	0,0439	0,0512	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	
			8	0,3233	0,3520	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0032	0,0032	0,0717	0,0574	0,0398	0,0185
				2	0,0756	0,0764	0,4411	0,2653	0,3355	0,1182
				4	0,8297	0,8310	0,9935	0,9226	0,9848	0,7473
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250		$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0014	0,0014	0,2516	0,0371	0,0956	0,0865	
			2	0,0018	0,0018	0,9764	0,8892	0,9569	0,9536	
			4	0,0106	0,0108	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	0,3960	0,3985	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0043	0,0044	0,0639	0,0505	0,0315	0,0139	
			2	0,0735	0,0738	0,4104	0,2335	0,2897	0,0856	
			4	0,8235	0,8241	0,9936	0,9088	0,9824	0,7017	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0034	0,0034	0,2909	0,0773	0,1756	0,1749	
			2	0,0082	0,0082	0,8857	0,5458	0,8001	0,7840	
			4	0,1257	0,1262	1,0000	0,9955	0,9999	1,0000	
			8	0,9868	0,9868	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 43 – Poder dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de baixa dimensionalidade.

(Conclusão)

Baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,10$										
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$										
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	T2PO	T2SO	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0414	0,0470	0,4677	0,6025	0,5917	0,5765	
			2	0,1748	0,1948	0,9711	0,9507	0,9784	0,9769	
			4	0,9374	0,9437	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	300	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,0271	0,0320	0,6314	0,7278	0,7590	0,7451	
			2	0,0302	0,0357	0,9813	0,9615	0,9857	0,9856	
			4	0,0760	0,0874	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	
			8	0,4454	0,4821	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	60	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0062	0,0063	0,0794	0,0710	0,0649	0,0338
				2	0,1094	0,1105	0,4614	0,3084	0,4218	0,1876
				4	0,8748	0,8757	0,9944	0,9495	0,9921	0,8756
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250		$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0024	0,0024	0,2860	0,0483	0,1826	0,1635	
			2	0,0032	0,0032	0,9784	0,9070	0,9708	0,9693	
			4	0,0182	0,0184	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	0,4959	0,4982	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
100	5	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0079	0,0080	0,0708	0,0616	0,0520	0,0254	
			2	0,1034	0,1039	0,4296	0,2715	0,3712	0,1423	
			4	0,8672	0,8679	0,9945	0,9367	0,9909	0,8427	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	250	$r_i = 6,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,0055	0,0055	0,3037	0,0937	0,2295	0,2291	
			2	0,0129	0,0129	0,8922	0,5931	0,8480	0,8401	
			4	0,1648	0,1654	1,0000	0,9973	1,0000	1,0000	
			8	0,9911	0,9911	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 44 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,01$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	1	0,3320	0,2462	0,2945	0,2225
			2	0,9470	0,8608	0,9368	0,9155
			4	1,0000	0,9998	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,4592	0,3108	0,4338	0,2845
			2	0,9585	0,8758	0,9552	0,9368
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	(10, 15, 20)	1	0,6188	0,4402	0,6262	0,3815
			2	0,9695	0,8758	0,9688	0,9462
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,6110	0,6085	0,5975	0,5360
			2	0,9710	0,9035	0,9705	0,9650
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	300	(50, 75, 100)	1	0,6478	0,4905	0,6620	0,4140
			2	0,9740	0,8858	0,9748	0,9502
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,6655	0,6198	0,6490	0,5868
			2	0,9772	0,9107	0,9768	0,9712
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	(10, 15, 20)	1	0,6478	0,4905	0,6620	0,4140	
		2	0,9740	0,8858	0,9748	0,9502	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		1	0,6655	0,6198	0,6490	0,5868	
		2	0,9772	0,9107	0,9768	0,9712	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Tabela 44 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,01$								
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,2873	0,2064	0,1960	0,1479	
			2	0,9562	0,9014	0,9340	0,9263	
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3577	0,2507	0,2473	0,1445
				2	0,9684	0,9105	0,9529	0,9432
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3976	0,2731	0,2673	0,1437
				2	0,9695	0,9131	0,9570	0,9454
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	60	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,4893	0,6656	0,2902	0,2322
				2	0,9709	0,9158	0,9629	0,9585
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2389	0,0046	0,0372	0,0247
				2	0,9724	0,2052	0,8091	0,7403
				4	1,0000	0,9939	1,0000	0,9997
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2998	0,0191	0,0721	0,0795
				2	0,8811	0,2694	0,5732	0,5384
				4	1,0000	0,9456	0,9992	0,9971
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 45 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,05$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	1	0,4465	0,4082	0,4870	0,4225
			2	0,9653	0,9238	0,9712	0,9605
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,5775	0,5030	0,6265	0,5228
			2	0,9692	0,9268	0,9752	0,9633
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	(10, 15, 20)	1	0,7052	0,6335	0,7622	0,6835
			2	0,9750	0,9250	0,9805	0,9692
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,7018	0,6700	0,7672	0,7552
			2	0,9775	0,9445	0,9845	0,9812
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	300	(50, 75, 100)	1	0,7178	0,6500	0,7715	0,7133
			2	0,9780	0,9335	0,9838	0,9732
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,7352	0,6752	0,7870	0,7770
			2	0,9818	0,9532	0,9872	0,9842
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	(10, 15, 20)	1	0,7178	0,6500	0,7715	0,7133	
		2	0,9780	0,9335	0,9838	0,9732	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		1	0,7352	0,6752	0,7870	0,7770	
		2	0,9818	0,9532	0,9872	0,9842	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
500	(50, 75, 100)	1	0,7352	0,6752	0,7870	0,7770	
		2	0,9818	0,9532	0,9872	0,9842	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Tabela 45 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,05$								
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3747	0,3718	0,4155	0,3577	
			2	0,9651	0,9375	0,9684	0,9649	
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,4575	0,4719	0,5209	0,4408
				2	0,9736	0,9461	0,9765	0,9724
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,5087	0,5235	0,5706	0,4888	
			2	0,9743	0,9461	0,9794	0,9736	
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,6115	0,7092	0,6665	0,6616	
			2	0,9752	0,9442	0,9774	0,9761	
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	60	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2989	0,0108	0,1109	0,0743
				2	0,9768	0,5516	0,9408	0,9342
				4	1,0000	0,9973	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,3273	0,0375	0,1554	0,1834
				2	0,8945	0,3806	0,7520	0,7375
				4	1,0000	0,9709	0,9998	0,9994
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 46 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,10$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	1	0,5650	0,4968	0,5852	0,5290
			2	0,9770	0,9475	0,9780	0,9728
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,6728	0,5915	0,7048	0,6442
			2	0,9792	0,9468	0,9828	0,9745
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	(10, 15, 20)	1	0,7665	0,6902	0,8022	0,7628
			2	0,9810	0,9470	0,9848	0,9765
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,7562	0,7098	0,8040	0,7962
			2	0,9822	0,9628	0,9878	0,9870
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	300	(50, 75, 100)	1	0,7720	0,6918	0,8062	0,7702
			2	0,9830	0,9488	0,9885	0,9792
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,7808	0,7100	0,8112	0,8055
			2	0,9860	0,9673	0,9905	0,9882
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	(10, 15, 20)	1	0,7720	0,6918	0,8062	0,7702	
		2	0,9830	0,9488	0,9885	0,9792	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		1	0,7808	0,7100	0,8112	0,8055	
		2	0,9860	0,9673	0,9905	0,9882	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
500	(50, 75, 100)	1	0,7808	0,7100	0,8112	0,8055	
		2	0,9860	0,9673	0,9905	0,9882	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Tabela 46 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição normal multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

Alta dimensionalidade, normal multivariada, $\alpha = 0,10$											
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$											
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB				
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,4260	0,4632	0,5474	0,5058				
			2	0,9695	0,9536	0,9786	0,9751				
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000				
			300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,5159	0,5906	0,6660	0,6377		
					2	0,9772	0,9577	0,9844	0,9812		
					4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
					8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)			1	0,5645	0,6452	0,7163	0,7012		
					2	0,9785	0,9575	0,9862	0,9827		
					4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
					8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
			250	(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,6674	0,7279	0,7794	0,7788		
					2	0,9779	0,9579	0,9840	0,9828		
					4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
					8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	60	250			$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,3316	0,0159	0,1968	0,1359	
						2	0,9787	0,7102	0,9634	0,9567	
						4	1,0000	0,9983	1,0000	1,0000	
						8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			100	250		$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,3407	0,0505	0,2183	0,2502
							2	0,9005	0,4382	0,8218	0,8091
							4	1,0000	0,9787	0,9999	0,9998
							8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 47 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,01$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	1	0,2855	0,2458	0,2670	0,2842
			2	0,8370	0,8038	0,8352	0,8798
			4	0,9845	0,9760	0,9855	0,9932
			8	0,9972	0,9968	0,9978	0,9985
			1	0,3625	0,2982	0,3575	0,3495
			2	0,8680	0,8312	0,8708	0,9097
			4	0,9902	0,9792	0,9910	0,9928
			8	0,9988	0,9980	0,9988	0,9985
	100	(10, 15, 20)	1	0,3992	0,3113	0,4065	0,3855
			2	0,8800	0,8450	0,8868	0,9218
			4	0,9890	0,9810	0,9902	0,9932
			8	0,9980	0,9968	0,9980	0,9985
			1	0,4552	0,4710	0,4983	0,5025
			2	0,9178	0,8860	0,9350	0,9480
			4	0,9948	0,9918	0,9960	0,9972
			8	0,9992	0,9988	0,9992	0,9995
	300	(50, 75, 100)	1	0,4140	0,3285	0,4198	0,4052
			2	0,8838	0,8423	0,8940	0,9248
			4	0,9910	0,9835	0,9915	0,9930
			8	0,9992	0,9985	0,9992	0,9998
			1	0,4928	0,4825	0,5388	0,5448
			2	0,9218	0,8880	0,9360	0,9510
			4	0,9920	0,9890	0,9938	0,9968
			8	0,9998	0,9992	1,0000	1,0000
500	(10, 15, 20)	1	0,4140	0,3285	0,4198	0,4052	
		2	0,8838	0,8423	0,8940	0,9248	
		4	0,9910	0,9835	0,9915	0,9930	
		8	0,9992	0,9985	0,9992	0,9998	
		1	0,4928	0,4825	0,5388	0,5448	
		2	0,9218	0,8880	0,9360	0,9510	
		4	0,9920	0,9890	0,9938	0,9968	
		8	0,9998	0,9992	1,0000	1,0000	
500	(50, 75, 100)	1	0,4928	0,4825	0,5388	0,5448	
		2	0,9218	0,8880	0,9360	0,9510	
		4	0,9920	0,9890	0,9938	0,9968	
		8	0,9998	0,9992	1,0000	1,0000	

Tabela 47 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,01$								
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,2581	0,2022	0,1453	0,2538	
			2	0,8745	0,8168	0,7917	0,9161	
			4	0,9920	0,9797	0,9854	0,9955	
			8	0,9992	0,9981	0,9980	0,9998	
		300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3147	0,2255	0,1763	0,2815
				2	0,9033	0,8317	0,8281	0,9328
				4	0,9890	0,9768	0,9819	0,9961
				8	0,9985	0,9967	0,9980	0,9993
		500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3469	0,2465	0,2015	0,3166
				2	0,9013	0,8355	0,8297	0,9380
				4	0,9911	0,9788	0,9852	0,9944
				8	0,9998	0,9977	0,9992	0,9996
	60	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,4087	0,4185	0,2637	0,3788
				2	0,9317	0,8780	0,8976	0,9557
				4	0,9932	0,9873	0,9894	0,9977
				8	0,9994	0,9990	0,9994	0,9998
		250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2199	0,0164	0,0108	0,1091
				2	0,8872	0,4999	0,3319	0,7998
				4	0,9929	0,9236	0,8858	0,9816
				8	0,9990	0,9878	0,9880	0,9989
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2319	0,0407	0,0151	0,1827
				2	0,8220	0,4325	0,1989	0,7338
				4	0,9931	0,8845	0,8548	0,9728
				8	0,9995	0,9849	0,9834	0,9966

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 48 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,05$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	1	0,3848	0,4082	0,4710	0,4890
			2	0,8710	0,8802	0,9090	0,9318
			4	0,9885	0,9892	0,9950	0,9962
			8	0,9978	0,9982	0,9990	0,9990
			1	0,4665	0,4600	0,5520	0,5798
			2	0,8930	0,8968	0,9305	0,9472
			4	0,9915	0,9908	0,9950	0,9965
			8	0,9988	0,9980	0,9990	0,9992
	300	(10, 15, 20)	1	0,5100	0,4932	0,6090	0,6305
			2	0,9097	0,9052	0,9435	0,9595
			4	0,9915	0,9895	0,9965	0,9958
			8	0,9980	0,9985	0,9985	0,9988
			1	0,5585	0,5913	0,6662	0,7095
			2	0,9385	0,9290	0,9653	0,9705
			4	0,9960	0,9950	0,9975	0,9988
			8	0,9992	0,9992	0,9998	0,9998
	500	(10, 15, 20)	1	0,5085	0,5040	0,6045	0,6470
			2	0,9107	0,9015	0,9425	0,9572
			4	0,9922	0,9905	0,9955	0,9955
			8	0,9992	0,9990	0,9998	1,0000
			1	0,5933	0,6145	0,7038	0,7375
			2	0,9425	0,9318	0,9643	0,9708
			4	0,9940	0,9935	0,9980	0,9975
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 48 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,05$								
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3311	0,3376	0,3238	0,4732	
			2	0,8971	0,8795	0,8927	0,9523	
			4	0,9936	0,9873	0,9933	0,9971	
			8	0,9992	0,9991	0,9992	0,9998	
		300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3979	0,3831	0,3905	0,5551
				2	0,9210	0,8889	0,9178	0,9593
				4	0,9913	0,9853	0,9905	0,9975
				8	0,9987	0,9980	0,9986	0,9994
		500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,4327	0,4030	0,4244	0,5939
				2	0,9190	0,8959	0,9150	0,9632
				4	0,9930	0,9876	0,9924	0,9964
				8	0,9998	0,9990	0,9998	0,9996
	(30, 40, 50, 60, 70, 80)		1	0,5008	0,5458	0,5089	0,6783	
			2	0,9434	0,9190	0,9418	0,9728	
			4	0,9944	0,9916	0,9940	0,9987	
			8	0,9994	0,9995	0,9994	0,9998	
	60	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2546	0,0374	0,0492	0,2775
				2	0,9008	0,6097	0,5688	0,8900
				4	0,9941	0,9436	0,9432	0,9892
				8	0,9990	0,9915	0,9956	0,9994
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2572	0,0723	0,0457	0,3192
				2	0,8412	0,5248	0,3778	0,8242
				4	0,9935	0,9178	0,9252	0,9825
				8	0,9999	0,9897	0,9924	0,9973

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 49 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,10$									
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$									
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB		
3	50	(10, 15, 20)	1	0,5152	0,5082	0,5722	0,6035		
			2	0,9140	0,9102	0,9328	0,9488		
			4	0,9935	0,9935	0,9968	0,9972		
			8	0,9980	0,9988	0,9992	0,9992		
			100	(10, 15, 20)	1	0,5850	0,5675	0,6388	0,6712
					2	0,9280	0,9228	0,9492	0,9592
					4	0,9948	0,9925	0,9965	0,9972
					8	0,9992	0,9985	0,9990	0,9998
	300	(10, 15, 20)			1	0,6262	0,5908	0,6890	0,7210
					2	0,9352	0,9280	0,9568	0,9690
					4	0,9945	0,9935	0,9972	0,9972
					8	0,9985	0,9985	0,9985	0,9995
			500	(50, 75, 100)	1	0,6672	0,6488	0,7282	0,7722
					2	0,9592	0,9468	0,9738	0,9780
					4	0,9978	0,9962	0,9980	0,9990
					8	0,9998	0,9995	0,9998	0,9998
	500	(10, 15, 20)			1	0,6280	0,5985	0,6862	0,7330
					2	0,9408	0,9280	0,9565	0,9683
					4	0,9948	0,9928	0,9960	0,9958
					8	0,9995	1,0000	1,0000	1,0000
			500	(50, 75, 100)	1	0,6985	0,6712	0,7560	0,7875
					2	0,9575	0,9472	0,9728	0,9768
					4	0,9952	0,9948	0,9990	0,9982
					8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 49 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição t_3 multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

Alta dimensionalidade, t_3 multivariada, $\alpha = 0,10$								
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3806	0,4177	0,4366	0,5875	
			2	0,9091	0,9077	0,9217	0,9635	
			4	0,9943	0,9907	0,9946	0,9978	
			8	0,9993	0,9994	0,9995	0,9998	
		300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,4459	0,4731	0,5012	0,6788
				2	0,9301	0,9134	0,9399	0,9710
				4	0,9924	0,9903	0,9931	0,9980
				8	0,9990	0,9982	0,9991	0,9995
		500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,4833	0,4904	0,5379	0,7076
				2	0,9279	0,9175	0,9391	0,9725
				4	0,9938	0,9903	0,9940	0,9977
				8	0,9998	0,9994	0,9998	0,9996
	60	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,5538	0,6122	0,6201	0,7718
				2	0,9498	0,9364	0,9580	0,9790
				4	0,9957	0,9939	0,9953	0,9994
				8	0,9994	0,9996	0,9994	0,9998
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2734	0,0563	0,0803	0,4011
				2	0,9070	0,6572	0,6631	0,9179
				4	0,9947	0,9511	0,9551	0,9922
				8	0,9990	0,9932	0,9967	0,9996
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2698	0,0918	0,0687	0,3947
				2	0,8496	0,5691	0,4649	0,8605
				4	0,9936	0,9303	0,9380	0,9857
				8	1,0000	0,9912	0,9942	0,9981

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 50 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,01$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	1	0,3318	0,2468	0,2965	0,2190
			2	0,9390	0,8542	0,9302	0,9067
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,4598	0,3145	0,4318	0,2760
			2	0,9532	0,8588	0,9502	0,9268
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	(10, 15, 20)	1	0,6352	0,4325	0,6422	0,3703
			2	0,9780	0,8835	0,9782	0,9598
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,6142	0,6148	0,5998	0,5382
			2	0,9725	0,9172	0,9708	0,9675
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	300	(50, 75, 100)	1	0,6795	0,4872	0,6910	0,4060
			2	0,9800	0,8855	0,9805	0,9622
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,6668	0,6170	0,6465	0,5782
			2	0,9770	0,9138	0,9758	0,9720
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	(10, 15, 20)	1	0,6668	0,6170	0,6465	0,5782	
		2	0,9770	0,9138	0,9758	0,9720	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		1	0,6668	0,6170	0,6465	0,5782	
		2	0,9770	0,9138	0,9758	0,9720	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Tabela 50 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,01$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,01$								
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,2720	0,2018	0,1805	0,1302	
			2	0,9566	0,9002	0,9354	0,9215	
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3515	0,2475	0,2287	0,1292
				2	0,9726	0,9181	0,9590	0,9454
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3773	0,2668	0,2486	0,1295	
			2	0,9727	0,9218	0,9626	0,9491	
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		(30, 40, 50, 60, 70, 80)	1	0,5017	0,6657	0,2878	0,2286	
			2	0,9743	0,9143	0,9649	0,9615	
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	60	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2236	0,0067	0,0382	0,0243
				2	0,9720	0,1947	0,8565	0,6522
				4	1,0000	0,9990	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2783	0,0213	0,0797	0,0646
				2	0,8736	0,2514	0,6142	0,4596
				4	1,0000	0,9642	0,9996	0,9992
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 51 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,05$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	1	0,4508	0,4000	0,4858	0,4038
			2	0,9548	0,9175	0,9612	0,9508
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,5883	0,4930	0,6320	0,5220
			2	0,9680	0,9182	0,9718	0,9602
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	(10, 15, 20)	1	0,7248	0,6195	0,7725	0,6715
			2	0,9835	0,9418	0,9850	0,9790
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,7153	0,6815	0,7772	0,7648
			2	0,9795	0,9530	0,9838	0,9825
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	300	(50, 75, 100)	1	0,7438	0,6532	0,7885	0,7160
			2	0,9850	0,9418	0,9890	0,9805
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,7322	0,6728	0,7805	0,7685
			2	0,9798	0,9515	0,9858	0,9838
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	(10, 15, 20)	1	0,7322	0,6728	0,7805	0,7685	
		2	0,9798	0,9515	0,9858	0,9838	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		1	0,7322	0,6728	0,7805	0,7685	
		2	0,9798	0,9515	0,9858	0,9838	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Tabela 51 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,05$								
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,3596	0,3646	0,4100	0,3352	
			2	0,9678	0,9400	0,9717	0,9655	
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,4610	0,4738	0,5349	0,4208
				2	0,9782	0,9503	0,9817	0,9774
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,4934	0,5110	0,5841	0,4487
				2	0,9779	0,9524	0,9817	0,9777
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	60	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,6264	0,7129	0,6890	0,6526
				2	0,9783	0,9486	0,9804	0,9793
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,2829	0,0144	0,1121	0,0641
				2	0,9762	0,5400	0,9498	0,9215
				4	1,0000	0,9998	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,3033	0,0378	0,1657	0,1451
				2	0,8868	0,3457	0,7734	0,6954
				4	1,0000	0,9834	0,9999	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

Tabela 52 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Continua)

Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,10$							
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$							
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB
3	50	(10, 15, 20)	1	0,5695	0,4930	0,5840	0,5280
			2	0,9692	0,9432	0,9715	0,9653
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,6828	0,5842	0,7068	0,6388
			2	0,9762	0,9418	0,9800	0,9722
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	(10, 15, 20)	1	0,7758	0,6850	0,8042	0,7555
			2	0,9868	0,9612	0,9885	0,9848
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,7680	0,7153	0,8130	0,8045
			2	0,9830	0,9673	0,9885	0,9880
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	300	(50, 75, 100)	1	0,7837	0,6898	0,8142	0,7738
			2	0,9888	0,9633	0,9912	0,9868
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			1	0,7765	0,7025	0,8072	0,8008
			2	0,9852	0,9690	0,9890	0,9888
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	(10, 15, 20)	1	0,7837	0,6898	0,8142	0,7738	
		2	0,9888	0,9633	0,9912	0,9868	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		1	0,7765	0,7025	0,8072	0,8008	
		2	0,9852	0,9690	0,9890	0,9888	
		4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Tabela 52 – Poder dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando estruturas das matrizes de covariâncias (SC, AR), número de tratamentos (g), número de variáveis (p), tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g), número de erros padrões (ϕ), distribuição uniforme (0, 1) multivariada e nível nominal de significância $\alpha = 0,10$, sob H_1 , casos heterocedásticos e de alta dimensionalidade.

(Conclusão)

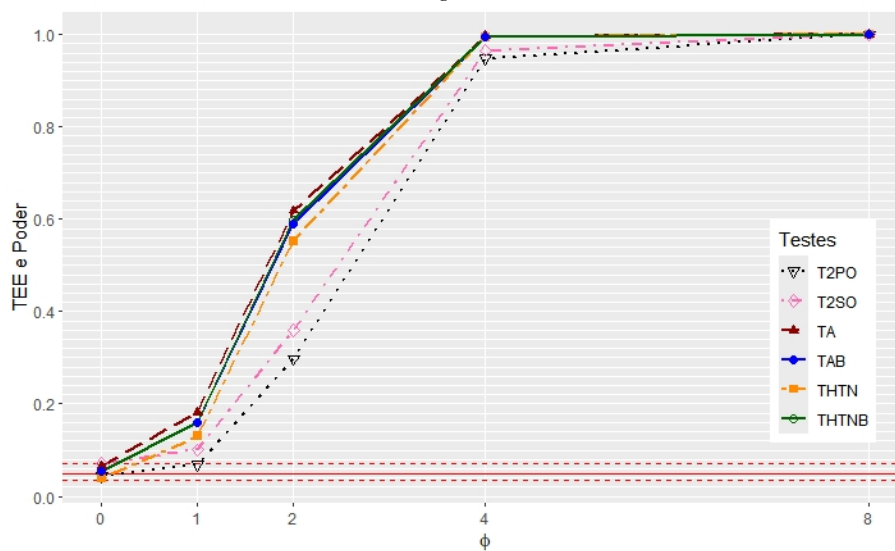
Alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, $\alpha = 0,10$								
$\Sigma_i : SC(0,5), AR(1, 0,5), AR(1, 0,7)$								
g	p	(r_1, \dots, r_g)	ϕ	THTN	TA	THTNB	TAB	
6	100	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,4151	0,4578	0,5462	0,4811	
			2	0,9728	0,9546	0,9805	0,9770	
			4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
			8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
		300	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,5234	0,5924	0,6905	0,6289
				2	0,9812	0,9646	0,9869	0,9855
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		500	(10, 10, 10, 20, 20, 20)	1	0,5674	0,6365	0,7350	0,6827
				2	0,9807	0,9650	0,9882	0,9854
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	60	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,6875	0,7342	0,7904	0,7824
				2	0,9805	0,9607	0,9857	0,9850
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,3168	0,0198	0,2020	0,1157
				2	0,9780	0,7045	0,9675	0,9532
				4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	250	$r_i = 3,$ $\forall i = 1, \dots, g$	1	0,3159	0,0491	0,2245	0,2001
				2	0,8930	0,4007	0,8353	0,7874
				4	1,0000	0,9898	1,0000	1,0000
				8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Da autora (2025).

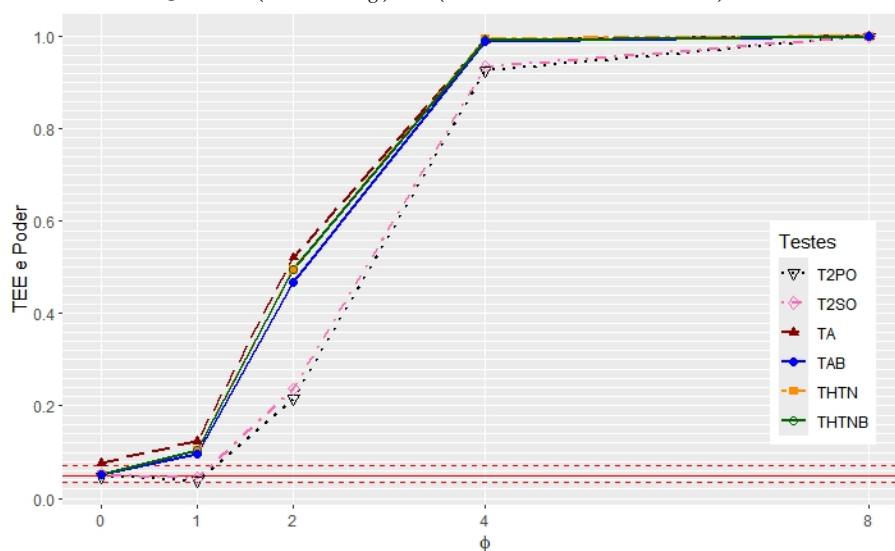
APÊNDICE E – Figuras - Poder dos testes

Figura 1 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.

(a) $g = 3, (r_1, \dots, r_g) = (10, 15, 20)$

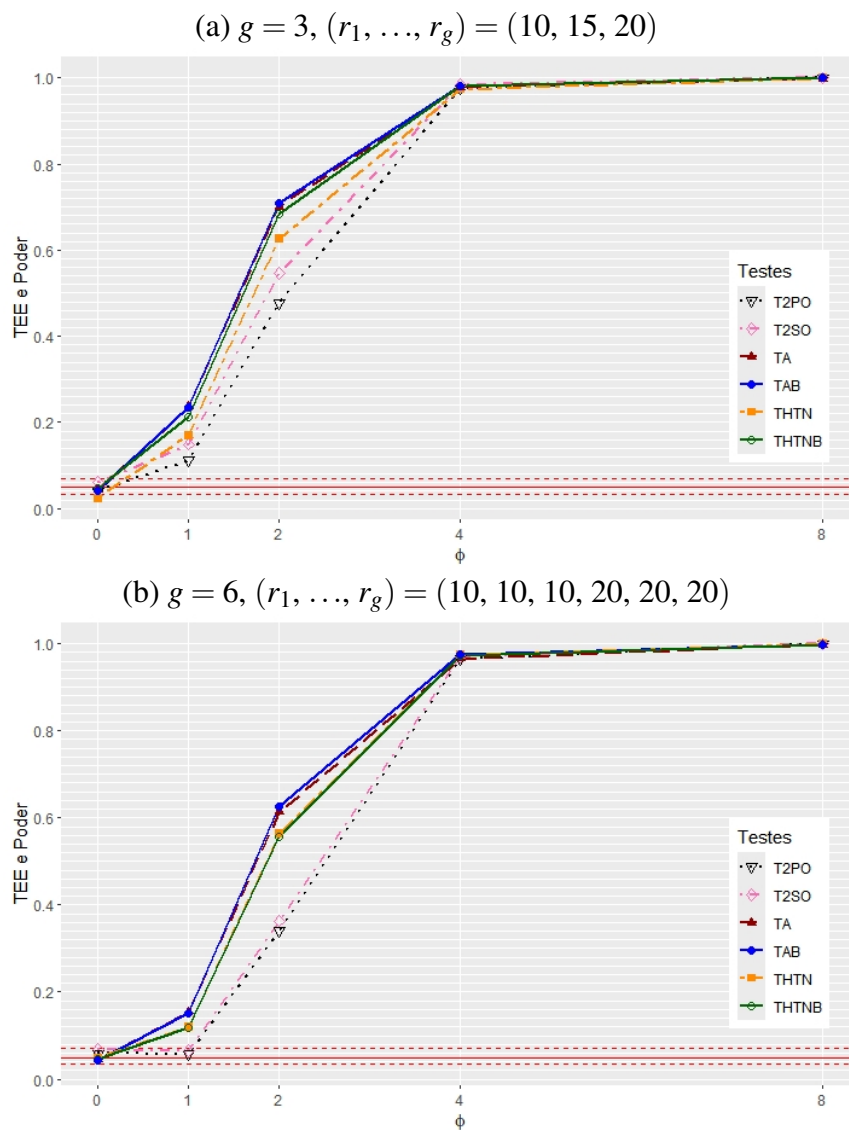


(b) $g = 6, (r_1, \dots, r_g) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$



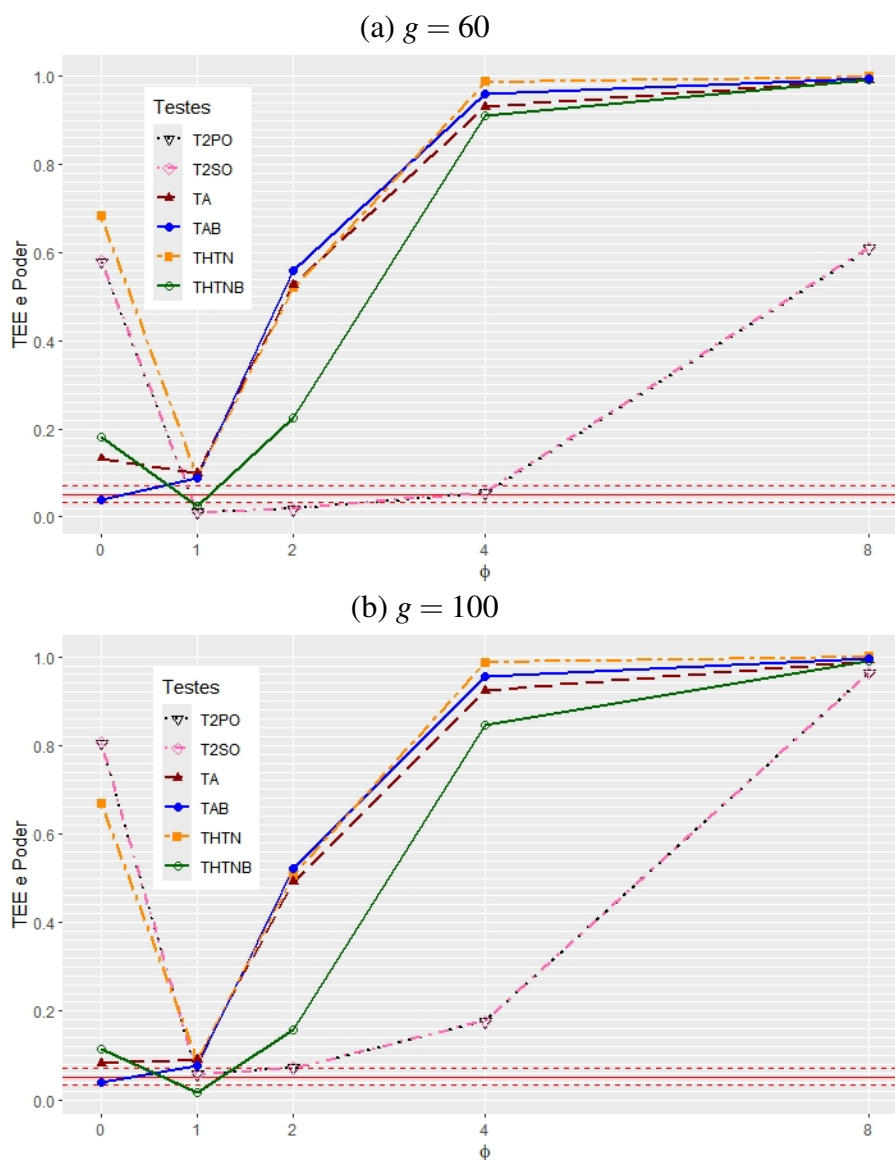
Fonte: Da autora (2025).

Figura 2 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Figura 3 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 6, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Figura 4 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 5$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.

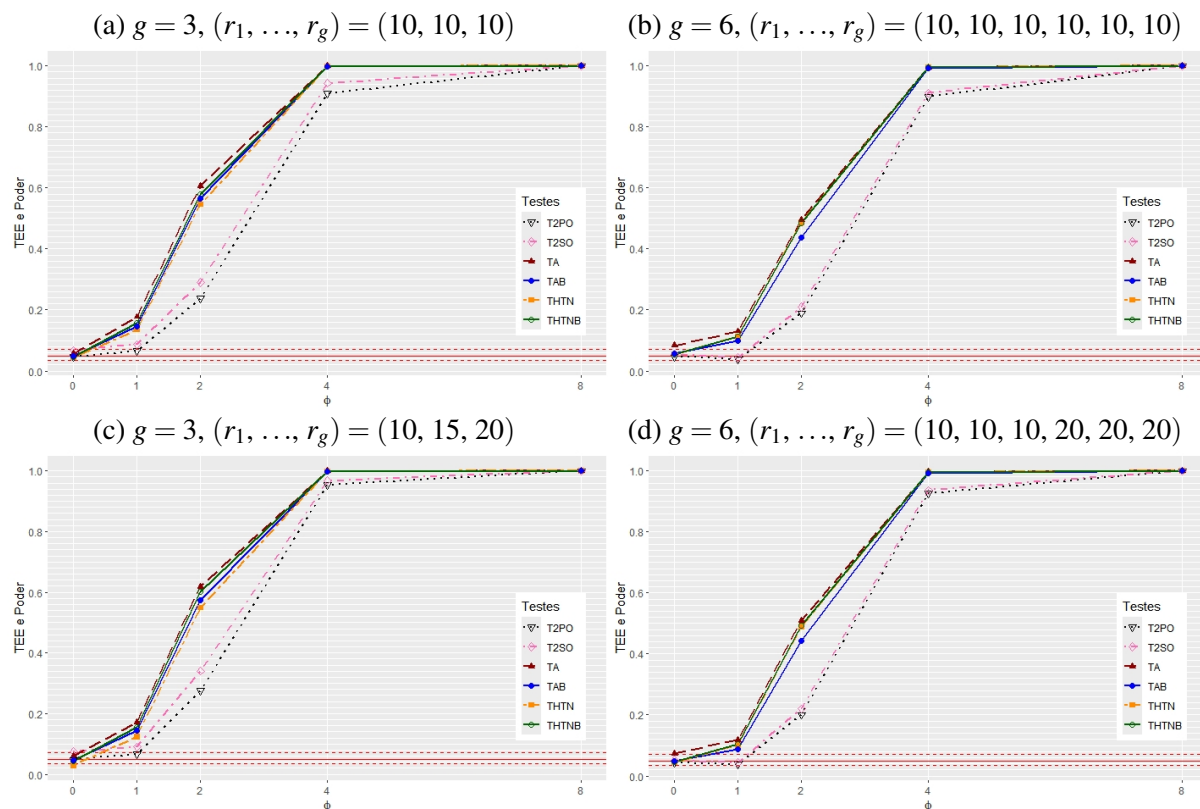
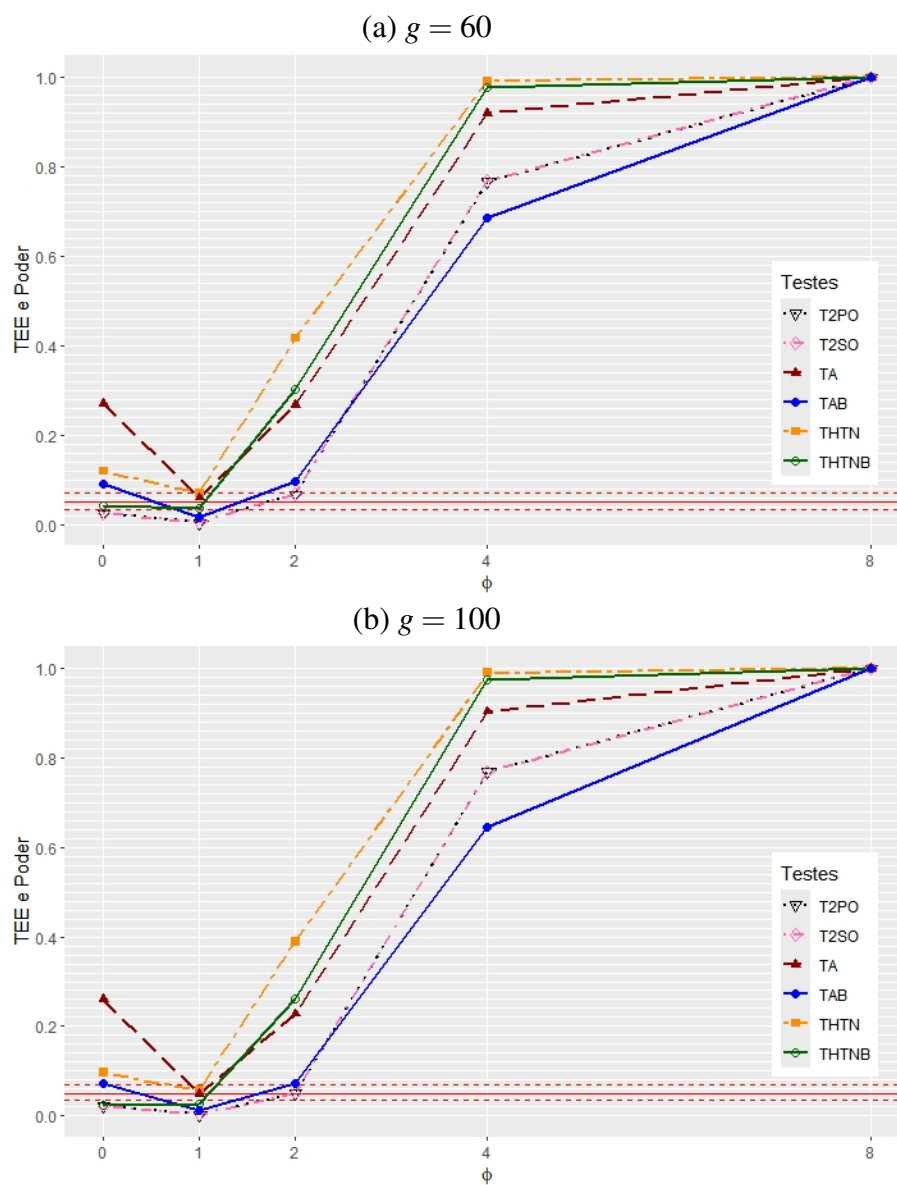
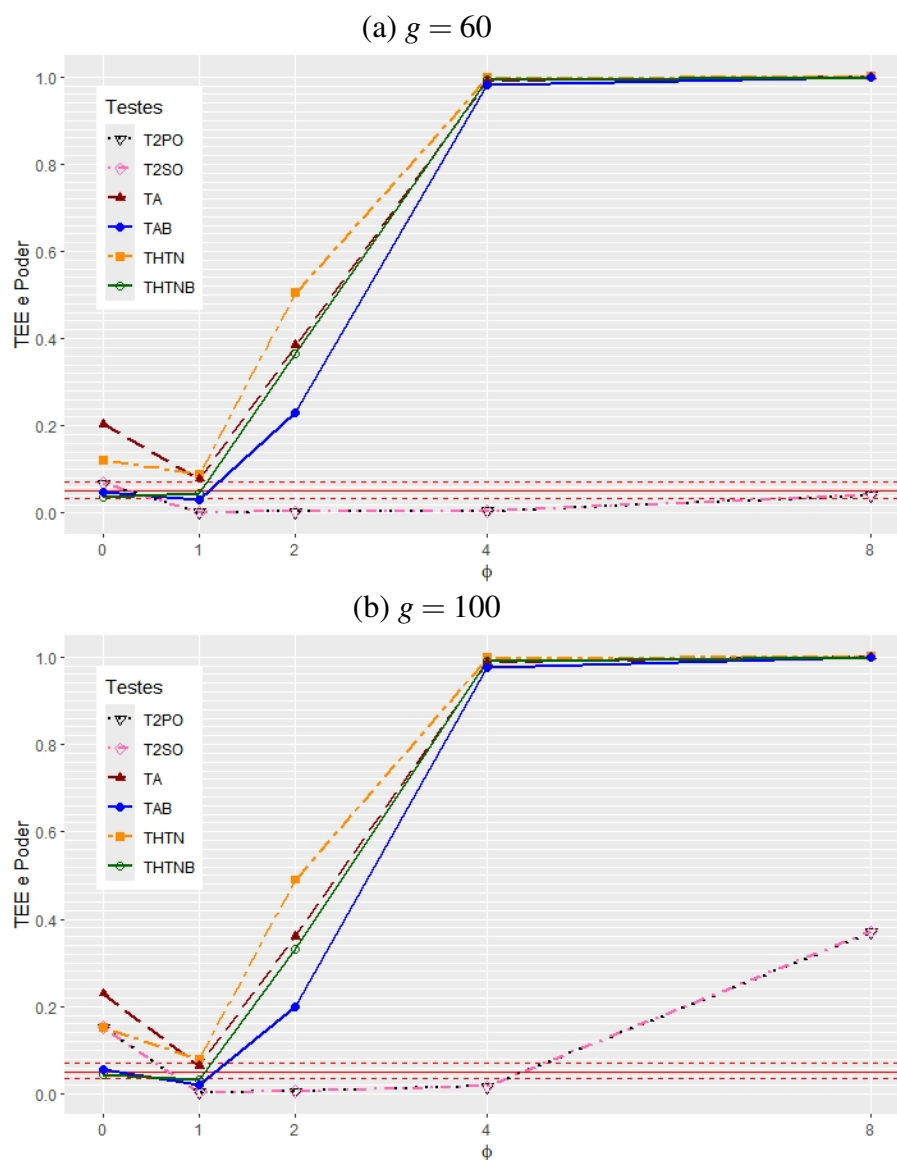


Figura 5 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 5$, tamanhos amostrais $r_i = 3$, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



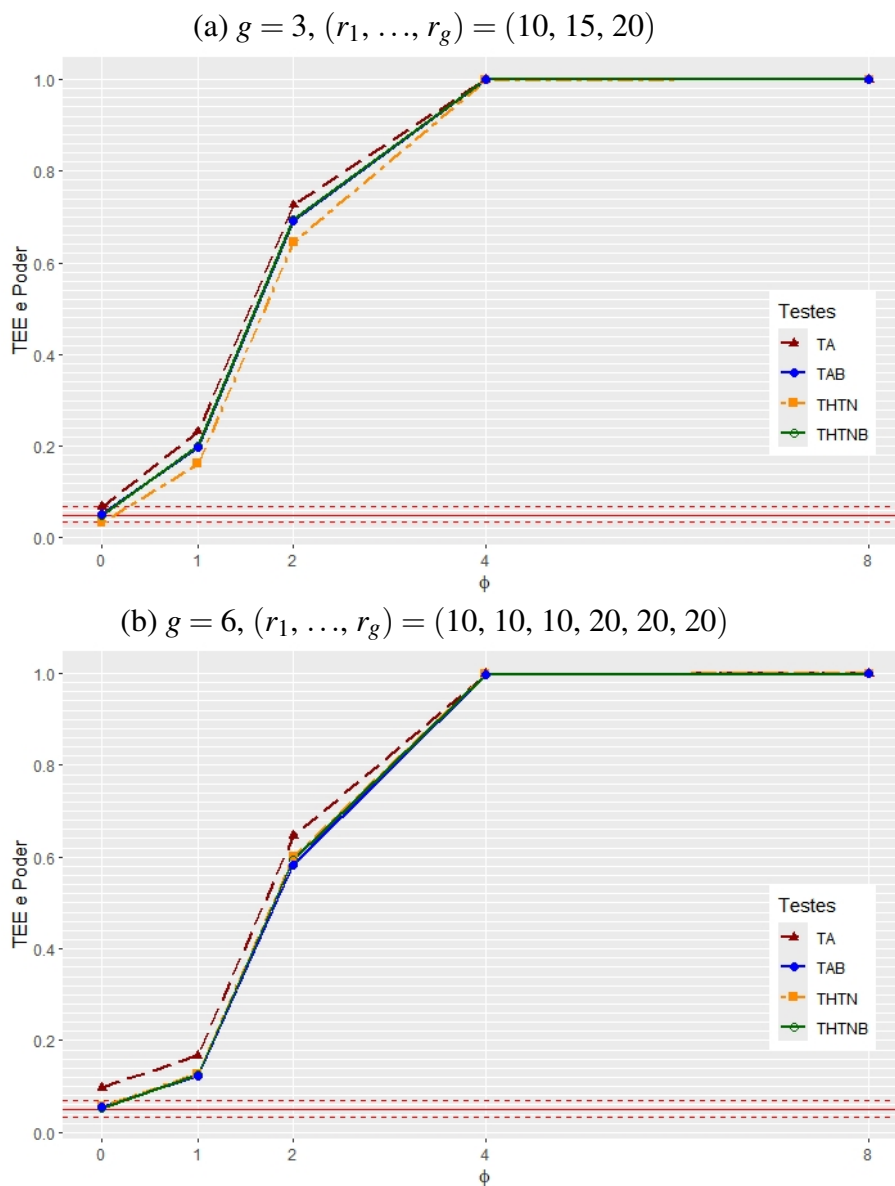
Fonte: Da autora (2025).

Figura 6 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p = 250$, tamanhos amostrais $r_i = 3, \forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



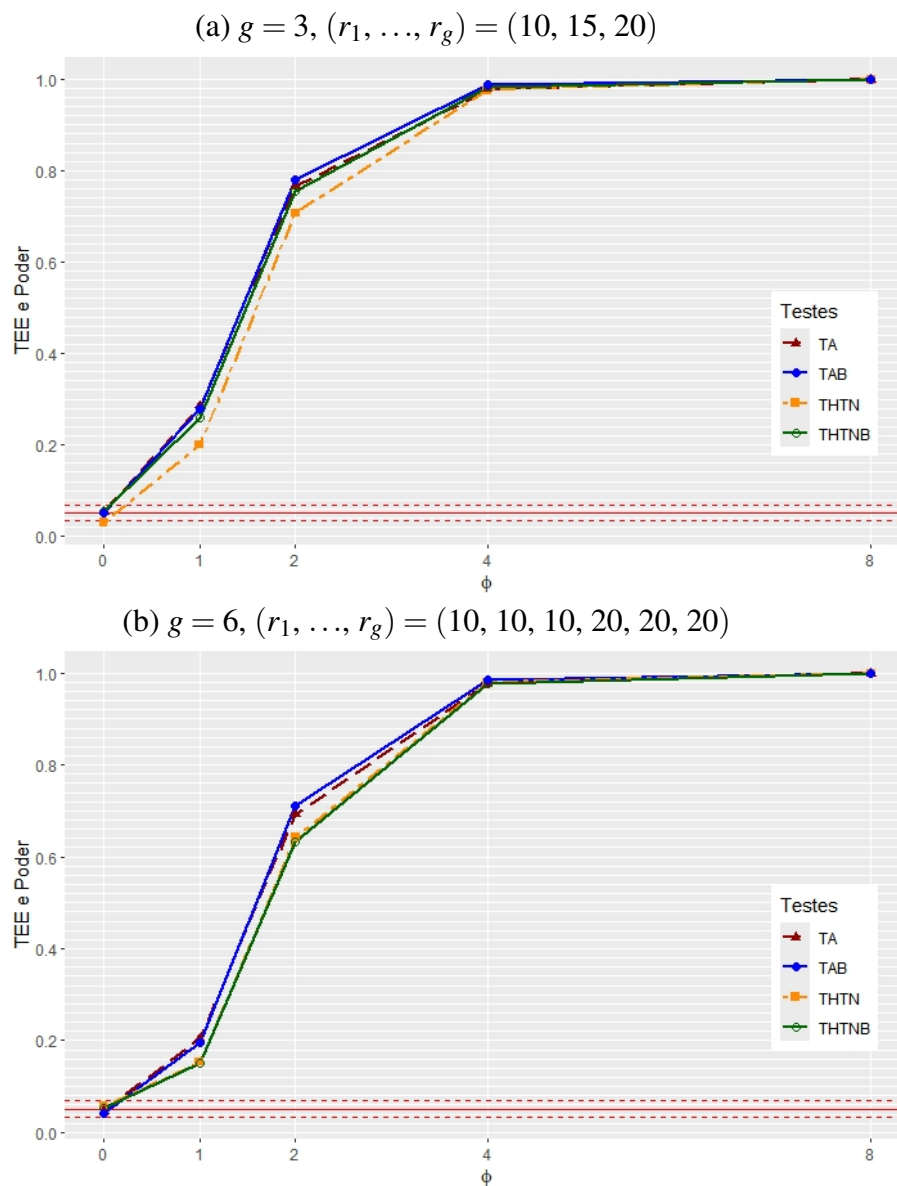
Fonte: Da autora (2025).

Figura 7 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



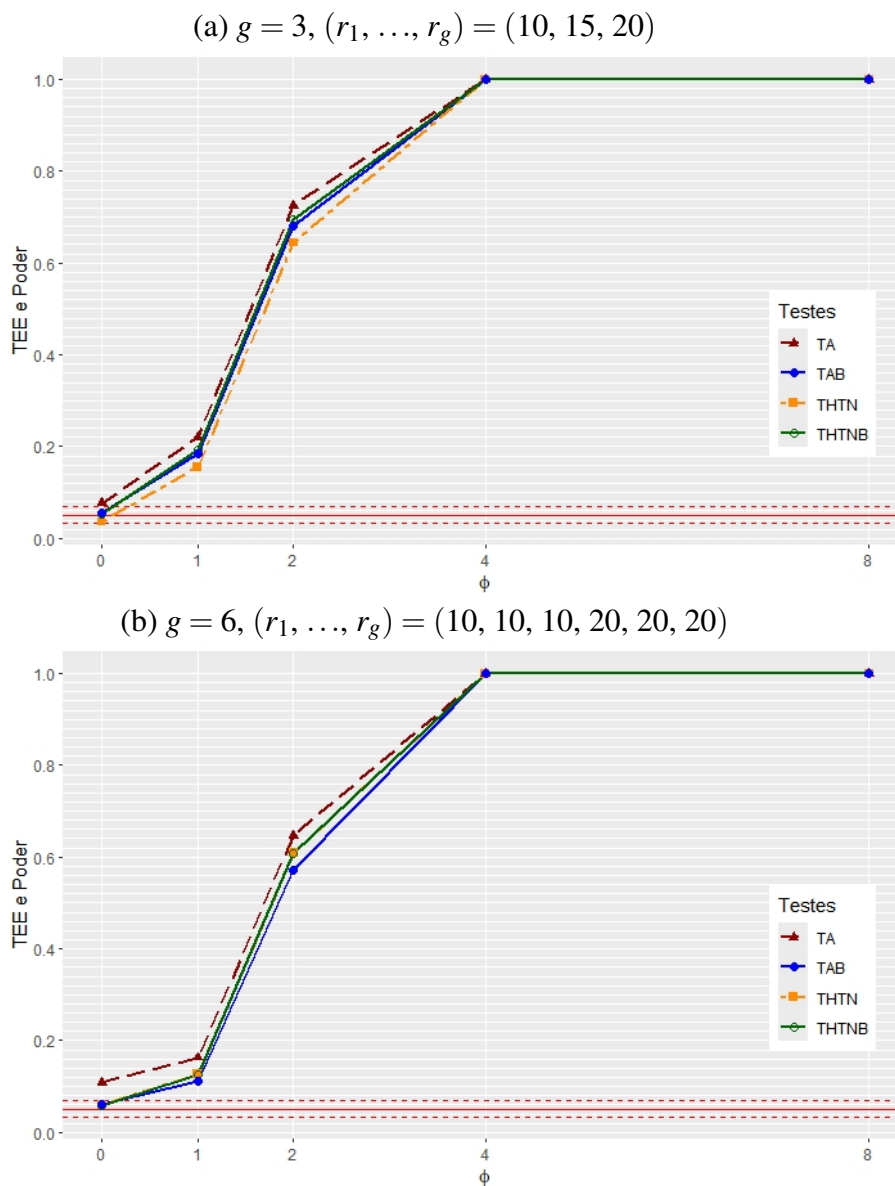
Fonte: Da autora (2025).

Figura 8 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



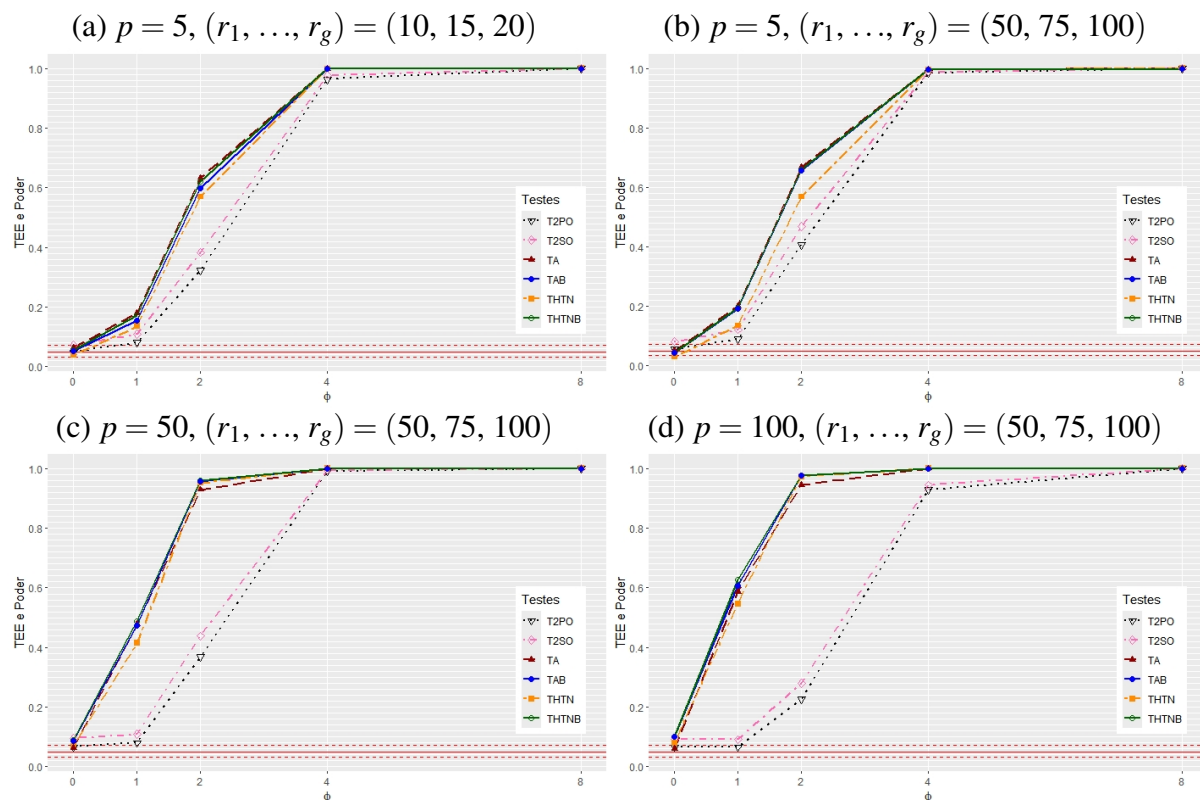
Fonte: Da autora (2025).

Figura 9 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando homocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{3, 6\}$, número de variáveis $p = 250$, casos desbalanceados com tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



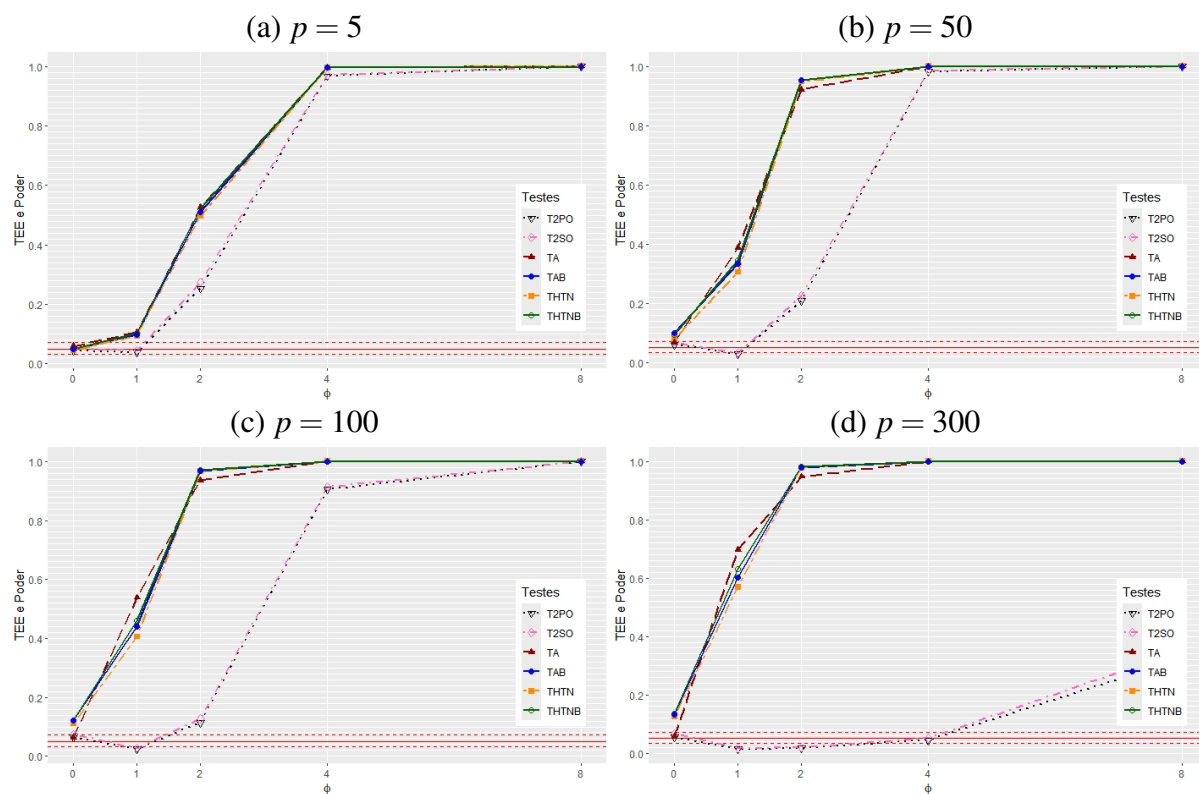
Fonte: Da autora (2025).

Figura 10 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100\}$, tamanhos amostrais (r_1, \dots, r_g) , nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



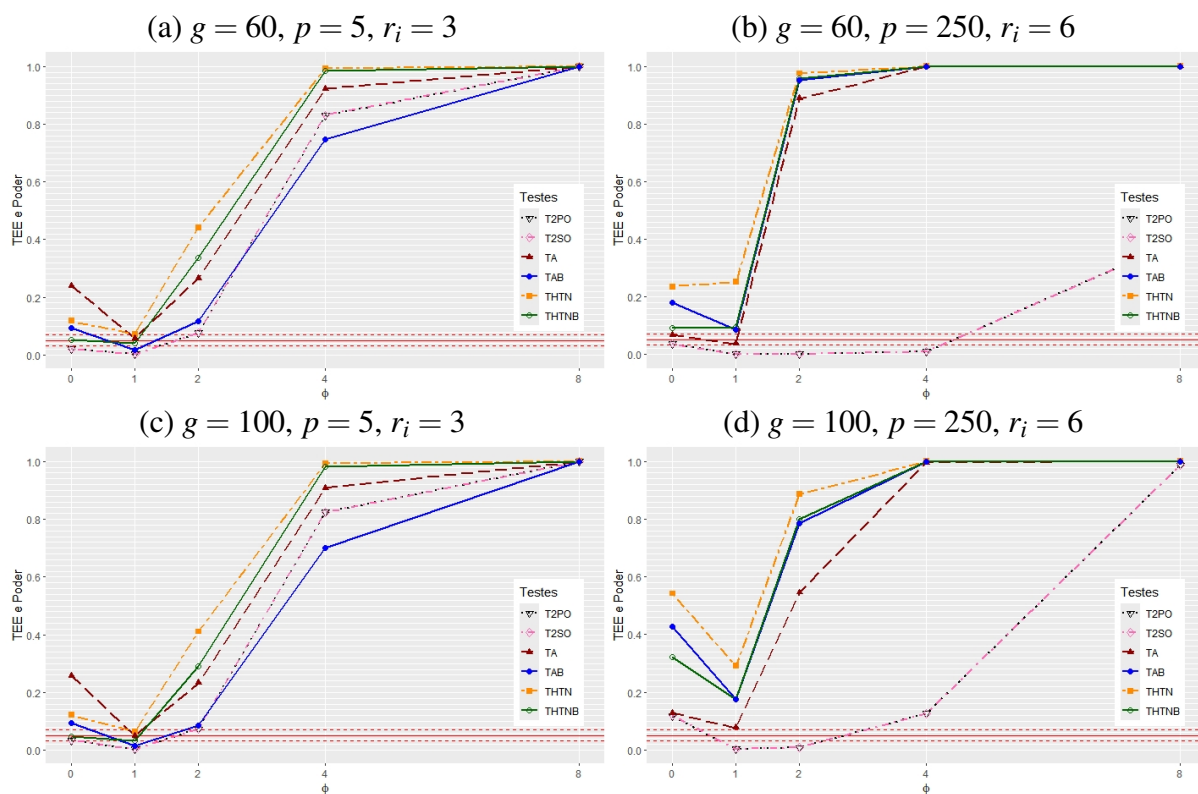
Fonte: Da autora (2025).

Figura 11 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{5, 50, 100, 300\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



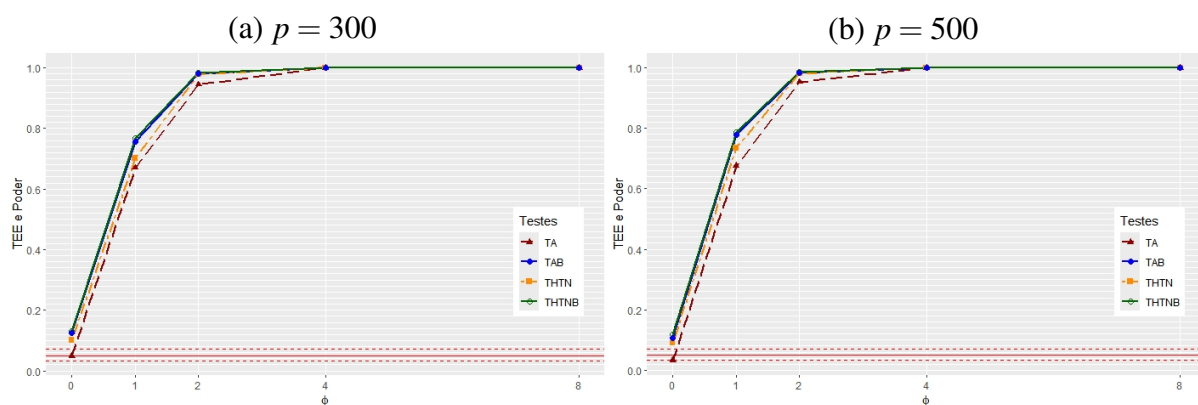
Fonte: Da autora (2025).

Figura 12 – Poder e TEE dos testes T2PO, T2SO, THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, baixa dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g \in \{60, 100\}$, número de variáveis $p \in \{5, 250\}$, tamanhos amostrais r_i s, $\forall i = 1, \dots, g$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



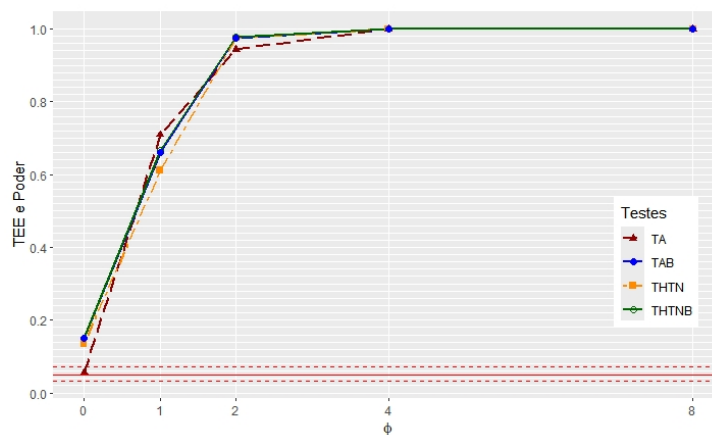
Fonte: Da autora (2025).

Figura 13 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (50, 75, 100)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



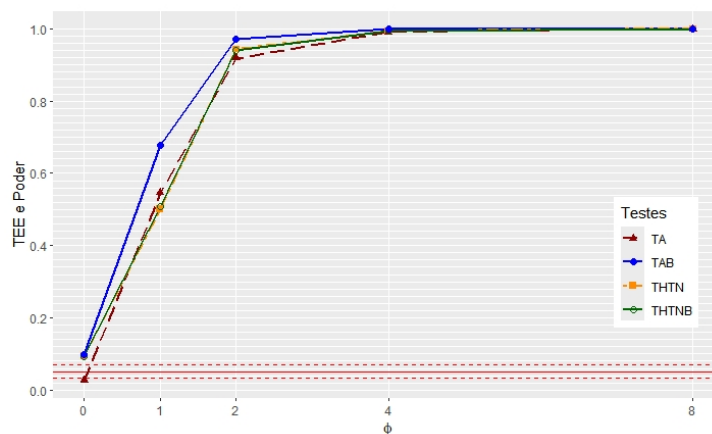
Fonte: Da autora (2025).

Figura 14 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, normal multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p = 500$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



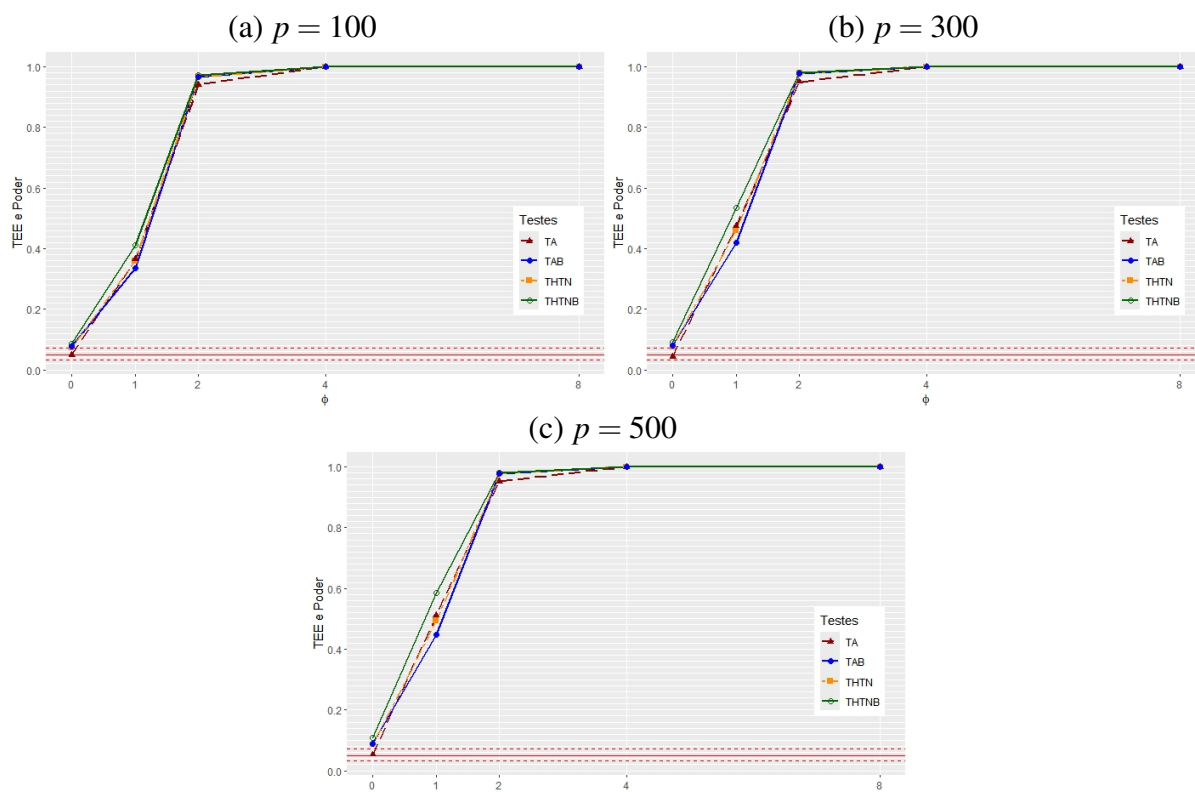
Fonte: Da autora (2025).

Figura 15 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, t_3 multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p = 500$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



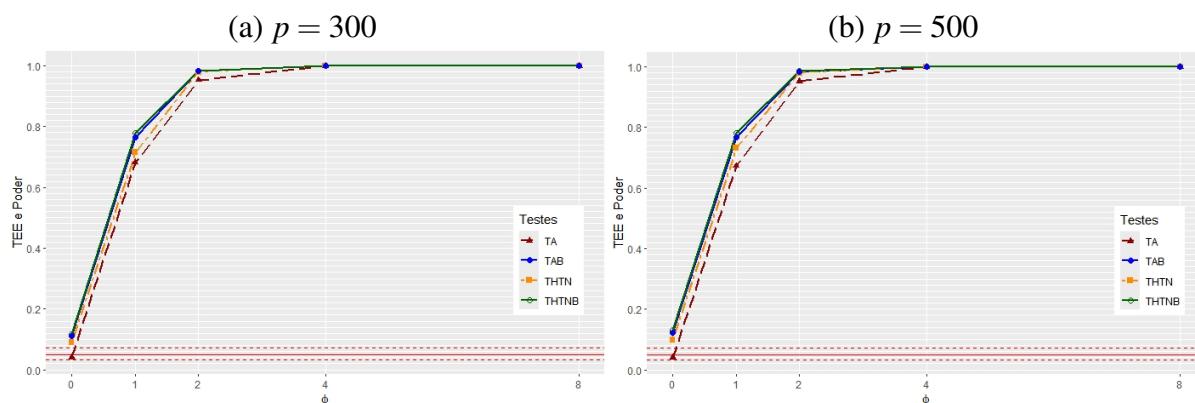
Fonte: Da autora (2025).

Figura 16 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p \in \{100, 300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (10, 10, 10, 20, 20, 20)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



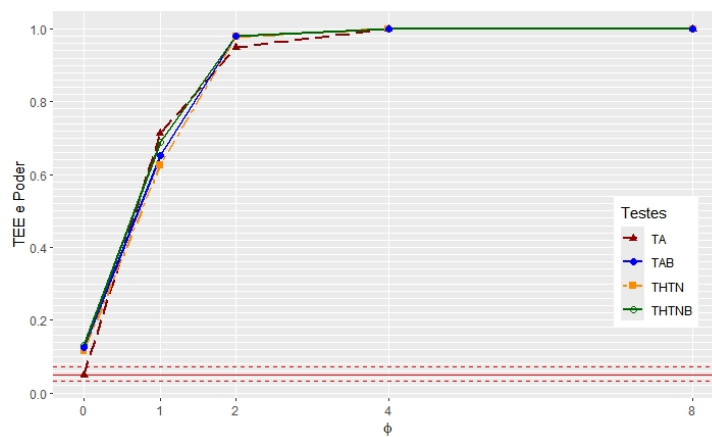
Fonte: Da autora (2025).

Figura 17 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme (0, 1) multivariada, número de tratamentos $g = 3$, número de variáveis $p \in \{300, 500\}$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (50, 75, 100)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

Figura 18 – Poder e TEE dos testes THTN, TA, THTNB e TAB, considerando heterocedasticidade, alta dimensionalidade, uniforme $(0, 1)$ multivariada, número de tratamentos $g = 6$, número de variáveis $p = 500$, tamanhos amostrais $(r_1, \dots, r_g) = (30, 40, 50, 60, 70, 80)$, nível nominal de significância $\alpha = 0,05$ e número de erros padrões $\phi \in \{0, 1, 2, 4, 8\}$.



Fonte: Da autora (2025).

APÊNDICE F – Rotinas com os comandos do programa R para aplicação dos testes

Para os códigos seguintes é necessária a instalação dos pacotes:

```
library(parallel)      # Para função foreach()
detectCores()         # Detectar núcleos do processador
library(doParallel)   # Para a função registerDoParallel()
registerDoParallel( ) # Colocar o número de núcleos que puder
library(MASS)         # Para gerar normal multivariada
library(mvtnorm)     # Para gerar t multivariada
library(stargazer)
```

Rotina com os comandos do programa R para gerar distribuições normais multivariadas

```
mult.sample <- function(r=c(3,4),mu=matrix(rep(0, 2),2,2),sigma=diag(2))
{
  g <- length(r)
  X <- NULL
  for (i in 1:g)
  {
    ct <- (i-1) * p + 1
    mui <- as.vector(mu[i,])
    sigmai <- sigma[ct:(ct+p-1),]
    X1 <- data.frame(
      Trat = factor(rep(i,times=r[i])),
      dados.va = mvrnorm(r[i], mui, sigmai)
    )
    X <- rbind(X,X1)
  }
  return(X)
}
```

Rotina com os comandos do programa R para gerar distribuições *t* multivariadas

```
tmult.sample <- function(r=c(3,4),mu=matrix(rep(0,2),2,2),
```

```

sigma=diag(2),nu=7)
{
g <- length(r)
X <- NULL
for (i in 1:g)
{
ct <- (i-1) * p + 1
mui <- as.vector(mu[i,])
sigmai <- sigma[ct:(ct+p-1),]
X1 <- data.frame(
  Trat = factor(rep(i,times=r[i])),
  dados.va = rmvt(r[i], sigmai, nu, delta=mui)
)
X <- rbind(X,X1)
}
return(X)
}

```

Rotina com os comandos do programa R para gerar distribuições uniformes (0, 1) multivariadas

```

umult.sample <- function(r=c(3,4),p,rho =c(0.5,0.8),type= c("cs","ar"))
{
mui <- rep(0, p)
rhot <- 2*sin(pi/6*rho)
g <- length(r)
X <- NULL
for (i in 1:g)
{
sigmai <- cov.choose(p, type[i], rhot[i])
X1 <- data.frame(
  Trat = factor(rep(i,times=r[i])),
  dados.va = pnorm(mvrnorm(r[i], mui, sigmai))
)
}
}

```

```

)
X <- rbind(X,X1)
}
return(X)
}

```

Rotina com os comandos do programa R para gerar dados de distribuições multivariadas garantindo que se pode aplicar a MANAVA

```

func_X <- function(distr,r,mu,sigma,nu,p,rho,type,H0,g,Delta)
{
if (distr==1) {
X <- mult.sample(r,mu,sigma)
} else if (distr==2) {
X <- tmult.sample(r,mu,sigma,nu)
} else if (distr==3) {
X <- umult.sample(r,p,rho,type)
if (H0==2){ # para poder apenas da uniforme
varth <- Delta * (1:p) / p #vartheta (definido na aval.do poder)
li <- (sum(r[1:(g-1)])+1):(sum(r)) #linhas de X que sao do trat cont
X[li,2:(p+1)] <- X[li,2:(p+1)]+matrix(rep(varth,each=r[g]),r[g],p) #soma
#media aos dados do trat controle
}
}
return(X)
}

```

Rotina com os comandos do programa R para o teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama (THTN)

```

THTN <- function(tratmed, S, dfe, p, g, r)#, alpha) THTN
{
Dig <- function(Xi, Xg, trS, sigma, p)
{

```

```

xi <- Xi[1:p]
Rig <- Xi[p+1]
D <- (t(Xg-xi)%*(Xg-xi))/(Rig * trS) - 1
D <- D * p / sigma
return(D)
}
rig <- 1/r[1:(g-1)] + 1/r[g]
trS <- sum(diag(S))
a1 <- trS / p
S2 <- S%*%S
trS2 <- sum(diag(S2))
a2 <- dfe^2*(trS2 - trS^2/dfe)/((dfe+2)*(dfe-1)*p)
sigma <- (2*p*a2/a1^2)^0.5
Xg <- as.numeric(tratmed[g, 2:(p+1)])
aux <- as.matrix(cbind(tratmed[1:(g-1), 2:(p+1)], rig))
D <- apply(aux, 1, Dig, Xg, trS, sigma, p)
# valores - p
S3 <- S2%*%S
trS3 <- sum(diag(S3))
S4 <- S3%*%S
trS4 <- sum(diag(S4))
b1 <- dfe^2*(dfe^2+dfe+2)
b2 <- -4*dfe*(dfe^2+dfe+2)
b3 <- -dfe*(2*dfe^2+3*dfe-6)
b4 <- 2*dfe*(5*dfe + 6)
b5 <- -(5*dfe + 6)
a3 <- dfe^4/((dfe+4)*(dfe+2)*(dfe-1)*(dfe-2)*p)
a3 <- a3*(trS3-3*trS2*trS/dfe+2*trS^3/dfe^2)
aux1 <- b1*trS4+b2*trS3*trS+b3*trS2^2+b4*trS2*trS^2+b5*trS^4
aux2 <- (dfe+6)*(dfe+4)*(dfe+2)*(dfe+1)*(dfe-1)*(dfe-2)*(dfe-3)*p
a4 <- dfe^3*aux1 / aux2
prob <- pnorm(D)-dnorm(D)*(1/sqrt(p)*sqrt(2)*a3*(D^2-1)/(3*sqrt(a2^3)))+

```

```

1/p * (a4*(D^3-3*D)/(2*a2^2)+a3^2*(D^5-10*D^3+15*D)/(9*a2^3))+
D/(2*dfe))
prob <- 1 - prob
res <- cbind(D,prob)
colnames(res) <- c("THTN","valor.p")
return(res) #comparar no fim com alpha Bonf
}

```

Rotina com os comandos do programa R para a estatística do teste de Hyodo, Takahashi e Nishiyama (THTN.B), para a versão *bootstrap*

```

THTN.B <- function(Xell, p, g, r)
{
anavaD <- lm(as.matrix(Xell[,2:(p+1)],sum(r),p)~Xell[,1])
tratmedD <- aggregate(Xell[,2:(p+1)],by = list(Xell[,1]),mean)
resanavaD <- cbind(Xell[,1],anavaD$residuals)
dfeD <- anavaD$df.residual
SD <- summary(manova(anavaD),tol=0)$SS[2]$Residuals / dfeD
Dig <- function(Xi, Xg, trS, sigma, p)
{
xi <- Xi[1:p]
Rig <- Xi[p+1]
D <- (t(Xg-xi)%*(Xg-xi))/(Rig * trS) - 1
D <- D * p / sigma
return(D)
}
rig <- 1/r[1:(g-1)] + 1/r[g]
trS <- sum(diag(SD))
a1 <- trS / p
S2 <- SD%*%SD
trS2 <- sum(diag(S2))
a2 <- dfeD^2*(trS2 - trS^2/dfeD)/((dfeD+2)*(dfeD-1)*p)
sigma <- (2*p*a2/a1^2)^0.5

```

```

Xg <- as.numeric(tratmedD[g, 2:(p+1)])
aux <- as.matrix(cbind(tratmedD[1:(g-1), 2:(p+1)], rig))
D <- as.vector(apply(aux, 1, Dig, Xg, trS, sigma, p))
return(D)
}

```

Rotina com os comandos do programa R para o teste de Ahmad (TA) para duas amostras multivariadas, sendo Y o tratamento controle

```

Ahmad <- function(X, Y)
{
  Uni <- function(U)
  {
    nu <- nrow(U)
    p <- ncol(U)
    hxixr <- U%*%t(U)
    Ei <- sum(diag(hxixr))
    res <- sum(hxixr) - Ei
    res <- res / (nu * (nu - 1))
    return(res)
  }
  Un1n2 <- function(U, V)
  {
    nu <- nrow(U)
    nv <- nrow(V)
    p <- ncol(U)
    hxixr <- U%*%t(V)
    res <- sum(hxixr) / (nu * nv)
    return(res)
  }
  Un1 <- Uni(X)
  Un2 <- Uni(Y)
  Q0 <- Un1 + Un2 - 2 * Un1n2(X, Y)

```

```

n1 <- nrow(X)
n2 <- nrow(Y)
p <- ncol(X) # or of Y
h <- function(x)
{
return(t(x) %*% x)
}
SigmaH120 <- var(X)/n1+var(Y)/n2
Q1 <- sum(diag(SigmaH120))
T2 <- 1 + Q0 / Q1
Omega0 <- (SigmaH120)
df <- (sum(diag(Omega0)))^2 /
sum(diag(Omega0%*%Omega0))
chi2 <- T2 * df
p.val <- 1 - pchisq(chi2, df)
return(list(T2=T2,chi2=chi2,p.val=p.val,df=df))
}

```

Rotina com os comandos do programa R para o teste de Ahmad (TA) para g amostras multivariadas, sendo Y o tratamento controle

```

# Teste de Ahmad (TA): para g amostras
# multivariadas, sendo Y o trat controle
# recebe data frame X, com coluna 1 niveis
# r: vetor das repeticoes
TA <- function(X, r)
{
p <- ncol(X) - 1
g <- length(r)
ct <- sum(r[1:(g-1)]) + 1
n <- sum(r)
Y <- as.matrix(X[ct:n,2:(p+1)],(n-ct+1),p)
res <- NULL

```

```

for (i in 1:(g-1))
{
ct2 <- sum(r[1:i])
ct1 <- ct2- r[i] + 1
Z <- as.matrix(X[ct1:ct2,2:(p+1)], ct2-ct1+1,p)
res <- rbind(res,matrix(unlist(Ahmad(Z,Y)),1,4,byrow = TRUE))
}
colnames(res) <- c("TA","chi2","valor.p","df")
return(res) # comparar no fim com alpha / m, m = g - 1 ou comparar
# com (alpha+alpha/m)/m
}

```

Rotina com os comandos do programa R para o teste de Ahmad (TA) com duas amostras multivariadas, para a versão *bootstrap*

```

# Estatística do teste de Ahmad (TA): para
# duas amostras multivariadas, sendo Y o trat controle,
# para a versão bootstrap
Ahmad.B <- function(X,Y)
{
Uni <- function(U)
{
nu <- nrow(U)
p <- ncol(U)
hxixr <- U%*%t(U)
Ei <- sum(diag(hxixr))
res <- sum(hxixr) - Ei
res <- res / (nu * (nu -1))
return(res)
}
Unln2 <- function(U, V)
{
nu <- nrow(U)

```

```

nv <- nrow(V)
p <- ncol(U)
hxixr <- U%*%t(V)
res <- sum(hxixr) / (nu * nv)
return(res)
}
Un1 <- Uni(X)
Un2 <- Uni(Y)
Q0 <- Un1 + Un2 - 2 * Un1n2(X, Y)
n1 <- nrow(X)
n2 <- nrow(Y)
p <- ncol(X) # or of Y
h <- function(x)
{
return(t(x) %*% x)
}
SigmaH120 <- var(X)/n1+var(Y)/n2
Q1 <- sum(diag(SigmaH120))
T2 <- 1 + Q0 / Q1
return(T2)
}

```

Rotina com os comandos do programa R para a estatística do teste de Ahmad (TA) para g amostras multivariadas, sendo Y o tratamento controle, para a versão *bootstrap*

```

TA.B <- function(X, r)
{
p <- ncol(X) - 1
g <- length(r)
ct <- sum(r[1:(g-1)]) + 1
n <- sum(r)
Y <- as.matrix(X[ct:n, 2:(p+1)], (n-ct+1), p)
res <- NULL
}

```

```

for (i in 1:(g-1))
{
ct2 <- sum(r[1:i])
ct1 <- ct2- r[i] + 1
Z <- as.matrix(X[ct1:ct2,2:(p+1)], ct2-ct1+1,p)
res <- rbind(res,matrix(unlist(Ahmad.B(Z,Y)),1,1,byrow = TRUE))
}
colnames(res) <- c("TAB")
return(res) # comparar no fim com alpha / m, m = g - 1 ou comparar
# com (alpha+alpha/m)/m
}

```

Rotina com os comandos do programa R para os testes via *bootstrap*, de Ahmad (TAB) e de Hyodo, Takahashi e Nishiyama (THTNB)

```

TATHTNB <- function(Xres,B=2000,p,g,r,res2b,res3b)
{
n <- sum(r)
m <- length(r) - 1
ct <- matrix(0,B,1)
aux <- function(ct)
{
an.error.occured <- FALSE
repeat
{
tryCatch({
sorteio <- sample(1:n,replace=TRUE)
Xell <-cbind(Xres[,1:1],Xres[sorteio,2:(p+1)])
Xell <- as.data.frame(Xell)
Xell[,1] <- as.factor(Xell[,1])
res1 <- max(TA.B(Xell, r)) # TA
res2 <- max(THTN.B(Xell, p, g, r))
return(c(res1,res2))},

```

```

error = function(e) {an.error.occured <- TRUE}
if (an.error.occured == FALSE) break
}
}
res <- matrix(unlist(apply(ct,1,aux)),B,2,byrow = TRUE)
TAB <- res[,1]
THTNB <- res[,2]
TAB <- c(TAB,max(res2b))
THTNB <- c(THTNB,max(res3b))
TAB.res <- matrix(res2b,m,2,byrow = FALSE)
THTNB.res <- matrix(res3b,m,2,byrow = FALSE)
for (i in 1:m)
{
TAB.res[i,2] <- mean(TAB>=TAB.res[i,1])
THTNB.res[i,2] <- mean(THTNB>=THTNB.res[i,1])
}
colnames(TAB.res) <- c("T2","valor.p")
colnames(THTNB.res) <- c("D","valor.p")
return(list(TAB.Res=TAB.res,THTNB.Res=THTNB.res))
}

```

Rotina com os comandos do programa R para o teste T^2 de Hotelling para duas amostras multivariadas, sendo Y o tratamento controle

```

# Teste T2 de Hotelling: para duas amostras
# multivariadas, sendo Y o trat controle
T2 <- function(Z, p, Y, S, dfe)
{
aux<- as.numeric(Y - Z[1:p])
rh <- Z[p+1]
T2 <- as.numeric(t(aux)%*%solve(S)%*(aux)) * rh / 2
v1 <- p
v2 <- dfe - p + 1

```

```

Fc <- v2 * T2 / (p * dfe)
valor.p <- 1 - pf(Fc, v1, v2)
return(list(T2 = T2, Fc=Fc, valor.p=valor.p, nu1=v1, nu2=v2))
}

```

Rotina com os comandos do programa R para o teste T^2 de Hotelling para g amostras multivariadas, sendo Y o tratamento controle

```

T2ig <- function(tratmed, r, dfe, S) #T2ig
{
rh <- 1 / ((1/r[1:(g-1)] + 1/r[g] ) / 2)
p <- nrow(S)
g <- nrow(tratmed)
Y <- tratmed[g,2:(p+1)]
res <- apply(cbind(tratmed[1:(g-1),2:(p+1)], rh), 1, T2, p, Y, S, dfe)
res <- matrix(unlist(res), (g-1), 5, byrow = TRUE)
colnames(res) <- c("T2", "Fc", "valor.p", "nu1", "nu2")
return(res) # comparar no fim com alpha / m, m = g - 1 ou comparar
# com (alpha+alpha/m)/m
}

```

Rotina com os comandos do programa R com a função para definir as matrizes de covariâncias pretendidas para as simulações dos tratamentos

```

cov.choose <- function(p, type="cs", rho = 0.5)
{
if (type=="cs")
sigma <- (1-rho)*diag(p)+rho*matrix(1,p,p) else
if (type == "ar")
{
a <- abs(matrix(1:p-1, nrow=p, ncol=p, byrow=TRUE) -
(1:p - 1))
sigma <- rho^a
}
}

```

```
return (sigma)  
}
```