



SÍLVIO DE CASTRO SILVEIRA

**MODELAGEM NÃO LINEAR COM ERROS
CORRELACIONADOS DA FREQUÊNCIA
CARDÍACA COM CARGAS CRESCENTES DE
TRABALHO**

LAVRAS - MG

2013

SÍLVIO DE CASTRO SILVEIRA

**MODELAGEM NÃO LINEAR COM ERROS CORRELACIONADOS
DA FREQUÊNCIA CARDÍACA COM CARGAS CRESCENTES DE
TRABALHO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador:

Dr. Joel Augusto Muniz

LAVRAS - MG

2013

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Silveira, Silvio de Castro.

Modelagem não linear com erros correlacionados da frequência cardíaca com cargas crescentes de trabalho / Silvio de Castro Silveira. – Lavras : UFLA, 2013.

68 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.

Orientador: Joel Augusto Muniz.

Bibliografia.

1. Fisiologia do esporte. 2. Limiar de transição metabólica. 3. Sigmóide de Boltzmann. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.536

SÍLVIO DE CASTRO SILVEIRA

**MODELAGEM NÃO LINEAR COM ERROS CORRELACIONADOS
DA FREQUÊNCIA CARDÍACA COM CARGAS CRESCENTES DE
TRABALHO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 28 de fevereiro de 2013.

Dr. João Domingos Scalon

UFLA

Dr. Fernando Roberto de Oliveira

UFLA

Orientador:

Dr. Joel Augusto Muniz

LAVRAS - MG

2013

*Ao meu pai Sílvio Paulo da Silveira, pelo amor, confiança, equilíbrio, força
e fé em todos os momentos;*

*À minha irmã, Marilaine e ao meu cunhado, André, pelo apoio, confiança,
paciência e pelo tesouro de nossas vidas, seus filhos William e Gabriel;*

*À minha noiva Raquel, por todos estes anos de amor, paciência, amizade,
carinho e companheirismo.*

*À todos os meus familiares e amigos que de certo modo contribuíram para
que este trabalho se concretizasse.*

DEDICO

AGRADECIMENTOS

À Deus em primeiro lugar por ter me concedido esta oportunidade e sempre ter iluminado meu caminho.

Ao professor Joel Augusto Muniz, pelas orientações, conselhos, amizade e por sempre acreditar no meu trabalho.

À Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Ciências Exatas, em especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária pelos ensinamentos e pela preparação profissional.

Aos meus grandes amigos e parceiros da minha turma do Mestrado pela paciência, compreensão e amizade.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa de estudos.

“Tudo coopera para o bem daqueles que amam a DEUS” –
(Romanos 8.28)

RESUMO

Considerando a frequência cardíaca uma das variáveis fisiológicas mais utilizadas em programas de avaliação e prescrição de exercício físico, muitos estudos são feitos para analisar o seu comportamento em testes progressivos por representar uma alternativa não invasiva para identificação dos limiares de transição metabólica. Ajustes de modelos lineares ainda são muito utilizados para representar a curva da frequência cardíaca em função de cargas crescentes de trabalho, mesmo existindo indicativos de comportamento não linear nos extremos da curva. O objetivo é comparar a qualidade de ajuste do modelo Sigmoidal de Boltzmann com e sem o parâmetro autorregressivo de ordem 1 com o modelo Logístico com e sem o parâmetro autorregressivo de ordem 1 e Linear para a curva da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho, verificar se os pontos de transição da curva se associam aos limiares de lactato e propor uma nova metodologia para a identificação do PDFC. Foram utilizados os dados de um estudo com vinte e dois indivíduos do gênero masculino, (12 soldados do Corpo de Bombeiros, sete jogadores de futsal, dois triatletas e um judoca) testados em cicloergômetro de frenagem mecânica, carga inicial de 0 kpm.min⁻¹ e incremento de 90 kpm.min⁻¹ a cada minuto até a exaustão. A frequência cardíaca foi medida por frequencímetro. Os ajustes foram feitos por meio do software R. Os resultados indicaram que o modelo sigmoide de Boltzmann com parâmetro autorregressivo de ordem 1 é superior aos demais e que há uma forte associação entre os pontos de transição desta curva com os limiares de lactato.

Palavras-chave: Fisiologia do esporte. Limiar de transição metabólica. sigmoide de Boltzmann.

ABSTRACT

Considering the heart rate (HR) one of the most physiological variables used in program evaluation and prescription of exercise, many studies are done to analyze their behavior in progressive tests by representing an alternative noninvasive identification of thresholds for metabolic transition. Linear models are still used to represent the curve of heart rate as a function of increasing work load (IWL), even though there are indications of nonlinear behavior at the extremes of the curve. The goal is to compare the quality of fit of the Boltzmann sigmoid model with and without the parameter autoregressive of order 1 with the Logistic model with and without the parameter autoregressive of order 1 and Linear curve for heart rate by increasing work load and verify if the transition points of the curve are associated with the thresholds lactate. The study used data from a study with twenty-two male subjects, (12 soldiers of the Fire Department, seven soccer players, triathletes and a two judoka) tested mechanically braked cycle ergometer, initial load of 0-kpm.min⁻¹ and increment of 90 kpm.min⁻¹ every minute until exhaustion. Heart rate was measured by a frequency counter. Adjustments were made using the software R. Results indicated that the model Boltzmann Sigmoid with parameter autoregressive of order 1 is superior to the others and there is a strong association between the transition points of this curve with the lactate threshold.

Key words: Boltzmann sigmoidal. Metabolic transition threshold. Sports physiology.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1	Análise de Regressão	13
2.2	Regressão Linear	15
2.3	Regressão não linear	20
2.4	Estimação dos parâmetros nos modelos não lineares	22
2.4.1	Método de mínimos quadrados ordinários	23
2.4.2	Método de mínimos quadrados ponderados	25
2.4.3	Método de mínimos quadrados generalizados	25
2.5	Processos iterativos	27
2.6	O estimador de σ^2	28
2.7	Intervalo de confiança para os parâmetros	28
2.8	Intervalo de confiança para a resposta predita	29
2.9	Crítérios para seleção de modelos	29
2.9.1	Desvio padrão residual	29
2.9.2	Crítério de informação de Akaike	30
2.10	Estimativas iniciais	30
2.11	Fisiologia da atividade física	30
2.12	Determinação do ponto de inflexão e ponto de deflexão da frequência cardíaca	31
2.13	Limiares de transição metabólicos	34
2.13.1	Limiar de lactato	34
3	MATERIAIS E MÉTODOS	36
3.1	Materiais	36
3.2	Métodos	36
3.2.1	Modelos ajustados	37
3.2.2	Análise de resíduos	38
3.2.3	Seleção de modelos	40
3.2.4	Recursos Computacionais	40
3.2.5	Nova proposta para identificação do PDFC	41
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	43
4.1	Comparação entre os ajustes individuais	51
4.2	Identificação do PDFC	53
4.3	Seleção dos modelos ajustados	56
4	CONCLUSÃO	59
	REFERÊNCIAS	Erro! Indicador não definido.1

1 INTRODUÇÃO

No meio esportivo existe uma busca constante pelos melhores resultados e, com o desenvolvimento de novas tecnologias, novos recordes têm sido alcançados e novas metas têm sido traçadas.

Para dar suporte a esta busca faz-se necessário que novos métodos de treinamento sejam desenvolvidos e para que não haja riscos à vida dos atletas devem também existir meios mais confiáveis para se avaliar a capacidade física destes e lhes recomendar métodos seguros de treinamento.

Considerando que a frequência cardíaca é uma das variáveis fisiológicas mais utilizadas em programas de avaliação e prescrição de exercício físico (CAMBRI et al., 2006), muitos estudos foram feitos para analisar o seu comportamento em atletas, por meio de testes progressivos, por representar uma alternativa não invasiva para identificação dos limiares de transição metabólica (CONCONI et al, 1982; COSTA; LIMA; OLIVEIRA, 2007; LIMA, 1997).

Muitos autores sugerem que a identificação dos limiares de transição metabólicos seja feita por meio de curvas das concentrações sanguínea de lactato de indivíduos testado com atividades físicas com cargas que variam de intensidade ou tempo. Esses métodos são conhecidos como invasivos e, além de requererem aparelhos específicos, necessitam também de pessoas especializadas. De acordo com Abad et al. (2007), os limiares de transição metabólica são úteis para avaliação e prescrição do treinamento aeróbio.

O primeiro modelo estudado para descrever o comportamento da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho foi o linear. Por muitos anos, foi tido como verdadeiro o fato da frequência cardíaca crescer de forma linear em cargas crescentes de trabalho.

Com base na regressão linear para interpretação da curva da frequência cardíaca, vários modelos teóricos foram desenvolvidos, para apoiar procedimentos de monitoramento da frequência cardíaca e de

predição de potência aeróbia máxima, tradicionalmente utilizados em pesquisa, em avaliação e em treinamento (LIMA, 1997).

Em trabalhos anteriores (CONCONI et al, 1982; DAVIES, 1968; WYNDHAM, 1967) a linearidade da relação da frequência cardíaca pelas cargas crescentes de trabalho foi contestada, tendo sido demonstrado que ela apresentava comportamento não linear em cargas baixas e comportamento assintótico nas cargas de trabalho próximo ao máximo. Mesmo com crítica ao modelo de regressão linear, os autores não apresentaram uma alternativa não linear para esta finalidade e, como o modelo de regressão linear se mostrava útil na solução de problemas práticos, continuou sendo utilizado, apesar de suas limitações (CONCONI et al, 1982).

Quando se ajusta a frequência cardíaca pelo modelo de regressão linear, consegue-se um bom ajuste apenas quando se desprezam as entradas inferiores e superiores da curva. Åstrand & Rodahl (1977) justificaram afirmando que, quando se trabalhava com os valores da porção inferior da curva, não se tinha resultados fiéis, pois, em cargas baixas, outros fatores se juntam ao estresse da atividade, como os fatores emocionais e ambientais.

Vários pesquisadores (DAVIES, 1968; WAHLUND, 1948; WYNDHAM, 1967) perceberam que, em cargas altas de trabalho, podia-se observar um comportamento assintótico da frequência cardíaca, mas consideraram como sendo exceções ao modelo de regressão linear.

Uma alternativa de modelagem não linear para o problema da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho, o modelo sigmoide de Boltzmann, foi apresentado por Lima (1997), o qual apresentou bons ajustes, tanto em cargas baixas quanto em cargas altas, na qual a frequência cardíaca tendia a um platô.

Este trabalho foi realizado com os objetivos de avaliar a qualidade do ajuste dos modelos sigmoide de Boltzmann, Logístico e linear simples para a curva da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho de pessoas e modelar a estrutura de erros, quando necessário.

Ao se obter ajustes mais precisos para a curva da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho, identificam-se com maior precisão os pontos de inflexão e de deflexão da frequência cardíaca, pontos que se associam aos limiares de transição metabólicos.

Propõe-se uma nova metodologia para a obtenção do ponto de deflexão da frequência cardíaca, com base em critérios para seleção de modelos de regressão não linear. Entende-se que quanto melhor se estimar a curva regressão para a frequência cardíaca, mais precisa será a identificação destes limiares metabólicos o que, conseqüentemente, otimiza as prescrições de treinamento e a melhora do desempenho do atleta.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Análise de Regressão

Análise de regressão é uma metodologia estatística que utiliza a relação entre duas ou mais variáveis, de tal forma que uma variável pode ser predita a partir de outra ou de outras (PAULA, 2004).

Para a análise de regressão, os dados podem ser obtidos a partir de duas situações:

- a) dados experimentais: as variáveis dependentes e independentes são planejadas como o resultado de um experimento;
- b) dados observacionais: observam-se os valores das variáveis dependentes e independentes, nenhuma delas sob controle.

Na visão de Draper e Smith (1998), os modelos de regressão são classificados como lineares, linearizáveis e não lineares. Essa classificação é baseada no conceito de derivadas.

- a) Modelos Lineares: aqueles que são lineares em relação aos parâmetros, ou seja, a derivada do modelo em relação aos parâmetros não depende dos parâmetros:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} f_i(X, \theta) = g(X)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, p$

em que $f_i(X, \theta)$ é a função resposta, n é o número de observações e p o número de parâmetros do modelo. A seguir, tem-se um exemplo, retirado de Savian (2005), sobre o modelo de regressão:

$$y = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_n x^n + \varepsilon$$

no qual:

$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ são os parâmetros do modelo,

x - a variável preditora do modelo,

y - a variável resposta

ε - o erro

O cálculo das derivadas parciais de y em relação a $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ são:

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_0} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = x, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = x^2, \quad \dots, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_n} = x^n$$

Como as derivadas não dependem dos parâmetros, pode-se concluir que este é um modelo linear.

- b) Modelos linearizáveis: aqueles que, por meio de alguma transformação, tornam-se lineares. Considere o modelo também extraído de Savian (2005):

$$Y = \theta^x \varepsilon$$

em que θ é o parâmetro a ser estimado e o erro é multiplicativo. Aplicando-se logaritmo a ambos os lados da igualdade obtém-se:

$$\ln Y = \ln(\theta^x \varepsilon)$$

$$\ln Y = \ln \theta^x + \ln \varepsilon$$

$$\ln Y = x \ln \theta + \ln \varepsilon$$

Definindo $Z = \ln Y$; $b = \ln \theta$ e $\varepsilon^* = \ln \varepsilon$ o modelo fica:

$$Z = bx + \varepsilon^*$$

que é linear, pois a derivada independe do parâmetro, mostrando que o modelo original é linearizável

$$\frac{\partial Z}{\partial b} = X = g(X)$$

- c) Modelos Não Lineares: são os modelos em que pelo menos uma das derivadas parciais depende de algum parâmetro do modelo.

Por exemplo,

$$Y = \theta_0 + \theta_1^x + \varepsilon$$

sendo θ_0 e θ_1 os parâmetros a serem estimados e ε o erro aditivo. Não existe operação capaz de transformá-lo em um modelo linear e as derivadas parciais de Y são:

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_0} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} = X\theta_1^{x-1} = g(X, \theta_1),$$

Portanto, o modelo é dito não linear.

Do ponto de vista metodológico, os modelos de regressão não linear são largamente utilizados na descrição de curvas de crescimento animal (MAZZINI et al., 2003, 2005; MENDES et al., 2008). Na área de produção vegetal utiliza-se destes modelos para descrever o crescimento de frutos, a exportação de micronutrientes para as plantas (DIAS et al., 2011). Estes modelos também são considerados para avaliar a dinâmica de nutrientes do solo (PEREIRA; MUNIZ; SILVA, 2005).

A aplicação de modelagem não linear na fisiologia dos esportes foi introduzida por Lima (1997). O ajuste de modelos não lineares em situações experimentais é mais viável, dada à qualidade dos ajustes obtidos com uma quantidade pequena de parâmetros que apresentam interpretações práticas.

2.2 Regressão Linear

O modelo de regressão linear é o modelo mais simples para descrever a relação entre uma variável independente x , também chamada de variável explicativa ou, ainda, variável preditora e uma variável resposta y , também chamada de variável dependente. O modelo linear pode ser escrito na forma matricial,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad (1)$$

em que $\mathbf{y}$ é o vetor com os dados observados para o modelo (1), $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de parâmetros de dimensões $P + 1 \times 1$, com P indicando o número de parâmetros do modelo; $\mathbf{X}$ é a matriz de dimensão $N \times P + 1$ das variáveis

regressoras com N indicando o número de observações e $\mathbf{e}$ é o vetor de erros aleatório.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \cdots & x_{NP} \end{bmatrix}$$

O termo $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ corresponde à componente determinística, que também pode ser designada por componente explicativa do modelo. Esta componente vai determinar o modelo matemático para as respostas. Em geral, temos as seguintes suposições para o modelo (1)

$$E[\mathbf{e}] = 0 \quad \text{ou} \quad E[\mathbf{y}] = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad (2)$$

$$Var[\mathbf{e}] = \sigma^2 I = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^t] \quad (3)$$

O termo $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ é chamado de função esperança para o modelo de regressão e a matriz $\mathbf{X}$ é chamada de matriz derivada, visto que ela é obtida derivando o modelo em relação aos parâmetros.

O nosso principal objetivo no estudo do modelo de regressão linear é o de estimar os parâmetros do modelo, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ e, a este processo, chamaremos de ajuste do modelo aos dados. Para isso serão necessárias algumas definições que aqui serão apresentadas. As definições são básicas e foram extraídas de Franco (2006), e serão utilizadas para demonstrar o método dos mínimos quadrados.

Definição 1

Seja E um espaço vetorial real. Sejam x, y elementos de E . Chama-se **produto escalar** (ou **produto interno**) de x por y , em notação (x, y) , qualquer função definida de $E \times E$ com valores em $\mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- P₁) $(x, y) = (y, x), \quad \forall x, y \in E,$
- P₂) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \quad \forall x, y, z \in E,$
- P₃) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$P_4) (x, x) \geq 0$ e $(x, x) = 0$ se e somente se $x = 0$ (vetor nulo)

Definição 2

Seja E um espaço euclidiano real. Sejam x, y elementos de E . Diz-se que x é **ortogonal** a y (em notação $x \perp y$) se e somente se $(x, y) = 0$.

Definição 3

Seja E um espaço euclidiano. Dados os vetores x e $y \in E$, definimos **distância** entre x e y , - em símbolo, $d(x, y)$ - o comprimento do vetor $x - y$, isto é:

$$d(x, y) = \|x - y\| \rightarrow d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

Para analisar a projeção ortogonal de um vetor sobre o outro, consideremos x, y vetores não nulos, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que λy seja ortogonal a $x - \lambda y$, como sugere a Figura 1:

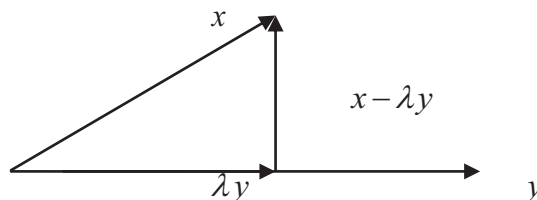


Figura 1 Projeção ortogonal de x sobre y

Pela definição 2 temos que se $\lambda y \perp (x - \lambda y)$ então $(\lambda y, x - \lambda y) = 0$.

Portanto, aplicando a P_3 , tem-se

$$\lambda(x, y) - \lambda^2(y, y) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{(x, y)}{(y, y)}.$$

chegando à nossa quarta definição:

Definição 4

Num espaço euclidiano real, chama-se **projeção ortogonal** de x sobre y , o vetor z definido por:

$$z = (\text{projeção de } x \text{ sobre } y) = \frac{(x, y)}{(y, y)} y.$$

Teorema da Melhor Aproximação

Seja E' um subespaço de dimensão finita de um espaço euclidiano E . Se v for um vetor pertencente a E , então, v_0 , a projeção ortogonal de v sobre E' , será a melhor aproximação para v no sentido de que

$$\|v - v_0\| < \|v - y\|,$$

Para qualquer $y \in E'$, tal que $y \neq v_0$.

Prova: A demonstração é trivial e segue das definições anteriores.

Em 1809, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicou um artigo demonstrando que a melhor maneira de determinar um parâmetro desconhecido de uma equação de condições é minimizando-se a soma dos quadrados dos resíduos, mais tarde chamado de Mínimos Quadrados, por Adrien-Marie Legendre (1752-1833) (CHRISTOFORO; MARCONATO; OLIVEIRA, 2007).

Ainda em Franco (2006), tem-se o seguinte problema: aproximar uma função $f(x) = y$ (real e de variável real) por uma função $F(x)$, que seja combinação linear de funções conhecidas, isto é,

$$f(x) \cong a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \dots + a_n g_n(x) = F(x)$$

de tal modo que a distância de $f(x)$ a $F(x)$ seja mínima.

A substituição de $f(x)$ por uma função $F(x)$ deve ser feita quando:

- 1 $f(x)$ é definida através de processo não finitos como integrais, soma de séries, etc.;

- 2 $f(x)$ é conhecida através de pares de pontos, obtidos através de medidas experimentais, e desejamos substituí-la por uma função cujo o gráfico se ajuste aos pontos observados.

O método dos mínimos quadrados para a aproximação de funções tem como base a projeção ortogonal de um vetor sobre um subespaço, isto é, nosso problema consiste em aproximar uma função $f(x)$ de E por uma função $F(x)$ de E' , tal que a distância de $f(x)$ a E' seja mínima. Assim, o que queremos é

$$\text{dist}(f(x), F(x)) = \text{mínima}$$

Pela definição 3, temos:

$$\text{dist}(f(x), F(x)) = \|f(x) - F(x)\| = \left[(f - F, f - F) \right]^{1/2}$$

de onde se obtém o critério que aqui denominaremos S , o quadrado do resíduo,

$$S = \|f(x) - F(x)\|^2 = \text{mínima}$$

o que justifica o nome de mínimos quadrados. Pode-se reescrever o critério S da seguinte forma matricial:

$$S(\beta) = \|y - X\beta\|^2$$

$$S(\beta) = (y - X\beta)^t (y - X\beta)$$

$$S(\beta) = y^t y - y^t X\beta - \beta^t X^t y + \beta^t X^t X \beta$$

$$S(\beta) = y^t y - 2\beta^t X^t y + \beta^t X^t X \beta$$

Para minimizar $S(\beta)$, deriva-se $S(\beta)$ em relação aos parâmetros e iguala-se a zero

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2X^t y + 2\beta^t X^t X$$

$$\hat{\beta} X^t X = X^t y$$

Multiplicando por $(X^t X)^{-1}$, obtem-se

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t y \quad (4)$$

desde que exista $(X^t X)^{-1}$.

Supondo que o erro seja normalmente distribuído e com as propriedades (2) e (3), o estimador de máxima verossimilhança de β é o mesmo estimador que o obtido pelo método de mínimos quadrados.

O estimador de mínimos quadrados possui várias propriedades desejáveis. Seber (1977) apresenta algumas delas.

- a) $E[\hat{\beta}] = (X^t X)^{-1} X^t E[y] = (X^t X)^{-1} X^t X \beta = \beta$: o estimador de mínimos quadrados é não viesado.
- b) $\text{Var}[\hat{\beta}] = \text{Var}[(X^t X)^{-1} X^t y] = \text{Var}[(X^t X)^{-1} X^t \text{Var}[y] X (X^t X)^{-1}] = \sigma^2 (X^t X)^{-1}$.
- c) O estimador de mínimos quadrados $\hat{\beta}$ tem distribuição normal.
 $\hat{\beta} \sim \text{NM}_{p+1}(\beta, \sigma^2 (X^t X)^{-1})$
- d) Sabe-se que $\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - \hat{\theta})^t (Y - \hat{\theta})}{N - P - 1}$ é um estimador não tendencioso de σ^2 . Um intervalo de confiança $1 - \alpha$ para o parâmetro $\hat{\beta}_j$ é dado por: $\hat{\beta}_j \pm t_{(N-P-1, \alpha/2)} \sqrt{\hat{\sigma}^2 (X^t X)^{-1}}$
- e) Seja X_i uma linha da matriz X , um estimador para Y_i é dado por $\hat{Y}_i = X_i \hat{\beta}$. Um intervalo de confiança com nível $1 - \alpha$ para a resposta esperada é dado por
 $\hat{Y}_i \pm t_{(N-P-1, \alpha/2)} \sqrt{\hat{\sigma}^2 X_i^t (X^t X)^{-1} X_i}$

2.3 Regressão não linear

O método de Regressão linear, apesar de poderoso, não consegue descrever com eficiência várias relações que frequentemente aparecem em pesquisas de diversas áreas. Para resolver esse tipo de problema, é necessário

estender as técnicas usadas no modelo de regressão linear, adicionando certo grau de complexidade.

Muitas vezes, os modelos não lineares surgem como soluções de um sistema de equações diferenciais, sendo este sistema proveniente de suspeitas envolvendo dinâmicas físicas/biológicas sobre determinado fenômeno em estudo. Estas suspeitas têm por base as relações entre parâmetros que têm significado prático na descrição do fenômeno que se observa (WEISBERG, 2005).

Gallant (1989) exhibe o seguinte exemplo: considere o sistema linear a seguir.

$$\frac{d}{dx}A(x) = -\theta_1 A(x)$$

$$\frac{d}{dx}B(x) = \theta_1 A(x) - \theta_2 B(x)$$

$$\frac{d}{dx}C(x) = \theta_2 B(x)$$

tomando os valores iniciais

$$A(x) = 1 \quad B(x) = C(x) = 0 \quad \text{para } x = 0$$

A equação $\frac{d}{dx}A(x) = kA(x)$ é uma equação mais geral e corresponde às equações acima. Uma pergunta que auxilia na sua resolução é a seguinte: Qual é a função cuja derivada é proporcional à própria função? A teoria das equações diferenciais afirma que a solução geral dessa equação é da forma $A(x) = ce^{kx}$, em que c é uma constante arbitrária. Considerando somente o espaço paramétrico $\theta_1 = \theta_2$, teremos os seguintes modelos não lineares:

$$A(x) = e^{-\theta_1 x}$$

$$B(x) = \theta_1 x e^{-\theta_1 x}$$

$$C(x) = 1 - e^{-\theta_1 x} - \theta_1 x e^{-\theta_1 x}$$

Gallant (1989) afirma, ainda, que o modelo de regressão não linear com uma variável dependente é mais frequentemente usado em aplicações do que qualquer outro modelo, e o caso do modelo linear é apenas um caso particular de um modelo não linear, assim como uma distribuição de qui-quadrado central é um caso particular de uma distribuição de qui-quadrado não central.

Os estimadores de mínimos quadrados para os modelos de regressão linear apresentam propriedades ótimas: não são viesados, são normalmente distribuídos e têm variância mínima entre qualquer outra classe de estimadores. Para o caso dos modelos não lineares, estas propriedades somente são válidas assintoticamente, isto é, quando o tamanho da amostra tender ao infinito (GALLANT, 1989).

2.4 Estimação dos parâmetros nos modelos não lineares

Os parâmetros nos modelos não lineares podem ser obtidos por diferentes métodos, sendo o de mínimos quadrados o mais utilizado. A vantagem de se utilizar o método de mínimos quadrados é que não há necessidade de se fazer nenhuma pressuposição sobre a distribuição dos resíduos.

Quando se estimam os parâmetros no modelo de regressão linear, parte-se do pressuposto que $e \sim N(0, I\sigma^2)$. Todavia, nem sempre isso acontece. Existem casos que a matriz de variância e covariâncias dos resíduos apresenta outras estruturas, as quais diferem, dependendo do conhecimento do fenômeno em estudo.

A escolha de uma estrutura adequada dos resíduos pode tornar o modelo mais realista em relação aos dados, obtendo, assim, estimadores não viesados e com variância mínima em relação a outros estimadores não viesados (DRAPER; SMITH, 1998).

Para obter as estimativas dos parâmetros nos modelos de regressão não linear é necessário, então, caracterizar o modelo de regressão em função do vetor de erros (SAVIAN, 2005):

a) modelos ordinários – são os modelos cuja estrutura dos erros não viola nenhuma das pressuposições, ou seja, $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}\sigma^2)$.

b) modelos ponderados - são os modelos cuja estrutura dos erros viola a pressuposição de homogeneidade de variâncias. Nesse caso, diz-se que os erros são heteroscedásticos e representa-se por $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{D}\sigma^2)$, em que D é uma matriz diagonal, que pondera a variância σ^2 .

c) modelos generalizados - são os modelos cuja estrutura dos erros viola a pressuposição de independência dos erros e/ou de homogeneidade de variâncias. Os erros são correlacionados (e possivelmente heteroscedásticos), $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{W}\sigma^2)$, em que W é uma matriz simétrica, positiva definida, que representa as variâncias e covariâncias dos erros.

2.4.1 Método de mínimos quadrados ordinários

Seja o modelo de regressão dado por

$$y_t = f(x_t, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t \quad t = 0, 1, 2, \dots, N$$

em que y_t é o vetor de valores observados, x_t é o vetor de variáveis regressoras associadas ou variáveis independentes para o t -ésimo caso, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ é um vetor P -dimensional de parâmetros desconhecidos e ε_t o vetor de erros aleatório com distribuição normal, independente e identicamente distribuídos, com média zero e variância constante.

O modelo na forma matricial fica

$$Y = f(\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon \quad (4)$$

em que Y tem componentes y_t , $f(\boldsymbol{\beta})$ tem componentes $f(x_t, \boldsymbol{\beta})$ e ε tem componentes ε_t . Procederemos do mesmo modo que no modelo de

regressão linear, minimizando a soma de quadrados do resíduo, $SSE(\beta)$ que, na forma matricial fica

$$SSE(\beta) = \varepsilon^t \varepsilon = [Y - f(\beta)]^t [Y - f(\beta)] = Y^t Y - 2Y^t f(\beta) + f(\beta)^t f(\beta)$$

Seja $F(\beta) = \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta}$ então:

$$\frac{\partial SSE(\beta)}{\partial \beta} = -2[Y - f(\beta)]^t F(\beta)$$

Igualando-se a derivada a zero e substituindo $F(\hat{\beta})$ por J , a equação fica

$$-2Y^t J + 2 f(\hat{\beta})^t J = 0$$

$$J^t f(\hat{\beta}) = J^t Y \quad (SEN)$$

No caso do modelo linear é possível isolar os parâmetros, visto que a matriz X , que é a matriz de derivadas do modelo em relação aos parâmetros, não depende dos parâmetros.

A matriz jacobiana (J) do sistema de equações normais é dada da seguinte maneira:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, \beta)}{\partial(\beta_1)} & \frac{\partial f(x_1, \beta)}{\partial(\beta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_1, \beta)}{\partial(\beta_p)} \\ \frac{\partial f(x_2, \beta)}{\partial(\beta_1)} & \frac{\partial f(x_2, \beta)}{\partial(\beta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_2, \beta)}{\partial(\beta_p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_N, \beta)}{\partial(\beta_1)} & \frac{\partial f(x_N, \beta)}{\partial(\beta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_N, \beta)}{\partial(\beta_p)} \end{bmatrix}$$

Pela definição, modelo não linear é aquele em que pelo menos uma de suas derivadas depende dos parâmetros. Logo, não é possível isolar os parâmetros e obter uma solução explícita para o sistema. Para resolvê-lo, recorre-se ao uso de métodos numéricos iterativos.

2.4.2 Método de mínimos quadrados ponderados

Com a finalidade de estabilizar as variâncias, o método dos mínimos quadrados ponderados na estimação dos parâmetros é mais adequado por fornecer estimadores não tendenciosos e de variância mínima (HOFFMAN; VIEIRA, 1998).

Para entender como este método funciona, considere um modelo não linear como o (4).

Suponha que $\varepsilon \sim N(0, V\sigma^2)$, em que V é uma matriz diagonal positiva que representa as variâncias associadas a cada ε_i . Como os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero, assume-se válida a hipótese de independência dos resíduos.

$$E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0 \quad i \neq j$$

Seja uma matriz simétrica não singular P , tal que $V = PP = P^t P$. Dessa forma, tem-se que $V^{-1} = P^{-1}P^{-1}$. Escrevendo $\varphi = P^{-1}\varepsilon$, teremos:

$$E[\varphi] = E[P^{-1}\varepsilon] = P^{-1}E[\varepsilon] = 0$$

$$\begin{aligned} Var[\varphi] &= E[\varphi\varphi^t] - (E[\varphi])^2 = E[P^{-1}\varepsilon\varepsilon^t P^{-1}] = P^{-1}V\sigma^2 P^{-1} = \\ &= \sigma^2 P^{-1} P P^{-1} = \sigma^2 I \end{aligned}$$

Para se obter, então, um modelo que atende as pressuposições do modelo ordinário, basta multiplicar o modelo (4) por P^{-1} , ficando assim:

$$P^{-1}Y = P^{-1}f(x, \beta) + P^{-1}\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad Z = (x, \beta) + \varphi$$

Agora basta aplicar o método de mínimos quadrados ordinários a este modelo e ter-se-á um estimador para os parâmetros não viesado e com variância mínima.

2.4.3 Método de mínimos quadrados generalizados

Na presença de autocorrelação residual ou autocorrelação residual e heterogeneidade da variância, o método de mínimos quadrados

generalizados é mais eficiente que os métodos de mínimos quadrados ponderados e ordinários (HOFFMAN; VIEIRA, 1998).

Considere-se, novamente, o modelo não linear (4), supondo-se que $\varepsilon \sim N(0, W\sigma^2)$, em que W é uma matriz simétrica, positiva e definida, representando as variâncias e covariâncias dos resíduos.

É fácil, agora, entender porque se consideram os métodos de mínimos quadrados ordinários e ponderados como casos particulares do método generalizado, pois, se as covariâncias dos resíduos, que estão fora da diagonal principal, forem iguais a zero, e a diagonal principal for os pesos, então, teremos o métodos de mínimos quadrados ponderados. Caso as variâncias sejam todas iguais, então, tem-se o método de mínimos quadrados ordinários.

No caso de utilizar modelos não lineares para descrever a frequência cardíaca de pessoas, é bastante razoável considerar a autocorrelação residual, visto que as medidas da frequência cardíaca são tomadas em uma mesma pessoa. Logo, cada medida deve estar correlacionada com a outra.

Admitindo-se que os erros são autocorrelacionados na forma de um processo autorregressivo estacionário de primeira ordem AR(1),

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

em que ϵ_t é o ruído branco, $E[\epsilon_t] = 0$, $E[\epsilon_t^2] = \sigma_\epsilon^2$, $E[\epsilon_t \epsilon_{t-h}] = 0$ se $h \neq 0$.

O modelo ε_t será estacionário se $-1 \leq \varphi_1 \leq 1$, para $t = 1, 2, \dots, n$. Nessas condições, $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\varphi_1}$ e $COV_\varepsilon = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\varphi_1} \varphi_1^h = \sigma_\varepsilon^2 \varphi_1^h$.

A matriz W é dada da seguinte maneira:

$$W = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\varphi_1} \begin{bmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \dots & \varphi_1^{n-1} \\ \varphi_1 & 1 & \varphi_1 & \dots & \varphi_1^{n-2} \\ \varphi_1^2 & \varphi_1 & 1 & \dots & \varphi_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{n-1} & \varphi_1^{n-2} & \varphi_1^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

e, de maneira análoga ao método de mínimos quadrados ponderados, encontra-se $\hat{\beta}$.

2.5 Processos iterativos

Conforme citado anteriormente, o sistema de equações normais para o modelo não linear não apresenta soluções explícitas, devendo, então, ser utilizados métodos numéricos iterativos para se obter as estimativas dos parâmetros. Um método muito utilizado é o método Gauss Newton, que utiliza uma expansão em série de Taylor do vetor de funções.

Seja o modelo não linear

$$Y = f(\beta) + \varepsilon$$

uma aproximação para $f(\beta)$, por meio da expansão em uma série de Taylor no ponto β_0 fica

$$f(\beta) = f(\beta^0) + \frac{\partial f(\beta^0)}{\partial(\beta)}(\beta - \beta^0) + \dots$$

em que $\frac{\partial f(\beta^0)}{\partial(\beta)} = J^0$ é o jacobiano da função no ponto β^0 .

O jacobiano de um modelo não linear tem, em pelo menos uma de suas entradas, um parâmetro, enquanto que J^0 é uma matriz de números de dimensão $N \times P$.

Tomando-se, então, $f(\beta) = f(\beta^0) + J^0(\beta - \beta^0)$ e substituindo-se no modelo não linear, teremos

$$Y = f(\beta^0) + J^0(\beta - \beta^0) + \varepsilon$$

$f(\beta^0)$ tem ordem $N \times 1$, pois cada entrada desta matriz é a respectiva variável independente aplicada ao modelo com os parâmetros β^0 . Chamaremos $Y^0 = Y - f(\beta^0)$ e $\theta^0 = \beta - \beta^0$.

O modelo passa, então, a ser escrito da forma $Y^0 = J^0\theta^0 + \varepsilon$, que é um modelo de regressão linear. Logo, seus parâmetros podem ser estimados conforme a metodologia apresentada na seção 2.2.

A estimativa para os parâmetros fica

$$\hat{\theta}^0 = (J^{0t} J^0)^{-1} J^{0t} Y$$

Corrige-se, então, o vetor de estimativas dos parâmetros da seguinte maneira: $\beta^1 = \beta^0 + \theta^0$. Este vetor de novas estimativas β^1 é utilizado, novamente, como estimativa inicial e se repete todo o processo.

Esse processo é repetido até que algum critério de parada seja atendido. Os critérios podem ser número de iterações, significância da diferença entre β^n e β^{n-1} , em que n representa a n —ésima iteração ou significância da diferença entre as somas de quadrados residuais $S(\beta^n)$ e $S(\beta^{n-1})$.

2.6 O estimador de σ^2

O estimador de mínimos quadrados e de máxima verossimilhança para σ^2 é dado por Gallant (1989),

$$\hat{\sigma}^2 = QME = \frac{S(\hat{\beta})}{N - P}$$

em que $S(\hat{\beta})$ é a soma de quadrados do resíduo avaliada em $\hat{\beta}$, N é o tamanho da amostra, P o número de parâmetros e QME é o quadrado médio do resíduo.

2.7 Intervalo de confiança para os parâmetros

Sob as suposições de que o vetor de erros siga uma distribuição normal e os erros sejam independentes e identicamente distribuídos, um intervalo de confiança $1 - \alpha$ para o parâmetro $\hat{\beta}_j$ é dado por:

$$\hat{\beta}_j \pm t_{(N-P, \alpha/2)} \sqrt{\hat{\sigma}^2 (X^t X)^{-1}}$$

O intervalo de confiança para os parâmetros é obtido assintoticamente, pois, para amostras finitas, $\hat{\beta}$ não é normalmente distribuído, viesado para β e não é um estimador de mínima variância (RATKOWSKY, 1983).

2.8 Intervalo de confiança para a resposta predita

Os intervalos de confiança para as respostas esperadas são obtidas por analogia aos modelos lineares, substituindo o valor estimado $x_0^T \hat{\beta}$ por $f(x_0, \hat{\theta})$, a matriz X por $\hat{V}$ e o vetor derivado x_0 por

$$v_0 = \left. \frac{\partial f(x_0, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta=\hat{\beta}}$$

O intervalo aproximado $1 - \alpha$ é, então,

$$f(x_0, \hat{\beta}) \pm s \|v_0^T \hat{R}_1^{-1}\| t_{(N-P, \alpha/2)}$$

em que a matriz $\hat{R}_1$ vem de uma decomposição $\hat{V} = \hat{Q}_1 \hat{R}_1$, sendo $\hat{V}$ a matriz de derivadas avaliada em $\hat{\theta}$.

2.9 Critérios para seleção de modelos

A seleção do modelo mais adequado para descrever a frequência cardíaca em testes progressivos foi realizada com base na precisão dos ajustes, obedecendo aos critérios a seguir.

2.9.1 Desvio padrão residual

O desvio padrão residual, DPR , é estimado pela expressão

$$DPR = \sqrt{\frac{QME}{N-P}}$$

em que QMR é o quadrado médio do resíduo, uma estimativa da variância residual, N é o tamanho da amostra utilizada no ajuste do modelo e P é o número de parâmetros. O melhor modelo estimado será o que apresentar o menor DPR .

2.9.2 Critério de informação de Akaike

O critério de Informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1974) é uma estatística que serve como medida de comparação da qualidade de ajuste do modelo baseado no logaritmo da função de máxima verossimilhança, sendo dependente do número de parâmetros do modelo em estudo.

A estimativa do AIC é dada pela seguinte fórmula:

$$AIC = -2\log L(\hat{\theta}) + 2k$$

em que

$\log L(\hat{\theta})$ é o logaritmo da função de máxima verossimilhança;

k é o número de parâmetros no modelo.

O AIC é utilizado para comparar modelos não aninhados e o melhor modelo, considerando o ajuste, será aquele que apresentar menor valor.

2.10 Estimativas iniciais

Os valores iniciais utilizados para se estimar os parâmetros foram obtidos através de procedimento gráfico iterativo do pacote *manipulate*, função *manipulate()* disponível no RStudio (editor para script do R), para os modelos sigmoide de Boltzmann e Logístico.

2.11 Fisiologia da atividade física

A evidente busca pelos melhores resultados, melhores desempenhos em diversas modalidades de competição esportivas em quaisquer que sejam os níveis, seja este olímpico, mundial, nacional ou regional, requer o suporte

da tecnologia, de modo que esta dê indicadores capaz de refletir a perfeita integração entre os sistemas cardiovascular, respiratório e muscular em função do grande aumento de gasto energético proporcionado pelo exercício.

Portanto, para que um treinamento seja efetivo e possa conduzir a uma resposta ótima de desempenho, os princípios do suprimento energético devem ser bem compreendidos e aplicados (AMORIM, 2002).

Todos os atletas e não atletas são forçados a aprender lutar com a forte acidose muscular e a subsequente fadiga advinda do treinamento intenso, e o que ocorre com o treino adequado é exatamente a melhora dessa capacidade de tolerância (JANSSEN, 2001).

Quanto à importância do treinamento Amorim (2002, p. 52) afirma que

Um ótimo treinamento depende da intensidade adequada de trabalho capaz de ativar completamente o sistema de energia solicitado, primordialmente, pela atividade fim. As intensidades baixas não promovem as adaptações necessárias e as muito elevadas podem deteriorar a performance como resultado de um quadro de sobre-treinamento; assim, a avaliação da correta intensidade do treinamento é tanto uma arte como uma ciência.

Diversos autores citam que os principais métodos de controle do treinamento são o consumo máximo de oxigênio, limiares de transição metabólica (limiares de lactato e limiares ventilatórios) e frequência cardíaca.

2.12 Determinação do ponto de inflexão e ponto de deflexão da frequência cardíaca

O conceito de ponto de inflexão da frequência cardíaca é o mesmo que temos sobre o ponto de inflexão de uma curva de crescimento qualquer. É o momento no qual a frequência cardíaca muda de um crescimento acelerado e passa para um crescimento desacelerado.

Para alguns indivíduos, nem sempre é possível detectar o ponto de inflexão da frequência cardíaca, pois, dado o tipo de treinamento e/ou tipo de

protocolo utilizado para se avaliá-la, ela se comporta de maneira linear e, por consequência, o seu crescimento é acelerado do início ao fim do teste.

Quando se ajusta a frequência cardíaca por modelos não lineares, como o modelo sigmoide de Boltzmann, o ponto de inflexão é determinado derivando-se a curva da frequência cardíaca em relação à variável carga de trabalho e igualando-se a zero.

Como o modelo sigmoide de Boltzmann é simétrico, seu ponto de inflexão é dado na metade exata da curva. Seguindo a interpretação dos parâmetros do modelo o ponto de inflexão é valor do parâmetro PI , ou seja, o parâmetro PI é a carga de trabalho na qual a frequência cardíaca atingiu a metade do seu valor máximo.

A determinação do ponto de deflexão da frequência cardíaca já não é tão trivial como a determinação do ponto de inflexão. Abad et al. (2007) definem o ponto de deflexão o momento a partir do qual a frequência cardíaca tende a um platô.

Se desprezarmos os valores iniciais e finais da frequência cardíaca obtida em um teste progressivo é possível obter um bom ajuste da porção central por meio de um modelo de regressão linear simples.

Quando se avalia a totalidade das observações da frequência cardíaca, vemos, ao se aproximar das últimas observações, uma tendência a um platô. A frequência cardíaca cresce até determinado momento, quando começa a se estabilizar.

A frequência cardíaca máxima foi estimada pela fórmula $FC_{máx} = 220 - idade$ (COSTA; LIMA; OLIVEIRA, 2007).

Alguns autores chamam este momento de quebra de linearidade, ou seja, momento no qual o ajuste por uma reta já não é mais eficiente, e um ajuste por um modelo não linear passa a ser mais eficiente (KARA et al, 1996; LIMA, 1997).

Não existe uma forma algébrica de se determinar o momento a partir do qual há a tendência a um platô da frequência cardíaca e sua determinação tornou-se muito subjetiva.

Para diminuir a dificuldade de determinação do ponto de deflexão, vários métodos foram propostos. Kara et al. (1996) utilizaram dois modelos lineares para a curva da frequência cardíaca de indivíduos não treinados. Primeiramente, ajustaram os dados da frequência cardíaca por um polinômio de terceira ordem e, em seguida, ligaram, por uma reta, a primeira à última observação, conforme a Figura 2.

O valor $D_{máx}$ foi obtido através da diferença entre o valor estimado através do polinômio de terceiro grau e o valor estimado pela reta para os valores do domínio.

Mais recentemente, Costa, Lima e Oliveira (2007) utilizaram uma modificação desse método para a determinação do ponto de deflexão da frequência cardíaca de dez “mountain bikers” de alto desempenho. No lugar de ajustar um polinômio de terceiro grau ele utilizou o ajuste sigmoide de Boltzmann, conforme a Figura 3.

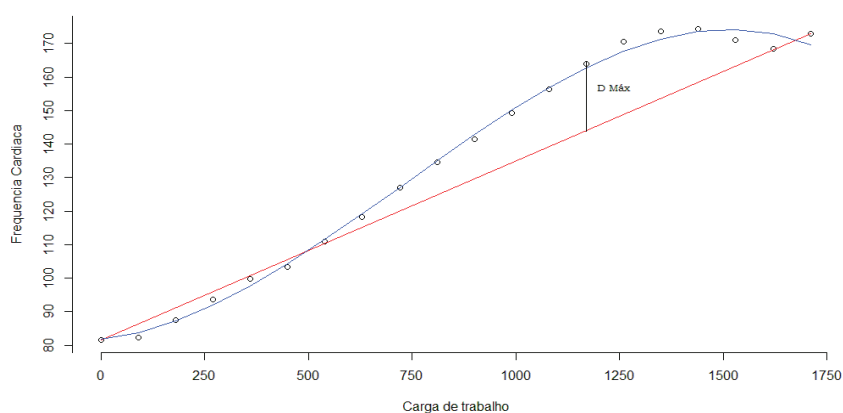


Figura 2 Método $D_{máx}$ utilizando o ajuste polinomial de terceiro grau e o linear

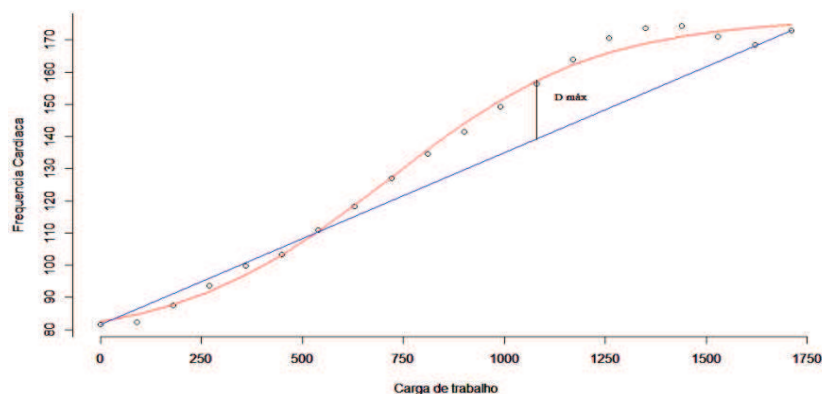


Figura 3 Método Dmáx utilizando o ajuste sigmoide de Boltzmann e o linear

2.13 Limiares de transição metabólicos

Como parte dos objetivos deste trabalho é avaliar a associação entre os pontos de transição da curva da frequência cardíaca e os limiares de transição metabólica, é preciso defini-los.

Na literatura sobre o assunto, encontra-se uma série de denominações que, por muitas vezes, referem-se a um mesmo fenômeno, distinguindo-o apenas pelo método de medição (AMORIM, 2002): limiar anaeróbio, limiar de lactato ou limiar de acidose láctica. Para efeito deste trabalho, abordou-se, dentro de limiares de transição metabólica, apenas o limiar de lactato, um dos principais métodos de controle de treinamento da atualidade.

2.13.1 Limiar de lactato

A identificação do limiar de lactato é feita por meio da curva da concentração sanguínea de lactato em função da intensidade/tempo em teste progressivo (COSTA; LIMA; OLIVEIRA, 2007).

Para se obter a concentração de lactato em cada intensidade, é necessário coletar uma pequena amostra sanguínea da pessoa, e para tal, é necessário um profissional qualificado e equipamentos específicos, o que torna este método mais complicado em determinadas faixas etárias e locais, seja por questões operacionais ou por questões éticas.

Portanto, ao se avaliar o comportamento da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho, pode-se obter uma forma não invasiva para identificar estes momentos de transição (LIMA, 1997).

Amorim (2002) afirma que, quando a intensidade dos exercícios atinge níveis altos, a necessidade de oxigênio é superior à capacidade do sistema cardiorrespiratório de extrair e transportar oxigênio. As demandas energéticas passam, então, a ser complementadas por mecanismos anaeróbios, que transformam do piruvato em lactato em âmbito celular.

Quando a capacidade do organismo de retirar o lactato for inferior à sua produção, inicia-se o acúmulo. Se mantivermos ou aumentarmos a intensidade, conseqüentemente, ocorrerá a deterioração da capacidade de continuidade do exercício com a mesma eficiência.

O momento em que ocorre esse início do acúmulo de lactato é denominado limiar de lactato, que nos permite, então, defini-lo como intensidade do exercício em que ocorre elevação sistemática e contínua da concentração de lactato (POWERS; HOWLEY, 2005).

Os autores ainda distinguem o limiar de lactato em duas categorias distintas: o primeiro limiar de lactato, ou LL_1 que pode ser identificado pelo menor equivalente de $[La]/W$ ou por meio da concentração fixa de 2 mmol/l . O segundo limiar de lactato, ou LL_2 pode ser obtido adicionando-se o valor fixo de $1,5 \text{ mmol/l}$ ao menor equivalente ou ao valor fixo de 4 mmol/l (AMORIM, 2002; COSTA; LIMA; OLIVEIRA, 2007).

O critério para a identificação dos limiares adotado deve se levar em conta a sua adequação aos objetivos e potencialidades do sujeito a ser treinado.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Materiais

Para execução da metodologia, foram utilizados os dados experimentais (LIMA, 1997) de 22 indivíduos do gênero masculino, sendo um judoca, dois triatletas, sete jogadores de futsal e doze soldados do Corpo de Bombeiros, com média de idade $24,4 \pm 3,7$ anos. Todos se submeteram ao teste progressivo em cicloergômetro, com cargas incrementadas a cada minuto. Para estudo da reprodutibilidade dos resultados, dez indivíduos repetiram o teste.

A bicicleta ergométrica utilizada nos testes tem frenagem mecânica e é equipada com velocímetro digital, que registra também as rotações do pedal. O registro da frequência cardíaca foi feito pelo cardiofrequencímetro da marca Polar Vantage NV®.

3.2 Métodos

Os modelos foram ajustados aos dados de cada indivíduo e à média dos dados brutos da frequência cardíaca. Não se optou por utilizar os dados normalizados pelo percentual da frequência cardíaca de reserva (FC de pico – FC da carga zero) (LIMA, 1997) para não perder a interpretabilidade dos parâmetros dos modelos.

Considerou-se, inicialmente, que todas as pressuposições sobre o vetor de resíduos são aceitas, ou seja, os resíduos seguem uma distribuição normal com média zero e variância constante, são independentes e identicamente distribuídos $\varepsilon \sim i. i. d N(0, \sigma^2)$.

A partir disso, foi feita a análise residual com base nos gráficos de resíduos e resíduos padronizados pelos valores preditos, autocorrelação e “Q-Q Plot” e também com base nos teste de hipótese de Breusch-Pagan, Shapiro-Wilk e Durbin-Watson.

3.2.1 Modelos ajustados

Aos dados da frequência cardíaca foram ajustados os modelos não lineares logístico, de acordo com a parametrização apresentada por Seber e Wild (1989), e sigmoide de Boltzmann, conforme apresentado por Lima (1997) e o modelo de regressão linear.

- a) Modelo de regressão linear

$$Y_i = Ax_i + B + \varepsilon_i$$

em que Y_i é a variável resposta, x a variável independente, A e B são os parâmetros a serem estimados e ε_i o resíduo para a carga i , $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

- b) Modelo sigmoide de Boltzmann com erros independentes e autorregressivos de primeira ordem AR(1), respectivamente,

$$Y_i = AI + \frac{(AS - AI)}{1 + e^{\left(\frac{PI-x}{Inc}\right)}} + \varepsilon_i$$

$$Y_i = AI + \frac{(AS - AI)}{1 + e^{\left(\frac{PI-x}{Inc}\right)}} + \varphi \varepsilon_{i-1} + \epsilon_i$$

em que Y_i é a frequência cardíaca para a carga i ; AI = Assíntota Inferior; AS = Assíntota Superior; PI = Ponto de Inflexão; Inc = Inclinação da curva no PI ; x = A variável carga de trabalho; ε_i é o resíduo para a carga i ; φ corresponde ao parâmetro autorregressivo de ordem 1 e ϵ_i é o ruído branco.

- c) Modelo logístico com erros independentes e autorregressivos de primeira ordem AR(1), respectivamente:

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{\beta - \gamma x}} + \varepsilon_i$$

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{\beta - \gamma x}} + \varphi \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i$$

em que Y_i é a frequência cardíaca para a carga i ; α = Assíntota Superior; β é um parâmetro de locação, sem interpretação prática; γ é a taxa de crescimento da frequência cardíaca; x = A variável carga de trabalho; ε_i é o resíduo para a carga i ; φ corresponde ao parâmetro autorregressivo de ordem 1 e ε_i é o ruído branco.

3.2.2 Análise de resíduos

Em primeira instância, os parâmetros dos modelos de regressão são obtidos considerando-se que as pressuposições sobre os resíduos são atendidas, ou seja, os resíduos são independentes e identicamente distribuídos, seguindo uma distribuição normal com média zero e variância constante. Depois disso, se avalia se não há desvios desses pressupostos. Se tais pressupostos são ignorados no processo de ajuste, podem ocorrer, respectivamente, a obtenção de estimativas viesadas e a subestimação das variâncias dos parâmetros.

Savian (2005) afirma que as representações típicas de diagnósticos informal em regressão envolvem os gráficos dos resíduos em relação às variáveis independentes e os valores preditos, na tentativa de detectar atipicidades como erros de especificação na função resposta e heterocedasticidade.

O Q-Q plot é uma forma gráfica de analisar se a pressuposição de normalidade é atendida e testa a conformidade entre a distribuição empírica e uma dada distribuição teórica.

Outra forma de se avaliar a normalidade dos resíduos é por meio de testes de hipóteses e um teste muito utilizado para testar a normalidade dos resíduos é o teste de Shapiro-Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965). A estatística de teste é dada da seguinte forma:

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

em que $\bar{x}$ é a média amostral; x_i são os valores amostrais ordenados e o valor b é calculado com base nas médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição normal.

A hipótese nula é de que os resíduos seguem uma distribuição normal. Logo, valores p acima de 0,05 indicam que os resíduos apresentam distribuição normal.

Para analisar se as variâncias dos erros são constantes, pode-se também usar uma abordagem gráfica, o gráfico dos resíduos contra os valores estimados. Se a dispersão dos resíduos for aleatória em torno da média zero, diz-se que os resíduos são homocedásticos, ou seja, as variâncias são constantes.

Um teste de hipótese para a variância residual é o teste de Breusch-Pagan (BREUSCH; PAGAN, 1979), em que a hipótese nula é que os resíduos são homocedásticos. Logo, com valor de p inferior ou igual a 0,05, a hipótese nula é rejeitada.

Para verificar se os resíduos são dependentes, ou seja, se existe correlação entre os resíduos, pode-se avaliar o gráfico dos resíduos contra o tempo ou os resíduos contra qualquer outra variável de interesse. Quando os resíduos são independentes, espera-se que os mesmos estejam aleatoriamente distribuídos em torno da média zero.

Um teste de hipótese para se avaliar a autocorrelação residual de primeira ordem é o teste de Durbin-Watson (DURBIN; WATSON, 1950). A estatística do teste é dada da seguinte maneira:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^2}$$

em que, ε_i é o erro associado a i - ésima observação. A hipótese nula para este teste é a de independência dos resíduos.

O valor DW obtido no teste está entre 0 e 4. Valores calculados próximos de 0 indicam presença de autocorrelação positiva; próximos de 2 significa que os resíduos são independentes e próximos de 4 indicam presença de autocorrelação negativa.

Segundo Morettin e Toloi (2004), na presença de correlação na forma de erros autorregressivos de primeira ordem $AR(1)$, os resíduos do modelo serão representados da seguinte maneira:

$$\varepsilon_i = \varphi \varepsilon_{i-1} + \epsilon_i$$

em que ϵ_t é o ruído branco, $E[\epsilon_t] = 0$, $E[\epsilon_t^2] = \sigma_\epsilon^2$, $E[\epsilon_t \epsilon_{t-h}] = 0$ se $h \neq 0$.

3.2.3 Seleção de modelos

A seleção do modelo mais adequado para explicar a frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho é feita com base na precisão dos ajustes e obedeceu ao desvio padrão residual e Critério de informação de Akaike (AIC).

3.2.4 Recursos Computacionais

Os parâmetros dos modelos foram estimados, inicialmente, por meio da função *nls* (mínimos quadrados não lineares) do pacote *stats* do *software* R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2012).

Quando se considerou a autocorrelação residual, foi utilizada a função *gnls* (mínimos quadrados generalizados não lineares) do pacote *nlme*.

As análises de resíduos, assim como os avaliadores de qualidade e todos os gráficos, também foram implementados no *software* R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2012), utilizando-se os pacotes *car*, *lmtest*, *qpcR*.

3.2.5 Nova proposta para identificação do PDFC

O ponto de deflexão da frequência cardíaca ocorre quando a curva de crescimento da frequência cardíaca começa a tender a um platô. Como já mencionado neste trabalho, é o momento da quebra da linearidade.

Não foram encontradas justificativas estatísticas para afirmar que o método $D_{\max}$ ou o método $D_{\max}$ modificado (substitui a função polinomial de terceiro grau pela sigmóide de Boltzmann) indiquem realmente a quebra de linearidade.

Uma proposta para este trabalho é a de se utilizar outra metodologia, que tem por base critérios já consolidado na área de estatística.

Considerando-se que, para detectar o ponto de deflexão da frequência cardíaca, está-se interessados apenas na porção superior da curva, serão tomados estes valores para domínio de dois modelos que serão ajustados.

Um modelo a ser ajustado é o modelo de regressão linear, o qual será comparado com o modelo sigmoide de Boltzmann. O método obedecerá aos seguintes passos:

passo 1: tomam-se duas observações em sequência. Primeiramente, a observação $n/2$ e a observação $n/2 + 1$ caso n (tamanho da amostra) seja par ou $(n + 1)/2$ e $(n + 1)/2 + 1$ caso n seja um número ímpar;

passo 2: ajusta o modelo de regressão linear e o modelo sigmoide de Boltzmann para estes dois pontos;

passo 3: calcula o valor de AIC para os dois modelos ajustados. O modelo que apresentar o menor valor de AIC é o melhor modelo;

passo 4: se o menor valor de AIC for o proveniente do ajuste sigmoide de Boltzmann, encerram-se os cálculos e o PDFC é a última observação. Senão, volta para o passo 1 e incrementa-se uma observação da sequência. Este processo é repetido até se encontrar o menor valor de AIC para o modelo não linear.

Obviamente para os valores iniciais, quando se tiver poucas observações, estaremos na parte central da curva da frequência cardíaca, parte esta que, sabe-se que o ajuste linear é superior ao ajuste não linear.

Ao se aproximar dos valores que marcam o início da tendência ao platô da frequência cardíaca, a diferença entre o valor do AIC para os dois modelos será muito pequena até que para um determinado ponto ocorre a quebra da linearidade, momento este que o ajuste pelo modelo não linear torna-se superior ao ajuste pelo modelo linear.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nas Figuras 4, 5 e 6 mostram-se os gráficos para análise de resíduos do modelo linear. Pela Figura 4, quadro resíduos versus valores preditos, é possível observar um comportamento não aleatório dos resíduos em torno do zero. Uma possível causa para esta forma de dispersão é que os dados não seguem um modelo linear.

Quanto à variância residual, avalia-se pela Figura 5, gráfico da raiz do módulo dos resíduos padronizados *versus* valores preditos, o qual indica um possível problema de heterocedasticidade, o qual será confirmado por meio do teste de hipótese de Breusch-Pagan, também apresentado na Tabela 2.

A pressuposição de normalidade pode ser verificada pela Figura 6, gráfico "Q-Q Plot" dos resíduos padronizados. É possível ver que a maioria dos valores fica bem próximo da reta, exceto os valores 19 e 20. Pela forma que se apresentam, indicam a possibilidade desses dados serem *outliers*.

A suposição de independência residual foi também avaliada pelo gráfico de resíduos *versus* valores preditos. Observou-se que existe dependência entre os resíduos, o que será confirmado pelo teste de Durbin-Watson.

O modelo de regressão linear ainda é muito utilizado para se avaliar a frequência cardíaca em testes progressivos, porém, os problemas encontrados na análise de resíduo do modelo de regressão linear levam a crer que há uma má especificação funcional, ou seja, que a frequência cardíaca em testes progressivos não segue um modelo linear simples. Quando os resíduos de um modelo de regressão não apresentam homogeneidade e independência, o estimador de mínimos quadrados para a variância residual é não tendencioso. Entretanto, ele será ineficiente (não terá variância mínima).

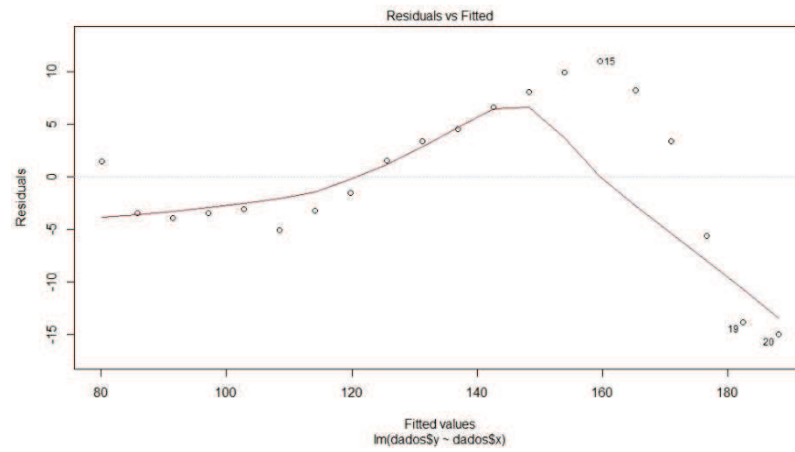


Figura 4 Análise gráfica dos resíduos *versus* valores preditos provenientes do ajuste linear

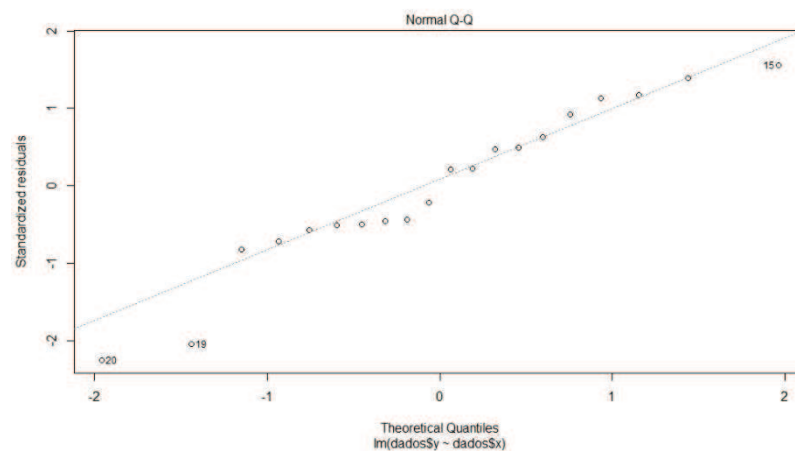


Figura 5 Análise gráfica dos resíduos provenientes do ajuste linear: Normal Q-Q

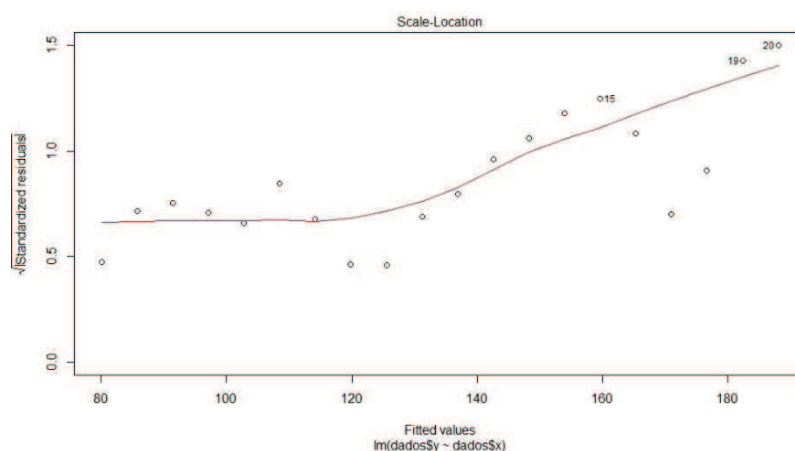


Figura 6 Análise gráfica dos resíduos padronizados provenientes do ajuste pelo modelo de regressão linear

Na Tabela 1 apresentam-se as estimativas para os parâmetros do modelo de regressão linear para o ajuste médio da frequência cardíaca dos 22 indivíduos que se submeteram ao teste progressivo.

Tabela 1 Estimativas dos parâmetros para o ajuste do modelo de regressão linear

Modelo Linear						
Parâmetros	<i>A</i>			<i>B</i>		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
	0,0564	0,0631	0,0697	73,4103	80,1000	86,9896

O modelo linear considera que o aumento da frequência cardíaca é acelerado do início até o fim da atividade física. A estimativa do parâmetro *A* indica o valor da aceleração da frequência cardíaca dos indivíduos testados com cargas crescentes de trabalho.

Já a estimativa do parâmetro *B* indica a frequência cardíaca para a carga zero de trabalho.

Tabela 2 Estimativas das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson, com os respectivos valores-p dos resíduos dos modelos sigmoide de Boltzmann, logístico e linear

Modelos	Shapiro-Wilk	Valor-p	Breusch-Pagan	Valor-p	Durbin-Watson	Valor-p
Sigmoide de Boltzmann	0,9604	0,5525	7,1913	0,066	0,7562	<0,001
Logístico	0,9617	0,5759	5,0071	0,0789	0,3755	<0,001
Linear	0,9488	0,3492	9,8922	0,0016	0,2467	<0,001

Além das evidências gráficas, os testes de hipótese mostraram que o modelo de regressão linear não atendeu aos pressupostos de homogeneidade da variância e independência residual, deixando claro que a frequência cardíaca não mantém uma relação linear com as cargas crescentes de trabalho.

Para o modelo sigmoide de Boltzmann e logístico houve quebra apenas do pressuposto de independência residual. Portanto será incorporada aos resíduos dos modelos sigmoide de Boltzmann e logístico uma estrutura autorregressiva de primeira ordem AR(1).

Apesar de muito próximos dos 0,05, não se pode considerar que as variâncias residuais para os modelos sigmoide de Boltzmann e logístico sejam heterogêneas.

Na Tabela 3 apresentam-se as estimativas para os parâmetros do modelo sigmoide de Boltzmann com erros independentes e autorregressivos de primeira ordem AR(1) para o ajuste médio da frequência cardíaca dos 22 indivíduos que se submeteram ao teste progressivo.

A estimativa para o parâmetro AI , quanto ao ajuste médio dos dados, representa a frequência cardíaca do indivíduo no período de repouso e de início de treinamento, quando a carga de trabalho ainda é muito baixa.

Tabela 3 Estimativas dos parâmetros para o ajuste do modelo sigmoide de Boltzmann com erros independentes e autorregressivos de primeira ordem

Parâmetros	Modelo					
	Sigmoide de Boltzmann			Sigmoide de Boltzmann AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
AI	69,4443	76,4199	83,3954	66,4352	75,7161	84,9971
AS	172,6234	176,8538	181,0842	170,7057	176,8119	182,9179
PI	666,6815	713,1841	759,6866	639,1017	709,4589	779,8161
Inc	209,8102	258,6451	307,4799	195,6984	263,1955	330,6925
Φ					0,5993	

Quando se considera o modelo sigmoide de Boltzmann AR(1), o valor da *AI* é menor que para este mesmo modelo sem o parâmetro AR(1), ficando ainda mais distante da frequência cardíaca avaliada na carga zero.

A diferença encontrada para a estimativa do parâmetro *AS*, para os modelos sigmoide de Boltzmann com e sem o parâmetro AR(1), é insignificante do ponto de vista prático. O valor do parâmetro *AS* estimou exatos 90% da frequência cardíaca máxima para a média dos indivíduos.

Os indivíduos testados apresentam média de idade de 24,4 anos. Logo, a frequência cardíaca máxima é de 195,6 bpm e, portanto, 90% da frequência cardíaca máximo corresponde a 176,04 bpm em média.

A coincidência dos valores foi grande e serve para reforçar a interpretação do parâmetro *AS* na descrição da frequência cardíaca em indivíduos testados com cargas crescentes de trabalho.

O ponto de inflexão da frequência cardíaca, *PI*, é a carga na qual é atingida exatamente a metade da frequência cardíaca máxima estimada pela curva. Considere a demonstração abaixo:

$$Y = AI + \frac{(AS - AI)}{1 + e^{\left(\frac{PI - x}{Inc}\right)}}$$

Substituindo o valor PI no lugar da carga, tem-se

$$\begin{aligned} Y &= AI + \frac{(AS - AI)}{1 + e^{\left(\frac{PI - PI}{Inc}\right)}} = AI + \frac{(AS - AI)}{1 + e^0} = AI + \frac{(AS - AI)}{2} \\ &= \frac{2AI}{2} + \frac{(AS - AI)}{2} = \frac{2AI + AS - AI}{2} = \frac{AI + AS}{2} \end{aligned}$$

Em diversos trabalhos (COSTA; LIMA; OLIVEIRA, 2007), a estimativa para o ponto de inflexão da frequência cardíaca ajustada pelo modelo sigmoide de Boltzmann tem sido superior ao primeiro limiar de lactato $[LL_1]$.

Quando se considera o ajuste sigmoide de Boltzmann com o parâmetro $AR(1)$, a estimativa para o PI , é menor que a estimativa para este mesmo modelo sem o parâmetro $AR(1)$. Na Figura 7 mostra-se o ponto de inflexão para o modelo considerando $AR(1)$ e sem considerar o $AR(1)$.

O PI é o indicativo de aceleração máxima da frequência cardíaca. A Figura 7 ajuda a identificar a mudança de concavidade. A porção anterior ao PI tem concavidade voltada para cima, enquanto, após o PI a concavidade é voltada para baixo.

O parâmetro Inc corresponde à inclinação da curva da frequência cardíaca no PI .

Quando se ajustou o modelo de regressão linear simples à média da frequência cardíaca dos indivíduos, encontraram-se diversos problemas. Todavia, Lima (1997) apresentou quatro indivíduos para os quais o ajuste linear foi superior ao ajuste pelo modelo não linear sigmoide de Boltzmann.

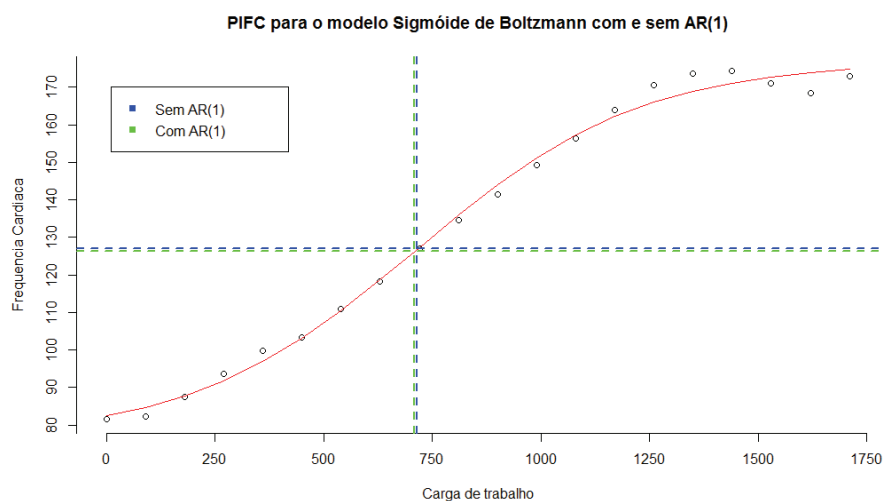


Figura 7 Estimativas do ponto de inflexão para o ajuste do modelo sigmoide de Boltzmann com erros independentes e autorregressivos de primeira ordem

Outros trabalhos também apontam uma pequena porcentagem para os quais o ajuste sigmoide não foi eficiente. Em Costa, Lima e Oliveira (2007), o ajuste pelo modelo sigmoide de Boltzmann foi superior, em 80% dos casos, se aproximando muito de Lima (1997), que obteve ajuste superior em 81,1% dos casos e também Oliveira (2004), com 74,4%. Portanto o modelo não deve ser descartado.

O único modelo não linear ajustado até agora para a frequência cardíaca tem sido o modelo sigmoide de Boltzmann. Venegas, Harris e Simon (1998) apresentam outro modelo não linear, que não é denominado em seu trabalho, para descrever a pressão pulmonar. Porém, após poucos cálculos algébricos, percebe-se que é o mesmo modelo sigmoide de Boltzmann com outra parametrização.

Neste trabalho, o modelo logístico obteve bons resultados quando comparado com o modelo linear e com o modelo sigmoide de Boltzmann. A Tabela 4 apresenta as estimativas para os parâmetros do modelo logístico com e sem o parâmetro AR(1) e os intervalos de confiança para os parâmetros ajustados aos dados da frequência cardíaca dos indivíduos.

Tabela 4 Estimativas dos parâmetros para o ajuste do modelo logístico, com erros independentes e autorregressivos de primeira ordem

Parâmetros	Modelo					
	Logístico			Logístico AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
Alfa	184,5047	198,6094	222,5881	180,8043	198,6092	216,4143
Beta	0,4045	0,5342	0,6673	0,4120	0,5342	0,6564
Gama	0,0012	0,0016	0,0019	0,0012	0,0016	0,0019
Φ					0,0003	

Mesmo havendo a necessidade de se incluir o parâmetro autorregressivo, sua influência nas estimativas dos parâmetros do modelo foi muito pequena.

O parâmetro alfa no modelo logístico está associado ao valor assintótico da frequência cardíaca, equivalente a AS no modelo sigmoide de Boltzmann. O valor do parâmetro alfa se aproxima da $FC_{\text{máx}}$ como visto anteriormente, que foi de 195,5 bpm.

Já o parâmetro beta não possui interpretação prática, portanto, serve apenas como um parâmetro para a localização da curva, enquanto que o parâmetro gama refere-se à taxa de crescimento da frequência cardíaca em toda a curva, diferente do parâmetro Inc do modelo sigmoide de Boltzmann, que indica a inclinação da curva apenas no PI .

O ponto de inflexão para o modelo Logístico é bem inferior à estimativa para o ponto de inflexão calculado pelo modelo sigmoide de Boltzmann.

Obtiveram-se os mesmos valores para o ponto de inflexão do modelo Logístico com e sem o parâmetro autorregressivo de primeira ordem. Na Figura 8 mostra-se o ponto de inflexão para o modelo, considerando AR(1) e sem considerar o AR(1)

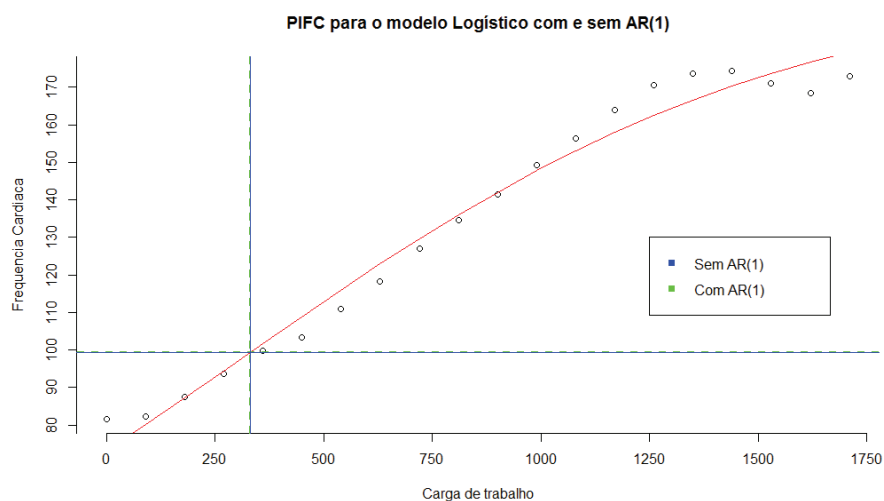


Figura 8 Estimativas do ponto de inflexão para o ajuste do modelo logístico com erros independentes e autorregressivos de primeira ordem

Costa, Lima e Oliveira (2007), entre outros, obtiveram o primeiro limiar de lactato bem abaixo do ponto de inflexão da frequência obtido pelo ajuste sigmóide de Boltzmann.

Apesar de não possuir tantos parâmetros interpretáveis, como o modelo sigmoide de Boltzmann, o modelo logístico é mais parcimonioso e, mesmo sendo também um modelo simétrico, como ele não possui nenhum parâmetro para indicar frequência cardíaca na carga zero, seu ponto de inflexão acaba se tornando mais baixo que o sigmoide de Boltzmann, o que o torna uma opção interessante para se comparar com ele.

4.1 Comparação entre os ajustes individuais

Na Tabela 5 apresenta-se o valor do critério de informação de Akaike (AIC) para os ajustes linear, logístico com e sem AR(1) e sigmoide de Boltzmann com e sem AR(1).

Tabela 5 Valores de AIC para os ajustes feitos pelos modelos logístico com e sem AR(1) e sigmoide de Boltzmann, com e sem AR(1)

Indivíduo	Logístico		sigmoide de Boltzmann	
	com AR(1)	sem AR(1)	com AR(1)	sem AR(1)
1	NC*	NC	96,7	95
2	72,54	70,54	68,47	70,09
3	102,54	100,54	97,92	96,81
4	86,29	84,29	71,39	76,4
5	101,37	99,37	84,72	87,77
6	NC	NC	102,67	101,02
7	72,41	70,41	NC	63,79
8	103,18	101,18	91,19	89,24
9	84,2	82,2	84,76	83,21
10	83,05	81,05	74,17	72,76
11	107,82	105,82	88,57	88,19
12	79,19	77,19	NC	NC
13	NC	NC	86,15	85,21
14	100,24	98,24	95,6	94,83
15	74,8	72,8	70,73	74,77
16	106,92	104,92	102,9	101,05
17	91	89	78,58	78,49
18	NC	NC	NC	NC
19	74,37	72,37	75,69	73,78
20	98,56	96,56	93,7	94,84
21	79,08	77,08	71,62	73,83
22	88,09	86,09	79,83	79,23

* Não convergiu

Os valores marcados em vermelho representam o menor valor de AIC para o indivíduo. Para os 22 indivíduos avaliados, o modelo sigmoide de Boltzmann foi superior para 18 indivíduos, sendo 6 indivíduos melhor ajustados através do modelo sigmoide de Boltzmann com AR(1) e 12 indivíduos com ajuste melhor para o modelo sigmoide de Boltzmann sem o parâmetro AR(1).

Dos outros quatro indivíduos, três tiveram melhores ajustes por meio do modelo logístico, sendo os três sem o parâmetro AR(1) e somente um indivíduo teve melhor ajuste através do modelo linear.

Estes resultados estão de acordo com Lima (1997), visto que o modelo sigmoide de Boltzmann foi superior em 18 dos 22 casos. Todavia, Lima (1997) não avaliou o modelo logístico, ficando os outros quatro indivíduos todos melhor ajustados pelo modelo linear.

4.2 Identificação do PDFC

Na Tabela 6 apresenta-se a sequência com os valores médios da frequência cardíaca dos 22 indivíduos e, na Figura 9, mostra-se qual ponto foi considerado como ponto de deflexão, utilizando-se da nova metodologia proposta para a identificação do PDFC.

Tabela 6 Valores de AIC para a sequência de ajustes feita pelos modelos linear e sigmoide de Boltzmann

n° de obs	AIC	
	Linear	Sigmoide
5	2,33	3,91
6	3,31	2,27

Como a média das observações dos 22 indivíduos tem tamanho 20, a primeira iteração foi ajustado com as observações 10 e 11. A iteração seguinte foi feita com as observações 10, 11 e 12, até parar na sexta iteração, que foi feita com as observações 10, 11, 12, 13, 14 e 15. Portanto o ponto de deflexão é a observação de número 15, dos dados mostrados na Figura 9.

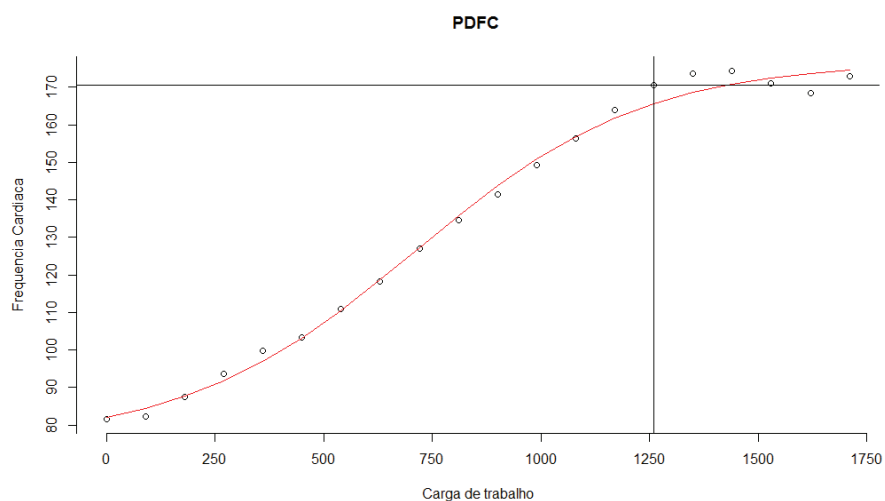


Figura 9 Estimativa do ponto de deflexão da frequência cardíaca

O ponto de deflexão para a frequência cardíaca avaliada por este método é dado na carga $1260 Kpm^{-1}$, enquanto quando ele foi calculado por meio da metodologia de Kara et al. (1996) foi encontrado na carga $1170 Kpm^{-1}$ e, por meio do método de Costa, Lima e Oliveira (2007), na carga $1080 Kpm^{-1}$, para os dados que serão utilizados na metodologia.

Na Figura 10 mostram-se os pontos de deflexão e seus respectivos métodos:

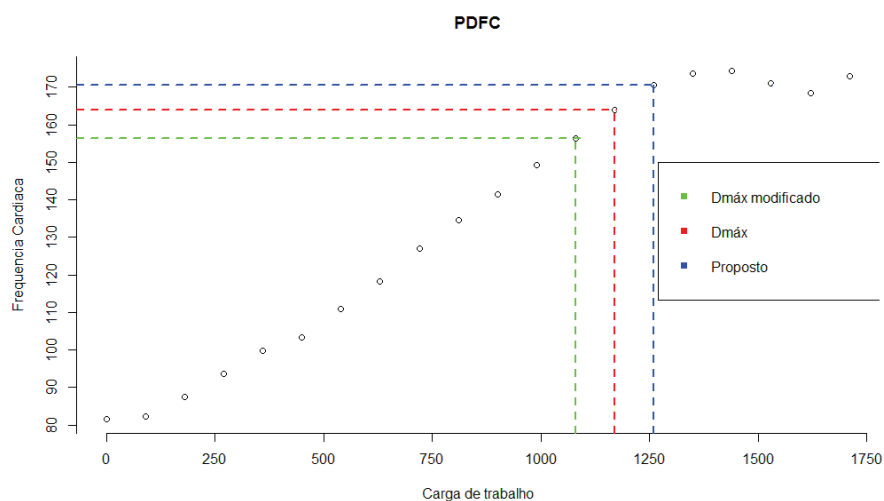


Figura 10 Estimativa do ponto de deflexão, obtido por meio dos três métodos

Seguindo o protocolo de que o primeiro limiar de lactato é identificado pelo menor equivalente de $[La]/W$, e utilizando os dados de Lima (1997), é possível verificar que o LL_1 ocorreu próximo à carga $720 \text{ kpm} \cdot \text{min}^{-1}$, o qual se associa fortemente com o PI do modelo sigmoide de Boltzmann ajustado para a média da frequência cardíaca dos indivíduos.

Já o ponto de inflexão obtido através do ajuste do modelo Logístico aos dados médios da frequência cardíaca ficou muito abaixo do LL_1 .

O segundo limiar de lactato foi determinado adicionando o valor fixo de $1,5 \text{ mmol/l}$ ao menor equivalente. Como, para o menor equivalente, a $[La]$ foi de, aproximadamente, $2,5 \text{ mmol/l}$, adicionando $1,5 \text{ mmol/l}$ teremos 4 mmol/l , que é o mesmo valor quando se adota o protocolo fixo para se determinar o LL_2 , e este foi encontrado próximo a carga de $1170 \text{ kpm} \cdot \text{min}^{-1}$, se aproximando mais do ponto de deflexão obtido pelo método Dmáx.

Mesmo que em alguns trabalhos tenha se afirmando que os limiares de lactato foram encontrados em cargas distintas à dos pontos de inflexão e

deflexão, neste trabalho encontrou-se uma forte associação entre estes pontos.

4.3 Seleção dos modelos ajustados

Por meio dos avaliadores de qualidade de ajuste apresentados na Tabela 7 observa-se o modelo sigmoide de Boltzmann com estrutura de erros autorregressivos de ordem 1 apresentou um melhor ajuste aos dados, devido aos menores valores do desvio padrão (DPR) e do critério de informação de Akaike (AIC).

Tabela 7 Estimativas dos critérios de seleção: desvio padrão residual (DPR) e critério de informação de Akaike (AIC), para os modelos ajustados, na descrição da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho

Modelo	Critérios de Seleção	
	DPR	AIC
Sigmoide de Boltzmann	2,776	103,1409
Logístico	5,17	127,2257
Sigmoide de Boltzmann AR(1)	2,7295	96,0038
Logístico AR(1)	5,1704	129,2257

Nas Figuras 11 a 14 observa-se a representação gráfica do ajuste dos modelos sigmoide de Boltzmann e logístico, com intervalos de confiança de 95%.

Nota-se que o modelo sigmoide de Boltzmann com e sem o parâmetro autorregressivo de ordem 1 consegue descrever melhor os dados, contemplando desde a parte inferior até a parte superior dos dados.

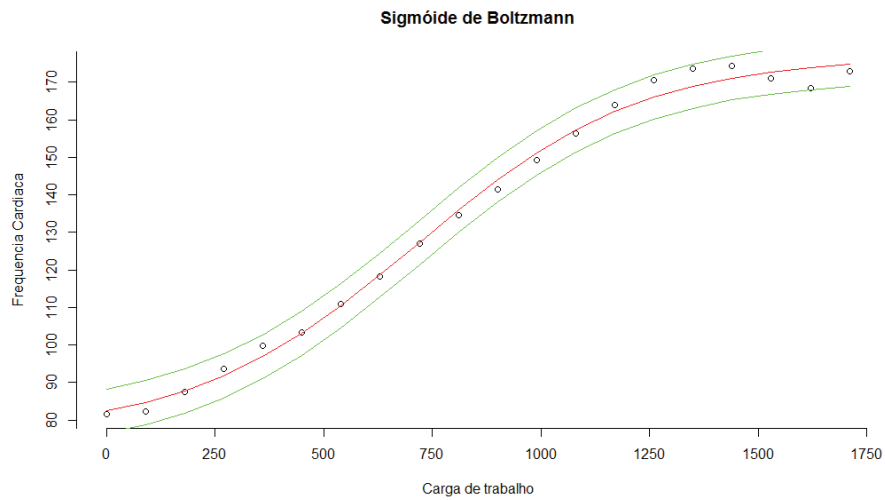


Figura 11 Ajuste sigmoide de Boltzmann para a frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho com erros independentes e intervalo de confiança de 95%

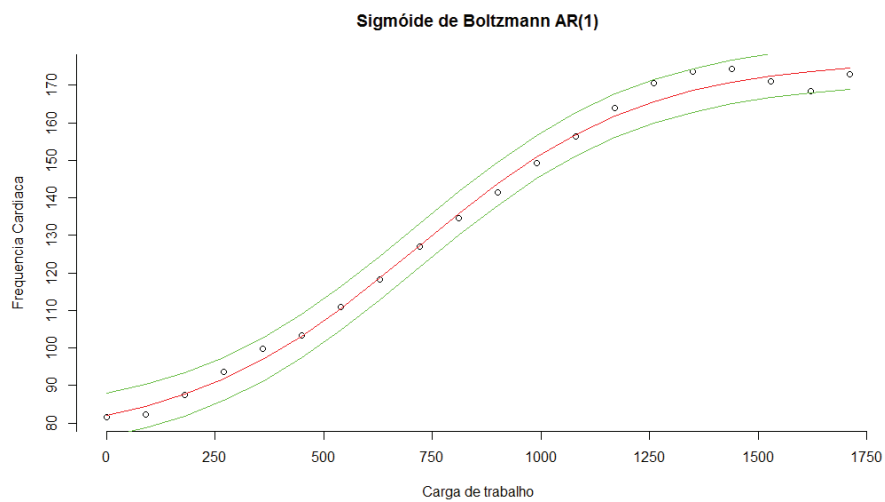


Figura 12 Ajuste sigmoide de Boltzmann para a frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho com erros autorregressivos de ordem 1 e intervalo de confiança de 95%

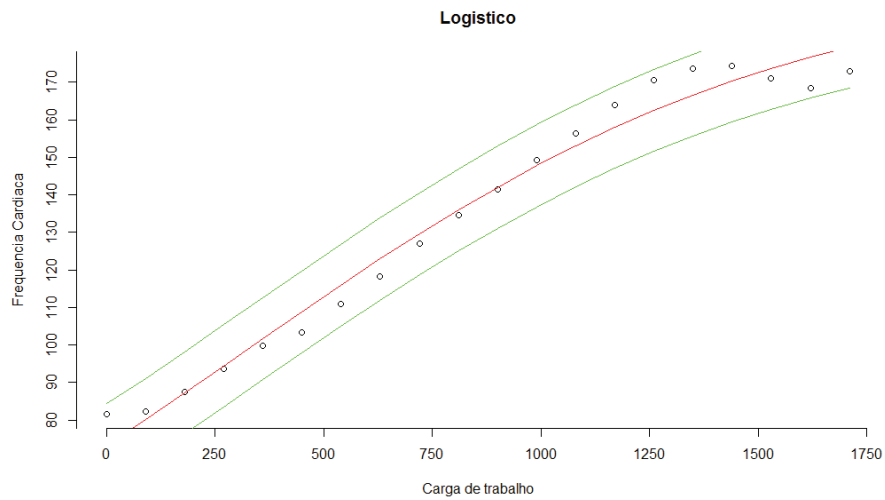


Figura 13 Ajuste Logístico para a frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho com erros independentes e intervalos de confiança de 95%

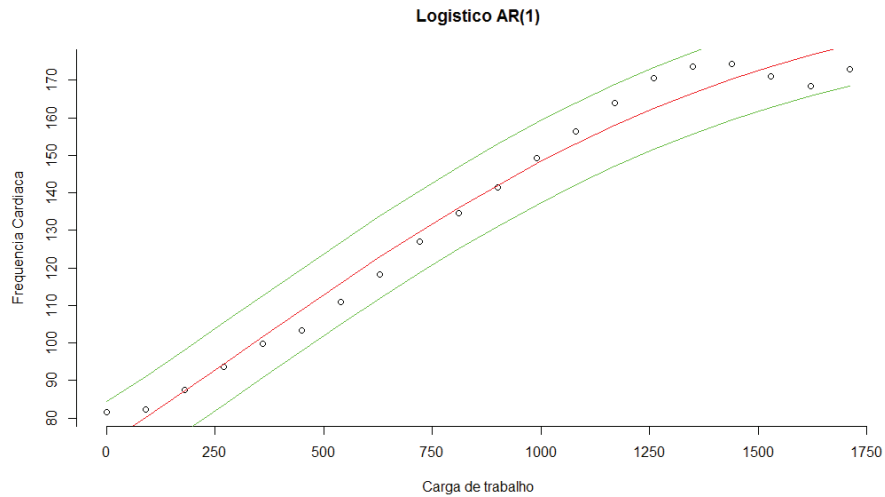


Figura 14 Ajuste Logístico para a frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho com erros autorregressivos de ordem 1 e intervalo de confiança de 95%

4 CONCLUSÃO

Reforça-se o fato de que a frequência cardíaca mantém uma relação não linear em cargas crescentes de trabalho.

Quando se considera o ajuste para a média dos dados da frequência cardíaca, o ajuste pelo modelo sigmoide de Boltzmann com parâmetro autorregressivo de ordem 1 é superior aos demais modelos e não fere nenhum dos pressupostos sobre o resíduo. Portanto, a estimativa para os seus parâmetros é não viesadas e com variância mínima e, por consequência, toda inferência feita através dele estará correta.

O modelo logístico é uma alternativa para se detectar o ponto de inflexão quando o ajuste sigmoide de Boltzmann não for possível.

Dos 22 ajustes individuais, Lima (1997) estimou que o ajuste sigmoide de Boltzmann foi superior para 18 indivíduos e o modelo linear, para 4 indivíduos.

Quando se inclui o modelo logístico, a proporção para melhor ajuste ainda continua com o modelo sigmoide de Boltzmann com melhor ajuste para 18 indivíduos. Porém dos 4 que antes eram melhor ajustados pelo modelo linear, neste trabalho, 3 passaram a ser melhor ajustados pelo modelo logístico, ficando apenas 1 melhor ajuste para o modelo linear.

Os valores encontrados para o primeiro e segundo limiar de lactato se associam, respectivamente ao ponto de inflexão e o ponto de deflexão da curva da frequência cardíaca ajustada pelo modelo sigmoide de Boltzmann.

A proposta para determinação do ponto de deflexão da frequência cardíaca é interessante, porém, necessita ser simulada diversas vezes, e o ponto de deflexão encontrado por ela avaliado visualmente por um profissional da área.

Quando os indivíduos não atingem o platô da frequência cardíaca, o modelo sigmoide de Boltzmann não é eficiente, e nestes casos, o modelo logístico se torna mais eficiente.

Os pontos de transição da curva da frequência cardíaca e os limiares de lactato, segundo dados encontrados na literatura, são fortemente associados ao tipo de protocolo que será obtido, aos dados e ao tipo de treinamento prévio do indivíduo.

REFERÊNCIAS

- ABAD, C. C. C. et al. O segundo platô da variabilidade da frequência cardíaca indica o segundo limiar de transição fisiológica? **Efdeportes**, Buenos Aires, n. 114, 2007. Disponível em: <<http://www.efdeportes.com/efd114/variabilidade-da-frequencia-cardiaca.htm>>. Acesso em: 10 jan. 2013.
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.
- AMORIM, P. R. S. Fisiologia do exercício: considerações sobre o controle do treinamento aeróbio. **Revista Mineira de Educação Física**, Viçosa, MG, v. 10, n. 1, p. 51-63, 2002.
- ÄSTRAND, P.; RODAHL, K. **Textbook of work physiology**. 2. ed. New York, McGraw-Hill, 1977
- BREUSCH, T.; PAGAN, A. Simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. **Econometrica**, New York, v. 47, p. 1287-1294, 1979.
- CAMBRI, L. T. et al. Frequência cardíaca e a identificação dos pontos de transição metabólica em esteira rolante. **Revista da Educação Física**, Maringá, v. 17, n. 2, p. 131-137, jul./dez. 2006.
- CHRISTOFORO, A. L.; MARCONATO, S. A. S.; OLIVEIRA, R. Z. G. de. Otimização numérica da área das seções transversais dos elementos componentes de estruturas planas do tipo treliça. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 25, n. 3, p. 57-69, 2007.
- CONCONI, F. et al. Determination of the anaerobic threshold by a noninvasive field test in runners. **Journal of Applied Physiology: Respiratory Environment Exercise Physiology**, v.52, p.869-73, 1982.
- COSTA, V. P.; LIMA, J. R. P.; OLIVEIRA, F. R. de. Identificação de limiares metabólicos em curvas de frequência cardíaca ajustadas. **Revista Brasileira de Educação Física e Esporte**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 219-227, set. 2007.
- DAVIES, C. T. M. Limitations to the prediction of maximum oxygen intake from cardiac frequency measurements. **Journal of Applied Physiology**, Bethesda, v. 5, n. 24, p. 700-706, 1968.
- DIAS, A. et al. Ajuste de curvas de crescimento na descrição da exportação de fósforo de frutos de mangueira. In: ESCOLA DE MODELOS DE

REGRESSÃO, 1., 2011, Fortaleza. **Resumos...** Fortaleza: UFC, 2011. p. 226-227.

DURBIN, J.; WATSON, G.S. Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression: I. **Biometrika**, Cambridge, v.37 , p.409-428, 1950.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3rd ed. New York: J. Wiley, 1998. 706 p.

FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 505 p.

GALLANT, A. R. **Nonlinear statistical models**. New York: Wiley, 1989. 624 p.

HOFFMANN, R.; VIEIRA, S. **Análise de regressão: uma introdução à econometria**. 3. ed. São Paulo: Hucitec, 1998. 379 p.

JANSSEN, P. G. J. M. **Lactate threshold training**. Champaign: Human Kinetics, 2001. 302 p.

KARA, M. et al. Determination of the heart rate deflection point by the Dmax method. **Journal of Sports Medicine and Physical Fitness**, Torino, v. 36, n. 1, p. 31-34, 1996.

LIMA, J. R. P. **Frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho: ajuste sigmóide, ponto de inflexão e limiar de variabilidade da frequência cardíaca**. 1997. 129 f. Tese (Doutorado em Educação Física) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

MAZZINI, A. R. de A. et al. Análise da curva de crescimento de machos Hereford. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 27, n. 5, p. 1105-1112, set./out. 2003.

_____. Curva de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autoregressivos. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 422-427, mar./abr. 2005.

MENDES, P. N. et al. Modelo logístico difásico no estudo do crescimento de fêmeas da raça Hereford. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 38, n. 7, p. 1984-1990, out. 2008.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais**. São Paulo. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2004. 538 p.

OLIVEIRA, F. R. de. **Prediccion de los umbrales de lactato y ajustes de frecuencia cardiaca em el test de Léger-Boucher**. 2004. 229 p. Tese (Doutorado em Atividade Física e Esporte) - Universidad del Pais Vasco, San Sebastian, 2004.

PAULA, G. A. **Modelos de regressão com apoio computacional**. São Paulo: IME-USP, 2004. 245 p.

PEREIRA, J. M.; MUNIZ, J. A.; SILVA, C. A. Nonlinear models to predict nitrogen mineralization in an oxisoil. **Scientia Agricola**, Piracicaba, v. 62, n. 4, p. 395-400, 2005.

POWERS, S. K.; HOWLEY, E. T. **Fisiologia do exercício: teoria e aplicação ao condicionamento e ao desempenho**. 5. ed. Barueri: Manole, 2005. 576 p.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2012. Disponível em: <<https://www.R-project.org>>. Acesso em: 21 nov. 2012.

RATKOWSKI, D. A. **Nonlinear regression modeling: a unified practical approach**. New York: M. Dekker, 1983. 153 p.

SAVIAN, T. V. **Estimação dos parâmetros no modelo para degradabilidade in situ de mertens e loftén**. 2005. 55 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2005.

SEBER, G. A. F. **Linear regression analysis**. New York: Wiley, 1977. 465 p.

SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New Jersey: J. Wiley, 1989. 752 p.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality. **Biometrika**, Cambridge, v. 52, n. 3/4, p. 591-611, 1965.

VENEGAS, J. G.; HARRIS, R. S.; SIMON, B. A. A comprehensive equation for the pulmonary pressure-volume curve. **Journal of Applied Physiology**, Bethesda, v. 84, n. 1, p. 389-395, 1998.

WAHLUND H. (1948). Determination of physical capacity. *Acta Physiol. Scand.* 215(suppl.):1-78.

WEISBERG, S. **Applied linear regression**. 3rd ed. Hoboken: J. Wiley, 2005. 352 p.

WYNDHAM, C. H. Submaximal testes for estimating maximum oxygen intake. **Canadian Medical Association Journal**, Ottawa, v. 96, p. 36-45, 1967.